Міністерство освіти і науки України

Тернопільський національний технічний університет

імені Івана Пулюя

Кафедра математичних методів в інженерії

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Конспект лекцій

для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання

Тернопіль 2015

Валяшек В.Б. Теорія функцій комплексної змінної. Конспект лекцій для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання. / Кривень В.А., Валяшек В.Б., Каплун А.В., Ясній О.П. – Тернопіль : в-во ТНТУ, 2015. – 87 с.

Укладачі: д. ф.- м. н., проф. Кривень В.А.,
к. ф.- м. н., доц. Валяшек В.Б.,
докт. пед. н., проф. Каплун А.В.,
к. т. н., доц., Ясній О.П.

Відповідальний за випуск: Валяшек В.Б.

Рецензент: к. ф.- м. н., доц. Цимбалюк Л.І.

Методичні вказівки розглянуто й схвалено на засіданні кафедри математичних методів в інженерії (протокол №7 від 20.01.2015р.)

Рекомендовано до друку методичною радою факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії (протокол №6 від 3 лютого 2015р.)

Вступ

Теорія функцій комплексної змінної (ТФКЗ) має численні застосування в теорії пружності, термодинаміці, електротехніці і радіотехніці тощо. Апарат ТФКЗ придатний для дослідження та обчислення дійсних інтегралів, рядів, рівнянь, а також для розв'язування багатьох інженерних задач. Ефективним при розв'язуванні диференціальних рівнянь, в тому числі з частинними похідними, є застосування операційного числення - одного з методів теорії функцій комплексної змінної. Саме тому заключним розділом у циклі математичних дисциплін для майбутніх інженерів є ТФКЗ.

Пропонований конспект лекцій допоможе студентам технічного університету опанувати курс теорії функцій комплексної змінної та елементів операційного числення в обсязі, достатньому для застосування як до теоретичних досліджень, так і до важливих практичних задач. Виклад матеріалу ілюструється численними прикладами, зразками їх розв'язування.

Конспект лекцій розрахований на студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1.1 Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом z називається впорядкована пара дійсних чисел x та y: $z = (x, y)$. Якщо $y = 0$, то відповідну пару коротко позначатимемо через x, поклавши $(x, 0) = x$. Таким чином, множина $\boldsymbol{R}$ всіх дійсних чисел є підмножиною множини всіх комплексних чисел, яку позначатимемо через $\boldsymbol{C}$.

Ввівши поняття комплексного числа як пари дійсних чисел, визначимо основні операції над цими числами. Оскільки $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$, то при встановленні основних арифметичних операцій над комплексними числами слід вимагати, щоб ці операції, будучи застосованими до дійсних чисел, давали ті ж результати, які отримуємо в арифметиці дійсних чисел. З іншого боку, якщо ми хочемо, щоб комплексні числа мали універсальне застосування в питаннях аналізу, потрібно вимагати, щоб основні операції над ними задовольняли усім аксіомам арифметики дійсних чисел.

Суму двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ та $z_2 = (x_2, y_2)$ визначимо за допомогою рівності

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{1.1}$$

Застосувавши це означення до двох дійсних чисел x_1 та x_2, матимемо

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = x_1 + x_2,$$

тобто перша вимога, яка накладається нами на операції, що вводяться, виконується по відношенню до додавання.

Добуток двох комплексних чисел z_1 та z_2 визначимо з допомогою рівності

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2,\ x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2). \tag{1.2}$$

Це означення, будучи застосованим до двох дійсних чисел x_1 та x_2, дає

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0) = x_1 \cdot x_2,$$

тобто дія множення не приводить до протиріччя з арифметикою дійсних чисел.

Користуючись формулами (1.1) та (1.2), легко переконатись, що операції додавання та множення комплексних чисел підпорядковуються відомим п'яти законам арифметики:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,

2) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$,

3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,

4) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$,

5) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Серед усіх комплексних чисел особливу роль виконує число, яке зображається парою $(0,1)$ і позначається буквою i. Підносячи це число до квадрата, що зводиться до множення його на самого себе, згідно з (1.2) отримуємо

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1,$$

звідки випливає позначення $i = \sqrt{-1}$. Це число домовились називати *уявною одиницею*. З врахуванням даного позначення довільне комплексне число можна записати так:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + i\cdot y.$$

Запис

$$z = x + i\cdot y \qquad (1.3)$$

називається *алгебраїчною формою* комплексного числа. При цьому дійсні числа $x = \operatorname{Re} z$ та $y = \operatorname{Im} z$ називаються відповідно *дійсною* та *уявною* частинами числа z. Очевидно, якщо $\operatorname{Im} z = 0$, то комплексне число z перетворюється в дійсне число, а якщо $\operatorname{Im} z = 0$ – в чисто уявне. Два комплексні числа рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою як дійсні, так і уявні частини. Число $\bar{z} = x - i\cdot y$ називається *комплексно спряженим* до числа $z = x + i\cdot y$.

Легко переконатись, що в області всіх комплексних чисел число 0 – єдине число, від додавання якого результат не змінюється, а число 1 – єдине число, від множення на яке результат не змінюється

Різницею двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ та $z_2 = (x_2, y_2)$ ми назвемо число z, яке задовольняє рівність

$$z_2 + z = z_1. \qquad (1.4)$$

Додавши до обидвох частин рівності (1.4) число $-z_2 = -1\cdot z_2$, переконуємось в єдиності існування такого числа z, яке дорівнює

$$z = z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i.$$

Ділення є операцією, оберненою множенню. *Під символом* $\frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ ми, згідно з означенням, розумітимемо число w, яке задовольняє рівність

$$z\cdot w = 1.$$

Домножуючи обидві частини цієї рівності на число $\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}$, знаходимо $w = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2}$.

Частку двох комплексних чисел z_1 та z_2 визначимо так:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2}.$$

Отже, ділення, за винятком ділення на нуль, завжди однозначно виконується в області комплексних чисел.

Рівності

$$\left(x_1 - i\,y_1\right) + \left(x_2 - i\,y_2\right) = \left(x_1 + x_2\right) - \left(y_1 + y_2\right)i\,,$$

$$\left(x_1 - i\,y_1\right)\cdot\left(x_2 - i\,y_2\right) = \left(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2\right) - i\,\left(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2\right),$$

будучи зіставленими з рівностями (1.1) та (1.2), показують, що, якщо в сумі чи добутку двох комплексних чисел замінимо доданки чи множники спряженими до них числами, то в результаті отримаємо числа спряжені. Такий самий висновок справедливий для віднімання і ділення, оскільки ці дії є оберненими по відношенню до додавання та множення. Звідси, зокрема, випливає, що будь-яка рівність між комплексними числами, обидві частини якої містять дії додавання, віднімання, множення та ділення, не порушиться, якщо кожне з комплексних чисел замінити спряженим до нього числом.

Приклад 1.1. Записати в алгебраїчній формі комплексне число $\left(\dfrac{3i^6 + 5i^{13}}{7 - 2i^{23}}\right)^2$

Р о з в′ я з а н н я

Перш за все відзначимо, що для довільного $m \in \boldsymbol{Z}$ маємо $i^{4m} = \left(i^2\right)^{2m} = \left(-1\right)^{2m} = 1$, отже, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1\cdot\left(-1\right) = -1$, $i^{13} = i^{12}\cdot i = 1\cdot i = i$, $i^{23} = i^{20}\cdot i^3 = 1\cdot\left(-i\right) = -i$. Тому задане число дорівнюватиме

$$\left(\frac{3i^6 + i^{13}}{5 - 2i^{23}}\right)^2 = \left(\frac{3\cdot\left(-1\right) + i}{5 - 2\cdot\left(-i\right)}\right)^2 = \left(\frac{\left(-3 + i\right)\left(5 - 2i\right)}{\left(5 + 2i\right)\left(5 - 2i\right)}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{-13 + 11i}{29}\right)^2 = \frac{169 - 121 - 2\cdot 143i}{841} = \frac{48}{841} - \frac{286}{841}i.$$

1.2 Геометричне зображення комплексних чисел

Довільне комплексне число $z = \left(x, y\right)$ ми можемо зображати точкою на площині з координатами *x* та *y*, яку надалі позначатимемо через *z*. Площина, точки якої зображають комплексні числа, називається *комплексною площиною*. Початок координат, якому відповідає число 0, називають нульовою точкою. При такому зображенні комплексних чисел дійсні числа зображаються точками осі абсцис, точки осі ординат являють собою чисто уявні числа, тому вісь абсцис називають *дійсною віссю*, вісь ординат – *уявною віссю* (рис. 1.1). Комплексне число $z = x + i\cdot y$ можна також зображати вектором, початок якого знаходиться в нульовій точці, а кінець – в точці *z*. Тоді дійсна та уявна частини числа є проекціями цього вектора на дійсну та уявну осі.

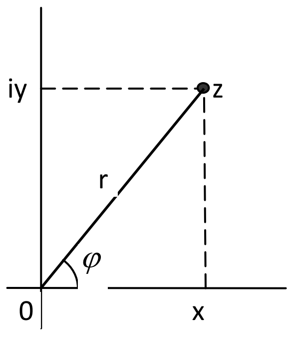


Рисунок 1.1

Очевидно, що сума $z_1 + z_2$ зобразиться вектором, який буде сумою векторів, що зображають числа z_1 та z_2.

Відстань *r* точки *z* від нульової точки, тобто довжина вектора z, дорівнюватиме

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}\,.$$

Це невід′ємне число r називається *модулем* комплексного числа z і позначається через $|z|$. Легко бачити, що, коли z – дійсне число, то модуль дорівнює його абсолютній величині. Усі числа, які мають один і той же модуль r, зобразяться точками кола радіуса r з центром в нульовій точці. Єдиним числом, модуль якого дорівнює нулю, є число 0.

Положення вектора z визначається з допомогою кута φ між додатним напрямом дійсної осі та напрямом цього вектора. Отже, φ - це кут, на який потрібно повернути додатний напрямок дійсної осі, щоб він збігся з напрямом вектора z, вважаючи цей кут додатним, якщо обертання здійснюється проти годинникової стрілки, і від′ємним – в протилежному випадку. Цей кут називається *аргументом* комплексного числа z (рис.1.1). Аргумент визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π. Множину всіх таких значень позначатимемо через $Arg\,z$. Аргумент числа $z = 0$ взагалі не визначений. Єдине значення $\varphi \in Arg\,z$, $z \neq 0$, яке належить фіксованому проміжку $[a,\, a + 2\pi)$, позначатимемо через $\arg_a z$. Число $\arg_{-\pi} z$ називається *головним значенням аргумента* і позначається просто $\arg z$ (рис.1.1). Рівність $k_1 Arg\,z_1 = k_2 Arg\,z_2$, $k_1 \in \boldsymbol{Z}$, $k_2 \in \boldsymbol{Z}$ вважається правильною, якщо

$$k_1 \arg z_1 - k_2 \arg z_2 = 2\pi n\,,\; n \in \boldsymbol{Z}\,.$$

Оскільки r та φ є полярними координатами точки $z = (x, y)$, то $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тому

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.5}$$

Ця форма запису комплексного числа називається *тригонометричною*.

Очевидно, модуль та аргумент числа $z \neq 0$ можна визначити через його дійсну та уявну частини за допомогою формул $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $tg\,\varphi = \dfrac{y}{x}$. При розв′язуванні останнього рівняння слід обов′язково враховувати знаки чисел x та y, наприклад

$$\arg z = \begin{cases} arktg\dfrac{y}{x}\,, & \text{ÿêùî} \quad x > 0, \\ arktg\dfrac{y}{x} + \pi\,, & \text{ÿêùî} \quad x < 0,\; y > 0, \\ arktg\dfrac{y}{x} - \pi\,, & \text{ÿêùî} \quad x < 0,\; y \le 0, \\ \dfrac{\pi}{2}\,, & \text{ÿêùî} \quad x = 0,\; y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}\,, & \text{ÿêùî} \quad x = 0,\; y < 0. \end{cases}$$

Надалі без додаткових пояснень вживатимемо позначення $z = x + i \cdot y$, $w = u + i \cdot v$, $c = a + i \cdot b$, $x, y, u, v, a, b \in \boldsymbol{R}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r, \varphi, \rho, \theta \in \boldsymbol{R}$; аналогічні позначення літер з індексами (наприклад, $w_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$).

Оскільки комплексне число ми розуміємо як вектор, то легко дістати нерівності трикутника у вигляді

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \qquad |z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|.$$

З першої з них випливає, що $|z|=|x+i\cdot y| \le |x|+|y|$. Очевидно також, що $|x|=\sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}=|z|$ і $|y| \le |z|$. Отже, ми прийшли до таких важливих нерівностей:

$$\left.\begin{array}{l}|\mathrm{Re}\, z| \\ |\mathrm{Im}\, z|\end{array}\right\} \le |z| \le |\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z| \; . \tag{1.6}$$

Розглянемо добуток двох комплексних чисел

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Матимемо:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1\cdot r_2\,(cos\,\varphi_1+i\,sin\,\varphi_1)(cos\,\varphi_2+i\,sin\,\varphi_2)= \\ &= r_1\cdot r_2\,((cos\,\varphi_1\,cos\,\varphi_2-sin\,\varphi_1\,sin\,\varphi_2)+i\,(sin\,\varphi_1\,cos\,\varphi_2+ \\ &+cos\,\varphi_1\,sin\,\varphi_2)=r_1\cdot r_2\,(cos\,(\varphi_1+\varphi_2)+i\,sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Отже, ми отримали, що

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \quad Arg\,(z_1\cdot z_2)=Arg\,z_1+Arg\,z_2, \tag{1.7}$$

тобто *модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їхніх модулів,* а *аргумент – сумі аргументів співмножників*.

Рівності (1.7) легко поширюються на довільну кількість комплексних співмножників, зокрема, якщо всі співмножники рівні між собою, то

$$|z^n|=|z|^n, \quad Arg\,(z^n)=n\cdot Arg\,z. \tag{1.8}$$

Враховуючи (1.5), згідно з рівностями (1.8) отримуємо відому *формулу Муавра*:

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{1.9}$$

Беручи $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, визначимо $\sqrt[n]{z}$ як комплексне число, яке, будучи піднесеним до n-го степеня, дорівнює z. Модуль цього числа, очевидно, дорівнюватиме ${}_{+}\sqrt[n]{r}$, а аргумент дорівнюватиме $\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$, де k – довільне ціле число. Надаючи k значення 0, 1, . . . , n – 1, отримаємо n різних значень виразу $\sqrt[n]{z}$. Отже, $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень:

$$\sqrt[n]{z}={}_{+}\sqrt[n]{r}\left(cos\,\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\,sin\,\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \; k=0,1,\ldots,n-1. \tag{1.10}$$

На комплексній площині ці n значень виразу $\sqrt[n]{z}$ зобразяться вершинами деякого правильного n-кутника, вписаного в коло з центром в нульовій точці і радіусом ${}_{+}\sqrt[n]{r}$.

Зауваживши, що при $z_2 \neq 0$, згідно з означенням частки, $z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2$, відповідно до (1.7) маємо:

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| \ , \qquad Arg\, z_1 = Arg\frac{z_1}{z_2} + Arg\, z_2 ,$$

звідки

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \ , \qquad Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg\, z_1 - Arg\, z_2 , \tag{1.11}$$

тобто *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці їхніх модулів,* а *аргумент – різниці аргументів діленого і дільника*.

1.3 Послідовності та числові ряди комплексних чисел

У комплексному аналізі поняття границі, числового ряду, функції тощо вводяться так само, як у дійсному аналізі, а теореми, які відомі з дійсного аналізу, як правило залишаються справедливими і в комплексному аналізі, причому їхні доведення або цілком аналогічні, або їх можна отримати як наслідки з відомих теорем дійсного аналізу використовуючи нерівності (1.6).

Аналогічно до означення послідовності дійсних чисел послідовністю комплексних чисел називається функція $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{C}$. Позначатимемо через z_n образ $n \in \boldsymbol{N}$, а саму послідовність – символом (z_n).

Число $c \in \boldsymbol{C}$ називається *границею* послідовності (z_n), якщо $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n - c| = 0$. Записуватимемо це так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \text{або} \quad z_n \to c \ (n \to \infty).$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*.

Комплексній послідовності (z_n) можна поставити у відповідність дві дійсні послідовності (x_n) та (y_n), де $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$.

Теорема 1.1. Для збіжності послідовності (z_n) необхідною і достатньою є збіжність послідовностей (x_n) та (y_n).

Д о в е д е н н я. Нехай $c = a + ib$. Поклавши в нерівностях (1.6) $z_n - c$ замість z, отримаємо

$$\left.\begin{matrix} |x_n - a| \\ |y_n - b| \end{matrix}\right\} \le |z_n - c| \le |x_n - a| + |y_n - b| \ . \tag{1.12}$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, то, згідно означення, $|z_n - c| \to 0$ $(n \to \infty)$. Тому, відповідно до лівої частини (1.12), дістаємо $|x_n - a|$ та $|y_n - b| \to 0$ $(n \to \infty)$, що означає збіжність послідовностей (x_n) та (y_n). Аналогічно, використовуючи праву частину (1.12), доводимо достатність.

Числовим рядом називатимемо суму

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_k + \ldots. \tag{1.13}$$

Означення 1.1 Числовий ряд (1.13) називається *збіжним*, якщо послідовність його часткових сум $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ є збіжною.

Згідно з цим означенням, відповідно до теореми 1.1, отримуємо таку теорему.

Теорема 1.2. Для збіжності числового ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ необхідною і достатньою є збіжність числових рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

Безпосередньо з означення 1.1 випливає *необхідна умова збіжності* числового ряду (1.13): $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

Для числового ряду (1.13) розглянемо числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_k| + \ldots. \tag{1.14}$$

Неважко переконатись, що із збіжності ряду (1.14) випливає збіжність ряду (1.13). Обернене твердження, взагалі кажучи, хибне. Відповідно до цього дамо означення.

Означення 1.2. Числовий ряд (1.13) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається числовий ряд (1.14).

Означення 1.3. Числовий ряд (1.13) називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а числовий ряд (1.14) - розбігається.

Для дослідження збіжності числового ряду (1.14) можна застосовувати відомі з курсу математичного аналізу ознаки. Зокрема, розглянемо ознаку Коші.

Теорема 1.3. Нехай $q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|z_k|}$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1.13) абсолютно збіжний; 2) якщо $q > 1$, то він розбіжний.

Д о в е д е н н я. 1) якщо $q < 1$, то, за означенням верхньої границі,

$(\forall \varepsilon \in (0;\, 1-q))(\exists k_0 \in \boldsymbol{N})(\forall k > k_0)\left\{\sqrt[k]{|z_k|} < q + \varepsilon < 1\right\}$, отже, ряд $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} |z_k|$ мажорується числовим рядом $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} (q+\varepsilon)^k$ і тому є збіжним. Значить, збігатиметься і ряд (1.14), що означає абсолютну збіжність ряду (1.13).

2) якщо $q > 1$, то існує підпослідовність натуральних чисел (k_j), $k_j \to \infty$, така що $\sqrt[k_j]{|z_{k_j}|} \to q > 1$ $(j \to \infty)$, тобто для нескінченної множини k_j маємо $|z_{k_j}| > 1$, тому не виконується необхідна умова збіжності для ряду (1.13), отже, він розбігається.

1.4 Нескінченно віддалена точка. Сфера Рімана

Природним є назвати послідовність точок

$$z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_k,\, \ldots \tag{1.15}$$

необмеженою, якщо відповідна послідовність

$$|z_1|,\, |z_2|,\, \ldots,\, |z_k|,\, \ldots$$

необмежена, тобто для довільного круга центром в нульовій точці як завгодно великого радіуса є точки послідовності, які лежать поза кругом. Якщо $\lim\limits_{k\to\infty}|z_k| = +\infty$, то казатимемо, що послідовність чисел (1.15) прямує до нескінченності і символічно записуватимемо це так:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = +\infty.$$

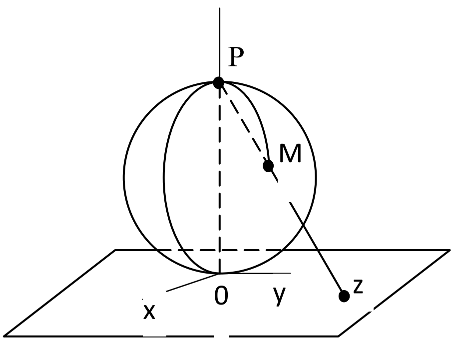


Рисунок 1.2

Щоб надати останній рівності простого геометричного тлумачення, зображатимемо комплексні числа точками на сфері. Для цього візьмемо сферу, яка дотикається до площини в нульовій точці (рис. 1.2). Діаметр сфери OP, який проходить через точку 0, буде перпендикулярним до площини; другу точку перетину його зі сферою, точку *P*, назвемо полюсом. Довільне комплексне число z, яке зображається точкою на площині, з′єднаємо з полюсом прямою лінією Pz. Очевидно, вона перетне сферу в єдиній, відмінній від *P*, точці, яку приймемо за *зображення* комплексного числа z. Тим самим ми установили *взаємно однозначну і взаємно неперервну* відповідність між точками площини і точками сфери (за винятком точки *P*). Подивимось, у якому відношенні є точка *P* з іншими точками сфери. Якщо $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = +\infty$, то точки, які зображають числа z_k на сфері, неухильно наближаються до точки *P*. Тому природним буде взяти точку *P* *для зображення нескінченності*, а відповідну їй єдину точку площини назвати *нескінченно віддаленою точкою*.

Отже, з допомогою вказаного перетворення, яке називається *стереографічною проекцією*, ми встановили взаємно однозначну відповідність між точками сфери і точками площини, включаючи її нескінченно віддалену точку. Ця сфера, точки якої зображають сукупність усіх комплексних чисел і нескінченності, називається *комплексною числовою* *сферою* або *сферою Рімана*. Перевага зображення комплексних чисел на сфері замість площини полягає в тому, що тут наочно зображається нескінченно віддалена точка площини.

Відзначимо ще одну важливу властивість стереографічної проекції: *при стереографічній проекції довільне коло площини чи довільна пряма площини переходить в коло на сфері*. Єдиною відмінністю образу кола від образу прямої є те, що образ прямої проходить через полюс, а образ кола – ні. Відповідно до вказаної властивості під *узагальненим колом* на площині розуміють звичайне коло або пряму. *Узагальненим кругом* на площині вважатимемо зовнішність чи внутрішність звичайного кола або півплощину.

1.5 Множини точок на площині, область, лінія

Нагадаємо деякі відомі з курсу математичного аналізу означення множин точок на площині.

Околом точки називається круг (без кола, яке його обмежує) з центром в цій точці; зокрема, круг радіуса ε з центром в точці z_0 називатимемо ε*-околом* точки z_0 і позначатимемо $U_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Розглядаючи сферу Рімана, логічно буде ε*-околом нескінченно віддаленої точки* назвати множину $\{\infty\} \cap \left\{z : |z| > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$.

Множина $E \subset \boldsymbol{C}$ називається *обмеженою*, якщо всі її точки розміщені всередині деякого кола з центром в початку координат.

Точка z_0 називається *граничною* для деякої множини *E*, якщо в будь-якому околі цієї точки є безліч точок множини *E*.

Відзначимо, що сама гранична точка множини *E* може цій множині і не належати. Наприклад, для множини $E = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$ точка $z_0 = 0 \notin E$ є граничною.

Множина *E* називається *замкненою*, якщо їй належать усі її граничні точки.

Точка z_0 називається *внутрішньою* для множини *E*, якщо вона належить цій множині разом з якимось своїм околом.

Точка z_0 називається *зовнішньою* для множини *E*, якщо існує такий окіл точки z_0, жодна точка якого не належить *E*.

Множина *E* називається *відкритою*, якщо усі її точки є внутрішніми.

Наприклад, множина точок, які знаходяться між двома концентричними колами, є відкритою. Приєднавши до цієї множини точки, які лежать на одному з цих кіл (або на обидвох), отримаємо уже не відкриту множину.

Множина *E* називається *зв′язною*, якщо будь-які її дві точки можна з′єднати ламаною, яка повністю належить цій множині.

Областю називатимемо відкриту зв′язну множину.

Прикладом області може бути щойно наведена множина. В другому ж випадку ми уже не маємо області.

Надалі область позначатимемо D або G.

Межею області називається множина усіх її граничних точок, які їй не належать. Точки межі області називаються *межовими*.

Єдиним прикладом області без межі є уся розширена комплексна площина $\overline{\boldsymbol{C}}$. Усяка інша область має межу, зокрема, межею всієї скінченної комплексної площини $\boldsymbol{C}$ буде нескінченно віддалена точка. Слід відзначити, що не кожна область D має зовнішні точки; наприклад, сукупність усіх точок площини, які не лежать на відрізку дійсної осі $[-1;1]$, є областю, яка не має зовнішніх точок.

Множина, яка складається з області D та її межі, називається *замкненою областю* і позначається через $\overline{D}$.

Перейдемо тепер до поняття неперервної лінії в розумінні Жордано. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ - дійсні неперервні функції змінної t, яка змінюється на відрізку $\alpha \le t \le \beta$. Два рівняння

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta) \tag{1.16}$$

дають параметричне зображення *неперервної* лінії. Якщо вимагатимемо, щоб двом різним значенням параметра t (за винятком, можливо, значень $t=\alpha$ і $t=\beta$, які відповідають початку і кінцю лінії) завжди відповідали дві різні точки лінії, то наша лінія не матиме кратних точок, тобто точок самоперетину. Таку лінію називатимемо *жордановою*. Якщо покласти $z = x + i \cdot y$, так що $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, то аналітичне зображення лінії можна записати з допомогою одного рівняння:

$$z = z(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)\,. \tag{1.16$'$}$$

Коли параметр t змінюється, зростаючи на відрізку $[\alpha, \beta]$, точка z описує жорданову лінію, початком та кінцем якої є відповідно точки $z(\alpha)$ та $z(\beta)$; тим самим на лінії установлюється додатний напрямок.

Очевидно, геометрично жорданова лінія являє собою множину точок, які є взаємно однозначним і неперервним відображенням прямолінійного відрізка. Якщо початок і кінець жорданової лінії збігаються, тобто $z(\alpha) = z(\beta)$, то вона називається *замкненою*. Така лінія розділяє площину на дві різні області: одну, яка не містить нескінченно віддаленої точки і називається *внутрішністю* по відношенню до даної лінії; другу, яка містить нескінченно віддалену точку і називається *зовнішністю* по відношенню до даної лінії.

Внутрішність замкненої жорданової лінії має таку важливу властивість: яку б замкнену жорданову лінію ми не провели в цій області, її внутрішність також належатиме даній області. Взагалі, довільна область, яка має цю властивість, називається *однозв′язною*. Область, яка не має такої властивості, називається *многозв′язною*. Наприклад, множина точок $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ буде многозв′язною областю.

Для областей, які розміщені в розширеній площині, поняття однозв′зної області узагальнюється. А саме, така область називається однозв′язною, якщо для довільної замкненої жорданової кривої з цієї області або її внутрішність, або її зовнішність (включаючи і нескінченно віддалену точку) належить цій області.

Розглядаючи області, межі яких складаються із декількох замкнутих жорданових ліній, ми отримуватимемо приклади многозв′язних областей. Нехай $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – замкнені жорданові лінії, такі, що кожна з ліній $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ лежить зовні інших і всі вони розміщені усередині Γ (рис. 1.3). Множина точок площини, які лежать одночасно усередині лінії Γ і зовні ліній $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, являє собою область, межею якої є сукупність точок ліній $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Отже, при $n \geq 1$ в області існують такі неперервні замкнені лінії, внутрішності яких не повністю належать області. Таким чином, область, межа якої складається із декількох $(n+1)$ замкнених ліній буде многозв′язною, а конкретніше $-(n+1)$-*зв′язною*. Наприклад, множина точок, які лежать усередині кругового кільця $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ – двозв′язна область. На рисунку 1.3 зображено чотиризв′язну область.

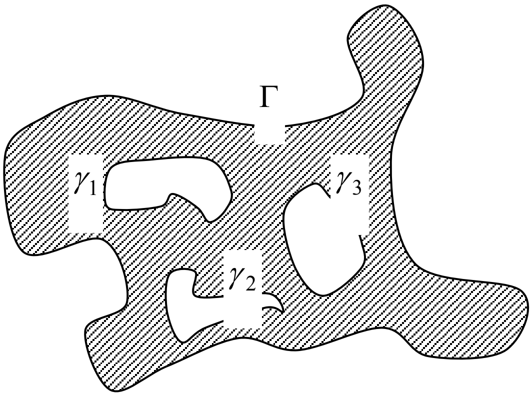


Рисунок 1.3

ЛЕКЦІЯ 2

КОМПЛЕКСНА ЗМІННА. АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

2.1 Поняття функції комплексної змінної

Розглянемо множину $E \subset \boldsymbol{C}$ і умовимося, що комплексне число $z = x + i \cdot y$ може бути ототожнене з кожним числом цієї множини *E*. В такому випадку ми назвемо *z комплексною змінною,* а *E –областю її зміни*. Геометрично область *E* зміни комплексної змінної *z* зобразиться як деяка множина точок в комплексній числовій площині.

Якщо кожному $z \in E$ *поставлене у відповідність число* $w = u + iv \in \boldsymbol{C}$*, то кажуть, що на множині* $E \subset \boldsymbol{C}$ *задана функція комплексної змінної*. Символічно це записується так: $w = f(z)$.

Зауваження 2.1. Може статись, що кожному значенню комплексної змінної *z* відповідає декілька значень змінної *w*. В такому випадку *w* називається *многозначною* функцією комплесної змінної *z*, тоді як в першому випадку вона називається *однозначною* функцією. Надалі, якщо не буде додатково зауважене інше, ми матимемо справу тільки з однозначними функціями.

Оскільки $z = x + i \cdot y$, то *u* та *v* є дійсними функціями двох дійсних змінних *x* та *y*. Таким чином, задання *w* як функції комплексної змінної *z* зводиться до задання двох дійсних функцій *u* та *v* від двох дійсних змінних *x* та *y*:

$$w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Кожній точці множини *E*, яка є областю зміни змінної *z*, відповідає певне комплексне число *w*. Зображаючи його як точку в числовій площині, отримуємо множину точок E'. Отже, задання *w* як функції комплексної змінної *z* геометрично зводиться до установлення відповідності між множинами точок *E* та E', згідно з якою кожній точці множини *E* відповідає певна точка множини E'. В цьому випадку кажуть, що множина точок *E* відображається на множину точок E'. При цьому деякі точки множини E' можуть бути кратними, тобто такими, що різним значенням *z* відповідає одне і те саме значення *w*. Розглядаючи відповідність між точками множин *E* та E' як відображення множини E' на множину *E* , ми отримуємо для кожного значення комплексної змінної *w*, що змінюється на множині точок E', одне або декілька (може бути навіть безліч) значень *z*. Отже, навпаки, *z* можна розглядати як функцію комплексної змінної *w*. Така функція називається *оберненою* стосовно до функції $w = f(z)$. Якщо різним значенням комплексної змінної *z* відповідають різні значення функції *w*, то відображення множини *E* на E' буде взаємно однозначним, тобто таким, що кожній точці множини *E* відповідає єдина точка множини E' і, навпаки, кожній точці множини E' - єдина точка множини *E*. У цьому випадку *z*, яка розглядається як обернена функція *w*, також буде однозначною функцією. В загальному ж випадку функція, обернена однозначній функції, може бути многозначною і навіть нескінченнозначною. Більше того, функція, обернена однозначній, може мати при кожному значенні незалежної змінної нескінченну множину значень, які утворюють неперервну лінію. Наприклад, $w = |z|$ є однозначною функцією комплексної змінної *z*. Розглядаючи ж *z* як функцію *w*, ми бачимо, що заданому значенню $w = \rho$ відповідає нескінченна множина значень *z*, для яких $|z| = \rho$, тобто усе коло з центром в нульовій точці і радіусом ρ. Проте, такі явища не є властивими диференційовним функціям, які ми будемо далі вивчати.

Перейдемо тепер до поняття границі функції. Нехай однозначна функція $w = f(z)$ задана на множині *E*, точка z_0 - гранична для множини *E*.

Означення 2.1. Якщо існує число $C \in \boldsymbol{C}$, таке що для довільного ε-околу $U_\varepsilon(C)$ точки *C* існує відповідний йому δ-окіл $U_\delta(z_0)$ точки z_0, такий, що для довільної точки $z \in U_\delta(z_0) \cap E$, $z \neq z_0$ значення $f(z)$ попадає в $U_\varepsilon(C)$, то *C* називається *границею* функції $w = f(z)$ в точці z_0.

Записується це так:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Нехай $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y), C = A + iB$. Тоді комплексне співвідношення (2.1) еквівалентне двом дійсним:

$$\lim_{\substack{\tilde{o} \to \tilde{o}_0 \\ \acute{o} \to \acute{o}_0}} u(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{\tilde{o} \to \tilde{o}_0 \\ \acute{o} \to \acute{o}_0}} v(x, y) = B, \text{ де } z_0 = x_0 + y_0.$$

Доведення цієї теореми таке саме як і доведення теореми 1.1.

Нехай $z_0 = x_0 + y_0 \in E$ і є граничною точкою для множини *E*.

Означення 2.2. Функція $w = f(z)$ називається *неперервною* в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

З теореми 2.1 випливає, що функція $f(z)$ неперервна в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ неперервні в точці (x_0, y_0).

Означення 2.3. Функція $w = f(z)$ називається неперервною на деякій множині, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Означення 2.4. Функція $w = f(z)$ називається обмеженою на множині *E*, якщо $(\exists M > 0)(\forall z \in E)\{|f(z)| \leq M\}$.

Теорема 2.2. (Вейєрштрасса) Якщо функція $f(z)$ неперервна на обмеженій замкненій множині, то вона обмежена, а її модуль досягає своїх найменшого та найбільшого значень.

Д о в е д е н н я. З неперервності функції $f(z)$ випливає неперервність функції $|f(z)| = \sqrt{(u(x, y))^2 + (v(x, y))^2}$, тому досить застосувати відомі з курсу математичного аналізу теореми.

Приклад 2.1. Дослідити функцію $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + i}$ на неперервність.

Р о з в′ я з а н н я

Поклавши $z = x + i \cdot y$, виділимо $u(x, y)$ та $v(x, y)$:

$$f(z)=\frac{1}{(x+iy)^2+i}=\frac{1}{\left(x^2-y^2\right)+(2xy+1)i}=$$
$$=\frac{\left(x^2-y^2\right)-(2xy+1)i}{\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy+1)^2}=$$
$$=\frac{\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy+1)^2}-\frac{2xy+1}{\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy+1)^2}i,$$

звідки бачимо, що $u(x,y)=\dfrac{\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy+1)^2}$,

$$v(x,y)=\frac{2xy+1}{\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy+1)^2}.$$

Кожна з цих функцій є елементарною, отже, неперервною в усіх точках своєї області визначення, тобто в усіх точках $(x,y)\in \boldsymbol{R}^2$, крім тих, для яких

$$\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy+1)^2=0.$$

Знайдемо ці точки, тобто знайдемо розв′язки системи

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy+1=0. \end{cases}$$

Виразивши з першого рівняння y через x та підставивши в друге, знаходимо дві точки $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, в яких функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ не визначені, отже, не можуть бути неперервними.

Отже, задана функція $f(z)=\dfrac{1}{z^2+i}$ неперервна в усій комплексній площині за винятком точок $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ та $z_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.2 Диференціювання функції комплексної змінної

Нехай в області D задана функція $w=f(z)$ і $z_0\in D$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, то вона називається *похідною* функції $w=f(z)$ в точці z_0 і позначається $f'(z_0)$. Отже,

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \qquad (2.2)$$

Позначимо $z - z_0 = \Delta z$ (приріст аргумента в точці z_0) і $f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta w$ (приріст функції в точці z_0). Очевидно, рівність (2.2) можна переписати в такій еквівалентній формі:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad (2.3)$$

Функція називається *диференційовною* в точці z_0, якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta w = C \cdot \Delta z + \gamma(\Delta z) \cdot \Delta z, \qquad (2.4)$$

де C – число, яке не залежить від Δz, $\gamma(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Теорема 2.3. Для того, щоб функція $f(z)$ була диференційовною в точці z_0, необхідно і достатньо, щоб вона мала похідну в цій точці, причому $f'(z_0) = C$.

Д о в е д е н н я.

Необхідність. Згідно з означенням приріст диференційовної в точці z_0 функції можна записати у вигляді (2.4). Розділивши обидві частини цієї рівності на Δz, отримуємо

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = C + \gamma(\Delta z).$$

Оскільки $\gamma(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$, то існує границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = C$, отже, згідно з (2.3), існує $f'(z_0) = C$.

Достатність. Нехай існує $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$. Позначивши

$$f'(z_0) - \frac{\Delta w}{\Delta z} = \gamma(\Delta z), \qquad (2.5)$$

маємо $\gamma(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Рівність (2.5) перепишемо у вигляді $f'(z_0) = \frac{\Delta w}{\Delta z} + \gamma(\Delta z)$. Після домноження обидвох частин цієї рівності на Δz отримуємо (2.4) з $C = f'(z_0)$. Отже, функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0.

Теорему доведено.

Функція $w = f(z)$, яка має скінченну похідну в точці z_0, називається *моногенною* в цій точці. Якщо функція моногенна в усіх точках деякої області D, то вона називається *моногенною в області* D.

Якщо функція $w = f(z)$ має неперервну похідну в деякому околі точки z_0, то вона називається *аналітичною* в точці z_0. Якщо функція аналітична в кожній точці області D, то вона називається *аналітичною в області* D. Функція називається аналітичною в замкненій області $\overline{D}$, якщо вона аналітична в деякій області G, яка містить $\overline{D}$.

Функція $w = f(z)$ називається аналітичною в ∞, якщо функція $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z = 0$.

Зауваження 2.1. Очевидно, що з аналітичності функції випливає її моногенність. Із моногенності функції в деякій точці ще не випливатиме її моногенність у цій точці. Проте, як ми пізніше побачимо, з моногенності функції в області випливає її аналітичність в цій області. Отже, аналітичність функції в області рівносильна її моногенності в цій області.

2.3 Умови Коші - Рімана

Як ми побачили вище, формально означення похідної функції комплексної змінної нічим не відрізняється від відомого нам означення похідної функції дійсної змінної. В зв′язку з цим основні правила, відомі з диференціального числення функцій однієї змінної, поширюються і на похідні функцій комплексної змінної.

Разом з тим, в п. 2.1 відзначено, що задання функції комплексної змінної зводиться до задання двох дійсних функцій від двох дійсних змінних. Тому логічним є запитання: як пов′язана диференційовність функції $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ з поведінкою функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ в точці (x_0, y_0)?

Відповідь на це запитання дає важлива

Теорема 2.4. Для того, щоб функція $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ була диференційовною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ були диференційовними в точці (x_0, y_0) і при цьому виконувались умови:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.6}$$

Перш ніж приступити до доведення, відзначимо, що умови (2.6) називаються *умовами Коші – Рімана*.

Д о в е д е н н я.

Необхідність. Нехай функція $w = f(z)$ має похідну $f'(z_0) = C = A + i \cdot B$. Тоді, відповідно до теореми 2.2, її приріст в точці z_0 можна подати у вигляді (2.4). Відділимо в (2.4) дійсну та уявну частини, поклавши $\Delta w = \Delta u + i \cdot \Delta v$, $C = A + i \cdot B$, $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$, $\gamma(\Delta z) = \alpha(\Delta x, \Delta y) + i \cdot \beta(\Delta x, \Delta y)$:

$$\Delta u = A \cdot \Delta x - B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x - \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y, \tag{2.7}$$

$$\Delta v = B \cdot \Delta x + A \cdot \Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y. \tag{2.8}$$

Зрозуміло, що $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ та $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Отже, відповідно до означення диференційовності функції двох змінних, а також зв′язку диференційованості з існуванням частинних похідних, з рівності (2.7) випливає, що функція $u(x, y)$ диференційовна в точці (x_0, y_0) і в цій точці існують

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B\,. \tag{2.9}$$

Аналогічно з рівності (2.8) випливає диференційовність функції $v(x,y)$ в точці (x_0, y_0) і існування в цій точці

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A\,. \tag{2.10}$$

З рівностей (2.9) та (2.10) легко випливають рівності (2.6).

Отже, необхідність доведена.

Достатність. При наданні аргументу z приросту $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, функція $w = f(z)$ отримає приріст

$$\Delta w = \Delta u + i \cdot \Delta v\,. \tag{2.11}$$

Оскільки функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні в точці (x_0, y_0), то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta r\,, \tag{2.12}$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y + \beta \cdot \Delta r\,, \tag{2.13}$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x,\, \Delta y) \to 0$ та $\beta = \beta(\Delta x,\, \Delta y) \to 0$ при $\Delta r = \ = |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Підставивши (2.12) та (2.13) в (2.11), з врахуванням умов Коші Рімана (2.6), дістанемо:

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta r + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y + \beta \cdot \Delta r \right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta r + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta y + \beta \cdot \Delta r \right).$$

Замінивши $-\frac{\partial v}{\partial x} = i^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$, матимемо:

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y) + (\alpha + i \cdot \beta) \cdot \Delta r =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y) + (\alpha + i \cdot \beta) \cdot \Delta r =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \Delta z + (\alpha + i \cdot \beta) \frac{\Delta r}{\Delta z} \cdot \Delta z\,.$$

Отже, ми отримали Δw у формі (2.4) з $C = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ та $\gamma = (\alpha + i \cdot \beta) \frac{\Delta r}{\Delta z} \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тим самим доведена диференційовність функції $f(z)$ в точці z_0.

Теорему доведено

Зауваження 2.2 Виходячи з теореми 2.2, а також умов Коші Рімана (2.6), матимемо:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.14)$$

2.4 Геометричний зміст модуля та аргументу похідної. Конформні відображення

Нехай функція $w=f(z)$ визначена та неперервна в області D і диференційовна в точці $z_0\in D$, причому $f'(z_0)\neq 0$. Тоді ми можемо подати

$$f'(z_0)=A(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha),\ A>0. \qquad (2.15)$$

Звідси, згідно з означенням похідної, маємо

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=A>0. \qquad (2.16)$$

Відображення, яке має властивість (2.16), називається *відображенням сталого лінійного розтягу*, а число A - коефіцієнтом розтягу.

Зауваження 2.3. Не кожне відображення має сталий коефіцієнт розтягу. Наприклад, якщо $w=2x+i\cdot y$, то образ вертикального відрізка має ту саму довжину, що й відрізок, а образ горизонтального відрізка має довжину вдвічі більшу за довжину прообразу. Це пояснюється тим, що дана функція не має похідної в жодній точці.

Тепер з'ясуємо геометричний зміст аргументу похідної. Проведемо в області D через точку z_0 яку-небудь лінію $\gamma: z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta,\ z(t_0)=z_0)$, для якої існує похідна $z'(t_0)\neq 0$. Образом цієї кривої за допомогою відображення $w=f(z)$ буде деяка лінія Γ в площині w: $w=f(z(t))$ $(\alpha\le t\le\beta,\ f(z(t_0))=w_0)$. Згідно з правилом диференціювання складених функцій функція $f(z(t))$ диференційовна в точці $t=t_0$ і $w'(t_0)=f'(z_0)\cdot z'(t_0)\neq 0$, отже, враховуючи (2.15), отримуємо

$$Arg\, w'(t_0)=\alpha+Arg\, z'(t_0). \qquad (2.17)$$

Для з'ясування геометричного змісту аргумента $f'(z_0)$ розглянемо спочатку геометричний зміст аргумента $z'(t_0)$. Оскільки існує

$$z'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\neq 0,$$

то

$$\arg\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\to\arg z'(t_0)\quad (t\to t_0). \qquad (2.18)$$

Проведемо січну через точки $z=z(t)$ і $z_0=z(t_0)$ лінії γ. Ці точки є різними для всіх t, досить близьких до t_0 і відмінних від t_0 (в противному випадку знайдеться послідовність (t_n) така, що $t_n\to t_0$ і $z(t_n)-z(t_0)=0$, звідки $z'(t_0)=\lim\limits_{t_n\to t_0}\dfrac{z(t_n)-z(t_0)}{t-t_0}=0$, що протирічить умові).

Зауваживши, що напрямок січної співнапрямлений з напрямком вектора $\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$, ми бачимо, що січна має граничне положення при $t \to t_0$ тоді і тільки тоді, коли кут між останнім вектором і дійсною віссю, що дорівнює $\arg\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$, має границю при $t \to t_0$. Отже, згідно з (2.18), $Arg\, z'(t_0)$ означає кут нахилу дотичної до лінії γ в точці z_0. Аналогічно $Arg\, w'(t_0)$ кут нахилу дотичної до лінії Γ в точці w_0.

З рівності (2.17) ми бачимо, що при переході від лінії γ до її образу Γ кут нахилу дотичної в початковій точці лінії змінюється на величину

$$Arg\, w'(t_0) - Arg\, z'(t_0) = \alpha = Arg\, f'(z_0),$$

яка не залежить від цієї кривої.

Отже, $Arg\, f'(z_0)$ *дорівнює куту повороту дотичної* до лінії γ в точці z_0 при переході до її образу Γ в точці $w_0 = f(z_0)$. В цьому і полягає *геометричний зміст* $Arg\, f'(z_0)$.

Якщо з точки z_0 виходять які-небудь дві лінії γ_1 та γ_2, які мають дотичні τ_1 та τ_2 в точці z_0, то дотичні T_1 та T_2 до їхніх образів Γ_1 та Γ_2 в точці $w_0 = f(z_0)$ одержимо з τ_1 та τ_2 за допомогою повороту на один і той же кут $Arg\, f'(z_0)$; отже, кут між лініями γ_1 та γ_2 дорівнює (за величиною і за напрямком відліку) куту між Γ_1 та Γ_2. Таким чином, при відображенні з допомогою неперервної в околі точки z_0 функції $w = f(z)$, яка має відмінну від нуля похідну $f'(z_0)$, усі лінії площини *z*, які проходять через точку z_0 і мають дотичні в цій точці, перетворюються в лінії площини *w*, які проходять через точку $w_0 = f(z_0)$ і також мають дотичні в цій точці,причому кути між кривими за допомогою розглядуваного відображення зберігаються. Ця властивість називається *консерватизмом кутів*.

Означення 2.5. Відображення з допомогою неперервної в області D функції $w = f(z)$ називається *конформним* в точці $z_0 \in D$, якщо воно в цій точці характеризується наявністю *сталого лінійного розтягу* та *консерватизму кутів.*

Якщо при цьому зберігаються не тільки величини кутів, але й напрями їх відліку (як це було в розглянутому вище відображенні), то кажуть про конформне відображення першого роду; якщо ж напрями відліку кутів змінюються на протилежні (наприклад, у випадку дзеркального відображення $w = \bar{z}$), то кажуть про конформне відображення другого роду.

Отже, відображення за допомогою аналітичної в деякій області D функції комплексної змінної є конформним відображенням першого роду в усіх точках області D, в яких похідна відмінна від нуля. Якщо відображення є конформним у всіх без винятку точках області D, то його називають конформне відображенням області D.

Загальний приклад конформного відображення другого роду дають відображення, які здійснюються з допомогою функцій, спряжених з аналітичними: $w = \overline{f(z)}$ (в усіх точках де $f'(z) \neq 0$).

Має місце така теорема.

Теорема 2.5. Відображення $w = f(z)$ буде конформним першого роду в області D тоді і тільки тоді, коли функція $w = f(z)$ аналітична і $f'(z) \neq 0$ в D.

Нам надалі потрібне буде таке

Означення 2.6. Функція $w = f(z)$, визначена в області D, називається *однолистою* в області $G \subset D$, якщо

$$(\forall z_1 \in G)(\forall z_2 \in G)\{z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)\}$$

Зауваження 2.4. Для конформності відображеня $w = f(z)$ в області D достатньо вимагати виконання однієї із умов: 1) щоб неперервна функція $w = f(z)$ володіла в кожній точці $z \in D$ *тільки властивістю консерватизму кутів*; 2) щоб неперервна функція $w = f(z)$ володіла в кожній точці $z \in D$ *тільки властивістю сталого лінійного розтягу і була однолистою в* D.

В теорії конформних відображень та її застосуваннях принциповим є питання про можливість однолистно та конформно відобразити одну задану область на іншу. Відповідь на це питання дає теорема Рімана, доведення якої є досить складне і тут не подається. Його можна знайти, наприклад, в [1].

Теорема 2.6 (Рімана). Нехай D та G - дві однозв′язні області із $\boldsymbol{C}$, відмінні від $\boldsymbol{C}$. Для довільних $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, $\alpha \in [-\pi; \pi)$ існує єдина функція $w = f(z)$, яка здійснює конформне відображення $D \to G$, причому $f(z_0) = w_0$ і $\arg f'(z_0) = \alpha$.

На завершення цієї лекції дамо поняття відображення околу точки z_0 на окіл точки w_0, якщо принаймі одна з них є ∞:

а) якщо $z_0 = \infty$ і $w_0 = f(z_0) \neq \infty$, то відображення здійснюване функцією f, називається конформним в z_0, якщо в $z = 0$ є конформним відображення, здійснюване функцією $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$;

б) якщо $z_0 \neq \infty$ і $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення здійснюване функцією f, називається конформним в z_0, якщо в z_0 є конформним відображення, здійснюване функцією $w = \frac{1}{f(z)}$;

в) якщо $z_0 = \infty$ і $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення здійснюване функцією f, називається конформним в z_0, якщо в $z = 0$ є конформним відображення, здійснюване функцією $w = \left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{-1}$.

ЛЕКЦІЯ 3

ЕЛЕМЕНТАРНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

3.1 Ціла лінійна функція

Якщо функція аналітична в усій комплексній площині $\boldsymbol{C}$, то вона називається *цілою*.

Цілою лінійною функцією називається функція виду $w = az + b$, де a та b - комплексні числа, причому $a \neq 0$. Легко бачити, що обернена до цієї функції є теж лінійною. Оскільки $w' = a \neq 0$, то ціла лінійна функція конформно і однолистно відображає $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}$. Покажемо, що ця функція здійснює конформне відображення $\overline{\boldsymbol{C}} \to \overline{\boldsymbol{C}}$, тобто переконаємось в конформності відображення і в точці $z = \infty$. Згідно з означенням в кінці попередньої лекції слід розглянути функцію $w = \dfrac{1}{a/z + b} = \dfrac{z}{bz + a}$ і точку $z = 0$. Оскільки для такої функції $w' = \dfrac{a}{(bz + a)^2}$, то $w'(0) = \dfrac{1}{a} \neq 0$, що означає конформність в ∞.

Дві множини називатимемо *подібними*, якщо їх можна сумістити, використовуючи тільки перетворення гомотетії (розтягу), повороту і паралельного перенесення (зсуву).

Теорема 3.1. Ціла лінійна функція відображає кожну множину в подібну до себе, і, навпаки, дві подібні множини можна однолистно відобразити одну в іншу за допомогою цілої лінійної функції.

Д о в е д е н н я.

Нехай $a = |a|(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$. Функцію $w = az + b$ можна розуміти як суперпозицію функцій $w_1 = |a| \cdot z$, $w_2 = w_1(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ та $w = w_2 + b$. Для функції $w_1 = |a| \cdot z$ маємо $|w_1| = |a| \cdot |z|$ і $Arg\, w_1 = Arg|a| + Arg\, z = \ = Arg\, z$. Тому, якщо точка z знаходиться на якомусь промені, що виходить з початку координат, то точка w_1 теж буде на цьому промені. Зміниться тільки відстань до початку координат в $|a|$ разів, тобто матимемо розтяг. Далі якщо $w_2 = w_1(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, то $|w_2| = |w_1|$ і $Arg\, w_2 = Arg\, w_1 + $ $+ Arg(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) = Arg w_1 + \alpha$, тобто, залишаючись на однаковій відстані до початку координат, радіус-вектори усіх точок повертаються на один і той самий кут α. Нарешті, функція $w = w_2 + b$ здійснює паралельне перенесення на вектор b.

Навпаки, довільні перетворення розтягу, повороту та зсуву здійснюються цілими лінійними функціями. Тому дві задані подібні множини можна відобразити суперпозицією цілих лінійних функцій, тобто цілою лінійною функцією. Теорему доведено.

3.2 Степенева функція з натуральним показником

Степеневою функцією з натуральним показником називається функція виду $w = z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ (n множників), $n \geq 2$. Використовуючи означення похідної, неважко переконатись, що в усіх точках $z \in \boldsymbol{C}$ існує $w' = n \cdot z^{n-1}$, отже $w = z^n$ - ціла функція і здійснює відображення, конформне в кожній точці області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$.

Подивимось, якими можуть бути області однолистності степеневої функції. Згідно з означенням нам потрібно знайти такі області G, для яких

$$\left(\forall z_1 \in G\right)\left(\forall z_2 \in G\right)\left\{z_1 \neq z_2 \Rightarrow z_1^n \neq z_2^n\right\}.$$

Припустимо, що $z_1 \neq z_2$. Знайдемо умову, при якій $z_1^n = z_2^n$. Оскільки

$$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow \begin{cases} \left|z_1^n\right| = \left|z_2^n\right|, \\ Arg\, z_1^n = Arg\, z_2^n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|z_1\right| = \left|z_2\right|, \\ n \cdot Arg\, z_1 = n \cdot Arg\, z_2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|z_1\right| = \left|z_2\right|, \\ n\, arg\, z_1 = n\, arg\, z_2 + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|z_1\right| = \left|z_2\right|, \\ arg\, z_1 = arg\, z_2 + \dfrac{2\pi k}{n}, \; k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

то область G буде буде областю однолистності для заданої функції, якщо вона не міститиме жодної пари точок з рівними між собою модулями і різницею аргументів, кратною $2\pi/n$. Виходячи з цього, функція $w = z^n$ є однолистою , наприклад, в будь-якому куті $\left\{z : \alpha < arg_{\alpha}\, z < \alpha + \dfrac{2\pi}{n}\right\}$ (рис. 3.1, а), зокрема, функція $w = z^2$ однолиста в кожній півплощині, межа якої проходить через початок координат (рис. 3.1, б).

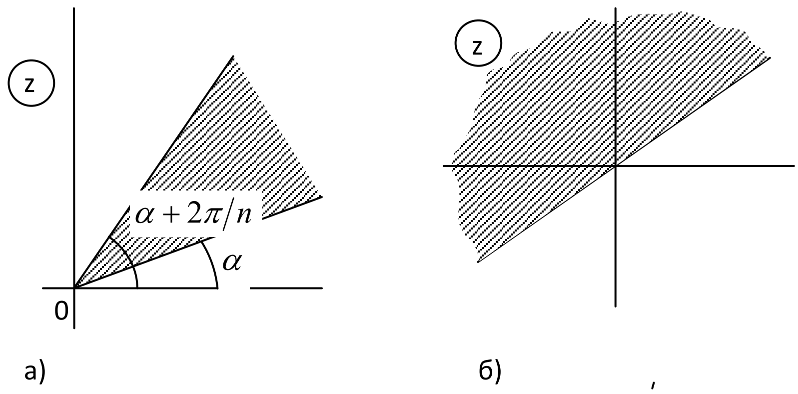


Рисунок 3.1

Скориставшись формулою Муаврa, отримуємо

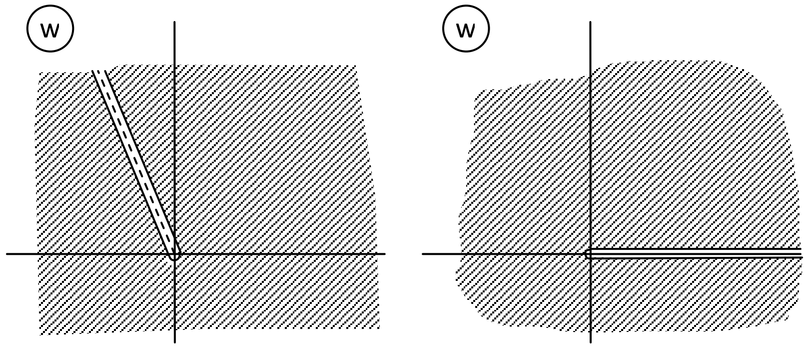
$$\rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),$$

звідки

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi.$$

За допомогою цих формул легко показати, що образом області однолистності, зображеної на рис. 3.1, а), буде уся w–площина з розрізом по променю $\left\{w : Arg\, w = n\alpha\right\}$ (рис.

3.2, а), а образом верхньої півплощини при відображенні $w = z^2$ буде уся w–площина з розрізом по додатній дійсній півосі (рис. 3.2, б).



а) б)

Рисунок 3.2

3.3 Функція Жуковського

Розглянемо функцію

$$J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \qquad (3.1)$$

Свою назву функція одержала через застосування її в аеродинаміці, розглянуті М.Є. Жуковським.

Очевидно, що $J'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, тому функція $J(z)$ є аналітичною в області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$, а відображення, здійснюване цією функцією, є конформним всюди в $\boldsymbol{C}$ за винятком точок $z = 1$ та $z = -1$, бо $J'(1) = J'(-1) = 0$.

З'ясуємо, якими можуть бути області однолистності функції Жуковського. Припустимо, що точки $z_1 \neq z_2$ відображаються функцією $J(z)$ в одну точку. Тоді

$$J(z_1) = J(z_2) \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\cdot\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0 \Leftrightarrow z_1 z_2 = 1.$$

Отже, область G буде областю однолистності для функції $J(z)$ тоді і тільки тоді, коли в ній немає двох точок $z_1 \neq z_2$, таких що $z_1 z_2 = 1$. Враховуючи це, неважко бачити, що областями однолистності для функції $J(z)$ є, наприклад, такі області: а) $\{z : |z| < 1\}$; б) $\{z : |z| > 1\}$; в) $\{z : Im\, z > 0\}$; г) $\{z : Im\, z < 0\}$ (рис. 3.3). Дійсно, якщо z_1 та z_2 - дві точки з внутрішності одиничного кола, тобто $|z_1| < 1$ і $|z_2| < 1$, то і $|z_1 z_2| > 1$. Аналогічно для зовнішності одиничного кола маємо $|z_1 z_2| > 1$. Якщо ж z_1 та z_2 - дві точки з верхньої півплощини, то $0 < z_1 < \pi$ і $0 < z_2 < \pi$, тому $Arg(z_1 z_2) \neq 2\pi k$, отже, знову $z_1 z_2 \neq 1$. Для нижньої півплощини міркування аналогічні.

Знайдемо відображення цих областей однолистності. Для функції Жуковського

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(r + \frac{1}{r} \right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r} \right)\sin\varphi \right),$$

отже, маємо такі формули переходу:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r} \right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r} \right)\sin\varphi. \tag{3.2}$$

Для знаходження внутрішності одиничного кола (рис. 3.3,а) зафіксуємо число $r_0 < 1$ і розглянемо коло $\{z : |z| = r_0\}$. Позначимо $a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right)$, $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0 \right)$, тоді з (3.2) маємо, що $u = a\cos\varphi$, $v = -b\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, тобто в площині w дістали параметричні рівняння еліпса, які рівносильні такому канонічному рівнянню:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \tag{3.3}$$

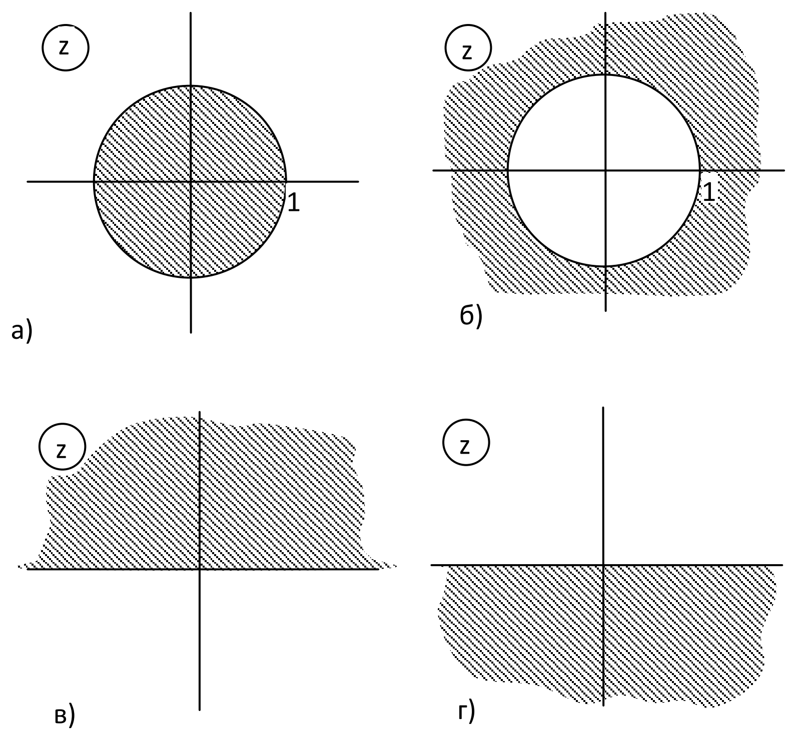


Рисунок 3.3

Легко бачити, що $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, тому з (3.3) маємо, що образами концентричних кіл з центром в початку координат і радіусами $r_0 < 1$ є еліпси з фокусами в точках ± 1, причому верхнє півколо переходить у нижній півеліпс, а нижнє – у верхній. Зрозуміло, що коли r_0 наближатиметься до одиниці, то еліпс наближатиметься до відрізка $[-1; 1]$. Отже, функція Жуковського відображає внутрішність одиничного кола на всю площину з розрізом по відрізку $[-1; 1]$ (рис. 3.4, а). Межа цієї області – коло $\{z : |z| = 1\}$ переходить у відрізок $[-1; 1]$, який обходиться двічі, причому верхнє півколо переходить у нижній, а нижнє – у верхній берег розрізу. Область $\{z : |z| < 1, Im\, z > 0\}$ переходить у нижню півплощину, а область $\{z : |z| < 1, Im\, z < 0\}$ - у верхню.

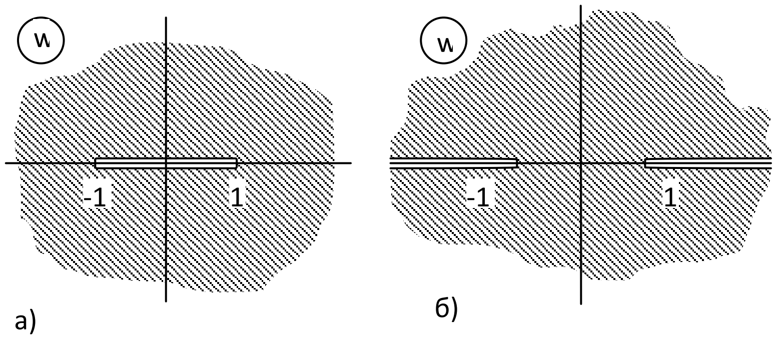


Рисунок 3.4

Міркуючи як і вище, можна показати, що функція $J(z)$ здійснює конформне і однолистне відображення зовнішності одиничного кола (рис. 3.3, б) також на всю площину з розрізом по відрізку $[-1; 1]$, причому коло $\{z : |z| = 1\}$ переходить у цей відрізок, область $\{z : |z| > 1, Im\, z > 0\}$ переходить у верхню півплощину, а область $\{z : |z| > 1, Im\, z < 0\}$ - у нижню.

Для знаходження образу верхньої півплощини (рис.3.3, в) запишемо

$$\{z : Im\, z > 0\} = \{z : Im\, z > 0, |z| < 1\} \cup$$

$$\cup \{z : Im\, z > 0, |z| > 1\} \cup \{z : Im\, z > 0, |z| = 1\}$$

і відображатимемо кожну з множин правої частини. Оскільки, як вказано вище, область $\{z : Im\, z > 0, |z| < 1\}$ переходить у нижню півплощину, область $\{z : Im\, z > 0, |z| > 1\}$ - у верхню, а півколо $\{z : Im\, z > 0, |z| = 1\}$ у відрізок $[-1; 1]$, то образом верхньої півплощини буде вся площина з розрізами по променях $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$, які лежать на дійсній осі (рис. 3.4, б).

Аналогічно показуємо, що нижня півплощина (рис.3.3, г) також відображається на область, зображену на рисунку 3.4, б.

Для кращого розуміння знайдемо ще образи променів, які виходять з початку координат. Розглянемо спочатку промінь $\{z : arg\, z = \varphi_0\}$, $\varphi_0 \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Виключаючи з (3.2) параметр r при $\varphi = \varphi_0$, маємо

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}=1,$$

тобто наш промінь переходить у вітку гіперболи (ліву з фокусом у точці $z=-1$ при $\cos\varphi_0<0$ або праву з фокусом у точці $z=1$ при $\cos\varphi_0>0$). Промені $\{z: \arg z=0\}$ та $\{z: \arg z=-\pi\}$ відображаються відповідно в промені $\{w: |w|>1, \arg w=0\}$ та $\{w: |w|>1, \arg w=-\pi\}$, кожний з яких проходиться двічі, а кожний з променів $\left\{z: \arg z=\frac{\pi}{2}, |z|>1\right\}$ і $\left\{z: \arg z=-\frac{\pi}{2}, |z|>1\right\}$ переходить в уявну вісь $\{w: \operatorname{Re} w=0\}$.

3.4 Показникова функція

Показниковою називається функція виду

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{3.4}$$

Очевидно, що при $y=0$ маємо $e^z=e^x$, тобто дістаємо показникову функцію, яку вивчали в курсі математичного аналізу. З (3.4) випливає, що $\left|e^z\right|=e^x>0$, звідки $e^z\neq 0$ в усіх точках $z\in\boldsymbol{C}$. Легко бачити, що $\operatorname{Arg} e^z=y+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Поклавши в (3.4) $\tilde{o}=0$, отримуємо *формулу Ейлера*:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

Отже, $e^z=e^x\cdot e^{iy}$. Оскільки $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$, то $e^{z+2\pi i}=e^z$, тобто функція e^z є періодичною з періодом $2\pi i$.

З (3.4) бачимо, що для функції $w=e^z$ маємо $u=e^x\cos y$ та $v=e^x\sin y$. Знайшовши частинні похідні, легко переконуємось, що вони задовольняють умови Коші – Рімана для всіх $z\in\boldsymbol{C}$. Отже, e^z - ціла функція. За формулою (2.14) маємо

$$e^z=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+i\,e^x\sin y=e^z\neq 0,$$

тобто функція $w=e^z$ здійснює відображення, конформне в $\boldsymbol{C}$.

Знайдемо області однолистності показникової функції. Ми повинні знайти такі області G, для яких

$$(\forall z_1\in G)(\forall z_2\in G)\left\{z_1\neq z_2\Rightarrow e^{z_1}\neq e^{z_2}\right\}.$$

Оскільки

$$e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow e^{x_1}e^{iy_1}=e^{x_2}e^{iy_2}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{x_1}=e^{x_2},\\ y_1=y_2+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z},\end{cases}$$

то область G буде областю однолистності для $w=e^z$ тоді і тільки тоді, коли в ній немає двох різних точок з однаковими дійсними частинами і уявними, які відрізняються на число, кратне 2π. Зокрема, довільна горизонтальна смуга шириною 2π, тобто множина

$\{z : \alpha < Im\, z < \alpha + 2\pi\}$, буде областю однолистності функції e^z. З (3.4) легко бачити, що формули переходу для розглядуваної функції мають вигляд

$$\rho = e^x,\ \theta = y,$$

отже, образом смуги $\{z : \alpha < Im\, z < \alpha + 2\pi\}$ буде область $\{w : \alpha < Arg\, w < \alpha + 2\pi\}$, тобто площина з розрізом по променю $\{w : Arg\, w = \alpha\}$ (рис. 3.5).

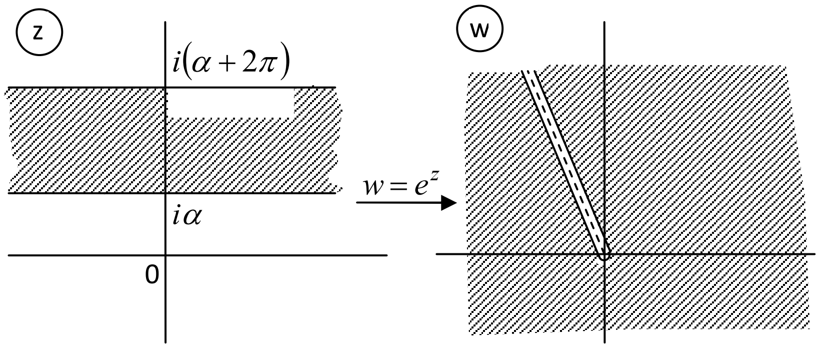


Рисунок 3.5

Зауваження 3.1. З формули Ейлера випливає, що комплексне число, записане у тригонометричній формі (1.5), можна записати коротко у так званій *показниковій формі* $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

3.5 Тригонометричні та гіперболічні функції

Функції

$$sin\, z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),\quad cos\, z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

називаються тригонометричними відповідно синусом та косинусом або просто синусом та косинусом, а функції

$$sh\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),\quad ch\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)\ \text{-}$$

гіперболічними відповідно синусом та косинусом.

Якщо $z = x$, то, згідно з означенням та формулою Ейлера, маємо

$$sin\, z = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(cos\, x + i\, sin\, x - (cos\, x - i\, sin\, x)\right) = \\ = sin\, x,$$

аналогічно $cos\, z = cos\, x$, тобто дістаємо функції, які відомі нам з середньої школи.

Як суми суперпозицій лінійної та показникової функцій означені вище функції $sin\, z,\ cos\, z,\ sh\, z,\ ch\, z$ є цілими функціями.

Оскільки функція e^z періодична з періодом $2\pi i$, то функції $\sin z$ і $\cos z$ будуть періодичними з періодом 2π, а функції $sh\, z$ і $ch\, z$ будуть періодичними з періодом $2\pi i$.

Легко переконатись в зв′язку між тригонометричними та гіперболічними функціями: $\sin iz = i\, sh\, z$, $\cos iz = ch\, z$.

Усі відомі зі шкільного курсу тригонометрії формули залишаються слушними і в комплексній площині. Наприклад,

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{2}\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) -$$
$$-\frac{1}{2i}\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) =$$
$$= \cos(z_1 + z_2).$$

Якщо тригонометричні функції дійсної змінної $\sin x$ та $\cos x$ є обмеженими, то функції $\sin z$ і $\cos z$ є необмеженими в комплексній площині. Справді, $|\cos iy| = ch\, y \to \infty$ і $|\sin iy| = |sh\, y| \to \infty$ при $y \to \infty$.

Для знаходження областей однолистності розглядуваних тригонометричних і гіперболічних функцій можемо провести ті ж міркування. Для знаходження образів областей однолистності можна вивести формули переходу. Наприклад, для функції $w = \cos z$ матимемо $u = \cos x \cdot ch\, y$, $v = -\sin x \cdot sh\, y$. Проте, оскільки нам уже відомі властивості функції Жуковського, показникової та лінійної функцій, можемо поступати значно простіше. Оскільки

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}\right) = J\left(e^{iz}\right),$$

то функцію $w = \cos z$ можемо розглядати як суперпозицію функцій $w_1 = iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w = J(w_2)$. Здійснивши ці відображення, ми побачимо, що образом вертикальної смуги $\{z : 0 < Re\, z < \pi\}$ є область, зображена на рис. 3.4, б, а образом верхньої півсмуги $\{z : 0 < Re\, z < \pi,\ Im\, z > 0\}$ є верхня півплощина.

Оскільки $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$, то функцію $\sin z$ можна розглядати як суперпозицію функції $\cos z$ та лінійної функції і цей факт використовувати при знаходженні образів відповідних множин.

Відзначимо, що, як випливає з наведених міркувань, функція $w = \cos z$ є однолистою в смузі $\{z : 0 < Re\, z < \pi\}$, а функція $w = \sin z$ однолиста в смузі $\left\{z : -\frac{\pi}{2} < Re\, z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Аналогічно до випадку функцій дійсної змінної тригонометричні функції $tg\, z$, $ctg\, z$ і гіперболічні функції $th\, z$, $cth\, z$ означаються так:

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z},\ ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z},\ th\, z = \frac{shz}{chz},\ cth\, z = \frac{chz}{shz}.$$

Очевидно, жодна з цих функцій не є цілою.

3.6 Дробово-лінійна функція

Функція виду

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (3.5)$$

де $ad - bc \neq 0$, називається *дробово-лінійною*. Неважко переконатись, що обернена до дробово-лінійної функції є дробово-лінійною, і суперпозиція дробово-лінійних функцій також дробово-лінійна функція. Якщо в (3.5) покласти $c = 0$, то дістанемо лінійну функцію, яку ми вивчили в п.3.1. Тому надалі вважатимемо $c \neq 0$.

Розглянемо важливі властивості дробово-лінійних функцій.

Теорема 3.2. Дробово-лінійна функція конформно та однолистно відображає $\overline{\boldsymbol{C}} \to \overline{\boldsymbol{C}}$.

Д о в е д е н н я.

Однолистність випливає з однозначності оберненої функції. Доведемо конформність. Якщо $z \neq -\frac{d}{c}$ і $z \neq \infty$, то $w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$, отже, відображення конформне в усіх вказаних z. Залишилось тепер розглянути точки $z = -\frac{d}{c}$ і $z = \infty$. Для доведення конформності в точці $z = -\frac{d}{c}$ ми повинні розглянути функцію $w = \frac{cz+d}{az+b}$, для якої $w' = \frac{bc-ad}{(az+b)^2} \neq 0$, у тому числі і в точці $z = -\frac{d}{c}$, що вказує на конформність в точці $z = -\frac{d}{c}$. Якщо ж $z = \infty$, то перевіряємо на конформність в точці $z = 0$ функцію

$w = \frac{\frac{a}{z}+b}{\frac{c}{z}+d} = \frac{a+bz}{c+dz}$, для якої $w' == \frac{bc-ad}{(c+dz)^2} \neq 0$, зокрема і в точці $z = 0$, отже, розглядувана дробово-лінійна функція конформна і в точці $z = \infty$. Теорему доведено.

Теорема 3.3 (про кругову властивість). Дробово-лінійна функція відображає узагальнене коло в узагальнене коло, узагальнений круг в узагальнений круг.

Д о в е д е н н я.

Оскільки $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$, то дробово-лінійна функція є суперпозицією цілих лінійних функцій і функції $w = \frac{1}{z}$. Лінійна функція відображає коло в коло, пряму в пряму, круг в круг, півплощину в півплощину, бо вказані пари множин подібні, тому залишилось довести кругову властивість для функції $w = \frac{1}{z}$. Отже, нехай в розширеній z-площині задано замкнений круг

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D \leq 0. \qquad (3.6)$$

Очевидно, рівність $w=\dfrac{1}{z}$ рівносильна рівності $z=\dfrac{1}{w}$, тому $x+iy=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}$, звідки $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$. Підставивши це в нерівність (3.6), дістанемо

$$A\left(\frac{u^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}+\frac{v^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}\right)+\frac{Bu}{u^2+v^2}-\frac{Cv}{u^2+v^2}+D\le 0,$$

звідки $D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A\le 0$, тобто отримали замкнений круг в розширеній w-площині. Теорему доведено.

Теорема 3.4 (про три точки). Нехай в розширеній z-площині задано три точки z_1, z_2, z_3, а в розширеній w-площині - три точки w_1, w_2, w_3. Тоді існує єдина дробово-лінійна функція L, така що $L(z_k)=w_k,\ k=1, 2, 3$.

Д о в е д е н н я.

У випадку, коли точки скінченні, можемо записати рівність

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \tag{3.7}$$

яка, як легко переконатись, неявно задає шукану дробово-лінійну функцію. Єдиність доводиться від супротивного. Припустивши, що крім (3.7) існує функція $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, яка має властивість, вказану в формулюванні теореми, можемо записати $w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$, $k=1, 2, 3$. Неважко перевірити, що якщо ці значення w, w_1, w_2, w_3 підставити в (3.7), то отримаємо тотожність.

Якщо ж одне з чисел z_1, z_2, z_3 чи з чисел w_1, w_2, w_3 дорівнює ∞, то в (3.7) чисельник і знаменник, до яких входить це число, опускаємо. Наприклад, якщо $z_1\to\infty,\ z_2\to w_2,\ \infty\to w_3$, то (3.7) набуває вигляду $\dfrac{w_3-w_2}{w-w_2}=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$. Далі доведення таке саме як і вище. Теорему доведено.

Перед формулюванням наступної властивості дамо

Означення 3.1. Точки z_1 та z_2 називаються симетричними відносно кола $\gamma=\{z:|z-z_0|=R\}$, якщо вони лежать на одному промені, що виходить з z_0, і $|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$. Точки z_0 і ∞ вважаються симетричними.

Симетричність відносно прямої є звичайною симетрією.

Теорема 3.5 (про симетричні точки). Нехай z_1 та z_2 - симетричні відносно узагальненого кола γ точки, а γ^* - образ кола γ при відображенні дробово-лінійною функцією L . Тоді образи w_1 і w_2 точок z_1 і z_2 при цьому відображенні будуть симетричними відносно узагальненого кола γ^* .

Доведення цієї теореми опускаємо. Його можна знайти, наприклад, в [3].

Якщо точки z_1 і z_2 симетричні відносно кола γ, то γ називається *колом Аполлонія* для цих точок.

Теорема 3.6. Через кожну точку z_3, відмінну від двох заданих точок z_1 і z_2, проходить єдине коло Аполлонія для точок z_1 і z_2 .

Д о в е д е н н я.

Нехай одна з точок z_1 і z_2 дорівнює ∞, наприклад, $z_2 = \infty$; тоді $z_3 \neq \infty$. Колом Аполлонія у цьому випадку буде коло радіуса $R = |z_3 - z_1|$ з центром в точці z_1, яке, очевидно, єдине. Якщо ж точки z_1 і z_2 - скінченні, то, зробивши дробово-лінійне перетворення $w = \dfrac{1}{z - z_2}$, точки z_1, z_2, z_3 перейдуть відповідно у точки $w_1 = \dfrac{1}{z_1 - z_2}$, $w_2 = \infty,\ w_3 = \dfrac{1}{z_3 - z_2}$. Для точок w_1 і w_2 будуємо єдине коло Аполлонія, яке проходить через точку w_3. Прообразом цього кола буде коло Аполлонія для z_1 і z_2, яке проходить через z_3 . Єдиність випливає з теореми 3.4.

Перейдемо тепер до основних задач дробово-лінійних відображень. *Першою з них є задача про відображення круга K з розширеної z-площини на круг K^* з розширеної w-площини так, щоб три задані точки з ∂K - межі області K - перейшли в три задані точки з ∂K^* .*

Теорема 3.7. Якщо точки z_1, z_2, z_3 з ∂K і точки w_1, w_2, w_3 з ∂K^* розміщені так, що, послідовно обходячи їх, залишаємо відповідні круги по один бік, то перша основна задача має єдиний розв′язок. У протилежному разі вона не має розв′язку.

Д о в е д е н н я.

Згідно з теоремою 3.4 існує єдина дробово-лінійна функція L , така що $L(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$. Ця функція, згідно теореми 3.3, відображає ∂K на ∂K^* . Оскільки L - однолиста в $\overline{\boldsymbol{C}}$, то вона відображає K або на K^* або на $\overline{\boldsymbol{C}} \setminus \overline{K}^*$. Нехай точки z_1, z_2, z_3 та w_1, w_2, w_3 розміщені так як показано на рис. 3.6. У точці z_2 проведемо в сторону z_3 і внутрішню нормаль. Оскільки при дробово-лінійному відображенні кути і напрямки їх відліку зберігаються, то внутрішня нормаль до ∂K переходить у внутрішню нормаль до ∂K^* . Отже, $L(K) = K^*$.

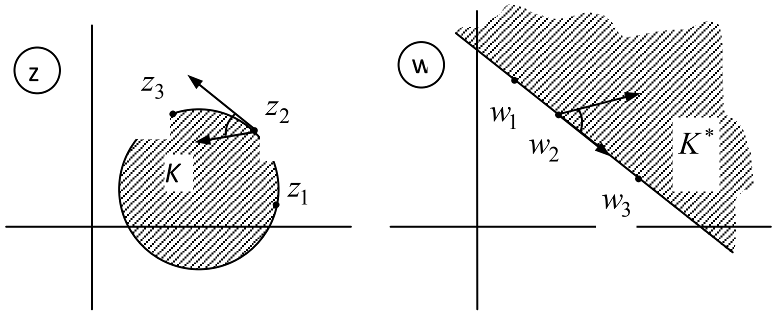


Рисунок 3.6

Якщо ж точки z_1, z_2, z_3 та w_1, w_2, w_3 розміщені так, що при обході їх відповідні круги залишаються по різні боки, то, міркуючи аналогічно до попереднього, дістанемо, що $L(K) = \overline{\boldsymbol{C}} \setminus \overline{K}^*$, тобто перша основна задача розв'язку немає.

Теорема доведена.

Зауваження 3.2. На практиці часто зустрічаються неповні задачі, наприклад, коли відомо, що дві точки з ∂K переходять у дві точки з ∂K^*. Третю точку тоді вибираємо на свій розсуд. Зрозуміло, що така задача має безліч розв'язків.

Друга основна задача дробово-лінійних відображень полягає у відображенні круга K з розширеної z-площини на круг K^* з розширеної w-площини так, щоб дві задані точки $z_1 \in K$, $z_2 \in \partial K$ перейшли в дві задані точки $w_1 \in K^*$, $w_2 \in \partial K^*$.

Теорема 3.8. Друга основна задача має єдиний розв'язок.

Д о в е д е н н я.

Нехай z_3 є точкою, симетричною ю єдині. Згідно теореми 3.4 (рівність (3.7)) будуємо єдиним чином дробово-лінійну функцію L, яка переводить z_1, z_2, z_3 відповідно у w_1, w_2, w_3. Коло ∂K є колом Аполлонія для z_1 та z_3. Його образом є деяке колом Аполлонія для w_1 та w_3, а оскільки ∂K^* є теж колом Аполлонія для w_1 та w_3, і обидва ці кола проходять через w_2, то за теоремточці z_1 відносно ∂K, а w_3 -точка, симетрична з w_1 відносно ∂K^*. Точки з такою властивістою 3.6 вони збігаються. Отже, $L(\partial K) = \partial K^*$. Але точка $z_1 \in K$ переходить у точку $z_2 \in \partial K$. Тому $L(K) = K^*$.

Теорему доведено.

Зауваження 3.2. Як і в випадку першої основної задачі, на практиці часто зустрічаються неповні задачі, наприклад, коли треба відобразити круг на круг так, щоб дана точка круга перейшла у задану точку круга. Вибираючи на краях цих кругів довільно по одній точці, зводимо таку задачу до другої основної. Очевидно, розв'язків буде безліч.

ЛЕКЦІЯ 4

МНОГОЗНАЧНІ ФУНКЦІЇ

4.1 Поняття многозначної функції. Вибір однозначної вітки

Нехай E – деяка множина з $\boldsymbol{C}$.

Означення 3.1. Якщо кожному $z \in E$ поставлено у відповідність деяку множину $F(z)$ комплексних чисел, то казатимемо, що на E задана *многозначна функція F*.

Очевидно, що якщо для кожного $z \in E$ множина $F(z)$ складається з одного елемента, то з наведеного означення одержимо відоме з лекції 2 означення функції $f : E \to \boldsymbol{C}$. Таку функцію в зв′язку з цим часто називають *однозначною функцією*.

Зауважимо, що многозначна функція не є числовою, бо числу ставиться у відповідність множина. Прикладом многозначної функції може бути $Arg\, z$, $z \neq 0$. Оскільки $Arg\, z = \{arg_a z + 2\pi k : k \in \boldsymbol{Z}\}$, то $Arg\, z$ є нескінченнозначною функцією.

Нехай в області G задана многозначна функція F, а в області $D \subset G$ - неперервна функція f, така що $f(z) \in F(z)$ для всіх $z \in D$. Тоді f називається *однозначною віткою* функції F.

Приклад 4.1. Розглянемо многозначну функцію $Arg\, z$ в області $G = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$. За область $D \subset G$ візьмемо усю z-площину з розрізом по від′ємній дійсній півосі (рис. 4.1) і

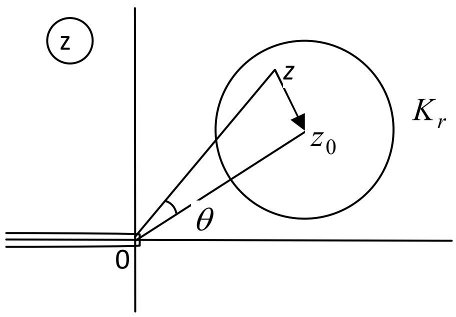


Рисунок 4.1

розглянемо в D функцію $arg\, z$, яка при кожному значенні $z \in D$ є головним значенням аргумента. Покажемо, що ця функція є однозначною віткою многозначної функції $Arg\, z$. Оскільки $arg\, z \in Arg\, z$, то ще залишиться показати неперервність функції $arg\, z$ в D. Зафіксуємо довільну точку $z_0 \in D$ і виберемо такий круг $K_r = \{z : |z - z_0| < r\}$, який лежить в D і тому не перетинається з від′ємною дійсною піввіссю. Тоді для всіх $z \in K_r$ маємо $|arg\, z - arg\, z_0| = \theta < \dfrac{\pi}{2}$ і, використовуючи теорему косинусів $|z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 2|z| \cdot |z_0| \cdot cos\,\theta$, дістаємо $cos\,\theta = \dfrac{|z|^2 + |z_0|^2 - |z - z_0|^2}{2|z| \cdot |z_0|} \to 1$ при $z \to z_0$, тобто $\theta \to 0$ при $z \to z_0$, отже, $arg\, z$ - неперервна функція в будь-якій точці області D. Тим самим показано, що $arg\, z$ є однозначною віткою многозначної функції $Arg\, z$.

Приклад 4.2. Многозначна функція $\{0; z\}$, задана в усій z-площині, має однозначні вітки $w = 0$ та $w = z$. Відзначимо, що функція $w = \begin{cases} 0, \ Re\, z > 0, \\ z, \ Re\, z \le 0 \end{cases}$ не буде однозначною віткою цієї многозначної функції, бо в точках уявної осі порушується неперервність.

Нехай в області G задана многозначна функція F. Припустимо, що існує така система областей $\{D_\alpha\}$, $D_\alpha \subset G$, що в кожній області D_α існує неперервна функція f_α, яка є однозначною віткою многозначної функції. Казатимемо, що многозначна функція F розпадається на *однозначні вітки області* G, якщо для довільних $z \in G$ та $w \in F(z)$ знайдуться D_α та f_α, такі що $z \in D_\alpha$ і $f_\alpha(z) = w$.

Приклад 4.3. Система функцій $\{arg\, z + 2\pi k\}_{k\in \boldsymbol{Z}} \cup \{\arg_0 z + 2\pi n\}_{n\in \boldsymbol{Z}}$ є системою однозначних віток многозначної функції $Arg\, z$ в області $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$. Неперервність функції $arg_0\, z$ в області $D_0 = \boldsymbol{C} \setminus \{z : z = x \ge 0\}$ доводиться так само, як неперервність $arg\, z$ в $D = \boldsymbol{C} \setminus \{z : z = x \le 0\}$.

Многозначна функція F називається *неперервною в області* G, якщо вона розпадається в цій області на однозначні вітки. Зауважимо, що означення неперервності $F(z) \to F(z_0)$ при $z \to z_0$ не має змісту, бо $F(z)$ - множина, а не число.

Приклад 4.4 Многозначна функція $F(z) = \begin{cases} \{z\}, \ z \ne 0, \\ \{0;1\}, \ z = 0 \end{cases}$ не буде неперервною в $\boldsymbol{C}$, бо не можна вибрати її однозначної вітки, яка була б неперервною і при $z = 0$ приймала значення одиницю. Многозначна функція $F(z) = \begin{cases} \{z\}, \ |z| < 1, \\ \{z;1\}, \ |z| \ge 1 \end{cases}$ є неперервною, бо розпадається на однозначні вітки $w = z$, $|z| < +\infty$ і $w = 1$, $|z| < 1$.

Многозначна функція F називається *аналітичною*, якщо вона розпадається на однозначні вітки, які є аналітичними функціями.

Відзначимо, що многозначна функція $Arg\, z$ не аналітична, бо кожна її вітка набуває лише дійсних значень, отже, не може бути аналітичною, бо у випадку аналітичності згідно з умовами Коші-Рімана (2.6) вона мала б бути сталою, а це не так.

Розглянемо тепер многозначні функції на кривій. Поняття однозначної вітки тут дещо інше. Нехай на $\gamma = \{z = z(t) : a \le t \le b\}$ задана многозначна функція F. Довільна неперервна на $[a; b]$ функція φ називається *однозначною віткою* многозначної функції F на кривій $\gamma = \{z = z(t) : a \le t \le b\}$, якщо для довільного $t \in [a; b]$ значення $\varphi(t) \in F(z(t))$.

Нехай $z = z_1(\tau), \alpha \le \tau \le \beta$ - інше параметричне зображення кривої тієї ж кривої, тобто існує неперервно зростаюча функція $t = t(\tau) : [\alpha; \beta] \to [a; b]$, така що $z_1(\tau) = z(t(\tau))$. Очевидно, функція $\varphi_1(\tau) = \varphi(t(\tau))$ також буде однозначною віткою многозначної функції F на кривій $\gamma = \{z = z_1(\tau) : \alpha \le \tau \le \beta\}$. Вважатимемо, що дві однозначні вітки $\varphi_1 : [\alpha; \beta] \to \boldsymbol{R}$ та $\varphi_2 : [a; b] \to \boldsymbol{R}$ многозначної функції F на кривій γ знаходяться у відношенні ω, якщо $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(t(\tau))$ для усіх $\tau \in [\alpha; \beta]$, де $t = t(\tau)$ - функція, описана вище. Неважко переконатись, що ω є відношенням еквівалентності. Кожний клас розбиття відносно ω є *однозначною віткою многозначної функції F на кривій γ*. Визначена так однозначна вітка не залежить від параметричного зображення кривої. Зазвичай однозначну вітку многозначної функції на кривій позначають просто через f чи $f(z)$. При цьому слід пам′ятати, що однозначну функцію дістанемо, якщо розглядатимемо $f(z(t))$, де $z = z(t)$ - параметричне задання кривої.

Вияснимо, коли на кривій можна вибрати однозначну вітку аргумента.

Теорема 4.1. Нехай $\gamma = \{z = z(t): a \le t \le b\}$ - довільна крива, яка не проходить через початок координат, і $\alpha \in Arg\, z(a)$ - довільне число. Тоді на γ можна вибрати однозначну вітку $arg\, z(t)$ многозначної функції $Arg\, z$, таку що $arg\, z(a) = \alpha$.

Д о в е д е н н я.

Нехай $z(a)$ не лежить на від′ємній дійсній півосі (з доведення буде видно, що робити у випадку, коли $z(a) < 0$). З системи $\{arg\, z + 2\pi k\}_{k \in \boldsymbol{Z}}$ виберемо ту вітку, яка в $z(a)$ набуває значення α. На тій ділянці кривої γ, яка починається в $z(a)$ і йде до перетину з від′ємною дійсною піввіссю (точку перетину з цією піввіссю не включаємо), вибрану вітку позначимо через $arg\, z(t)$. У точці вказаної ділянки кривої γ, близькій до від′ємної дійсної півосі, із системи $\{arg_0\, z + 2\pi n\}_{n \in \boldsymbol{Z}}$ виберемо вітку, яка б у цій точці набувала того самого значення, що й побудована функція $arg\, z(t)$. Вибираємо цю нову вітку за $arg\, z(t)$ на новій ділянці кривої, яка простягається до перетину з додатною дійсною піввіссю. Цей процес, якщо потрібно, продовжуємо далі, вибираючи вітку з системи $\{arg\, z + 2\pi k\}_{k \in \boldsymbol{Z}}$, а потім із системи $\{arg_0\, z + 2\pi n\}_{n \in \boldsymbol{Z}}$ і так далі. Оскільки функція $z = z(t)$ неперервна на $[a;b]$, то γ не може перетинати послідовно від′ємну і додатну півосі нескінченну кількість разів. Дійсно, в протилежному разі довжина кривої γ була б нескінченною, бо відстань від точки $z = 0$ до γ є додатним числом. А це не так. Отже, процес скінченний.

Теорему доведено.

4.2 Приріст многозначної функції .

Приріст аргумента

Нехай $\gamma = \{z = z(t): a \le t \le b\}$ - крива, і на γ задана многозначна функція F (φ - її однозначна вітка на γ). Тоді величина $\Delta_\gamma \varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$ називається *приростом вітки φ на кривій γ*. Взагалі, для різних віток прирости можуть бути різними. Проте, якщо для всіх однозначних віток многозначної функції F на кривій γ прирости *однакові*, то їх спільне значення називається *приростом многозначної функції F на кривій γ* і позначається $\Delta_\gamma F = \Delta_\gamma F(z)$.

Теорема 4.2. Нехай $\gamma = \{z = z(t): a \le t \le b\}$ - крива, яка не проходить через початок координат, а $(arg\, z(t))_1$ і $(arg\, z(t))_2$ - дві однозначні вітки многозначної функції $Arg\, z$ на γ. Тоді $\Delta_\gamma (arg\, z(t))_1 = \Delta_\gamma (arg\, z(t))_2$, тобто *приріст не залежить від вибору вітки*.

Це спільне значення приростів називається *приростом аргумента на кривій* γ і позначається $\Delta_\gamma Arg\, z$.

Д о в е д е н н я.

Оскільки $(arg\, z(t))_j \in Arg\, z(t),\ j=1,2$, то $(arg\, z(t))_1 - \ -(arg\, z(t))_2 = 2\pi k(t)$, де $k(t)$ - цілочисельна функція. Функції $(arg\, z(t))_1$ і $(arg\, z(t))_2$ - неперервні, тому функція $k(t)$ - також неперервна, отже, $k(t)=k=const$. Тому $(arg\, z(t))_1 - \ -(arg\, z(a))_2 = 2\pi k$ і $(arg\, z(b))_1 - (arg\, z(b))_2 = 2\pi k$. Віднімаючи від другої рівності першу, дістаємо $\Delta_\gamma (arg\, z(t))_1 - \Delta_\gamma (arg\, z(t))_2 = 0$, чим і доводимо теорему.

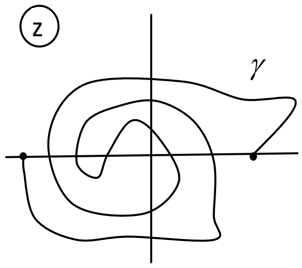


Рисунок 4.2

Приклад 4.5. Для кривої, зображеної на рис. 4.2, виконується рівність $\Delta_\gamma Arg\, z = \pi$.

З′ясуємо, для яких областей можна вибрати однозначну вітку аргумента.

Теорема 4.3. Нехай D- область і $0 \notin D$. Для того, щоб в D можна було вибрати однозначну вітку многозначної функції $Arg\, z$, необхідно і досить, щоб $\Delta_\gamma Arg\, z = 0$ для кожної замкненої кривої $\gamma \subset D$.

Д о в е д е н н я.

Необхідність. Нехай в області D можна вибрати однозначну вітку $\varphi(z)$ многозначної функції $Arg\, z$ і $\gamma = \{z = z(t): a \le t \le b\}$ - довільна замкнена крива, $\gamma \subset D$, тобто $z(a)=z(b)$. Тоді на γ можна вибрати однозначну вітку аргумента $arg\, z(t) = \varphi(z(t))$. Отже, $\Delta_\gamma Arg\, z =$ $= \Delta_\gamma\, arg\, z(t) = arg\, z(b) - arg\, z(a) = \varphi(z(b)) - \varphi(z(a)) = 0$.

Достатність. Умова $\Delta_\gamma Arg\, z = 0$ для кожної замкненої кривої означає, що приріст аргумента не залежить від кривої в D, що з′єднує довільні фіксовані точки z_1 і z_2 з цієї області, а залежить тільки від цих точок. Для вибору однозначної вітки аргумента візьмемо фіксовану точку $z_0 \in D$ і $\alpha \in Arg\, z_0$. Визначимо

$$(arg\, z) = \alpha + \Delta_{\overset{\frown}{z_0 z}} Arg\, z, \tag{4.1}$$

де $\overset{\frown}{z_0 z} = l$ - будь-яка крива, що з′єднує z_0 та z.

Покажемо, що значення функції (4.1) при кожному $z \in D$ належить до $Arg\, z$. Дійсно, $\Delta_{\overset{\frown}{z_0 z}} Arg\, z = \varphi(z) - \varphi(z_0)$, де φ - деяка вітка аргумента на кривій *l*, така що $\varphi(z_0) = \alpha$. Звідси випливає, що $(arg\, z) = \alpha + \varphi(z) - \varphi(z_0) = \varphi(z) \in Arg\, z$. Залишилось довести неперервність функції (4.1) в кожній точці $a \in D$. Для цього розглянемо круг з центром в a, який міститься в D (рис. 4.3). Сполучивши z та a прямолінійним відрізком $[a, z]$, а точку z_0 з точкою a довільною кривою $\overset{\frown}{z_0 a}$, у крузі можемо вибрати однозначну вітку аргумента, яка є неперервною функцією. Тоді для функції (4.1) маємо

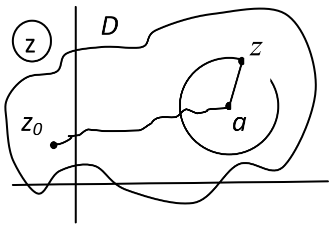


Рисунок 4.3

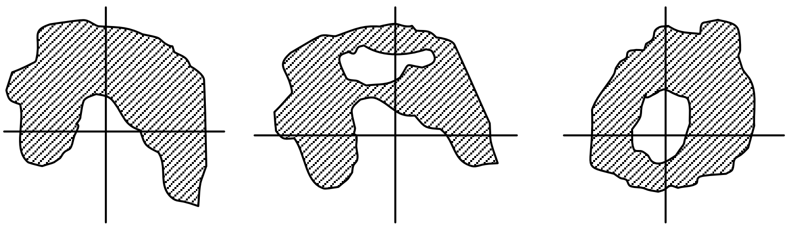
$$\left(\arg z\right) = \alpha + \Delta_{\overset{\frown}{z_0 a}} Arg\, z + \Delta_{[a,z]} Arg\, z \to \alpha + \Delta_{\overset{\frown}{z_0 a}} Arg\, z,\ z \to a\ .$$

Теорему доведено.

Сформулюємо без доведення ще одну важливу теорему.

Теорема 4.4. Для того, щоб в області D можна було вибрати однозначну вітку аргумента, необхідно і досить, щоб існувала така однозв′язна область G, що $D \subset G$ і $0 \notin G$.

На рис. 4.4, а) та б) зображені області, в яких можна вибрати однозначну вітку аргумента, а на рис. 4.4, в) - область, в якій не можна це зробити.



а) б) в)

Рисунок 4.4

Розглянемо приклади многозначних функцій.

4.3 Корінь n-го степеня

Нехай n – натуральне число, більше за одиницю. За означенням $\sqrt[n]{z}$, $z \in \boldsymbol{C}$ - многозначна функція, яка кожному $z \in \boldsymbol{C}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \boldsymbol{C}$, таких що $w^n = z$. Оскільки при $z \neq 0$ за формулою Муавра

$$\sqrt[n]{z} = {}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{Arg\, z}{n} + i\, sin\frac{Arg\, z}{n} \right),$$

то вибрати однозначну вітку $\sqrt[n]{z}$ можна там, де є можливість вибрати однозначну вітку аргумента, тобто в кожній однозв′язній області, яка не містить початку координат. Нехай D - така область і в ній вибрано однозначну вітку $\left(arg\, z\right)$ аргумента. Усі інші вітки аргумента можемо записати у вигляді $(arg\, z)+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$. Отже, однозначними вітками многозначної функції $\sqrt[n]{z}$ є функції

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = {}_+\sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{(arg\, z)+2\pi k}{n}+i\, sin\frac{(arg\, z)+2\pi k}{n}\right), \tag{4.2}$$

де $k=0,1,\ldots,n-1$. Розглянемо одну з них $w=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$. Ця функція однозначна, обернена до неї аналітичною в усій *w*-площині функцією $z=w^n$. Тому при $z\neq 0$ можемо знайти похідну

$$\frac{d}{dz}\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \frac{dw}{dz} = 1\Big/\frac{dz}{dw} = \frac{1}{n\cdot w^{n-1}} = \frac{w}{n\cdot w^n} = \frac{1}{n\cdot z}\left(\sqrt[n]{z}\right)_k,$$

тобто $w=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ - *аналітична в D функція*, яка здійснює конформне і однолисте відображення.

Зауваження 4.1. Не можна брати похідну формально у такий спосіб: $\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\cdot z^{\frac{1}{n}-1}$.

Із (4.2) бачимо, що формули переходу для функції $w=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ мають вигляд

$$\rho = {}_+\sqrt[n]{r},\quad \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}. \tag{4.3}$$

За допомогою цих формул неважко показати, що площина з розрізом по додатній дійсній півосі при відображенні $w=\left(\sqrt{z}\right)_0$ переходить у верхню півплощину.

Відзначимо, що з (4.2) випливає рівність $\left(\sqrt{z}\right)_1 = -\left(\sqrt{z}\right)_0$.

Часто вітку кореня задають, фіксуючи певне його значення в заданій точці z. Тоді перед використанням формул (4.3) визначають число k. Наприклад, нехай треба знайти образ області $\{z: 0<(arg\, z)<2\pi\}$ при відображенні такою віткою $\sqrt{z}$, що $\sqrt{-1}=i$. Якщо $0<\varphi<2\pi$, то $\varphi=\pi$ для $z=-1$ відповідає $\theta=-\frac{\pi}{2}$ для $w=-i$. Підставивши ці значення в (4.3), дістанемо $k=-1$ і формули (4.3) набувають вигляду $\rho={}_+\sqrt{r}$, $\theta=\frac{\phi}{2}-\pi$. З цих формул бачимо, що шуканим образом є нижня півплощина.

Точки $z=0$ та $z=\infty$ називаються для $\sqrt[n]{z}$ *точками розгалуження*. Якщо взяти замкнену жорданову криву, внутрішності якої належить точка 0, і обійти її один раз, то приріст кореня *n*-го степеня буде відмінним від нуля, а якщо обійти *n* разів, то він дорівнюватиме нулеві. Те саме буде і для точки $z=\infty$.

4.4 Логарифм

Логарифмом $Ln\,z$ називається многозначна функція, яка кожному $z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \boldsymbol{C}$, таких що $e^w = z$. Оскільки $e^w \neq 0$, то $Ln\,0$ не існує. Записавши $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, дістанемо

$$e^{u+iv} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = r, \\ e^{iv} = e^{i\varphi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = ln\,r, \\ v = \varphi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$$

тобто

$$Ln\,z = ln|z| + i \cdot Arg\,z\,. \tag{4.4}$$

Отже, однозначну вітку логарифма можна вибрати там, де можна вибрати однозначну вітку аргумента, тобто в кожній однозв'язній області, яка не містить початку координат. Функція $ln\,z = ln|z| + i \cdot arg\,z$ називається *головним значенням логарифма*. Усі інші вітки в області $D = \boldsymbol{C} \setminus \{z : z = x \leq 0\}$ мають вигляд $(ln\,z)_k = ln|z| + i \cdot arg\,z + \quad + 2\pi k i$. В області $D_0 = \boldsymbol{C} \setminus \{z : z = x \geq 0\}$ можна вибрати однозначні вітки $(ln\,z)_k = ln|z| + i \cdot arg_0\,z + 2\pi k i$. Очевидно, що $Ln\,z$ розпадається на щойно вказані однозначні вітки, задані в D та в D_0.

Покажемо, що усі вітки логарифма є аналітичними функціями. Нехай $w = (ln\,z)_k$. Оберненою до цієї функції є ціла функція $z = e^w$, тому $\dfrac{d}{dz}(ln\,z)_k = \dfrac{dw}{dz} = 1\Big/\dfrac{dz}{dw} = \dfrac{1}{e^w} = \dfrac{1}{z}$.

Як бачимо, значення похідної не залежить від вибору вітки. Це зрозуміло, бо в області, де можна вибрати однозначну вітку логарифма, решта віток відрізняється від вибраної сталими доданками. Цей факт записують у вигляді $\dfrac{d}{dz} Ln\,z = \dfrac{1}{z}$. Таким чином, *логарифм є многозначною аналітичною функцією*, похідна якої $1/z$ для всіх $z \neq 0$. Кожна однозначна вітка логарифма здійснює конформне і однолисте відображення. З (4.4) випливає, що формули переходу мають вигляд $u = ln\,r,\ v = \varphi + 2\pi k$. Приклади деяких відображень верхнього одиничного півкруга наведені на рис. 4.5. Зауважимо, що часто вітку логарифма, як і інших многозначних функцій, задають, фіксуючи в заданій точці певне його значення. Тому перед використанням формул переходу визначають число $k \in \boldsymbol{Z}$ таким самим методом, як і для квадратного кореня.

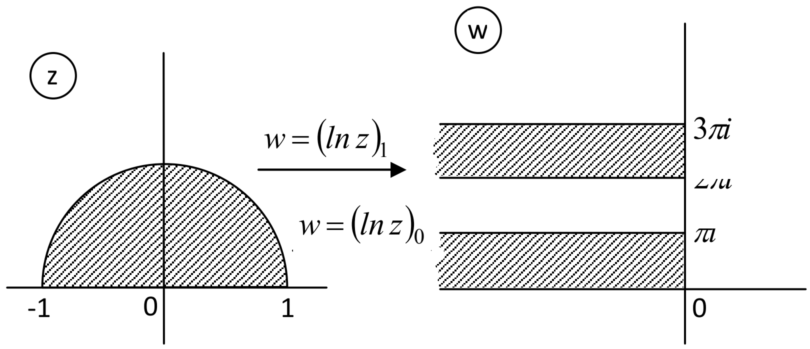


Рисунок 4.5

Точки $z=0$ та $z=\infty$ називаються для $\sqrt[n]{z}$ *точками розгалуження* для $Ln\,z$.

Якщо взяти замкнену жорданову криву, внутрішності якої належить точка 0, то скільки б разів ми її не обходили, приріст логарифма завжди буде відмінним від нуля. Те саме буде і для точки $z=\infty$.

4.5 Інші елементарні многозначні функції

Розглянемо ще деякі многозначні функції.

Позначимо через J^{-1} многозначну функцію, яка кожному $z\in \boldsymbol{C}$ ставить у відповідність множину точок $w\in \boldsymbol{C}$ таких, що $J(w)=z$, де J - відома нам функція Жуковського. Оскільки $J(w)=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$, то, розв′язуючи квадратне рівняння, дістаємо $J^{-1}(z)=z+\sqrt{z^2-1}$, тобто J^{-1} - двозначна функція. Для знаходження образів областей при відображенні однією з віток многозначної функції J^{-1} (наприклад, верхньої півплощини, рис. 4.6) можна скористатись результатами п. 3.3.

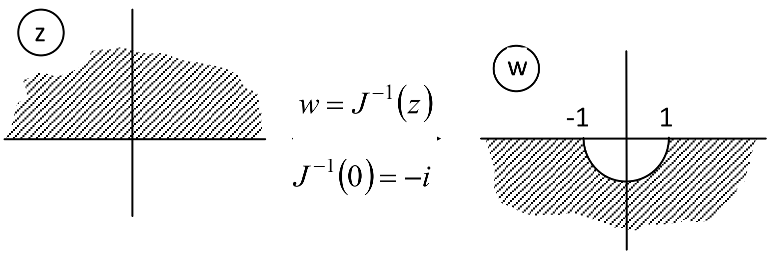


Рисунок 4.6

Арксинусом $Arc\,sin\,z$ називається многозначна функція, яка кожному $z\in \boldsymbol{C}$ ставить у відповідність множину точок $w\in \boldsymbol{C}$, таких що $sin\,w=z$. Розв′язуючи останнє рівняння, тобто рівняння $e^{iw}-e^{iw}= \;=2iz$, дістаємо $Arc\,sin\,z=i\,Ln\left(z+\sqrt{1-z^2}\right)$. Головним значенням $arcsin\,z$ називається та вітка арксинуса, яка вибирається в області $D=\boldsymbol{C}\setminus\{z: Im\,z=0, |Re\,z|\ge 1\}$ так, щоб $\sqrt{1-z^2}=1$ при $z=0$ і $Ln 1=0$. Ця вітка однолистно відображає область D на смугу $\{w: |Re\,w|<\pi/2\}$ (див п. 3.5). Легко бачити, що функція $w=arcsin\,z$ відображає однолистно верхню півплощину на півсмугу $\{w: Im\,w>0,\ |Re\,w|<\pi/2\}$.

Степеневою функцією з показником $\alpha\in \boldsymbol{C}$ називається многозначна функція $z^{\alpha}=e^{\alpha\,Ln\,z}$

Теорема 4.5. Для того, щоб z^{α} була однозначною функцією, необхідно і достатньо, щоб $\alpha\in \boldsymbol{Z}$.

Д о в е д е н н я.

Якщо z^{α} однозначна функція, то $e^{\alpha\, ln\, z} = z^{\alpha} = \; = e^{\alpha(ln\, z + 2\pi i)}$, звідки випливає, що $e^{2\pi i\alpha} = 1$, тобто $\alpha \in \boldsymbol{Z}$. Навпаки, якщо $\alpha \in \boldsymbol{Z}$, то $z^{\alpha} = e^{\alpha(ln\, z + 2\pi k i)} = e^{\alpha\, ln\, z}$, тобто z^{α} - однозначна функція.

Нехай $\alpha \notin \boldsymbol{Z}$. Вітку многозначної функції z^{α} можна вибрати там, де можна вибрати однозначну вітку логарифма, тобто там, де можна вибрати однозначну вітку аргумента.

Показниковою функцією з основою $a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0;1\}$ називається функція $a^{z} = e^{z\, ln\, a}$, де $ln\, a$ - головне значення логарифма. Очевидно, ця функція, як суперпозиція показникової і цілої лінійної функцій, є цілою.

Зауваження 4.2. Якщо вираз i^{i} розуміти як i^{z} при $z = i$, то він дорівнює $e^{i\, ln\, i} = e^{-\pi/2}$, а якщо розуміти як z^{i} при $z = i$, то $i^{i} = e^{i Ln\, i} = e^{i \cdot i(\pi/2 + 2\pi k)} = e^{-\pi/2 - 2\pi k}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

ЛЕКЦІЯ 5

ІНТЕГРУВАННЯ

5.1 Визначений інтеграл

Нехай $\Gamma = \{z = z(t) : \alpha \le t \le \beta\}$ - деяка крива. Зробимо довільне розбиття проміжка $[\alpha, \beta] : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ і позначимо $z_j = z(t_j)$, $\gamma_j = \{z = z(t) : t_{j-1} \le t \le t_j\}$. Очевидно, що $\gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j$. Таке розбиття позначимо через T. Число $\lambda_T = max\{|\gamma_j| : 1 \le j \le n\}$, де $|\gamma_j|$ - довжина елементарної дуги γ_j, називається діаметром розбиття T. Позначимо $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$. Зрозуміло, що $|\Delta z_j| \le |\gamma_j|$.

Нехай на γ задана функція *C*. Виберемо довільним чином $\varsigma_j \in \gamma_j$ і утворимо суму $\sigma_T = \sum_{j=1}^{n} f(\varsigma_j)\Delta z_j$.

Означення 5.1. Якщо існує скінченна границя $\lim_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = I$, яка не залежить від способу розбиття T і способу вибору точок $\varsigma_j \in \gamma_j$, то ця границя називається інтегралом від функції f по кривій Γ і позначається символом

$$I = \int_{\Gamma} f(z)dz . \qquad (5.1)$$

Функція (4.3) називається при цьому *інтегровною* по кривій Γ .

Обчислення визначеного інтеграла (5.1) зводиться до обчислення криволінійних інтегралів другого роду, відомих з курсу математичного аналізу. Дійсно, нехай $f = u + iv$, $\varsigma_j = \xi_j + i\eta_j$.

Так як $\Delta z_j = \Delta x_j + \Delta y_j$, то

$$\sum_{j=1}^{n} f(\varsigma_j)\Delta z_j = \sum_{j=1}^{n}\big(u(\xi_j,\eta_j) + iv(\xi_j,\eta_j)\big)\cdot(\Delta x_j + i\Delta y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\big(u(\xi_j,\eta_j)\Delta x_j - v(\xi_j,\eta_j)\Delta y_j\big) + + i\sum_{j=1}^{n}\big(u(\xi_j,\eta_j)\Delta y_j + v(\xi_j,\eta_j)\Delta x_j\big) . \qquad (5.2)$$

У правій частині останньої рівності стоять інтегральні суми для криволінійних інтегралів другого роду

$$\int_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy, \quad \int_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy , \qquad (5.3)$$

тому існування обидвох інтегралів (5.3) рівносильне існуванню інтеграла (5.1). Переходячи в рівності (5.2) до границі, дістаємо

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy . \qquad (5.4)$$

5.2 Властивості визначеного інтеграла

З означення 5.1, а також формули (5.4), дістаємо такі властивості визначеного інтеграла.

1^0 Для довільної сталої *C* разом з функцією f інтегро-ваною на Γ буде функція Cf , причому

$$\int_{\Gamma} Cf(z)dz = C\int_{\Gamma} f(z)dz .$$

2^0 Разом з функціями f_1 та f_2 інтегровною на Γ буде їхня сума і при цьому виконується рівність

$$\int_\Gamma (f_1(z)+f_2(z))dz = \int_\Gamma f_1(z)dz + \int_\Gamma f_2(z)dz .$$

3^0 Якщо $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz .$$

4^0 При зміні орієнтації кривої Γ інтеграл змінює знак на протилежний: $\int_\Gamma f(z)dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)dz$.

5^0 Кожна неперервна на Γ функція є інтегровною на Γ .

6^0 $$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)|\,ds , \tag{5.5}$$

де ds - диференціал дуги кривої Γ , а інтеграл справа – криволінійний інтеграл першого роду. Дійсно,

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = \left|\lim_{\lambda_T\to 0}\sum_{j=1}^n f(\varsigma_j)\Delta z_j\right| \le \lim_{\lambda_T\to 0}\sum_{j=1}^n \left|f(\varsigma_j)\right|\left|\gamma_j\right| = \int_\Gamma |f(z)|ds.$$

У теорії аналітичних функцій диференціал дуги часто записують як $|dz|$. Тому нерівність (5.5) можна переписати так: $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)||dz|$.

Якщо $|f(z)| \le M$ для всіх $z \in \Gamma$, то з нерівності (5.5) випливає, що

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le M \cdot \int_\Gamma ds = M \cdot |\Gamma| . \tag{5.6}$$

7^0 Якщо $\Gamma = \{z = z(t):\ \alpha \le t \le \beta\}$ - гладка крива, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt . \tag{5.7}$$

Дійсно, використовуючи (5.4), маємо:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta (u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t))dt +$$

$$+ i\int_\alpha^\beta (v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t))dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left((u\cdot x'(t) + iu\cdot y'(t)) + (iv\cdot x'(t) + i^2 v\cdot y'(t))\right)dt = .$$

$$= \int_\alpha^\beta (u\cdot z'(t) + iv\cdot z'(t))dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt.$$

Очевидно, що аналогічною до (5.7) формулою можна користуватись і у випадку кусково-гладкої кривої.

Отже, обчислення інтеграла (5.1) зводиться до обчислення інтеграла виду $\int_\alpha^\beta \chi(t)dt$, де χ - комплекснозначна функція $[\alpha;\beta] \to \boldsymbol{C}$. Припустимо, що ця функція неперервна і

$\chi(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$. Функція X називається *первісною* для цієї функції χ, якщо $X'(t)=\chi(t)$ для всіх $t\in[\alpha;\beta]$. Зрозуміло, що коли $X(t)=\Phi(t)+i\Psi(t)$, то $\Phi'(t)=\varphi(t)$, $\Psi'(t)=\psi(t)$. Тоді

$$\int_\alpha^\beta \chi(t)dt=\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt+i\int_\alpha^\beta \psi(t)dt=\Phi(t)\Big|_\alpha^\beta+i\Psi(t)\Big|_\alpha^\beta=X(t)\Big|_\alpha^\beta ,$$

тобто для комплекснозначних функцій дійсної змінної справедлива *формула Ньютона-Лейбніца*.

Приклад 5.1. Для довільних $k\in\boldsymbol{Z}$ та $r>0$ обчислимо інтеграл $\int\limits_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^k\,dz$.

Рівняння кола $\{z:|z-z_0|=r\}$ можна записати у вигляді $z=z_0+re^{it}$, $0\le t\le 2\pi$. Тому, якщо $k\ne -1$, то, скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int\limits_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^k\,dz=\int_0^{2\pi} r^k e^{ikt}ire^{it}dt=ir^{k+1}\int_0^{2\pi}e^{i(k+1)t}dt=$$

$$=\frac{r^{k+1}}{k+1}e^{i(k+1)t}\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

Якщо ж $k=-1$, то $\int\limits_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^k\,dz=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$.

Об′єднуючи ці два випадки, можемо остаточно записати

$$\int\limits_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^k\,dz=\begin{cases}2\pi i, & k=-1,\\ 0, & k\ne -1.\end{cases} \qquad (5.8)$$

5.3 Інтегральні теореми Коші

Теорема 5.1. Якщо функція f аналітична в однозв′язній області D, то для кожної замкненої кривої $\Gamma\subset D$ (не обов′язково без самоперетинів) виконується рівність

$$\int_\Gamma f(z)dz=0. \qquad (5.9)$$

Д о в е д е н н я.

Нехай $f=u+iv$.точці z_0. Оскільки функція f аналітична, то частинні похідні функцій u та v неперервні і задовольняють умовам Коші-Рімана (2.6). Скористаємось наступною відомою з курсу математичного аналізу теоремою: *якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в однозв′язній області D, то для того, щоб $\int_\gamma v(x,y)dx+u(x,y)dy=0$ для кожної замкненої кривої $\Gamma\subset D$, необхідно і достатньо, щоб $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ в усіх точках області D*. Завдяки (2.6) такі умови виконуються для обидвох інтегралів (5.3), отже, кожний з них дорівнює нулю, тому, з огляду на (5.4), дістаємо (5.9), чим і доводимо теорему 5.1.

Теорема 5.2. Нехай область D обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, а функція f аналітична в замиканні $\overline{D}$. Тоді

$$\int_{\partial D} f(z)dz=0. \qquad (5.10)$$

Д о в е д е н н я.

За умовою функція f аналітична в деякій області $G \supset \overline{D}$, тобто всюди в $\overline{D}$ виконуються умови Коші-Рімана. Застосовуючи до інтегралів в правій частині (5.4) формулу Гріна і використовуючи ці умови, маємо

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\partial D} v(x,y)dx + u(x,y)dy =$$

$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

Теорема доведена.

Наслідок. Якщо функція f аналітична в кільці $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$, то інтеграл $\int_{|z|=r} f(z)dz$ не залежить від $r \in (R_1 ; R_2)$.

Дійсно, нехай $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$. Застосувавши щойно доведену теорему до кільця $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$, дістанемо $\int_{|z|=r_2} f(z)dz - \int_{|z|=r_1} f(z)dz = 0$.

Наступна теорема узагальнює теорему 5.2.

Теорема 5.3. Нехай область D обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, а функція f аналітична в D і неперервна в $\overline{D}$. Тоді виконується рівність (5.10).

Доведення цієї теореми проведемо лише для так званих зіркових областей. *Область D називається зірковою,якщо існує така точка $z_0 \in D$, що кожний промінь з початком в z_0 перетинає межу ∂D тільки один раз.* Очевидно, що кожна опукла область є зірковою. Зрозуміло також, що якщо теорема буде доведена для зіркових областей, то тим самим вона буде доведена і для областей, які розбиваються на зіркові.

Отже, нехай D – зіркова область. Тоді її межа є замкненою жордановою кривою $\Gamma = \{z = z(t) : \alpha \le t \le \beta\}$. Позначимо через z_q точку з D, яка лежить на відрізку, що сполучає точку z_0 з точкою $z \in \Gamma$ таку, що $|z_q - z_0| = q|z - z_0|$, $0 < q < 1$. Тоді, внаслідок зірковості області D, крива $\Gamma_q = \{z = z_q(t) = z_0 + q(z(t) - z_0) : \alpha \le t \le \beta\}$ разом зі своєю внутрішністю міститься в D, тому за теоремою 5.2

$$\int_{\Gamma_q} f(z_q)dz_q = 0. \tag{5.11}$$

Легко бачити, що $dz_q = q\,dz$ і $z - z_q = (1-q)(z(t) - z_0)$.

Оскільки $(\exists K > 0)(\forall t \in [\alpha ; \beta])\{|z(t) - z_0| \le K\}$, то

$$|z - z_q| \le (1-q)K. \tag{5.12}$$

Так як f неперервна в $\overline{D}$, то вона там обмежена деяким числом M і рівномірно неперервна, тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z' \in D)(\forall z'' \in D)\{|z' - z''| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon\}.$$

Число q виберемо таким, щоб $1 - q < \varepsilon$ і $(1-q)K < \varepsilon$. Тоді з (5.12) випливає, що $|z - z_q| < \delta$, тому $|f(z) - f(z_q)| < \varepsilon$. Таким чином, враховуючи (5.11), дістаємо

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma_q} f(z_q)dz_q\right| = \left|\int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma} f(z_q)qdz\right| =$$

$$= \left|\int_{\Gamma} \left(f(z) - f(z_q)q\right)dz\right| = \left|\int_{\Gamma} \left(f(z) - f(z_q) + (1-q)f(zq)\right)dz\right| \le$$ звідки, внаслідок довільності ε

$$\le \int_{\Gamma} \left(\left|f(z) - f(z_q)\right| + (1-q)\left|f(zq)\right|\right)|dz| \le (\varepsilon + \varepsilon M)|\Gamma| = \varepsilon(1+M)|\Gamma|,$$

випливає рівність (5.10).

Теорема доведена.

5.4 Інтеграли типу Коші

Нехай Γ – крива або об′єднання скінченної кількості кривих, φ – неперервна функція на Γ. Інтеграли

$$\Phi_n(z) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\varsigma)}{(\varsigma - z)^n} d\varsigma, \quad n \in \boldsymbol{N},$$

називаються *інтегралами типу Коші*.

Теорема 5.4. Інтеграли типу Коші $\Phi_n(z)$ є аналітичними функціями на множині $\boldsymbol{C} \setminus \Gamma$ і $\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z)$

Д о в е д е н н я. Множина Γ є замкненою і обмеженою, тому за теоремою 2.2 $(\exists M > 0)(\forall z \in \Gamma)\{|\varphi(z)| \le M\}$. Візьмемо замкнений круг $K \subset \boldsymbol{C} \setminus \Gamma$ з центром у точці $z \notin \Gamma$. Внаслідок рівномірної неперервності функції $(\varsigma - z)^{-n-1}$, як функції двох змінних, на множині $\Gamma \times K = \{(\varsigma, z) : \varsigma \in \Gamma, z \in K\}$, для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, менше, ніж радіус круга K, що для усіх $\varsigma \in \Gamma,\ |h| < \delta$ та $t \in [0;1]$ виконується

$$\left|(\varsigma - z - th)^{-n-1} - (\varsigma - z)^{-n-1}\right| < \varepsilon. \tag{5.13}$$

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца (п.5.1), дістаємо

$$n\int_0^1 \frac{dt}{(\varsigma - z - th)^{n+1}} = \frac{1}{h}\left((\varsigma - z - h)^{-n} - (\varsigma - z)^{-n}\right).$$

Тому, враховуючи (5.13), маємо:

$$\left|\frac{\Phi_n(z+h) - \Phi_n(z)}{h} - n\Phi_{n+1}(z)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\varsigma)}{(\varsigma - z - h)^n} d\varsigma - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\varsigma)}{(\varsigma - z)^n} d\varsigma\right) - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}} d\varsigma\right| =$$

$$= \left|n\int_{\Gamma} \varphi(\varsigma)d\varsigma \int_0^1 \frac{dt}{(\varsigma - z - th)^{n+1}} - n\int_{\Gamma} \varphi(\varsigma)d\varsigma \int_0^1 \frac{dt}{(\varsigma - z)^{n+1}}\right| =$$

$$= n\left|\int_{\Gamma} \varphi(\varsigma)d\varsigma \int_0^1 \left((\varsigma - z - th)^{-n-1} - (\varsigma - z)^{-n-1}\right)dt\right| \le nM|\Gamma|\varepsilon,$$

тобто, згідно з означенням похідної, існує

$$\Phi_n(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi_n(z+h) - \Phi_n(z)}{h} = n\Phi_{n+1}(z).$$

Оскільки при всіх $z \notin \Gamma$ існує похідна для кожного $n \in \boldsymbol{N}$, то всі Φ_n неперервні в $\boldsymbol{C} \setminus \Gamma$, а отже, і їхні похідні теж неперервні. Теорему доведено.

Наслідок. Інтеграли типу Коші мають в $\boldsymbol{C} \setminus \Gamma$ похідні будь-якого порядку, які є аналітичними функціями, причому

$$\Phi_1^{(k)}(z) = k!\,\Phi_{n+1}(z).$$

5.5 Інтегральна формула Коші

Теорема 5.5. Нехай функція f аналітична в замкненій області $\overline{D}$, обмеженій скінченним числом жорданових кривих. Тоді для всіх $z_0 \in D$ виконується рівність

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \tag{5.14}$$

і функція f має в D похідні будь-якого порядку, які є аналітичними в D функціями та обчислюються за формулами

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{k+1}} d\varsigma\,. \tag{5.15}$$

Д о в е д е н н я.

Нехай z – довільна точка з D, $\overline{K}_r$ – замкнений круг з центром в z, родіусом r та краєм γ_r, який повністю лежить в D. Позначимо $D_r = D \setminus \overline{K}_r$. Зрозуміло, що функція $\psi(\varsigma) = \dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$ аналітична в D_r. Тому, враховуючи, що $\partial D_r = \partial D \cup \gamma_r^-$, за теоремою 5.2 і властивістю 4^0 визначених інтегралів маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = 0,$$

звідки

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma\,. \tag{5.16}$$

Оскільки $\dfrac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z} \to f'(z)$ при $\varsigma \to z$, то величина $\dfrac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z}$ обмежена в деякому околі точки $\varsigma = z$. Отже, існують такі $r_0 > 0$ та $M > 0$, що при всіх $r \in (0; r_0)$ і $\varsigma \in \gamma_r$ виконується $\left|\dfrac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z}\right| \le M$. Тоді, використовуючи (5.8) та властивість 6^0 визначених інтегралів, дістаємо:

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \right| = \left| f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{d\varsigma}{\varsigma - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{\varsigma - z} d\varsigma - \int_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \left| \frac{f(z) - f(\varsigma)}{\varsigma - z} \right| \cdot |d\varsigma| \le \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot 2\pi r = Mr \to 0, \quad r \to 0.$$

Звідси та із (5.16) випливає формула (5.14).

Інтеграл в (5.14), який називається *інтегралом Коші*, є частковим випадком інтеграла типу Коші. Тому, застосовуючи наслідок з теореми 5.4, отримуємо (5.15) і тим самим завершуємо доведення теореми 5.5.

Формула (5.14) називається *інтегральною формулою Коші*. Відзначимо, що формули (5.15) також часто називають інтегральними формулами Коші. З врахуванням (5.14) та теореми 5.2 можемо записати:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \begin{cases} f(z),\ z \in D, \\ 0,\ z \in \boldsymbol{C} \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Наслідок 1. Якщо функції f_1 та f_2 аналітичні в замкненій області $\overline{D}$, обмеженій скінченним числом жорданових кривих, то

$$(\forall z \in \partial D)\{f_1(z) = f_2(z)\} \Rightarrow (\forall z \in \overline{D})\{f_1(z) = f_2(z)\}.$$

Для доведення цього наслідка досить застосувати теорему 5.5 до функції $f = f_1 - f_2$.

Зауваження 5.1. Якщо при доведенні теореми 5.5 посилатися не на теорему 5.2, а на теорему 5.3, то в теоремі 5.5 і в наслідку 1 можна було б вимагати від функції f лише аналітичності в D і неперервності в $\overline{D}$.

Наслідок 2. Якщо функція f аналітична в області D, то вона в D має похідні будь-якого порядку, які є аналітичними в D функціями.

Справедливість цього твердження досить довести в кожній точці $z \in D$, для чого візьмемо замкнений круг $\overline{K} \subset D$ з центром в точці z і до нього застосуємо теорему 5.5.

ЛЕКЦІЯ 6
ПЕРВІСНА. ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ

6.1 Первісна

Нехай функція f неперервна в області D. Функція F називається *первісною* для f в D, якщо $F'(z) = f(z)$ для всіх $z \in D$.

Многозначна функція F називається *многозначною первісною* для f в D, якщо F в D розпадається на однозначні вітки (D_α, F_α) такі, що при всіх α виконується $F'_\alpha(z) = f(z)$ для кожного $z \in D_\alpha$ і на кожній кривій $\Gamma = \{z = z(t): a \le t \le b\} \subset D$ можна вибрати однозначну вітку $\widetilde{F}(z(t))$ таку, що:

1) $\widetilde{F}(z(a))$ є одним з наперед заданих значень $F(z(a))$;

2) $(\forall t_0 \in [a;b])(\exists \delta > 0)(\exists \alpha)(\forall t \in [a;b])$
$\{|t - t_0| < \delta \Rightarrow z(t) \in D_\alpha \wedge \widetilde{F}(z(t)) = F_\alpha(z(t))\}$.

Наприклад, в області $D = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ многозначна функція $Ln\,z$ є многозначною первісною для функції $1/z$.

Якщо функція F – первісна для f, то F є аналітичною функцією, бо функція f – неперервна. Аналогічно многозначна первісна є многозначною аналітичною функцією. Тоді, згідно з наслідком 2 з теореми 5.5, функція f є аналітичною. Отже, *необхідною умовою існування первісної* (однозначної чи многозначної) *для неперервної функції* f *є аналітичність* f.

Теорема 6.1. Нехай Γ довільна крива з області D з початком $z = A$ і кінцем $z = B$. Якщо F – первісна для f в D, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(B) - F(A). \tag{6.1}$$

Д о в е д е н н я.

Нехай $\Gamma = \{z = z(t): a \le t \le b\},\ z(a) = A,\ z(b) = B$. Тоді (див. (5.7))

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt = \Phi(B) - \Phi(A), \tag{6.2}$$

де $\Phi(t)$ - довільна первісна для комплекснозначної функції $f(z(t)) \cdot z'(t)$. Покажемо, що $\Phi(t) = F(z(t))$ є первісною для $f(z(t)) \cdot z'(t)$. Дійсно, $\Phi'(t) = F'_z(z(t)) \cdot z'(t) = f(z(t)) \cdot z'(t)$. Підставивши тепер $F(z(t))$ в (6.2) замість $\Phi(t)$, дістанемо (6.1).

Теорема доведена.

Зауваження 6.1. Формула (6.1) називається *формулою Ньютона-Лейбніца*. В умовах теореми 6.1 результат інтегрування не залежить від виду кривої Γ, а тільки від її початкової та кінцевої точок. В таких випадках замість $\int_\Gamma f(z)dz$ вживається запис $\int_A^B f(z)dz$.

Теорема 6.2. Нехай функція f неперервна в області D, F - її многозначна первісна. Тоді для кожної кривої $\Gamma \subset D$ виконується рівність

$$\int_\Gamma f(z)dz = \Delta_\Gamma F. \tag{6.3}$$

Д о в е д е н н я.

Виберемо на Γ однозначну вітку $\widetilde{F}$ многозначної функції F. Тоді для кожної точки $t_0 \in [a;b]$ в якомусь її околі, використовуючи умову 2 означення многозначної первісної, маємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\widetilde{F}(z(t))\right)=\frac{d}{dt}\left(F_\alpha(z(t))\right)=F'_\alpha(z(t))\cdot z'(t)=f(z(t))\cdot z'(t).$$

Отже, $\widetilde{F}(z(t))$ - первісна для $f(z(t))\cdot z'(t)$ на $[a;b]$. Тому, скориставшись попередньою теоремою, дістанемо:

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt=\widetilde{F}(z(b))-\widetilde{F}(z(a))=\Delta_\Gamma\widetilde{F},$$

тобто $\Delta_\Gamma\widetilde{F}$ не залежить від вибору вітки. Значить, $\Delta_\Gamma\widetilde{F}=\Delta_\Gamma F$.

Теорема доведена.

Надалі обмежимось розглядом тільки однозначної первісної.

Теорема 6.3. Нехай функція f неперервна в області D, а F - її первісна. Для того, щоб Φ була первісною для f в D, необхідно і достатньо, щоб $\Phi(z)\equiv F(z)+const$.

Д о в е д е н н я.

Якщо Φ - якась довільна первісна для f в D, то, поклавши $\Psi=\Phi-F$, матимемо $\Psi'(z)\equiv\Phi'(z)-F'(z)\equiv 0$. Тоді для двох довільних точок z_1 та z_2 із D дістанемо

$$\Psi(z_2)-\Psi(z_1)=\int_{z_1}^{z_2}\Psi'(z)dz=0,$$

звідки випливає, що $\Psi(z)\equiv const$, тобто $\Phi(z)\equiv F(z)+const$.

Навпаки, якщо $\Phi(z)\equiv F(z)+const$, то $\Psi'(z)\equiv\Phi'(z)\equiv f'(z)$.

Теорема доведена.

Теорема 6.4. Нехай функція f неперервна в області D. Для того, щоб f мала в D первісну, необхідно і достатньо, щоб для кожної замкненої кривої $\Gamma\subset D$ виконувалась рівність

$$\int_\Gamma f(z)dz=0. \qquad (6.4)$$

Д о в е д е н н я.

Якщо f має в D первісну F, то, за теоремою 6.2,

$$\int_\Gamma f(z)dz=\Delta_\Gamma F=0.$$

Навпаки, нехай виконується (6.4). Зафіксуємо довільну точку $z_0\in D$. З (6.4) випливає, що інтеграл від f по довільній кривій, що лежить в D і з'єднує z_0 з точкою $z\in D$, не залежить від вибору кривої, а лише від точок z_0 та z. Тому

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\varsigma)d\varsigma \qquad (6.5)$$

є однозначною функцією. Покажемо, що вона є первісною для f, тобто що

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z). \qquad (6.6)$$

Візьмемо круг $K \subset D$ з центром в точці z і виберемо число $h \in \boldsymbol{C}$ таким, щоб $z+h \in K$. З'єднаємо z і $z+h$ відрізком $[z; z+h]$, а z_0 та z довільною кривою $\Gamma \subset D$. Тоді

$$F(z+h)-F(z)=\int_{\Gamma_1 \cup [z;z+h]} f(\varsigma)d\varsigma - \int_{\Gamma_1} f(\varsigma)d\varsigma = \int_{[z;z+h]} f(\varsigma)d\varsigma,$$

тому

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[z;z+h]} f(\varsigma)d\varsigma - \frac{1}{h}\int_{[z;z+h]} f(z)d\varsigma\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_{[z;z+h]} \big(f(\varsigma)-f(z)\big)d\varsigma\right| \le \frac{1}{|h|}\cdot|h| \max_{\varsigma\in[z;z+h]}|f(\varsigma)-f(z)| \le \qquad (6.7)$$

$$\le \max_{\varsigma\in[z;z+h]}|f(\varsigma)-f(z)|. \qquad (6.7)$$

Оскільки f неперервна, то $\max\limits_{\varsigma\in[z;z+h]}|f(\varsigma)-f(z)| \to 0$ при $h \to 0$, тому з (6.7) випливає (6.6).

Теорему доведено.

Для випадку, коли область D - круг, теорему 6.4 можна підсилити.

Теорема 6.5. Нехай функція f неперервна в крузі K. Для того, щоб f мала в K первісну, необхідно і достатньо, щоб інтеграл від f по контуру кожного трикутника з K дорівнював нулеві.

Д о в е д е н н я.

Необхідність, очевидно, міститься в необхідності попередньої теореми. Отже, доведемо достатність. Нехай z_0 - центр круга K. Покладемо $F(z)=\int\limits_{[z_0;z]} f(\varsigma)d\varsigma$. Ясно, що F є однозначною функцією. Щоб довести, що F - первісна для f, досить довести (6.6). Оскільки інтеграл по трикутнику з вершинами z_0, z, $z+h$ дорівнює нулеві, то

$$F(z+h)=\int_{[z_0;z+h]} f(\varsigma)d\varsigma = \int_{[z_0;z]} f(\varsigma)d\varsigma + \int_{[z;z+h]} f(\varsigma)d\varsigma,$$

звідки $\dfrac{F(z+h)-F(z)}{h}=\dfrac{1}{h}\int\limits_{[z;z+h]} f(\varsigma)d\varsigma$. Подальше доведення теореми 6.5 таке саме, як і доведення теореми 6.4.

Наслідок. Якщо функція f неперервна в крузі K, Γ - замкнена крива з K, Δ - трикутник з K, то

$$(\forall \Gamma \subset K)\left\{\int_{\Gamma} f(z)dz = 0\right\} \Leftrightarrow (\forall \Delta \subset K)\left\{\int_{\Delta} f(z)dz = 0\right\}.$$

Теорема 6.6. Нехай функція f неперервна в однозв'язній області D. Для того, щоб f мала в D первісну, необхідно і достатньо, щоб вона була в цій області аналітичною.

Д о в е д е н н я.

Необхідність доведена на початку цього пункту. Доведемо достатність. Якщо функція f аналітична в однозв'язній області D, то за теоремою 5.1 виконується (5.9), тому за теоремою 6.4 функція f має первісну.

Для загального випадку має місце така теорема, доведення якої опускаємо.

Теорема 6.7. Нехай функція f неперервна в області D. Для того, щоб f мала в D первісну чи многозначну первісну, необхідно і достатньо, щоб вона була в цій області аналітичною.
Висновок 6.1. Клас аналітичних в області D функцій збігається з класом неперервних в D функцій, які мають первісну чи многозначну первісну.

6.2 Теореми Морери і Гурса

Теорема 6.8 (Морери). Якщо функція f неперервна в області D і $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$ для кожної замкненої кривої $\Gamma \subset D$, то f аналітична в D.

Д о в е д е н н я. За теоремою 6.4 функція f має первісну в D, тому за теоремою 6.7 вона аналітична в D.

Теорема 6.9 (посилена теорема Морери). Якщо функція f неперервна в області D і $\int\limits_{\Delta} f(z)dz = 0$ для кожного трикутника $\Delta \subset D$, то f аналітична в D.

Д о в е д е н н я. Досить показати, що f аналітична в кожному крузі $K \subset D$. Застосувавши до такого круга теореми 6.5 та 6.6, дістаємо аналітичність f в K, а, отже, і в області D.

Теорема 6.10 (про усунення відрізка). Якщо функція f неперервна в області D і аналітична в області $D \setminus I$, де I - відрізок, то f аналітична в D.

Д о в е д е н н я. Зрозуміло, що нам досить довести аналітичність f в кожній точці $z \in I \cap D$. Візьмемо круг $K \subset D$ з центром в z і будь-який трикутник $\Delta \subset K$. Якщо $I \cap \Delta = \varnothing$, то застосуємо теорему 5.1, а якщо $I \cap \Delta \neq \varnothing$, то застосуємо теорему 5.3, розбиваючи, якщо треба, трикутник на дві частини. В обидвох випадках інтеграл по трикутнику від f дорівнює нулеві, тому за посиленою теоремою Морери функція f аналітична в K, а, отже, і в D.

Теорема 6.11 (Гурса). Якщо функція f моногенна в області D, то f аналітична в D.

Д о в е д е н н я. Нехай f моногенна в D. Візьмемо довільний круг $K \subset D$. Враховуючи посилену теорему Морери, нам достатньо довести, що інтеграл по кожному трикутнику $\Delta \subset K$ від f дорівнює нулеві. Зафіксуємо $\Delta \subset K$ і через l його периметр. Покладемо $M = \left|\int\limits_{\Delta} f(z)dz\right|$. Нам досить довести, що $M = 0$. Припустимо, що це не так, тобто $M > 0$.

Розіб′ємо трикутник Δ середніми лініями на трикутники $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}$ (рис. 6.1). Тоді

$$M = \left|\int\limits_{\Delta_1^{(1)}} f(z)dz + \int\limits_{\Delta_2^{(1)}} f(z)dz + \int\limits_{\Delta_3^{(1)}} f(z)dz + \int\limits_{\Delta_4^{(1)}} f(z)dz\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{\Delta_1^{(1)}} f(z)dz\right| + \left|\int\limits_{\Delta_2^{(1)}} f(z)dz\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{\Delta_3^{(1)}} f(z)dz\right| + \left|\int\limits_{\Delta_4^{(1)}} f(z)dz\right|,$$

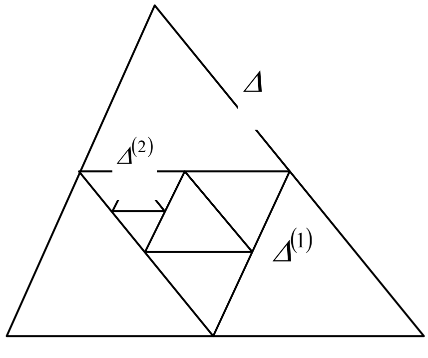


Рисунок 6.1

звідки випливає, що принаймні для одного з трикутників $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}$ (позначимо його через $\Delta^{(1)}$) виконується нерівність $\left|\int\limits_{\Delta^{(1)}} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4}$. Далі розбиваємо трикутник $\Delta^{(1)}$ середніми лініями на чотири трикутники, серед яких є принаймні один $\Delta^{(2)}$, для якого $\left|\int\limits_{\Delta^{(2)}} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^2}$ і т.д., тобто для кожного $n \in \mathbf{N}$ буде принаймні один $\Delta^{(n)}$, для якого

$$\left|\int\limits_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^n}, \qquad (6.8)$$

причому периметр $\Delta^{(n)}$ дорівнює $\frac{l}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно також, що при всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується $int\,\Delta^{(n)} \supset int\,\Delta^{(n+1)}$. Отже, послідовність вкладених замкнених областей, обмежених трикутниками $\Delta^{(n)}$, має єдину спільну точку яку позначимо z_0, а $\Delta^{(n)}$ стягуються до z_0.

Оскільки f моногенна в z_0, то $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ $(\forall z \in D)\left\{0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon\right\}$,

тобто при $|z - z_0| < \delta$ виконується

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

З іншого боку, для кожного $\delta > 0$ знайдеться $N \in \mathbf{N}$ таке, що $\Delta^{(N)} \subset U_\delta(z_0)$. Оскільки при $z \in \Delta^{(N)}$ виконується $|z - z_0| < \frac{l}{2^N}$, то з останньої нерівності дістаємо

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon l / 2^N. \qquad (6.9)$$

За теоремою 5.1

$$\int\limits_{\Delta^{(N)}} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right)dz = 0,$$

бо підінтегральна функція є цілою лінійною, тому, з врахуванням (6.8) та (6.9), матимемо:

$$\frac{M}{4^N} \le \left|\int\limits_{\Delta^{(N)}} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\Delta^{(N)}} f(z)dz - \int\limits_{\Delta^{(N)}} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right)dz\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\Delta^{(N)}} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right)dz\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\Delta^{(N)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)||dz| \le \int\limits_{\Delta^{(N)}} \frac{\varepsilon l}{2^N}|dz| = \frac{\varepsilon l}{2^N} \cdot \frac{l}{2^N},$$

тобто $M \le \varepsilon l^2$, звідки випливає, що $M = 0$. Отримане протиріччя нашому припущенню доводить теорему Гурса.

Висновок 6.2. Клас моногенних в області D функцій збігається з класом аналітичних в цій області функцій.

6.3 Гармонічні функції

Означення 6.1. Дійснозначна функція $u = u(x, y)$ називається гармонічною в області $D \subset \boldsymbol{R}^2$, якщо вона в цій області двічі диференційована і

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (6.10)$$

Ототожнюючи $\boldsymbol{R}^2$ з $\boldsymbol{C}$, знайдемо зв′язок між гармонічними та аналітичними функціями.

Теорема 6.10. Якщо функція $f = u + i\,v$ аналітична в області D, то функції u та v гармонічні в D.

Д о в е д е н н я. За наслідком 2 з теореми 5.5 і теоремою 2.3 функції u та v мають частинні похідні будь-якого порядку і задовольняють умови Коші-Рімана. Продиференціювавши одну з цих умов по x, а іншу – по y, дістанемо рівності

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},$$

звідки додаванням їх приходимо до (6.9), чим і доводимо гармонічність u. Для доведення гармонічності v достатньо продиференціювати першу умову Коші-Рімана по y, а другу – по x, після чого від отриманої першої рівності відняти другу.

Теорема 6.11. Якщо функція u гармонічна в області D, то існує аналітична в D функція f така, що при всіх $z \in D$ виконується $u = Re\, f$.

Д о в е д е н н я. Зафіксуємо $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in D$ і довільну точку $z = x + i\,y \in D$ з′єднаємо з точкою z_0 кривою $\Gamma \subset D$ та розглянемо криволінійний інтеграл

$$\int_{\Gamma} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy. \qquad (6.11)$$

Оскільки з (6.10) випливає, що $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ то інтеграл (6.11) не залежить від шляху інтегрування, тому можемо розглянути функцію

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Знайдемо її частинні похідні. Коли братимемо похідну по x (по y), то вибиратимемо криву Γ такою, щоб перетин її з деяким околом точки (x, y) складався з горизонтального (вертикального) піввідрізка. Тоді

$$v(x, y) = const + \int_{x_1}^{x} -\frac{\partial u(t, y)}{\partial y}dt, \quad v(x, y) = const + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}dt,$$

звідки дістаємо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (6.12)$$

Покладемо $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$. Очевидно, для цієї функції рівності (6.12) є не чим іншим, як умовами Коші-Рімана, отже, функція f аналітична в D, а $Re\, f = u$.Теорему доведено.

ЛЕКЦІЯ 7
ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

7.1 Означення. Теорема Вейєрштрасса

Нехай (f_n) - послідовність функцій, заданих на $E \subset \boldsymbol{\tilde{N}}$. *Функціональним рядом* називається вираз виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots, \; z \in E. \tag{7.1}$$

Поклавши $z = z_0$ в (7.1), дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. Якщо він збіжний, то кажуть, що функціональний ряд (7.1) збігається у точці z_0; якщо ж розбіжний, то (7.1) - розбігається у точці z_0. Ряд (7.1) називається *збіжним на множині* E, якщо він збіжний у кожній точці $z \in E$. У цьому випадку через $f(z)$ позначимо суму ряду (7.1) в точці z. Отже, те, що ряд (7.1) збігається на E до функції f, означає, що

$$(\forall z \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \boldsymbol{N})(\forall n > n_0)\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon\right\}.$$

Ряд (7.1) називається *рівномірно збіжним на множині* E *до функції* f, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \boldsymbol{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in E)\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon\right\}.$$

Як бачимо, наведені означення нічим не відрізняються від аналогічних з курсу математичного аналізу. Використовуючи нерівності (1.12), легко довести (як ми це робили в лекції 1), наступну теорему.

Теорема 7.1. Для того, щоб ряд (7.1) був збіжним (рівномірно збіжним) на множині E до функції f, необхідно і достатньо, щоб були збіжними (рівномірно збіжними) на E до функцій u та v відповідно ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, де $u_n = Re\, f_n$, $u = Re\, f$, $v_n = Im\, f_n$, $v = Im\, f$.

Ця теорема дає можливість перенести відомі з курсу математичного аналізу теореми на випадок комплексної змінної. Наприклад, має місце критерій Коші.

Теорема 7.2. Для того, щоб ряд (7.1) був рівномірно збіжним на множині E, необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \boldsymbol{N})(\forall n > n_0)(\forall m \in \boldsymbol{N})(\forall z \in E)\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(z)\right| < \varepsilon\right\}$$

Використовуючи цей критерій, неважко, як і в курсі математичного аналізу, довести таку ж ознаку Вейєрштрасса.

Теорема 7.3. Функціональний ряд (7.1) на множині E збіжний рівномірно і абсолютно, якщо існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ з додатними членами такий, що $(\forall n \in \boldsymbol{N})(\forall z \in E)\{|f_n(z)| \le \alpha_n\}$.

Доведемо ще два аналоги відомих з курсу математичного аналізу теорем.

Теорема 7.4. Якщо усі функції f_n неперервні на множині E і ряд (7.1) рівномірно збіжний на E до функції f, то f - неперервна на E функція.

Д о в е д е н н я. З рівномірної збіжності ряду (7.1) випливає рівномірна збіжність рідів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ відповідно до функцій u та v. Оскільки функції u_n та v_n є неперервними на E, то за відповідною теоремою з математичного аналізу такими самими є функції u та v, а отже, і f.

Теорема 7.5. Нехай Γ - крива, функції f_n неперервні на Γ і ряд (7.1) рівномірно збіжний на Γ до функції f. Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z)dz .$$

Д о в е д е н н я. За теоремою 7.4 функція f неперервна на Γ, отже, усі інтеграли існують. З рівномірної збіжності ряду випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \boldsymbol{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in \Gamma)\left\{\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| < \varepsilon\right\}.$$

Тому при $n > n_0$ маємо $\left|\int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma} f_k(z)dz\right| =$

$$= \left|\int_{\Gamma}\left(f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right)dz\right| \le \int_{\Gamma}\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| \cdot |dz| \le \varepsilon |L|,$$

а це означає, що $\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_k(z)dz$.

Теорему доведено.

Далі розглянемо теорему Вейєрштрасса про ряди аналітичних функцій, яка не має аналогу для рядів з дійсними неперервно диференційовними функціями. При її доведенні використовується така лема.

Лема 7.1. Якщо ряд (7.1) рівномірно збіжний на множині E, а функція φ обмежена на E, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) f_n(z)$ рівномірно збіжний на E.

Справедливість цієї леми випливає з критерія Коші і нерівності, яка виконується при всіх $z \in E$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \varphi(z) f_k(z)\right| \le M \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(z)\right|, \quad \text{де} \quad M = sup\{|\varphi(z)| : z \in E\}.$$

Теорема 7.6. Нехай в області D задана послідовність (f_k) аналітичних функцій і ряд (7.1) рівномірно збіжний у кожному замкненому крузі $\overline{K} \subset D$. Тоді:

1) функція f аналітична в D;

2) ряд (7.1) можна почленно диференціювати будь-яку скінченну кількість разів в усіх точках області D, тобто

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \quad n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (7.2)$$

3) ряди в (7.2) рівномірно збіжні у кожному замкненому крузі $\overline{K}\subset D$.

Д о в е д е н н я. Зупинимось лише на доведеннях тверджень 1 та 2. Почнемо з 2. Зрозуміло, що досить довести аналітичність f в довільній точці $z\in D$. Виберемо замкнений круг $\overline{K}\subset D$ з центром у точці z. За теоремою 7.4 функція f неперервна на $\overline{K}$, а за теоремою 5.5 ряд (7.1) можна почленно інтегрувати по будь-якій замкненій кривій, що лежить в K. Нехай Γ - така крива. Оскільки за теоремою 5.1 $\int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz=0$ при всіх $k\in \boldsymbol{Z}$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz=0,$$

звідки, за теоремою 6.8, випливає аналітичність f в K і, тим більше, у точці z.

Доведемо твердження 2. Нехай K - такий самий круг, як і при доведенні твердження1. Помножимо обидві частини рівності $f(\varsigma)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\varsigma)$ при $\varsigma\in\partial K$ на функцію $\varphi(\varsigma)=\frac{n!}{2\pi i}(\varsigma-z)^{-n-1}$, яка є обмеженою на ∂K. Дістанемо рівномірно збіжний за лемою 7.1 ряд, який за теоремою 7.5 можна почленно інтегрувати. Тому матимемо:

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^{n+1}}d\varsigma=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f_k(\varsigma)}{(\varsigma-z)^{n+1}}d\varsigma,$$

з якої за теремою 5.5 (див. рівність (5.15)) дістанемо рівність (7.2).

7.2 Степеневі ряди

Степеневим рядом (з центром у точці z_0) називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot (z-z_0)^n, \qquad (7.3)$$

де c_n - відомі коефіцієнти. Позначимо $\alpha=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ і до ряду (7.3) застосуємо теорему 1.3. Оскільки при $z\neq z_0$ справедлива рівність $q=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|\cdot|z-z_0|^n}=\alpha\cdot|z-z_0|$, то при $\alpha=0$ ряд (7.3) є абсолютно збіжним при всіх $z\in\boldsymbol{C}$. Якщо $\alpha=\infty$, то ряд (7.3) розбіжний всюди, крім точки $z=z_0$. Нарешті, якщо $0<\alpha<+\infty$, то ряд (7.3) є абсолютно збіжним в $\left\{z:|z-z_0|<\frac{1}{\alpha}\right\}$ і розбіжним в $\left\{z:|z-z_0|>\frac{1}{\alpha}\right\}$

Число $R,\ 0<R<+\infty$ називається *радіусом збіжності* ряду (7.3), якщо цей ряд збіжний в $\{z:|z-z_0|<R\}$ і розбіжний в $\{z:|z-z_0|>R\}$. Якщо ряд (7.3) збіжний всюди, то вважаємо $R=+\infty$, а якщо ніде, крім точки z_0, не збіжний, то вважаємо $R=0$. З наведених вище міркувань випливає існування для кожного ряду єдиного радіуса збіжності, який обчислюється за формулою Коші-Адамара:

$$R = 1 \Big/ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \,. \tag{7.4}$$

Круг $\{z : |z - z_0| < R\}$ називається *кругом збіжності*, а при $0 < R < +\infty$ коло $\{z : |z - z_0| = R\}$ - *колом збіжності*. На колі збіжності ряд (7.3) може бути збіжним, розбіжним, збіжним тільки на деякій підмножині цього кола.

Теорема 7.7 (Абеля). Якщо ряд (7.3) збіжний в точці $z* \neq z_0$, то він абсолютно збіжний у крузі $\{z : |z - z_0| < |z * - z_0|\}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки ряд (7.3) збіжний в точці $z*$, то, згідно з означенням радіуса збіжності, $|z * - z_0| \le R$, а оскільки ряд (7.3) абсолютно збіжний в $\{z : |z - z_0| < R\}$, то він є абсолютно збіжним і в крузі $\{z : |z - z_0| < |z * - z_0|\}$, що й потрібно було довести.

Теорема 7.8 (про рівномірну збіжність). Якщо ряд (7.3) має радіус збіжності $R > 0$, то у кожному замкненому крузі $\{z : |z - z_0| \le r\},\ 0 < r < R$, він збіжний рівномірно.

Д о в е д е н н я. Нехай z_1 - точка на колі $\{z : |z - z_0| = r\}$. В z_1 ряд (7.3) збіжний абсолютно, тобто $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n < +\infty$. Останній ряд є мажорантним для ряду (7.3) у крузі $\{z : |z - z_0| \le r\}$. Застосувавши далі ознаку Вейєрштрасса (теорема 7.3), закінчуємо доведення нашої теореми.

Наслідок 1. Сума ряду (7.3) є аналітичною функцією, і цей ряд можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

Дійсно, оскільки $c_n \cdot (z - z_0)^n$ - цілі функції і ряд (7.3) рівномірно збіжний у кожному замкненому крузі в області $\{z : |z - z_0| < R\}$, то за теоремою Вейєрштрасса його сума є аналітичною в цій області функцією.

Наслідок 2. Ряд (7.3) можна почленно інтегрувати по будь-якій кривій, яка лежить у крузі збіжності.

Дійсно, для кожної кривої Γ, яка лежить у крузі збіжності, можна знайти таке $r \in (0; R)$, що $\Gamma \subset \{z : |z - z_0| \le r\}$, тобто ряд (7.3) рівномірно збіжний на Γ, тому за теоремою 7.5 його можна почленно інтегрувати.

7.3 Узагальнені степеневі ряди

Нехай $z_0 \in \boldsymbol{C}$. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = \ldots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \tag{7.5}$$

$$+ c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \ldots + c_n \cdot (z - z_0)^n + \ldots \qquad (7.5)$$

називатимемо *узагальненим степеневим рядом*. Ряди $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z - z_0)^n$ та $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ називаються відповідно *головною* та *правильною* частинами ряду (7.5).

Узагальнений степеневий ряд) називається *збіжним (рівномірно збіжним) на множині* E, якщо на E збіжні (рівномірно збіжні) його головна і правильна частини. Правильна частина є звичайним степеневим рядом. Позначимо через R_2 його радіус збіжності і припустимо, що $R_2 > 0$. За теоремою 7.8 при $r \in (0; R_2)$ правильна частина рівномірно збігається в замкненому крузі $\{z : |z - z_0| \le r\}$. В головній же частині зробимо заміну $z - z_0 = \dfrac{1}{w}$. Дістанемо (перепозначивши $n = -k$) степеневий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k} \cdot w^k$. Нехай R' - його радіус збіжності. Якщо $R' > 0$, то він збіжний у крузі $\{w : |w| < R'\}$, причому рівномірно на кожному замкненому крузі цього круга. Тоді, повертаючись до головної частини ряду (7.5), бачимо, що вона збіжна в області $\left\{z : |z - z_0| > \dfrac{1}{R'} = R_1\right\}$ і рівномірно збіжна у кожній замкненій області $\{z : |z - z_0| \ge r\},\ r > R_1$. Враховуючи (7.4), бачимо, що числа R_1 та R_2 обчислюються за допомогою формул Коші-Адамара:

$R_1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$, $\qquad R_2 = 1\Big/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Якщо $R_1 > R_2$, то ряд (7.5) ніде не збіжний, якщо ж $R_1 = R_2$, то він може бути збіжним хіба що на колі $\{z : |z - z_0| = R_1\}$ або на якійсь його частині, а якщо $R_1 < R_2$, то ряд (7.5) збігатиметься в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, причому на краю цього кільця можуть бути точки збіжності. Надалі розглядатимемо лише третій випадок і зауважимо, що в кожному замкненому кільці $\{z : r_1 \le |z - z_0| \le r_2\},\ R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, ряд (7.5) рівномірно збіжний, отже, в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ задає аналітичну функцію і його можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

7.4 Ряди Лорана

Теорема 7.9 (Лорана). Аналітичну в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ функцію f можна єдиним чином розвинути в узагальнений степеневий ряд (7.5), причому

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma, \tag{7.6}$$

де Γ_R - довільне коло $\{z : |z - z_0| = R\},\ R_1 < R < R_2$.

Д о в е д е н н я. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $z_0 = 0$ (загальний випадок зводиться до цього заміною $z - z_0$ на z). Нехай z - довільна точка з кільця $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$. Виберемо кола $\Gamma_{R'} = \{z : |z| = R'\}$ та $\Gamma_{R''} = \{z : |z| = R''\},\ R_1 < R' < R'' < R_2$ так, щоб точка z лежала в кільці $\{z : R' < |z| < R''\}$. Тоді, за формулою (5.14), матимемо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}^{-}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}^{-}} \frac{f(\varsigma)}{z - \varsigma} d\varsigma. \qquad (7.7) \end{aligned} \tag{7.7}$$

Якщо $\varsigma \in \Gamma_{R'}$, то $\left|\varsigma/z\right| = R'/|z| < 1$ і тоді

$$\frac{1}{z - \varsigma} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \varsigma/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varsigma}{z}\right)^n. \tag{7.8}$$

Останній ряд є рівномірно збіжним відносно $\varsigma \in \Gamma_{R'}$, бо мажорується рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R'}{|z|} \right)^n$ (теорема 7.3). Функція f обмежена на $\Gamma_{R'}$. Тому за лемою 7.1 можемо обидві частини рівності (7.8) помножити на $f(\varsigma)$ і почленно проінтегрувати. Матимемо:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\varsigma)}{z-\varsigma} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} f(\varsigma) \left(\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varsigma}{z} \right)^n \right) d\varsigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int\limits_{\Gamma_{R'}} f(\varsigma) \varsigma^n d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{-(n+1)+1}} d\varsigma \right) z^{-(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{n+1}} d\varsigma \right) z^n . \qquad (7.9)$$

На колі $\Gamma_{R''}$ виконується нерівність $\left| z/\varsigma \right| = |z|/R'' < 1$, отже, $\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{1}{1 - z/\varsigma} = \frac{1}{\varsigma} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\varsigma} \right)^n$.

Тому, міркуючи аналогічно, маємо:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} f(\varsigma) \left(\frac{1}{\varsigma} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\varsigma} \right)^n \right) d\varsigma = \qquad (7.10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{n+1}} d\varsigma \right) z^n . \qquad (7.10)$$

Використовуючи тепер наслідок з теореми 5.2, одержуємо, що при $R_1 < R < R_2$ виконуються рівності

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{n+1}} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{n+1}} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{n+1}} d\varsigma .$$

Тому, підставляючи (7.9) та (7.10) в (7.7), з врахуванням останніх рівностей, дістаємо:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{n+1}} d\varsigma \right) z^n .$$

Отже, можливість розвинення і формула (7.6) доведені.

Єдиність розвинення доведемо від супротивного.

Припустимо, що для аналітичної в кільці $\{ z : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$ функції f виконується

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n z^n .$$

Помножимо обидва ряди на $z^{-(m+1)}$ і проінтегруємо почленно по колу $\{ z : |z| = R \}$, $R_1 < R < R_2$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int\limits_{|z|=R} z^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n \int\limits_{|z|=R} z^{n-m-1} dz .$$

Скориставшись тут рівністю (5.8), дістаємо $c_m \cdot 2\pi = \tilde{c}_m \cdot 2\pi$, звідки $c_m = \tilde{c}_m$ при всіх $m \in \boldsymbol{Z}$.

Теорема 7.9 повністю доведена.

Коефіцієнти (7.6) називаються *коефіцієнтами Лорана*, а ряд (7.5) – *рядом Лорана*.

Зауваження 7.1. Нехай $\{ z : 0 < |z - z_0| < \delta \}$ - проколений окіл точки $z_0 \neq \infty$. Якщо функція f аналітична в ньому, то її можна розвинути в ряд Лорана, бо цей окіл є частковим випадком кільця в теоремі 7.9 з $R_1 = 0$ та $R_2 = \delta$. Дістанемо таким чином розвинення функції f в *ряд Лорана в околі точки* z_0. Означення головної і правильної частини зберігаються.

Зауваження 7.2. Нехай тепер $z_0 = \infty$ і функція f аналітична в області $\left\{ z : \frac{1}{\delta} < |z| < +\infty \right\}$.

Рядом Лорана для функції f *в околі точки* $z_0 = \infty$ називається ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k . \tag{7.11}$$

При цьому *ряд, складений з членів з додатними показниками, називається головною частиною ряду* (7.11), а ряд, що залишиться після усунення головної частини, - *правильною частиною*.

Висновок 7.1. Отже, можна сказати, що до головної частини розвинення функції f в ряд Лорана в околі точки $z_0 \in \overline{\boldsymbol{C}}$ належать ті члени, які прямують до ∞ при $z \to z_0$.

Зауваження 7.3. Якщо функція f аналітична в області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$, яку можна розуміти одночасно як проколений окіл точки $z = 0$, так і точки $z = \infty$, то в цій області функцію f можна розвинути в ряд (7.11), який є *рядом Лорана для* f *і в околі точки* $z = 0$*, і в околі точки* $z = \infty$, але з різними головними та правильними частинами. При цьому член c_0 як для точки $z = 0$, так і для точки $z = \infty$, завжди належить до правильної частини. Наприклад, ряд Лорана $\frac{1}{z} + 1 + z$ в околі точки $z = 0$ має головну частину $\frac{1}{z}$, а в околі точки $z = \infty$ головною частиною є z.

7.5 Ряди Тейлора

Теорема 7.10 (Тейлора). Аналітичну в крузі $\{z : |z - z_0| < R\}$ функцію f можна єдиним чином розвинути в степеневий ряд (7.3) з коефіцієнтами ($0 < r < R$)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = r} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{7.12}$$

Д о в е д е н н я. Твердження теореми в точці z_0 перевіряється безпосередньо. В кільці $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ за теоремою Лорана функція f розвивається в ряд Лорана з коефіцієнтами (7.6). Оскільки при $n < 0,\ n \in \boldsymbol{Z}$ виконується нерівність $-n - 1 \geq 0$, і тому функція $g(\varsigma) = f(\varsigma) \cdot (\varsigma - z_0)^{-n-1}$ аналітична в $\{z : |z - z_0| < r\}$, то за теоремою 5.1 маємо

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - z_0| = r} f(\varsigma) \cdot (\varsigma - z_0)^{-n-1} d\varsigma = 0 .$$

Отже, ряд (7.5) складається тільки з правильної частини. Формула (7.12) випливає з (7.6) та формул (5.15).

Теорема доведена.

Наслідок 1. Якщо функція f аналітична в області D і $z_0 \in D$, то її можна розвинути в ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n \tag{7.13}$$

в будь-якому крузі $K \subset D$ з центром в точці z_0.

Наслідок 2. Функція f є цілою тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки $z_0 \in \boldsymbol{C}$ її можна розвинути в ряд Тейлора за степенями $(z - z_0)$ з нескінченним радіусом збіжності.

Означення 7.1. Функція f називається *голоморфною* в області D, якщо для кожної точки $z_0 \in D$ існує круг $\{z : |z - z_0| < R\} \subset D$, в якому f можна розвинути в ряд Тейлора (7.13).

З теореми 7.6 та наслідку 1 з теореми 7.10 випливає ще одна теорема.

Теорема 7.11. Функція f голоморфна в області D тоді і тільки тоді, коли вона в D аналітична.

На закінчення лекції зробимо огляд рівносильних означень аналітичної функції. Для простоти обмежимося випадком однозв′язної області, хоча в більшості означень вимога однозв′язності є зайвою. Отже, *аналітичною в однозв'язній області функцією* називається така, яка задовольняє одній з наступних умов:

1) має в цій області неперервну похідну;

2) має в цій області похідну;

3) має в цій області неперервно диференційовні дійсну та уявну частини, які задовольняють умови Коші-Рімана;

4) неперервна і має в області первісну;

5) неперервна і інтеграл від неї по будь-якій замкненій кривій, що лежить в області, дорівнює нулеві;

6) може бути розвинута в степеневий ряд в околі кожної точки з області.

ЛЕКЦІЯ 8
НУЛІ ТА ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

8.1 Нулі аналітичних функцій

Нехай функція f аналітична в області D. Точка $z_0 \in D$ називається *нулем функції* f, якщо $f(z_0)=0$. Якщо $f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ldots,f^{(n-1)}(z_0)=0$ і $f^{(n)}(z_0)\neq 0$, то z_0 називається *нулем n-го порядку*. Якщо $f(z_0)=0$ і всі її похідні в z_0 дорівнюють нулеві, то z_0 називається *нулем нескінченного порядку*.

Теорема 8.1 (про нуль нескінченного порядку). Якщо функція f аналітична в області D і $z_0 \in D$ є її нулем нескінченного порядку, то $f(z)\equiv 0$ в D.

Д о в е д е н н я. Нехай c - довільна точка з D. Нам потрібно показати, що $f(\tilde{n})=0$. Сполучимо точку c з точкою z_0 кривою Γ, яка лежить в D (рис. 8.1). Оскільки криві Γ і ∂D - замкнені множини, які не перетинаються, то відстань між ними буде $\rho(\Gamma,\partial D)=d>0$.

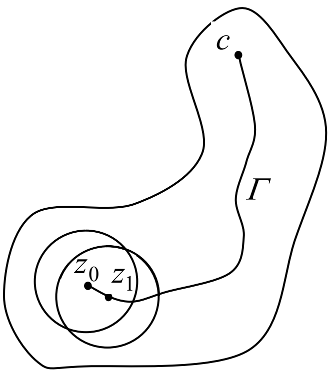


Рисунок 8.1

Візьмемо круг $K_d(z_0)=\{z: |z-z_0|<d\}$, який, очевидно, лежить в D, і розвинемо в ньому функцію f в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot(z-z_0)^k .$$

Оскільки всі $f^{(k)}(z_0)=0$, то звідси випливає, що $f(z)\equiv 0$ в $K_d(z_0)$. Візьмемо тепер у крузі $K_d(z_0)$ на Γ точку z_1 так, щоб вона була на відстані $d/2$ по кривій Γ від точки z_0. В цій точці z_1 функція f має нуль нескінченного порядку, бо $f(z)\equiv 0$ в деякому околі точки z_1. До точки z_1 застосуємо такі самі міркування, як і до точки z_0. Рухаючись таким чином по Γ, дійдемо до точки, відстань від якої до точки c по кривій Γ менша, ніж d, бо Γ має скінченну довжину. Теорему доведено.

Теорема 8.2 (про канонічне зображення). Для того, щоб аналітична в області D функція f мала в точці $z_0 \in D$ нуль *n*-го порядку, необхідно і достатньо, щоб у деякому околі точки z_0 функцію f можна було зобразити у вигляді

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z), \tag{8.1}$$

де φ - функція, аналітична в цьому околі, і $\varphi(z_0)\neq 0$

Д о в е д е н н я. Якщо f - аналітична в D і $z_0 \in D$ є її нулем *n*-го порядку, то існує окіл точки z_0, де функція f ровивається в ряд Тейлора, який у даному випадку має вигляд

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot(z-z_0)^k =$$

$$=(z-z_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)+\ldots\right).$$

Покладаючи $\varphi(z)=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)+\ldots$, маємо (8.1) і $\varphi(z_0)=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$.

Навпаки, якщо має місце (8.1), де φ - аналітична в околі точки z_0 функція і $\varphi(z_0)\neq 0$, то в цьому околі

$$\varphi(z)=b_0+b_1(z-z_0)+\ldots+b_k(z-z_0)^k+\ldots, \quad b_0=\varphi(0)\neq 0,$$

тому

$$\varphi(z)=b_0(z-z_0)^n+b_1(z-z_0)^{n+1}+\ldots+b_k(z-z_0)^{n+k}+\ldots,$$

і, отже, f має в z_0 нуль *n*-го порядку. Теорему доведено.

Зауваження 8.1. Будемо говорити, що аналітична в околі точки $z=\infty$ функція f *має в* ∞ *нуль n-го порядку*, якщо функція $g(z)=f(1/z)$ має нуль *n*-го порядку в точці $z=0$. *Це буде тоді і тільки тоді, коли* $f(z)=\varphi(z)/z^n$*, де* φ *- аналітична в деякому околі* ∞ *функція і* $\varphi(\infty)\neq 0$.

8.2 Ізольованість нулів

Теорема 8.3. Нехай f - аналітична в області D функція, $f(z)\not\equiv 0$ і $z_0\in D$. Якщо z_0 є нулем функції f, то існує окіл функції f, в якому f не має інших нулів.

Д о в е д е н н я. За теоремою 8.2 має місце (8.1), де φ - аналітична, а, отже, неперервна в деякому околі точки z_0 функція і $\varphi(z_0)\neq 0$. Тому в якомусь околі точки z_0 виконується $\varphi(z)\neq 0$, а, отже, й $f(z)\neq 0$ при $z\neq z_0$, що й доводить нашу теорему.

З доведеної теореми випливає ряд наслідків.

Наслідок 1. Якщо функція f аналітична в області D, то множина її нулів не має точки скупчення (граничної точки) в D.

Дійсно, в протилежному випадку за неперервністю функції f точка скупчення теж була б нулем функції f, що неможливо за щойно доведеною теоремою.

Зауважимо, що на краю області D точка скупчення нулів може бути, на що вказує приклад аналітичної функції $f(z)=sin\dfrac{1}{1-z}$ в області $\{z:|z|<1\}$ з нулями $z_k=1-1/\pi k\to 1,\ k\to\infty$.

Наслідок 2. Якщо функція $f\not\equiv 0$ аналітична в області D, то вона має в D скінченну або зліченну множину нулів.

Доведення випливає з попереднього наслідку.

Наслідок 3 (теорема єдиності). Якщо функції f та g аналітичні в області D, а множина в області $E\subset D$ має принаймні одну точку скупчення, яка належить до D, і $f\equiv g$ в E, то $f\equiv g$ в D.

Для доведення досить застосувати наслідок 2 до функції $\varphi=f-g$.

З останнього сформульованого наслідку випливають ще такі два твердження.

Наслідок 4. Якщо функції f та g аналітичні в області D і $f\equiv g$ на якійсь кривій $\Gamma\subset D$, то $f\equiv g$ в D.

Наслідок 5. Якщо функції f та g аналітичні в області D і $f\equiv g$ в якійсь області $G\subset D$, то $f\equiv g$ в D.

Наслідок 6. Якщо функція $f\not\equiv const$ аналітична в області D, то вона здійснює відображення, яке є конформним в кожній точці цієї області, крім, можливо, множини, що складається з ізольованих точок.

Доведення базується на застосуванні теореми 8.3 до похідної f' функції f.

В п. 3.5 відзначалось, що всі формули для тригонометричних функцій, відомі зі шкільного курсу математики, справедливі і в комплексній області. Вони перевіряються за допомогою алгебраїчних операцій над показниковими функціями. Але їх можна довести одним стандартним способом. Пояснимо це на двох прикладах.

Приклад 8.1. Функції $f(z) = cos^2 z + sin^2 z$ та $g(z) \equiv 1$ є цілими. Оскільки $cos^2 x + sin^2 x = 1$ при всіх $z = x \in \boldsymbol{R}$, тобто $f \equiv g$ на дійсній осі, то, за наслідком 4, $f \equiv g$ в усій комплексній площині, тобто $cos^2 z + sin^2 z = 1$ при всіх $z \in \boldsymbol{C}$.

Приклад 8.2. Оскільки при всіх $x_1 \in \boldsymbol{R}, x_2 \in \boldsymbol{R}$ виконується $sin(x_1 + x_2) = sin\, x_1 \, cos\, x_2 + cos\, x_1 \, sin\, x_2$, то, за наслідком 4, маємо $sin(z_1 + x_2) = sin\, z_1 \, cos\, x_2 + cos\, z_1 \, sin\, x_2$ для всіх $z_1 \in \boldsymbol{C}$ при кожному фіксованому $x_2 \in \boldsymbol{R}$. Тепер, фіксуючи $z_1 \in \boldsymbol{C}$, дістаємо рівність
$sin(z_1 + z_2) = sin\, z_1 \, cos\, z_2 + cos\, z_1 \, sin\, z_2$.

8.3 Ізольвані особливі точки однозначного характеру

Нехай функція f аналітична в проколеному околі точки z_0. Будемо вважати, що $z_0 \neq \infty$, тому що вивчення поводження функції в околі точки ∞ заміною z на $1/z$ зводиться до вивчення поводження функції $f(1/z)$ в околі точки $z = 0$.

Якщо функція f аналітична в проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0, а в z_0 не визначена або не аналітична, то z_0 називається *ізольованою особливою точкою однозначного характеру функції* f.

Якщо при цьому існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$, то z_0 називається *усувною особливою точкою*. Наприклад, функція $f(z) = \dfrac{sin\, z}{z}$ має в точці $z = 0$ усувну особливість.

Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то z_0 називається *полюсом* (наприклад, точка $z = 0$ є полюсом функції $f(z) = 1/z$).

Нарешті, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує, то z_0 називається *істотно особливою точкою* (наприклад, точка $z = 0$ є істотно особливою точкою функції $f(z) = exp(1/z)$).

Розглянемо детальніше кожний тип особливості.

8.4 Усувна особлива точка

Теорема 8.4 . Три твердження є еквівалентними:

1) z_0 є усувною особливою точкою функції f;

2) функція f обмежена в деякому околі точки z_0;

3) в розвиненні функції f в ряд Лорана в околі точки z_0 немає головної частини.

Д о в е д е н н я. Якщо z_0 - усувна особлива точка функції f, то, згідно з означенням, існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$, тому f обмежена в деякому околі точки z_0. Отже, ми довели, що $1) \Rightarrow 2)$.

Доведемо, що $2) \Rightarrow 3)$. Відповідно до умови 2)

$(\exists M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \boldsymbol{C})\{0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| \le M\}$.

Розкладемо функцію в ряд Лорана (7.5) з коефіцієнтами (7.6). Тоді

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|\varsigma - z_0| = r} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\varsigma - z_0| = r} \frac{|f(\varsigma)|}{|\varsigma - z_0|^{n+1}} |d\varsigma| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n},$$

де $0 < r < \delta$. Якщо тепер $n < 0$, то, спрямовуючи $r \to 0$, маємо $c_n = 0$, тобто головної частини немає.

Нарешті, якщо в ряді (7.5) немає головної частини, то він є степеневим рядом, який збіжний у крузі без центра, а, отже, і в усьому крузі, задаючи там аналітичну (отже, неперервну) функцію. Звідси випливає, що існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$, тобто $3) \Rightarrow 1)$.

Теорему доведено.

Теорема 8.5 (Ліувілля). Якщо ціла функція f обмежена в околі точки $z = \infty$, то $f(z) \equiv const$

Д о в е д е н н я. Оскільки f - ціла функція, то її можна розвинути в ряд Тейлора з центром в точці $z = 0$ і радіусом збіжності $R = +\infty$. Цей же ряд можна розуміти як ряд Лорана функції f в околі точки $z = \infty$. А оскільки за попередньою теоремою в цьому ряді немає головної частини, тобто немає членів з додатними степенями z, то $f(z) \equiv const$.

Наслідок (основна теорема алгебри). Кожний многочлен степеня $n \in \boldsymbol{N}$ має принаймні один корінь.

Дійсно, якби це було не так, то функція $f(z) = 1/P_n(z)$, де P_n - многочлен, була б цілою. Оскільки $P_n(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0 = c_n z^n (1 + o(1)) \to \infty$ при $z \to \infty$, то $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Тому за теоремами 8.4 та 8.5 дістаємо $f(z) \equiv const$, тобто $P_n(z) \equiv const$, що неможливо.

8.5 Полюс

Нехай z_0 - полюс функції f. Тоді $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, тобто існує окіл точки z_0, де $f(z) \ne 0$. Звідси випливає, що функція $g(z) = 1/f(z)$ є аналітичною в деякому проколеному околі точки z_0 і $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$. Отже, z_0 є усувною особливою точкою функції g і g має в z_0 нуль. Таким чином, *полюс функції f є нулем функції g*. Логічно буде сформулювати таке означення.

Означення 8.1. Порядком полюса функції f в точці z_0 називається порядок нуля функції $g(z) = 1/f(z)$ в z_0.

Наприклад, функція $w = 1/\sin z$ в точках $z_n = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$ має полюси першого порядку. Зауважимо, що точка $z = \infty$ не є ізольованою особливою точкою функції $w = 1/\sin z$, а є граничною точкою полюсів.

Теорема 8.6 (про канонічне зображення). Для того, щоб аналітична в проколеному околі точки z_0 функція f мала в z_0 полюс n-го порядку, необхідно і достатньо, щоб

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \tag{8.2}$$

де - функція ψ аналітична в деякому околі точки z_0 і $\psi(z_0) \ne 0$.

Д о в е д е н н я. Якщо f має в z_0 полюс n-го порядку, то функція $g(z)=1/f(z)$ має в z_0 нуль n-го порядку і за теоремою 8.2 $g(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$, де φ - аналітична в деякому околі функція і $\varphi(z_0)\neq 0$. Звідси випливає зображення (8.2) з $\psi(z)=1/\varphi(z)$.

Навпаки, якщо має місце зображення (8.2), то для функції $g(z)=1/f(z)$ має місце зображення (8.1) з $\varphi(z)=1/\psi(z)$, тобто g має в z_0 нуль n-го порядку, отже, f має в z_0 полюс n-го порядку.

Теорему доведено.

Теорема 8.7. Точка z_0 є полюсом n-го порядку аналітичної функції f тоді і тільки тоді, коли ряд Лорана для f в околі z_0 має вигляд

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+c_0+\ldots+c_k\cdot(z-z_0)^k+\ldots\ , \tag{8.3}$$

$c_n\neq 0$, якщо $z_0\neq\infty$;

$f(z)=c_n\cdot z^n+\ldots+c_0+\ldots+c_{-k}\cdot z^{-k}+\ldots\ ,$

$c_n\neq 0$, якщо $z_0=\infty$.

Д о в е д е н н я. Нехай $z_0\neq\infty$ є полюсом n-го порядку аналітичної функції f. Тоді, за теоремою 8.6, має місце рівність (8.2), де ψ аналітична в деякому околі точки z_0 функція і $\psi(z_0)\neq 0$. Тому можемо розвинути функцію ψ в ряд Тейлора

$\psi(z)=\widetilde{c}_0+\widetilde{c}_1\cdot(z-z_0)+\ldots,\quad \widetilde{c}_0\neq 0,$

звідки

$$f(z)=\frac{\widetilde{c}_0}{(z-z_0)^n}+\frac{\widetilde{c}_1}{(z-z_0)^{n-1}}+\ldots,\qquad \widetilde{c}_0\neq 0,$$

тобто дістаємо (8.3), позначивши $\widetilde{c}_k=c_{-n+k}$.

Навпаки, нехай у деякому околі точки $z_0\neq\infty$ має місце (8.3). Тоді

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\left(c_{-n}+c_{-n+1}(z-z_0)+\ldots\right)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},\ c_{-n}\neq 0,\quad \text{де}\quad \varphi(z)=c_{-n}+c_{-n+1}(z-z_0)+\ldots,$$

тобто ψ - аналітична в цьому околі функція і $\psi(z_0)\neq 0$.

Якщо $z_0=\infty$, то цей випадок зводиться до попереднього заміною z на $1/z$.

Теорему доведено.

Приклад 8.3. Розглянемо раціональну функцію $R(z)=P(z)/Q(z)$, де P та Q - два нескоротні многочлени. Ясно, що нулі чисельника P є нулями функції R, а нулі знаменника Q є полюсами функції R. Дослідимо поведінку функції R в ∞. Запишемо

$$R(z)=\frac{c_nz^n+\ldots+c_0}{d_mz^m+\ldots+d_0}=z^{n-m}\,\frac{c_n+\ldots+c_0z^{-n}}{d_m+\ldots+d_0z^{-m}}=z^{n-m}\cdot\varphi(z),$$ де, очевидно, функція φ аналітична в околі точки $z=\infty$ і $\varphi(\infty)\neq 0$. Використовуючи теореми 8.2 та 8.6 про канонічні зображення, бачимо, що якщо $n\leq m$, то в ∞ функція R має усувну особливу точку, причому, якщо $n<m$, то вона має нуль порядку $m-n$. Якщо ж $n>m$, то в ∞ функція R має полюс порядку $n-m$.

8.6 Істотно особлива точка

Безпосередньо з означення істотно особливої точки та теорем 8.4 і 8.7 випливає таке твердження.

Теорема 8.8. Точка z_0 є істотно особливою точкою аналітичної функції f тоді і тільки тоді, коли головна частина ряду Лорана для f в околі z_0 містить нескінченно багато членів.

Теорема 8.9 (Сохоцького-Казораті). Якщо z_0 - істотно особлива точка аналітичної функції f, то, яке б не було число $C \in \overline{\boldsymbol{C}}$, існує послідовність $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ така, що $f(z_n) \to C$

Д о в е д е н н я. Нехай спочатку $C = \infty$. Тоді у кожному проколеному околі точки z_0 функція f не може бути обмеженою, бо в протилежному випадку z_0 була б усувною особливою точкою. Оскільки z_0 - ізольована особлива точка, то для всіх досить великих $n \in \boldsymbol{N}$ функція f є аналітичною в проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < 1/n\}$. У кожному такому околі існує z_n, таке що $|f(z_n)| > n$, бо f - необмежена. Отже, існує послідовність (z_n), така що $z_n \to z_0$ і $f(z_n) \to \infty$.

Якщо $\tilde{N} \neq \infty$, то можливі два варіанти: або в кожному проколеному околі точки z_0 рівняння $f(z) = C$ має корені, або існує проколений окіл точки z_0, в якому $f(z) \neq C$. У першому випадку через z_n позначимо один з коренів рівняння $f(z) = C$ в $\{z : 0 < |z - z_0| < 1/n\}$ і цим самим вкажемо потрібну нам послідовність. У другому випадку нехай $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ - проколений окіл, де $f(z) \neq C$. Розглянемо в ньому функцію $F(z) = \dfrac{1}{f(z) - C}$. Вона є аналітичною в цьому проколеному околі, і, оскільки не існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, то й не існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, тобто z_0 - істотно особлива точка функції F. Тому за розглянутим випадком існує послідовність (z_n), така що $z_n \to z_0$ і $F(z_n) \to \infty$. Оскільки $f(z) = C + 1/F(z)$, то $f(z_n) \to C$ при $z_n \to z_0$. Теорему доведено повністю.

Зауваження 8.2. З теорем 8.4 і 8.5 випливає, що якщо ціла функція не є тотожно сталою, то вона має в ∞ або полюс, або істотно особливу точку. У першому випадку вона – многочлен того самого степеня, який порядок полюса (див. теорему 8.7); у другому випадку вона називається трансцендентною цілою функцією. Прикладами таких цілих функцій є $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$.

8.7 Принцип максимуму модуля

Нехай f - аналітична в замкненому крузі $\{z : |z - z_0| \le r\}$ функція. За теоремою Тейлора розвинемо її в степеневий ряд (7.3), який є рівномірно збіжний в цьому замкненому крузі. Покладемо $z = z_0 + re^{i\varphi}$. Тоді

$$f\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\varphi}$$

і

$$\left|f\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)\right|^2 = f\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) \cdot \overline{f\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\varphi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k r^k e^{-ik\varphi} = \sum_{k,n=0}^{\infty} c_n \bar{c}_k r^{n+k} e^{i(n-k)\varphi}, \tag{8.4}$$

причому останній ряд рівномірно збіжний відносно $\varphi \in [0; 2\pi]$, бо мажорується рядом

$$\sum_{k,n=0}^{\infty}|c_n|\cdot|\bar{c}_k|\cdot r^{n+k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot r^n\right)^2<\infty .$$

Проінтегруємо ряд (8.4) почленно:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\varphi}\right)\right|^2 d\varphi=\sum_{k,n=0}^{\infty}c_n\bar{c}_k r^{n+k}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-k)\varphi}d\varphi .$$

Оскільки (див. приклад 5.1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-k)\varphi}d\varphi=\begin{cases}0, & n\neq k,\\ 1, & n=k,\end{cases}$$

то маємо *рівність Парсеваля*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\varphi}\right)\right|^2 d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n} .$$

Теорема 8.10 (принцип максимуму модуля). Якщо функція $f(z)\not\equiv const$ аналітична в області D, то її модуль не набуває в D найбільшого значення.

Д о в е д е н н я. Припустимо від супротивного, що $(\exists z_0\in D)\,(\forall z\in D)\{|f(z)|\le|f(z_0)|\}$. Візьмемо замкнений круг $\overline{K}=\{z:|z-z_0|\le r\}\subset D$ і розвинемо в ньому функцію f в ряд Тейлора. Тоді за рівністю Парсеваля маємо

$$|c_0|^2=|f(z_0)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|^2 d\varphi\ge\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\varphi}\right)\right|^2 d\varphi=$$

$$=|c_0|^2+|c_1|^2r^2+\ldots+|c_n|^2r^{2n}+\ldots,$$

тобто $0\ge|c_1|^2r^2+\ldots+|c_n|^2r^{2n}+\ldots,$ звідки випливає, що $c_1=c_2=\ldots c_n=\ldots 0$ і, отже, $f(z)\equiv c_0$ в $\overline{K}$, що неможливо, бо тоді за наслідком 5 з теореми 8.3 дістаємо $f(z)\equiv c_0$ в D.

Наслідок 1. Якщо функція f аналітична в обмеженій області D і неперервна в $\overline{D}$, то її модуль досягає свого найбільшого значення на ∂D, причому, якщо $f(z)\not\equiv const$, то лише на ∂D.

Наслідок 2. Нехай функції f та g аналітичні в обмеженій області D і неперервні на $\overline{D}$. Тоді, якщо $f(z)\equiv g(z)$ на ∂D, то $f(z)\equiv g(z)$ в D.

Дійсно, покладемо $\psi=f-g$. Тоді функція ψ аналітична в області D, неперервна на $\overline{D}$ і $max\{|\psi(z)|:z\in\partial D\}=0$. Тому за попереднім наслідком $\psi(z)\equiv 0$ в D, тобто $f(z)\equiv g(z)$ в D.

8.8 Підіймальна сила крила

Викладеного матеріалу досить для виведення формули підіймальної сили крила літака в плоско-паралельному потоці. Тут не будемо вводити інтеграли за допомогою інтегральних сум і подальшого переходу до границі, а відразу оперуватимемо диференціалами, як це звичайно роблять у механіці. Надання міркуванням математичної строгості не викликає жодних труднощів.

Нехай задано замкнену криву Γ - „край крила”, яка є однією із зв'язних компонент межі області D, що входить у зовнішність кривої Γ. Нехай в D задане векторне поле швидкостей v. При невеликій швидкості газу (менш як 100м/с) можна вважати це поле соленоїдальним і безвихровим. Також припустимо, що v неперервна в $D\cup\Gamma$. Позначимо через $p(z)$ вектор тиску на крило в точці $z\in\Gamma$ (тиск означений тут як відношення сили до елемента довжини $|dz|$). Тоді на крило діє сила $F=\int_{\Gamma}p(z)|dz|$.

З урахуванням того, що сила, яка діє на крило в точці $z \in \Gamma$, спрямована по зовнішній нормалі відносно D, маємо $p(z)|dz| = |p(z)|idz$. Використаємо також рівняння Бернуллі для стаціонарної течії: $|p(z)| + i\frac{\rho}{2}|v(z)|^2 = const$, де ρ - густина газу. Тоді

$$F = \int_{\Gamma}|p(z)|idz = i \cdot const\int_{\Gamma} dz - i\frac{\rho}{2}\int_{\Gamma}|v(z)|^2 dz = -i\frac{\rho}{2}\int_{\Gamma}|v(z)|^2 dz .$$

Нехай $dz = |dz|e^{i\varphi}$. Зрозуміло, що тоді $v(z) = \pm|v(z)|e^{i\varphi}$, $|v(z)|^2 = (v(z))^2 e^{-2i\varphi}$ і $|v(z)|^2 dz = (v(z))^2 e^{-2i\varphi} dz = (v(z))^2 \cdot \overline{dz}$. Тому $F = -\int_{\Gamma}(v(z))^2 \cdot \overline{dz}$.

Якщо тепер покладемо $f(z) = \overline{v(z)}$, то функція f буде аналітичною в D, а попередню формулу можна записати так: $F = -i\frac{\rho}{2}\int_{\Gamma}\left(\overline{f(z)}\right)^2 \cdot \overline{dz}$. Перейшовши в цій формулі до спряжених величин, дістанемо відомуу формулу Чаплигіна (1910 р.):

$$\overline{F} = -i\frac{\rho}{2}\int_{\Gamma}(f(z))^2 dz . \tag{8.5}$$

Розглянемо випадок, коли D збігається з зовнішністю кривої Γ. Очевидно, що швидкість $v(z)$ - величина обмежена, а з нею і функція f. Тому f має в точці ∞ усувну особливу точку і розвинення в околі цієї точки

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots . \tag{8.6}$$

Звідси випливає, що

$$f^2(z) = c_0^2 + 2\frac{c_0 c_{-1}}{z} + \ldots . \tag{8.7}$$

Нехай розвинення (8.6), а з ним і (8.7), справедливі в $\{z : R < |z| < +\infty\}$. Позначимо $\Gamma_0 = \{z : |z| = R + 1\}$. Тоді за теоремами 5.3 та 7.5, з врахуванням рівності (5.8), дістаємо

$$\int_{\Gamma} f^2(z)dz = \int_{\Gamma_0} f^2(z)dz = 4\pi i c_0 c_{-1} \tag{8.8}$$

і

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz = 2\pi i c_{-1} . \tag{8.9}$$

Але

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \ddot{O}_{\Gamma} + i\ddot{I}_{\Gamma} , \tag{8.10}$$

де $\ddot{O}_{\Gamma}$ - циркуляція векторного поля v вздож Γ, $\ddot{I}_{\Gamma}$ - потік цього поля через Γ.

Очевидно, що потік, який обтікає Γ, є вектор, напрямлений по дотичній до Γ, тому $\ddot{I}_{\Gamma} = 0$. Тому з (8.9) та (8.10) дістанемо, що $c_{-1} = \ddot{O}_{\Gamma}(2\pi i)^{-1}$. З (8.6) знаходимо, що $c_0 = f(\infty) = \overline{v}(\infty)$. Підставляючи ці значення в (8.8) і використовуючи (8.5), маємо $\overline{F} = i\rho\overline{v}(\infty)\ddot{O}_{\Gamma}$. З огляду на те, що ρ і $\ddot{O}_{\Gamma}$ - дійсні числа випливає знаменита *формула Жуковського* (1906 р.) підіймальної сили літака

$$F = -i\rho v(\infty)\ddot{O}_{\Gamma} .$$

Зауважимо, що припущення збігу області D з зовнішністю Γ приводить до істотних помилок при невеликій висоті польоту, злеті та посадці літака.

ЛЕКЦІЯ 9

ТЕОРІЯ ЛИШКІВ

9.1 Означення та формули для обчислення лишків

Нехай $z_0 \neq \infty$ - ізольована особлива точка однозначного характеру аналітичної функції f. Отже, функція f аналітична в деякому проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. *Лишком функції f у точці z_0* називається величина

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz, \quad 0 < r < \delta .$$

За наслідком з теореми 5.2 лишок від r не залежить.

Нехай тепер $z_0 = \infty$ - ізольована особлива точка однозначного характеру для функції f, тобто f аналітична в деякому проколеному околі $\{z : R < |z - z_0| < +\infty\}$. *Лишком функції f у точці ∞* називається величина

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz, \quad R < r < +\infty .$$

Якщо розвинемо аналітичну в проколеному околі $\{z : R < |z - z_0| < +\infty\}$ функцію f в ряд Лорана (7.5) з коефіцієнтами c_n, визначеними формулами (7.6), і в (7.6) візьмемо $n = -1$, то легко дістанемо, що

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = c_{-1} . \tag{9.1}$$

У випадку, коли $z_0 = \infty$, аналогічно маємо

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = -c_{-1} . \tag{9.2}$$

Зауваження 9.1. Формули (9.1) та (9.2) можна було б вважати означеннями лишків. З них випливає, що лишок в усувній точці $z_0 \neq \infty$ дорівнює нулеві. Якщо ж $z_0 = \infty$ *є усувною точкою, то лишок не обов'язково дорівнює нулеві*, бо член c_{-1}/z входить у правильну (а не в головну) частину ряду Лорана. Проте, якщо f має в ∞ нуль принаймні другого порядку, то $c_{-1} = 0$, і, отже, $\underset{z=\infty}{res} f(z) = 0$. Якщо ж f має в ∞ нуль першого порядку, то $\underset{z=\infty}{res} f(z) = -c_{-1} \neq 0$.

Якщо z_0 - істотно особлива точко, то для обчислення лишка слід використовувари формули (9.1) та (9.2).

У випадку, коли $z_0 \neq \infty$ - полюс, виведемо спеціальні формули для обчислення лишка. Отже, нехай z_0 - полюс n-го порядку для функції f. Тоді, за теоремою 8.6, $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}$, де функція $\psi(z) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \cdot (z - z_0) + \ldots$, $\tilde{c}_0 \neq 0$ аналітична в деякому околі точки z_0. Оскільки $\tilde{c}_k = \dfrac{\psi^{(k)}(z_0)}{k!}$ і $c_{-1} = \tilde{c}_{n-1}$, то $\underset{z=z_0}{res} f(z) = \dfrac{\psi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = = \dfrac{1}{(n-1)!} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z - z_0)^n f(z)\right)\Big|_{z=z_0}$, тобто

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z - z_0)^n f(z)\right). \tag{9.3}$$

Відзначимо, що виведена формула корисна і в більш загальній ситуації. Наприкад, для функції $f(z)=z^{-3}\sin z$ точка $z=0$ є полюсом другого порядку. Проте зручніше використовувати не канонічне зображення, а взяти $n=3$, $\psi(z)=\sin z$. Тоді $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2!}(\sin z)''\Big|_{z=0}=0$.

Якщо $z_0\neq\infty$ - полюс першого порядку, то з (9.3) маємо

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right). \qquad (9.4)$$

Якщо аналітичну в проколеному околі точки z_0 функцію можна подати у вигляді $f(z)=\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, де ψ та φ - аналітичні в околі z_0 функції, причому z_0 є для φ нулем першого порядку, а $\psi(z_0)\neq 0$, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\psi(z)}{\varphi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\psi(z)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}$, тобто

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}. \qquad (9.5)$$

Зауваження 9.2. Виведеними формулами (9.3) - (9.5) не можна користуватися, коли точка $z_0=\infty$ є полюсом для функції f. Але, якщо перейдемо до функції $f(1/z)$ і проробимо аналогічну до розглянутого випадку процедуру, то дістанемо формулу для обчислення лишку, коли $z_0=\infty$ є полюсом n-го порядку:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{1}{(n+1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Зауваження 9.3. З означення лишка випливає, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\sum_{j=1}^{m} f_j(z)=\sum_{j=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=z_0} f_j(z),$$

і, якщо функція f парна, то її лишки в 0 та ∞ дорівнюють нулеві. Дійсно, якщо запишемо $f(z)=(f(z)+f(-z))/2$, то побачимо, що в ряді Лорана функції f в околі $z=0$ або $z=\infty$ відсутні непарні степені, отже, $c_{-1}=0$. Наприклад, для розглянутої функції $f(z)=z^{-3}\sin z$, яка є парною, без жодних обчислень можна стверджувати, що $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$.

9.2 Основна теорема про лишки

Теорема 9.1. Нехай функція f аналітична в замкненій області $\overline{D}$, обмеженій скінченним числом замкнених жордонових кривих, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_q \in D$. Тоді

$$\int_{\partial D} f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{res}_{z=z_j} f(z). \qquad (9.6)$$

Д о в е д е н н я. Побудуємо круги K_j з центрами z_j так, щоб $K_j \subset D$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, q$ і $\overline{K}_j \cap \overline{K}_l = \varnothing$ при $j \neq l$. Нехай $G = D \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \overline{K}_j$. Тоді за теоремою 5.2 $\int_{\partial G} f(z)dz = 0$, звідки, так як $\partial G = \partial D \bigcup_{j=1}^{q} \partial \overline{K}_j^{-}$, легко одержуємо, що

$$0 = \int_{\partial D} f(z)dz - \sum_{j=1}^{q} \int_{\partial K_j} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \underset{z=z_j}{res} f(z),$$

тобто маємо потрібну рівність, що й доводить теорему.

Використовуючи теорему 9.1 (основну теорему про лишки), легко довести таке твердження.

Теорема 9.2. Нехай функція f аналітична в $\boldsymbol{C}$, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$ і нехай $z_q = \infty$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{q} \underset{z=z_j}{res} f(z) = 0 .$$

Д о в е д е н н я. Візьмемо круг K з центром в $z = 0$ так, щоб він містив усі точки $z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$. За основною теоремою про лишки $\sum_{j=1}^{q-1} \underset{z=z_j}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(z)dz$. З іншого боку, $\underset{z=z_q}{res} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(z)dz$. З цих двох рівностей випливає потрібна формула.

Ґрунтуючись на теоремі 9.2, подамо ще одне доведення основної теореми алгебри (див. наслідок з теореми 8.5). Припустимо, від супротивного, що многочлен P степеня $n \geq 1$ не має нулів. Тоді $f = P'/P$ - ціла функція. Степінь многочлена P' дорівнює $n-1$, тому раціональна функція f має в ∞ нуль першого порядку (див. п. 8.5), отже, $\underset{z=\infty}{res} f(z) \neq 0$. Це суперечить теоремі 9.2, бо, за припущенням, в скінченній площині функція f особливих точок не має.

Розглянемо застосування основної теореми про лишки до обчислення деяких інтегралів.

9.3 Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій

Розглянемо визначений інтеграл

$$I = \int_{0}^{2\pi} R(\cos m\varphi, \sin n\varphi) d\varphi, \qquad (9.6')$$

де R - раціональна функція двох змінних, $m \in \boldsymbol{N}, n \in \boldsymbol{N}$, причому підінтегральна функція при усіх $\varphi \in \boldsymbol{R}$ не дорівнює ∞. Зробимо заміну $e^{i\varphi} = z$. Тоді $dz = ie^{i\varphi} d\varphi, d\varphi = \frac{dz}{iz}$, $\cos m\varphi = \frac{e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}}{2} = \frac{z^m + z^{-m}}{2}$, $\sin n\varphi = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}$. Очевидно, що якщо φ неперервно змінюватиметься від 0 до 2π, то z опише один раз коло $\{z : |z| = 1\}$ проти годинникової стрілки. Тому інтеграл (9.6) дорівнюватиме $I = \int\limits_{|z|=1} Q(z)dz$, де $Q(z) = R\left(\frac{z^m + z^{-m}}{2}, \frac{z^n - z^{-n}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz}$.

Ясно, що Q - раціональна функція, особливими точками якої є полюси, які позначимо через b_j. На колі $\{z : |z| = 1\}$ особливих точок немає. Тому за теоремою 9.1

$$I = 2\pi i \sum_{|b_j|<1} \underset{z=b_j}{res}\, Q(z). \qquad (9.7)$$

Приклад 9.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi - 2\sin\varphi - 3}$.

Р о з в′ я з а н н я . Очевидно, підінтегральна функція неперервна при всіх $\varphi \in \boldsymbol{R}$. Зробивши заміну $e^{i\varphi} = z$, матимемо $\cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, отже,

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\frac{z + z^{-1}}{2} - 2\frac{z - z^{-1}}{2i} - 3\right)iz} = \int\limits_{|z|=1} \frac{2dz}{(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i}.$$

Як бачимо, підінтегральна функція є раціональною $R(z) = \frac{2}{(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i}$, знаменником якої є квадратний тричлен $(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i$. Знаходимо його корені $z_1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ та $z_2 = 1 - 2i$, які є простими і, очевидно, не є коренями чисельника. Отже, (приклад 8.2), вони є полюсами першого порядку для $R(z)$. Інших особливих точок функція $R(z)$ не має. Оскільки $|z_1| = \sqrt{5}/5 < 1$, а $|z_2| = \sqrt{5} > 1$, то, за рівністю (9.7), з використанням формули (9.5), маємо

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi - 2\sin\varphi - 3} = 2\pi i \underset{z=z_1}{res}\left(\frac{2}{(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i}\right) =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{2}{\left((i-2)z^2 - 6iz + 2 + i\right)'}\right|_{z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i} = 2\pi i \left.\frac{2}{(i-2)2z - 6i}\right|_{z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i} =$$

$$= 2\pi i \frac{2}{-4i} = -\pi.$$

9.4 Обчислення невласних інтегралів

Лема 9.1. Нехай функція f аналітична в замкненій півплощині $\{z : Im\, z \ge 0\}$, за винятком скінченної кількості точок, і існують додатні числа M, R_0 та δ, такі що

$$(\forall z : |z| > R_0,\ Im\, z \ge 0)\left\{|f(z)| \le M|z|^{-1-\delta}\right\}.$$

Тоді

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = 0, \text{ де } \Gamma_R = \left\{z = Re^{i\varphi} : 0 \le \varphi \le \pi\right\}.$$

Д о в е д е н н я. При $R > R_0$, використовуючи властивість 6^0 визначеного інтеграла, маємо

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_{\Gamma_R} |f(z)||dz| \le \int_{\Gamma_R} M|z|^{-1-\delta}\,|dz| = MR^{-1-\delta}\pi R \to 0$$

при $R \to +\infty$, що й треба було довести.

Зауваження 9.4. Умови леми 7.1 виконуються, якщо f аналітична в $\{z : Im\, z \ge 0\}$ за винятком скінченної кількості точок, а в ∞ має нуль принаймні другого порядку, тобто $f(z) = \varphi(z)z^{-m},\ m \ge 2$, де функція φ аналітична в околі точки ∞ і $\varphi(\infty) \ne 0$.

Теорема 9.3. Якщо функція f задовольняє умовам леми 9.1 і на дійсній осі не має особливих точок, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{Im\, z_j > 0} \underset{z=z_j}{res} f(z). \tag{9.8}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $|f(x)| \le M|x|^{-1-\delta}$ при $|x| > R_0$, то інтеграл у лівій частині (9.8) абсолютно збіжний. Візьмемо $R > R_0$ настільки великим, щоб усі точки множини $\{z_j\}$ містилися в області $\{z : Im\, z > 0,\ |z| < R\}$. Тоді, за теоремою 9.1, маємо

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{Im\, z_j > 0} \underset{z=z_j}{res} f(z). \tag{9.9}$$

Але $\int_{-R}^{R} f(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ і за лемою 9.1 $\int_{\Gamma_R} f(z)dz \to 0$ при $R \to +\infty$. Тому з (9.9) дістаємо (9.8) і тим самим доводимо теорему.

Приклад 9.2. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{2dx}{(x^2+1)^3}$.

Р о з в′ я з а н н я . Очевидно, підінтегральна функція є раціональною $R(x) = \frac{2}{(x^2+1)^3}$, знаменник якої не має коренів на дійсній осі. Скориставшись прикладом 8.2, бачимо, що ∞ є нулем 6-го порядку для $R(z) = \frac{2}{(z^2+1)^3}$, отже, інтеграл збіжний. Точки $z_1 = i$ та $z_2 = -i$ - нулі третього порядку для $(z^2+1)^3$, отже, вони є полюсами третього порядку для $R(z)$. В усіх інших точках $R(z)$ аналітична. Таким чином, $R(z)$ задовольняє усім умовам теореми 9.3. Тому, враховуючи парність $R(x)$, за формулами (9.8) та (9.3) маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \underset{z=i}{res} \frac{2}{(z^2+1)^3} =$$

$$= \pi i \frac{1}{2!} \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3 \frac{2}{((z+i)(z-i))^3}\right) = \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to i}\left(\frac{2}{(z+i)^3}\right)'' =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to i} \frac{24}{(z+i)^5} = \frac{\pi i}{2}\frac{24}{(2i)^5} = \frac{3\pi}{8}.$$

9.5 Лема Жордана та її застосування

Лема 9.2 (Жордана). Нехай функція f аналітична в замкненій півплощині $\{z : Im\, z \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок, і $max\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\} = \alpha_R \to 0$ при $R \to +\infty$, де $\Gamma_R = \{z = Re^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. Тоді, якщо $a > 0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 .$$

Д о в е д е н н я. Зробимо заміну $z = Re^{i\varphi}$, де $0 \leq \varphi \leq \pi$. Тоді $z = Re^{i\varphi}$, $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$, $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$, $|dz| = Rd\varphi$ і, використовуючи нерівність $sin\,\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, дістанемо

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |f(z)| \left| e^{iaz} \right| |dz| \leq R\alpha_R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= 2R\alpha_R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi \leq 2R\alpha_R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{a} \alpha_R \left(1 - e^{-aR}\right) \to 0 \quad \text{ïðè} \quad R \to +\infty ,$$

що й треба було довести.

Нехай функція f аналітична в замкненій півплощині $\{z : Im\, z \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$ з півплощини $\{z : Im\, z > 0\}$ і полюсів першого порядку $x_1, x_2, \ldots, x_m$, які лежать на дійсній осі. Розглянемо при $a > 0$

$$J_{R,\varepsilon} = \int_{I_{R,\varepsilon}} f(\tilde{o}) e^{iax} dx ,$$

де $I_{R,\varepsilon} = [-R; R] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} (x_k - \varepsilon_k , x_k + \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k > 0$, $\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k = \varepsilon$.

Теорема 9.4. Якщо при цьому $max\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\} = \; = \alpha_R \to 0$ при $R \to +\infty$, де $\Gamma_R = \{z = Re^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, то існує так званий *інтеграл в розумінні головного значення*

$$J = V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{o}) e^{iax} dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} J_{R,\varepsilon} \tag{9.10}$$

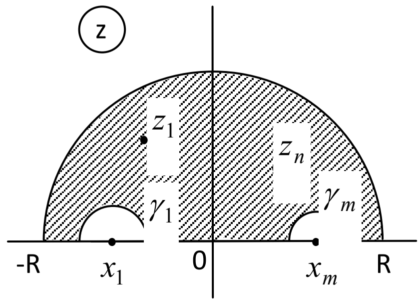
і дорівнює

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} \left(f(z) e^{iaz} \right) + \pi i \sum_{k=1}^{m} \underset{z=x_k}{res} \left(f(z) e^{iaz} \right). \tag{9.11}$$

Д о в е д е н н я. Позначимо через γ_k $(k = 1,2,\ldots,m)$ верхнє півколо з центром у точці x_k і радіусом ε_k. Числа ε_k беремо настільки малими, щоб утворені таким чином верхні півкруги не перетинались. Візьмемо R настільки великим, щоб усі $|z_k| < R,\ |x_k| + |\varepsilon_k| < R$, і розглянемо область D, обмежену півколом Γ_R, півколами γ_k і відрізками дійсної осі (рис. 9.1). За основною теоремою про лишки

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} \left(f(z) e^{iaz} \right) = \int_{\partial D} f(z) e^{iaz} dz = \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iaz} dz +$$

$$+ J_{R,\varepsilon} + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k^-} f(z) e^{iaz} dz \tag{9.12}$$



.

Рисунок 9.1

За лемою Жордана $\int\limits_{\Gamma_R} f(z)e^{iaz}dz \to 0$ при $R \to +\infty$. Функцію $f(z)e^{iaz}$ в околі точки $z = x_k$ можна записати у вигляді (див. (8.3))

$$f(z)e^{iaz} = \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - x_k} + h_k(z),$$

де h_k - аналітична в цьому околі функція. Тому, якщо ε_k досить мале, маємо

$$\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)e^{iaz}dz = -\int\limits_{\gamma_k} f(z)e^{iaz}dz = -\int\limits_{\gamma_k}\left(\frac{c_{-1}^{(k)}}{z - x_k} + h_k(z)\right)dz =$$

$$= -c_{-1}^{(k)}\int\limits_{\gamma_k}\frac{dz}{z - x_k} - \int\limits_{\gamma_k} h_k(z)dz \to -\pi i c_{-1}^{(k)} = -\pi i \mathop{res}_{z=x_k}\left(f(z)e^{iaz}\right)$$

при $\varepsilon_k \to 0$, бо, використовуючи заміну $z - x_k = \varepsilon_k e^{i\varphi}$,

$$\int\limits_{\gamma_k}\frac{dz}{z - x_k} = \int\limits_0^{\pi}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = \pi i,$$

і, оскільки функція h_k обмежена деяким числом M у відповідному околі, то

$$\left|\int\limits_{\gamma_k} h_k(z)dz\right| \le M\pi\varepsilon_k \to 0 \quad \text{при } \varepsilon_k \to 0.$$

Зрозуміло, що при $\varepsilon \to 0$ усі $\varepsilon_k \to 0$. Отже, спрямовуючи $\varepsilon \to 0$ і $R \to +\infty$, з (9.12) та (9.10) дістаємо (9.11).
Теорема доведена.

Зауваження 9.5. Зрозуміло, що якщо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ збіжний, то

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.$$

Наслідок 1. Якщо функція f задовольняє умовам леми Жордана і на дійсній осі не має особливих точок, то при $a > 0$

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{o})e^{iax}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathop{res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{iaz}\right). \qquad (9.13)$$

Наслідок 2. Нехай f задовольняє умовам леми Жордана і $Im\, f(\tilde{o}) = 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Тоді з (9.10) та (9.11), з огляду на рівність $e^{iax} = cos\, ax + i\, sin\, ax$, при $a > 0$ маємо

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{o})\cos ax\,dx =$$

і (9.14)

$$= Re\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\left(f(z)e^{iaz}\right)+\pi i\sum_{k=1}^{m}\underset{z=x_k}{res}\left(f(z)e^{iaz}\right)\right) \qquad (9.14)$$

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{o})\sin ax\,dx =$$

(9.15)

$$= Im\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\left(f(z)e^{iaz}\right)+\pi i\sum_{k=1}^{m}\underset{z=x_k}{res}\left(f(z)e^{iaz}\right)\right) \qquad (9.15)$$

Приклад 9.3. Легко бачити, що функція $f(z)=\dfrac{1}{z}$ задовольняє умовам останнього сформульованого наслідку. Оскільки $f(z)$ - аналітична в усіх точках $z \neq 0$ і $\underset{z=0}{res}\left(\dfrac{1}{z}\right)=1$, то для збіжного інтеграла $\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{\sin ax}{x}dx$, з огляду на зауваження 9.5, за рівністю (9.15), дістаємо

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{1}{2}Im\left(\pi i\,\underset{z=0}{res}\left(\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{2}Im(\pi i)=\frac{\pi}{2}.$$

9.6 Обчислення інтегралів за допомогою вибору однозначної вітки

В усіх попередніх випадках розглядались однозначні аналітичні функції. Проте, якщо контур інтегрування можна вибрати так, щоб у його внутрішності можна було вибрати однозначну вітку підінтегральної многозначної функції, то теорію лишків зможемо застосувати до цієї вітки і обчислити потрібний інтеграл. Для прикладу розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}f(x)dx,\quad 0<\alpha<1$$

.

Нехай функція f аналітична в $\boldsymbol{C}$, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \dots, z_q$, які не лежать на додатній дійсній півосі, $z_1, z_2, \dots, z_{q-1}$ і нехай точка $z=\infty$ є нулем функції f. За таких умов в області $D=\{z: 0<\arg z<2\pi\}$ виберемо однозначну вітку многозначної функції $z^{\alpha-1}$ так, щоб $0>\arg z^{\alpha-1}>2\pi(\alpha-1)$. Нехай $\varphi(z)=z^{\alpha-1}f(z)$. Виберемо контур, зображений на рис. 9.2. За основною теоремою про лишки маємо

$$\int\limits_{\gamma_1} z^{\alpha-1}f(z)dz+\int\limits_{\Gamma_R} z^{\alpha-1}f(z)dz+$$

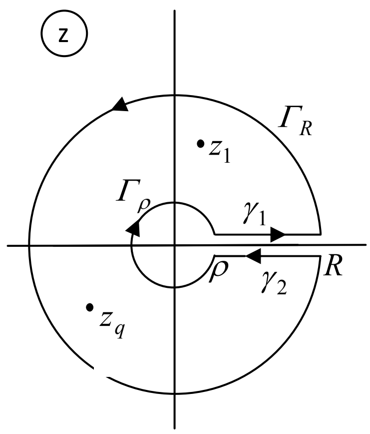


Рисунок 9.2

$$+\int\limits_{\gamma_2} z^{\alpha-1}f(z)dz+\int\limits_{\Gamma_\rho^-} z^{\alpha-1}f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{q}\underset{z=z_j}{res}\,\varphi(z)\ . \qquad (9.16)$$

Розглянемо кожний доданок у лівій частині (9.16). Оскільки за умовою в околі точки $z=\infty$ для функції f має місце оцінка $|f(z)| \le M|z|^{-1}$, де $M = const > 0$, то для другого доданка матимемо

$$\left| \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z)dz \right| \le \frac{M}{R} R^{\alpha-1} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}} \to 0 \quad \text{при } R \to +\infty .$$

За умовою для функції f в околі точки $z=0$ виконується $|f(z)| \le M_1$, де $M_1 = const > 0$, а $\alpha > 0$, тому для четвертого доданка матимемо

$$\left| \int_{\Gamma_\rho^-} z^{\alpha-1} f(z)dz \right| \le M_1 \rho^{\alpha-1} \cdot 2\pi\rho = 2\pi M_1 \rho^{\alpha} \to 0 \quad \text{при } \rho \to 0 .$$

Перший доданок дорівнює $\int\limits_{\rho}^{R} x^{\alpha-1} f(x)dx$. Третій доданок – це інтеграл по нижньому березі розрізу, де $arg\, z = 2\pi$, отже, $z = xe^{2\pi i}$ і $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)} = x^{\alpha-1} e^{2\pi i\alpha}$, $x > 0$. Тому третій доданок дорівнює $\left(-e^{2\pi i\alpha}\right) \int\limits_{\rho}^{R} x^{\alpha-1} f(x)dx$. Об′єднуючи усі ці співвідношення, при $\rho \to 0$ і $R \to +\infty$ дістаємо

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{j=1}^{q} \underset{z=z_j}{res} \left(z^{\alpha-1} f(z)\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{sin\, \pi\alpha} e^{-\pi\alpha i} \sum_{j=1}^{q} \underset{z=z_j}{res} \left(z^{\alpha-1} f(z)\right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

9.7 Логарифмічний лишок. Принцип аргумента

Нехай функція f аналітична в області D, за винятком скінченної кількості особливих точок, які є полюсами. Функція $\chi = f'/f$ називається *логарифмічною похідною* функції f. Якщо $z_0 \in D$ - нуль *n*-го порядку функції f, то, за теоремою 8.2, $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, де функція φ аналітична в деякому околі точки z_0 і $\varphi(z_0) \ne 0$. Тоді

$$f'(z) = (z - z_0)^n \varphi'(z) + n(z - z_0)^{n-1} \varphi(z),$$

тобто $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \dfrac{n}{z - z_0}$. Отже, в точці z_0 функція χ має полюс першого порядку і

$$\underset{z=z_0}{res}\, \chi(z) = \underset{z=z_0}{res} \frac{f'(z)}{f(z)} = n . \qquad (9.17)$$

Якщо $z_0 \in D$ - полюс порядку *p* функції f, то за теоремою 8.6 $f(z) = (z - z_0)^{-p} \psi(z)$, де функція ψ аналітична в деякому околі точки z_0 і $\psi(z_0) \ne 0$. Тому $\chi(z) = \dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \; - \dfrac{p}{z - z_0}$,

тобто χ у точці z_0 має також полюс першого порядку, але

$$\underset{z=z_0}{res}\, \chi(z) = \underset{z=z_0}{res} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p . \qquad (9.18)$$

Теорема 9.5 (принцип аргумента). Нехай область D обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, а функція f аналітична в $\overline{D}$, за винятком скінченної кількості полюсів, причому на ∂D функція f не має нулів і полюсів. Тоді

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\,Arg\, f(z), \qquad (9.19)$$

де N - кількість нулів, а P - кількість полюсів функції f в області D з урахуванням їх порядків.

Д о в е д е н н я. Застосуємо теорему 9.1 до функції f'/f. Тоді, враховуючи (9.17) та (9.18), маємо

$$\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\sum_{z_j\in D}\underset{z=z_j}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=2\pi i(N-P). \qquad (9.20)$$

З іншого боку, многозначною первісною для f'/f є $Ln\, f$. Тому

$$\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\Delta_{\partial D}Ln\, f(z)=i\Delta_{\partial D}Arg\, f(z). \qquad (9.21)$$

З (9.20) і (9.21) дістаємо потрібну рівність і тим самим доводимо теорему.

Теорема 9.6 (Руше). Нехай область D обмежена скінченним числом жорданових кривих, а функція f та g аналітичні в замкненій області $\overline{D}$ і $|g(z)|<|f(z)|$ при всіх $z\in\partial D$. Тоді функції $f+g$ та f мають в D однакову кількість нулів (з урахуванням порядків).

Д о в е д е н н я. Позначимо через $N(f)$ та $N(f+g)$ кількість нулів відповідно функцій f та $f+g$ в D з урахуванням їх порядків. Оскільки f та $f+g$ аналітичні в D і не мають на ∂D нулів, то за теоремою 9.5

$$N(f)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}Arg\, f, \quad N(f+g)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}Arg\,(f+g),$$

звідки

$$N(f+g)-N(f)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\left(Arg\,(f+g)-Arg\, f\right)==\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}Arg\left(1+\frac{g}{f}\right). \qquad (9.22)$$

Розглянемо функцію $w=1+\dfrac{f(z)}{g(z)}$. При обході точкою z однієї замкненої кривої на краю ∂D відповідна точка w опише деяку замкнену криву Γ, яка, з огляду на те, що $|g(z)|<|f(z)|$ при всіх $z\in\partial D$, лежатиме в крузі $\{w:|w-1|<1\}$. Але в ньому можна вибрати однозначну вітку $Arg\, w$. Отже, $\Delta_{\Gamma}Arg\left(1+\dfrac{g}{f}\right)=\Delta_{\Gamma}Arg\, w=0$, тому $\Delta_{\partial D}Arg\left(1+\dfrac{g}{f}\right)=0$ і, враховуючи (9.22), теорема 9.6 доведена.

На завершення подамо ще одне доведення основної теореми алгебри як наслідку з теореми Руше.

Наслідок. Многочлен *n*-го степеня має в $\boldsymbol{C}$ рівно *n* нулів (з урахуванням їх порядків).

Дійсно, запишемо многочлен *n*-го степеня $P_n(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1z+c_0$, $c_n\neq 0$, у вигляді $P_n=f+g$, де $f(z)=c_nz^n$ і $g(z)=c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1z+c_0$. Оскільки $\dfrac{g(z)}{f(z)}=\dfrac{c_{n-1}}{c_n}\dfrac{1}{z}+\ldots+\dfrac{c_1}{c_n}\dfrac{1}{z^{n-1}}+\dfrac{c_0}{c_n}\dfrac{1}{z^n}\to 0$ при $z\to\infty$, то

$$(\exists R_0>0)(\forall R>R_0)(\forall z\in\boldsymbol{C})\left\{|z|=R\Rightarrow|g(z)|<|f(z)|\right\}.$$

Тоді за теоремою Руше кількості нулів P_n і f рівні в $\{z:|z|<R\}$. Оскільки f має в $z=0$ нуль *n*-го порядку, то цим наслідок доведений.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

2 Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 416 с.

3 Гольдберг А.А., Шеремета М.М. Аналітичні функції: Навчальний посібник. – К.: УМК ВО, 1991. – 116 с.

4 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 736 с.

5 Горгула В.І., Сікора Б.С., Волковецький С.В. Теорія функцій комплексної змінної і операційне числення: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1998. – 80 с.

6 Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. I. Функции одного переменного. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

7 Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 574 с.