Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра диференціальних рівнянь
і прикладної математики

Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В.

КУРС ЛЕКЦІЙ
з навчальної дисципліни (спецкурсу)

"Числові методи розв'язування крайових задач"

Івано-Франківськ
2008

Лекція 1.
Крайові задачі для рівнянь з частинними похідними.

План.

1. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.
2. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

1. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Нагадаємо деякі означення і твердження з теорії рівнянь з частинними похідними. Розглянемо рівняння з частинними похідними другого порядку для функції двох змінних

$$F\left(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}\right) = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Функцію $u(x, y)$, яка перетворює рівняння (1) у тотожність у деякій області $G \subset \mathbf{R}^2$, називають ***розв'язком*** цього рівняння в області G.

Рівняння (1) називають ***лінійним***, якщо функція F лінійно залежить від шуканої функції u та її похідних, тобто якщо це рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ &+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y). \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Вираз

$$D(x, y) \equiv A(x, y) \cdot C(x, y) - B^2(x, y)$$

називають ***дискримінантом*** рівняння (2).

Залежно від знаку $D(x, y)$ виділяють такі типи рівнянь:

$D(x, y) > 0$ – ***еліптичний*** тип,

$D(x, y) = 0$ – ***параболічний*** тип,

$D(x, y) < 0$ – ***гіперболічний*** тип,

$D(x, y)$ не зберігає свій знак – ***змішаний*** тип.

Наведемо приклади рівнянь перших трьох типів:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$ – рівняння Пуассона. Якщо $f(x,y)\equiv 0$, то це рівняння називають рівнянням Лапласа;

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$ – рівняння теплопровідності;

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$ – хвильове рівняння.

Для визначення конкретного розв'язку із сім'ї всіх розв'язків рівняння з частинними похідними доводиться накладати певні додаткові умови. У найпростішому випадку ними є початкові та крайові умови.

Задачу, яка полягає у відшуканні розв'язку рівняння (2), що задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} u(x,y_0)=\varphi(x), \\ u'_y(x,y_0)=\varphi_1(x), \end{cases} \qquad (3)$$

називають ***задачею Коші***.

У загальному випадку початкові умови можуть задаватися не на прямій $y=y_0$, а на довільній гладкій кривій γ, яка описується рівнянням $\Phi(x,y)=0$. Такі умови записуватимемо у вигляді

$$\begin{cases} u(x,y)\big|_{\gamma}=\varphi(x,y), \\ u'_y(x,y)\big|_{\gamma}=\varphi_1(x,y). \end{cases} \qquad (4)$$

Задача Коші переважно ставиться для рівнянь (2) параболічного та гіперболічного типів, причому в останньому випадку лінія γ не повинна бути характеристикою, тобто інтегральною кривою характеристичного рівняння

$$A(x,y)\,\mathrm{d}\,y^2-2B(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+C(x,y)\,\mathrm{d}\,x^2=0. \qquad (5)$$

В окремих випадках, окрім початкових умов, необхідно задавати ще й додаткові крайові умови. Наприклад, для знаходження розв'язку рівняння (2) у півсмузі

$$K=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ 0\le y<+\infty\}$$

можуть задаватися початкові умови

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \\ u'_y(x,0)=\varphi_1(x) \end{cases} \qquad (a\le x\le b) \qquad (6)$$

та крайові умови

$$\begin{cases}\alpha_0 u(a,y)+\alpha_1 u'_x(a,y)=\psi(y),\\ \beta_0 u(b,y)+\beta_1 u'_x(b,y)=\psi_1(y),\end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

де

$$|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0,\ \ |\beta_0|+|\beta_1|\neq 0,\quad 0\le y<+\infty .$$

Задачу, в якій поєднуються обидва типи додаткових умов, називають ***змішаною*** задачею. У загальному випадку початкові умови можна трактувати як частковий випадок крайових умов. Для необмеженої області іноді накладають додаткові обмеження на функцію $u(x,y)$ на нескінченності.

Оскільки, вивчаючи фізичні проблеми, початкові та крайові умови встановлюють, як правило, емпірично, то природно вимагати, щоб невеликі похибки в цих умовах не приводили до великих відхилень відповідних розв’язків. Якщо ця вимога виконана, то кажуть, що задача поставлена коректно.

Саме через некоректність для рівнянь еліптичного типу не розглядають задачу Коші. Наприклад, для рівняння Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,, \qquad \textbf{(8)}$$

де

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ -$$

оператор Лапласа, при $y>0$ шукатимемо розв’язок $u(x,y)$, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases}u(x,0)=0,\\ u'_y(x,0)=\dfrac{1}{n}\cos nx,\quad n\in \mathbf{N}.\end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

Легко перевірити, що

$$u(x,y)=\frac{\cos nx\cdot \operatorname{sh} ny}{n^2}.$$

Отже,

$$u(0,y)=\frac{1}{n^2}\operatorname{sh} ny\to\infty$$

при $n \to \infty$, $y > 0$, не зважаючи на те, що для великих n початкові умови можна зробити як завгодно малими. Оскільки нульовим початковим умовам

$$u(x,0) = 0\,,\ u'_y(x,0) = 0$$

відповідає розв'язок $u_0(x,y) \equiv 0$, то навіть малим змінам початкових умов відповідатимуть нескінченно великі розбіжності розв'язків.

2. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Розглянемо рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0\,, \qquad \textbf{(10)}$$

де $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, та першу крайову задачу для нього, яка полягає у відшуканні розв'язку $u(x,y)$, який в обмеженій області $G \subset \mathbf{R}^2$ задовольняє рівняння (10), а на межі цієї області Γ співпадає із заданою неперервною функцією $\varphi(x,y)$. Таку задачу для рівняння (10) називають ***задачею Діріхле***.

Нагадаємо, що функцію $u(x,y)$, яка має неперервні частинні похідні другого порядку в області G і задовольняє рівняння Лапласа всередині цієї області, називають ***гармонійною***.

Для таких функцій справджується ***принцип максимуму***: *гармонійна в обмеженій області G функція, неперервна у замкненій області $\overline{G} = G \cup \Gamma$, не може набувати всередині цієї області значень, більших, ніж максимум її значень на межі Γ, і менших, ніж мінімум її значень на Γ.*

Справджується також сильніше твердження: *гармонійна в обмеженій і замкненій області функція, відмінна від сталої, не набуває всередині цієї області свого найбільшого та найменшого значень.*

З принципу максимуму для гармонійних функцій випливають два важливі наслідки.

Наслідок 1 (єдиність розв'язку задачі Діріхле). *Задача Діріхле для замкненої і обмеженої області має не більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$ – дві гармонійні в області G функції, які співпадають на межі Γ. Тоді гармонійна функція

$$u(x,y) \equiv u_1(x,y) - u_2(x,y)$$

на межі Γ перетворюється в нуль. З принципу максимуму випливає, що $u(x,y)\equiv 0$, тобто

$$u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$$

всередині G. ►

Зауваження. З наслідку 1 не випливає, що задача Діріхле в області G обов'язково має розв'язок. Але якщо область G опукла, а межа кусково гладка, то розв'язок задачі Діріхле з неперервними даними на межі Γ існує та єдиний (***теорема Неймана***).

Наслідок 2 (коректність задачі Діріхле). *Розв'язок задачі Діріхле для замкненої і обмеженої області неперервно залежить від крайових умов.*

Доведення. Нехай $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$ – два розв'язки задачі Діріхле, які на межі Γ співпадають з функціями $\varphi_1(x,y)$ та $\varphi_2(x,y)$ відповідно. Припустимо, що на Γ виконується нерівність

$$|\varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y)|<\varepsilon,$$

де ε – як завгодно мале додатне число. Тоді гармонійна функція

$$u(x,y)\equiv u_1(x,y)-u_2(x,y)$$

на межі Γ набуватиме значення

$$\varphi(x,y)\equiv \varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y),$$

причому $|\varphi(x,y)|<\varepsilon$. З принципу максимуму отримуємо, що і

$$|u_1(x,y)-u_2(x,y)|<\varepsilon,$$

тобто задача Діріхле є коректною. ►

Лекція 2.

Числові методи розв'язування рівняння Лапласа.

План.

1. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.
2. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.
3. Ітераційний процес Лібмана.

1. Різницеві схеми для рівняння Лапласа. Розглянемо рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

і замінимо в ньому наближено

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}.$$

Підставляючи у рівняння (1), одержуємо

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\big(u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)\big). \tag{2}$$

Для оцінки точності такого наближення скористаємось формулою Тейлора для функції двох змінних:

$$\begin{gathered} f(x+h,y+k)=f(x,y)+\mathrm{d}\,f(x,y)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x,y)+\ldots+ \\ +\frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x,y)+\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(x+\theta h,y+\theta k), \qquad 0<\theta<1. \end{gathered} \tag{3}$$

Розглянемо дві основні схеми.

Перша основна схема. Виберемо точки

$$A(x,y),\ B(x+h,y),\ C(x-h,y),\ D(x,y+h),\ E(x,y-h)$$

і обчислимо значення функції $u(x,y)$ у точках B, C, D, E за формулою (3), поклавши в ній $n=3$. При цьому вважатимемо, що розв'язок $u(x,y)$ – чотири рази неперервно диференційовна функцією. Тоді

$$u(x+h,y)=u(x,y)+h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(h^4),$$

$$u(x-h,y)=u(x,y)-h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(h^4),$$

$$u(x,y+h)=u(x,y)+h\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+O(h^4),$$

$$u(x,y-h)=u(x,y)-h\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+O(h^4).$$

Додавши всі ці рівності, одержуємо

$$u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)=$$
$$=4u(x,y)+h^2\Delta u+O(h^4),$$

звідки

$$\Delta u=\frac{1}{h^2}\big(u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+ \\ +u(x,y-h)-4u(x,y)\big)+O(h^2). \qquad (4)$$

Відкинувши в (4) $O(h^2)$ і врахувавши (1), приходимо до першої основної схеми (2), порядок апроксимації якої згідно з (4) дорівнює двом.

Друга основна схема. Виберемо точки

$$A(x,y),\ B(x+h,y+h),\ C(x-h,y+h),$$
$$D(x+h,y-h),\ E(x-h,y-h)$$

і при тих самих припущеннях обчислимо значення функції $u(x,y)$ у точках *B*, *C*, *D*, *E*. Будемо мати:

$$u(x+h,y+h)=u(x,y)+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}h^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+O(h^4),$$

$$u(x-h,y+h)=u(x,y)+h\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}h^3\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+O(h^4),$$

$$u(x+h,y-h)=u(x,y)+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}h^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+O(h^4),$$

$$u(x-h,y-h)=u(x,y)+h\left(-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}h^3\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+O(h^4).$$

Додавши всі ці рівності, одержуємо

$$u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x+h,y-h)+u(x-h,y-h)=$$
$$=4u(x,y)+2h^2\Delta u+O(h^4),$$

звідки

$$\Delta u=\frac{1}{2h^2}\big(u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x+h,y-h)+$$
$$+u(x-h,y-h)-4u(x,y)\big)+O(h^2). \qquad (5)$$

Відкинувши $O(h^2)$ і врахувавши (1), одержуємо другу основну схему для рівняння Лапласа:

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\big(u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x+h,y-h)+u(x-h,y-h)\big), \qquad (6)$$

порядок апроксимації якої згідно з (5) дорівнює двом.

2. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле. Розглянемо задачу Діріхле

$$\begin{cases}\Delta=0, & (x,y)\in G,\\ u(x,y)\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y),\end{cases} \qquad (7)$$

де $\varphi(x,y)$ – задана неперервна функція, Γ – простий кусково-гладкий контур, який обмежує опуклу область G.

Побудуємо квадратну сітку (S_h) з кроком h і вузлами

$$x_i=x_0+ih,\; y_i=y_0+jh,\quad i,j\in\mathbf{Z}.$$

Вузли цієї сітки, віддалені один від одного на відстань h, називають ***сусідніми***. Ті вузли, які знаходяться всередині G, називають ***внутрішніми***. Усі інші вузли, для яких хоч один із чотирьох сусідніх з ним є внутрішнім, називатимемо ***межовими***.

Якщо межовий вузол лежить поза $G\cup\Gamma$, то значення функції $u(x,y)$ у ньому вважають рівним значенню функції $\varphi(x,y)$ у найближчій до цього вузла точці межі Γ. Решту вузлів сітки (S_h) у наступних обчисленнях враховуватимемо не будемо.

Позначимо

$$u(x_i, y_j) = u_{i,j}$$

і на основі формул (2) для кожної внутрішньої точки сітки (S_h) запишемо різницеве рівняння

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right). \qquad \textbf{(8)}$$

Враховуючи задані вище значення функції $u(x, y)$ у межових вузлах, одержимо, що у системі (7) кількість невідомих співпаде з кількістю внутрішніх вузлів сітки (S_h).

Доведемо, що така система є сумісною і має єдиний розв'язок. Справді, оскільки (8) є неоднорідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, то достатньо довести, що відповідна однорідна система має лише нульовий розв'язок.

Припустимо, що у деякому внутрішньому вузлі значення функції $u(x, y)$ додатне. Тоді з усіх значень $u(x, y)$ у внутрішніх вузлах виберемо найбільше значення $u_{i,j}$. Зрозуміло, що

$$u_{i,j} \geq u_{i+1,j}, \quad u_{i,j} \geq u_{i-1,j}, \quad u_{i,j} \geq u_{i,j+1}, \quad u_{i,j} \geq u_{i,j-1}.$$

Додавши всі ці нерівності, одержуємо нерівність

$$u_{i,j} \geq \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right).$$

Звідси, враховуючи (8), знаходимо, що значення $u(x, y)$ в усіх вузлах, сусідніх з (x_i, y_i), має дорівнювати $u_{i,j}$.

Міркуючи аналогічно, можна встановити, що у всіх внутрішніх та межових вузлах сітки (S_h) значення $u(x, y)$ мають співпадати з $u_{i,j}$, а отже, мають бути додатними. Але однорідна система (8) була одержана за умови, що в усіх межових вузлах виконується рівність $u(x, y) = 0$. Маємо протиріччя, яке доводить, що у внутрішніх вузлах $u_{i,j}$ не може набувати додатних значень. Аналогічно можна довести, що $u_{i,j}$ не набуває від'ємних значень.

Отже, відповідна однорідна система має лише нульовий розв'язок, а неоднорідна система (8) має єдиний розв'язок.

Зауваження. Розв'язавши систему (82), одержуємо наближений розв'язок задачі Діріхле в області G з точністю $O(h)$. При цьому кількість рівнянь системи можна зменшити, покладаючи у внутрішніх вузлах, які знаходяться від межі Γ на відстані, меншій $\frac{h}{2}$, значення, які дорівнюють значенням $\varphi(x, y)$ у найближчих до цих вузлів точках межі.

3. Ітераційний процес Лібмана. Безпосереднє розв'язування системи (8) викликає певні труднощі для великої кількості внутрішніх вузлів. З іншого боку, зменшення їх кількості негативно позначиться на точності знайденого розв'язку. Вихід із такої ситуації полягає у поєднанні методу сіток з ітераційним процесом Лібмана. При цьому наближене розв'язання задачі Діріхле складається з таких трьох етапів:

1. Розглянемо сітку (S_{2h}) з кроком $2h$ і розв'яжемо для неї систему вигляду (8).

2. Візьмемо дрібнішу сітку (S_h) з кроком h, частину вузлів якої складають вузли попередньої сітки, і, використовуючи знайдені значення у вузлах сітки (S_{2h}) та першу і другу основні різницеві схеми для оператора Лапласа, знайдемо наближені значення функції $u(x, y)$ в усіх внутрішніх вузлах сітки (S_h) (ці значення позначимо через $u_{i,j}^{(0)}$).

3. Уточнимо значення функції $u(x, y)$ у межових вузлах A_h та внутрішніх вузлах (x_i, y_j) сітки (S_h), почергово користуючись формулами

$$u^{(k)}(A_h) = \frac{u(Z)h - u^{(k-1)}(V)\delta}{h - \delta} \qquad (9)$$

та

$$u_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(k-1)} + u_{i-1,j}^{(k-1)} + u_{i,j+1}^{(k-1)} + u_{i,j-1}^{(k-1)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (10)$$

де $u^{(0)}(A_h) = u(Z)$, Z – найближча до вузла A_h точка межі, V – найближчий до нього внутрішній вузол, δ – відстань від A_h до Z.

Зауваження. Процес обчислення за формулами (9), (10) необхідно продовжувати доти, поки у межах заданої точності не співпадуть два послідовні наближення для всіх внутрішніх вузлів сітки (S_h). При цьому похибка наближеного розв'язку $u_{i,j} = \lim\limits_{k\to\infty} u_{i,j}^{(k)}$ має порядок $O(h^2)$.

Приклад 1. Знайти функцію $u(x,y)$, гармонійну в області $G = \{(x,y):\ x>0, y>0, x+y<1\}$, яка на межі Γ цієї області задовольняє умову $u\big|_{\Gamma} = x^2 + y^2$.

Розв'язання. 1. Побудуємо сітку з кроком $2h = 0,4$. Для неї єдиним внутрішнім вузлом є точка $A(0,4;0,4)$, а сусідніми до нього межовими вузлами – точки $B(0;0,4)$, $C(0,4;0,8)$, $D(0,8;0,4)$, $E(0,4;0)$. Відповідно, $C_1(0,4;0,6)$ та $D_1(0,6;0,4)$ – найближчі точки межі до вузлів C та D у напрямі вузла A. Отже,

$$u(B) = u(E) = 0{,}16,\ u(C) = u(D) \approx u(C_1) = u(D_1) = 0{,}52.$$

Тоді за формулою (2) знаходимо:

$$u(A) = \frac{1}{4}\big(u(B) + u(C) + u(D) + u(E)\big) = 0{,}34.$$

2. Розглянемо тепер сітку з кроком $h = 0,2$, для якої вже 6 вузлів є внутрішніми, а всі межові вузли лежать на межі Γ. Для зручності покладемо $x_0 = y_0 = 0$ і обчислимо значення $u_{i,j}$ в усіх внутрішніх вузлах сітки, використовуючи значення, знайдені на першому етапі:

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}\big(u(0) + u(B) + u(A) + u(E)\big) = 0{,}165 \approx 0{,}17,$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{4}\big(u(E) + u(A) + u(D) + u(F)\big) = 0{,}415 \approx 0{,}42,$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{4}\big(u_{1,1} + u(A) + u_{3,1} + u(E)\big) = 0{,}27.$$

З міркувань симетрії одержуємо, що

$$u_{1,3} = u_{3,1} \approx 0{,}42,\ u_{1,2} = u_{2,1} \approx 0{,}27.$$

Окрім того,

$$u_{2,2} = u(A) = 0{,}34.$$

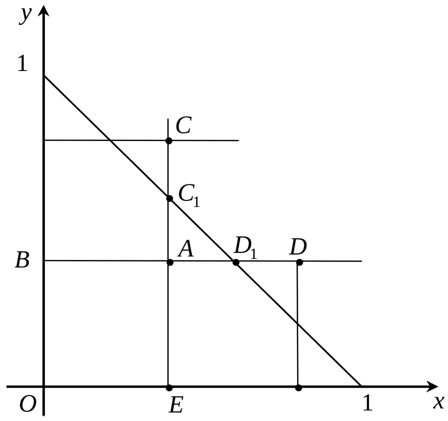

Рис. 1

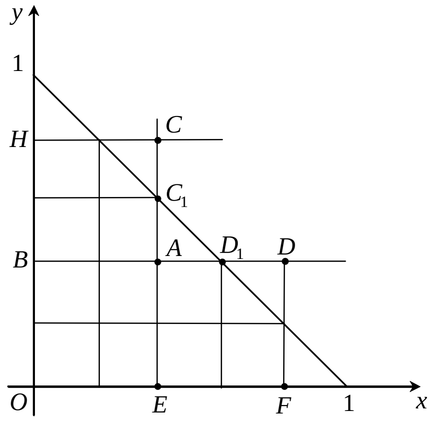

Рис. 2

3. Оскільки всі межові вузли лежать на межі Γ, то уточнювати їх значення немає потреби. Запишемо тільки значення функції $u(x,y)$ у цих вузлах:

$$u_{0,0}=0,\quad u_{1,0}=u_{0,1}=0,04,\quad u_{2,0}=u_{0,2}=0,16,\quad u_{3,0}=u_{0,3}=0,36,$$

$$u_{4,0}=u_{0,4}=0,64,\quad u_{5,0}=u_{0,5}=1,00,\quad u_{4,1}=u_{1,4}=0,68,\quad u_{3,2}=u_{2,3}=0,52.$$

Зауважимо, що саме ці значення ми отримували б при кожному $k\geq 1$ за формулою (9) при $\delta=0$.

Тому залишається перевірити значення функції $u(x,y)$ у внутрішніх вузлах сітки. Для наочності обчислень складемо шаблон-таблицю, в якій записані вже знайдені нами значення функції $u(x,y)$ у всіх внутрішніх та межових вузлах сітки. Надалі зміни значень відбуватимуться тільки у внутрішніх вузлах, тому наступні шаблони будуватимемо лише для цих вузлів, користуючись формулами (10):

1,00					
0,64	0,68				
0,36	0,42	0,52			
0,16	0,27	0,34	0,52		
0,04	0,17	0,27	0,42	0,68	
0,00	0,04	0,16	0,36	0,64	11,0

0,46		
0,27	0,40	
0,16	0,27	0,46

0,46		
0,30	0,40	
0,16	0,30	0,46

0,47		
0,30	0,41	
0,17	0,30	0,47

Оскільки значення у всіх відповідних клітинах двох останніх шаблонів відрізняються не більше, ніж на 0,01, то з точністю до 0,01 можна покласти, що

$$u_{1,1}=0,17,\quad u_{1,2}=u_{2,1}=0,30,\quad u_{1,3}=u_{3,1}=0,47,\quad u_{2,2}=0,41.$$

Зауважимо, що отриманий розв’язок можна було б використати для знаходження розв’язку з кроком $h = 0{,}1$. Для цього процедуру розв’язування довелось би повторити, починаючи з другого етапу. ■

Лекція 3.
Числові методи розв'язування задачі Діріхле.

План.

1. Розв’язування задачі Діріхле методом моделювання.
2. Метод Монте-Карло.

1. Розв’язування задачі Діріхле методом моделювання. Під моделюванням будемо розуміти встановлення відповідності між фізичними явищами і певними диференціальними рівняннями. Зокрема, для розв’язування задачі Діріхле скористаємося так званим сітковим електроінтегратором, який складається з двох систем прямолінійних провідників, паралельних до координатних осей і розташованих на відстані h один від одного.

Нехай кінці цих провідників відповідають межовим вузлам, а точки їх перетину – внутрішнім вузлам сітки (S_h). Припустимо, що через вказані системи провідників пропущено електричний струм, причому у межових вузлах (x_1, y_2) значення потенціалів $u_{p,q}$ дорівнюють значенню функції $\varphi(x, y)$ у найближчій до відповідного вузла точці межі Γ.

Якщо припустити, що опір провідника довжини h дорівнює $R > 0$, то із законів Кірхгофа та Ома для потенціалів $u_{i,j}$ внутрішніх вузлів одержуємо

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{R} + \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{R} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{R} + \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{R} = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

звідки випливає, що

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right). \qquad \textbf{(2)}$$

Порівнюючи одержаний результат з формулою (2), приходимо до висновку, що потенціали $u_{i,j}$ дорівнюють наближеним значенням розв’язку функції $\varphi(x, y)$ задачі Діріхле.

Отже, для знаходження такого розв’язку залишається тільки виміряти вказані потенціали, налаштувавши попередньо прилад так, щоб потенціали у межових вузлах дорівнювали відповідним значення функції $\varphi(x, y)$.

Зауваження. Враховуючи лінійність виразу (2), числові значення потенціалів $u_{p,q}$ можна задавати пропорційно значенням функції $\varphi(x, y)$.

Відповідно, з таким самим коефіцієнтом пропорції матимемо і значення потенціалів $u_{i,j}$.

2. Метод Монте-Карло. Припустимо, що точка M здійснює рівномірні випадкові блукання вузлами сітки (S_h). Це означає, що з довільного внутрішнього вузла $M_{i,j}$ вона з ймовірністю $1/4$ може переміститися у будь-який з чотирьох сусідніх вузлів. При цьому з ймовірністю 1 вона через скінченну кількість кроків опиниться у межовому вузлі. Будемо вважати, що тоді блукання точки M закінчується.

Позначимо через $P(i,j;p,q)$ ймовірність того, що точка, яка почала свій рух з внутрішнього вузла $M_{i,j}$, закінчить блукання у межовому вузлі $M_{p,q}$. Зрозуміло, що

$$\sum_{p,q} P(i,j;p,q) = 1, \qquad \textbf{(3)}$$

оскільки точка гарантовано закінчить свій рух за скінченну кількість кроків.

Зауважимо також, що для межових вузлів $M_{p',q'}$ виконується рівність

$$P(p',q';p,q) = \begin{cases} 1, & p' = p, \quad q' = q, \\ 0, & |p'-p| + |q'-q| \neq 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Покладемо у межових вузлах $M_{p,q}$ значення $\varphi_{p,q} = \varphi(Z)$, де Z – найближча до $M_{p,q}$ точка межі Γ, і розглянемо суму

$$u_{i,j} = \sum_{p,q} P(i,j;p,q) \cdot \varphi_{p,q}, \qquad \textbf{(5)}$$

яку можна трактувати як математичне сподівання функції $\varphi(x,y)$ за сукупністю межових вузлів сітки для траєкторій точки M, що розпочинаються з внутрішнього вузла $M_{i,j}$.

Відзначимо, що всі блукання, які виходять з цього вузла, розпадаються на чотири рівноймовірні групи блукань:

1. $M_{i,j},\ \ M_{i+1,j},\ \dots,$
2. $M_{i,j},\ \ M_{i-1,j},\ \dots,$
3. $M_{i,j},\ \ M_{i,j+1},\ \dots,$
4. $M_{i,j},\ \ M_{i,j-1},\ \dots.$

Тому за формулою повної ймовірності одержуємо:

$$P(i,j;p,q)=\frac{1}{4}P(i+1,j;p,q)+\frac{1}{4}P(i-1,j;p,q)+ \\ +\frac{1}{4}P(i,j+1;p,q)+\frac{1}{4}P(i,j-1;p,q). \qquad (6)$$

Якщо помножити обидві частини рівності (6) на $\varphi_{p,q}$ і підсумувати за усіма (p,q), то матимемо

$$u_{i,j}=\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\right), \qquad (7)$$

причому $u_{p,q}=\varphi_{p,q}$.

Таким чином, знову приходимо до першої основної схеми методу сіток для розв'язування задачі Діріхле.

Покажемо, як практично можна скористатися отриманим результатом. Для цього розглянемо набір випадкових чисел, який легко отримати з допомогою ЕОМ. Наприклад,

57705, 71618, 73710, 70131, 16961, 53324,
43166, 26275, 05926, 66289, ...

Будемо вибирати послідовно по одній цифрі з цього набору і здійснюватимемо блукання за наступною схемою:

Цифра	**Напрям переміщення**
0 або 1	крок вліво
2 або 3	крок вверх
4 або 5	крок вправо
6 або 7	крок вниз
8 або 9	"тупцювання на місці"

Зауважимо, що суттєве значення має не конкретна схема вибору напряму руху, а рівноймовірність вибору кожного з чотирьох можливих напрямів.

Зафіксувавши внутрішній вузол $M_{i,j}$, починаємо блукання точки M з цього вузла. При влученні у межовий вузол $M_{p,q}$ обчислюємо значення $\varphi_{p,q}$.

Якщо таких блукань, які починались з вузла $M_{i,j}$, було здійснено *n*, то наближено вважаємо, що

$$u_{i,j} \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \varphi_{p_k, q_k}, \qquad \textbf{(8)}$$

де M_{p_k, q_k} – межовий вузол, у якому точка *M* завершила свій рух при *k*-му блуканні.

Такий спосіб розв'язування задачі Діріхле називається ***методом Монте-Карло***.

Зауважимо, що з його допомогою можна знайти наближене значення розв'язку у довільному внутрішньому вузлі, не знаючи значень в інших внутрішніх вузлах. Але недоліком цього методу є повільна збіжність за ймовірністю при $n \to \infty$.

Приклад 1. Методом Монте-Карло знайти значення $u(0,4;0,2)$ гармонійної в області $G = \{(x, y):\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$ функції $u(x, y)$, яка на межі Γ цієї області задовольняє умову

$$u|_{\Gamma} = x^2 + y^2.$$

Розв'язання. Побудуємо сітку (S_h) з кроком $h = 0,2$ і запишемо значення $\varphi_{p,q}$ у тих вузлах, в яких можуть закінчуватись траєкторії, що виходять з точки (рис. 1).

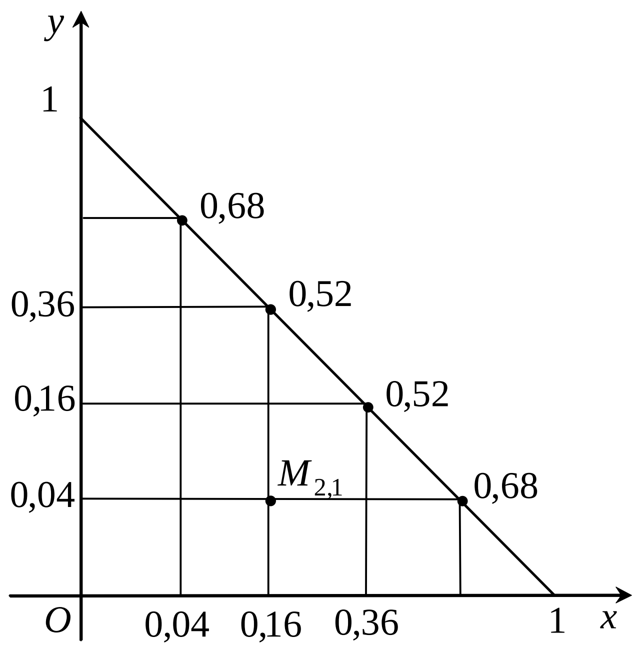

Рис. 1

Обмежившись п’ятнадцятьма випадковими блуканнями, одержуємо:

№	Траєкторія блукання	$\varphi_{p,q}$
1.	$(2,1) \xrightarrow{5} (3,1) \xrightarrow{7} (3,0)$	0,36
2.	$(2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
3.	$(2,1) \xrightarrow{0} (1,1) \xrightarrow{5} (2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
4.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{6} (1,0)$	0,04
5.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{8} (1,1) \xrightarrow{7} (1,0)$	0,04
6.	$(2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{7} (2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{0} (0,1)$	0,04
7.	$(2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
8.	$(2,1) \xrightarrow{0} (1,1) \xrightarrow{1} (0,1)$	0,04
9.	$(2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{1} (1,2) \xrightarrow{1} (0,2)$	0,16
10.	$(2,1) \xrightarrow{6} (2,0)$	0,16
11.	$(2,1) \xrightarrow{9} (2,1) \xrightarrow{6} (2,0)$	0,16
12.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{5} (2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{3} (2,3)$	0,52
13.	$(2,1) \xrightarrow{2} (2,2) \xrightarrow{4} (3,2)$	0,52
14.	$(2,1) \xrightarrow{4} (3,1) \xrightarrow{3} (3,2)$	0,52
15.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{6} (1,0)$	0,04
	Сума	**3,08**

Отже,

$$u_{2,1} = u(0,4;0,2) \approx 0,21.$$

Зауважимо, що у порівнянні з результатом, отриманим ітераційним процесом Лібмана, похибка становить 0,09, тобто майже 30%. Для досягнення точності 0,01 потрібно вибрати n значно більшим, ніж 15. ■

Лекція 4.

Числові методи розв'язування рівняння теплопровідності.

План.

1. Метод сіток для рівняння теплопровідності.
2. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності.

1. Метод сіток для рівняння теплопровідності. В області

$$G = \{(x,t):\ 0 \le x \le l,\ \ t \ge 0\}$$

розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

з початковою та крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u(0,t) = \varphi(t), \\ u(l,t) = \psi(t), \end{cases} \tag{2}$$

де $f(x)$ – неперервна на $[0,l]$, а $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервні на $[0,+\infty)$ функції, причому

$$f(0) = \varphi(0),\ \ f(l) = \psi(0).$$

Для наближеного розв’язування задачі (1), (2) побудуємо прямокутну сітку з вузлами (x_i, t_j):

$$x_i = ih,\ \ i = 0,1,\ldots,n, \qquad t_j = jk,\ \ j = 0,1,2,\ldots$$

де

$$h = \frac{l}{n},\ k = \frac{\sigma h^2}{a^2},$$

σ – деяка стала, допустимі значення якої будуть встановлені далі.

Рівняння (8.1) наближено замінимо різницевою схемою

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{3}$$

з якої одержуємо

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1-2\sigma)u_{i,j} + \sigma u_{i+1,j}, \tag{4}$$

де $i = 1,2,\ldots,n-1,\ \ j = 0,1,2,\ldots$.

Зазначимо також, що

$$u_{i,0} = f(x_i),\ u_{0,j} = \varphi(t_j),\ u_{n,j} = \psi(t_j).$$

Таким чином, за формулою (4) вдається послідовно знайти значення наближеного розв'язку в усіх внутрішніх вузлах, які знаходяться на прямих $t = t_j,\ j = 1, 2, \dots$.

Оцінимо порядок апроксимації схеми (3). Припускаючи, що точний розв'язок $u(x,t)$ має неперервні похідні за змінною x до шостого, а за змінною t – до третього порядку включно. Тоді, обмежуючись у формулі Тейлора для функції $u(x,t)$ в околі точки (x_i, t_j) доданками до h^6 включно, і враховуючи, що $k = \frac{\sigma h^2}{a^2}$, одержуємо, що для точного розв'язку різниця Δ_h між лівою і правою частинами рівності (3) має такий вигляд:

$$\Delta_h = \frac{a^2}{h^2}\Bigg[\ \frac{1}{\sigma}\left(u_{i,j} + \frac{\sigma h^2}{a^2}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\sigma h^2}{a^2}\right)^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\sigma h^2}{a^2}\right)^3 \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} - u_{i,j}\right) -$$

$$-\left(\left(u_{i,j} + h\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h^5}{5!}\frac{\partial^5 u_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6}\right) -\right.$$

$$\left.+\left(u_{i,j} - h\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \frac{h^5}{5!}\frac{\partial^5 u_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6}\right)\right) + + o(h^6)$$

$$\Bigg] = \left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} - \frac{1}{12}a^4\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4}\right)h^2 +$$

$$+\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sigma^2}{6}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} - \frac{1}{360}a^6\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6}\right)\ h^4 + o(h^4).$$

Оскільки функція $u(x,t)$ є розв'язком рівняння (1), то

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}\right) =$$

$$= a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t}\right) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a^2\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}\right) = a^4\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4},$$

і аналогічно встановлюємо, що

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3}=a^6\frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6}.$$

Отже,

$$\Delta_h=\frac{1}{2a^2}\left(\sigma-\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2}h^2+\frac{1}{6a^4}\left(\sigma^2-\frac{1}{60}\right)\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3}\quad h^4+o(h^4),$$

звідки одержуємо, що

$$\Delta_h=O(h^4)\ \text{для}\ \sigma=\frac{1}{6}$$

та

$$\Delta_h=O(h^2)\ \text{для всіх інших значень}\ \sigma.$$

Для $\sigma=\frac{1}{6}$ формула (4) набуває вигляду

$$u_{i,j+1}=\frac{1}{6}\left(u_{i-1,j}+4u_{i,j}+u_{i+1,j}\right). \qquad \textbf{(5)}$$

Зазначимо також, що вже при $h=0{,}1$ одержуємо значення кроку

$$k=\frac{1}{600a^2},$$

що є дуже незручно, оскільки вимагає великої кількості обчислень навіть для просування на $t=1$.

Приклад 1. Розв'язати методом сіток рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(6)}$$

з початковими та крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x,0)=4x(1-x), & 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0, & 0\le t<\infty. \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Розв'язання. Виберемо $h=0{,}1$. Тоді

$$k=\frac{1}{600},\quad n=10,\quad x_i=\frac{i}{10},\quad t_j=\frac{j}{600}.$$

Результати обчислень оформимо у вигляді таблиці, перший рядок якої при $j=0$ одержуємо з початкової умови, а стовпці $i=0$ та $i=10$ – з крайових умов. Оскільки всі значення у цих стовпцях дорівнюють нулю, то у таблицю вони не включені. Решту комірок таблиці заповнюємо на основі формули (5):

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
1	0,347	0,627	0,827	0,947	0,987	0,947	0,827	0,627	0,347
2	0,336	0,613	0,813	0,933	0,973	0,933	0,813	0,613	0,336
3	0,326	0,600	0,800	0,920	0,960	0,920	0,800	0,600	0,326
4	0,317	0,588	0,787	0,907	0,947	0,907	0,787	0,588	0,317
5	0,309	0,576	0,774	0,894	0,934	0,894	0,774	0,576	0,309
6	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302
7	0,295	0,553	0,748	0,868	0,908	0,868	0,748	0,553	0,295
8	0,289	0,543	0,736	0,854	0,894	0,854	0,736	0,543	0,289
9	0,283	0,533	0,723	0,841	0,881	0,841	0,723	0,533	0,283
10	0,278	0,523	0,711	0,828	0,868	0,828	0,711	0,523	0,278
11	0,272	0,513	0,699	0,815	0,855	0,815	0,699	0,513	0,272
12	0,267	0,504	0,688	0,803	0,841	0,803	0,688	0,504	0,267
13	0,262	0,495	0,676	0,790	0,829	0,790	0,676	0,495	0,262
14	0,257	0,486	0,665	0,777	0,816	0,777	0,665	0,486	0,257
15	0,253	0,478	0,654	0,765	0,803	0,765	0,654	0,478	0,253
16	0,248	0,470	0,643	0,753	0,790	0,753	0,643	0,470	0,248
17	0,244	0,462	0,633	0,741	0,778	0,741	0,633	0,462	0,244
18	0,239	0,454	0,622	0,729	0,765	0,729	0,622	0,454	0,239
19	0,235	0,446	0,612	0,717	0,753	0,717	0,612	0,446	0,235
20	0,231	0,439	0,602	0,706	0,741	0,706	0,602	0,439	0,231
21	0,227	0,431	0,592	0,694	0,729	0,694	0,592	0,431	0,227
22	0,223	0,424	0,582	0,683	0,718	0,683	0,582	0,424	0,223
23	0,220	0,417	0,573	0,672	0,706	0,672	0,573	0,417	0,220
24	0,216	0,410	0,563	0,661	0,695	0,661	0,563	0,410	0,216
25	0,212	0,403	0,554	0,650	0,684	0,650	0,554	0,403	0,212
26	0,209	0,396	0,545	0,640	0,673	0,640	0,545	0,396	0,209
27	0,205	0,390	0,536	0,630	0,662	0,630	0,536	0,390	0,205
28	0,202	0,384	0,527	0,619	0,651	0,619	0,527	0,384	0,202
29	0,198	0,377	0,519	0,609	0,640	0,609	0,519	0,377	0,198
30	0,195	0,371	0,510	0,599	0,630	0,599	0,510	0,371	0,195

Останній рядок таблиці відповідає значенню $t = 0{,}05$. ■

2. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності. Після розв'язування прикладу 1 могло виникнути питання: чи не можна відразу покласти $k = 0{,}05$ і обмежитись лише одним кроком обчислень? Такому k відповідає значення $\sigma = 5$, для якого $\Delta_h = O(h^2)$. Зрозуміло, що при цьому дещо втрачається порядок апроксимації схеми (3). Але не тільки! Справа у тім, що гарантувати стійкість цієї схеми можна лише для $\sigma \le 0{,}5$. А тому для $\sigma = 5$ не одержуємо порядку 2 апроксимації розв'язку. Використання значення $\sigma = 0{,}5$ хоч і зменшує кількість обчислень втричі при втраті точності на два порядки, також не вирішує всіх проблем. А отже, вихід з цієї ситуації полягає у використанні замість (3) іншої різницевої схеми, яка буде стійкою для досить великих значень k. Прикладом такої схеми є схема

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \cdot \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2}, \qquad \textbf{(8)}$$

яку можна одержати з рівняння (1), вважаючи наближено, що

$$\frac{\partial^2 u_{i,j+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}.$$

Запишемо схему (8) у вигляді системи рівнянь

$$u_{i-1,j+1} - (2+s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -su_{i,j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \textbf{(9)}$$

де $s = \dfrac{h^2}{ka^2}$,

$$u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \quad u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}), \quad u_{i,0} = f(x_i).$$

Система (9) для кожного фіксованого j є лінійною алгебраїчною системою з трьохдіагональною матрицею. Оскільки методика розв'язування таких систем уже розглядалася раніше, то обмежимося лише готовими формулами методу алгебраїчної прогонки:

$$\begin{cases} u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \\ u_{i,j+1} = \left(u_{i+1,j+1} + b_{i,j+1}\right) a_{i,j+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}), \end{cases} \qquad \textbf{(10)}$$

де

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2+s}, \quad b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + su_{1,j},$$

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1,j+1}}, \quad b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1} \cdot b_{i-1,j+1} + su_{i,j}, \quad i = 2,3,\ldots,n-1.$$

Зауважимо, що для $s > 0$ схема (9) є стійкою, а отже, наближений розв'язок задачі (1), (2) може бути знайдений цим способом для будь-якого кроку *k*, не залежному від *h*. При цьому порядок апроксимації розв'язку буде $O(h^2 + k)$.

Повертаючись до прикладу 1, одержимо таблицю, яка відповідає значенням $h = 0{,}1$, $k = 0{,}01$, $s = 1$. Для проведення відповідних підрахунків пропонуємо програму на мові програмування Basic:

```
10  N = 10: M = 5: H = 0.1: S = 1
20  DIM X(N), A(N, M), B(N, M), U( N, M)
30  DEF FNK(T) = 0: DEF FNP(T) = 0: DEF FNF(X) = 4*X*(1–X)
40  FOR I = 0 TO N
50  X(I) = I*H: U(I, 0) = FNF(X(I))
60  NEXT I
70  FOR J = 0 TO M–1
80  U(0, J+1) = FNK(T): U(10, J+1) = FNP(T)
90  NEXT J
100 FOR J = 0 TO M–1
110  A(1, J+1) = 1/(2+S): B(1, J+1) = FNK(T)+S*U(1, J)
120  FOR I = 2 TO N–1
130  A(I, J+1) = 1/(2+S–A(I–1, J+1)):
     B(I, J+1) = A(I–1, J+1)*B(I–1,J+1)+S*U(I,J)
140  NEXT I
150  FOR I = N–1 TO 1 STEP –1
160  U(I, J+1) = (U(I+1, J+1)+B(I, J+1))*A(I, J+1)
170  NEXT I: NEXT J
180  FOR I = 0 TO N
190  FOR J = 0 TO M
200  PRINT " U("; I; ","; J; ") = "; U(I, J)
210  NEXT J: PRINT
220  NEXT I
230  FOR I = 1 TO N–1: FOR J = 1 TO M
240  PRINT " A("; I; ","; J;") = "; A(I, J), " B("; I; ","; J;" ) = "; B(I, J)
250  NEXT J: PRINT
260  NEXT I: END
```

Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_{i,0}$	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
$a_{i,1}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,1}$	0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813
$u_{i,1}$	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310
$u^*_{i,1}$	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302
$a_{i,2}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,2}$	0,310	0,675	1,018	1,270	1,406	1,419	1,306	1,071	0,719
$u_{i,2}$	0,275	0,514	0,695	0,808	0,845	0,808	0,695	0,514	0,275
$u^*_{i,2}$	0,267	0,504	0,688	0,803	0,841	0,803	0,688	0,504	0,267
$a_{i,3}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,3}$	0,275	0,605	0,922	1,159	1,288	1,300	1,192	0,969	0,645
$u_{i,3}$	0,246	0,464	0,632	0,738	0,774	0,738	0,632	0,464	0,246
$u^*_{i,3}$	0,239	0,454	0,622	0,729	0,765	0,729	0,622	0,454	0,239
$a_{i,4}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,4}$	0,246	0,546	0,837	1,057	1,177	1,188	1,086	0,879	0,582
$u_{i,4}$	0,222	0,421	0,576	0,673	0,707	0,673	0,576	0,421	0,222
$u^*_{i,4}$	0,216	0,410	0,563	0,661	0,695	0,661	0,563	0,410	0,216
$a_{i,5}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,5}$	0,222	0,495	0,761	0,963	1,075	1,084	0,990	0,799	0,527
$u_{i,5}$	0,201	0,382	0,524	0,614	0,645	0,614	0,524	0,382	0,201
$u^*_{i,5}$	0,195	0,371	0,510	0,599	0,630	0,599	0,510	0,371	0,195

Для порівняння в таблиці наведені значення $u^*_{i,1}$, $u^*_{i,2}$, $u^*_{i,3}$, $u^*_{i,4}$, $u^*_{i,5}$, які відповідають рядкам $j=6$, $j=12$, $j=18$, $j=24$, $j=30$ попередньої таблиці. Як бачимо, відхилення одержаних значень для $t=0,05$ становлять приблизно 0,01.

Лекція 5.
Деякі числові методи розв'язування рівняння теплопровідності та хвильового рівняння.

План.

1. Інший підхід до наближеного розв'язування рівняння теплопровідності.

2. Метод сіток для хвильового рівняння.

1. Інший підхід до наближеного розв'язування рівняння тепло провідності. Система рівнянь

$$u_{i-1,j+1} - (2+s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -su_{i,j}, \tag{1}$$

де

$$s = \frac{h^2}{ka^2}, \quad u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \quad u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}), \quad u_{i,0} = f(x_i),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

на попередній лекції була розв'язана методом алгебраїчної прогонки. Розглянемо інший підхід до розв'язування системи (1), враховуючи, що її коефіцієнти є сталими.

Шукаємо розв'язок рівняння (1) наступним чином. Оскільки

$$A, B > 0, \qquad C > A + B \ \left(A = 1,\ B = 1,\ C = 2 + s,\ s > 0\right),$$

то розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$u_{i-1,j+1} - (2+s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = 0 \tag{2}$$

запишемо у вигляді

$$u_{i,j+1} = \lambda^i, \ \lambda \neq 0.$$

Підставляючи $u_{i,j+1} = \lambda^i$ у (2), одержуємо характеристичне рівняння

$$1 - (2+s)\lambda + \lambda^2 = 0,$$

дискримінант якого $D = s(4+s) > 0$.

Таким чином, існують два різні додатні корені характеристичного рівняння, які позначимо λ_1 та λ_2. Отже, загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$u_{i,j+1} = C_{1,j+1}\lambda_1^i + C_{2,j+1}\lambda_2^i, \ i = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Частинний розв'язок системи рівнянь (1) вважатимемо наближено рівним

$$u_{i,j+1}^{ч} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}.$$

Отже, маємо загальний розв'язок системи (1) у вигляді

$$u_{i,j+1} = C_{1,j+1}\lambda_1^i + C_{2,j+1}\lambda_2^i + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2},\ i = 1,\dots,n-1. \qquad \textbf{(4)}$$

Будемо вважати, що рівність (4) виконується для $i = 0$ та $i = n$, при цьому наближено замінимо

$$u_{n+1,j} \approx u_{n,j}, \qquad u_{-1,j} \approx u_{0,j}.$$

Тоді, враховуючи крайові умови, запишемо систему

$$\begin{cases} C_{1,j+1} + C_{2,j+1} + \dfrac{u_{1,j} + u_{0,j}}{2} = \varphi(t_{j+1}), \\ C_{1,j+1}\lambda_1^n + C_{2,j+1}\lambda_2^n + \dfrac{u_{n,j} + u_{n-1,j}}{2} = \psi(t_{j+1}). \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Якщо знайти з системи (5) коефіцієнти $C_{1,j+1}$, $C_{2,j+1}$ і підставити їх у формулу (4), то одержимо $u_{i,j+1}$ для всіх $i = 0,1,\dots,n$.

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

який задовольняє початкову та крайові умови

$$\begin{cases} u(x,0) = 4x(1-x), \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t < \infty. \end{cases}$$

Розв'язання. Візьмемо

$$h = 0{,}1, \quad k = 0{,}01, \quad s = 1 \text{ і } t = 0{,}05.$$

Запишемо різницеву схему у вигляді системи рівнянь

$$u_{i-1,j+1} - 3u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -u_{i,j}, \quad i = 1,2,\dots,n-1, \quad j = 0,1,2,\dots,$$

а також її загальний розв'язок

$$u_{i,j+1} = C_{1,j+1}\lambda_1^i + C_{2,j+1}\lambda_2^i + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}, \quad i = 1,\dots,n-1.$$

З характеристичного рівняння $1 - 3\lambda + \lambda^2 = 0$ знаходимо

$$\lambda_1 \approx 2{,}618034, \qquad \lambda_2 \approx 0{,}381966.$$

Нехай $n=10$. Тоді згідно з (5) для визначення коефіцієнтів $C_{1,j+1}$, $C_{2,j+1}$ маємо систему

$$\begin{cases} C_{1,j+1}+C_{2,j+1}+\dfrac{1}{2}u_{1,j}=0\ , \\ C_{1,j+1}\lambda_1^{10}+C_{2,j+1}\lambda_2^{10}+\dfrac{1}{2}u_{9,j}=0, \end{cases}$$

з якої одержуємо:

$$C_{1,j+1}=-\frac{1}{2}u_{1,j}-C_{2,j+1},$$

$$C_{2,j+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_1^{10}u_{1,j}-u_{9,j}}{\lambda_2^{10}-\lambda_1^{10}}.$$

Для одержання результатів обчислень пропонуємо програму на мові програмування Basic:

```
10  N = 10: H = .1: M = 5: A1 = 2.618034: A2 = .381966
20  DIM C1(M), C2(M), X(N), U(N, M)
30  DEF FNK(T) = 0: DEF FNP(T) = 0: DEF FNF(T) = 4*X*(1–X)
40  FOR I = 0 TO N
50  X(I) = I*H: U(I, 0) = FNF(X(I))
60  NEXT I
70  FOR J = 0 TO M
80  U(0, J) = FNK(T): U(10, J) = FNP(T)
90  NEXT J
100  FOR J = 0 TO M–1
110  C2(J+1) = (A1^N*U(1,J)–U(N–1, J)/(2*A2^N–2*A1^N):
     C1(J+1) = –U(1, J)/2–C2(J+1)
120  FOR I = 1 TO N–1
130  U(I, J+1) = C1(J+1)*A1^I+C2(J+1)*A2^I+(U(I+1, J)+U(I–1, J))/2
140  NEXT I: NEXT J
150  FOR I = 0 TO N: FOR J = 0 TO M
160  PRINT “ U( ”; I; “ , ”; J; “ ) = ”; U(I, J)
170  NEXT J: PRINT
180  NEXT I
190  FOR J = 1 TO M
200  PRINT “ C1(”; J;“) = ”; C1(J), “C2(”; J;“ ) = ”; C2(J)
210  NEXT J
220  END
```

Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_{i,0}$	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
$u_{i,1}$	0,251	0,574	0,790	0,916	0,957	0,916	0,790	0,574	0,251
$u_{i,2}$	0,239	0,502	0,737	0,870	0,914	0,870	0,737	0,502	0,239
$u_{i,3}$	0,205	0,471	0,679	0,823	0,868	0,823	0,679	0,471	0,205
$u_{i,4}$	0,196	0,427	0,641	0,771	0,821	0,771	0,641	0,427	0,196
$u_{i,5}$	0,176	0,404	0,594	0,728	0,770	0,728	0,594	0,404	0,176

Зазначимо, що більшої точності можна досягнути, використовуючи наближену формулу

$$u^*_{i,j+1} \approx \frac{1}{6}\left(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}\right),$$

яка відповідає $\sigma = \dfrac{1}{6}$. ■

2. Метод сіток для хвильового рівняння. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

і шукатимемо його розв’язок, який задовольняє умови

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = F(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = \varphi(t), \quad u(l,t) = \psi(t), \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{7}$$

причому

$$f(0) = \varphi(0),\; f(l) = \psi(0).$$

Покладаючи

$$x_i = ih, \quad t_j = jk, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

де $h = l/n$, $k > 0$, замінимо рівняння (6) різницевою схемою

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{8}$$

з якої при $k = h/a$ одержуємо

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{9}$$

Оскільки

$$u_{i,0}=f(x_i),\quad u_{0,j}=\varphi(t_j),\quad u_{n,j}=\psi(t_j),$$

то, задавши фіктивно $j=-1$, маємо

$$\frac{u_{i,-1}-u_{i,0}}{-k}\approx F(x_i),$$

звідки

$$u_{i,-1}\approx f(x_i)-kF(x_i).$$

Враховуючи ці рівності, зможемо застосувати формулу (9) для всіх $i=1,\dots,n-1$ та $j\ge 0$.

Зауважимо, що можна було також покласти

$$u_{i,1}\approx f(x_i)+kF(x_i),$$

а якщо функція $f(x)$ задана аналітично, то отримати більш точне наближення

$$u_{i,1}\approx f(x_i)+kF(x_i)+\frac{a^2k^2}{2}f''(x_i), \tag{10}$$

і після цього формулу (9) використовувати для $j\ge 1$.

Приклад 2. Методом сіток знайти наближений розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, який задовольняє умови

$$u(x,0)=x\cdot(\pi-x),\quad u'_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le\pi,$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Розв'язання. Оскільки $a=1$, то покладемо $k=h$ і виберемо $h=\frac{\pi}{18}$. Для всіх i маємо

$$F(x_i)=0,\quad f''(x_i)=-2,$$

а отже, за формулою (10) знаходимо

$$u_{i,1}=f(x_i)-h^2=f(x_i)-0{,}030.$$

Зауважимо, що з міркувань симетрії відносно прямої $x=\frac{\pi}{2}$ достатньо буде знайти розв'язок лише для $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. Обмежуючись, крім того, значеннями $t\le\frac{5\pi}{18}$, одержуємо такі результати обчислень за формулою (9):

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,518	0,975	1,371	1,706	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
1	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
2	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
3	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
4	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
5	0,244	0,487	0,731	0,945	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706

Лекція 6.
Метод прямих та його модифікація для рівняння Пуассона.

В області G, яка обмежена лініями

$$y=\alpha, \quad y=\beta, \quad x=g_1(y), \quad x=g_2(y) \quad (\alpha \le y \le \beta),$$

та повністю знаходиться всередині прямокутника

$$Q=\{(x,y): a \le x \le b, \; \alpha \le y \le \beta\},$$

розглянемо рівняння

$$\begin{aligned} &A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ \\ &+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

з аналітичними у Q коефіцієнтами та функцією $f(x,y)$.

Шукатимемо розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(x,\alpha)=\varphi_1(x), \quad & u(x,\beta)=\varphi_2(x), \\ u(g_1(y),y)=\psi_1(y), \quad & u(g_2(y),y)=\psi_2(y). \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Припустимо, що в області Q виконується умова еліптичності, тобто

$$A(x,y)\cdot C(x,y)-B^2(x,y)>0,$$

а отже, $A(x,y)\ne 0$, $C(x,y)\ne 0$.

Окрім того, вважатимемо, що функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ аналітичні на відрізку $[a,b]$, функції $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ аналітичні на $[\alpha,\beta]$, і виконуються умови узгодження

$$\begin{aligned} \varphi_1(g_1(\alpha))=\psi_1(\alpha), \qquad & \varphi_1(g_2(\alpha))=\psi_2(\alpha), \\ \varphi_2(g_1(\beta))=\psi_1(\beta), \qquad & \varphi_2(g_2(\beta))=\psi_2(\beta). \end{aligned}$$

Позначимо $h=\dfrac{\beta-\alpha}{n}$ і проведемо в області G прямі

$$y=y_j, \qquad y_j=\alpha+jh.$$

Для кожного фіксованого $j=1,2,\dots,n-1$ рівняння (1) наближено замінимо на

$$A_j(x)u_j''(x)+2B_j(x)\frac{u_{j+1}'(x)-u_{j-1}'(x)}{2h}+C_j(x)\frac{u_{j+1}(x)-2u_j(x)+u_{j-1}(x)}{h^2}+$$
$$+a_j(x)u_j'(x)+b_j(x)\frac{u_{j+1}(x)-u_{j-1}(x)}{2h}+c_j(x)u_j(x)=f_j(x), \qquad \textbf{(3)}$$

де

$$u_j(x)=u(x,y_j), \quad u_j'(x)=\frac{\partial u(x,y_j)}{\partial x}, \quad u_j''(x)=\frac{\partial^2 u(x,y_j)}{\partial x^2},$$

$$A_j(x)=A(x,y_j), \quad B_j(x)=B(x,y_j), \quad C_j(x)=C(x,y_j),$$

$$a_j(x)=a(x,y_j), \quad b_j(x)=b(x,y_j), \quad c_j(x)=c(x,y_j).$$

У результаті одержимо систему $n-1$ лінійних диференціальних рівнянь другого порядку відносно невідомих функцій

$$u_1(x), u_2(x),..., u_{n-1}(x).$$

Зауважимо, що

$$u_0(x)=\varphi_1(x), \; u_n(x)=\varphi_2(x),$$

а отже,

$$u_0'(x)=\varphi_1'(x), \quad u_0''(x)=\varphi_1''(x),$$
$$u_n'(x)=\varphi_2'(x), \quad u_n''(x)=\varphi_2''(x).$$

Загальний розв'язок системи (3) залежить від $2n-2$ сталих, які можна визначити, враховуючи крайові умови, а саме

$$\begin{cases} u_j(g_1(y_j))=\psi_1(y_j), \\ u_j(g_2(y_j))=\psi_2(y_j), \end{cases} \qquad j=1,2,...,n-1. \qquad \textbf{(4)}$$

Таким чином, ми зможемо знайти значення наближеного розв'язку на всіх прямих $t=t_j$. Такий метод розв'язування називають ***методом прямих***. Порядок апроксимації отриманого розв'язку дорівнює двом.

Система (3) у загальному випадку є системою лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а її розв'язання зазвичай викликатиме значні труднощі. Тому метод прямих, взагалі кажучи, буде ефективним лише тоді, коли коефіцієнти цієї системи є сталими.

Наприклад, для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \qquad \textbf{(5)}$$

яке розглядаємо у прямокутнику Q, шукаємо розв'язок, який задовольняє умови

$$u(x,\alpha)=\varphi_1(x),\quad u(x,\beta)=\varphi_2(x),$$
$$u(a,y)=\psi_1(y),\quad u(b,y)=\psi_2(y), \tag{6}$$

де функція $f(x,y)$ неперервна у Q, $\psi_1(y)$ та $\psi_2(y)$ – неперервні на $[\alpha,\beta]$, а $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ – двічі неперервно диференційовні на $[a,b]$, причому

$$\varphi_1(a)=\psi_1(\alpha),\quad \varphi_1(b)=\psi_2(\alpha),$$
$$\varphi_2(a)=\psi_1(\beta),\quad \varphi_2(b)=\psi_2(\beta).$$

З результатів попередньої лекції одержуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь

$$u_j''(x)+\frac{u_{j+1}(x)-2u_j(x)+u_{j-1}(x)}{h^2}=f_j(x),\quad j=1,2,\ldots,n-1, \tag{7}$$

де

$$u_0(x)=\varphi_1(x),\ u_n(x)=\varphi_2(x).$$

Але використання такого підходу дає похибку порядку $O(h^2)$. У зв'язку з цим встановимо більш точні формули чисельного інтегрування рівняння (5).

Знову розглянемо задачу (5), (6) і припустимо, що її розв'язок $u(x,y)$ має неперервні частинні похідні за змінною y до шостого порядку включно. Тоді за формулою Тейлора

$$u_{j+1}(x)+u_{j-1}(x)=2u_j(x)+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}h^2+\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}h^4+O(h^6). \tag{8}$$

Якщо у (8) замінити всі $u_k(x)$ на $\dfrac{\partial^2 u(x,y_k)}{\partial y^2}$, то з точністю до $O(h^4)$ будемо мати:

$$\frac{\partial^2 u(x,y_{j+1})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y_{j-1})}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 u(x,y_j)}{\partial y^2}+\frac{\partial^4 u(x,y_j)}{\partial y^4}h^2+O(h^4). \tag{9}$$

Поділимо (8) на h^2, а (9) на 12 і віднімемо від першої з одержаних рівностей другу. Результат запишемо у вигляді

$$\frac{u_{j+1}(x)-2u_j(x)+u_{j-1}(x)}{h^2}=$$
$$=\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 u(x,y_{j+1})}{\partial y^2}+10\frac{\partial^2 u(x,y_j)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y_{j-1})}{\partial y^2}\right)+O(h^4). \tag{10}$$

З результатів попередньої лекції випливає, що

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f_k(x) - u_k''(x),$$

а тому то з точністю до $O(h^4)$ з (10) одержуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{gathered} u_{j+1}''(x) + 10u_j''(x) + u_{j-1}''(x) + \frac{12}{h^2}\left(u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)\right) = \\ = f_{j+1}(x) + 10 f_j(x) + f_{j-1}(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{gathered} \qquad \textbf{(11)}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \varphi_1(x), & u_n(x) &= \varphi_2(x), \\ u_0''(x) &= \varphi_1''(x), & u_n''(x) &= \varphi_2''(x) \end{aligned}$$

та

$$u_j(a) = \psi_1(y_j), \quad u_j(b) = \psi_2(y_j). \qquad \textbf{(12)}$$

Відомо, що загальний розв’язок відповідної (11) однорідної системи має вигляд

$$v_j(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(A_k e^{\lambda_j x} + B_k e^{-\lambda_j x}\right) \cdot \sin\frac{\pi k j}{n}, \qquad \textbf{(13)}$$

де

$$\lambda_j^2 = \frac{12}{h^2} \cdot \frac{1 - \cos\frac{\pi j}{n}}{5 + \cos\frac{\pi j}{n}}.$$

Частинний розв’язок системи (11) можна знайти, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів або метод варіації довільних сталих. Коефіцієнти A_k та B_k можна визначити з умов (12).

Приклад 1. Розв’язати методом прямих рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y \qquad \textbf{(14)}$$

в області $Q = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$, якщо

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, & u(x,2) = x + 2, & 0 \le x \le 2, \\ u(0,y) = y, & u(2,y) = 2y, & 0 \le y \le 2. \end{cases} \qquad \textbf{(15)}$$

Розв'язання. Для спрощення міркувань обмежимося випадком $n=2$. Тоді $h=1$, а система вигляду (11) складатиметься з одного рівняння

$$u_2''(x)+10u_1''(x)+u_0''(x)+12\big(u_2(x)-2u_1(x)+u_0(x)\big)= \\ = f_2(x)+10f_1(x)+f_0(x). \qquad \textbf{(16)}$$

Оскільки

$$u_0(x)=0, \quad u_0''(x)=0, \quad u_2(x)=x+2, \quad u_2''(x)=0,$$

$$f(x,y)=x+y, \quad f_0(x)=x, \quad f_1(x)=x+1, \quad f_2(x)=x+2,$$

то рівняння (16) можна записати у вигляді

$$5u_1''(x)-12u_1(x)=-6. \qquad \textbf{(17)}$$

За формулою (13) або безпосередньо розв'язуючи рівняння (17), знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$u_1(x)=Ae^{\sqrt{2,4}x}+Be^{-\sqrt{2,4}x}.$$

Підставляючи $u_{1_ч}=c$ у рівняння (7), маємо $c=0,5$. Отже,

$$u_1(x)=Ae^{\sqrt{2,4}x}+Be^{-\sqrt{2,4}x}+0,5.$$

Оскільки $u(0;1)=1,\ u(2;1)=2$, то коефіцієнти A та B визначимо з системи

$$\begin{cases} A+B+\dfrac{1}{2}=1, \\ Ae^{2\sqrt{2,4}}+Be^{-2\sqrt{2,4}}+\dfrac{1}{2}=2. \end{cases}$$

Провівши необхідні обчислення, знаходимо

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3e^{2\sqrt{2,4}}-1}{e^{4\sqrt{2,4}}-1}\approx 0,067, \qquad B=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{4\sqrt{2,4}}-3e^{2\sqrt{2,4}}}{e^{4\sqrt{2,4}}-1}\approx 0,433.$$

Таким чином, остаточно одержуємо:

$$u_1(x)\approx 0,067e^{1,549x}+0,433e^{-1,549x}+0,5.$$

Зауважимо, що для наближеного знаходження розв'язку при $n=4$ можна було скористатися вже отриманим результатом і розв'язати рівняння (14) окремо в областях

$$Q_1=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\},$$

$$Q_2=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\},$$

покладаючи кожного разу $n=2$. ■

Лекція 7.
Зведення крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа до варіаційної задачі.

План.

1. Зведення лінійної крайової задачі до розв'язування варіаційної задачі.

2. Зведення крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа до варіаційної задачі.

1. Зведення лінійної крайової задачі до розв'язування варіаційної задачі. Нехай в області G з межею Γ задано лінійне диференціальне рівняння з неперервними коефіцієнтами (звичайне або з частинними похідними) і потрібно знайти розв'язок цього рівняння, який на межі Γ задовольняє лінійні крайові умови.

Розглянемо ліву частину цього рівняння як лінійний оператор L, визначений на множині K функцій, які мають неперервні похідні відповідного порядку у $G \cup \Gamma$ та задовольняють задані крайові умови. Функції з класу K називають ***допустимими функціями***.

Таким чином, неоднорідна крайова задача запишеться у вигляді

$$L[u] = f(P), \qquad P \in G, \tag{1}$$

$$R[u] = \varphi(P), \qquad P \in \Gamma, \tag{2}$$

де R – відомий лінійний функціонал або оператор нижчого порядку, ніж L, f та φ – відомі функції, які будемо вважати неперервними.

Відомо, що неоднорідну крайову задачу (1), (2) можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами, зробивши заміну

$$u = v + u_0,$$

де $v = v(x)$ – нова невідома функція, $u_0 = u_0(x)$ належить області визначення оператора L (а, отже, й оператора R), причому

$$R[u_0] = \varphi(P).$$

Тоді з (1), (2) одержуємо

$$L[v] = f(P) - L[u_0], \qquad R[v] = 0.$$

Оскільки функцію u_0, як правило, неважко знайти підбором, то надалі будемо вважати, що $\varphi(P) = 0$, і розглядатимемо крайову умову (2) у вигляді

$$R[u]=0, \qquad P\in\Gamma, \tag{3}$$

а відповідний клас K позначимо через K_0.

Ідея варіаційного методу розв'язування крайових задач полягає у тому, що задача (1), (3) замінюється рівносильною задачею відшукання функції, яка надає екстремуму деякому функціоналу.

Теорема 1. *Нехай L – симетричний лінійний оператор, визначений і додатний у класі допустимих функцій K_0, а $F[u]$ – функціонал вигляду*

$$F[u]=\left(L[u],u\right)-2\left(f,u\right)\equiv\int\limits_G\left(L[u]-2f\right)\cdot u\,\mathrm{d}\omega, \tag{4}$$

де $f=f(P)$ – права частина рівняння (1). *Тоді, якщо крайова задача* (1), (3) *має розв'язок $u=\bar{u}$, то на цьому розв'язку досягається мінімум функціоналу $F[u]$.*

Доведення. Якщо $\bar{u}$ – розв'язок задачі (1), (3), то

$$L[\bar{u}]\equiv f(P),\ R[\bar{u}]\equiv 0.$$

Крім того, з симетричності оператора L випливає, що

$$\left(L[\bar{u}],u\right)=\left(\bar{u},L[u]\right)=\left(L[u],\bar{u}\right).$$

Отже,

$$F[u]=\left(L[u],u\right)-2\left(f,u\right)=\left(L[u],u\right)-2\left(L[\bar{u}],u\right)=$$

$$=\left(L[u],u\right)-\left(L[u],\bar{u}\right)-\left(L[\bar{u}],u\right)=$$

$$=\left(L[u],u-\bar{u}\right)-\left(\left(L[\bar{u}],u\right)-\left(L[\bar{u}],\bar{u}\right)\right)-\left(L[\bar{u}],\bar{u}\right)=$$

$$=\left(L[u],u-\bar{u}\right)-\left(L[\bar{u}],u-\bar{u}\right)-\left(L[u],\bar{u}\right)=$$

$$=\left(L[u-\bar{u}],u-\bar{u}\right)-\left(L[\bar{u}],\bar{u}\right)\geq-\left(L[\bar{u}],\bar{u}\right),$$

причому, оскільки оператор L є додатним, то рівність досягається лише тоді, коли $u-\bar{u}\equiv 0$, тобто $u\equiv\bar{u}$. Таким чином,

$$\min_{u\in K_0}F[u]=F[\bar{u}]=-\left(L[\bar{u}],\bar{u}\right). \ ►$$

Зауваження. Теорема 1 дає можливість звести розв'язування крайової задачі (1), (3) до знаходження функції $\bar{u}$, на якій функціонал $F[u]$ набуває мінімуму. Справджується й обернене твердження: *якщо у класі K_0 існує функція $\bar{u}$, на якій досягається мінімум функціоналу $F[u]$, то ця функція є розв'язком рівняння* (1).

Отже, *крайова задача (1), (3) із симетричним додатним оператором L рівносильна варіаційній задачі відшукання функції* $\bar{u}$*, на якій досягається мінімум функціоналу* $F[u]$*, визначеного рівністю (4).*

2. Зведення крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа до варіаційної задачі. В області $G \subset R^2$ з межею Г розглянемо рівняння Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{5}$$

де $f(x, y)$ – неперервна в області G функція, і будемо шукати його розв'язок у класі K_0 неперервних разом зі своїми похідними першого і другого порядку в області $\bar{G} = G \cup \Gamma$ функцій, які на межі задовольняють умову

$$u\big|_{\Gamma} = 0. \tag{6}$$

Доведемо спочатку, що у класі K_0 оператор

$$L[u] = -\Delta u$$

є симетричним і додатним. Справді, якщо $u \in K_0,\ v \in K_0$, то

$$\left(L[u], v\right) - \left(u, L[v]\right) = \iint_G \left(-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_G \left(\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Застосувавши формулу Ґріна

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

і врахувавши, що $u\big|_\Gamma = v\big|_\Gamma = 0$, одержуємо

$$\left(L[u], v\right) - \left(u, L[v]\right) = \int_\Gamma \left(-\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\right) = 0.$$

Отже,

$$\left(L[u], v\right) = \left(u, L[v]\right),$$

що й доводить симетричність оператора L.

Покажемо тепер, що оператор L додатний. Маємо

$$\left(L[u],u\right)=-\iint_G u\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=-\iint_G\left(\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)+\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)-\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=-\iint_G\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_G\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Застосувавши до першого з інтегралів формулу Ґріна і врахувавши (6), одержуємо:

$$\left(L[u],u\right)=-\int_\Gamma\left(-u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+$$

$$+\iint_G\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_G\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geq 0,$$

причому $\left(L[u],u\right)=0$ лише тоді, коли

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Звідси випливає, що $u(x,y)=\mathrm{const}$, а враховуючи неперервність функції $u(x,y)$ в області $\bar{G}$ і умову (6), одержуємо, що

$$u(x,y)\equiv 0.$$

Отже, оператор L є додатним.

Таким чином, *задача* (1), (2) *у класі* K_0 *еквівалентна варіаційній задачі про мінімум функціонала*

$$F[u]=\iint_G\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2fu\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad \mathbf{(7)}$$

Зазначимо, що у класі K неперервних разом зі своїми похідними першого і другого порядку в області $\bar{G}$ функцій $u(x,y)$, які на межі Γ задовольняють умову

$$u\big|_\Gamma=\varphi(x,y), \qquad \mathbf{(8)}$$

де $\varphi(x, y)$ – неперервна на Γ функція, крайова задача (5), (8) також еквівалентна варіаційній задачі про мінімум функціонала (7).

Для рівняння Лапласа цей функціонал набуває вигляду

$$F[u] = \iint\limits_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

а інтеграл у правій частині цієї рівності називають ***інтегралом Діріхле***.

Лекція 8.
Методи Рітца для задачі Діріхле та рівняння Пуассона.

План.

1. **Метод Рітца для задачі Діріхле.**
2. **Метод Рітца для рівняння Пуассона**

1. Метод Рітца для задачі Діріхле. Шукатимемо розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

в області *G*, обмеженій кусково-гладким контуром *Г*, за умови

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \qquad \textbf{(2)}$$

де $\varphi(x, y)$ – неперервна на *Г* функція.

Відомо, що задача (1), (2) еквівалентна варіаційній задачі на мінімум для функціонала

$$F[u] = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \qquad \textbf{(3)}$$

у класі *K* функцій, які мають неперервні похідні до другого порядку включно в області $\overline{G} = G \cup \Gamma$ і задовольняють умову (2).

Нехай

$$u_0(x, y) \in K,\ u_1(x, y) \in K_0,\ \ldots,\ u_n(x, y) \in K_0.$$

Тоді

$$u_0(x, y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \qquad u_i(x, y)\big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

і лінійна комбінація

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x), \qquad \textbf{(4)}$$

де $c_0 = 1$, належить до класу *K* для будь-яких значень сталих $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Підставивши вираз (4) у функціонал (3), одержуємо:

$$F[u] = \iint_G \left(\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y. \qquad \textbf{(5)}$$

Підберемо коефіцієнти $c_1, c_2, \ldots, c_n$ так, щоб функціонал $F[u]$ набував мінімуму. Для цього необхідно, щоб

$$\frac{\partial F[u]}{\partial c_j} = 2\iint_G \left(\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

для $j = 1, 2, \ldots, n$, або

$$\begin{cases} [u_0, u_1] + c_1[u_1, u_1] + \ldots + c_n[u_n, u_1] = 0, \\ [u_0, u_2] + c_1[u_1, u_2] + \ldots + c_n[u_n, u_2] = 0, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ [u_0, u_n] + c_1[u_1, u_n] + \ldots + c_n[u_n, u_n] = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

де

$$[u_i, u_j] = \iint_G \left(\frac{\partial u_i}{dx} \frac{\partial u_j}{dx} + \frac{\partial u_i}{dy} \frac{\partial u_j}{dy} \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

Причому

$$[u_i, u_j] = [u_j, u_i].$$

Функція $u(x, y)$ з коефіцієнтами, визначеними з системи (7), є наближеним розв'язком задачі Діріхле. Точність наближення залежить від вибору координатних функцій $u_k(x, y)$, а також від кількості цих функцій.

Приклад 1. Знайти функцію $u(x, y)$, гармонійну в області $G = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$, яка на межі Γ цієї області задовольняє умову $u|_\Gamma = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Виберемо функції

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_1(x, y) = xy \cdot (1 - x - y),$$

$$u_2(x, y) = x^2 y \cdot (1 - x - y), \quad u_3(x, y) = xy^2 \cdot (1 - x - y)$$

і утворимо лінійну комбінацію

$$\begin{aligned} u(x, y) = x^2 + y^2 + c_1 xy \cdot (1 - x - y) + \\ + c_2 x^2 y \cdot (1 - x - y) + c_3 xy^2 \cdot (1 - x - y). \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

Легко перевірити, що функція $u(x, y)$ з (8) задовольняє задану крайову умову для довільних значень сталих c_1, c_2, c_3.

Для складання системи (7) обчислимо коефіцієнти біля невідомих c_1, c_2, c_3 та вільні члени. Результати обчислень (значення коефіцієнтів біля невідомих) наведені у таблиці.

j	$[u_0,u_j]$	$[u_1,u_j]$	$[u_2,u_j]$	$[u_3,u_j]$
1	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{3}{1120}$	$\frac{1}{70}$
3	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{3}{1120}$

Таким чином, для відшукання c_1, c_2, c_3 одержали систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{90}c_1 + \frac{1}{252}c_2 + \frac{1}{252}c_3 = \frac{1}{30}, \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{3}{1120}c_2 + \frac{1}{70}c_3 = \frac{1}{90}, \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{1}{70}c_2 + \frac{3}{1120}c_3 = \frac{1}{90}, \end{cases}$$

розв’язком якої є

$$c_1 = \frac{3031}{997} \approx 3{,}0401, \qquad c_2 = c_3 = -\frac{56}{997} \approx -0{,}0562.$$

Підставляючи знайдені значення c_1, c_2, c_3 у формулу (8), одержуємо наближений розв’язок задачі:

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + \left(3{,}0401 - 0{,}0562(x+y)\right) \cdot xy(1-x-y).$$

Для порівняння з результатом, отриманим методом Лібмана, обчислимо

$$u(0{,}4;0{,}2) = 0{,}2962 \approx 0{,}30. \ \blacksquare$$

2. Метод Рітца для рівняння Пуассона. Метод Рітца можна використати також для розв’язування рівняння Пуассона. Тільки при цьому доведеться досліджувати на мінімум функціонал, визначений формулою (3). Проілюструємо застосування цього методу на прикладі.

Приклад 2. В області $G = \{(x,y): 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$ знайти методом Рітца розв’язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y, \tag{9}$$

який задовольняє умови

$$u(x,0)=0,\quad u(x,2)=x+2,\qquad 0\le x\le 2,$$
$$u(0,y)=y,\quad u(2,y)=2y,\qquad 0\le y\le 2. \tag{10}$$

Розв'язання. Оскільки G є прямокутником, а крайові умови на її межі задані лінійними функціями, то шукатимемо функцію $u_0(x,y)$ з невизначеними коефіцієнтами у вигляді

$$u_0(x,y)=Axy+Bx+Cy+D.$$

Підставляючи $u_0(x,y)$ у крайові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} Bx+D=0, \\ 2Ax+Bx+2C+D=x+2, \\ Cy+D=y, \\ 2Ay+2B+Cy+D=2y, \end{cases}$$

з якої знаходимо $A=0{,}5$, $B=0$, $C=1$, $D=0$.

Таким чином,

$$u_0(x,y)=0{,}5xy+y.$$

У якості функцій $u_k(x,y)$ можна вибрати, наприклад, функції

$$u_1(x,y)=xy(x-2)(y-2),\quad u_2(x,y)=x^2y(x-2)(y-2),$$
$$u_3(x,y)=xy^2(x-2)(y-2),\quad u_4(x,y)=xy(x-2)^2(y-2),$$
$$u_5(x,y)=xy(x-2)(y-2)^2,\quad \ldots$$

Обмежуючись випадком $n=1$, шукатимемо наближений розв'язок задачі (9), (10) у вигляді

$$u(x,y)=0{,}5xy+y+C_1xy(x-2)(y-2).$$

Тоді

$$F[u]=\iint\limits_G \Big(\big(0{,}5y+2C_1(x-1)y(y-2)\big)^2+\big(0{,}5x+1+2C_1x(x-2)(y-1)\big)^2+$$
$$+2(x+y)\big(0{,}5xy+C_1xy(x-2)(y-2)\big)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{\partial F[u]}{\partial C_1}=\frac{512}{45}C_1+\frac{64}{9}.$$

Прирівнюючи знайдену похідну до нуля, одержуємо $C_1=-0{,}625$. А отже, наближеним розв'язком задачі (9), (10) є

$$u(x,y)=0{,}5xy+y-0{,}625xy(x-2)(y-2).\ \blacksquare$$

Для порівняння цього розв'язку з розв'язком, отриманим методом прямих, обчислимо наближене значення функції $u(x, y)$ в центрі області G – точці $M(1;1)$. За методом Рітца $u(1;1) \approx 0,875$, а за методом прямих $u(1;1) \approx 0,907$. Різниця у 0,03 вказує, що обома з цих методів ми доволі точно знайшли наближений розв'язок заданої крайової задачі. Зрозуміло, що для досягнення більшої точності у кожному з методів значення n необхідно збільшити.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. *Вержбицкий В.М.* Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
3. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.Э.* – Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
5. *Коллатц Л.* – Численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1953. – 490 с.
6. *Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.* Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.
7. *Лященко М.Я., Головань М.С.* Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
8. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в чисельные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
9. *Положий Г.Н. и др.* Математический практикум. – М.: Физматгиз, 1960. – 512 с.
10. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
11. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 230 с.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* – Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

ЗМІСТ