ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

*Затверджено Міністерством транспорту та зв'язку України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(напрямок 6.050903 – Телекомунікації)*

Одеса 2010

УДК 517-519.2
ББК 22.174
Д48

Затверджено Міністерством транспорту та зв'язку України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(напрямок 6.050903 – Телекомунікації) (лист № 6778/23/14-08 від 22.09.2008 р.)

Дискретна математика: навч. посіб. / [**Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г.,**
Д48 Харсун О.М., Пашкова Т.Л., Баранов М.І., Григор'єва Т.І.,
Вишневська В.М., Кольцова Л.Л.] − Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова,
2010. − 196 с.

ISBN 978-966-7598-37-2

Рецензенти:

завідувач кафедри мікроелектроніки електронних приборів та пристроїв Харківського національного університету радіоелектроніки, д.ф.-м.н., проф., **Ю.Є. Гордієнко**;

завідувач кафедри економічної кібернетики Одеського державного економічного університету, д.ф.-м.н., проф., **Є.С Якуб**.

Навчальний посібник охоплює теоретичний та практичний матеріал з розділів дискретної математики: теорія множин, математична логіка, теорія графів, алгебраїчні структури.

Розділи 1 … 4, що складають теоретичну частину матеріалу навчального посібника, написано проф. Стрелковською І.В., доц. Буслаєвим А.Г., ст. виклад. Харсуном А.М. Приклади розв'язання типових задач, перевірочні тести та завдання для самостійної роботи студентів розроблені доцентами Пашковою Т.Л., Барановим М.І., Григор'євою Т.І., Вишневською В.М., виклад. Кольцовою Л.Л.

Матеріал навчального посібника широко ілюстровано рисунками. Для засвоєння викладеного матеріалу цілковито вистачить базових знань з математики за середню школу.

У посібнику є список використаних джерел, певну частину яких становлять видання, які описують сучасні комп'ютерні технології.

Навчальний посібник призначено для студентів молодших курсів вищих навчальних закладів, але може бути корисним також для тих, хто вивчає курс дискретної математики і застосовує її методи у прикладних питаннях, і для тих, хто бажає самостійно оволодіти навичками застосування методів дискретної математики.

ISBN 978-966-7598-37-2

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дискретна математика, або скінчена математика, вивчає передусім скінчені множини та різні структури, побудовані на їхньому підґрунті. Вона набула широкого застосування у комп’ютерних технологіях, домінуючим способом подання інформації в яких є дискретний. Інформаційні технології впроваджено до навчальних планів усіх технічних (і не лише технічних) ВНЗ, тому потреба в них невпинно зростає. Це пояснюється необхідністю створення та експлуатації глобальних інформаційних мереж, небаченим зростанням комп’ютерної індустрії, повсюдним використовуванням цифрового оброблення сигналів.

Навчальний посібник з дискретної математики підготовлено на підставі лекцій та практичних занять з дисципліни "Дискретна математика", які викладаються студентам Одеської національної академії зв’язку ім. О.С. Попова.

Мета видання − ознайомити читача з основними поняттями та моделями дискретної математики і озброїти його методами й алгоритмами розв’язування широкого кола задач.

Зміст посібника обмежено основними темами дисципліни "Дискретна математика": теорія множин, математична логіка, теорія графів, алгебраїчні структури − і відповідає типовій програмі піврічного курсу освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра напряму "Телекомунікації".

Щоби не перевантажувати видання, до нього не включено деякі спеціальні теми, які традиційно належать до дискретної математики, але викладаються окремо: комбінаторика, скінчені автомати, теорія мереж, теорія кодування, формальні мови та граматики, алгоритми та рекурсії тощо.

Навчальний посібник складається з шести розділів, які умовно поділяються на три частини.

Перша найбільша за обсягом частина посібника (розділи 1 … 4) містить теоретичний матеріал з названих тем і є вступною для спеціальних дисциплін. У ній розглядаються базові моделі дискретної математики й закладається підґрунтя для всіх спеціальних дисциплін, які вивчаються на старших курсах у технічних ВНЗ. Поданий матеріал містить достатній обсяг інформації для застосовування отриманих знань на практиці, забезпечує цілковите засвоювання відповідних тем, а розв’язані приклади ілюструють відповідні теоретичні положення, необхідні для подальшої практичної діяльності молодих спеціалістів.

У розділі 5 − умовно другій частині посібника − подано розв’язок типових прикладів з тем, розглянутих у розділах 1…4. У цьому розділі є також контрольні запитання і перевірочні тести з відповідями для самоперевірки набутих знань. Ця частина є допоміжною для самостійного розв’язання задач з індивідуальних завдань, які містяться у третій умовній частині посібника (розділ 6).

Розділ 6 містить 21 завдання (30 варіантів у кожному) для самостійного виконування, а також методичні вказівки до них.

Матеріал посібника викладається на доступному рівні розуміння студентами першого курсу, і базується на знаннях з математики в обсязі середньої школи.

Для більш глибокого вивчення розглянутих питань наприкінці посібника надається докладний перелік використаних джерел, який містить сучасні підручники з дискретної математики, зокрема такі, які описують комп'ютерні методи та програми для об'єктів дискретної математики.

Посібник може бути використано як теоретичний довідник для розв'язування згадуваних питань і як задачник для індивідуальних завдань.

Розділ 1

ТЕОРІЯ МНОЖИН

У розділі 1 розглядаються основні поняття і означення сучасної дискретної математики: множина, відношення, функції тощо, які становлять базовий словник для дискретної математики й є потрібні для розуміння всього подальшого матеріалу посібника.

1.1 Множини, підмножини. Операції над множинами

1.1.1 Основні поняття теорії множин

Поняття множини є одне з фундаментальних невизначених понять сучасної математики і береться за основне, тобто за таке, що не зводиться до інших понять. Під ***множиною*** розуміють деяку сукупність різних поміж собою об’єктів, які добре розпізнаються нашою думкою або інтуїцією і розглядаються як єдине ціле. При цьому ніяких припущень що до природи об'єктів не робиться.

Об’єкти, з яких складено множину, називають її елементами.

Множини позначаються великими літерами латинської абетки: A, B, C,…, а об’єкти або елементи, які становлять множину, позначаються малими латинськими літерами: a, b, c, ..., або малими латинськими літерами з індексами.

П р и к л а д. 1) Множина N чисел натурального ряду 1, 2, 3, ...; 2) множина R дійсних чисел; 3) множина літер української абетки; 4) сукупність аксіом евклідової геометрії.

Твердження, що множина A складається з елементів a_1, a_2, ..., a_n, умовно записується як

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Порядок елементів множини не має значення.

Належність елемента до множини позначають символом $\in$, тобто $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, …, $a_n \in A$, або скорочено: $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Якщо b не є елементом A, то пишуть: $b \notin A$.

Множина може мати скінчену кількість елементів або бути нескінченною.

П р и к л а д. 1) Множина непарних чисел $P = \{1, 3, 5, … \}$ (нескінчена); 2) множина всіх розв’язків рівняння $\sin x = 1$ (нескінчена); 3) множина студентів певного вищого навчального закладу (скінчена); 4) множина точок кола (нескінчена).

Існує множина, яка не містить жодного елемента. Така множина називається порожньою і позначається символом $\varnothing$.

П р и к л а д. Множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 16 = 0$ є порожньою.

Не завжди відомо, чи існують елементи, які визначають деяку множину.

П р и к л а д. Множина виграшних квитків лотереї може стати визначеною тільки після тиражу.

Множина як об'єкт може бути елементом іншої множини.

П р и к л а д. У множині книг на полиці самі книги можуть розглядатися як множини сторінок.

Передбачається, що границі множини повинні бути чітко визначені. Саме задання множини явно або неявно обмежує сукупність об'єктів, які належать цієї множені. У будь-якій конкретній задачі доводиться мати справу тільки з фіксованою для цієї задачі, множиною.

В и з н а ч е н н я. ***Універсальною множиною*** (***універсумом***) називається множина, що містить всі елементи з деякою заданою властивістю. Позначається така множина через U.

Поняття "універсальної множини" залежить від задачі, яку розглядають. Прикладом універсальної множини може бути множина дійсних чисел, множина людей на планеті Земля тощо.

1.1.2 Способи задання множин

При заданні множин слід визначити, які елементи до неї належать.

1 ***Множину можна задавати явним переліченням всіх її елементів***: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Це є спосіб задання множини списком, який підходить тільки для задання множин з невеликою кількістю елементів.

П р и к л а д. Множина всіх студентів, присутніх в аудиторії (Петров, Сидоров, ...).

Узагальненням першого способу є задання елементів множини за допомогою певних елементів уже відомої множини.

П р и к л а д. За відомою множиною цілих чисел $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ визначимо множину степенів числа 3: $\{\ldots, 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots\}$.

2 ***Множину можна задавати за допомогою вказівки деякої характеристичної властивості якою володіє кожен з елементів множини, що розглядається, і не володіє кожен інший елемент, що не входить до цієї множини.***

Характеристичну властивість запишемо у вигляді одномісного предиката $P(x)$, який визначається на універсальній множині елементів з яких формується множина A. Предикат − це те, що стверджується або заперечується про об'єкт судження. Припускається, що властивість має змістовний сенс на сукупності об'єктів, що розглядається, при цьому предикат може приймати одне з двох значень істинності − «істина» або «хибність». Якщо за $x = a$ висловлення $P(x)$ є істинним, то a − елемент даної множини. Множину A, задану за допомогою предиката $P(x)$, записують у вигляді $A =\{x|\ P(x),\ x \in U\}$ або $A = \{x\colon P(x),\ x \in U\}$, причому $a \in \{x\colon P(x),\ x \in U\}$, якщо $P(a)$ є істинним.

П р и к л а д. Нехай задано множину натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Розглянемо сукупність елементів з множини N, які діляться на 3 (характеристична властивість). Дістанемо множину чисел, кратних до 3: $P = \{3, 6, 9, ...\}$. Задамо цю множену за допомогою характеристичної властивості

$$P = \left\{ x : \frac{x}{3} \in N \right\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Переліченням елементів можна задати лише скінчені множини, а за допомогою характеристичної властивості можна задавати як скінчені так і нескінчені множини.

1.1.3 Алгебра підмножин

Підмножина, порівняння множин, булеан

Тільки одного поняття множини ще недостатньо для вивчання існуючих дискретних структур. Необхідно ще ввести поняття частини множини і правил створювання нових множин із уже існуючих.

В и з н а ч е н н я. Множина A, всі елементи якої належать і до множини B, називається ***підмножиною*** (частиною) множини B.

Таке співвідношення поміж множинами називається ***включення*** і позначається символом "$\subset$", тобто $A \subset B$ (A включене до B), або $B \supset A$ (B містить A). Вочевидь, що $A \subset B$, якщо з належності елемента x до множини A випливає належність цього елемента і до множини B, тобто з $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Якщо множина A не міститься в множині B, використовують позначання $A \not\subset B$.

П р и к л а д: множина невід’ємних дійсних чисел $[0, +\infty)$, яка має спеціальне позначення R^+, міститься у множині дійсних чисел $R = (-\infty, +\infty)$, тобто $R_+ \subset R$.

В и з н а ч е н н я. Дві множини A та B називаються ***рівними*** (позначається $A = B$), якщо $A \subset B$ та $B \subset A$. Це є визначення рівності двох множин за допомогою операції включення.

У літературі також зустрічається позначення $A \subseteq B$. У цьому випадку під $A \subset B$ слід розуміти строге включення, яке не припускає рівності. Якщо $A \subset B$ й $A \neq B$ та $A \neq \varnothing$, то A називають ***власною підмножиною*** множини B. Нестроге включення $A \subseteq B$ допускає рівність (тоді A називається ***невласною*** підмножиною множини B).

Ми будемо використовувати позначання $A \subset B$ для нестрогого включення, яке допускає рівність $A = B$.

Вважають, що порожня множина є невласною підмножиною кожної не порожньої множини *A*, тобто $\varnothing \subset A$. Враховуючі, що *A* теж входить до *A*, то кожна непорожня множина *A* має принаймні дві різні підмножини $\varnothing$ та *A*.

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. Нехай U − деяка фіксована множина. Розглянемо тільки такі множини *A, B, C*, ..., які є підмножинами множини *U*. У цьому випадку множина U буде універсальною множиною для всіх множин *A, B, C, ...* .

2. Зі співвідношень $A \subset B$ й $B \subset C$ випливає, що $A \subset C$, тобто відношення включення транзитивне (рис. 1.1).

Для графічного зображення множини використовують спеціальні конструкції − діаграми Ейлера-Венна, які зображують сукупність елементів, що утворюють множину, овалами, а універсум − прямокутником.

Відношення включення графічно зображено на рис. 1.1.

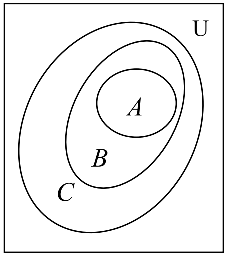


Рисунок 1.1. Відношення включення $A \subset B \subset C$

Скінчені власні підмножини певної множини можуть утворювати різноманітні сполучення з одного, двох, трьох тощо елементів цієї множини.

В и з н а ч е н н я. ***Множиною всіх підмножин*** (***булеаном***) певної основної множини E називають множину, елементами якої є всі підмножини множини *E*. Позначається булеан через *P*(*E*) або 2^E. Він включає до свого складу також елементи $\varnothing$ та множину *E*.

П р и к л а д. Якщо $E = \{a, b, c\}$, то

$$P(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. Порядок елементів у множині *P*(*E*) є несуттєвий.

2. Якщо множина E містить n елементів, то множина *P*(*E*) містить 2^n елементів, звідси й позначання множини *P*(*E*) як 2^E.

3. Відношення належності $\in$ та включання $\subset$ − різні поняття. Наприклад, множина *A* може бути власною підмножиною множини A $(A \subset A)$, але вона не може бути власним елементом цієї множини $(A \notin A)$.

П р и к л а д. Якщо $A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$, то $\{2, 3\} \in A$, а 2 та 3 $\notin A$.

Операції над множинами

Зазвичай розглядають п’ять основних операцій над множинами: доповнення, об’єднання, переріз, різницю та симетричну різницю. Подамо їхні означення, припускаючи, що задано певний універсум U. Позначимо через P_A та P_B властивості, які характеризують відповідно множини A та B в множині U за певною ознакою P.

В и з н а ч е н н я 1. Елементи множини U, які не входять до A, утворюють ***доповнену*** множину до A (позначаються $\overline{A}$).

За допомогою діаграми Венна доповнену множину можна зобразити геометрично (рис. 1.2), де $\overline{A}$ − затемнена частина.

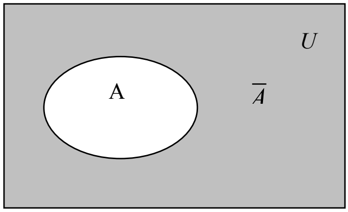


Рисунок 1.2. Операція доповнення $\overline{A}$

ЗАУВАЖЕННЯ. 1) Доповнення множини A до множини U, це множина $\overline{A}=\{x|\ x\notin A,\ x\in U\}$. 2) Справедлива є властивість $\overline{\overline{A}}=A$, яка називається властивістю ***інволюції***.

В и з н а ч е н н я 2. ***Об’єднанням*** двох множин − A та B (позначається $A\bigcup B$ або $A+B$) − називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать хоча б до однієї з цих множин.

$$C=A\bigcup B=\{x|\ x\in A \text{ або } x\in B,\ x\in U\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Однакові елементи враховуються один раз.

Геометричну інтерпретацію об’єднання двох множин A та B подано на рис. 1.3, де $A\bigcup B$ − затемнена частина.

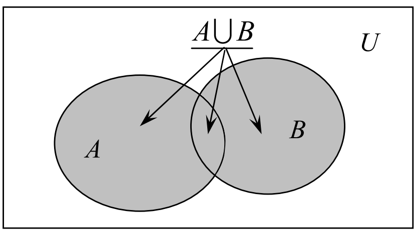


Рисунок 1.3. Операція об’єднання $A\bigcup B$

Підкреслимо, що до множині $A\bigcup B$ належать також і ті елементи, які водночас належать множинам A та B.

В и з н а ч е н н я 3. ***Перерізом*** двох множин – A та B (позначається $A \bigcap B$ або $A \cdot B$) – називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать множені A і множені B (водночас!).

$$C = A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B,\ x \in U\}.$$

Геометричну інтерпретацію перерізу подано на рис. 1.4, де $A \bigcap B$ – затемнена частина.

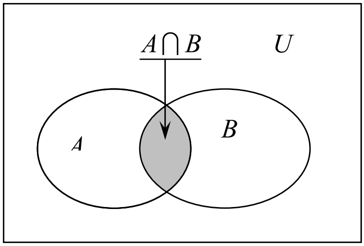


Рисунок 1.4. Операція перерізу $A \bigcap B$

В и з н а ч е н н я 4. ***Різницею*** двох множин – A та B (позначається $A \setminus B$) – називається множина

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B,\ x \in U\}.$$

Геометричну інтерпретацію різниці подано на рис. 1.5, де $A \setminus B$ – затемнена частина.

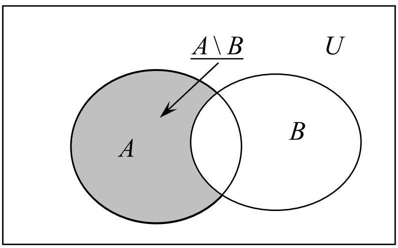


Рисунок 1.5. Операція різниці $A \setminus B$

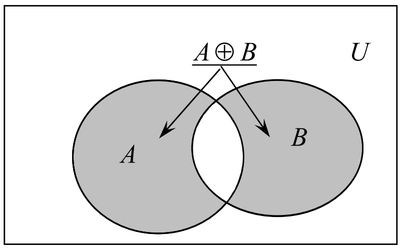


Рисунок 1.6. Операція симетричної різниці $A \oplus B$

В и з н а ч е н н я 5. ***Симетричною різницею*** двох множин – A та B (позначається $A \oplus B$, $A \Delta B$ або $A - B$) – називається множина

$$C = A \oplus B = \left(A \setminus B\right) \bigcup \left(B \setminus A\right).$$

Геометричну інтерпретацію симетричної різниці подано на рис. 1.6, де $A \oplus B$ – затемнена частина.

П р и к л а д. Нехай $A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$; $B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$, тоді:

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$; $A\cap B=\{4,5\}$; $A\setminus B=\{1,3,8\}$; $A\oplus B=\{1,2,3,6,8,9\}$.

Якщо визначити універсум $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, то

$$\overline{A}=\{0,2,6,7,9\};\quad \overline{B}=\{0,1,3,7,8\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Для скінченного числа множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в аналогічний спосіб визначаються операції об'єднання та перерізу

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n \quad \text{та} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n .$$

Властивості операцій над множинами

Нехай задано множини A, B, C та U (U − універсум). Тоді для операцій $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\neg$ (де $\neg A=\overline{A}$) виконуються такі властивості:

1 $A\cup B=B\cup A$, $\quad A\cap B=B\cap A$ − комутативність;
2 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ − асоціативність;
3 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
− дистрибутивність;
4 $A\cup\varnothing=A$, $\quad A\cap\varnothing=\varnothing$
5 $A\cup A=A$, $\quad A\cap A=A$ − ідемпотентність;
6 $A\cup\overline{A}=U$, $\quad A\cap\overline{A}=\varnothing$ − доповнення;
7 $A\cup U=U$, $\quad A\cap U=A$
8 $\overline{\varnothing}=U$, $\quad \overline{U}=\varnothing$
9 $A\cup(A\cap B)=A$, $\quad A\cap(A\cup B)=A$ − поглинання;
10 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ − правило де Моргана;
11 $\overline{\overline{A}}=A$ − подвійного доповнення;
12 $A\setminus B=A\cap\overline{B}$ − вираз для різниці.

Пари символів $\cup$ та $\cap$ у формулах 1…10 називають двоїстими між собою. Їх можна змінювати місцями, замінюючи при цьому U на $\varnothing$ й навпаки.

У справедливості властивостей 1…12 можна переконатися чи то геометрично, чи формальними міркуваннями щодо кожної рівності.

Завдання для самостійної роботи. Перевірити всі формули 1…12 для множин: $A=\{1,2,3,6\}$; $B=\{2,3,4,8,9\}$; $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

П р и к л а д. Спростити вираз $\overline{\overline{A\cap B}\setminus C}\cup A\cap B\cup A\cap(\overline{C}\cup\overline{B})$

Р о з в ' я з а н н я

$$\overline{\overline{A\cap B}\setminus C}\cup A\cap B\cup A\cap(\overline{C}\cup\overline{B})=\overline{\overline{A\cap B}\cap\overline{C}}\cup A\cap B\cup A\cap\overline{C}\cup A\cap\overline{B}=$$

$$= A\cap B\cup C\cup A\cap B\cup A\cap\overline{C}\cup A\cap\overline{B}=A\cap B\cup C\cup A\cap\overline{C}\cup A\cap\overline{B}=A\cup C.$$

1.2 Відношення

Поняття відношення є фундаментальним поняттям не тільки дискретної математики, але й в інших теоретичних та прикладних дисциплінах. Відношення визначається як будь-яка підмножина впорядкованих кортежів, побудованих з елементів абстрактних множин, і реалізують зв'язки між реальними об'єктами. При цьому під кортежем розуміють просто набір впорядкованих елементів.

1.2.1 Поняття відношення

П р и к л а д и: 1) $a \in A$ − зв'язок поміж елементом та множиною; 2) $A \subset B$ − зв'язок поміж множинами; 3) $<$, $\leq$, $\neq$ − нерівності; 4) $=$ − рівність; 5) "бути братом"; 6) ділення без остачі.

Приклади 1...6 – приклади відношень.

Введемо поняття впорядкованої множини.

В и з н а ч е н н я. Множина називається ***впорядкованою***, якщо кожному його елементові поставлено у відповідність число n $\left(n \in N,\ n\right.$ − номер цього елемента) та елементи множини розміщено в порядку зростання їхніх номерів.

За кількості елементів $n > 1$ множину можна впорядкувати не в єдиний спосіб.

Відношення позначатимемо літерою R, тоді запис xRy вказує на те, що поміж x та y $\left(x \in X,\ y \in Y\right)$ існує зв'язок. В прикладі 5) поданому вище можна записати «x є брат y». Тут відношення R − "бути братом".

Відношення повністю визначається парами $\left(x, y\right)$, для яких воно виконується, тому кожне бінарне відношення можна розглядати як множину впорядкованих пар $\left(x, y\right)$. При цьому порядок вибору елементів істотний. Перший елемент завжди вибирається з першої множини, другий − з другої.

Рівність впорядкованих пар визначається в такий спосіб: $\left(a, b\right) = \left(c, d\right)$, якщо $a = c$ та $b = d$.

П р и к л а д. Нехай $A = \left\{1, 2, 3\right\}$, $B = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\right\}$, а відношення R − "елемент x дільник елементу у", де $x \in A$, $y \in B$. Тоді відношення R визначається парами елементів множин *A* та *B*

$$R = \left\{\left(1,1\right), \left(1, 2\right), \left(1, 3\right), \left(1, 4\right), \left(1, 5\right), \left(1, 6\right), \left(1, 7\right), \left(2, 2\right), \left(2, 4\right), \left(2, 6\right), \left(3, 3\right), \left(3, 6\right)\right\},$$

тому R є підмножиною множини, що складається з усіх упорядкованих пар елементів по одному з кожної множини *A* та *B*.

ЗАУВАЖЕННЯ. Функція $y = f(x)$ (іноді записують $x \xrightarrow{f} y$) також є відношенням.

Відношення, яке визначене на одному об'єктові називається ***унарним***, якщо ж його визначено поміж парами об'єктів, − називаються ***бінарним***, поміж трьома об'єктами − ***тернарним*** і т. д.

1.2.2 Бінарні відношення

Найпоширенішими з відношень є бінарні відношення. Перш ніж подати їхнє визначення дамо визначення декартова добутку множин.

В и з н а ч е н н я. Впорядкована множина з n елементів називається **кортежем** (вектором, набором), де $n < \infty$. Кортеж з n елементів будемо позначати як $(a_1, a_2, ..., a_n)$ і будемо говорити, що він має довжину n.

Нехай задано дві множини − A та B − певних елементів.

В и з н а ч е н н я. Множина впорядкованих пар елементів, з яких перший належить до A, а другий − до B, називається ***декартовим*** (***прямим***) ***добутком*** множин A та B і позначається як

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Всі елементи множини $A \times B$ − кортежі довжини 2.

Впроваджене поняття декартова добутку припускає узагальнення. Декартовим добутком множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається множина наборів кортежів довжини n:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

Ступенем множини A називають декартів добуток

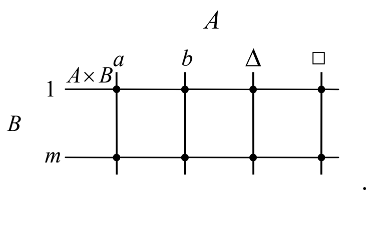
$$A^n = A \times A \times ... \times A.$$

П р и к л а д. Точка M у прямокутній декартовій системі координат на площині задається впорядкованою парою дійсних чисел у такий спосіб: $M(x, y)$ $(x \in R, y \in R)$. Тоді $(x,\ y) \in R^2 = R \times R$. Звідси й назва добутку − декартів.

П р и к л а д. Якщо $A = \{a, b, \Delta, \square\}$; $B = \{1, m\}$, то декартів добуток має вигляд

$$A \times B = \{(a,1), (a,m), (b,1), (b,m), (\Delta,1), (\Delta,m), (\square,\ 1), (\square,\ m)\}.$$

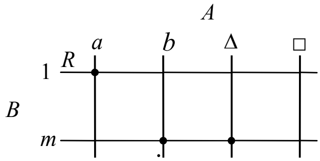
Визначимо $A \times B$, як пари елементів по одному з кожної множини A та B (пари елементів, що належать до декартова добутку, позначимо в таблиці точками):



.

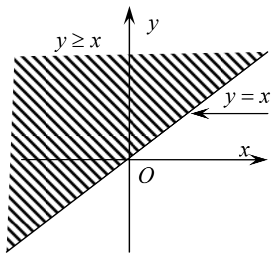
ЗАУВАЖЕННЯ. Кожна підмножина R множини $A \times B$ є бінарним відношенням.

П р и к л а д. 1) Позначимо в таблиці точками елементи, які належать до підмножини $R = \{(a,1),(b,m),(\Delta,\ \square)\}$ декартова добутку множин A та B $(R \subset (A \times B))$:



Тоді R − бінарне відношення поміж множинами A та B.

2) Відношення нестрогого порядку $x \le y$ $(x, y \in R)$ є підмножиною декартова добутку $R \times R$, тобто всієї площини:



У такий спосіб доходимо до визначення відношення.

В и з н а ч е н н я. ***Відношенням*** R на множинах A та B називається довільна підмножина множини декартова добутку $A \times B$. Якщо $(a, b) \in R$, то це записується як: aRb.

Якщо $A = B$, то $R \subset A \times A$ і в цьому випадку стверджують, що бінарне відношення R задано на множині A.

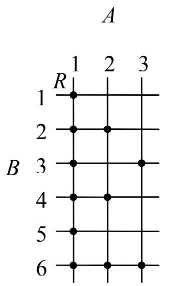
Зображення відношення R $(R \subset A \times B)$ точками в таблиці називають ***графіком*** відношення; множину x $(x \in A)$, для яких існує таке y $(y \in B)$, що $(x,\ y) \in R$, називають ***областю визначення*** відношення R, а множину y $(y \in B)$, для яких існує таке x, що $(x,\ y) \in R$, − ***множиною значень***.

1.2.3 Способи задання відношень

Є багато різних способів задання відношень. Найбільш розповсюджені з них задання відношень у табличній формі, стрілками, перерізом, переліком пар. Розглянемо кожний з цих способів.

1. ***Табличний спосіб задання відношень***

П р и к л а д. Нехай відношення R належить до декартова добутку $A \times B$, де множини $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, і задане таблицею



.

Табличний спосіб завжди можна розглядати як різновид матричного, так як таблицю можна представити у вигляді матриці. Тому відношення R можна задати також бульовою ***матрицею суміжності***, або ***відношення***, рядки якої позначають елементами множини A, а стовпчики − елементами множини B і на перетинанні рядка a_i зі стовпчиком b_j стоїть 1 в разі $a_i R b_j$, та 0 − у противному випадку:

$$R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриці відношення називають бульовими, тому що їхніми елементами є лише числа 0 або 1.

Для розглянутого вище прикладу матриця відношення буде мати форму:

		B					
	R	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1	1	1
A	2	0	1	0	1	0	1
	3	0	0	1	0	0	1

, де компоненти матриці R

$$R[a,b] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } aRb; \\ 0, & \text{якщо } \overline{aRb}, \end{cases}$$

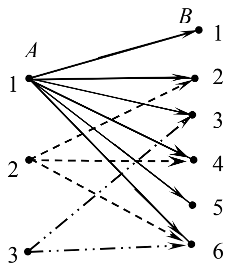
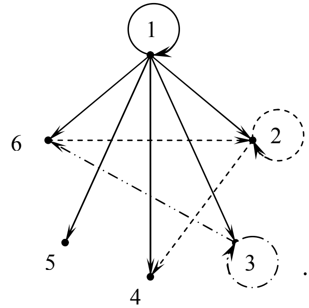
а a, b – елементи множин A та B.

Відношення R можна також задавати у вигляді списку пар елементів декартова добутку $A \times B$, для яких дане відношення виконується:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}.$$

2. ***Спосіб задання відношень стрілками***

Цей спосіб проілюструємо за допомогою відношення R з попереднього прикладу. При цьому використаємо два варіанти зображення бінарного відношення:

1) 
; 2) 
.

3. ***Завдання відношень перерізом***

В и з н а ч е н н я. Нехай $c=(a,b)$ − кортеж довжини 2 (де $c\in A\times B$). Елемент a називається ***проекцією*** елемента c на множину A (або на першу вісь). Позначається як пр$_A c$ = пр$_1 c$ = a.

В и з н а ч е н н я. Нехай E − підмножина декартова добутку множин A та B $(E\subset A\times B)$. Множина елементів з A, які є проекцією елементів множини E на A, називається ***проекцією множини*** E на множину A. Позначається як пр$_A E$.

П р и к л а д. Нехай $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$; $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, а відношення $R\subset A\times B$ визначається переліком пар елементів:

$$R=\{(a_1,b_2),(a_1,b_4),(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_3,b_3),(a_3,b_4),(a_5,b_1),(a_5,b_3)\}.$$

Треба знайти: 1) пр$_A(a_2,b_3)$; 2) пр$_A R$.

Р о з в я з а н н я

Накреслимо графік відношення R.

1) Розглянемо кортеж $c_{23}=(a_2,b_3)$. Маємо

$$\text{пр}_A(a_2,b_3)=\text{пр}_1(a_2,b_3)=a_2.$$

2) Відношення R задано на множинах A та B і визначається наступними кортежами:

$R=\{c_{12},c_{14},c_{21},c_{23},c_{32},c_{33},c_{34},c_{51},c_{53}\}$ $\quad (R\subset A\times B)$,

тоді

$$\text{пр}_A R=\{a_1,a_2,a_3,a_5\}.$$

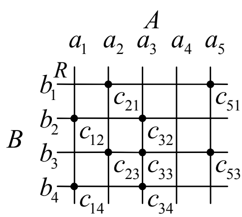


Рисунок 1.2

Впроваджене поняття проекції кортежу $v=(a_1,a_2)$ довжини 2 можна узагальнити на кортежі $v=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ довжини n.

В и з н а ч е н н я. Проекцією кортежу $v=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ на i-ту вісь називають його i-ту компоненту:

$$\text{пр}_i v = a_i\,.$$

В и з н а ч е н н я. Проекцією кортежу $v=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ на осі з номерами $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ називають вектор довжини k з компонентами:

$$\text{пр}_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_k} v = (\,a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\,).$$

В и з н а ч е н н я. Проекцією множини векторів $V=\{v_r\}$ на i-ту вісь називають множину проекцій усіх векторів з V на i-ту вісь:

$$\text{пр}_i V = \{\text{пр}_i v_r :\ v_r \in V\}.$$

В и з н а ч е н н я. Проекцією множини векторів $V=\{v_r\}$ на осі з номерами $i_1,\ i_2,\ \ ,\ i_k$ називають множину проекцій усіх векторів з V на осі з номерами $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$:

$$\text{пр}_{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_k} V = \{\,\text{пр}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} v_r : v_r \in V\,\}.$$

В и з н а ч е н н я. ***Перерізом*** $x = a$ множини (відношення) R називається множина елементів $y \in B$, для яких $(a, y) \in R$.

П р и к л а д: перерізом $x = a_1$ множини R з попереднього прикладу буде множина $\{b_2, b_4\}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Проекція відокремлює елементи у множині A, а переріз − елементи у множині B.

Нехай задано відношення $R \subset A \times B$. Позначимо через $R(a)$ $(a \in A)$ переріз $x = a$ відношення R, тобто множину таких $y \in B$, що $(a,\ y) \in R$. Отже,

$$R(a) = \{y : a \in A,\ y \in B, (a,\ y) \in R\}.$$

В и з н а ч е н н я. Множина перерізів $R(a)$ відношення R ($R \subset A \times B$) по всім $a \in A$ називається ***фактор-множиною*** множини B за відношенням R (позначається через B/R)

$$B\,/\,R = \{R(a),\ a \in A\}.$$

Фактор-множина B/R повністю визначає відношення R.

П р и к л а д. Розглянемо відношення R з попереднього прикладу. Перерізом $x = a_i$ $(i=\overline{1{,}5})$ відношення R будуть відповідно множини $R(a_1)=\{b_2, b_4\}$; $R(a_2)=\{b_1, b_3\}$; $R(a_3)=\{b_2, b_3, b_4\}$; $R(a_4)=\varnothing$; $R(a_5)=\{b_1, b_3\}$. Під кожним елементом a_i запишемо його переріз:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{b_2, b_4\} & \{b_1, b_3\} & \{b_2, b_3, b_4\} & \varnothing & \{b_1, b_3\} \end{bmatrix}.$$

Другий рядок буде фактор-множиною множини B за відношенням R.

Нехай тепер $R \subset A \times B$, а X деяка підмножина множини A ($X \subset A$). Позначимо об'єднання всіх перерізів $R(x)$ за всіма $x \in X$ через $R(X)$, тобто перерізом множини R по множині X є множина

$$R(X) = \{y : x \in X,\, y \in B,\, (x, y) \in R\} = \bigcup_{x \in X} R(x).$$

Вочевидь, що $R(X) \subset B$.

П р и к л а д. Нехай задано три множини − $A = \{a_1, a_2, a_3\}$; $B = \{b_1, b_2, b_3\}$; $X = \{a_2, a_3\} \subset A$ − й відомо, що $R(a_2) = \{b_1, b_3, b_4\}$; $R(a_3) = \{b_1, b_2, b_4\}$. Тоді $R(\{a_2,\, a_3\}) = R(a_2) \cup R(a_3) = \{b_1, b_3, b_4\} \cup \{b_1, b_2, b_4\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = B$.

1.2.4 Композиція відношень

Нехай задано три множини A, B, C й два відношення R та S поміж ними: $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$.

В и з н а ч е н н я. ***Композицією*** двох відношень R та S називається відношення SR (іноді позначають як $S \circ R$) яке задано на декартовому добутку $A \times C$ та визначене як таке, що переріз SR по всіх $a \in A$ збігається з перерізом S по підмножині $R(a)$ $\left(R(a) \subset B\right)$, тобто

$$\left(SR\right)(a) = S\left(R(a)\right), \tag{1.1}$$

або

$$SR = \left\{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ якщо } \exists b \in B, \text{ що } aRb \text{ та } bSc\right\}.$$

Операцію композиції бінарних відношень іноді ще називають ***добутком*** відношень.

ЗАУВАЖЕННЯ. При визначенні композиції відношень використано символ $\exists$, який називається ***квантором існування*** і читається «*існує, знайдеться хоча б один*». Окрім квантора існування ще є двоїстий до нього квантор $\forall$, який називається ***квантором загальності***, який читається «*для будь-якого, для кожного, для всіх*». Застосування кванторів спрощує формальні записи.

П р и к л а д. Розглянемо відношення R, яке визначене в прикладі на стор. 19, і відношення S, яке задане наступною таблицею

		B			
	S	b_1	b_2	b_3	b_4
	c_1				•
C	c_2	•	•	•	
	c_3	•		•	•

.

Тоді відношення SR визначається таблицею

SR	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
c_1	•		•		
c_2	•	•	•		•
c_3	•	•	•		•

(стовпці — множина A, рядки — множина C).

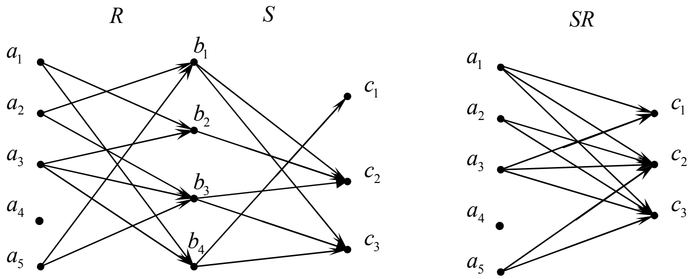
Відношення SR можна ще знайти інакше, якщо записати відношення R та S у вигляді підмножин відповідно декартових добутків $A\times B$ та $B\times C$:

$$R=\{(a_1,b_2),(a_1,b_4),(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_3,b_3),(a_3,b_4),(a_5,b_1),(a_5,b_3)\};$$
$$S=\{(b_1,c_2),(b_1,c_3),(b_2,c_2),(b_3,c_2),(b_3,c_4),(b_4,c_1),(b_4,c_3)\}. \tag{1.2}$$

Тоді

$$SR=\{(a_1,c_1),(a_1,c_2),(a_1,c_3),(a_2,c_2),(a_2,c_3),(a_3,c_1),(a_3,c_2),(a_3,c_3),(a_5,c_2),(a_5,c_3)\}.$$

У правильності відповіді переконаємося за допомогою задання відношення стрілками:



Композицію двох відношень S та R можна знайти ще й у такий спосіб:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \{c_2\} & \{c_1,c_2\} & \{c_3\} & \{c_4\}\end{bmatrix}}_{S(R(x))}\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{b_1,b_3\} & \{b_1,b_3,b_4\} & \{b_1,b_2,b_4\} & \varnothing & \{b_2,b_4\}\end{bmatrix}}_{R(x)}=$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{c_2,c_3\} & \{c_2,c_3\} & \{c_1,c_2,c_3\} & \varnothing & \{c_1,c_2,c_3\}\end{bmatrix}}_{(SR)(x)}.$$

Отже

$$SR=\{(x,\,z)\in A\times C\,|\text{ якщо }\exists y\in B,\text{ такий, що }(x,\,y)\in R\text{ та }(\text{y},\,z)\in S\}.$$

Перевіримо, чи виконується визначення (1.1), наприклад, для перерізу $a=a_1$. У лівій частині формули дістанемо

$$(SR)(a_1)=\{c_1,c_2,c_3\}.$$

Оскільки $R(a_1)=\{b_2, b_4\}$, то у правій частині формули (1.1) при $a = a_1$, матимемо:

$$S(b_2, b_4)=S(b_2)\cup S(b_4)=\{c_2\}\cup\{c_1, c_3\} = \{c_1,\ c_2,\ c_3\}.$$

Ліва й права частини збігаються.

ЗАУВАЖЕННЯ. n **– *ступенем відношення*** R на множині A називається його n-разова композиція з самим собою, тобто

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n}.$$

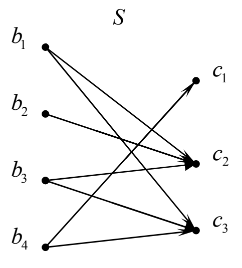
1.2.5 Обернене відношення

Визначимо ще одну додаткову унарну операцію над відношеннями, яка не має аналогів у загальному випадку серед теоретико-множинних операцій, що розглядалися раніше. Це операція обернене відношення.

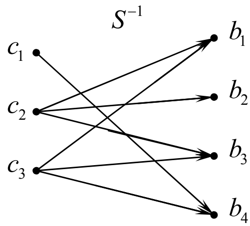
В и з н а ч е н н я. ***Оберненим відношенням*** щодо певного відношення R ($R \subset A \times B$) називається таке відношення R^{-1}, яке задається на декартовому добутку $B \times A$ і утворюється парами $(b, a) \in B \times A$ для яких $(a, b) \in R$.

З визначення оберненого відношення випливає, що $bR^{-1}a$ має місце тоді й лише тоді, коли існує відношення aRb.

П р и к л а д. Розглянемо відношення S, яке визначене на стор. 22 та має стрілочне зображення:



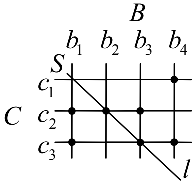
Оберненим щодо відношення S буде відношення S^{-1}, стрілочне зображення якого має вигляд:

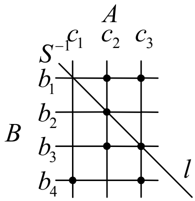


Відношення S^{-1} у вигляді підмножини запишеться як

$$S^{-1}=\{(c_1, b_4),(c_2, b_1),(c_2, b_2),(c_2, b_3),(c_3, b_1),(c_3, b_3),(c_3, b_4)\}.$$

З табличного подання відношення S^{-1} бачимо, що елементи таблиці S^{-1} є симетричні до елементів таблиці S щодо прямої l:





Композиція відношень і обернене відношення мають властивості:

1. $\left(SR\right)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$;
2. Якщо $R \subset S$, $T \subset U$, то $TR \subset US$.

У теорії бінарних відношень важливу роль відіграють також відношення:

доповнення − $\overline{R} = \left\{\left(a,b\right) | \left(a,b\right) \notin R\right\}$, $\overline{R} \subset A \times B$;

тотожне (***діагональ)*** − $I = \left\{\left(a,a\right) | a \in A\right\}$, $I \subset A^2$;

універсальне (***повне***)− $U = \left\{\left(a,b\right) | a \in A, b \in B\right\}$, $U = A \times B$.

Якщо позначити через $\boxed{R}$, $\boxed{\overline{R}}$ та $\boxed{R^{-1}}$ матриці відповідно відношень R, $\overline{R}$ та R^{-1}, то

$\boxed{R^{-1}} = \boxed{R}^T$.

$\boxed{\overline{R}} = \boxed{U} - \boxed{R}$, де $\boxed{U}$ − матриця універсальної множини, всі елементи якої дорівнюють 1, чи то, інакше $\boxed{\overline{R}} = \overline{\boxed{R}}$, де $\overline{r_{ij}} = 1 - r_{ij}$.

1.2.6 Типи відношень

Нехай на множині A задано відношення R.

1. Бінарне відношення R на множині A називається ***рефлексивним,*** якщо всякий елемент цієї множини знаходиться у відношенні R з самим собою, тобто $(a, a) \in R$ для всіх $a \in A$ (інакше aRa для всіх $a \in A$).

2. Відношення R на множині A називається ***антирефлексивним***, якщо з $(a, b) \in R$ випливає $a \neq b$ (тобто $\neg aRa$, що є одне й те саме, що $aRb \neq bRa$).

З визначення антирефлексивності випливає, що якщо умова рефлексивності не виконується ні для жодного елементу множини A, то відношення R буде антирефлексивним.

Якщо умова рефлексивності виконується не для всіх елементів множини A, то говорять, що відношення R є нерефлексивне.

3. Відношення R на множині A називається ***симетричним***, якщо для кожної пари елементів a та b, які належать до A, з того, що $(a, b) \in R$, випливає $(b, a) \in R$ (тобто для $\forall a, b \in A$ з $aRb \Rightarrow bRa$).

4. Бінарне відношення R на множині A називається ***антисиметричним***, якщо для всіх a та b, які належать до A, з належності (a, b) та (b, a) до відношення R випливає $a = b$ (тобто якщо aRb та $bRa \Rightarrow a = b$).

5. Бінарне відношення R на множині A називається ***транзитивним,*** якщо для будь-яких трьох елементів a, b та c, які належать до множини A, з того, що $(a, b) \in R$ та $(b, c) \in R$, випливає, що $(a, c) \in R$ (тобто з того, що aRb та $bRc \Rightarrow aRc$).

6. Бінарне відношення R на множині A називається ***повним***, якщо для всіх елементів a та b, які належать до A, або $a = b$, або $(a, b) \in R$, або $(b, a) \in R$ (тобто, або $a = b$, або aRb, або bRa).

П р и к л а д и:
1) відношення, яке позначене знаком "«=»" − рефлексивне;
2) відношення "бути сином" − антирефлексивне;
3) відношення "жити в одному місті" − симетричне;
4) відношення "бути начальником" − антисиметричне;
5) відношення "бути братом" − транзитивне.

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. При задаванні відношення R $\left(R \in A \times A\right)$ матрицею:

відношення є рефлексивне, якщо всі елементи головної діагоналі матриці дорівнюють 1 $\left(\text{тобто } I \subset R\right)$;

відношення є антирефлексивне, якщо немає жодної одиниці на головній діагоналі $\left(\text{тобто } R \cap I = \varnothing\right)$;

відношення є симетричне, якщо матриця є симетрична щодо головної діагоналі $\left(\text{тобто } R = R^{-1}\right)$;

відношення є антисиметричне, якщо немає жодної пари одиниць симетричної головної діагоналі (окрім одиниць на самій діагоналі) $\left(\text{тобто } R \cap R^{-1} = I\right)$;

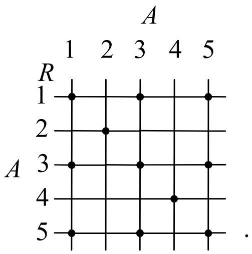
2. Транзитивність бінарного відношення R на множині A перевіряється простим перебиранням всіх елементів множини A $\left(\text{на } A \text{ повинно виконуватися включення } R \circ R \subset R\right)$;

3. Відношення є повне, якщо $R \cup R^{-1} \cup I = U$.

П р и к л а д. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. До якого типу належить відношення $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (1,5), (3,1), (3,5), (5,1), (5,3)\}$?

Р о з в я з а н н я

Зобразимо відношення R за допомогою таблиці



1) Відношення R − рефлексивне, оскільки для кожного $a \in A$, маємо $(a, a) \in R$ $(I \in R)$;

2) відношення R − симетричне, оскільки для всіх пар $(a, b) \in R$ $(a \neq b)$, маємо

Випадок	$(a, b) \in R$	(b, a)	$(b, a) \in R$?
1	$(1, 3)$	$(3, 1)$	Так
2	$(1, 5)$	$(5, 1)$	Так
3	$(3, 5)$	$(5, 3)$	Так

3) відношення R − транзитивне, оскільки

Випадок	$(a, b) \in R$	$(b, c) \in R$	(a, c)	$(a, c) \in R$?
1	$(1, 3)$	$(3, 1)$	$(1, 1)$	Так
2	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(1, 5)$	Так
3	$(3, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 3)$	Так
4	$(3, 1)$	$(1, 5)$	$(3, 5)$	Так
5	$(5, 1)$	$(1, 3)$	$(5, 3)$	Так
6	$(5, 1)$	$(1, 5)$	$(5, 5)$	Так
7	$(5, 3)$	$(3, 1)$	$(5, 1)$	Так
8	$(5, 3)$	$(3, 5)$	$(5, 5)$	Так

4) відношення R − не є антисиметричним, тому що, наприклад, з того, що $(1, 3) \in R$ й $(3, 1) \in R$, не випливає 1 = 2.

1.2.7 Функціональні відношення

Основні визначення

Подамо означення понять функції та відображення.

В и з н а ч е н н я. Відношення R ($R \subset A \times B$) називають ***функціональним***, якщо для кожного $x \in A$ переріз R по x містить не більше одного елемента $y \in B$ (або один або жодного!).

У цьому випадку говорять, що відношення R діє з множини A ***у множину*** B і часто використовують позначення $R: A \to B$.

З точки зору теорії множин поняття числової функції є окремим випадком відношення, коли множини A та B є числові. Тому позначення функціональної залежності малими латинським буквами також застосовують в теорії множин і пишуть $f: A \to B$ або $y = f(x)$, а відношення f називають функцією.

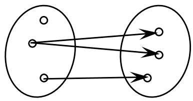


Рисунок 1.7.
Відношення, не функція

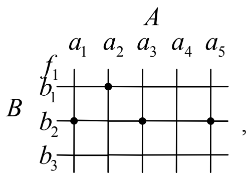
Функція f може бути задана не на всій множені *A*, а тільки на деякій її частині $D \subset A$. В цьому випадку множину D називають ***областю визначення*** функції f, а підмножину $Im \subset B$, де $Im = \{ f(x) \mid x \in D \}$ називають ***областю значень*** функції f.

ЗАУВАЖЕННЯ. *Image* переводиться як зображення чи образ.

Елемент $b = f(a)$, де $a \in D$, називають ***образом*** елемента a, а сам елемент a − ***прообразом*** елемента b.

Якщо $D = A$, то функція f називається ***всюди визначеною*** на *A*. У цьому разі пр$_A$ $f = A$.

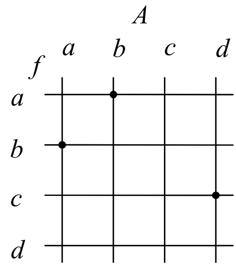
П р и к л а д. Відношення f_1, яке задано таблицею

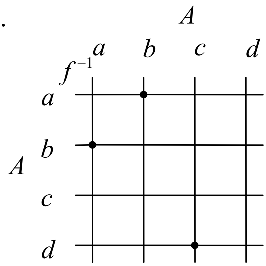


є функціональним, але не всюди визначеним. Образом елемента a_3 є елемент b_2, а прообразами елемента b_2 є елементи a_3 та a_5.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо відношення f^{-1}, обернене до функціонального відношення $f \subset A \times B$, є також функціональним, то відношення f буде взаємнооднозначним.

П р и к л а д (функціонального й оберненого до нього відношення). Нехай $f \subset A \times A$ та визначається таблицею 1 (стор. 28). Тоді відношення $f^{-1} \subset A \times A$ визначається таблицею 2 і є функціональним, тому відношення f є взаємнооднозначним.

1. 

2. 

Структура елементів для нас не є важливою, тому функції f і f^{-1} в розглядуємом прикладі зручно записувати як

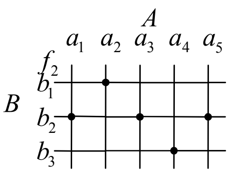
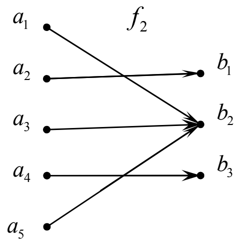
$$f = \begin{bmatrix} a\ b\ d \\ b\ a\ c \end{bmatrix}, \qquad f^{-1} = \begin{bmatrix} a\ b\ c \\ b\ a\ d \end{bmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я. Якщо відношення водночас є функціональним та всюди визначеним на множені A, то воно називається ***відображенням*** множини A у множину B.

Наприклад, відношення f_1, яке задано таблицею на стор. 27, не є всюди визначеним, тому не є відображенням.

При стрілочному зображенні відображення f з кожної точки повинна виходити лише одна стрілка.

П р и к л а д. Довизначемо відношення f_1 прикладу зі сторінки 27, поклавши $a_4\ f_1\ b_3$, тоді здобудемо функціональне відношення f_2:

 ; або  ,

яке вже є відображенням.

ЗАУВАЖЕННЯ. Нехай f є відображенням множини A на множину B. Переріз $f(x)$ множини f по $x \in A$ є образом елемента x для функції f і позначається як $y = f(x)$. Елемент x називають ***аргументом***, $f(x)$ − ***значенням*** функції. Переріз $f^{-1}(y)$ множини B по $y \in B$ є прообразом елемента y для функції f.

На рис. 1.8 та 1.9 графічно зображені образ елемента x та відображення f, яке діє з множини A у множину B.

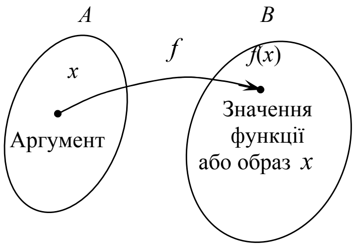


Рисунок 1.8. Значення або образ функції f

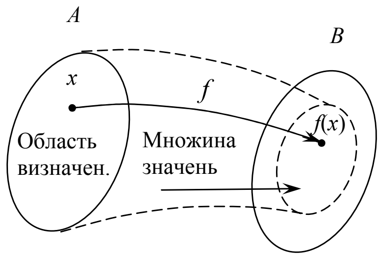


Рисунок 1.9. Відображення f множини A у множину B

Множина упорядкованих пар $\{(x, y)|\ x \in A,\ y = f(x)\}$ називається ***графіком*** відображення f.

Типи відображень

В и з н а ч е н н я. Відображення f називається ***сюр'єктивним***, або просто ***сюр'єкцією,*** якщо область значень f збігається з усією множиною B або
$f\,(A) = B$, тобто якщо кожний елемент з множини B є образом хоча б одного елемента з множини A. У цьому разі f відображає A ***на*** B (рис. 1.10).

В и з н а ч е н н я. Відображення f називається ***ін'єктивним***, або просто ***ін'єкцією***, якщо відношення f^{-1} є функціональне (рис. 1.11), тобто різні елементи множини A переводяться в різні елементи множини B. У цьому разі кожний елемент з області значень f має єдиний прообраз, тобто з рівності $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ випливає $x_1 = x_2$.

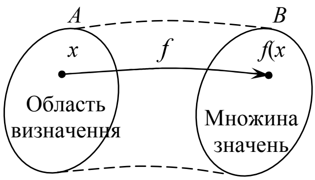


Рисунок 1.10. Відображення A на B

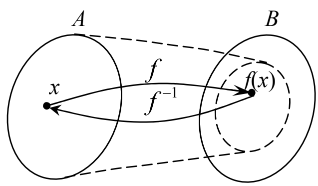


Рисунок 1.11. Ін'єктивне відображення

В и з н а ч е н н я. Відображення називається ***взаємнооднозначним***, або ***бієктивним***, або просто ***бієкцією***, якщо воно є сюр'єктивне й ін'єктивне, інакше кажучи, якщо обернене відношення є відображенням (рис. 1.12).

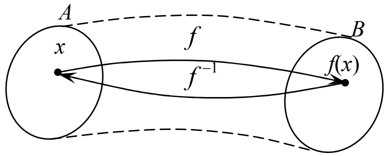


Рисунок 1.12. Бієктивне відображення

В и з н а ч е н н я. Відображення f^{-1} називається ***оберненим відображенням*** до відображення f.

Наступний рис. 1.13 ілюструє поняття сюр'єкції, ін'єкції та бієкції.

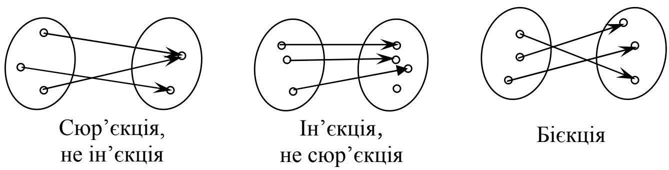


Рисунок 1.13. Різні типи відображень

П р и к л а д. Нехай R − множина дійсних чисел, R_+ − множина дійсних додатних чисел, а функція $f : A \to B$.

1) Якщо $A = B = R$, то функція f: $x \to x^2$ задає відображення A у B (не сюр'єктивне, тому що від'ємні числа не є образами).

2) Якщо $A = B = R$, то функція f: $x \to 4x - 3$ задає відображення A на B (сюр'єктивне).

3) Якщо $A = R$, $B = R^+$, то функція f: $x \to 3^x$ − ін'єктивне відображення, тому що воно є взаємнооднозначне: $f^{-1}: x \to \log_3 x$.

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. Якщо функція f: $A \to B$ є бієкцією, то функція $f^{-1}: B \to A$ також буде бієкцією і $(f^{-1})^{-1} = f$.

2. Бієкція скінченної множини A на себе називається ***підстановкою***. Якщо множина має n елементів, то можна розглядати множину $n!$ всіх підстановок, пов'язаних з даною множиною A.

В и з н а ч е н н я. Елемент x називається ***нерухомою точкою*** відображення f, якщо $f(x) = x$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Оскільки функція є окремим випадком відношення, це означає, що для функцій є також визначена композиція, яка в цьому разі називається ***суперпозицією*** функцій. Нехай f − функція, визначене на множині A зі значеннями в множині B, g − функція, визначене на множині B зі значеннями в множині C, тоді композиція $g \circ f$ є функція, яка діє з множини A в множину С. Таким чином суперпозиція функцій знову є функцією.

З означення суперпозиції маємо

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Приклад 1.37 Нехай задано функції

$$f = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ l & m & n & l \end{bmatrix} \text{ та } g = \begin{bmatrix} l & m & n \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Тоді
$$gf = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Для відображень g і f справедлива формула $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Нехай задано множину $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

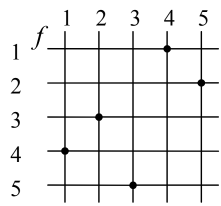
В и з н а ч е н н я. ***Тотожним*** відображенням називається відображення, яке кожному елементові $a_i \in A$ ставить у відповідність цей же самий елемент (позначається символом 1_A). Таким чином:

$$1_A = \begin{bmatrix} a_1 \; a_2 \; ... \; a_n \\ a_1 \; a_2 \; ... \; a_n \end{bmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я. Якщо f та f^{-1} − відображення, визначені на множині A зі значеннями в цій же самій множині A, то відображення f називається ***відображенням на себе*** (бієкцією на себе) і мають місце рівності:

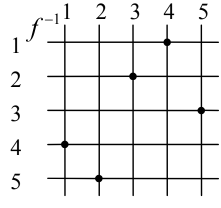
$$1_A \cdot f = f \cdot 1_A = f; \quad f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = 1_A. \qquad (1.3)$$

П р и к л а д. Нехай відображення f задано таблицею



.

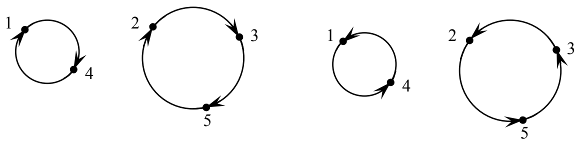
Тоді відображення $f^{-1} \subset A \times A$ визначається таблицею



.

Функції f і f^{-1} запишемо у вигляді: $f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $f^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Зображення відображень f й f^{-1} стрілками складається з циклів:



Перевіримо виконання умови (1.3):

$$1_A \cdot f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{bmatrix}=f; \quad f\cdot 1_A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{bmatrix}=f.$$

Звідси випливає, що відображення 1_A є тотожним.

Знайдемо композицію відображень f та f^{-1}:

$$f\cdot f^{-1}=f^{-1}\cdot f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}=1_A.$$

В и з н а ч е н н я. Функція $f: A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\to B$ $\left(f:\ A^n\to B\right)$ називається ***функцією n аргументів.***

Така функція відображає кортеж $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)\in A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ у елемент $b\in B$.

1.2.8 Відношення порядку

Основні визначення

Відношення, котрі зустрічаються на практиці, можуть мати водночас кілька однакових комбінацій властивостей, яким можна надати спеціальну назву й для яких можна вивчати окремо наслідки з цих комбінацій, притаманні всім відношенням з такою комбінацією властивостей. Розгляд розпочнемо з відношення порядку, яке дозволяє порівнювати поміж собою елементи однієї множини.

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R, яке визначено на множині A, називається відношенням ***порядку,*** якщо воно є антисиметричне й транзитивне.

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R на A називається відношенням ***нестрогого порядку***, якщо воно є рефлексивне, антисиметричне й транзитивне.

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R на A називається відношенням ***строгого порядку***, якщо воно є антирефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Якщо відношення порядку є повне, то воно називається відношенням ***повного***, або ***лінійного*** порядку, а якщо воно не має властивості повноти, то називається відношенням ***часткового*** порядку. У цьому разі множина A із заданим на ньому відношенням R називається ***частково впорядкованою множиною*** (позначається (A, R), або просто A).

Множина, на якій визначено відношення повного порядку, називається ***лінійно впорядкованою***.

Зазвичай нестрогий порядок позначають через "$\leq$". У цьому разі маємо нестрого впорядковану множину $(A, \leq)$. Відношення строгого порядку зазвичай, позначають знаком "$<$". Відношення порядку у загальному випадку позначають знаком "$\prec$".

П р и к л а д. Нехай A − множина дійсних чисел, а відношення R на A є $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$. Тут R − відношення нестрогого повного порядку, тому (A, R) − нестрого впорядкована множина (лінійно впорядкована).

П р и к л а д. Нехай $C = \{1, 2, 3\}$, а $P(C)$ − булеан множини C, тобто множина всіх підмножин множини C. Тоді

$$P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Ця множина містить $2^3 = 8$ елементів.

Відношення R на множині $P(C)$ визначимо як URV, якщо $U \subseteq V$, де U, $V \subseteq C$ (R − відношення включення множин, тобто елемент $(U, V) \in R$, якщо $U \subseteq V$). Наприклад, $(\{3\}, \{1, 3\}) \in R$, тому що $\{3\} \subseteq \{1, 3\}$, а $(\{1, 3\}, \{3\}) \notin R$, оскільки $\{1, 3\} \not\subset \{3\}$.

Можна перевірити, що відношення R визначене у такий спосіб, є рефлексивне, антисиметричне та транзитивне, тому на множині $P(C)$ воно визначає нестрогий порядок, тобто відношення R на булеані $P(C)$ є відношенням нестрогого часткового порядку.

Верхня й нижня межі множини

Нехай A − підмножина впорядкованої множини E, на якій визначено відношення порядку "$\prec$". Якщо існує такий елемент $m \in E$, що $m \prec a$ для кожного $a \in A$, то m називається ***нижньою межею*** множини A. Аналогічно, якщо існує елемент $M \in E$, що $M \succ a$ для кожного $a \in A$, то M називається ***верхньою межею*** множини A.

Якщо m та M належать до множини A, то m та M відповідно називаються ***мінімумом*** та ***максимумом*** множини A й позначаються символами

$$\min A \text{ або } \min_{a\in A}; \qquad \max A \text{ або } \max_{a\in A}.$$

Верхня та нижня межі для кожної множини існують не завжди й не завжди є єдині.

Якщо існує найбільша нижня межа множини *A*, то вона називається ***інфімумом*** і позначається $\inf A$, а якщо існує найменша верхня границя множини *A*, то вона називається ***супремумом*** і позначається $\sup A$.

1.2.9 Відношення еквівалентності

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R на множині A називається ***відношенням еквівалентності***, якщо воно є одночасно рефлексивне, симетричне й транзитивне (позначається символами $\sim$, $\equiv$ або $a = b(\bmod R)$.

П р и к л а д: 1) рівність чисел та множин є відношенням еквівалентності; 2) у прикладі на стор. 25 − 26 відношення R задовольняє всім трьом наведеним властивостям, тому воно є відношенням еквівалентності.

Наприклад, класифікація об’єктів деякої множини A на непересічні підмножини елементів A_i, де $A = \bigcup\limits_i A_i$, $A_i \bigcap A_k = \varnothing \; (i = k)$, якщо вони мають однакові властивості, визначає відношення еквівалентності. В цьому випадку елементи однієї підмножини A_i володіють однаковою властивістю та є еквівалентні до елементів тієї ж самої підмножини й не є еквівалентні до елементів решти підмножин A_k $(i \neq k)$, до того ж серед підмножин A_i немає порожніх. Здобуті підмножини A_i називаються ***класами еквівалентності*** множини *A*.

П р и к л а д. Нехай A − множина студентів одного міста. Визначимо на множині A відношення R − «x та y навчаються в одному ВНЗ», де $x, y \in A$. Відношення R буде відношенням еквівалентності, якщо жоден студент міста не навчається в кількох ВНЗ. У цьому разі класи еквівалентності становитимуть студенти одного ВНЗ.

П р и к л а д. Відношення R у прикладі на стор. 25 − 26 розбиває множину *A* на класи $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$, $[5]$, $[6]$, де

$[1] = \{x : (x, 1) \in R\} = \{x : xR1\} = \{1, 3, 5\}$.

Перевіримо: $1 \in [1]$, оскільки $(1,1) \in R$;

$3 \in [1]$, оскільки $(3,1) \in R$;

$5 \in [1]$, оскільки $(5,1) \in R$.

$[2] = \{x : (x, 2) \in R\} = \{x : xR2\} = \{2\}$;

$[3] = \{x : (x, 3) \in R\} = \{x : xR3\} = \{1, 3, 5\}$;

$[4] = \{x : (x, 4) \in R\} = \{x : xR4\} = \{4\}$;

$[5] = \{x : (x, 5) \in R\} = \{x : xR5\} = \{1, 3, 5\}$.

Аналіз здобутих результатів засвідчує, що різними є лише три класи:

$$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}; \quad [2] = \{2\}; \quad [4] = \{4\}.$$

Символом $[A]_R$ позначають множину всіх класів еквівалентності множини A за відношенням еквівалентності R та називають ***фактор-множиною множини A за відношенням еквівалентності R.*** У розглянутому прикладі фактор-множиною буде множина класів

$$[A]_R = \{[1], [2], [4]\}.$$

Кожний елемент класу еквівалентності породжує цей же самий клас еквівалентності, отже представляє цей клас.

Системою представників певного відношення еквівалентності називається підмножина, яка містить по одному елементові з кожного класу еквівалентності.

П р и к л а д. На множині цілих чисел Z визначимо відношення $R \subset Z \times Z$ за допомогою формули $R = \{(x, y):\ x - y = 3k,\ k - \text{ціле число}\}$.

Відношення R є рефлексивне, тому що $(a, a) \in R$ внаслідок рівності $a - a = 0 = 3 \cdot 0$ для $k = 0$.

Відношення R є симетричне, оскільки з належності $(a, b) \in R$ випливає, що $a - b = 3k$, тобто $b - a = 3(-k)$ і, отже, $(b, a) \in R$.

Відношення R є транзитивне, оскільки з належності (a, b) та (b, c) до R, випливає, що $a - b = 3k_1$, $b - c = 3k_2$, тобто $(a, c) \in R$, оскільки

$$a - c = a - b + b - c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2),$$

де $k_1 + k_2$ − ціле число.

Отже, відношення R є рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому воно є відношенням еквівалентності.

Розглянемо класи чисел

$$[a] = \{x : (x, a) \in R\} = \{x : x - a = 3k\} = \{x : x = a + 3k,\ k - \text{певне ціле число}\}.$$

Здобудемо три різні класи еквівалентності стосовно відношення R розглядаємого прикладу:

$[0] = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$;

$[1] = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$;

$[2] = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$.

Множина всіх класів еквівалентності

$$[Z]_R = \{[0], [1], [2]\}$$

є фактор-множиною множини Z за відношенням еквівалентності R.

Елемент x належить до класу $[a]$, якщо $x - a = 3k$, де k − ціле число. (Пишуть $x = a(\mathrm{mod}\, 3)$).

У загальному випадку, якщо Z − множина цілих чисел, а p − деяке число $(p \in Z)$, то вважатимемо $a \sim b$, якщо $(a-b) \vdots p$, де $a, b \in Z$, або, що є одне й те саме, $a = b(\mathrm{mod}\ p)$.

П р и к л а д. Відношення паралельності прямих q на площині є відношенням еквівалентності, тому що:

1) $q \,||\, q$ − рефлексивне;
2) $q_1 \,||\, q_2 \Rightarrow q_2 \,||\, q_1$ − симетричне;
3) $q_1 \,||\, q_2,\ q_2 \,||\, q_3 \Rightarrow q_1 \,||\, q_3$ − транзитивне.

Кожний клас еквівалентності в множині прямих на площині − це множина паралельних прямих, яка повністю визначається напрямком однієї прямої.

П р и к л а д. Вважатимемо, що точка $M_1(x_1, y_1)$ площини є еквівалентна точці $M_2(x_2, y_2)$ цієї ж площини, якщо $x_1 = x_2$. У цьому разі класами еквівалентності будуть множини точок на площині з рівними абсцисами (тобто всі прямі, які є паралельні до осі Oy). У цьому випадку фактор-множиною буде множина всіх прямих на площині, які є паралельні до осі Oy.

Прикладами відношення еквівалентності є також рівність векторів, логічних тверджень тощо.

1.3 Потужність множин

В и з н а ч е н н я. ***Кардинальним числом*** (позначається Card A або $|A|$) називається деякий об’єкт для позначення потужності будь-якої множини із сукупності множин.

В и з н а ч е н н я. ***Потужністю*** скінченної множини A називається кількість її елементів.

Кардинальне число є узагальненням поняття числа елементів скінченної множини на випадок нескінченної множини.

В и з н а ч е н н я. Стверджують, що множини $A = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots\}$ та $B = \{b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n,\ \dots\}$ мають однакову потужність, якщо можна встановити взаємнооднозначну відповідність поміж їхніми елементами $b_i = f(a_j)$. У цьому разі множини A та B називають ***рівнопотужними*** та позначають $A \sim B$.

Кожні не порожні скінчені множини з n елементів є рівнопотужні множині певного відрізку натурального ряду N_n, де $N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ У цьому разі їхня потужність дорівнює $n < \infty$.

Потужність порожньої множини $\varnothing$ вважають рівною 0, тобто $|\varnothing| = 0$.

П р и к л а д. 1) Якщо $A=\{-2,0,3,5\}$, то $|A|=4$. 2) $|N|=|N^2|$, де $N^2=N\times N$, N − множина натуральних чисел. 3) Якщо множини A та B мають скінчену кількість елементів, то $|A\times B|=|A|\cdot|B|$. 4) $|A^n|=|A|^n$, $n<\infty$.

В и з н а ч е н н я. Кожна множина, яка рівнопотужна множині натуральних чисел, називається ***зліченною.*** Її потужність позначається літерою $\aleph_0$ (алеф нуль, алеф − перша літера єврейської абетки).

П р и к л а д. Множина непарних чисел P є рівнопотужна множині всіх натуральних чисел N, тому множина P є зліченою множиною і її потужність $|P|=\aleph_0$.

В и з н а ч е н н я. Якщо існує взаємнооднозначна відповідність між множиною *A* і деякою власною підмножиною B^* множини *B*, тоді кажуть, що ***потужність множини А не менша від потужності множини В*** і записують |*A*| (|*B*|.

Теорема 1 Якщо множина A є рівнопотужна підмножині B^* множини B (тобто A ~ B^*) і множина B є рівнопотужна підмножині A^* множини A (тобто $B\sim A^*$), то множини A й B рівнопотужні (A ~ B) й їхні потужності дорівнюють одна одній: $|A|=|B|$.

Теорема 2 Потужність множини E завжди менше за потужність множини $P(E)$, де $P(E)$ − множина всіх підмножин множини E.

Теорема 3 Кожна нескінчена множина містить зліченну множину.

Теорема 4 Якщо E − нескінчена множина, а A − скінчена, то $|E\cup A|=|E|$.

Теорема 5 Всі нескінчені множини, які є підмножинами зліченної множини, є також зліченні.

Теорема 6 Об'єднання зліченого числа скінченних або зліченних множин є злічена множина.

Теорема 7 Декартов добуток двох зліченних множин є злічена множина.

Д о в е д е н н я

Нехай є дві злічені множини $A=\{a_n\}$ та $B=\{b_n\}$. Позначимо через $c_{n,m}=a_n\cdot b_m$ елемент добутку множин $A\cdot B$. Кожному елементові $c_{n,m}$ поставимо у відповідність пару чисел (n,m). Занумеруємо їх в такий спосіб: $(0,0)$ − номер 0; $(0,1)$ − номер 1; $(1,0)$ − номер 2; $(0,2)$ − номер 3; $(1,1)$ − номер 4; $(2,0)$ − номер 5; ...; $(0,k)$ − номер r; $(1,k-1)$ − номер $r+1$; ...; $(k,0)$ − номер $r+1+k$.

Правило нумерування елементів множини $A\cdot B$ зобразимо графічно:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{k-2}	a_{k-1}	a_k	$\dots$
b_0	$a_0b_0\boxed{0}$	$a_1b_0\boxed{2}$	$a_2b_0\boxed{5}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_kb_0\boxed{r+k+1}$	$\dots$
b_1	$a_0b_1\boxed{1}$	$a_1b_1\boxed{4}$	$a_1b_1\boxed{8}$	$\dots$	$\dots$	$a_{k-1}b_1\boxed{r+k}$	$\dots$	$\dots$
b_2	$a_0b_2\boxed{3}$	$a_1b_2\boxed{7}$	$a_1b_2\boxed{12}$	$\dots$	$a_{k-2}b_2\boxed{r+k-1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_{k-2}	$\vdots$	$\dots$	$a_1b_{k-2}\boxed{r+2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_{k-1}	$\dots$	$a_1b_{k-1}\boxed{r+1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_k	$a_0b_k\boxed{r}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

У такий спосіб можна перенумерувати всі пари $a_n \cdot b_m$, тому множина, яка складається з елементів з подвійними індексами, є злічена.

П р и к л а д. 1) Множина цілих чисел − зліченна. 2) Множина раціональних чисел $\dfrac{p}{q}$ $\left(p, q \in N, q \neq 0\right)$ є зліченна. 3) Множина точок з раціональними координатами на евклідовій площині є зліченна.

В и з н а ч е н н я. Потужність множини дійсних чисел проміжку $\left[0,1\right)$ називається потужністю ***континууму***. Позначається через **С** або $\aleph$.

П р и к л а д. Множини дійсних чисел проміжків $\left[0,1\right)$ та $\left[0,\infty\right)$ є рівнопотужні, оскільки по між ними можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

Завдання для самостійної роботи. Довести твердження попереднього прикладу.

Теорема 8 Множина $P\left(N\right)$ (булеан множини N) − незліченна множина. Її потужність дорівнює потужності континууму **С**, тобто множина потужності $2^{\aleph_0}$ має потужність континууму.

Теорема 9 Об'єднання множини потужності континууму та зліченної множини має потужність континууму.

Теорема 10 Добуток скінченного або зліченного числа множин потужності континууму має потужність континууму:

$$\left(\aleph_0\right)^{\left(\aleph_0\right)} = \mathbf{C}.$$

Розділ 2

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

2.1 Алгебра висловлень

2.1.1 Загальні поняття

Логіка – це наука про закони мислення та його форми. Вона як мистецтво суджень бере свій початок з далекої давнини. В логіку було впроваджено математичну символіку, і сьогодні вона використовує мову й методи математики. Звідси й назва – математична логіка. Основи математичної логіки було закладено в середині XIX сторіччя ірландським математиком Дж. Булем.

Останніми десятиліттями логіка набула широкого застосовування в техніці під час дослідження та розроблення електронних схем, обчислювальних машин, дискретних автоматів. Вона використовується також і в інших науках: економіці, біології, психології тощо.

Основним поняттям у логіці є висловлення, під яким розуміють думку, яка подається за допомогою твердження. Тобто висловлення – це певне твердження, яке може бути або істинним або хибним. Наприклад, висловлення «4 є парне число», «$2 \cdot 2 = 4$» є істинними, а висловлення «Одеса − столиця України», «$2 + 3 = 6$» – хибними. Рівняння «$x - 4 = 0$» не є висловленням, але за кожного конкретного значення змінної x одержуватимемо висловлення.

Поміж висловленнями використовуються різні логічні зв’язки: «якщо ..., то ...», «... або ...», «... і ...» тощо. За їхньої допомоги будуються інші нові висловлення.

Логічною операцією називається операція, в якій операндами є висловлення, а операторами – логічні зв’язки.

Алгебра логіки (алгебра висловлень) являє собою науку про сукупність висловлень, над якими визначені логічні операції.

Для позначення істинного висловлення використовують літеру *і* (істина, чи цифру 1, чи T – true), а для хибного – літеру *х* (хибність, чи цифру 0, чи F –, false).

Висловлення, які характеризуються значеннями 0 чи 1, позначатимемо літерами x, y, z тощо (такі змінні називатимемо бульовими, див. п. 2.2).

За допомогою алгебри логіки можна, наприклад, описувати роботу релейно-контактних схем. Для конкретики обмежимося розгляданням двополюсних схем, у яких поміж полюсами можуть існувати релейні контакти, з’єднані послідовно чи паралельно. При цьому стан контакту – 1 (0) означає, що він замкнений (розімкнений), тобто сигнал 1 (0) переводить електронний елемент у відкритий (закритий) стан.

Розглянемо спочатку схеми з одним контактом (рис. 2.1), на яких сам контакт та його стан позначено через x, а стан двополюсника позначатимемо літерою y.

Рисунок 2.1. Схеми з одним контактом

Вочевидь, змінна x є незалежною, а змінна y – залежною бульовою змінною.

У разі першої схеми коло буде замкнене, якщо буде змінено стан контакту (замкнено), тобто змінна y набуде істинного значення ($y = 1$) тоді й лише тоді, коли змінна x також набуде істинного значення ($x = 1$). У разі другої схеми, навпаки, змінна y набуде істинного значення ($y = 1$), коли змінна x збереже хибне значення, тобто стан контакту не зміниться ($x = 0$).

Перейдемо тепер до розглядання схеми „або” і схеми „і” (рис. 2.2).

Рисунок 2.2. Схеми з двома контактами

Якщо контакти x_1 та x_2 з’єднані паралельно, то коло буде замкнене, тобто змінна y набуде істинного значення ($y = 1$), коли хоча б один з контактів x_1 та x_2 є замкненим, і розімкненим, тобто y набуватиме хибного значення, коли обидва контакти x_1 та x_2 є розімкненими. При послідовному з’єднанні контактів x_1 та x_2 коло буде замкнене ($y = 1$), коли обидві змінні x_1 та x_2 набуватимуть істинного значення (тобто $x_1 = 1$, $x_2 = 1$), і розімкнене ($y = 0$), коли хоча б одна зі змінних x_1 та x_2 набуде хибного значення.

Опис більш складних релейно-контактних схем здійснюється за допомогою бульових функцій (див. п. 2.2).

Для логічних зв’язок застосовуються символи: $\neg$ − для „не” (заперечення», $\wedge$ − для „і” (кон’юнкції), $\vee$ − для „або” (диз’юнкції), $\to$ − для «якщо …, то …» (імплікації), $\sim$ − для «тоді й лише тоді, коли» (еквіваленції). Наприклад, якщо A та B – твердження, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$ будуть, відповідно, запереченням твердження A, кон’юнкцією тверджень A та B тощо.

Задамо значення істинності висловлень A та B таблицею істинності, тоді для розглянутих зв’язок таблиця істинності має наступний вигляд:

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \sim B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Таким чином, якщо значення істинності простих висловлень є відомі, то значення істинності складних висловлень може бути визначено за допомогою цих таблиць.

2.1.2 Формули алгебри висловлень. Семантика. Класифікація та рівносильність формул

Під алфавітом будемо розуміти кожну не порожню множину символів: пропозиційних змінних – x, y, z, x_1, x_2, …; логічних зв'язок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ~, …; технічних символів – (,) тощо.

Словом у певному алфавіті називається довільна скінчена послідовність символів (можливо, порожня). Слово a називається підсловом b, якщо $b = b_1ab_2$ для певних слів b_1 та b_2. Слово ab називається сполученням (конкатенацією) слів a та b.

Формулою алгебри висловлень (ФАВ) називається слово, яке задовольняє такому визначенню:

1) кожна пропозиційна змінна – формула;
2) якщо A та B – формули, то $(\overline{A})$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ – формули;
3) слово є формулою, якщо воно побудоване лише з використанням п. 1 та п. 2.

Наприклад, вирази (слова)

$$\left((\overline{A} \rightarrow B) \vee A\right), \quad \left((A \sim B) \rightarrow (\overline{C})\right)$$

є формулами, а слова $(A \sim B)$, $(\overline{C})$, A, B, C – підформули останньої формули.

З метою економії дужок операції виконуються в такому порядку (пріоритет операцій): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ~.

Раніше зазначалося, що висловлення може бути чи то істинне, чи хибне. Інтерпретувати формулу – означає приписати їй одне з двох значень істинності. Набір правил інтерпретації формул (семантика числення висловлень) має бути композиційним, тобто значення формули має бути функцією значень її складових. Для інтерпретації можна використовувати таблиці істинності.

Наприклад, покажемо істинність формули

$$A \rightarrow B \sim \overline{A} \vee B$$

за будь-яких інтерпретацій:

A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$A \rightarrow B \sim \overline{A} \vee B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває істинного значення, вона називається ***здійсненною***, а якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває хибного значення, вона називається ***спростовною.***

Формула називається ***тавтологією*** (чи тотожно-істинною, чи загальнозначущою), якщо за будь-яких інтерпретацій її складових (змінних) вона набуває істинного значення. Позначення тавтології є $\models A$.

Формула називається ***протиріччям*** (тотожно-хибною), якщо за будь-яких інтерпретацій вона набуває хибного значення.

Областю істинності (областю хибності) формули називається множина наборів значень змінних, за яких формула набуває істинного (хибного) значення.

Результати цих означень:

формула A є тавтологією тоді й лише тоді, коли A не є спростовною;

формула A є тотожно-хибна тоді й лише тоді, коли A не є здійсненною;

формула A є тавтологією тоді й лише тоді, коли $\overline{A}$ є тотожно-хибною;

формула A є тотожно-хибна тоді й лише тоді, коли $\overline{A}$ тавтологія;

формула $A \sim B$ – тавтологія тоді й лише тоді, коли A та B набувають однакових значень (є рівносильні) за всіма наборами значень змінних.

Вочевидь, що дві формули є рівносильні тоді й лише тоді, коли за будь-яких інтерпретацій їхніх змінних вони набувають однакових значень. Позначення: $A = B$.

Теорема 1 Дві формули A та B є рівносильні тоді й лише тоді, коли $\models A \sim B$.

Д о в е д е н н я. Нехай $P_1, P_2, \ldots, P_m$ є сукупність усіх простих компонентів в A та B. Якщо цим компонентам надано певні істинні значення, то перша частина обчислення значень формули $A \sim B$ полягає в обчисленні значень A та B, після чого обчислення завершується застосуванням таблиці істинності для еквіваленції, за якою значення $A \sim B$ буде істинним тоді й лише тоді, коли значення для A та B будуть однакові, тобто A та B є рівносильні.

Н а с л і д о к. Нехай F_1 − формула, в якій є певні входження формули A, і нехай F_2 − результат заміни цього входження формули A на формулу B.

Тоді:

якщо $\models A \sim B$, то $\models F_1 \sim F_2$;

якщо $\models A \sim B$ і $\models F_1$, то $\models F_2$.

Теорема 2 Якщо $\models A$ і $\models A \to B$, то $\models B$.

Д о в е д е н н я. Нехай $P_1, P_2, \ldots, P_m$ є сукупність усіх простих компонентів в A та B. Якщо цим компонентам надано певних значень істинності, то перша частина обчислення значень формули $A \to B$ полягає в обчисленні значень A та B, після чого обчислення завершуються застосуванням таблиці істинності для імплікації.

З припущення $\models A$ та $\models A \to B$ випливає, що значення A та $A \to B$ будуть істинними.

З таблиці для $A \to B$ випливає, що B теж матиме значення „істина”. Через то що це має місце для кожних значень компонентів P_1, P_2, …, P_m, формула B є загальнозначуща.

Подані теореми дозволяють здійснювати еквівалентні перетворювання формул і здобувати нові загальнозначущі формули.

Наприклад, тавтології можна здобути з рівносильності заміною знака = на знак ~. Скажімо, з рівносильності $A \vee AB = A$ здобуваємо тавтологію $\models A \vee AB \sim A$. Доведення тавтології, наприклад, $\models (A \to B)(A \to C) \sim (A \to BC)$, можна виконати за допомогою перетворень:

$$(A \to B)(A \to C) = (\overline{A} \vee B)(\overline{A} \vee C) = \overline{A} \vee \overline{A}B \vee \overline{A}C \vee BC = \overline{A} \vee BC = A \to BC .$$

2.1.3 Основні закони алгебри висловлень

Тотожно-істинні формули та формули рівносильності називаються законами алгебри висловлень (властивостями, правилами, теоремами). Існує нескінчена множина тавтологій та рівносильностей, а отже, і законів алгебри висловлень. Нижче наведено закони (з використанням пропозиційних змінних), які найчастіш зустрічаються на практиці:

$x \wedge 0 = 0,\ x \wedge 1 = x,\ x \vee 0 = x,\ x \vee 1 = 1$	– закони сталих (констант);
$x = x$	– закон тотожності;
$\overline{\overline{x}} = x$	– закон подвійного заперечення;
$x \wedge \overline{x} = 0$	– закон протиріччя;
$x \vee \overline{x} = 1$	– закон вилученого третього;
$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$	– комутативність $\vee$ та $\wedge$;
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	– асоціативність $\vee$ та $\wedge$;
$x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$	– перший дистрибутивний закон;
$x \vee y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	– другий дистрибутивний закон;
$x \wedge (x \vee y) = x$	– перший закон поглинання;
$x \vee x \wedge y = x$	– другий закон поглинання;
$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$	– ідемпотентність;
$x \wedge y \vee x \wedge \overline{y} = x$	– перший закон склеювання;
$(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x$	– другий закон склеювання;
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \quad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	– правила де Моргана;
$\models (x \to y) \wedge x \to y$	– правило твердження, modus ponens;
$\models (x \to y) \wedge \overline{y} \to \overline{x}$	– правило спростування, modus tollens.

2.1.4 Логічний наслідок

Формула алгебри висловлень B є логічним наслідком з формули A (позначається $A \models B$), якщо B є істинне на всіх наборах значень змінних, для яких A є істинна. Наприклад, формула $B = x \vee x$ є логічним наслідком формули $A = x \wedge (y \vee \bar{y})$, тобто $x \wedge (y \vee \bar{y}) \models x \vee x$.

Теорема 1 Формула алгебри висловлень B є логічним наслідком з формули A тоді й лише тоді, коли формула $A \to B$ є загальнозначущою, тобто

$$A \models B \sim \models A \to B.$$

Д о в е д е н н я. Відповідно до визначення імплікації, вираз $A \to B$ є хибний лише за істинного A та хибного B а отже, якщо $A \to B$ – тавтологія, то з істинності A завжди випливає істинність B, тобто $A \models B$.

І, навпаки, якщо $A \models B$, то виключається випадок, коли A є істинне та B − хибне, а отже, $A \to B$ є істинне на всіх наборах значень змінних, тобто $\models A \to B$.

Логічний наслідок можна узагальнити на сукупності формул: формула алгебри висловлень B є логічним наслідком формул A_1, A_2, …, A_n та позначається як

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B,$$

якщо для довільного набору значень з істинності всіх A_i, $i = \overline{1, n}$, на цьому наборі випливає істинність B. Наприклад, розглядаючи таблицю істинності, здобудемо три ілюстрації до наведеного визначення:

$x, z,\ x \wedge y \to \bar{z} \models \bar{y}$ − 6-й рядок;

$x, x \to z,\ z \models x \vee y \to z$ − 6 та 8-й рядки;

$x \wedge y \to \bar{z},\quad x \to z \models \overline{x \wedge y}$ − 1, 2, 6-й рядки.

№ пп	x	y	z	$x \wedge y \to \bar{z}$	$\bar{y}$	$x \to z$	$x \vee y \to z$	$\overline{x \wedge y}$
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	0	1	1	0	0	1
6	1	0	1	1	1	1	1	1
7	1	1	0	1	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	1	1	0

Теорема 2 Формула алгебри висловлень B є логічним наслідком формул A_1, A_2, …, A_n тоді й лише тоді, коли формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots, \wedge A_n \to B$ є загальнозначущою, тобто

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B \sim \models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B.$$

Д о в е д е н н я

Доведення виконується аналогічно до доведення теореми 1.

Формули алгебри висловлень можна застосовувати для перевірки правильності логічних суджень, незважаючи на конкретний зміст висловлень.

Що ж стосується „здорового глузду”, то він має виявлятися при використовуванні законів логіки висловлень у її конкретних додатках. Наприклад, висловлення «A = 100 < 10» − хибне. Однак воно стає істинним, якщо вважати, що число 100 записане у двійковій системі числення, а 10 – у десятковій.

П р и к л а д. Перевірити правильність наступного судження. Якщо замінити мікросхему (A), телевізор працюватиме (B) за умови, що напругу увімкнено (C). Мікросхему замінили, а напругу не увімкнули. Отже, телевізор не працюватиме.

Р о з в ’ я з а н н я

Це судження можна записати у вигляді

$$A \to B \wedge C, \ \ A, \overline{C} \models \overline{B} \, .$$

Оскільки формули A, B, C не містять підформул, то можна перейти до відповідних пропозиційних змінних x, y, z.

Тоді даний логічний висновок набуде більш зручного вигляду:

$$x \to y \wedge z, \ \ x, \overline{z} \models \overline{y} \, .$$

Судження буде слушним, якщо формула

$$(x \to y \wedge z) \wedge x \wedge \overline{z} \to \overline{y}$$

є загальнозначуща. При викладках скористаємося основними законами алгебри висловлень:

$$(x \to y \wedge z) \wedge x \wedge \overline{z} \to \overline{y} = \overline{(\overline{x} \vee y \wedge z) \wedge x \wedge \overline{z}} \vee \overline{y} = \overline{0} \vee \overline{y} = 1 \vee \overline{y} = 1.$$

Формула є загальнозначущою, отже, судження є правильне.

В і д п о в і д ь: судження є правильне.

П р и к л а д. Я піду на лекцію (x) або залишуся в барі й вип’ю кави (y). Я не піду на лекцію. Отже, я залишуся й вип’ю кави.

Запишемо логічне слідування:

$$x \vee y, \overline{x} \models y \, .$$

Перевіримо загальнозначимість:

$$(x \vee y) \wedge \overline{x} \to y = \overline{(x \vee y) \wedge \overline{x}} \vee y = \overline{x}\,\overline{y} \vee x \vee y = 1 \vee x = 1.$$

Судження є правильне.

2.2 Функції алгебри логіки. Бульова алгебра

2.2.1 Способи задання бульових функцій

Відношення поміж бульовими змінними подаються бульовими функціями, які, подібно до числових функцій, можуть залежати від однієї, двох чи більш змінних (аргументів).

В и з н а ч е н н я. ***Бульовою функцією*** n незалежних змінних називається функція

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad n \geq 1,$$

в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини {0; 1}, тобто

$$x_k \in \{0; 1\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad y = \{0, 1\}.$$

В и з н а ч е н н я. Кортеж $(x_1, x_2, ..., x_n)$ конкретних значень бульових змінних називається ***набором***, або ***бульовим вектором.***

Якщо незалежні змінні розміщено у прямому порядку, тобто у вигляді $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то набір називається ***прямим***, а якщо їх розміщено у зворотному порядку, тобто у вигляді $x = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$, то набір називається ***зворотним***.

Областю визначення бульової функції n ***аргументів*** є сукупність 2^n бульових кортежів. Число різних бульових функцій є скінченне і дорівнює 2^{2^n}. За $n = 1$ число бульових функцій дорівнює 4, а за $n = 2 - 16$.

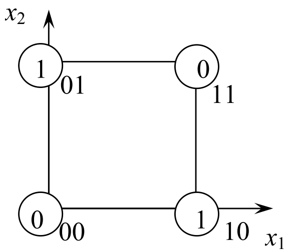
Існують такі способи задання бульових функцій.

1. ***Табличний.*** Функція задається у вигляді таблиці істинності. Наприклад така таблиця

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

визначає функцію y.

2. ***Графічний.*** Функція задається у вигляді n-вимірного одиничного куба, у вершинах якого записано значення функції (у кружечках) та набори значень аргументів. Наприклад, функції, задані на рис. 2.3 та 2.4.



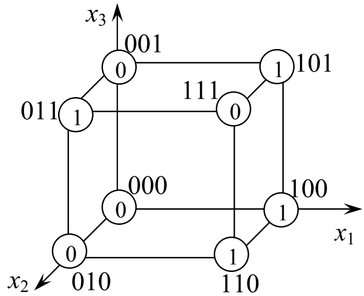


Рисунок 2.3.
Двовимірний одиничний квадрат

Рисунок 2.4.
Тривимірний одиничний куб

3. ***Координатний*** **(*картою Карно*).** У клітинках карти записуються значення функції (нулі зазвичай не вписують, їм відповідають порожні клітини). Значення змінної визначається відрізками (дужками) з позначенням цієї змінної. Наявність відрізка відповідає 1, а відсутність − 0. Наприклад, функція, задана на рис. 2.5.

x_5, x_4, x_3, x_3, x_2, x_1

1	1			1			
	1	1	1				1
		1	1		1	1	
	1				1	1	

Рисунок 2.5. Приклад задання функції картою Карно

Відрізки карти Карно мають відбивати всі можливі набори значень. Для цього можна скористатися лівою частиною таблиці істинності, в якій рекомендується попередньо виконати перестановки наборів в такий спосіб, щоби зменшити загальне число розривів у відрізках. Наприклад, на рис. 2.6 подано перестановки наборів функцій двох та трьох незалежних змінних.

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

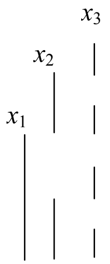
x_2 x_1

$\Rightarrow$

x_1	x_2
0	0
0	1
1	1
1	0

x_2 x_1

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1



$\Rightarrow$

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

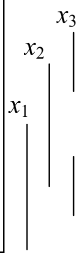


Рисунок 2.6. Приклади перестановок наборов

4. ***Числовий.*** Функція задається у вигляді цілих десяткових (вісімкових, шістнадцяткових) чисел, які є еквівалентами тих наборів значень аргументів, на яких функція набуває значення 1.

Наприклад,

$$y = \{3; 4; 5; 6\}_{x_1 x_2 x_3},$$

де $3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ і набір значень аргументів 011 відповідає значенню функції 1 (див. рис. 2.4), і т. д.

5. ***Аналітичний.*** Функція задається у вигляді формули. Наприклад:

$$y = x_1 + x_2 \cdot x_3.$$

2.2.2 Елементарні функції алгебри логіки

Бульові функції однієї та двох незалежних змінних прийнято називати ***елементарними*** бульовими функціями. Вони використовуються як логічні операції над бульовими змінними при побудові бульових функцій багатьох незалежних змінних. Алгебра з такими логічними операціями називається ***алгеброю логіки***, а бульові функції називаються ще ***функціями алгебри логіки***.

Загальне число різних елементарних функцій (логічних операцій) дорівнює загальному числу функцій двох змінних, тобто $2^{2^2} = 16$ (функції однієї змінної є окремим випадком функцій двох змінних).

Основними в алгебрі логіки є три логічні операції.

Заперечення (інверсія) − функція $y = f(x)$, яка набуває значення 1, коли $x = 0$, і значення 0 − за $x = 1$. Позначення: $y = \bar{x}$. Читається: «не x».

Диз'юнкція (логічне додавання) – функція $y = f(x_1, x_2)$ яка набуває значення 0 тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють нулеві. Позначення: $y = x_1 + x_2$ або $y = x_1 \vee x_2$. Читається: «x_1 плюс x_2» або «x_1 або x_2».

Кон'юнкція (логічне множення) – функція $y = f(x_1, x_2)$, яка набуває значення 1 тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють одиниці.

Позначається: $y = x_1 \cdot x_2$ або $y = x_1 \wedge x_2$, Читається: «x_1 помножити на x_2» або «x_1 та x_2».

Таблиці істинності наведених логічних операцій мають відповідно вигляд:

x	$y = \overline{x}$
0	1
1	0

x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	$y = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Якщо операція містить один операнд, вона називається ***одномісною***, або ***унарною***, а якщо два, то – ***двомісною***, або ***бінарною***. Заперечення − це одномісна операція, а диз'юнкція та кон'юнкція − двомісні. При цьому вирази $\overline{x}$, $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ є прикладами логічних формул. Більш складні формули дістаємо за рахунок суперпозиції логічних формул, які, звичайно беруться у круглі дужки. Наприклад: $y = x_1 + x_2(\overline{x}_1 + x_2)(x_1 + x_1\overline{x}_2)$.

Елементарні функції однієї змінної. Таблиця істинності цих функцій має вигляд:

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функції φ_0 та φ_3 − константи 0 та 1 відповідно. Позначення: $\varphi_0(x) = 0$; $\varphi_3(x) = 1$. Функція φ_1 набуває тих самих значень, що й x, тобто $\varphi_1(x) = x$. Функція $\varphi_2(x) = \overline{x}$, тобто це є логічна операція заперечення.

Елементарні функції двох змінних. Таблиця істинності цих функцій має вигляд

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Операція		0	•	$\leftarrow$	x_1	$\overline{x}_1 \bullet x_2$	x_2	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\sim$	$\overline{x}_2$	$x_1 + \overline{x}_2$	$\overline{x}_1$	$\rightarrow$	/	1

Функції ψ_0 та ψ_{15} – константи 0 та 1. Ці функції відрізняються від φ_0 та φ_3 формально. Функції $\varphi_0 \ldots \varphi_3$ є унарні операції, а функції $\psi_0 \ldots \psi_{15}$ – бінарні.

Функції ψ_7 та ψ_1 – це розглянуті вище операції диз'юнкції та кон'юнкції.

Функція ψ_6 – це додавання за модулем 2. Позначення:

$$\psi_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2.$$

Функція ψ_9 називається еквівалентністю. Позначення:

$$\psi_9(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2.$$

Функція ψ_{13} – імплікація: $\psi_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$.

ψ_2 – заборона (заперечення імплікації): $\psi_2 = x_1 \leftarrow x_2$.

ψ_8 – стрілка Пірса (функція Вебба), $\psi_8 = x_1 \downarrow x_2$.

ψ_{14} – штрих Шеффера, $\psi_{14} = x_1 / x_2$.

Решта функцій спеціальних назв не мають і, як буде показано далі, легко виражаються через вищенаведені функції.

Зауважимо, що ці функції є інверсними, тобто

$$\psi_0 = \overline{\psi}_{15}, \quad \psi_1 = \overline{\psi}_{14}, \quad \ldots, \quad \psi_7 = \overline{\psi}_8 .$$

Технічну реалізацію функцій однієї змінної наведено на рис. 2.7.

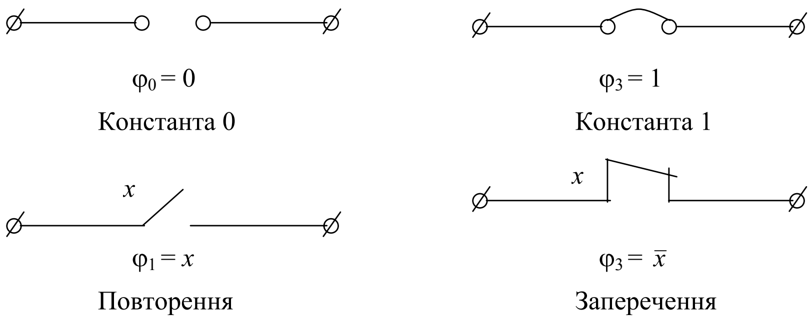
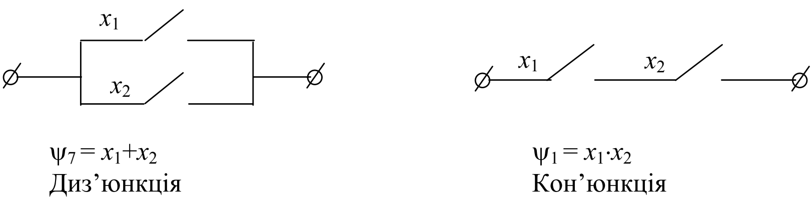
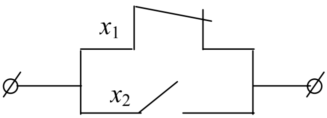


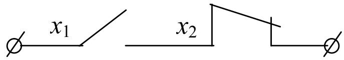
Рисунок 2.7. Технічна реалізація функцій однієї змінної

Технічну реалізацію деяких функцій двох змінних показано на рис. 2.8.

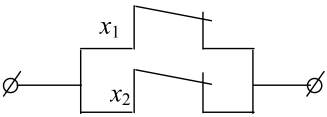




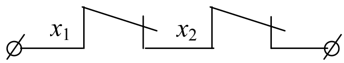
$\psi_{13} = x_1 \rightarrow x_2$
Імплікація



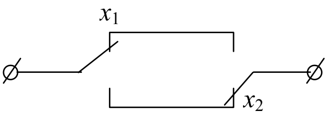
$\psi_2 = x_1 \leftarrow x_2$
Заборона



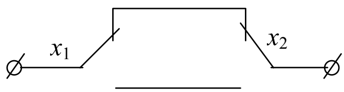
$\psi_{14} = x_1 \,/\, x_2$
Штрих Шеффера



$\psi_8 = x_1 \downarrow x_2$
Стрілка Пірса



$\psi_6 = x_1 \oplus x_2$
Додавання за модулем 2



$\psi_9 = x_1 \sim x_2$
Еквівалентність

Рисунок 2.8. Технічна реалізація функцій двох змінних

2.2.3 Основні властивості функцій алгебри логіки

Формулою алгебри логіки або ***логічним виразом*** називається скінчена послідовність бульових змінних та функцій, пов'язаних знаками логічних операцій та круглими дужками.

Функція алгебри логіки – це рівність, у лівій частині якої стоїть бульова змінна, а у правій − логічний вираз. Отже, функція алгебри логіки визначається формулою.

Наприклад, $x_1(x_2 \rightarrow x_3)$ − логічний вираз, $y = x_1 + x_2 x_3$ – бульова функція.

При обчислюванні логічних виразів дотримуються такого приорітету операцій: насамперед обчислюються функції, потім заперечення, після чого логічне множення і, врешті, логічне додавання. Вирази, які стоять у дужках, обчислюються в першу чергу. Інші операції мають найменший пріоритет. Порядок їхнього виконання визначається круглими дужками.

Функції, які зводяться до залежності від меншого числа змінних, називаються ***виродженими***, а функції, які суттєво залежать від усіх змінних, є ***невиродженими***. Наприклад, серед функцій однієї змінної є дві вироджені функції. Це $\varphi_0 = 0$, $\varphi_3 = 1$, які можна розглядати як функції від нуля змінних.

Функції двох змінних містять ті самі константи і чотири функції однієї змінної – ψ_3, ψ_5, ψ_{10}, ψ_{12}.

Функція багатьох змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається функцією, яка ***зберігає константу 0***, якщо $f(0, 0, ..., 0) = 0$. Наприклад, функції $\psi_0 \ldots \psi_7$ мають цю властивість, а функції $\psi_8 \ldots \psi_{15}$ цієї властивості не мають (див. табл. функцій ψ на стор. 49).

Функція n змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається функцією, яка ***зберігає константу 1***, якщо $f(1, 1, ..., 1) = 1$. Наприклад, функції ψ_{2i+1}, де $i = \overline{0,7}$, мають цю властивість, а функції ψ_{2i} – не мають.

Логічна функція $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***двоїстою*** до функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо має місце рівність

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right).$$

Наприклад, функція $\psi_1 = x_1{\cdot}x_2$ має властивість двоїстості до функції $\psi_7 = x_1{+}x_2$, тому що $x_1{\cdot}x_2 = \overline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}$.

Логічна функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***самодвоїстою***, якщо

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right).$$

Наприклад, функція $f(x_1, x_2, x_3) = x_1{\cdot}x_2 + x_2{\cdot}x_3 + x_1{\cdot}x_3$ є самодвоїстою, тому що $x_1{\cdot}x_2 + x_2{\cdot}x_3 + x_1{\cdot}x_3 = \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3}$ (перевіряється за допомогою таблиці істинності).

Функція багатьох змінних називається ***монотонною***, якщо для будь-якої пари наборів значень її аргументів $\left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$ та $\left(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''\right)$, які задовольняють нерівності $x_i'' \geq x_i'$, $i = \overline{1,n}$, виконується нерівність

$$f\left(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''\right) \geq f\left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right).$$

Наприклад, функція ψ_1 є монотонною (див. табл. функції ψ на стор. 49).

Функція багатьох змінних називається ***лінійною***, якщо її можна подати у вигляді многочлена

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n,$$

де $c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0,n}$. Наприклад, функція ψ_6 є лінійною, тому що $\psi_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

2.2.4 Повні системи функцій. Базис

В и з н а ч е н н я. Система функцій алгебри логіки $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ називається ***повною***, якщо кожна інша функція алгебри логіки може бути виражена за допомогою суперпозицій цих функцій. При цьому стверджують, що повна система функцій утворює базис у логічному просторі.

В и з н а ч е н н я**.** ***Мінімальним базисом*** є такий базис, вилучення з якого будь-якої функції порушує його повноту.

Теорема Поста-Яблонського Для того щоб система функцій була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила в собі хоча б одну функцію:

незберігаючу константу 0, незберігаючу константу 1, несамодвоїсту, немонотонну й нелінійну.

З теореми випливає, що таких функцій має бути п’ять. Але, через те що деякі функції мають одразу кілька потрібних властивостей, базис може складатися з меншого числа функцій.

Властивості функції	**Функції**									
	0	**1**	–	+	•	/	↓	→	⊕	←
Незберігаюча 0		*	*			*	*	*		
Незберігаюча 1	*		*			*	*		*	*
Несамодвоїста	*	*		*	*	*	*	*	*	*
Немонотонна			*			*	*	*	*	*
Нелінійна				*	*	*	*	*		*

З таблиці видно, що повними системами функцій будуть: {¬, +, •}, {¬, +}, {¬, •}, {/}, {↓}, {0, →} тощо. Так, наприклад, алгебра Буля побудована на системі функцій {¬, +, •}, а алгебра Жегалкіна використовує базис {1, •, ⊕}.

2.2.5 Бульова алгебра та її основні закони

В и з н а ч е н н я. ***Бульовою алгеброю*** називається множина логічних функцій з операціями диз’юнкція, кон’юнкція та заперечення, − тобто алгебра, базисом якої є система функцій {¬, +, •}.

Операції бульової алгебри звичайно називають бульовими операціями, а функції − бульовими функціями.

Розглянемо тепер основні закони бульових операцій:

1) комутативний (для диз’юнкції та кон’юнкції):

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1; \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3; \qquad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ – перший дистрибутивний закон;

$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$ – другий дистрибутивний закон;

4) ідемпотентний:

$$x + x = x; \qquad x \cdot x = x;$$

5) інверсний (формули де Моргана):

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2; \qquad \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2;$$

6) закон вилученого третього (для диз’юнкції) і закон суперечності (для кон’юнкції):

$$x + \overline{x} = 1; \qquad x \cdot \overline{x} = 0.$$

У бульовій алгебрі мають місце такі властивості:

$$\overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0; \quad x + 0 = x; \quad x + 1 = 1; \quad x \cdot 0 = 0; \quad x \cdot 1 = x; \quad \overline{\overline{x}} = x.$$

Решта функцій двох змінних логіки виражаються через базис бульової алгебри в такий спосіб:

$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 + x_2$; $\qquad$ $x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2$;

$x_1 / x_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$; $\qquad$ $x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$;

$x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$; $\qquad$ $x_1 \sim x_2 = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$.

У справедливості цих формул легко переконатися за допомогою таблиці істинності.

Закони бульової алгебри та її властивості надають можливість виконувати перетворювання логічних виразів з метою побудови найбільш простих (компактних) формул.

В п р а в а. Довести справедливість формул поглинання:

$$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1; \qquad x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1.$$

Д о в е д е н н я

$$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 + x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1;$$
$$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1.$$

П р и к л а д. Спростити:

$$((x_1 \downarrow x_2) / x_3) \to (x_1 \to x_3).$$

Р о з в я з а н н я

$$((\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) / x_3) \to (\bar{x}_1 + x_3) = (\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 + x_3) =$$
$$= \overline{\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \bar{x}_3} + \bar{x}_1 + x_3 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 + x_3 =$$
$$= \bar{x}_1 + x_3 (1 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) = \bar{x}_1 + x_3.$$

В і д п о в і д ь: $\bar{x}_1 + x_3$.

2.2.6 Нормальні форми бульових функцій

В и з н а ч е н н я. ***Елементарною диз'юнкцією*** (***кон'юнкцією***) називається диз'юнкція (кон'юнкція) скінченного числа бульових змінних, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу в прямому чи інверсному вигляді. Наприклад:

$x_1 + \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4$ – елементарні диз'юнкції;

$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$, $\bar{x}_5 \cdot x_7 \cdot \bar{x}_9 \cdot x_{10}$ – елементарні кон'юнкції.

В и з н а ч е н н я**.** ***Диз'юнктивною нормальною формою*** (***кон'юнктивною нормальною формою***) називається формула, яка містить диз'юнкцію (кон'юнкцію) скінченного числа різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

Позначення: д. н. ф., к. н. ф.

Наприклад: $x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 x_3$, $x_1 \cdot x_5 + \bar{x}_6$ – д. н. ф.;

$$(x_1 + x_2) \cdot \bar{x}_3, \ (\bar{x}_1 + x_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_4) \cdot (x_2 + x_5) \text{ – к. н. ф.}$$

В и з н а ч е н н я. Д. н. ф. (к. н. ф.) називається ***досконалою*** і позначається д. д. н. ф. (д. к. н. ф.), якщо в кожній її елементарній кон'юнкції (диз'юнкції) подано всі змінні.

Наприклад: $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ − д. д. н. ф.;

$$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4) \text{ − д. к. н. ф.}$$

Для того щоб привести формулу до д. д. н. ф., потрібно:

– за допомогою законів та властивостей бульової алгебри привести її до д. н. ф.;

– якщо в елементарній кон'юнкції не міститься змінної x_i із загальної кількості змінних, які входять до даної формули, додати до цієї кон'юнкції співмножник $x_i + \bar{x}_i$ і розкрити дужки;

– з однакових елементарних кон'юнкцій вилучити всі, окрім однієї.

Наприклад:

$$x_1x_2 + \bar{x}_3 = x_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) + (x_1 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2)\bar{x}_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3. \qquad \text{− д. д. н. ф.}$$

Для того щоб привести формулу до д. к. н. ф., доцільно спочатку привести її до д. н. ф., а потім від д. н. ф. перейти до к. н. ф. в такий спосіб.

Нехай д. н. ф. має вигляд

$$f = c_1 + c_2 + \ldots + c_m, \text{ де } c_i \text{ – елементарні кон'юнкції, } i = \overline{1, m}.$$

Формулу $\overline{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}$ приведемо до д. н. ф. $k_1 + k_2 + \ldots + k_l$, де k_i – елементарні кон'юнкції. Тоді

$$f = \overline{\overline{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}} = \overline{k_1 + k_2 + \ldots + k_l} = \overline{k_1} \cdot \overline{k_2} \cdot \ldots \cdot \overline{k_l}\ .$$

Застосовуючи правило де Моргана, перетворимо елементарні кон'юнкції $\overline{k_i}$ на елементарні диз'юнкції D_i, де $i = \overline{1, k}$. Отже, дістанемо к. н. ф.

$$f = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_l.$$

І, врешті, використовуючи закон суперечності та другий дистрибутивний закон, зробимо перехід від к. н. ф. до д. к. н. ф.

Наприклад:

1) $\overline{x_1x_2x_3} \cdot (x_1x_2 \to x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\overline{x_1 \cdot x_2} + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) =$

$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot$$
$$\cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) =$$
$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 \cdot \bar{x}_3) =$$
$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) =$$
$$= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3); \qquad \text{− д. к. н. ф.}$$

2) $x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2}} = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_2}} = \overline{(\bar{x}_1 + x_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_2)} =$
$= \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1 x_2} = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} \cdot \overline{x_1 x_2} = (x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$ − д. к. н. ф.

В и з н а ч е н н я. Елементарна диз’юнкція (кон’юнкція), яка містить усі змінні, називається ***конституентою нуля*** (***одиниці***). Наприклад, якщо загальна кількість змінних $n = 3$, то $\bar{x}_1 + x_2 + x_3$ – конституента нуля, а $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ – конституента одиниці.

Вочевидь, що конституента нуля перетворюється на нуль лише за одного набору значень змінних. У нашому прикладі конституенті нуля відповідає набір (1, 0, 0). Аналогічно, конституента одиниці перетворюється на одиницю також лише за одного набору. Наприклад, конституенті одиниці $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ відповідає набір (1, 0, 1).

Оскільки для заданої бульової функції її д. д. н. ф. являє собою диз’юнкцію конституент одиниці, а її д. к. н. ф. − це кон’юнкція конституент нуля, то дана функція перетворюється на одиницю чи нуль лише за відповідних цим конституентам наборів значень змінних. Справедливе є і зворотне твердження.

Це дозволяє за заданою таблицею істинності булевої функції одразу записати її досконалі нормальні форми і, навпаки, за заданою д. н. ф. − скласти таблицю істинності.

Досконалі форми для функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ позначають:

для д. д. н. ф. – $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{1}{\vee}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$;

для д. к. н. ф. – $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{0}{\wedge}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$,

де символ $\underset{1}{\vee}$ або $\underset{0}{\wedge}$ позначає, що диз’юнкція або кон’юнкція виконуються за відповідними конституентами.

П р и к л а д. Знайти досконалі нормальні форми для функції Вебба.

Р о з в ‘ я з а н н я

x_1	x_2	$y = \psi_8$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\psi_8 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ – д. д. н. ф.

$\psi_8 = (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ – д. к. н. ф.

П р и к л а д. Перетворити функцію $y = \{0, 3, 5\}_{x_1 x_2 x_3}$ на д. д. н. ф.

Р о з в ‘ я з а н н я

$y = \{(0,0,0), (011), (101)\}_{x_1 x_2 x_3} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3$ – д. д. н. ф.

П р и к л а д. Для функції, заданої власною д. к. н. ф.

$$y = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3),$$

скласти таблицю істинності.

Р о з в ‘ я з а н н я

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2.3 Алгебра Жегалкіна та її основні закони

В и з н а ч е н н я. ***Алгеброю Жегалкіна*** називається множина логічних функцій з операціями кон’юнкція, додавання за модулем 2 і константа 1, тобто алгебра, базисом якої є система функцій $\{1, \bullet, \oplus\}$.

Подамо основні закони цієї алгебри:

1) комутативний:

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1; \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3; \qquad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$$x_1 (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3;$$

4) ідемпотентний:

$$x \cdot x = x;$$

5) закон приведення подібних членів:

$$x \oplus x = 0.$$

В алгебрі Жегалкіна мають місце такі властивості:

$$x \oplus 0 = x; \qquad x \cdot 0 = 0; \qquad x \cdot 1 = x.$$

Решта операцій алгебри логіки виражаються через базис цієї алгебри в такий спосіб:

$$\bar{x} = x \oplus 1; \quad x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; \quad x_1 \sim x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2;$$
$$x_1 \rightarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2; \quad x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \oplus x_1 \cdot x_2;$$
$$x_1 \downarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; \quad x_1 / x_2 = 1 \oplus x_1 \cdot x_2.$$

В и з н а ч е н н я. Функція алгебри Жегалкіна, подана у вигляді суми за модулем 2 добутків незалежних змінних, називається канонічним многочленом, або ***поліномом Жегалкіна***.

Наприклад, $y = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$ – поліном Жегалкіна.

Лінійна функція

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n,$$

де $c_i \in \{0; 1\}$, $i = \overline{0, n}$, є окремим випадком полінома Жегалкіна.

Можна довести, що для кожної функції алгебри логіки існує єдиний поліном Жегалкіна.

Якщо бульову функцію задано у вигляді д. д. н. ф., то для здобуття многочлена Жегалкіна треба: знак „+” замінити знаком „⊕”, заперечення $\bar{x}$ замінити на вираз $x \oplus 1$, розкрити дужки і зробити всі можливі спрощення.

П р и к л а д.

$$x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) =$$
$$= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2.$$

2.4 Функція Вебба та штрих Шеффера

При розробці багатьох схем електронних пристроїв та вузлів дискретної автоматики використовуються логічні елементи, які реалізують функцію Вебба та функцію Шеффера.

Як було зазначено раніш, кожну з цих функцій можна використовувати як базис алгебри логічних функцій.

Функція Вебба:

$$\bar{x} = x \downarrow x; \quad x_1 + x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow 0; \quad 1 = (x \downarrow \bar{x}) \downarrow 0;$$
$$0 = x \downarrow \bar{x}; \quad x_1 \cdot x_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2); \quad \bar{x} = x \downarrow 0.$$

Функція Шеффера:

$$\bar{x} = x / x; \quad x_1 + x_2 = (x_1 / 1) / (x_2 / 1); \quad 1 = x / \bar{x};$$
$$0 = (x / \bar{x}) / 1; \quad x_1 \cdot x_2 = (x_1 / x_2) / 1; \quad \bar{x} = x / 1.$$

Отже, як і в бульовій алгебрі, кожну функцію чи операцію можна розкласти і в алгебрі Вебба, і в алгебрі Шеффера.

2.5 Мінімізація бульових функцій

Одна й та сама функція алгебри логіки може бути подана в певному базисі по-різному. Тому, наприклад, при побудові економних схем цифрових автоматів виникає проблема подання логічних функцій у мінімальній формі.

В и з н а ч е н н я. ***Мінімальною д. н. ф.*** (***к. н. ф.)*** бульової функції називається така д. н. ф. (к. н. ф.), котра містить найменше число елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) та змінних у них стосовно решти д. н. ф. (к. н. ф.), які представляють дану функцію.

В інженерній практиці найчастіше мінімізується число змінних (число літер) у д. н. ф. (к. н. ф.).

Нині розроблено чималу кількість методів (способів, прийомів) мінімізації в класі нормальних форм. Нижче розглянемо лише один з них − метод Квайна−Мак-Класкі мінімізації д. д. н. ф., який ґрунтується на систематичному застосовуванні операцій склеювання та поглинання:

$$k \cdot x + k \cdot \overline{x} = k, \quad k + k \cdot x = k, \quad k + k \cdot \overline{x} = k,$$

де k – елементарна кон'юнкція.

В и з н а ч е н н я. Бульова функція $g\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***імплікантою*** функції $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо вона перетворюється на одиницю при наборі змінних, на якому сама функція також дорівнює одиниці. Коротше кажучи, якщо $g = 1$, то й $f = 1$.

З означення випливає, що кожна конституента одиниці, яка входить до складу д. д. н. ф., або їхня диз'юнкція є імплікантою певної бульової функції.

В и з н а ч е н н я. Імпліканта g називається ***простою***, якщо жодна її частина не може бути імплікантою функції f.

П р и к л а д. Для функції

$$f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3$$

знайти всі імпліканти.

Р о з в ' я з а н н я

x_1	x_2	x_3	f	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

$g_1 = x_1x_2x_3$;

$g_2 = x_1x_2\overline{x}_3$;

$g_3 = \overline{x}_1x_2x_3$;

$g_4 = x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 = x_1x_2$;
$g_5 = \overline{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 = x_2x_3$;
$g_6 = \overline{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3$;
$g_7 = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 = f$.

Імпліканти $g_4 = x_1x_2$ та $g_5 = x_2x_3$ є простими, решта – ні.

Можна довести, що кожна бульова функція є еквівалентна до диз'юнкції власних простих імплікант.

Бульову функцію, зображену за допомогою простих імплікант, називатимемо ***скороченою*** д. н. ф. Пошук мінімальної д. н. ф. здійснюється серед скорочених д. н. ф. шляхом їхнього простого перебирання.

У розглянутому прикладі скорочена д. н. ф. має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = g_4 + g_5 = x_1x_2 + x_2x_3.$$

Оскільки інших скорочених д. н. ф. немає, то ця форма й буде мінімальною.

Метод Квайна−Мак-Класкі виконується в три етапи:

1) знаходження простих імплікант;
2) пошук скорочених д. н. ф.;
3) вибір з цих форм мінімальної.

Без обмеження спільності розглянемо його на конкретному прикладі. Нехай треба мінімізувати логічну функцію, задану таблицею істинності

x_1	x_2	x_3	x_4	f	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Перший етап: знаходження простих імплікант. На першому кроці цього етапу слід виписати з таблиці істинності конституенти одиниці, розміщуючи їх за групами (див. 1-й крок в таблиці). Номер групи N відповідає кількості одиниць у конституенті; N може набувати значення від 0 до n, де n − загальна кількість змінних.

На другому кроці цього етапу виконаємо поелементне порівняння конституент (початкових імплікант) сусідніх груп, тобто здійснимо склеювання. Конституента 1-ї групи (0100) склеюється за змінною x_4 з конституентою 2-ї групи (0101) і за змінною x_1 − з конституентою 2-ї групи (1100). Конституента 2-ї групи (0011) склеюється за змінною x_2 з конституентою 3-ї групи (0111) і за змінною x_1 − з конституентою (1011) цієї ж групи тощо.

Результат склеювання, тобто загальну частину конституент, запишемо в наступний стовпець, роблячи прочерк «–» на місці вилученої змінної (2-й крок в таблиці). Конституенти, які брали участь в операції склеювання, позначимо символом «*»

1-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	0
2	*	0	0	1	1
	*	0	1	0	1
	*	1	0	0	1
	*	1	1	0	0
3	*	0	1	1	1
	*	1	0	1	1
	*	1	1	0	1

2-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	–
	*	–	1	0	0
2		0	–	1	1
		–	0	1	1
		0	1	–	1
	*	–	1	0	1
		1	0	–	1
		1	–	0	1
	*	1	1	0	–

3-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1		–	1	0	–
Прості імпліканти					
		–	1	0	–
		0	–	1	1
		–	0	1	1
		0	1	–	1
		1	0	–	1
		1	–	0	1

Якщо початкова імпліканта (1-й крок) мала *n* змінних (розрядів), то кожна імпліканта 2-го кроку має $n – 1$ змінну. Імпліканти 2-го кроку знову піддаються операції склеювання. При цьому склеюванню підлягають імпліканти сусідніх груп, в яких в одній і тій самій позиції стоїть символ «–». Після цього кроку дістаємо імпліканти, які містять $n – 2$ змінних і т. і., допоки подальше склеювання стає неможливим.

Виписавши тепер з усіх кроків непозначені символом «*» імпліканти, дістанемо сукупність простих імплікант.

Другий етап: пошук скорочених д. н. ф. З цією метою складемо імплікантну таблицю

Конституенти / Прості імпліканти	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$g_1 = x_2\bar{x}_3$	*		*		*			*
$g_2 = \bar{x}_1x_3x_4$		*				*		
$g_3 = \bar{x}_2x_3x_4$		*					*	
$g_4 = \bar{x}_1x_2x_4$			*			*		
$g_5 = x_1\bar{x}_2x_4$				*			*	
$g_6 = x_1\bar{x}_3x_4$				*				*

Кожен рядок цієї таблиці відповідає простій імпліканті, а кожен стовпець – початковій імпліканті (конституенті). Якщо проста імпліканта поглинає (накриває) конституенту одиниці, тобто є її частиною, то відповідна клітина матриці позначається символом «∗». Потім відшукаємо стовпці імплікантної таблиці, які мають лише по одній позначці. Такі позначки обводимо кружечком. Відповідні цим позначкам прості імпліканти називаються базисними і становлять так зване ядро бульової функції, яке неодмінно входить до скороченої д. н. ф.

Після цього розглянемо різні варіанти вибору сукупності простих імплікант, які спільно накриють позначками інші клітини рядка імплікантної таблиці. Ці імпліканти разом з ядром утворять скорочену д. н. ф.

З таблиці видно, що скороченими д. н. ф. для заданої функції f будуть:

1) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$;
2) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_6$;
3) $f = g_1 + g_2 + g_5$;
4) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_5$;
5) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_6$.

Третій етап: вибір мінімальної форми. Серед цих скорочених д. н. ф. обирається та, яка задовольняє критерію мінімальності. При цьому враховуються економічні та технічні чинники її реалізації в конкретному цифровому пристрої. У нашому прикладі мінімальна д. н. ф. має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 + g_2 + g_5 = x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_3 x_4 + x_1 \overline{x}_2 x_4 .$$

Якщо винести за дужки x_4, здобудемо більш простий вираз:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\overline{x}_3 + x_4\left(\overline{x}_1 x_3 + x_1\overline{x}_2\right),$$

який містить менше число змінних (літер). Така форма подання функції називається дужковою.

Технічну реалізацію цих форм даної функції подано на рис. 2.9.

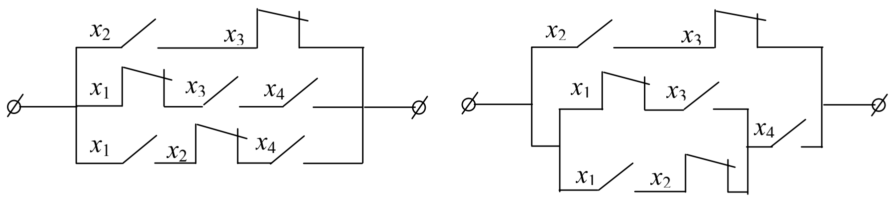


Рисунок 2.9. Різні реалізації мінімальної д. н. ф.

ЗАУВАЖЕННЯ. Метод Квайна−Мак-Класкі можна використовувати і для здобуття мінімальної к. н. ф. Для цього слід розглянути значення функції $f = 0$ і конституенти одиниці, які відповідають цим значенням.

В наслідок дістанемо

$$\bar{f} = \underset{1}{\mathrm{V}}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Потім треба виконати мінімізацію відповідно до вищевикладеного методу. Застосувавши формули де Моргана до дістаної мінімальної д. н. ф. для функції $\bar{f}$, знайдемо мінімальну к. н. ф. для функції f.

2.6 Багатозначна бульова алгебра

Розглянута вище бульова алгебра, яка схарактеризовує об’єкти з двома можливими станами, є лише окремим випадком широкого класу багатозначних бульових алгебр. Наприклад, алгебра множин є бульовою алгеброю стосовно операцій диз’юнкції та кон’юнкції.

У багатозначній бульовій алгебрі змінні позначаються великими літерами: A, B, C тощо. Роль одиниці та нуля відіграють відповідно початкова множина U (універсум) і порожня множина $\varnothing$. Бульові змінні A, B, C, ... є певними підмножинами універсальної множини U. Елементи, які складають множину, позначаються малими літерами латинської абетки: a, b, c, x, y тощо.

Основними логічними операціями багатозначної бульової алгебри є: заперечення (доповнення, протилежна множина); диз’юнкція (об’єднання, додавання); кон’юнкція (переріз, добуток).

Диз’юнкція множин A та B являє собою множину таких елементів, кожний з яких належить хоча б до однієї з множин − A або B. Наприклад, якщо

$$A = \{a, b, c\},\ B = \{b, c, d\},\ \text{то}\ A + B = \{a, b, c, d\}.$$

Кон’юнкція множин A та B являє собою множину таких елементів, які водночас належать як до множини A, так і до множини B. Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, то $AB = \{2, 3\}$.

Заперечення множини A являє собою таку множину $\overline{A}$, яка при додаванні з A утворить універсум U, тобто

$$A + \overline{A} = U.$$

Для графічної ілюстрації бульових операцій часто використовують діаграми Ейлера−Венна (рис. 2.10), на яких прямокутник означає універсум U, а затемнені області − результат застосовування операції до множин A та B.

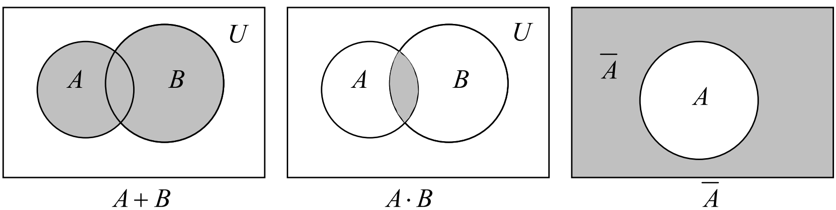


Рисунок 2.10. Графічна ілюстрація операцій диз’юнкція, кон’юнкція та заперечення

У кожній багатозначній бульовій алгебрі мають місце такі основні закони:

1) комутативний:

$$A + B = B + A; \quad A \cdot B = B \cdot A;$$

2) асоціативний:

$$A + (B + C) = (A + B) + C; \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

3) дистрибутивний:

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ − перший дистрибутивний закон;

$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ − другий дистрибутивний закон;

4) ідемпотентний:

$$A + A = A; \quad A \cdot A = A;$$

5) інверсний (формули де Моргана):

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}\ ; \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}\ ;$$

6) закон вилучення третього (для диз’юнкції) і закон суперечності (для кон’юнкції):

$$A + \overline{A} = U; \quad A \cdot \overline{A} = \varnothing.$$

У бульовій алгебрі мають місце такі властивості:

$$\overline{\varnothing} = U; \quad \overline{U} = \varnothing; \quad A + \varnothing = A; \quad A + U = U;$$

$$A \cdot \varnothing = \varnothing; \qquad A \cdot U = A; \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Багатозначна бульова алгебра використовується в багатьох галузях науки і техніки. Наприклад, у техніці зв’язку – при дослідженні дискретних сигналів зі скінченним числом станів. Вона використовується також у термінах алгебри випадкових подій при вивченні курсу теорії ймовірностей.

Розділ 3

ТЕОРІЯ ГРАФІВ

3.1 Графи та відношення

3.1.1 Основні відомості

Теорія графів – потужний апарат для розв’язування прикладних завдань найрізноманітніших галузей науки й техніки, до яких належать, наприклад: аналіз та синтез електричних кіл та систем, проектування мереж зв’язку та дослідження скінченних автоматів, мережне планування й керування, вибір оптимальних маршрутів та потоків у мережах, моделювання життєдіяльності й нервової системи в живих організмах тощо.

Початок теорії графів як математичної дисципліни було покладено Ейлером у його відомих міркуваннях щодо кенігсберзьких мостів. Однак ця стаття Ейлера, опублікована 1736 року була єдиною упродовж майже 100 років. Інтерес до проблем теорії графів відродився близько середини XIX сторіччя і був зосереджений переважно в Англії. Існувало чимало причин для такого пожвавлення вивчення графів. Природничі науки вплинули на це завдяки дослідженням електричних мереж, моделей кристалів та структур молекул. Розвинення формальної логіки призвело до вивчення бінарних відношень у формі графів.

Величезна кількість популярних головоломок формулювалися безпосередньо в термінах графів. Найвідоміше з-посеред цих задач – проблема чотирьох фарб − уперше поставлена перед математиками де Морганом приблизно 1850 року (задача щодо визначення кількості припустимих фарб для розфарбування розбиття будь-якої площини так, щоб ніякі суміжні області не були однакового кольору). Жодна інша проблема теорії графів не породжувала стільки численних, часто дотепних робіт.

У разі потреби подавання в наочній формі системи взаємопов’язаних об’єктів звертаються до такої побудови: на площині чи у просторі обирають кілька точок і певні пари з цих точок поєднують лініями. Об’єкт, здобутий у наслідок такої побудови, називається ***графом***.

За приклади графів можуть слугувати блок-схема алгоритму, з’єднання в електричній схемі, мережа шляхів поміж населеними пунктами.

Одну й ту саму систему об’єктів та зв’язків між ними можна відобразити по-різному, застосовуючи наведену вище побудову: у різні способи розміщувати точки, за їхні з’єднувальні лінії брати ті чи інші криві тощо.

Більш того, можна взагалі не зображати, а зазначити систему зв’язків об’єктів у якій завгодно іншій формі, наприклад у словесній. Це міркування засвідчує, що потрібне визначення графа як певного формального об’єкта, який можна подавати наочно у всілякі способи.

3.1.2 Визначення графа

Стверджуватимемо, що задано ***скінченний неорієнтований граф***, якщо задано такі два об’єкти:

1) скінчена не порожня множина $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$; елементи цієї множини називають ***вершинами графа***;

2) деяка множина ***неувпорядкованих*** пар елементів з $\boldsymbol{X}$; ця множина позначається $\boldsymbol{U}$, її елементи називають ***ребрами.***

Той факт, що граф означується парою множин $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{U}$, записують у вигляді $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$.

За наочного подавання графа вершини зображуються ***точками***, ребра – ***лініями***, які з’єднують точки.

П р и к л а д. $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$, де $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5\}$;
$\boldsymbol{U} = \{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}, \{\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}, \{\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5\}\}$.

Наочно цей граф зображено на рис. 3.1.

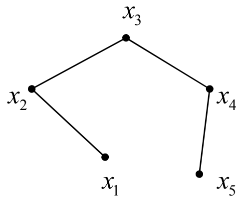


Рисунок 3.1.
Приклад графа

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо $\boldsymbol{u}_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ – ребро графа, то стверджують, що ребро $\boldsymbol{u}_1$ з’єднує вершини $\boldsymbol{x}_1$ та $\boldsymbol{x}_2$.

Поряд із наведеним визначенням графа можливі й інші визначення графа.

Іноді виникає потреба розглядати графи. в яких одну й ту саму пару вершин з’єднує кілька ребер. Такі графи називаються ***мультиграфами*** (рис. 3.2).

Можливі також графи, в яких певні ребра можуть мати збіжні кінці. Такі ребра називають ***петлями*** (рис. 3.3).

У більшості додатків теорії графів можна відкидати петлі й замінювати кратні ребра на одне ребром. Тому надалі подане вище визначення буде головним і словом ***„граф”*** позначатимемо ***скінченний неорієнтований граф без петель і кратних ребер*** (його ще називають ***простим***, або ***звичайним***) (рис. 3.4).

Граф з петлями і кратними ребрами називається ***псевдографом*** (рис. 3.5).

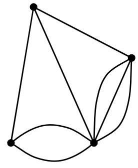


Рисунок 3.2.
Мультиграф

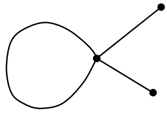


Рисунок 3.3.
Граф з петлею

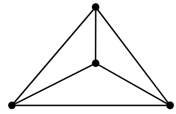


Рисунок 3.4.
Простий граф

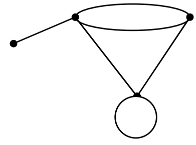


Рисунок 3.5.
Псевдограф

3.1.3 Орієнтовані графи

Поняття ***орієнтованого*** графа (***орграфа***) виникає, якщо ребрам графа надати напрямок (тобто орієнтацію) в такий спосіб, що один з кінців ребра буде початком, а інший – кінцем.

Стверджуватимемо, що задано орієнтований граф, якщо зазначено два об’єкти:

1) не порожня скінчена множина ***X*** – вершини графа;
2) множина ***U***, утворена з ***упорядкованих*** пар вершин.

Елементи множини ***U*** називають ***дугами***. Дуга орієнтованого графа зображується відрізком із зазначенням напрямку (стрілкою) (рис. 3.6).

Рисунок 3.6. Зображення орієнтації дуг

П р и к л а д орієнтованого графа. $\boldsymbol{G = (X, U)}$, де $\boldsymbol{X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}}$; $\boldsymbol{U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5)\}}$.

Граф ***G*** зображено на рис. 3.7.

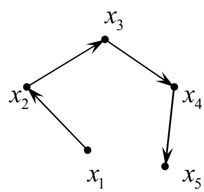


Рисунок 3.7. Зображення орграфа ***G***

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо $\boldsymbol{u_1} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ – дуга орграфа, то стверджують, що дуга $\boldsymbol{u_1}$ виходить з вершини $\boldsymbol{x_1}$ і закінчується у вершині $\boldsymbol{x_2}$.

3.1.4 Найпростіші поняття теорії графів

Нехай задано граф $\boldsymbol{G = (X, U)}$.

Про ребро $\boldsymbol{u = \{x, y\}}$ цього графа стверджують, що воно з’єднує вершини ***x*** та ***y***.

Дві вершини, з’єднані ребром, називаються ***суміжними***, якщо вони є кінцями одного ребра.

Про ребро $\boldsymbol{u = \{x, y\}}$ та вершину ***x*** стверджують, що вони є ***інцидентні***. Те ж саме можна сказати й про ребро $\boldsymbol{u = \{x, y\}}$ та вершину ***y***.

Далі позначатимемо кількість вершин графа − літерою ***n***, а кількість ребер графа − літерою ***m***: $\boldsymbol{|X| = n}$, $\boldsymbol{|U| = m}$. Це основні ***числові характеристики*** *графа*.

Кількість ребер, інцидентних до певної вершини ***x***, називається ***степенем*** цієї вершини і позначається $\boldsymbol{\delta(x)}$, або $\mathbf{deg}(\boldsymbol{x})$.

Вершина, в якої степінь дорівнює 0, називається ***ізольованою*** (вершина $\boldsymbol{x}$ рис. 3.8). Вершини, які мають степінь 1, називаються ***висячими***, або ***кінцевими*** (вершина $\boldsymbol{x}$ рис. 3.9).

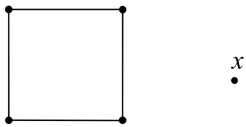


Рисунок 3.8.
Граф з ізольованою вершиною $\boldsymbol{x}$

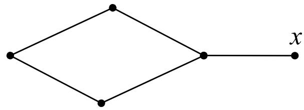


Рисунок 3.9.
Граф з висячою вершиною $\boldsymbol{x}$

Справедливими є два такі простих твердження.

Теорема 1. Сума степенів усіх вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер.

Д о в е д е н н я

Кожне ребро двічі входить до суми, звідки й випливає твердження.

Теорема 2. У кожному графові число вершин, які мають непарний степінь, є парне.

Д о в е д е н н я

Нехай $\boldsymbol{X_1} \subseteq \boldsymbol{X}$ – множина вершин непарного степеня; $\boldsymbol{X_2} \subseteq \boldsymbol{X}$ – множина вершин парного степеня. Зазначимо, що

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_1} \bigcup \boldsymbol{X_2}; \qquad \boldsymbol{X_1} \bigcap \boldsymbol{X_2} = \varnothing,$$

отже

$$\sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{x \in X_1} \delta(x) + \sum_{x \in X_2} \delta(x).$$

Тоді

$$\sum_{x \in X_1} \delta(x) = \sum_{x \in X} \delta(x) - \sum_{x \in X_2} \delta(x).$$

Вочевидь, що $\sum\limits_{x \in X_2} \delta(x)$ є парна як сума парних чисел: $\sum\limits_{x \in X} \delta(x)$ − парна відповідно до теореми 1. Отже, $\sum\limits_{x \in X_1} \delta(x)$ – парна, що й треба було довести.

Для орієнтованих графів замість степеня вершини $\boldsymbol{x}$ вводять поняття ***півстепенів:*** додатні $\boldsymbol{\delta_+(x)}$ й від'ємні $\boldsymbol{\delta_-(x)}$ півстепені вершини $\boldsymbol{x}$.

$\boldsymbol{\delta_+(x)}$ − число дуг, які входять до вершини $\boldsymbol{x}$;

$\boldsymbol{\delta_-(x)}$ − число дуг, які виходять з вершини $\boldsymbol{x}$.

Граф, який не має ребер ($\boldsymbol{U} = \varnothing$), називається ***порожнім***. Усі вершини порожнього графа є ***ізольовані***.

Граф, в якому кожна пара вершин з'єднана ребром, називається ***повним.***

Повний ***n***-вершинний граф позначається $\boldsymbol{K_n}$; для кожної його вершини ***x*** маємо $\delta\,(\boldsymbol{x}) = n - 1$ (рис. 3.10).

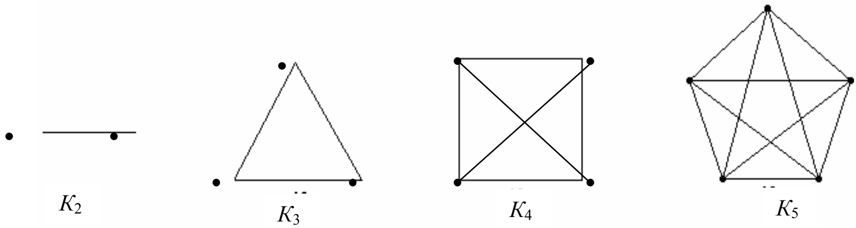


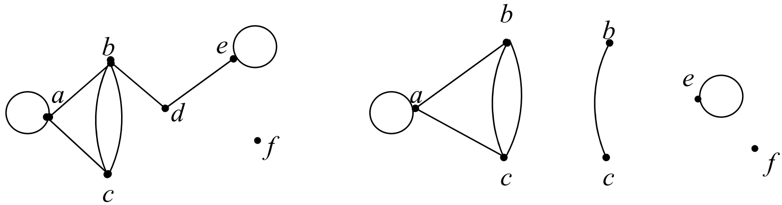
Рисунок 3.10. Повні графи

3.1.5 Підграфи

Нехай задано граф $\boldsymbol{G = (X, U)}$.

В и з н а ч е н н я. Граф $\boldsymbol{G_1 = (X_1, U_1)}$ називається ***підграфом*** графа $\boldsymbol{G = (X, U)}$, якщо $\boldsymbol{X_1 \subseteq X}$ та $\boldsymbol{U_1 \subseteq U}$.

Якщо вилучити з графа певні ребра та вершини, дістанемо підграфи вихідного графа.



Граф $\boldsymbol{G}$; підграф $\boldsymbol{G_1}$; підграф $\boldsymbol{G_2}$.

Рисунок 3.11. Підграфи графа ***G***

Граф $\boldsymbol{G_1 = (X_1, U_1)}$ називається ***кістяковим підграфом графа*** $\boldsymbol{G = (X, U)}$, якщо $\boldsymbol{X_1 = X}$ та $\boldsymbol{U_1 \subseteq U}$.

Кістяковий підграф здобудемо, якщо в графі ***G*** вилучимо частину ребер, не зачіпаючи вершин.

Відокремимо в графі ***G*** певну підмножину вершин $\boldsymbol{A \subseteq X}$.

Нехай $\boldsymbol{U_A}$ означує множину ребер графа ***G***, обидва кінці яких належать до множини ***A***. Підграф $\boldsymbol{G_A = (A, U_A)}$ називають підграфом, породженим множиною вершин ***A***.

3.1.6 Способи задання графів

1) ***Скінченний граф може бути задано переліком його елементів***, тобто ***за визначенням*** (елементи позначаються латинськими літерами з індексами або просто натуральними числами).

П р и к л а д задання графа переліком його елементів.

$\boldsymbol{G = (X, U)}$; $\boldsymbol{X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$;

$\boldsymbol{U = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{6, 6\}, \{6, 7\}\}}$.

Такий метод не є наочний, що утруднює виявлення характеристик графа.

2) ***Геометричне задання графа***

Кожен граф може бути задано геометрично у тривимірному просторі, але не завжди його можна зобразити на площині так, щоб ребра перетинались тільки в вершинах. Граф, який може бути зображено на площині, називається ***планарним*** (рис. 3.12).

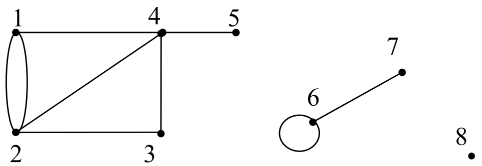


Рисунок 3.12. Планарний граф

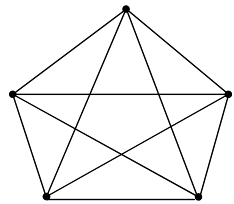


Рисунок 3.13. Непланарний граф

Не є планарним повний граф з п’ятьма вершинами (рис. 3.13).

3) ***Матричне задання графа***

Не завжди зручно задавати граф у тому вигляді, як це зазначено вище. Наприклад, при опрацюванні графа на комп’ютері його зручно зображати в матричній формі.

1) Розглянемо $\boldsymbol{G = (X, U)}$ – орграф, де

$$\boldsymbol{X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}; \quad \boldsymbol{U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}}.$$

Скінченний орієнтований граф задається матрицями суміжності та інцидентності.

Матрицею ***суміжності*** орграфа $\boldsymbol{G}$ називається квадратна матриця $A(\boldsymbol{G}) = [a_{ij}]$ порядку n, в якої:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\right) \in \boldsymbol{U}; \\ 0, \text{ якщо } \left(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\right) \notin \boldsymbol{U}. \end{cases}$$

Матрицею ***інцидентності*** (або матрицею ***інциденцій***) орграфа $\boldsymbol{G}$ називається матриця $B(\boldsymbol{G}) = [b_{ij}]$ порядку $n \times m$, в якої елементи:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є кінцем дуги } \boldsymbol{u}_j; \\ -1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є початком дуги } \boldsymbol{u}_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ не є інцидентна до дуги } \boldsymbol{u}_j. \end{cases}$$

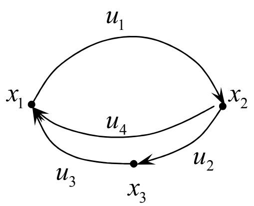


Рисунок 3.14. Орграф $\boldsymbol{G}$

П р и к л а д. Розглянемо орграф $\boldsymbol{G}$, який задано геометрично.

Для нього матриця суміжності матиме вигляд

$$A(\boldsymbol{G}) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця інцидентності матиме вигляд

$$B(\boldsymbol{G}) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2) Розглянемо $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$ – скінченний неорієнтований граф, де

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}; \quad \boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}.$$

Матрицею ***суміжності*** графа $\boldsymbol{G}$ називається квадратна матриця $A(\boldsymbol{G}) = [a_{ij}]$ порядку n, в якої:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \in \boldsymbol{U}; \\ 0, \text{ якщо } (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \notin \boldsymbol{U}. \end{cases}$$

Матрицею ***інцидентності*** графа $\boldsymbol{G}$ називається матриця $B(\boldsymbol{G}) = [b_{ij}]$, порядку $n \times m$, в якої:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є інцидентна до ребра } \boldsymbol{u}_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ не є інцидентна до ребра } \boldsymbol{u}_j. \end{cases}$$

П р и к л а д. Розглянемо граф $\boldsymbol{G}_1$, заданий геометрично (рис. 3.15).

Тоді матриця суміжності $A(\boldsymbol{G}_1)$ матиме вигляд

$$A(\boldsymbol{G}_1) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця інцидентності матиме вигляд

$$B(\boldsymbol{G}_1) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

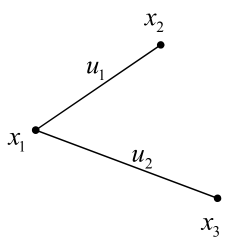


Рисунок 3.15. Граф $\boldsymbol{G}_1$

ЗАУВАЖЕННЯ. Матрицю суміжності можна визначити і для псевдографів. Тоді в разі орієнтованого (неорієнтованого) псевдографа $a_{ij} = k$, де k – кратність дуги $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_j})$ (ребра $\{\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_j}\}$) у цьому псевдографі.

Визначення матриці інцидентності без змін переносяться і на довільні мультиграфи (орієнтовані й неорієнтовані) і навіть на неорієнтовані псевдографи.

П р и к л а д. Нехай задано геометрично орієнтований псевдограф $\boldsymbol{G}$ (рис. 3.16).

Тоді матриця суміжності $A(\boldsymbol{G})$ матиме вигляд

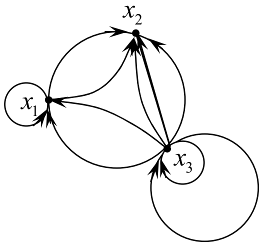


Рисунок 3.16.
Орієнтований псевдограф

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Матриця суміжності для звичайних графів і матриця інцидентності для будь-яких графів задає граф однозначно.

Нескладно з'ясувати, що матриця $A(\boldsymbol{G})$ є симетричною для кожного неорієнтованого графа $\boldsymbol{G}$. Матриця $A(\boldsymbol{G})$, де $\boldsymbol{G}$ – орграф, у загальному випадку не є симетричною.

За допомогою матриць зручно задавати графи (орграфи) для опрацювання на комп'ютері. Однак слід зазначити, що за великої кількості вершин матриця суміжності стає громіздкою. Те саме можна сказати і про матрицю інцидентності, причому її розміри залежать, окрім того, й від кількості ребер (дуг) графа.

3.1.7 Ізоморфізм графів

При визначенні будь-якого математичного поняття домовляються, які об'єкти вважати за однакові й які треба розрізнювати.

Ізоморфні об'єкти – це такі об'єкти, які в подальшій теорії не розрізнюються і розглядаються як один об'єкт.

Наприклад, два графи $\boldsymbol{G_1}$ та $\boldsymbol{G_2}$, зображені на рис. 3.17, відрізняються лише позначанням вершин і способом розміщення на площині.

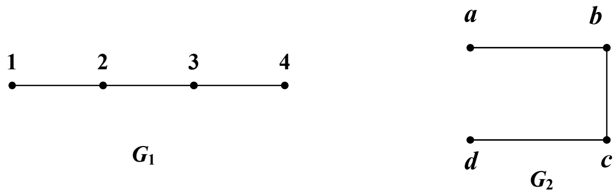


Рисунок 3.17. Ізоморфні графи

Якщо в графі $\boldsymbol{G_2}$ перепозначити вершини за схемою **a – 1**; **b – 2**; **c – 3**; **d – 4**, то множина вершин і ребер у графах $\boldsymbol{G_2}$ та $\boldsymbol{G_2}$ збігатиметься й матимемо той самий граф.

В и з н а ч е н н я. Графи $\boldsymbol{G_1 = (X_1, U_1)}$ та $\boldsymbol{G_2 = (X_2, U_2)}$ називаються ***ізоморфними***, якщо поміж множинами їхніх вершин можна встановити взаємнооднозначну відповідність, за якої кожні дві вершини є суміжні в одному з графів тоді й лише тоді, коли відповідні їм вершини є суміжні в іншому графі.

П р и к л а д. Графи $\boldsymbol{G_1}$ та $\boldsymbol{G_2}$, які зображені на рис. 3.18, є ізоморфні.

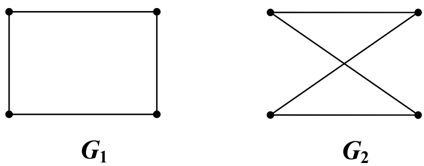


Рисунок 3.18. Ізоморфні графи

3.1.8 Зв'язок графа з відношенням

Якщо на певній множині $\boldsymbol{M}$ задано бінарне відношення $\boldsymbol{R \subseteq M \times M}$, то $\boldsymbol{R}$ можна зобразити як граф $\boldsymbol{G(R) = (M, R)}$. Такий граф не має кратних ребер, тому що $\boldsymbol{R \subseteq M \times M}$, а при перелічуванні елементів множини $\boldsymbol{M}$ кожний з них зазначається лише один раз.

Правильно є і зворотне твердження: кожен граф без кратних ребер задає певне бінарне відношення на множині його вершин. Якщо відношення є рефлексивне, то граф має в кожній вершині петлю; якщо $\boldsymbol{R}$ – симетричне, то $\boldsymbol{G(R)}$ – неорієнтований граф.

3.2 Елементи графів

3.2.1 Маршрути, ланцюги, шляхи та цикли

Нехай $\boldsymbol{G = (X, U)}$ – скінченний неорієнтований граф. Скінчена послідовність вершин та ребер графа

$$\boldsymbol{x_0\, u_1 x_1\, u_2\, x_2 \ldots x_{\ell-1} u_{\ell} x_{\ell}},$$

в якій кожне ребро u_i є ребро, яке з'єднує вершини x_{i-1} та x_i, називається ***маршрутом*** на графі G.

Говорять, що цей маршрут з'єднує вершини x_0 та x_ℓ. Число ℓ називають ***довжиною маршруту.***

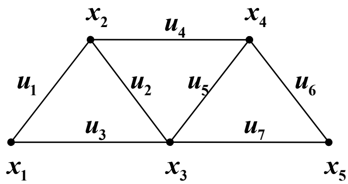
Отже, ***довжина маршруту*** – це кількість ребер, які входять до маршруту. Маршрут називають ***замкненим***, якщо $x_0 = x_\ell$.

Маршрут, в якому всі ребра є різні, називають ***ланцюгом***. Замкнений ланцюг називають ***циклом.***

Ланцюг називають ***простим***, якщо всі його вершини є різні.

Простий цикл – це цикл, у якому всі вершини, окрім першої та останньої, є різні.

П р и к л а д. У графі, поданому на рисунку



$x_1\, u_3\, x_3\, u_3\, x_1\, u_3\, x_3\, u_2\, x_2\, u_4\, x_4\, u_5\, x_2\, u_3\, x_1$ – маршрут;
$x_1\, u_3\, x_3\, u_2\, x_2\, u_4\, x_4\, u_5\, x_3\, u_7\, x_5$ – ланцюг;
$x_1\, u_1\, x_2\, u_4\, x_4\, u_6\, x_5$ – простий ланцюг.

Орієнтовані маршрути на орграфі визначають в аналогічний спосіб, з тією різницею, що початкова вершина дуги маршруту має збігатися з кінцевою вершиною попередньої дуги.

Інакше кажучи, рух за маршрутом припускається лише в напрямках, зазначених стрілками.

Маршрут, який не містить повторних дуг, називається ***шляхом***, а той, що не містить повторних вершин, – ***простим шляхом***. Замкнений шлях називається ***контуром***, а простий замкнений шлях – ***простим контуром***.

Граф без циклів називається ***ациклічним*** (орграф – ***безконтурним***), в іншому разі граф називається ***циклічним*** (орграф – ***контурним***).

Умовимося вважати, що кожна вершина з'єднується сама з собою маршрутом довжини **0** і що цей маршрут є простим циклом. Такий цикл називають ***нульовим*** (якщо сказано просто цикл, то мається на увазі, що він ***не є нульовий***).

Теорема 1 Нехай задано маршрут S. Тоді, якщо він не є замкнений, то містить простий ланцюг з одними й тими самими кінцями.

Д о в е д е н н я

1) Нехай $S = S(a_0, a_n)$ – маршрут, який з'єднує вершини a_0 та a_n, де $a_0 \neq a_n$. Якщо він є простим ланцюгом, то твердження теореми доведено.

2) Припустімо, що маршрут $\boldsymbol{S}$ не є простим ланцюгом. Отже, відзнайдеться вершина $\boldsymbol{a_i}$ $(i=\overline{1,n})$, яка входить до цього маршрута, принаймні двічі.

$$\boldsymbol{S = a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{k-1}, a_i, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n}.$$

Тоді $\boldsymbol{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{k-1}, a_i}$ – замкнений підмаршрут маршрута $\boldsymbol{S}$. Вилучимо його з маршрута $\boldsymbol{S}$. В наслідок цього дістанемо більш короткий маршрут з тими самими кінцями.

$$\boldsymbol{S_1 = a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n}.$$

Якщо дістаний маршрут не є простим ланцюгом, повторивши попередні міркування, дістанемо новий маршрут $\boldsymbol{S_2}$.

Оскільки $\boldsymbol{S}$ – скінченний маршрут, то через скінчену кількість кроків $\boldsymbol{m}$ дістанемось певного маршруту $\boldsymbol{S_m}$, який не містить однакових вершин. Тоді $\boldsymbol{S_m}$ – простий ланцюг.

Теорема 2 Кожний замкнений маршрут $\boldsymbol{C}$ містить простий цикл.

Д о в е д е н н я

Якщо замкнений маршрут $\boldsymbol{C = C(a_0)}$ не є простим циклом, то знайдеться вершина $\boldsymbol{a_i \neq a_0}$, яка входить до даного маршрута, принаймні двічі, чи вершина $\boldsymbol{a_0}$, яка входить до маршрута принаймні тричі. Тоді з маршрута $\boldsymbol{C}$ можна виокремити більш короткий замкнений маршрут $\boldsymbol{C_1(a_i)}$ або $\boldsymbol{C_1(a_0)}$. Якщо цей маршрут не є простим циклом, повторимо попередні міркування. Оскільки вхідний маршрут є скінченний, то через певну кількість кроків $\boldsymbol{m}$ дістанемо маршрут $\boldsymbol{C_m}$, який є простим циклом.

Н а с л і д о к. Якщо ланцюг не є простим, то він містить простий цикл.

3.2.2 Зв’язність. Компоненти зв’язності

Нехай граф $\boldsymbol{G = (X, U)}$ – неорієнтований.

Вершина $\boldsymbol{a}$ називається зв’язаною з вершиною $\boldsymbol{b}$, якщо існує маршрут, який з’єднує ці вершини. Стверджують, що вершина ***b досяжна*** з вершини $\boldsymbol{a}$.

Граф, будь-яка пара вершин якого є зв’язана, називається ***зв’язним***.

Якщо в довільному графі $\boldsymbol{G}$ вершина $\boldsymbol{a}$ зв’язана з $\boldsymbol{b}$, а вершина $\boldsymbol{b}$ зв’язана з $\boldsymbol{c}$, то, вочевидь, що $\boldsymbol{a}$ є зв’язана з $\boldsymbol{c}$. Відношення зв’язності для вершин є ***відношенням еквівалентності.*** Отже, існує таке розкладання множини вершин $\boldsymbol{X}$:

(1) $\boldsymbol{X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_p}$, $\boldsymbol{X_i \cap X_j} = \varnothing$ за $i \neq j$, на попарно неперерізувані підмножини, що всі вершини $\boldsymbol{b}$ однієї множини $\boldsymbol{X_i}$ є зв’язані між собою, а вершини з різних множин $\boldsymbol{X_i}$ не є зв’язані.

(2) $\boldsymbol{U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_p}$, $\boldsymbol{U_i \cap U_j} = \varnothing$ за $i \neq j$.

Тоді, відповідно до (1) та (2) матиме пряме розкладання.

(3) $\boldsymbol{G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_p}$,

де $\boldsymbol{G_1 = (X_1, U_1)}$, $\boldsymbol{G_2 = (X_2, U_2)}, \ldots, \boldsymbol{G_p = (X_p, U_p)}$ – неперерізувані зв’язні підграфи.

Ці підграфи називаються ***зв’язними компонентами графа G***, або ***компонентами зв’язності графа G***.

Число p – ще одна числова характеристика графа.

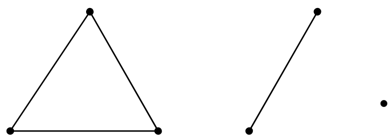
Для зв'язного графа $p = 1$; якщо граф є незв'язний, то $p \geq 2$.

Отже здобуто таке твердження:

Теорема 3 Кожен неорієнтований граф розкладається в єдиний спосіб на пряму суму (3) власних зв'язних компонент.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо певний граф не є зв'язним і розкладається на декілька компонентів, то вивчення цього незв'язного графа можна звести до досліджування окремих його компонентів, які є зв'язні. Тому у переважній більшості випадків має сенс припускати, що заданий граф є зв'язний.

Приклад 3.9 Граф, зображений на рисунку, має три компоненти зв'язності.



Через те що кількість компонентів зв'язності дорівнює кількості зв'язних підграфів графа, наведений граф – тризв'язний (число зв'язності $p = 3$).

Зв'язність для орієнтованих графів (***орграфів***) визначається так само, як і для неорієнтованих, тобто без урахування напрямків дуг. Специфічними для орграфів є поняття ***сильної***, ***однобічної та слабкої зв'язності***.

Орграф називається ***сильно зв'язним***, якщо для кожної пари його вершин a та b існує шлях з вершини a до вершини b.

Орграф називається ***однобічно зв'язним***, якщо для кожної пари його вершин принаймні одна є досяжна з іншої.

Орграф називається ***слабко зв'язним***, якщо зв'язним є асоційований з ним псевдограф (див. рис. 3.19 та 3.20).

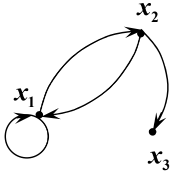


Рисунок 3.19.
Орієнтований псевдограф

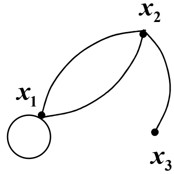
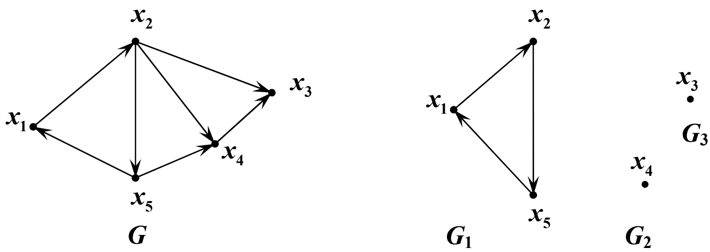


Рисунок 3.20.
Асоційований псевдограф
до орієнтованого псевдографа

П р и к л а д. Три компоненти G_1, G_2, G_3 сильної зв'язності орграфа G зображено на рисунку



Теорема 4 Нехай A – матриця суміжності графа $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$. Тоді a_{ij}^{k} – число маршрутів довжини k від вершини $\boldsymbol{x_i}$ до вершини $\boldsymbol{x_j}$.

3.2.3. Роздільність графа

Зв’язний граф може бути розділено на незв’язані поміж собою підграфи вилучанням з нього певних вершин і/або ребер. При вилученні вершин вилучаються і всі інцидентні до них ребра, а при вилученні ребер інцидентні до них вершини зберігаються.

Вершина, вилучення якої перетворює зв’язний граф на незв’язний, називається ***точкою зчленування*** (рис. 3.21).

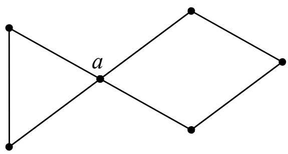


Рисунок 3.21.
Точка зчленування вершина a

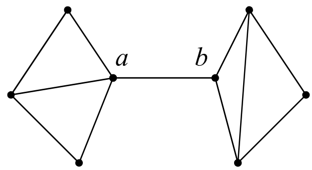


Рисунок 3.22. Міст − ребро (a, b)

Ребро, вилучання якого перетворює зв’язний граф на незв’язний, називається ***мостом*** (рис. 3.22).

За наявності моста є хоча б дві точки зчленування.

Граф називають ***нероздільним***, якщо він є зв’язний і не має точок зчленування.

Граф, який має хоча б одну точку зчленування, є роздільним і називається ***сепарабельним***. Він розбивається на блоки, кожний з яких являє собою максимально нероздільні підграфи.

3.2.4 Матриця відстаней графа

Нехай задано зв'язний граф $G = (X, U)$. Відстанню поміж двома вершинами x та y графа G називається довжина найкоротшого ланцюга, який зв'язує ці вершини.

Відстань між вершинами x та y графа G позначається через $d_G(x, y)$ або $d(x, y)$, якщо зрозуміло, про який саме граф йдеться.

Нескладно перевірити, що впроваджене в такий спосіб позначення відстані – задовольняє звичайним аксіомам метрики:

1) $d(x, y) > 0$; $d(x, y) = 0 <=> x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$;
3) $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

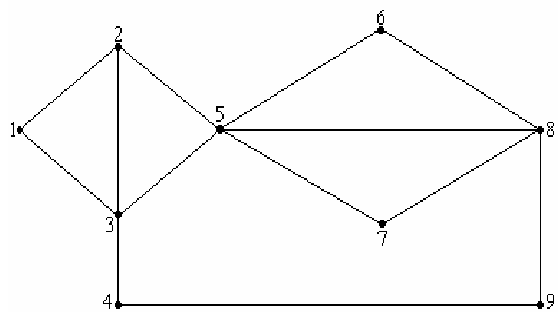
Діаметром графа називається величина $d(G) = \max\limits_{x,\, y} d(x, y)$, де максимум береться за всіма можливими парами вершин графа.

Визначимо для кожної вершини x графа G величину $r(x) = \max\limits_{y} d(x, y)$, тобто відстань від вершини x до найвіддаленішої від x вершини графа. Мінімум цієї величини за всіма вершинами графа називається ***радіусом*** графа G:

$$r(G) = \min_{x} r(x) = \min_{x} \max_{y} d(x, y).$$

Вершина x_0, в якій досягається цей мінімум, називається ***центральною***.

П р и к л а д. Знайти діаметр і радіус для графа, зображеного на рисунку:



Р о з в я з а н н я

Для розв'язання цієї задачі зручно попередньо обчислити так звану матрицю відстаней поміж вершинами графа. У даному разі це буде матриця розміром 9×9, елемент якої, що стоїть на місці (i, j), дорівнює відстані від вершини i до вершини j:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}$$

За визначенням, діаметр графа дорівнює найбільшому елементові матриці відстаней. Отже, $\boldsymbol{d} = \mathbf{3}$.

Для знаходження радіуса відшукаємо в кожному рядку найбільше число; ці числа виписано праворуч від матриці відстаней. Найменші з них дають значення радіуса $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}$.

Вершини **3**-тя та **5**-та є центральними.

3.2.5 Задача про найкоротший ланцюг

При обчислюванні відстаней поміж вершинами треба розв’язати таку **задачу:** у зв’язному графі $\boldsymbol{G}$ задано дві вершини − $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$; знайти ланцюг найменшої довжини, який зв’язує $\boldsymbol{a}$ з $\boldsymbol{b}$.

Алгоритм розв’язання задачі полягає у послідовному присвоєнні вершинам графа позначок, які дорівнюють кількості ребер найкоротшого ланцюга поміж розглядаємою вершиною і вершиною $\boldsymbol{a}$.

Опис алгоритму

Позначимо вершину $\boldsymbol{a}$ як **0**. Усі вершини, суміжні з вершиною $\boldsymbol{a}$, позначимо як **1**. Непомічені вершини, суміжні з вершинами, які мають позначку **1**, позначимо **2**; суміжні з ними – **3** т. д., допоки не буде позначено вершину $\boldsymbol{b}$.

Припустімо, що вершина $\boldsymbol{b}$ набула оцінки $\boldsymbol{k}$. Повертаємося від $\boldsymbol{b}$ до $\boldsymbol{a}$, відшукуючи послідовно: суміжну з $\boldsymbol{b}$ вершину $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}$, яка має оцінку $\boldsymbol{k} - \mathbf{1}$, суміжну з $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}$ вершину $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}-\mathbf{2}}$, яка має оцінку $\boldsymbol{k} - \mathbf{2}$, і т. д. доти, допоки з певної вершини $\boldsymbol{x}_\mathbf{1}$ з оцінкою **1** не дістанемось вершини $\boldsymbol{a}$.

Ланцюг $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_\mathbf{1} - \ldots - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} - \boldsymbol{b}$ – шуканий, він має довжину $\boldsymbol{k}$.

На прикладі графа, зображеного на рис. 3.22 покажемо оцінки, яких набувають вершини графа у перебігу роботи алгоритму.

Через те що вершина $\boldsymbol{b}$ набула оцінки **7**, довжина найкоротшого ланцюга від $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ дорівнює **7**. Цей ланцюг є виділений на рис. 3.23.

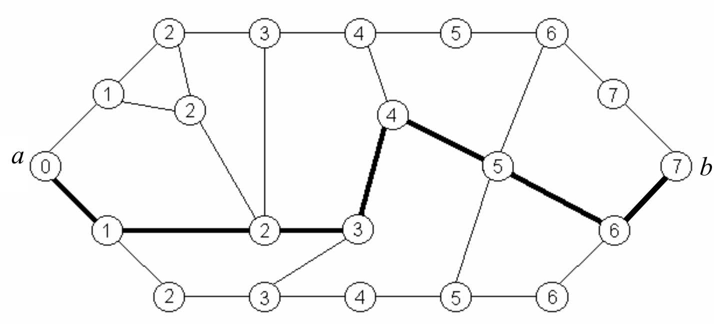


Рисунок 3.23. Найкоротший ланцюг

ЗАУВАЖЕННЯ. Описаний алгоритм іноді називають хвильовим: процес розміщення оцінок нагадує поширення збурювання, яке виникає у вершині ***a*** і рухається зі швидкістю одне ребро за одиницю часу.

3.2.6 Ейлерові графи. Гамільтонові цикли

Однією з перших задач теорії графів у працях видатного математика XVIII сторіччя Л. Ейлера була задача щодо кенігсберзьких мостів. Місто Кенігсберг (нині Калінінград) розташоване на річці Прегель, через яку прокладено сім мостів (рис. 3.24).

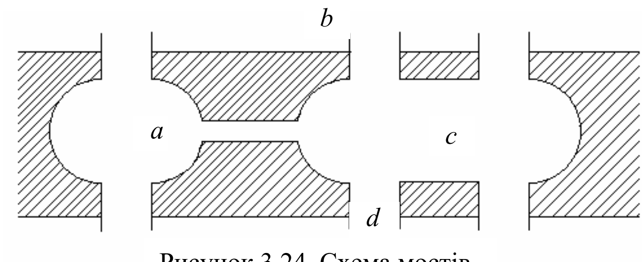


Рисунок 3.24. Схема мостів

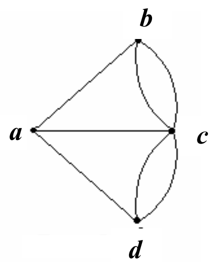


Рисунок 3.25. Граф зображуючий схему мостів

Популярною головоломкою з-посеред жителів міста була така: чи можна обійти всі мости, проходячи кожним не більш одного разу? Мовою графів ця задача формулюється в такий спосіб: чи можна в мультиграфі, зображеному на рис. 3.24, обійти всі ребра, проходячи кожним лише один раз?

Якщо існує цикл у скінченному графі, в якому кожне ребро графа брало участь один раз, то такий цикл називається ***ейлеровим циклом***, а граф, який містить такий цикл, – ***ейлеровим графом***.

Відповідь Ейлера на запитання полягає в такому.

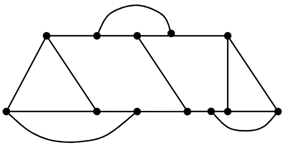
Теорема 5 Скінченний граф ***G*** є ейлеревим графом тоді й лише тоді, коли:

1) ***G*** – зв'язний;
2) усі його вершини мають парні степені.

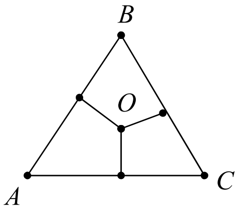
Гамільтоновим циклом називається простий цикл, що проходить через усі вершини розглянутого графа.

Гамільтонів цикл названо іменем ірландського математика Вільямса Гамільтона, який 1859 року вперше почав вивчати ці питання.

ЗАУВАЖЕННЯ. Гамільтонів цикл існує далеко не в кожному графі. Більш того, через кожні дві вершини розглянутого графа може проходити простий цикл, а гамільтонів цикл при цьому може бути відсутній:



– граф з гамільтоновим циклом;



– граф, в якому немає гамільтонового циклу.

Щоб пройти через вершини *A*, *B*, *C*, гамільтонів цикл має містити всі ребра, які лежать на сторонах трикутника. Але тоді він не проходить через розміщену в центрі трикутника вершину 0.

Іноді можна побудувати простий ланцюг, який проходить через усі вершини графа, з початком і кінцем у різних заданих вершинах $\boldsymbol{x'}$ і $\boldsymbol{x''} \in \boldsymbol{G}$. Такий ланцюг теж називається гамільтоновим.

Розповсюджена інтерпретація задачі щодо гамільтонових циклів полягає в такому. Обід накрито на круглому столі. З-посеред гостей декотрі є друзями. За яких умов можна розсадити всіх в такий спосіб, щоби по обидва боки кожного з присутніх сиділи саме його друзі?

Так звана задача про комівояжера (її називають ще задачею про бродячого торговця), є задачею, яка належить до гамільтонових ланцюгів.

Район, який має відвідати комівояжер, має певну кількість міст. Відстані поміж ними є відомі. Треба відшукати найкоротший шлях, який проходив би через усі пункти і повертався до вхідного.

Ця задача має низку додатків у досліджуванні операцій, наприклад у питаннях щодо найбільш ефективного використовування рухомого складу чи обладнання.

У задачі про комівояжера міста можна подати як вершини графа $\boldsymbol{G}$, в якому кожній парі вершин приписується відстань $\mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Якщо дві вершини не є з'єднані, то можна покласти, що $\mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \infty$.

Завдання полягає в тому, щоб знайти такий гамільтонів цикл $\boldsymbol{C}$, для якого сума

$$\mu(\boldsymbol{C}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}) \text{ – мінімальна.}$$

Оскільки зазвичай йдеться лише про скінчену кількість вершин, задачу може бути розв'язано шляхом перебирання. Однак жодного ефективного алгоритму, окрім перебору, не відомо. Є тільки певні окремі схеми для окремих випадків. Один доволі важливий приклад визначення найкоротшої повітряної лінії, яка сполучає всі столиці штатів у США, обчислили до кінця Дагірі, Далкерсон та Джонсон.

Незважаючи на подібність у визначеннях для ейлерових та гамільтонових циклів, у цих поняттях є мало спільного.

Критерій існування ейлерових циклів було встановлено просто; для гамільтонових циклів жодне загальне правило не відоме. Більш того, іноді навіть для конкретних графів буває надто складно вирішити, чи можна знайти такий цикл.

3.3 Цикломатика графів. Дерева

Цикломатика – це вивчення циклів у графі.

З усієї сукупності циклів даного графа можна відокремити цілковито певну кількість незалежних (базисних) циклів, а решту здобути з базисних циклів за допомогою спеціальної операції додавання. Приклад такого додавання на рис. 3.26.

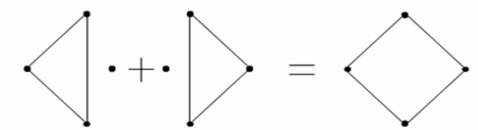


Рисунок 3.26. Приклад додавання циклів

3.3.1 Циклові ребра та перешийки

Нехай задано граф $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$. Ребро графа, через яке проходить хоча б один цикл, назвемо ***цикловим ребром***. Ребро, яке не входить до жодного циклу, називатимемо ***перешийком***.

П р и к л а д. У графі, зображеному на рис. 3.27, ребра $\boldsymbol{u}_1$ та $\boldsymbol{u}_2$ – перешийки, решта ребер – циклові.

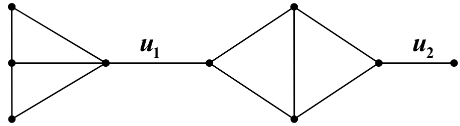


Рисунок 3.27. Граф з перешийками та цикловими ребрами

Лема При вилученні зі зв'язного графа циклового ребра він залишається зв'язним. При вилученні зі зв'язного графа перешийка граф розпадається на дві компоненти зв'язності.

Д о в е д е н н я

Якщо ребро $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, яке вилучається, є циклове, то після його вилучення вершини $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, як і раніше, можна з'єднати в ланцюг – залишком циклу, до якого входило ребро $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Звідси випливає, що і кожні дві вершини графа після вилучення ребра $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ залишаються зв'язаними ланцюгом.

Й навпаки, якщо $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ – перешийок, то після його вилучення вершини $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ не можна зв'язати ланцюгом, інакше цей ланцюг разом з ребром $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ утворить цикл у вихідному графі. З іншого боку, кожна вершина залишається зв'язаною чи то з вершиною $\boldsymbol{a}$, чи то з вершиною $\boldsymbol{b}$.

Н а с л і д о к. При вилученні з графа циклового ребра кількість зв'язних компонентів графа не змінюється. При вилученні перешийка кількість зв'язних компонентів графа збільшується на одиницю.

3.3.2 Цикломатичне число

Нехай задано граф $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$, $|\boldsymbol{X}| = \boldsymbol{n}$, $|\boldsymbol{U}| = \boldsymbol{m}$; $\boldsymbol{p}$ – кількість компонент зв'язності графа. Величина $\lambda = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}$ називається ***цикломатичним числом графа***.

Теорема Для кожного графа цикломатичне число є невід'ємне, тобто $\lambda \geq \mathbf{0}$.

Д о в е д е н н я

Вилучаємо з графа по одному ребру, і відстежуємо змінювання величини λ. Параметри вихідного графа позначимо $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{p}$. Ті самі величини після вилучення ребра позначимо через $\boldsymbol{m'}$, $\boldsymbol{n'}$ та $\boldsymbol{p'}$.

У процесі вилучення ребер можливі два випадки:

а) вилучуване ребро – циклове. Тоді $\boldsymbol{m'} = \boldsymbol{m} - \mathbf{1}$, $\boldsymbol{n'} = \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p}$;

$$\lambda' = \boldsymbol{m'} - \boldsymbol{n'} + \boldsymbol{p'} = \boldsymbol{m} - \mathbf{1} - \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p} = \lambda - \mathbf{1}.$$

б) вилучуване ребро − перешийок. У такому разі

$$\boldsymbol{m'} = \boldsymbol{m} - \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{n'} = \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} + \mathbf{1}.$$

Тоді $\lambda' = \boldsymbol{m'} - \boldsymbol{n'} + \boldsymbol{p'} = \boldsymbol{m} - \mathbf{1} - \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p} + \mathbf{1} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p} = \lambda.$

Отже, при вилученні ребра величина λ або не змінюється, або зменшується на одиницю. Після вилучення всіх ребер дістанемо порожній граф, у якому

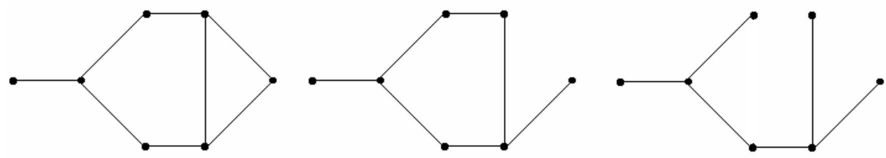
$$\boldsymbol{m}_0 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{n}, \quad \text{тобто} \quad \lambda_0 = \boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{n}_0 + \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} = \mathbf{0}.$$

Отже, у вхідного графа $\lambda \geq \mathbf{0}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Доведення теореми свідчить про зв'язок цикломатичного числа з наявністю циклів у графі.

Якщо $\lambda > \mathbf{0}$, то у графі є принаймні один цикл. При вилученні циклового ребра деякі цикли розриваються − і це призводить до зменшення λ. Якщо продовжувати вилучення ребер, то, зрештою, розриваються всі цикли − і λ стає дорівнюваним $\mathbf{0}$. Після цього λ вже не змінюється, тому що всі ребра стали перешийками.

П р и к л а д. Нехай треба зв'язати кілька населених пунктів мережею доріг або телефонною мережею; взагалі яким-небудь чином зв'язати один пункт з одним. Пропонований проект подано на рис. 3.28, *а*).



а) *б*) *в*)

Рисунок 3.28. Різні приклади мереж

Надалі виникла потреба здешевити проект, внаслідок чого певні зв'язки було вилучено (рис. 3.28 *б*, *в*).

У графі на рис. 3.28, *в*) вже жодного зв'язку вилучати не можна, в противному разі граф перестане бути зв'язним і поставлене завдання не буде розв'язано.

Такого роду графи називаються ***деревами***.

3.3.3 Дерева

Деревом називається зв'язний граф без циклів.

Дерево не може мати ані кратних ребер, ані петель, ані ізольованих вершин. Кожний ланцюг у дереві є простий, через те що в іншому разі дерево містило б цикл, що є неможливе.

При додаванні до дерева ребра утворюється цикл, а при вилученні хоча б одного ребра дерево розпадається на компоненти, кожна з яких є або деревом, або ізольованою вершиною**.**

Дерева називаються ***істотно різними***, якщо вони не є ізоморфні.

На рис. 3.29 показано усі можливі дерева з шістьма вершинами – неізоморфні.

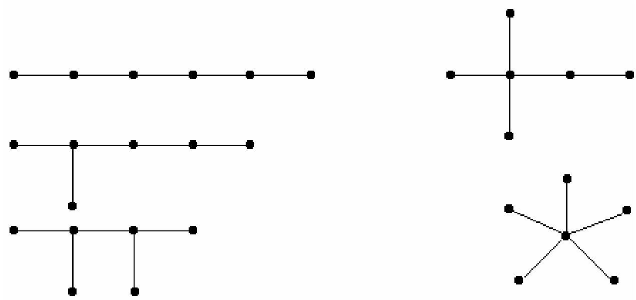


Рисунок 3.29. Зображення неізоморфних дерев з шістьма вершинами

У поданій нижче теоремі ***перелічуються властивості дерев***, кожна з яких повністю схарактеризовує дерево.

Теорема Еквівалентні є такі означення дерева:

а) ***дерево*** – це зв'язний граф без циклів;

б) ***дерево*** – це зв'язний граф, у якому кожне ребро є перешийком;

в) ***дерево*** – це зв'язний граф, цикломатичне число якого дорівнює нулеві;

г) ***дерево*** – це граф, у якому для кожних двох вершин існує лише один з'єднувальний ланцюг.

Наведені твердження нескладно виводяться одне з іншого за схемою *а*) => *б*) => *в*) => *г*) => *а*).

У властивості *в*) маємо: $\boldsymbol{m - n + 1 = 0}$ або $\boldsymbol{m = n - 1}$, тобто у кожному дереві кількість ребер є на одиницю менша за кількість вершин.

ЗАУВАЖЕННЯ. Рис. 3.30 певним чином пояснює назву «дерево». Відокремимо в дереві певну вершину ***a*** (корінь). Оскільки ребра, які прилягають до неї, – перешийки, то після вилучання кожного з них від дерева відокремлюється компонента зв'язності графа. На рисунку вони позначені $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, …, $\boldsymbol{T_к}$. Кожна з цих компонентів також є деревом.

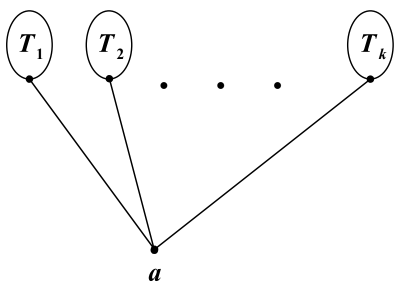


Рисунок 3.30. Дерево

3.3.4 Кістякове дерево графа

Вилучання з довільного зв'язного графа всіх циклових ребер дає в наслідок дерево $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{X}', \ \boldsymbol{U}')$ таке, що:

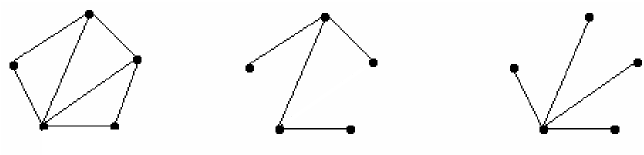
1) $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}$, тобто множина вершин дерева $\boldsymbol{T}$ збігається з множиною вершин графа $\boldsymbol{G}$;

2) $\boldsymbol{U}' \subseteq \boldsymbol{U}$, тобто кожне ребро дерева є водночас ребром графа $\boldsymbol{G}$.

Кожне дерево $\boldsymbol{T}$, яке задовольняє умовам 1) та 2) називається ***кістяковим деревом*** графа $\boldsymbol{G}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Через те, що вилучання циклових ребер можна провадити у різні способи, то ***один і той самий граф має багато кістякових дерев***.

П р и к л а д. На рис. 3.31 подано: *а*) − граф $\boldsymbol{G}$, *б*) та *в*) – його кістякові дерева $\boldsymbol{T}_1$ та $\boldsymbol{T}_2$ відповідно.



$\boldsymbol{G}$ $\boldsymbol{T}_1$ $\boldsymbol{T}_2$

а) *б*) *в*)

Рисунок 3.31. Кістякові дерева графа $\boldsymbol{G}$

Нехай у графі $\boldsymbol{G}$ виокремлено кістякове дерево $\boldsymbol{T}$. Ребра графа, які не ввійшли до $\boldsymbol{T}$, називатимемо ***хордами***.

Теорема Якими б не були кістякове дерево і хорда $\boldsymbol{u}$ цього дерева, у графі $\boldsymbol{G}$ існує єдиний цикл, який має хорду $\boldsymbol{u}$ і не має інших хорд.

Д о в е д е н н я

Нехай $\boldsymbol{u} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. У дереві $\boldsymbol{T}$ є єдиний ланцюг, який з'єднує вершини $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$. Долучаючи до цього ланцюга ребро $\boldsymbol{u}$, здобуваємо потрібний цикл.

Довільний незв'язний граф, який не містить циклів, називається ***лісом***.

Еквівалентне визначення лісу: граф $\boldsymbol{G}$, усі компоненти зв'язності якого є деревами, називається ***лісом***.

Задача про найкоротшу з'єднувальну мережу

Нехай $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{l})$ – навантажений граф, у якого задано вагу $\boldsymbol{l}_{ij}$ кожного ребра $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. Треба побудувати кістякове дерево $\boldsymbol{T}$ графа $\boldsymbol{G}$, ***сума ваги ребер*** якого є ***мінімальна***.

Цій задачі можна дати таку інтерпретацію: $\boldsymbol{n}$ пунктів на місцевості треба зв'язати мережею доріг чи то ліній телефонного зв'язку. Для кожної пари пунктів $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$ задано вартість їхнього з'єднання – це і є "вага" $\boldsymbol{l}_{ij}$ ребра $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ у даному разі.

Треба побудувати з'єднувальну мережу мінімальної вартості. Така мережа буде деревом, і при цьому серед усіх кістякових дерев вона матиме мінімальну суму довжин ребер, які входять до неї.

Алгоритм розв'язання поставленої задачі є надто простий

Дерево будується покроково; на кожному кроці долучається одне ребро.

Правило для вибору цього ребра є таке: серед ще не обраних ребер береться найкоротше, яке не утворює циклу з вже обраними ребрами.

П р и к л а д. У матриці $\boldsymbol{C}$ елемент, що стоїть в $\boldsymbol{i}$-му рядку та $\boldsymbol{j}$-му стовпчику, зазначає в умовних одиницях витрати, потрібні для того, щоб зв'язати пункт $\boldsymbol{i}$ з пунктом $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 7 & 5 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 0 & 5 & 6 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 0 & 5 & 6 & 3 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 7 & 5 & 0 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 5 & 6 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 7 & 5 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

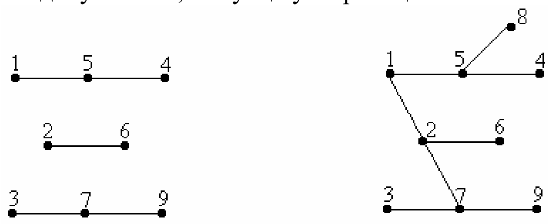
Задача полягає в тому, щоб з найменшими витратами з'єднати всі пункти один з одним**.**

Застосування сформульованого вище алгоритму зреалізовується так

У матриці $\boldsymbol{C}$ відшукується мінімальний ненульовий елемент. Він вилучається з матриці, а відповідне йому ребро долучається до мережі, якщо при цьому не утвориться циклів.

Ці дії повторюються.

Отже, на перших п'яти кроках роботи алгоритму буде обрано ребра **{1, 5}**, **{2, 6}**, **{4, 5}**, **{3, 7}** та **{7, 9}**. Вони становитимуть частину мережі, подану на рис. 3.32, *а*). З ребер, що залишилися, мінімальну довжину має ребро **{1, 4}**, але до мережі воно не долучається, тому що утворює цикл з вже обраними ребрами.



а)　　　　　　　　　　*б*)

Рисунок 3.32

На наступних етапах алгоритму до дерева буде долучено ребра **{5, 8}**, **{2, 7}** та **{1, 2}**. Побудовано дерево подано на рис. 3.32, *б*).

Для обґрунтування алгоритму припустимо, що дерево $\boldsymbol{T}$, яке ми будуємо, складається з ребер $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ $(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}_{i-1}) \le \boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}_i))$.

Розглянемо якесь інше дерево $\boldsymbol{T}'$; упорядкуємо його ребра за зростанням довжин.

Нехай перші $\boldsymbol{k}-\mathbf{1}$ ребра дерева $\boldsymbol{T}'$ є такі ж самі, як у дерева $\boldsymbol{T}$, а ($\boldsymbol{k}-\mathbf{1}$)-ше ребро відрізняється від $\boldsymbol{u}_k$. Долучимо до дерева $\boldsymbol{T}'$ ребро $\boldsymbol{u}_k$, тоді виникне цикл, до якого входять ребро $\boldsymbol{u}_k$ та деякі ребра з дерева $\boldsymbol{T}'$. Серед останніх обов'язково знайдеться ребро $\boldsymbol{u}'_j$, таке, що $\boldsymbol{j} \ge \boldsymbol{k}$, інакше ребро $\boldsymbol{u}_k$ утворило б цикл з ребрами $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}$, що виключається правилом вибору чергового ребра в розглянутому алгоритмі.

Далі маємо $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}'_j) \ge \boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}_k)$, оскільки ребро $\boldsymbol{u}_k$ обиралося як ***найменше*** ребро, яке не утворює циклу з ребрами ребер $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$. Вилучимо з дерева $\boldsymbol{T}$ ребро $\boldsymbol{u}_j$, замінивши його на ребро $\boldsymbol{u}_k$. Внаслідок цього здобудемо дерево, довжина якого є не більша за довжину $\boldsymbol{T}'$.

В аналогічний спосіб долучаємо до дерева $\boldsymbol{T}'$ ребра $\boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$, при цьому кожного разу довжина дерева не збільшується. Це означає, що дерево $\boldsymbol{T}$, побудоване за вищевказаним алгоритмом, є насправді ***найкоротше***.

3.3.5 Простір циклів. Система базисних циклів

Нехай задано граф $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$, $|\boldsymbol{U}| = \boldsymbol{m}$. Пронумеруємо в довільному порядку ребра графа: $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$.

Нагадаємо, що кістяковим підграфом графа $\boldsymbol{G}$ називається граф $\boldsymbol{G}' = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}')$ з тією самою множиною вершин $\boldsymbol{X}$ та множиною ребер $\boldsymbol{U}'$, яка є підмножиною множини $\boldsymbol{U}$; $\boldsymbol{U}' \subseteq \boldsymbol{U}$.

Інакше кажучи, кістяковий підграф можна здобути, якщо з графа $\boldsymbol{G}$ вилучити певні ребра.

Тому зручно задавати кістяковий підграф за допомогою двійкового слова:

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m,$$

в якому нулі зазначають, які ребра вилучено з вихідного графа $\boldsymbol{G}$, а одиниці – які залишено.

Отже, кожному кістяковому підграфові $\boldsymbol{G}' = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}')$ поставимо у відповідність двійкове слово

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m,$$

де

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \boldsymbol{u}_i \in \boldsymbol{U}'; \\ 0, \text{ якщо } \boldsymbol{u}_i \notin \boldsymbol{U}', \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

П р и к л а д. Слово **11...1** задає вихідний граф, слово **00...0** – його порожній кістяковий підграф.

Уведемо на множині всіх кістякових підграфів графа $\boldsymbol{G}$ операцію додавання двійкових слів.

Сумою $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$ ***за модулем 2*** двійкових слів $\tilde{\alpha} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$ та $\tilde{\beta} = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m$ називатимемо результат покоординатного додавання за модулем 2 слів $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta} \Leftrightarrow \gamma_i = \alpha_i \oplus \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

П р и к л а д.

$$\begin{array}{r} \oplus \begin{array}{c} 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ \underline{0\ 0\ 1\ 0\ 1} \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{array} \end{array}$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Суму двох слів можна також визначити як слово, яке має нулі в тих розрядах, де розряди доданків збігаються, і одиниці − там, де розряди доданків відрізняються.

Визначимо суму двох кістякових підграфів $\boldsymbol{G'}$ та $\boldsymbol{G''}$ як підграф, який задається двійковим словом, здобутим унаслідок додавання за модулем 2 слів, які відповідають підграфам $\boldsymbol{G'}$ та $\boldsymbol{G''}$:

$$\boldsymbol{G'} - \alpha, \quad \boldsymbol{G''} - \tilde{\beta};$$

тоді $\boldsymbol{G'} \oplus \boldsymbol{G''} - \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Підграф $\boldsymbol{G'} \oplus \boldsymbol{G''}$ можна визначити також, перерахувавши ребра, які до нього входять: $\boldsymbol{G'} \oplus \boldsymbol{G''}$ складається з усіх тих ребер, які входять лише в один з підграфів – складових $\boldsymbol{G'}$ та $\boldsymbol{G''}$.

Сукупність усіх кістякових підграфів графа ***G***, розглянуту разом із впровадженою операцією $\oplus$, називають ***простором кістякових підграфів графа G***.

У просторі кістякових підграфів є **базис** – його становлять усі підграфи, що складені з одного ребра. Відповідні цім підграфам слова мають вигляд: **100…00**, **010…00**, **…**, **000…01**.

З базисних підграфів за допомогою операції $\oplus$ можна здобути який завгодно кістяковий підграф. Отже, простір кістякових підграфів має розмірність m.

У просторі кістякових підграфів відокремимо підпростір, який містить усі цикли графа.

Кістяковий підграф називається ***квазіциклом***, якщо степінь кожної його вершини є парною.

ЗАУВАЖЕННЯ. Кожний цикл є квазіциклом. Префікс "квазі" означає "немовби", "схожий на". Фактично, окрім циклів, до квазіциклів належать підграфи складені з кількох компонент, кожна з яких є циклом.

Порожній підграф є квазіциклом, він відіграє роль нуля стосовно операції додавання підграфів.

Лема Сума двох квазіциклів є квазіциклом.

Ця лема свідчить, що сукупність квазіциклів разом з операцією $\oplus$ можна розглядати як простір: при додаванні двох елементів цього простору квазіциклів знову виходить елемент того самого простору.

Сукупність квазіциклів разом з операцією $\oplus$ називають ***простором циклів графа G***.

Основна теорема (про прості цикли). Для графа G з цикломатичним числом λ завжди можна побудувати λ простих циклів C_1, C_2, …, C_λ, які задовольнятимуть таким умовам:

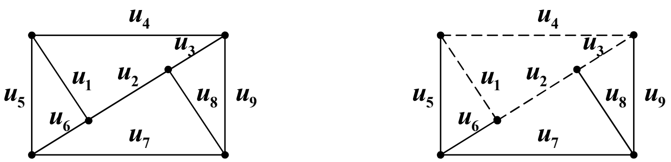
1) кожний квазіцикл (зокрема кожний цикл) можна подати у вигляді суми певних циклів $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$;

2) цикли $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ є незалежні, тобто жоден з них не можна подати у вигляді суми через інші.

Сукупність циклів $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ має назву ***системи базисних циклів***.

Основну теорему (про прості цикли), можна сформулювати так: розмірність простору циклів графа G дорівнює його цикломатичному числу.

П р и к л а д. Побудувати систему базисних циклів для графа G, поданого на рис. 3.33, *а*).



G

а) *б*)

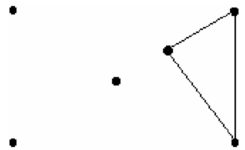
Рисунок 3.33. *а*) Граф G. *б*) Кістякове дерево

Р о з в ' я з а н н я

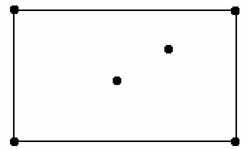
1) Відокремимо кістякове дерево (рис. 3.33, *б*).

2) Долучимо до дерева почергово хорди u_1, u_2, u_3, u_4 й побудуємо базисні цикли (рис. 3.34).

C_1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 C_2 0 1 0 0 0 1 1 1 0



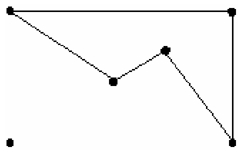
C_3 0 0 1 0 0 0 0 1 1



C_4 0 0 0 1 1 0 1 0 1

Рисунок 3.34. Прості цикли

3) Який завгодно інший цикл ***C*** графа ***G***, наприклад зображений на рис. 3.35, можна подати у вигляді суми базисних циклів.



C 1 1 0 1 0 0 0 1 1

Рисунок 3.35

До циклу ***C*** входять хорди u_1, u_2, u_3 та u_4. Склавши відповідні базисні цикли, дістанемо

$$\begin{array}{rl} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 & C_1 \\ \oplus\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 & C_2 \\ \underline{0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1} & C_4 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 & C. \end{array}$$

Отже, $C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4$.

3.4 Транспортні мережі. Мережні графіки

3.4.1 Визначення транспортної мережі

Слово “***мережа***” вживають у тих випадках, коли в графі відокремлено певні вершини. Відокремлені вершини ***називають полюсами***. Іноді полюси поділяються на ***вхідні*** та ***вихідні***.

Транспортна мережа – це орієнтований граф $G = (X, U)$, в якому:

1) кожній дузі u приписане ціле невід’ємне число $c(u)$, яке називається ***пропускною здатністю дуги***;

2) відокремлено дві вершини − ***S*** та ***t***. При цьому в графі ***G*** немає дуг, які заходять у вершину ***S***, і немає дуг, які виходять з вершини ***t***. Ці дві вершини називаються відповідно ***джерелом*** та ***стоком***.

П р и к л а д. На рис. 3.36 наведено приклад транспортної мережі:

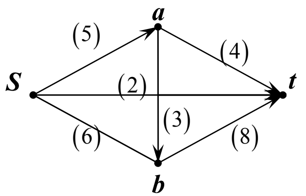


Рисунок 3.36

S – джерело,
t – стік,
a та ***b*** – ***проміжні вершини,*** тобто вершини транспортної мережі, відмінні від джерела та стоку.

Біля кожної дуги в дужках зазначено її пропускну здатність.

Можна надати різні інтерпретації поняттю транспортної мережі.

1) Наприклад, у вершині ***S*** є необмежений запас певного продукту і треба зорганізувати доставку цього продукту до вершини ***t*** мережею шляхів сполучання з проміжними вершинами ***x, y***, … . Нехай пропускна здатність дуги в розглядаємому випадку – це кількість вантажу, який можна перевезти за одиницю часу даною дугою.

Виникає **задача**: зорганізувати перевезення мережею в такий спосіб, щоб, не перевищуючи пропускних здатностей дуг, перевозити з ***S*** у ***t*** максимальну кількість вантажу за одиницю часу.

2) Інша інтерпретація: наприклад дуги – це труби різних перерізів, ними з ***S*** у ***t*** перекачується рідина.

3.4.2 Визначення потоку

Основним поняттям теорії транспортних мереж є ***поняття потоку транспортної мережі***.

Позначимо для кожної вершини ***x*** літерою U_x^+ – множину всіх дуг, які входять до ***x***, а літерою U_x^- – множину всіх дуг, які виходять з ***x***.

Для вершин ***S*** та ***t*** маємо $U_S^+ = U_t^- = 0$.

Функція φ, яка визначена на дугах мережі та набуває значення невід’ємних чисел, називається ***потоком***, якщо виконано такі три умови:

$$\varphi(u) \ge 0, \quad u \in U; \tag{3.1}$$

$$\sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) = 0, \qquad x \in X, \quad x \ne S, \; x \ne t; \tag{3.2}$$

$$\varphi(u) \le c(u). \tag{3.3}$$

П р и к л а д. На рис. 3.37 подано потік у транспортній мережі попереднього прикладу. На кожній дузі зазначено величину її потоку.

Вочевидь, що виконуються всі умови, зазначені в визначенні потоку.

Завдання для самостійної роботи. Перевірити виконання умови (3.2) для проміжних вершин ***a*** та ***b***.

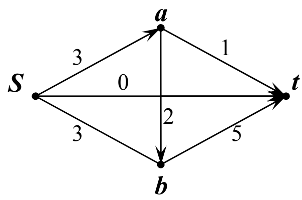


Рисунок 3.37

Потік являє собою план організації перевезень, при цьому $\varphi(\boldsymbol{u})$ зазначає, яка кількість вантажу проходить дугою ***u*** за одиницю часу. Ця кількість на підставі умов (3.1) та (3.3) є невід'ємна і не перевищує пропускної здатності дуги.

Умови (3.2) називаються ***рівняннями зберігання***: кількість вантажу, який приходить до кожної вершини, дорівнює кількості вантажу, який виходить з неї.

Складемо всі рівняння зберігання. Якщо обидва кінці дуги відрізняються від ***S*** та ***t***, то член $\varphi(\boldsymbol{u})$ у здобутій сумі зустрінеться двічі: зі знаком „ – ” − у рівнянні для одного кінця ***дуги u*** та зі знаком „ + ” – для іншого. Звідси випливає, що після додавання залишаться лише дуги, які входять до $\boldsymbol{U}_S^-$ та у $\boldsymbol{U}_t^+$:

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{U}_x^-}\varphi(\boldsymbol{u})-\sum_{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{U}_x^+}\varphi(\boldsymbol{u})=0.$$

Отже, для кожного потоку сумарна величина вантажу, який виходить із джерела ***S***, дорівнює сумарній величині вантажу, який прибуває до стоку ***t***. Цю сумарну величину позначають Φ і називають ***величиною потоку***.

Отже, за визначенням:

$$\Phi = \sum_{u\in U_S^-}\varphi(u)= \sum_{u\in U_t^+}\varphi(u)\ .$$

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. Величина потоку Φ дорівнює сумі потоків усіх дуг, які заходять у ***t***, або так само − сумі потоків усіх дуг, які виходять з ***S***.

2. Всіляких потоків у певній транспортній мережі може бути багато, але завжди існує нульовий потік: $\varphi(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{U}$.

Основна задача. Для заданої транспортної мережі знайти потік, який має найбільшу величину. Такий потік називається ***максимальним***.

Для розв'язання поставленої задачі слід попередньо вивчити спеціальні підмножини дуг мережі, які називаються ***розрізами***. До цього можна прийти, якщо розбити всю множину вершин (населених пунктів) на два райони і розглянути шляхи, які ведуть з одного району до другого.

3.4.3 Розріз. Пропускна здатність розрізу

Нехай $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$ – певна підмножина вершин мережі, яка має ту властивість, що $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{t} \notin \boldsymbol{A}.$

Позначимо $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{A}$. Тоді $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{t} \in \overline{\boldsymbol{A}}$.

Розглянемо множину $(A,\ \overline{A})$ усіх дуг мережі, які мають початок у множині A, а кінець у $\overline{A}$:

$$(A,\ \overline{A}) = \{(x, y):\ x \in A,\ \ y \in \overline{A}\}.$$

Множина дуг $(A,\ \overline{A})$ називається ***розрізом***, зумовленим множиною вершин A.

Пропускна здатність розрізу $c(A,\ \overline{A})$ − це сума пропускних здатностей усіх дуг, які входять до розрізу.

П р и к л а д. Для транспортної мережі (рис. 3.35) нехай

$$A = \{S\},\ \ \overline{A} = \{a, b, t\},$$

розріз мережі відносно A являє собою множину дуг:

$$(A,\ \overline{A}) = \{(S, a), (S, b), (S, t)\}.$$

Його пропускна здатність є

$$c(A,\ \overline{A}) = \sum_{u} c(u) = 5 + 6 + 2 = 13.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Поряд з розрізом $(A,\ \overline{A})$ також розглядається вся множина дуг $(\overline{A}, A)$. До неї входять усі дуги, які мають початок в $\overline{A}$, а кінець в A.

Лема Нехай φ – потік транспортної мережі, Φ – величина потоку φ, $(A,\ \overline{A})$ – певний розріз. Тоді $\Phi \le c(A,\ \overline{A})$, тобто величина кожного потоку не перевищує пропускної здатності кожного розрізу.

Д о в е д е н н я

Розглянемо рівняння зберігання (3.2) тільки для вершин $x \in A$ і складемо всі ці рівняння. Вийде співвідношення вигляду

$$\sum_{u} \varepsilon_u\, \varphi(u) = 0. \qquad (3.4)$$

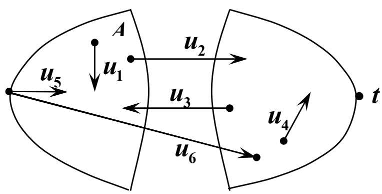


Рисунок 3.38

Коефіцієнти ε_u у співвідношенні (3.4) можуть набути значень –1, 0, 1 залежно від розміщення дуги $u = (x, y)$ та розрізу. Можливі шість типів такого розміщення (рис. 3.38). Для них знайдемо коефіцієнт ε_u.

1) $x \in A,\ \ x \ne S,\ \ \ y \in A \Rightarrow \varepsilon_u = 0$;
2) $x \in A,\ \ x \ne S,\ \ y \in \overline{A} \Rightarrow \varepsilon_u = 1$;
3) $x \in \overline{A},\ y \in A \Rightarrow \varepsilon_u = 1$;
4) $x \in \overline{A},\ y \in \overline{A} \Rightarrow \varepsilon_u = 0$;
5) $x = S,\ \ \ y \in A \Rightarrow \varepsilon_u = 1$;
6) $x = S,\ \ \ y \in \overline{A} \Rightarrow \varepsilon_u = 0$.

Для дуг 6-го типу підставимо в суму (3.4) замість $\varepsilon_u = 0$ значення $\varepsilon_u = 1–1$. У наслідок цього співвідношення (3.4) набуде вигляду

$$\sum_{u\in U_{\bar{S}}} \varphi(u) - \sum_{u\in(A,\,\overline{A})} \varphi(u) + \sum_{u\in(\overline{A},\,A)} \varphi(u) = 0\,.$$

Звідки:

$$\Phi = \sum_{u\in U_{\bar{S}}} \varphi(u) = \sum_{u\in(A,\,\overline{A})} \varphi(u) - \sum_{u\in(\overline{A},\,A)} \varphi(u) \le \sum_{u\in(A,\,\overline{A})} \varphi(u) \le \sum_{u\in(A,\,\overline{A})} c(u) = c\left(A, \overline{A}\right). \quad (3.5)$$

Теорема *Форда-Фалкерсона.* Найбільша величина потоку в транспортній мережі дорівнює найменшій пропускній здатності розрізу.

Д о в е д е н н я

За лемою, для кожного потоку та кожного розрізу $\Phi \le \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A},\ \overline{\boldsymbol{A}})$, тобто, для кожного потоку $\Phi \le \min\limits_{A} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A},\ \overline{\boldsymbol{A}})$, а отже, і для максимального потоку справедлива є нерівність:

$$\max_{\varphi} \Phi \le \min_{A} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A},\ \overline{\boldsymbol{A}}). \quad (3.6)$$

Для завершення доведення описується алгоритм побудови потоку і розрізу, таких, що величина потоку дорівнює пропускній здатності розрізу. З нерівності (3.6) безпосередньо випливає, що такий потік буде максимальним, а розріз мінімальним.

3.4.4 Алгоритм побудови максимального потоку

З нерівності (3.5) випливає, що величина Φ потоку φ збігається з пропускною здатністю розрізу $(\boldsymbol{A},\ \overline{\boldsymbol{A}})$ тоді й лише тоді, коли виконуються дві умови:

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{u}) & \text{для всіх дуг } \boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{A},\ \overline{\boldsymbol{A}}); \\ \varphi(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} & \text{для всіх дуг } \boldsymbol{u} \in (\overline{\boldsymbol{A}},\ \boldsymbol{A}). \end{cases} \quad (3.7)$$

При побудові максимального потоку використовується нерівність (3.5). На кожному етапі алгоритму будується такий розріз, для якого виконуються умови (3.7). При цьому або вдається побудувати такий розріз, або з’ясовується, в який спосіб розглянутий потік можна збільшити.

Збільшення потоку виконується за допомогою ***додавальних*** ланцюгів.

Розглянемо в мережі ланцюг з джерела до стоку, тобто ланцюг вершин $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{t}$, таких, що поміж $\boldsymbol{x}_{i-1}$ і $\boldsymbol{x}_i$ є дуга мережі. Такою дугою може бути дуга $(\boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i)$, яка в цьому разі називається ***прямою***, або дуга $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i-1})$, називана ***зворотною***. На рис. 3.39 подано ланцюг з $\boldsymbol{S}$ до $\boldsymbol{t}$, а також його прямі та зворотні дуги. Зворотні дуги зображено жирною лінією.

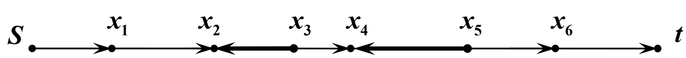


Рисунок 3.40

Нехай у мережі задано потік φ. Ланцюг з $\boldsymbol{S}$ до $\boldsymbol{t}$ називається ***додавальним***, якщо для кожної його прямої дуги $\boldsymbol{u}$ виконується нерівність $\varphi(\boldsymbol{u}) < \boldsymbol{c}(\boldsymbol{u})$, а для кожної зворотної дуги $\boldsymbol{u}$ – нерівність $\varphi(\boldsymbol{u}) > \mathbf{0}$.

Припустімо, що для потоку φ вдалося знайти додавальний ланцюг. Тоді, збільшуючи φ на одиницю на прямих дугах, зменшуючи на одиницю на зворотних дугах і залишаючи незмінним на дугах, які не входять до ланцюга, можемо віднайти новий потік, величина якого є на одиницю більша за величину φ.

П р и к л а д. Нехай додавальний ланцюг має вигляд (рис. 3.40).

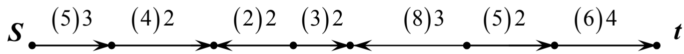


Рисунок 3.40

На кожній дузі зазначено два числа:

перше – у дужках – пропускна здатність дуги,

друге – потік дугою.

За допомогою цього ланцюга можна перейти до нового потоку (рис. 3.41).

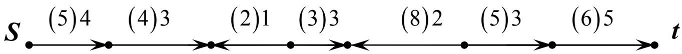


Рисунок 3.41

Переходимо до описання алгоритму побудови максимального потоку.

Алгоритм полягає у послідовному перегляданні вершин мережі та присвоєнні їм певних позначок. На кожному кроці цього процесу кожна з вершин перебуває в одному з трьох станів:

а) не позначена;

б) позначена, але не переглянута;

в) позначена й переглянута.

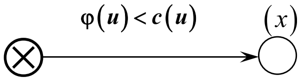
3.4.5 Опис алгоритму

Задамо будь-який, найпростішій (нульовий) потік мережею.

1-й крок. Позначаємо джерело $\boldsymbol{S}$, наприклад, зірочкою (∗). Після цього вершина $\boldsymbol{S}$ є позначена, але не переглянута.

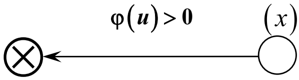
2-й крок. Беремо чергову позначену, але не переглянуту вершину $\boldsymbol{x}$, переглядаємо всі дуги, які прилягають до цієї вершини. Якщо друга вершина дуги не є позначена, то позначаємо її позначкою ($\boldsymbol{x}$) у таких двох випадках:

а) дуга виходить з вершини $\boldsymbol{x}$, і потік із неї є строго менше за пропускну здатність:



;

б) дуга входить в ***x*** і потік у ній є строго більше за 0.



.

Процес розміщення позначок може завершитися подвійно (3-й чи 4-й крок).

3-й крок. Стік ***t*** дістав позначку, наприклад (***y***). Переходимо до вершини ***y***, за оцінкою вершини ***y*** відшукуємо наступну вершину і т. д. доти, поки не дійдемо вершини ***S***. Внаслідок цього буде побудовано додавальний ланцюг. Збільшуємо за допомогою ланцюга поточний потік і розпочинаємо виконання алгоритму з 1-го кроку.

4-й крок. Процес розміщення оцінок завершується тим, що всі позначені вершини переглянуто, але стік ***t*** при цьому не позначено. Нехай ***A*** – множина позначених вершин. Позаяк $t \notin A$, а $S \in A$, можна визначити розріз $(A,\ \overline{A})$.

Для кожної дуги $u \in (A,\ \overline{A})$, тобто дуги, яка йде з позначеної вершини до непозначеної,

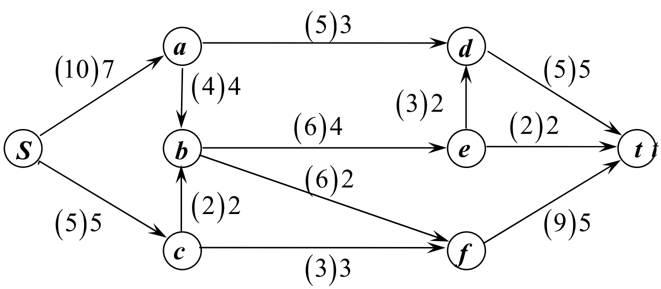
$$\varphi(u) = c(u),$$

тобто, інший кінець цієї дуги був би позначений. З тієї самої причини для кожної дуги $u \in (\overline{A}, A)$

$$\varphi(u) = 0.$$

Отже, для побудованого потоку φ і розрізу $(A,\ \overline{A})$, утвореного позначеними вершинами, виконуються умови (3.7). У такому разі $\Phi = c(A,\ \overline{A})$, тобто потік φ – максимальний.

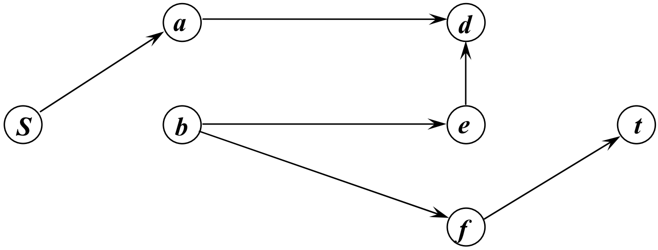
П р и к л а д. Задано транспортну мережу і потік у ній:



Процес розміщення позначок відбуватиметься в цьому прикладі в такий спосіб, як це наведено в таблиці

Номер кроку	*Вершини мережі*							
	S	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***t***
1	*							
2	*	(***S***)						
3	*	(***S***)			(***a***)			
4	*	(***S***)			(***a***)	(***d***)		
5	*	(***S***)	(***e***)		(***a***)	(***d***)		
6	*	(***S***)	(***e***)	(***b***)	(***a***)	(***d***)	(***b***)	
7	*	(***S***)	(***e***)	(***b***)	(***a***)	(***d***)	(***b***)	(***f***)

Оскільки стік дістав позначку, будуємо додавальний ланцюг:



Збільшуємо потік на дві одиниці на прямих дугах цього ланцюга і зменшуємо на дві одиниці на зворотних дугах. Внаслідок цього приходимо до потоку, зображеного на рис. 3.42.

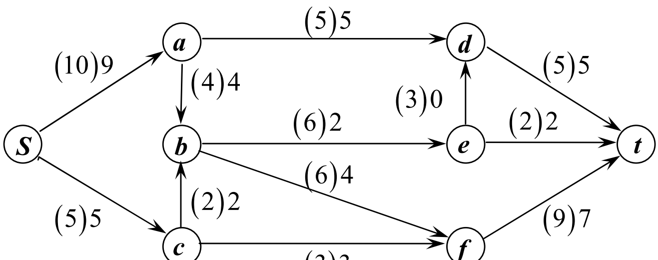


Рисунок 3.42

У перебігу розміщення позначок для нового потоку вдається позначити лише вершини ***S*** та ***a***. Нехай ***A*** = {***S***, ***a***}, тоді розріз $\boldsymbol{(A,\ \bar{A})}$ **–** мінімальний. Його пропускна здатність

$$c(A,\ \bar{A}) = c(a,\ d) + c(a,\ b) + c(S,\ c) = 14$$

збігається з величиною потоку.

3.4.6 Мережні графіки

У цьому пункті під ***мережею*** розумітимемо ***орієнтований граф***, в якому відокремлено дві вершини; одна з них називається ***початком*** і не має вхідних дуг, друга – ***кінцем***, вона не має вихідних дуг.

Послідовність різних дуг, в якій початок кожної дуги збігається з кінцем попередньої, називатимемо ***шляхом***. Замкнений шлях називається ***контуром***, або ***орієнтованим циклом***.

Якщо в мережі немає орієнтованих циклів, вона називається ***ациклічною***.

Приблизно з 60−х років XX сторіччя широкого розповсюдження набула система мережного планування та управління (СПУ), основним елементом якої є ***мережний графік***.

Наприклад, планується створення певної складної системи: будівництво підприємства, розроблення та створення складного технічного пристрою (наприклад, АТС) тощо. Весь комплекс дій зі створення системи, звичайно, розбивається на окремі одиниці – роботи, які в сукупності після їхнього виконання призводять до кінцевої мети.

Мережний графік являє собою зображення перебігу виконання проекту за допомогою ациклічної мережі.

Дуги цієї мережі зображують певні роботи, а вершини – ***події***, які полягають у завершенні однієї або декількох робіт. Кожній дузі в мережному графіку приписане ціле невід’ємне число – тривалість відповідної роботи.

П р и к л а д. Мережний графік на рис. 3.43 зазначає порядок робіт з розв’язування певної задачі на комп’ютері

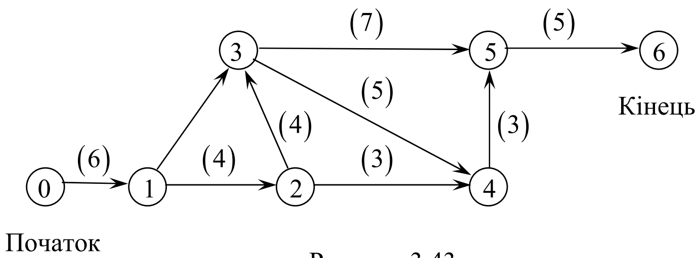


Рисунок 3.43

Перелічимо окремі роботи, зображені на рисунку дугами мережі (кожну дугу будемо задаватимемо парою ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$), де $\boldsymbol{i}$ – номер початку дуги, $\boldsymbol{j}$ – номер її кінця):

(0, 1) – розроблення блок-схеми програми (ця робота займає шість днів);

(1, 2) – складання програми;

(1, 3) – збирання числових даних для розв’язання задачі;

(2, 3) – підготовка програми;

(2, 4) – розробляння контрольного прикладу;
(3, 4) – налагодження програми;
(3, 5) – підготовка вхідних даних;
(4, 5) – обрахунок контрольного прикладу;
(5, 6) – розв’язання задачі.

Вершинам мережного графіка відповідають події, які відбивають ті або інші етапи роботи:

0 – початок робіт;
1 – завершення складання блок-схеми;
5 – завершення всіх підготовчих робіт тощо.

Позначимо тривалість робіт $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j})$ літерою $\boldsymbol{t}_{ij}$. Розглянемо певний шлях на мережному графіку $\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3 - \ldots - \boldsymbol{i}_{k-1} - \boldsymbol{i}_k$.

Довжиною шляху назвемо суму тривалостей робіт, які входять до нього:

$$\boldsymbol{t}_{i_1 i_2} + \boldsymbol{t}_{i_2 i_3} + \ldots + \boldsymbol{t}_{i_{k-1} i_k}.$$

Розглянемо всі шляхи з початкової вершини до кінцевої. Той з цих шляхів, який має найбільшу довжину, називають ***критичним***.

Довжина критичного шляху $\boldsymbol{t}_{\text{кр}}$ – це основна характеристика мережного графіка. Зміст її полягає в тому, що, якщо кожна робота $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j})$ розпочинатиметься в той момент, коли відбудеться подія $\boldsymbol{i}$ (раніш вона розпочатися й не може), і виконуватиметься саме за час $\boldsymbol{t}_{ij}$, то всю сукупність робіт буде виконано за час, який дорівнюватиме довжині критичного шляху $\boldsymbol{t}_{\text{кр}}$.

Віднайдемо алгоритм для побудови критичного шляху в мережному графіку. У перебігу роботи алгоритму для кожної вершини $\boldsymbol{i}$ обчислюється величина $\boldsymbol{t}_p(\boldsymbol{i})$ – максимальна довжина шляху з початку до вершини $\boldsymbol{i}$.

3.4.7 Алгоритм відшукання критичного шляху

1. ***Правильна нумерація мережі***. Нумерація мережі називається *правильною*, якщо номер початку кожної дуги мережі є менше за номер її кінця.

Правильна нумерація ациклічної мережі завжди можлива і виконується в наведений далі спосіб.

Нумеруємо початкову вершину нулем і вилучаємо її з мережі разом з усіма дугами, які виходять з неї. В дістаній мережі неодмінно утворяться вершини, які не мають вхідних дуг (це випливає з ациклічності). Назвемо їх *вершинами першого рангу* і пронумеруємо цифрами 1, 2, … в довільному порядку. Далі вилучимо всі вершини першого рангу і дуги, які виходять з них; вершини без вхідних дуг, котрі з’явилися, назвемо *вершинами другого рангу* і надамо їм чергові номери. Цей процес триває доти, допоки не буде пронумеровано усі вершини мережі.

2. ***Розміщення позначок***. Нехай мережу правильно пронумеровано. Для кожної вершини $\boldsymbol{i}$ обчислюємо позначку $\boldsymbol{t}_p(\boldsymbol{i})$ за такими правилами:

1) $\boldsymbol{t}_p(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

2) переглядаємо вершини в порядку їхніх номерів і для $\boldsymbol{j}$-тої вершини обчислюємо $\boldsymbol{t}_p(\boldsymbol{j})$ за формулою

$$\boldsymbol{t_p(j)} = \max_i \{ \boldsymbol{t_p(i)} + \boldsymbol{t_{ij}} \},$$

де максимум береться за всіма вершинами $\boldsymbol{i}$, які мають дугу ($\boldsymbol{i, j}$), спрямовану до вершини $\boldsymbol{j}$.

По завершенні процесу обчислення позначок величину $\boldsymbol{t}_{\textbf{кр}}$ може бути знайдено як оцінку кінцевої вершини.

3. ***Побудова критичного шляху***. Розпочинаючи з вершини-кінця, послідовно знаходимо дуги $\boldsymbol{(i, j)}$, для яких

$$\boldsymbol{t_p(j) - t_p(i) = t_{ij}}.$$

Ці дуги й утворять критичний шлях.

Розділ 4

АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

4.1 Елементи теорії чисел

4.1.1 Основні поняття теорії подільності

В основі теорії подільності лежить положення про можливість ділення з остачею в області цілих чисел: якщо m – натуральне число, то для кожного цілого числа a існує єдина пара цілих чисел q та r, таких, що

$$a = m \cdot q + r, \text{ де } 0 \le r < m.$$

Число q називається ***неповною часткою***, а число r – остачею від ділення a на m. Якщо m ділить a без остачі, то писатимемо: $m \mid a$.

Число b називається ***загальним кратним*** чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, якщо b ділиться без остачі на кожне з цих чисел. Найменше додатне загальне кратне називається ***найменшим загальним кратним*** (НЗК).

Теорема Якщо числа a та b ділять без остачі число M, то і НЗК цих чисел m також ділить число M без остачі.

Д о в е д е н н я

Подамо число M у вигляді $M = l \cdot m + r$, де $r < m$. Оскільки $a \mid M$ та $a \mid m$, то $a \mid r$. Оскільки $b \mid M$ та $b \mid m$, то $b \mid r$. Отже, r є загальним кратним чисел a та b. З огляду на те, що $r < m$, дійдемо висновку, що $r = 0$.

Число b називається ***загальним дільником*** чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, якщо b ділить без остачі кожне з цих чисел. Найбільший із загальних дільників називається ***найбільшим спільним дільником*** (НЗД) і позначається символом
$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$.

Якщо $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = 1$, то числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ називаються ***взаємно простими.***

Теорема Якщо $a = b \cdot q + r$, то $(a, b) = (b, r)$.

Д о в е д е н н я

Якщо $d \mid b$ та $d \mid r$, то $d \mid a$. Якщо $d \mid a$ та $d \mid b$, то $d \mid r$. Тому множина дільників чисел b та r збігається з множиною дільників чисел a та b. Але тоді збіжні є й найбільші загальні дільники цих чисел.

4.1.2 Алгоритм Евкліда

Нехай a та b – додатні цілі числа і $a > b$. Знаходимо низку рівностей:

$a = b \cdot q_1 + r_1$, $\quad 0 < r_1 < b$;

$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$, $\quad 0 < r_2 < r_1$;

$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$, $\quad 0 < r_3 < r_2$;

……………………………………

$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n, \qquad 0 < r_n < r_{n-1};$

$r_{n-1} = r_n \cdot q_n .$

Остання рівність є неминуча, тому що ряд спадних цілих чисел b, r_1, r_2, … не може мати більше ніж b додатних чисел.

У результаті маємо:

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = ... = (r_{n-1}, r_n) = r_n .$$

Отже, НЗД дорівнює останній остачі алгоритму Евкліда, яка не дорівнює нулеві.

П р и к л а д. Знайти (525, 231).

Р о з в ’ я з а н н я

$$\begin{array}{rrrrl}
 & & & 525 & \multicolumn{1}{|l}{231} \\ \cline{5-5}
 & & & 462 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{4-4}
 & & 231 & \multicolumn{1}{|l}{63} & \\ \cline{4-4}
 & & 189 & \multicolumn{1}{|l}{3} & \\ \cline{3-3}
 & 63 & \multicolumn{1}{|l}{42} & & \\ \cline{3-3}
 & 42 & \multicolumn{1}{|l}{1} & & \\ \cline{2-2}
42 & \multicolumn{1}{|l}{21} & & & \\ \cline{2-2}
42 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\ \cline{1-1}
0 & & & &
\end{array}$$

Остання додатна остача дорівнює 21. Отже, (525, 231) = 21.

4.1.3 Неперервні (ланцюгові) дроби

Нехай a − певне дійсне число. Відокремивши цілу частину цього числа q_1, можна записати $a = q_1 + \dfrac{1}{a_2}$, де дробову частину числа подано у вигляді $\dfrac{1}{a_2}$.

Так само маємо:

$$a_2 = q_2 + \frac{1}{a_3}, \ \ldots, \ a_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{a_n},$$

через що здобуваємо наступний розклад a у неперервний дріб:

$$a = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} .$$

Якщо a − раціональне число, то зазначений процес є скінченим і може виконуватись за допомогою алгоритму Евкліда.

Числа q_1, q_2, … називаються ***неповними частками***. Дроби q_1, $q_1 + \dfrac{1}{q_2}$, $q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{q_3}}$, … називаються ***підхідними дробами***. Підхідні дроби можна звести до звичайного вигляду $\dfrac{P_k}{Q_k}$. Чисельники P_k і знаменники Q_k підхідних дробів можна обчислювати за формулами

$$P_k = q_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2}; \qquad Q_k = q_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2},$$

вважаючи для однаковості $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$.

П р и к л а д. Розкласти на неперервний дріб число $\dfrac{105}{38}$.

Р о з в ’ я з а н н я

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & 105 & \underline{38} \\
 & & & 38 & 76 & 2 \\
 & & 29 & \underline{29} & 1 & \\
 & 9 & 27 & 3 & & \\
2 & \underline{9} & \underline{2} & & & \\
 & 8 & 4 & & & \\
2 & \underline{1} & & & & \\
2 & 2 & & & & \\
0 & & & & &
\end{array}$$

Обчислення підхідних дробів зручно виконувати за схемою:

k	−1	0	1	2	3	4	5
q_k	−	−	2	1	3	4	2
P_k	0	1	2	3	11	47	105
Q_k	1	0	1	1	4	17	38

4.1.4 Конгруенції та їхні властивості

У багатьох питаннях арифметики основну роль відіграють не самі собою числа, а ті остачі, які утворюються при діленні чисел на певне фіксоване число m $(m \neq 0)$.

В и з н а ч е н н я. Цілі числа a та b називаються ***конгруентними за модулем m***, якщо вони мають однакові остачі за їхнього діленні на число m. У цьому разі пишуть: $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

Наприклад: $5 \equiv 17(\mathrm{mod}\ 3)$, $21 \neq 10(\mathrm{mod}\ 5)$.

Якщо a та b конгруентні за модулем m, то $a = \kappa m + r$; $b = lm + r$. Звідси $a - b = (\kappa - l)m = nm$ та $a = b + nm$. Якщо $a = b + nm$, то, вважаючи $b = lm + r$, дістанемо $a = lm + nm + r = km + r$.

Отже, конгруентність чисел a та b за модулем m є рівносильна можливості подати число a у вигляді $a = b + nm$, де $n \in \mathrm{Z}$.

Звідси випливає, що числа a та b є конгруентні за модулем m тоді й лише тоді, коли їхня різниця ділиться на m.

Розглянемо деякі властивості конгруенцій.

1. Конгруенції за одним модулем можна почленно ***додавати***. Нехай $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$; $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$, тоді $a = b + km$, $c = d + lm$. Звідки

$$a + c = b + d + (k + l)m\text{, або } a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\, m).$$

Н а с л і д о к 1. Доданок, який стоїть у будь-якій частині конгруенції, можна переносити до іншої частини, змінивши знак на протилежний.

Й насправді, якщо додати конгруенцію $a + c \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ до очевидної конгруенції $-c \equiv -c(\mathrm{mod}\, m)$, дістанемо $a \equiv b - c(\mathrm{mod}\, m)$.

Н а с л і д о к 2. До кожної частини конгруенції можна додати будь-яке число, кратне до m.

Й насправді, якщо конгруенцію $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ додати до конгруенції $km \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$, то дістанемо $a + km \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

2. Конгруенції за одним модулем можна почленно ***перемножити***.

Нехай $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$; $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$, тоді $a = b + km$; $c = d + lm$.

Звідси $ac = bd + m(kd + bl + klm) = bd + mn$, $(n \in Z)$.

Н а с л і д о к 1. Обидві частини конгруенції можна піднести до степеня, тобто, якщо $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ і $n \in N$, то $a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\ m)$.

Н а с л і д о к 2. Обидві частини конгруенції можна помножити на ціле число.

Й насправді, перемноживши конгруенції $a \equiv b(\mathrm{mod}\, b)$ та $n \equiv n(\mathrm{mod}\, m)$, дістанемо $an \equiv bn(\mathrm{mod}\, m)$.

3. Обидві частини конгруенції та модуль можна ***розділити на будь-який їхній загальний дільник.***

Нехай $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$; $a = a_1 d$; $b = b_1 d$; $m = m_1 d$, тоді $a_1 d = b_1 d + k m_1 d$. Отже, $a_1 = b_1 + k m_1$ *й* $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m_1)$.

4. Обидві частини конгруенції можна ***розділити на їхній загальний дільник,*** якщо останній є взаємно простий з модулем конгруенції.

Нехай $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$; $a = a_1 d$; $b = b_1 d$ й $(m,\ d) = 1$, тоді $(a_1 - b_1)d = km$. Оскільки $(m,\ d) = 1$, то $m \mid (a_1 - b_1)$ й $a_1 \equiv b_1 (\operatorname{mod} m)$.

5. Якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $(a, b) = (b, m)$.

Й насправді, якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $a = b + lm$ й $(a, b) = (b, m)$.

4.1.5 Класи лишків за модулем *m*

Поєднаємо всі числа, які мають при діленні на m одну остачу r, у клас C_r. Оскільки при діленні на m можливі остачі 0, 1, …, $m - 1$, то множина цілих чисел розіб’ється на m класів, які називаються ***класами лишків*** за модулем m. Кожен елемент класу називається ***лишком*** за модулем m.

Наприклад, за модулем 3 існує три класи лишків:

$C_0 = \{\ldots,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ \ldots\}$;

$C_1 = \{\ldots,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \ldots\}$;

$C_2 = \{\ldots,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots\}$.

Лишок, який дорівнює самій остачі r, називається найменшим ***невід’ємним лишком***. Лишок, найменший за абсолютною величиною, називається ***абсолютно найменшим лишком***. Узявши від кожного класу по одному лишку, здобудемо ***повну систему лишків*** за модулем m. Відповідно до властивостей конгруенцій, числа одного класу за модулем m мають з m один і той самий НЗД.

Надто важливі є класи, для яких цей дільник дорівнює одиниці, тобто класи, які містять числа, взаємно прості з модулем m. Узявши від кожного такого класу по одному лишку, здобудемо зведену систему лишків за модулем m. Наприклад, якщо $m = 10$, то зведену систему лишків утворить множина $\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$.

Число елементів у зведеній системі лишків можна визначити за допомогою функції Ейлера (див. п. 4.1.6).

4.1.6 Функція Ейлера

Функцією Ейлера називається функція натурального аргументу $\varphi(n)$, яка визначає число цілих невід’ємних чисел, менших за n, і взаємно простих з n. Вважається, що $\varphi(1) = 1$.

П р и к л а д. За визначенням $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$. Якщо p – просте число, то $\varphi(p) = p - 1$. Покажемо, що

$$\varphi(p^n) = p^{n-1}(1 - p),$$

де n – натуральне число.

Р о з в ’ я з а н н я

Й насправді, серед p^n натуральних чисел є $\dfrac{p^n}{p} = p^{n-1}$ чисел, які діляться на p. Решта $p^n - p^{n-1}$ чисел є взаємно прості з p^n, тобто $\varphi\left(p^n\right) = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1)$.

Можна показати, що функція Ейлера є мультиплікативною, тобто $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$ при $(n, m) = 1$.

Якщо натуральне число N розкласти на прості множники: $N = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$, – то матимемо

$$\varphi(N) = \varphi\left(p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}\right) = \varphi\left(p_1^{m_1}\right) \ldots \varphi\left(p_k^{m_k}\right) =$$
$$= p_1^{m_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots p_k^{m_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

П р и к л а д. Обчислити $\varphi(28)$.

Р о з в ’ я з а н н я

$$\varphi(28) = \varphi\left(2^2 \cdot 7\right) = 28\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 12.$$

В і д п о в і д ь: 12.

Теорема Ейлера Якщо $(a, m) = 1$, то має місце конгруенція $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\operatorname{mod} m)$.

Якщо $m = p$ – просте число, то $\varphi(p) = p - 1$, тоді з теореми Ейлера дістанемо малу теорему Ферма:

$$a^{p-1} \equiv 1(\operatorname{mod} p).$$

П р и к л а д. Знайти остачу від ділення 2^{30} на 13.

Р о з в ’ я з а н н я

Маємо $2^{12} \equiv 1(\operatorname{mod} 13)$. Звідси $2^{24} \equiv 1(\operatorname{mod} 13)$. Оскільки $2^6 \equiv 12(\operatorname{mod} 13)$, то $2^{30} \equiv 12(\operatorname{mod} 13)$.

В і д п о в і д ь: $2^{30} \equiv 12(\operatorname{mod} 13)$.

4.1.7 Конгруенції з одним невідомим

Якщо

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k \ ,$$

де a_k – цілі числа і $(m,\, a_0) \neq m$, то вираз $f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m)$ називається конгруенцією степеня n з невідомою x. Якщо число x_0 задовольняє конгруенції, яка розглядається, то їй задовольнятимуть всі числа, конгруентні x_0 за модулем m. У зв'язку з цим розв'язком конгруенції називається клас лишків за модулем m, елементи якого задовольняють даній конгруенції.

Розв'язок конгруенції можна знайти, випробовуючи числа з повної системи лишків.

П р и к л а д. Розв'язати конгруенцію $2x^3 + 3x - 5 \equiv 0$ (mod 7).

Р о з в ' я з а н н я

Повну систему лишків утворять числа $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Перевіряючи, знаходимо, що конгруенції задовольняє лише $x = 1$. Конгруенція має один розв'язок: $x \equiv 1$(mod 7).

В і д п о в і д ь: $x \equiv 1$(mod 7).

Розв'язати конгруенцію $ax \equiv b$(mod m), де $(a, m) = 1$, можна за допомогою функції Ейлера. Оскільки $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$, то $ba^{\varphi(m)} \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ або $a\left(ba^{\varphi(m)-1}\right) \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$. Отже, $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} (\mathrm{mod}\, m)$ − єдиний розв'язок вихідної конгруенції.

П р и к л а д. Розв'язати конгруенцію $3x \equiv 2(\mathrm{mod}\, 8)$.

$\varphi(8) = \varphi(2^3) = 8\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = 4$. Тоді $x = 2 \cdot 3^3$(mod 8) або $x \equiv 6(\mathrm{mod}\, 8)$.

В і д п о в і д ь: $x \equiv 6(\mathrm{mod}\, 8)$.

Розв'язати конгруенцію $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, де $(a, m) = 1$, можна за допомогою неперервних дробів. Для цього число $\dfrac{m}{a}$ треба розкласти у неперервний дріб і знайти чисельник передостаннього підхідного дробу P_{n-1}. Тоді розв'язок конгруенції матиме вигляд

$$x \equiv (-1)^{n-1} \cdot P_{n-1} \cdot b (\mathrm{mod}\, m),$$

де n – число неповних часток.

П р и к л а д. Розв'язати конгруенцію $111 \cdot x \equiv 75(\mathrm{mod}\ 321)$.

Оскільки $(111, 321) = 3$ і $3 | 75$, то існує три розв'язки. Після ділення на 3 дістанемо $37x \equiv 25(\mathrm{mod}\, 107)$.

Розкладемо $\dfrac{107}{37}$ у неперервний дріб:

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & & & 107 & \underline{37} \\
 & & & 74 & 2 \\ \cline{4-5}
 & & 37 & \multicolumn{1}{|r}{\underline{33}} & \\
 & & 33 & \multicolumn{1}{|r}{1} & \\ \cline{3-4}
 & 33 & \multicolumn{1}{|r}{\underline{4}} & & \\
 & 32 & \multicolumn{1}{|r}{8} & & \\ \cline{2-3}
4 & \multicolumn{1}{|r}{\underline{1}} & & & \\
4 & \multicolumn{1}{|r}{4} & & & \\ \cline{1-1}
0 & & & &
\end{array}$$

Знайдемо чисельники підхідних дробів:

q_k		2	1	8	4
P_k	1	2	3	26	107

Отже, $x_0 = -25 \cdot 26 \pmod{107}$, або $x_0 = 99 \pmod{107}$.

Тоді $x_1 = 99 \pmod{321}$; $x_2 = 206 \pmod{321}$; $x_3 = 305 \pmod{321}$ − всі розв'язки вихідної конгруенції.

В і д п о в і д ь: $x_1 = 99 \pmod{321}$; $x_2 = 206 \pmod{321}$; $x_3 = 305 \pmod{321}$.

4.1.8 Китайська теорема про лишки

Теорема (Китайська теорема про лишки) Нехай числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – попарно взаємно прості. Тоді система конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{m_1}; \\ x \equiv c_2 \pmod{m_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv c_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок за модулем

$$M = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n .$$

Д о в е д е н н я

Впровадимо числа M_k, $M = M_k \cdot m_k$ та N_k, де $N_k \cdot M_k \equiv 1 \pmod{m_k}$. Покажемо, що $x_0 = M_1 N_1 c_1 + \cdots + M_n N_n c_n$ задовольняє всім конгруенціям системи.

Оскільки $m_1 \mid M_k$ за $k \neq 1$, то $x_0 \equiv M_1 N_1 c_1 \pmod{m_1}$. З огляду на те, що $M_1 N_1 \equiv 1 (\operatorname{mod} m_1)$, дістанемо $x_0 \equiv c_1 (\operatorname{mod} m_1)$. В аналогічний спосіб перевіряємо, що $x_0 \equiv c_2 (\operatorname{mod} m_2)$, … ,$x_0 \equiv c_n (\operatorname{mod} m_n)$.

Нехай x_1 − будь-який інший розв'язок системи. Тоді $x_1 \equiv c_k (\bmod\ m_k)$. Звідси $x_0 - x_1 \equiv 0(\bmod\ m_k)$, тобто $m_k \mid (x_0 - x_1)$.

Але тоді й НЗК модулів $m_1 m_2 \ldots m_n = M$ також ділить $x_0 - x_1$, тобто

$$x_0 \equiv x_1 (\bmod\ M).$$

П р и к л а д. Розв'язати систему конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv 2(\bmod\ 3); \\ x \equiv 3(\bmod\ 5); \\ x \equiv 1(\bmod\ 7). \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо: $M_1 = 35$; $M_2 = 21$; $M_3 = 15$. Знайдемо $N_1,\ N_2,\ N_3$ з конгруенцій: $35N_1 \equiv 1(\bmod\ 3)$; $21N_2 \equiv 1(\bmod\ 5)$; $15N_3 \equiv 1(\bmod\ 7)$.

Дістанемо $N_1 = 2,\ N_2 = 1,\ N_3 = 1$. Тоді

$$x = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 + 15 \equiv 218(\bmod\ 105) \text{ або } x \equiv 8(\bmod 105).$$

В і д п о в і д ь: $x \equiv 8(\bmod 105)$.

Китайську теорему про лишки можна узагальнити на випадок коли модулі $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n$ не є попарно взаємно простими, тоді систему конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv c_1 (\bmod\ m_1); \\ x \equiv c_2 (\bmod\ m_2); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv c_n (\bmod\ m_n), \end{cases}$$

можна розв'язати в такий спосіб.

Розв'язуємо спочатку першу конгруенцію:

$$x \equiv x_0 (\bmod\ m_1), \quad \text{де} \quad (c_1 \equiv x_0 (\bmod\ m_1)).$$

Маємо

$$x \equiv x_0 + m_1 \cdot k.$$

Підставивши x у другу конгруенцію, дістанемо конгруенцію відносно k:

$$x_0 + m_1 \cdot k \equiv c_2 (\bmod\ m_2)$$

або

$$km_1 \equiv c_2 - x_0 (\bmod\ m_2).$$

Звідси маємо

$$k \equiv k_0 (\bmod\ m_2); \quad k \equiv k_0 + m_2 \cdot l.$$

Отже

$$x \equiv x_0 + m_1 \cdot (k_0 + m_2 \cdot l) = x_0 + m_1 \cdot k_0 + m_1 m_2 \cdot l.$$

Підставивши x у третю конгруенцію, дістанемо конгруенцію відносно l:

$$x_0 + m_1 \cdot k_0 + m_1 m_2 \cdot l \equiv c_3 \left(\operatorname{mod} m_3\right);$$

$$m_1 m_2 \cdot l \equiv c_3 - x_0 - m_1 \cdot k_0 \left(\operatorname{mod} m_3\right).$$

Здобудемо

$$l \equiv l_0 \left(\operatorname{mod} m_3\right); \quad l \equiv l_0 + m_2 \cdot n,$$

звідки

$$x \equiv x_0 + m_1 \cdot k_0 + m_1 m_2 \left(l_0 + m_2 \cdot n\right) \quad \text{або} \quad x = x_0 + m_1 \cdot k_0 + m_1 m_2 \cdot l_0 + m_1 m_2 \cdot n.$$

Продовжуючи цей процес, здобудемо клас лишків за модулем M, який дорівнює найменшому загальному кратному модулів $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$.

П р и к л а д. Розв’язати систему конгруенцій

$$\begin{cases} 2x \equiv 9\left(\operatorname{mod} 15\right); \\ 5x \equiv 4\left(\operatorname{mod} 7\right); \\ 7x \equiv 3\left(\operatorname{mod} 9\right). \end{cases}$$

Р о з в ’ я з а н н я

Розв’язавши конгруенцію $2x \equiv 9 \left(\operatorname{mod} 15\right)$, дістанемо $x = 12 + 15k$. Підставивши x в другу конгруенцію, матимемо

$$60 + 75k \equiv 4(\operatorname{mod} 7) \text{ або } 75k \equiv 0(\operatorname{mod} 7).$$

Звідси $k = 7 \cdot l;\ x = 12 + 105 \cdot l$.

Підставивши x в третю конгруенцію, дістанемо $84 + 735 \cdot l \equiv 3(\operatorname{mod}\ 9)$ або $735 \cdot l \equiv -81 \left(\operatorname{mod} 9\right)$. Звідси $l = 3n$.

Остаточно

$$x = 12 + 315 \cdot n \quad \text{або} \quad x \equiv 12(\operatorname{mod}\ 315).$$

В і д п о в і д ь: $x = 12 + 315 \cdot n$ або $x \equiv 12(\operatorname{mod}\ 315)$.

4.2 Групи. Кільця. Поля

4.2.1 Закони композиції на множині

Кожна математична теорія вивчає множини, на яких введено певні відношення між елементами. Алгебра вивчає множини, для елементів яких введено відношення, які називаються алгебраїчними операціями. Під n-арною алгебраїчною операцією (внутрішнім законом композиції) на множині M розуміють відображення множини $\underbrace{M \times M \ldots \times M}_{n}$ в M.

Поняття n-арної алгебраїчної операції є рівносильне до поняття відношення R: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) \in R$, якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to b$. Вельми важливе значення в алгебрі мають бінарні алгебраїчні операції. Під бінарною операцією на множині M розумітимемо закон, за яким кожним двом елементам − a та b − множини M ставиться у відповідність певний елемент d цієї множини:

$(a, b) \to d$. Для запису композиції елементів a та b їх позначають спеціальним знаком. Закон композиції, який позначається знаком «+», переважно називають додаванням і стверджують, що для нього прийнято адитивне позначення. Закон композиції, який позначається знаком «•», переважно називають множенням і стверджують, що для нього прийнято мультиплікативне позначення. При вивченні загальних властивостей бінарних операцій використовують символ «∗».

Прикладом бінарної операції є операція векторного множення векторів. Операція скалярного добутку векторів не є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки скалярний добуток є число, а не вектор. Для задання бінарної алгебраїчної операції складають таблицю операції (таблицю Келлі), рядки і стовпці якої позначають елементами множини M, а на перетинанні рядка і стовпця ставиться відповідний результат операції:

*	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	**…**	$\boldsymbol{a_n}$
$\boldsymbol{a_1}$	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	…	$a_1 * a_n$
…	…	…	…	…
$\boldsymbol{a_n}$	$a_n * a_1$	…	…	$a_n * a_n$

Кількість бінарних операцій на множині з n елементів можна визначити в такий спосіб: маючи n^2 клітинок таблиці, до кожної з них слід записати будь-який з n елементів множини M. Звідси випливає, що кількість бінарних операцій на множині з n елементів дорівнює n^{n^2}.

Якщо множина складається з елементів a та b, то існує $2^{2^2} = 16$ операцій.

Наприклад:

*	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}$	b	a
$\boldsymbol{b}$	a	b

Множина, в якій введено бінарну алгебраїчну операцію, називається ***групоїдом.***

Бінарна операція називається ***асоціативною***, якщо для будь-яких елементів a, b, c множини M

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Прикладом асоціативної операції є операція множення матриць. Прикладом неасоціативної операції є операція векторного добутку векторів, тому що, наприклад, $(\bar{i} \times \bar{j}) \times \bar{j} \neq \bar{i} \times (\bar{j} \times \bar{j})$.

Множина, для якої введена асоціативна операція, називається ***півгрупою.*** Бінарна операція називається ***комутативною***, якщо для будь-яких елементів множини M

$$a * b = b * a.$$

Прикладом комутативної операції є операція додавання матриць, а прикладом некомутативної операції є операція множення матриць.

Векторний добуток векторів є антикомутативною операцією:

$$\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}\,.$$

Бінарна операція $*$ називається ***дистрибутивною зліва*** відносно операції $\circ$, якщо для будь-яких елементів a, b, c

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c).$$

Операція називається дистрибутивною справа, якщо

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c).$$

Операція піднесення до степеня є дистрибутивна відносно множення справа $(a \bullet b)^c = a^c \bullet b^c$. При цьому $a^{bc} \neq a^b \bullet a^c$, тобто зліва ця операція не є дистрибутивною відносно множення. Операція множення чисел є дистрибутивною відносно додавання чисел:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Але операція додавання не є дистрибутивною відносно множення:

$$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c).$$

Операції перерізу й об'єднання множин є дистрибутивною відносно одна одної і зліва, і справа.

Стверджують, що для означеної на множині M бінарної операції $\circ$ здійсненна є обернена бінарна операція, якщо для кожних елементів a та b множини M існують такі елементи $x \in M$, $y \in M$, що $a \circ x = b$ та $y \circ a = b$.

Елемент e називається ***нейтральним елементом*** відносно операції $\circ$, якщо для кожного елемента a

$$a \circ e = a \quad \text{і} \quad e \circ a = a.$$

Нейтральний елемент є єдиний, оскільки, якщо e' − інший нейтральний елемент, то

$$e = e \circ e' = e'\,.$$

Нейтральний елемент відносно операції додавання називається ***нульовим*** елементом і позначається символом 0.

Нейтральний елемент відносно операції множення називається ***одиничним*** елементом і позначається символом 1.

Елемент a' називається ***симетричним*** елементу a у групоїді з нейтральним елементом e, якщо $a \circ a' = a' \circ a = e$.

Елемент a', симетричний до a відносно операції додавання, називається протилежним до a і позначається символом $-a$. Елемент a', симетричний до a відносно операції множення, називається оберненим до елемента a і позначається символом a^{-1}.

4.2.2. Групи

Групою називається множина з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією, для якої існує обернена операція.

Група називається скінченною, якщо вона містить скінчену множину елементів. Число елементів скінченної групи називається ***порядком*** групи. Група називається ***комутативною***, або ***абельовою***, якщо групова операція є комутативна.

У теорії груп зазвичай використовується мультиплікативна термінологія (тобто групова операція називається множенням, нейтральний елемент − одиничним, симетричний елемент − оберненим). З визначення випливає, що в кожній групі існує одиничний (нейтральний) елемент і для кожного елемента групи існує обернений елемент. З іншого боку, можна показати, що якщо асоціативна операція гарантує існування нейтрального та оберненого елементів, то множина з такою операцією є групою. У зв'язку з цим часто користуються іншим визначенням групи, рівносильним до першого.

Не порожня множина G, на якій визначена бінарна операція, називається ***групою***, якщо виконуються такі умови:

1) операція є асоціативна;
2) в G існує нейтральний елемент;
3) для кожного елемента a існує обернений елемент a^{-1}.

П р и к л а д и

1) Множина цілих чисел є абельовою групою відносно операції додавання. Нейтральним елементом групи є число 0. Симетричним елементом для числа n є число $-n$. Дана група називається адитивною групою цілих чисел.

2) Множина класів лишків за модулем m є групою відносно операції додавання класів $\left(\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}\right)$. Нейтральним елементом є клас $\overline{0}$. Симетричним елементом для елемента $\overline{x}$ є елемент $\overline{m-x}$.

4.2.3 Підгрупи

Множина елементів G_1 групи G називається ***підгрупою***, якщо вона є групою відносно операції, визначеної на групі G.

Наприклад, множина парних чисел є підгрупою адитивної групи цілих чисел.

Кожна група має дві підгрупи – саму групу й одиничну групу, яка складається з нейтрального елемента. Зазначені підгрупи називають ***тривіальними***. Відмінні від тривіальних підгрупи називають власними підгрупами групи.

Вочевидь, що якщо певна підмножина G_1 групи G замкнена відносно множення та обернення елементів, то вона є підгрупою групи G. Можна показати, що, якщо група є скінченою, то однієї умови замкнености відносно групової операції достатньо, щоби підмножина елементів групи була підгрупою.

Введемо позначення: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n}$; $a^0 = e$, $a^{-n} = a^n = \underbrace{a^{-1} \times a^{-1} \times \ldots \times a^{-1}}_{n}$.

Розглянемо множину $G_a = \{a^m | \ m \in Z\}$. Легко перевірити, що ця множина є підгрупою групи G. Підгрупа G_a називається циклічною підгрупою групи G, породженою елементом a.

Група G називається ***циклічною***, якщо кожний її елемент є цілим степенем певного одного елемента цієї групи. Наприклад, група Z_m класів лишків за модулем m є циклічною, тому що кожний елемент $\bar{k}$ цієї групи дорівнює $\underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\ldots+\bar{1}}_{k}$, а $0 = \underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\ldots+\bar{1}}_{m}$.

Взагалі можливі два випадки. У першому випадку всі степені породжуючого елемента є різні. Тоді стверджують, що цей елемент має нескінченний порядок.

У другому випадку серед степенів елемента є збіжні степені. Нехай $a^k = a^l$ та $k > l$. Тоді $a^{k-l} = a^0 = e$.

В и з н а ч е н н я. Найменший додатний показник n, такий, що $a^n = e$, називається ***порядком елемента***.

Теорема Циклічна підгрупа, породжена елементом a порядку n, є нскінченною групою n-го порядку.

Для доведення теореми слід показати, що всі степені елемента a містяться серед степенів $e = a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}$. Подамо ціле число N у вигляді $N = n \cdot m + r$, де $0 \le r \le n-1$. Тоді $a^N = a^{nm+r} = a^r$.

4.2.4 Розкладання групи на підгрупи. Теорема Лагранжа

Нехай H – підгрупа групи G та $g \notin H$, $g \in G$. Множина всіх добутків $g \cdot h$, де h – будь-який елемент групи H, називається лівим суміжним класом групи G за підгрупою H і позначається символом gH. В аналогічний спосіб визначується правий суміжний клас Hg. Покажемо, що в суміжному класі немає однакових елементів і, отже, що кожен суміжний клас містить стільки елементів, скільки їх містить підгрупа H.

Нехай $h_1, \ h_2 \in H, \ h_1 \ne h_2$ й $gh_1 = gh_2$. Помноживши обидві частини рівності на g^{-1}, дістанемо $g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2$. Звідси $h_1 = h_2$, що суперечить умові.

Теорема Суміжні класи g_1H та g_2H, які мають хоча б один загальний елемент, збігаються.

Нехай $g_1x = g_2y$, де $x, y \in H$. Тоді $g_1 = g_2yx^{-1}$. Оскільки $yx^{-1} \in H$, то $yx^{-1}H = H$. Тому $g_1H = g_2(yx^{-1})H = g_2H$. З властивостей суміжних класів випливає, що вся група розпадається на неперерізувані ліві суміжні класи за підгрупою H (при цьому одним із суміжних класів буде сама підгрупа $H = eH$):

$$G = HUg_1HU\ldots Ug_{k-1}H...$$

Якщо порядок групи дорівнює n, порядок підгрупи k дорівнює m, то справедлива є рівність $n = m \cdot k$, що є змістом поданої далі теореми.

Теорема Лагранжа Порядок кожної підгрупи скінченої групи є дільником порядку самої групи.

Розглянемо деякі наслідки з теореми Лагранжа.

1. Якщо порядок групи дорівнює простому числу, то така група не має власних підгруп.

2. Порядок елемента скінченої групи є дільником порядку групи. Справедливість даного наслідку випливає з того, що порядок циклічної підгрупи, породженої елементом *a,* дорівнює порядку цього елемента.

3. Для будь-якого елемента a скінченої групи порядку n справедлива є рівність

$$a^n = e.$$

Дійсно, якщо m – порядок елемента a, то $n = m \cdot k$ та $a^n = (a^m)^k = e$.

Гомоморфізми та ізоморфізми груп

Нехай G_1 та G_2 − певні групи з груповими операціями “•” та “*” відповідно.

Відображення φ групи G_1 у групу G_2 називається ***гомоморфним*** відображенням, або ***гомоморфізмом***, якщо для кожних двох елементів x та y групи G_1 виконується умова

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y).$$

П р и к л а д. Поставимо у відповідність кожному елементу x адитивної групи цілих чисел той клас лишків за модулем m, якому належить цей елемент:

$$\varphi(x) = \overline{x}.$$

Оскільки $\varphi(x_1+x_2) = \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2} = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, то зазначене відображення є гомоморфним.

Взаємнооднозначне гомоморфне відображення групи G_1 на групу G_2 називається ***ізоморфним відображенням*** або ***ізоморфізмом***. Дві групи називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм однієї групи на іншу.

П р и к л а д. Показати, що мультиплікативна група додатних дійсних чисел є ізоморфна до адитивної групи дійсних чисел.

Розглянемо відображення $\varphi(x) = \ln x$. Оскільки $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, то дане відображення є гомоморфізмом. Нехай $\ln x_1 = \ln x_2$. Тоді $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = 0$, $\dfrac{x_1}{x_2} = 1$ і $x_1 = x_2$. Отже, дане відображення є ін’єктивне.

Теорема Кожна нескінчена циклічна група є ізоморфна до адитивної групи цілих чисел.

Нехай G − нескінчена циклічна група і a – породжуючий елемент цієї групи. Тоді $G = \left\{ a^{-n}, ..., a^0, a^1, ... \right\}$.

Розглянемо відображення $\varphi\left(a^n\right) = n$.

Тоді $\varphi\left(a^n \cdot a^m\right) = \varphi\left(a^{n+m}\right) = n + m = \varphi\left(a^n\right) + \varphi\left(a^m\right)$.

Оскільки однозначність відображення очевидна, то це є ізоморфізм.

4.2.5 Кільця

Кільцем називається множина, на якій визначені дві бінарні алгебраїчні операції (додавання та множення), при цьому відносно однієї з цих операцій множина є абелевою групою, а друга операція є дистрибутивна відносно першої.

Кільце називається ***комутативним***, якщо друга операція є комутативна, і ***асоціативним***, якщо вона є асоціативна.

П р и к л а д

1. Множина класів лишків за модулем m є комутативно-асоціативним кільцем відносно операцій додавання та множення класів.

2. Множина всіх векторів у тривимірному просторі є кільцем відносно операцій додавання та векторного множення. Це кільце не є комутативне і не є асоціативне.

Далі розглядатимемо асоціативні кільця. Хоча в асоціативно-комутативному кільці операції є близькі за своїми властивостями до арифметичних операцій над числами, не всі властивості арифметичних операцій зберігаються в кільцях. Наприклад, у кільці класів лишків за модулем чотири $\overline{2} \cdot \overline{2} = 0$, що не має місця в числовому кільці.

В и з н а ч е н н я. Елементи a та b називаються ***дільниками нуля***, якщо $a \cdot b = 0$ і при цьому $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Комутативне кільце, в якому немає дільників нуля, називається ***областю цілісності.***

Підмножина K_1 кільця K називається ***підкільцем*** кільця K, якщо K_1 є кільцем відносно операцій, визначених на K.

Підкільце I кільця K називається лівим (правим) ***ідеалом кільця***, якщо для кожних елементів $a \in I$ та $x \in K$ добуток $x \cdot a$ $(a \cdot x)$ належить до I.

Ідеал I, який є і лівим і правим ідеалом, називається двобічним ідеалом, чи просто ідеалом кільця K.

Нехай a – будь-який елемент кільця K. Множина $K \cdot a$ усіх елементів вигляду $x \cdot a$, де $x \in K$, є ***лівим ідеалом***, а множина $a \cdot K$ усіх елементів вигляду $a \cdot x$ – ***правим ідеалом***. Множина $\{x \cdot a + n \cdot a \mid x \in K,\ n \in Z\}$ є двобічнимм ідеалом. Такий ідеал називається ***головним ідеалом***, породженим елементом a, і позначається символом (a).

Нехай $K_1 = \{M_1; +; \bullet\}$ і $K_2 = \{M_2; \oplus; \otimes\}$ − певні кільця. Відображення φ кільця K_1 у кільце K_2 називається ***гомоморфним*** відображенням, або ***гомоморфізмом***, якщо для кожних двох елементів a та b кільця K_1 виконується умова

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \otimes \varphi(b).$$

Взаємнооднозначне гомоморфне відображення K_1 на K_2 називається ***ізоморфним*** відображенням, або ***ізоморфізмом***.

4.2.6 Поля

Може статися, що ненульові елементи кільця утворюватимуть групу відносно операції множення. Таке кільце називається ***кільцем з діленням***, або ***тілом***. Комутативне тіло називається ***полем***.

Поле являє собою єдність двох абелевих груп – адитивної та мультиплікативної.

П р и к л а д. Нехай p – просте число. Покажемо, що кільце класів лишків цілих чисел за модулем p є полем. Для доведення доволі показати, що кожний ненульовий елемент $\bar{k}$ має обернений елемент.

Оскільки, за теоремою Ферма, $k^{p-1} \equiv 1(\text{mod}\, p)$, то $k \cdot k^{p-2} = 1\left(\text{mod} \quad p\right)$. Отже, елементом, оберненим до елемента $\bar{k}$, є клас $\overline{k^{p-2}}$.

Таким чином, існує нескінчена множина скінченних полів – Z_2, Z_3, Z_5, … . Скінченні поля називаються полями Галуа і позначаються символами $GF(n)$, де n – порядок поля.

Підмножина P_1 поля P називається ***підполем*** поля P, якщо вона є полем відносно операцій, визначених на P. Поле P при цьому називається розширенням поля P_1. Поле P називається ***простим***, якщо воно не містить жодних підполів. Поля P_1 та P_2 називаються і***зоморфними***, якщо вони є ізоморфні як кільця. Можна показати, що кожне просте поле є ізоморфне до поля або раціональних чисел, або класів лишків за модулем простого числа.

Стверджують, що поле має характеристику p, якщо $p \cdot e = \underbrace{e + \ldots + e}_{p} = 0$ і $n \cdot e \neq 0$ за $n < p$. Якщо $n \cdot e = 0$ лише за $n = 0$, то полю приписують нульову (або нескінчену) характеристику.

Усі числові поля мають нульову характеристику.

4.2.7 Кільця многочленів

Многочленом степеня n над полем P називається вираз вигляду $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, де $a_k \in P$ $\left(k = \overline{0, n}\right)$. Многочлен називається зведеним, якщо $a_0 = 1$.

Для многочленів над довільними полями має місце алгоритм ділення з остачею: для кожної пари многочленів $p(x)$ та $q(x)$ знайдеться єдина пара многочленів $s(x)$ та $r(x)$, таких, що $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$, де степінь остачі $r(x)$ є менший за степінь дільника $q(x)$. Якщо остача від ділення многочлена

$p(x)$ на многочлен $q(x)$ дорівнює $r(x)$, то використовуватимемо позначення $r(x)=\langle p(x)\rangle_{q(x)}$.

Справедливі є такі рівності:
$\langle p(x)+q(x)\rangle_{m(x)}=\langle p(x)\rangle_{m(x)}+\langle q(x)\rangle_{m(x)}$; $\langle p(x)\cdot q(x)\rangle_{m(x)}=\left\langle\langle p(x)\rangle_{m(x)}\cdot\langle q(x)\rangle_{m(x)}\right\rangle_{m(x)}$.

Доведемо справедливість другої рівності. Нехай $p(x)=a(x)\cdot m(x)+b(x)$; $q(x)=c(x)\cdot m(x)+d(x)$. Тоді

$$p(x)\cdot q(x)=a(x)\cdot c(x)\cdot m^2(x)+b(x)\cdot c(x)\cdot m(x)+a(x)\cdot d(x)\cdot m(x)+b(x)\cdot d(x).$$

Отже, $\langle p(x)\cdot q(x)\rangle_{m(x)}=\langle b(x)\cdot d(x)\rangle_{m(x)}=\left\langle\langle p(x)\rangle_{m(x)}\langle q(x)\rangle_{m(x)}\right\rangle_{m(x)}$.

Елемент a поля P називається коренем многочлена $q(x)$, якщо $q(a)=0$. Елемент a є коренем $q(x)$ тоді й лише тоді, коли $x-a$ ділить $q(x)$.

Многочлен $p(x)$ називається незвідним над полем P, якщо його не можна подати у вигляді добутку многочленів меншого за $p(x)$ степеня над полем P.

Наприклад, многочлен x^2+1 є незвідний над полем $GF(2)$, тому що $x^2+1=(x+1)^2$, оскільки $x+x=0$.

Множина многочленів менших за n степенів є замкнена відносно операції додавання, але не замкнена відносно операції множення. Властивість замкненості матиме місце, якщо звичайну операцію множення замінити на операцію множення за модулем певного многочлена степеня n. Для цього зафіксуємо певний многочлен $q(x)$ степеня n і добутком многочленів $a(x)$ та $b(x)$ назвемо остачу від ділення звичайного добутку $a(x)\cdot b(x)$ на многочлен $q(x)$. Нескладно перевірити, що множина всіх многочленів менших за n степенів є кільцем відносно операцій додавання та множення за модулем многочлена степеня n. Таке кільце називається кільцем лишків за модулем многочлена $q(x)$ і позначається символом $P[x]/q(x)$.

П р и к л а д. Нехай $q(x)=x^3+1$ над $GF(2)$. Тоді кільце $GF(2)[x]/(x^3+1)$ складається з многочленів 0; 1; x; $x+1$; x^2; x^2+1; x^2+x; x^2+x+1.

4.2.8 Скінченні поля та многочлени

Теорема Кільце $P[x]/q(x)$, де $q(x)$ – незвідний многочлен, є полем.

Д о в е д е н н я

Для доведення доволі показати, що кожний ненульовий елемент кільця має обернений елемент.

Нехай $s(x)$ − ненульовий елемент кільця. Оскільки $q(x)$ є незвідний, то НЗД многочленів $s(x)$ та $q(x)$ дорівнює 1. За результатом алгоритму Евкліда знаходяться такі многочлени $u(x)$ та $\upsilon(x)$, що $1 = u(x)\cdot q(x) + \upsilon(x)\cdot s(x)$. Тоді

$$1 = \langle 1\rangle_{q(x)} = \langle u(x)\cdot q(x) + \upsilon(x)\cdot s(x)\rangle_{q(x)} = \langle u(x)\cdot q(x)\rangle_{q(x)} + \langle \upsilon(x)\cdot s(x)\rangle_{q(x)} =$$

$$= \left\langle \langle \upsilon(x)\rangle_{q(x)} \cdot \langle s(x)\rangle_{q(x)} \right\rangle_{q(x)}.$$

Оскільки степінь многочлена $s(x)$ є менший за степінь многочлена $q(x)$, то $\langle s(x)\rangle_{q(x)} = s(x)$. Отже $1 = \left\langle \langle \upsilon(x)\rangle_{q(x)} \cdot s(x) \right\rangle_{q(x)}$ і елемент $\langle \upsilon(x)\rangle_{q(x)}$ є оберненим елементом для $s(x)$.

Над полем порядку m є m^n многочленів менших за n степенів, тому що кожний з коефіцієнтів многочлена $a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$ може набути m значень. Отже, якщо знайдено незвідний многочлен степеня n над полем $GF(m)$, то можна побудувати розширення $GF(m^n)$ поля $GF(m)$.

П р и к л а д. Многочлен $x^2 + x + 1$ є незвідний над полем $GF(2)$, тому що він не має коренів у цьому полі. Тому поле $GF(2)[x]/(x^2 + x + 1)$ є полем $GF(4)$. Елементами цього поля є многочлени:

$$0;\ 1;\ x;\ x+1.$$

Таблиці Келі додавання та множення у полі $GF(4)$ мають такий вигляд:

+	**0**	**1**	***x***	***x* + 1**
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
***x* + 1**	$x+1$	x	1	0

×	**0**	**1**	***x***	***x* + 1**
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
***x* + 1**	0	$x+1$	1	x

Враховуючи, що $x^2 = x + 1$, дійдемо висновку, що всі ненульові елементи поля $GF(4)$ є степенями елемента x:

$$x^0 = 1;\ x^1 = x;\ x^2 = x + 1.$$

Розділ 5

ПРИКЛАДИ

5.1 Розв'язання задач з теми «Множини»

5.1.1 Операції над множинами і відношеннями

Приклад 5.1 Знайти $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо

$$A = \{2, 5, 11\};\ B = \{2, 3, 7\}.$$

Р о з в ' я з а н н я

а) $A \bigcup B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$;

б) $A \bigcap B = \{2\}$;

в) $A \setminus B = \{5, 11\}$;

г) $B \setminus A = \{3, 7\}$.

В і д п о в і д ь: *а*) $\{2, 3, 5, 7, 11\}$; *б*) $\{2\}$; *в*) $\{5, 11\}$; *г*) $\{3, 7\}$.

Приклад 5.2 Задані множини A, B та C:

$$A = \{2, 3, 5, 6, 9, 10, 11\};\ B = \{1, 2, 3, 4, 8\};\ \ C = \{3, 4, 13\}.$$

Визначити множини:

а) $A \bigcup (B \bigcap C)$;

б) $(A \bigcup B) \setminus C$;

в) $A \oplus C$;

г) $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus C)$;

д) $(A \bigcap B) \bigcup (B \bigcup C) \bigcup (A \bigcap C)$;

е) $B \times C$.

ж) Виписати всі підмножини множини C.

Р о з в ' я з а н н я

а) $B \bigcap C = \{3, 4\}$, тому $A \bigcup (B \bigcap C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11\}$;

б) $A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$; $(A \bigcup B) \setminus C = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$;

в) $A \oplus C = (A \setminus C) \bigcup (C \setminus A) = \{2, 5, 6, 9, 10, 11\} \bigcup \{4, 13\} = \{2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13\}$;

г) Оскільки $(A \setminus B) = \{5, 6, 9, 10, 11\}$; $(B \setminus C) = \{1, 2, 8\}$, то

$$(A \setminus B) \bigcup (B \setminus C) = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11\};$$

д) $(A \bigcap B) \bigcup (B \bigcap C) \bigcup (A \bigcap C) = \{2, 3\} \bigcup \{3, 4\} \bigcup \{3\} = \{2, 3, 4\}$;

е) $B \times C = \{(1, 3); (1, 4); (1, 13); (2, 3); (2, 4); (2, 13); (3, 3); (3, 4); (3, 13);$

$$(4, 3); (4, 4); (4, 13); (8, 3); (8, 4); (8, 13)\};$$

ж) $S=\{\varnothing,\{3\},\{4\},\{13\},\{3,4\},\{3,13\},\{4,13\},\{3,4,13\}\}$.

В і д п о в і д ь: *а*) $\{2,3,4,5,6,9,10,11\}$; *б*) $\{1,2,5,6,8,9,10,11\}$; *в*) $\{2,4,5,6,9,10,11,13\}$; *г*) $\{1,2,5,6,8,9,10,11\}$; *д*); $\{2,3,4\}$; *е*)$\{(1,3);(1,4);(1,13);(2,3);(2,4);(2,13);(3,3);(3,4);(3,13);(4,3);(4,4);(4,13);(8,3);(8,4);(8,13)\}$; *ж*) $\{\varnothing,\{3\},\{4\},\{13\},\{3,4\},\{3,13\},\{4,13\},\{3,4,13\}\}$.

Приклад 5.3 *а*) Довести тотожність $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

б) Спростити вираз $\overline{\overline{A}\cup C}\cup(B\cup B\cap C)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{B\cup C}\right)$.

Р о з в ’ я з а н н я

а) *Перший спосіб*. Застосуємо властивості дій над множинами.

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=(A\cap A)\cup(A\cap C)\cup(B\cap A)\cup(B\cap C)=$$
$$=A\cup(A\cap C)\cup(B\cap A)\cup(B\cap C)=(A\cap\Omega)\cup(A\cap C)\cup(A\cap B)\cup(B\cap C)=$$
$$=A\cap(\Omega\cup C\cup B)\cup(B\cap C)=(A\cap\Omega)\cup(B\cap C)=A\cup(B\cap C),$$

де Ω − універсальна множина. Потрібне доведено.

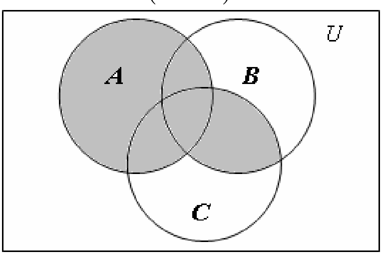
Другий спосіб. Доведемо задану тотожність, застосовуючи відношення належності. Щоби переконатися у справедливості тотожності

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

візьмімо довільний елемент $x\in A\cup(B\cap C)$, тоді $x\in A$, або $x\in B\cap C$. Якщо $x\in A$, то x належить до об'єднання A з кожною множиною B та C, тобто $x\in A\cup B$ і $x\in A\cup C$, тому x є елемент перерізу множин $A\cup B$ та $A\cup C$, звідки випливає, що $x\in(A\cup B)\cap(A\cup B)$. Якщо $x\in B\cap C$, то $x\in B$ та $x\in C$, тому $x\in A\cup B$ та $x\in A\cup C$, тоді і в цьому разі x є елемент перерізу тих самих множин. Аналогічно доводиться зворотний напрямок. Задану тотожність доведено.

Розглядуване відношення можна довести також геометрично. Для цього накреслимо відповідні круги Ейлера−Венна для лівої та правої частин тотожності й з'ясуємо, збігаються вони чи ні. Якщо області збігаються, то тотожність є справедлива, а за розбіжності − вона не має місця (див. рис. 5.1).

$A\cup(B\cap C)$



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

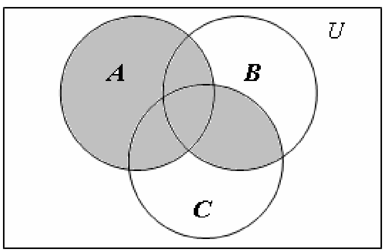


Рисунок 5.1

б) Спростимо вираз $\overline{\overline{A}\cup C}\cup(B\cup B\cap C)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{B\cup C}\right)$. Оскільки

$$(B\cup B\cap C)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{B\cup C}\right)=\left(B\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\left(\overline{B\cup C}\right)\right)\cup(B\cap C)\cap\overline{B}\cup$$

$$\cup(B\cap C)\cap\left(\overline{B\cup C}\right)=\varnothing\cup B\cap\left(\overline{B\cup C}\right)\cup B\cap C\cap\overline{B}\cup B\cap C\cap\overline{B\cup C}=$$

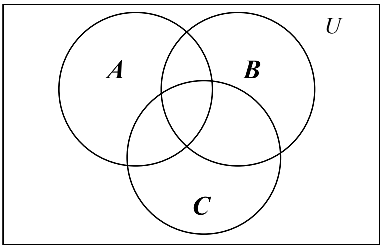
$$=B\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup B\cap C\cap\overline{B}\cup B\cap C\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing,$$

то

$$\overline{\overline{A}\cup C}\cup(B\cup B\cap C)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{B}\cap C\right)=A\cap\overline{C}\cup\varnothing=A\cap\overline{C}.$$

В і д п о в і д ь: $A\cap\overline{C}$.

Приклад 5.4 На діаграмі Ейлера-Венна трьох множин − *A*, *B*, *C*

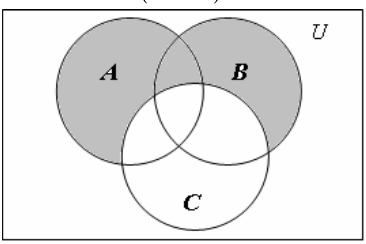


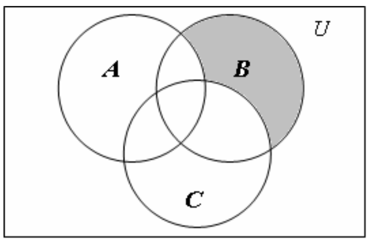
зазначити точки, які належать до множини $\left((A\cup B)\setminus C\right)\cap\overline{A}$.

Р о з в ’ я з а н н я

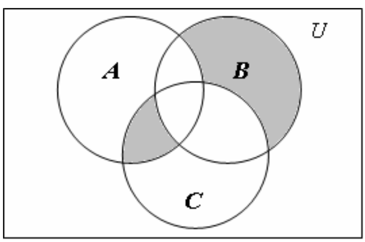
Послідовно знаходимо:

$(A\cup B)\setminus C$ та $\left((A\cup B)\setminus C\right)\cap\overline{A}$





Приклад 5.5 Опишіть множини, які відповідають затемненій частині діаграми Ейлера-Венна:

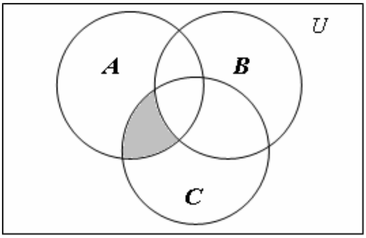


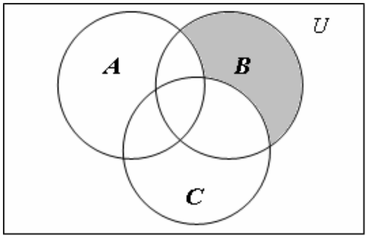
.

Р о з в ’ я з а н н я

Послідовно знаходимо:

$\left(A\cap C\right)\setminus B$ $\qquad\qquad$ $\overline{\left(A\cup C\right)}\cap B$





В і д п о в і д ь: $\left(A\cap C\right)\setminus B\cup\overline{\left(A\cup C\right)}\cap B$.

Приклад 5.6 Задано множини: $A=\{a,b,c\}$; $B=\{3,4\}$; $C=\{d,e,f\}$.

Знайти:

а) $A\times B\times C$;

б) $\left(A\times B\times C\right)^{-1}=C\times B\times A$;

в) $\left(A\times B\right)\times C$.

Р о з в ’ я з а н н я

а) $A\times B\times C=\{(a,3,d),(a,3,e),(a,3,f),(a,4,d),(a,4,e),(a,4,f),(b,3,d),(b,3,e),$ $(b,3,f),(b,4,d),(b,4,e),(b,4,f),(c,3,d),(c,3,e),(c,3,f),(c,4,d),(c,4,e),(c,4,f)\}$;

б) $\left(A\times B\times C\right)^{-1}=\{(d,3,a),(e,3,a),(f,3,a),(d,4,a),(a,4,a),(f,4,a),(d,3,b),$ $(e,3,b),(f,3,b),(d,4,b),(e,4,b),(f,4,b),(d,3,c),(e,3,c),(f,3,c),(d,4,c),(e,4,c),(f,4,c)\}$;

в) $\left(A\times B\right)\times C=\{(a,3),(a,4),(b,3),(b,4),(c,3),(c,4),\ \}\times C=$ $=\{((a,3),d),((a,3),d),((a,3),d),((a,3),d),((a,3),d),((a,3),d),((a,3),e),((a,4),e),$ $((b,3),e),((b,4),e),((c,3),e),((c,4),e),((a,3),f),((a,4),f),((b,3),f),$ $((b,4),f),((c,3),f),((c,4),f)\}$.

Приклад 5.7 На множині $A=\{1,2,3,4\}$ задано відношення

$$R=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

Треба:

а) побудувати матрицю та графік відношення R;

б) побудувати відношення $R^2\cap R^{-1}$;

в) побудувати переріз відношення R за елементом 2;

г) визначити, властивості відношення R.

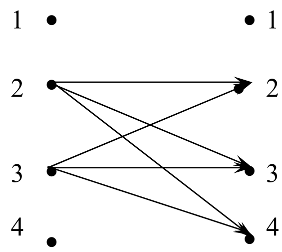
Р о з в ’ я з а н н я

а) Таблиця відношення R має вигляд

R	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	0	0

.

Схематичне зображення відношення R є



б) Знайдемо відношення $R^2 = R \circ R$. Оскільки
$R^2 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$, то $R^2 = R$.

Знайдемо відношення R^{-1}

$$R^{-1} = \{(2,2),(3,2),(4,2),(2,3),(3,3),(4,3)\},$$

тому

$$R^2 \cap R^{-1} = \{(2,2),(3,2),(2,3),(3,3)\}.$$

в) $R(2) = \{2, 3, 4\}$.

г) Оскільки $(1,1) \notin R$, то відношення R − не є рефлексивне.

Відношення R є транзитивним, так як з a_1Ra_2 та a_2Ra_3 випливає a_1Ra_3.

Відношення R не буде симетричним, оскільки з a_1Ra_2 не випливає a_2Ra_1, тобто $R \neq R^{-1}$.

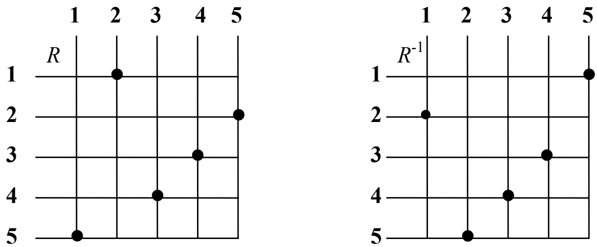
Відношення R не є асиметричним і не є антисиметричним, оскільки не виконуються відповідно умови $R \cap R^{-1} = \varnothing$ та $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$, де Δ_A − діагональ множини A.

Приклад 5.8 Записати функції f та f^{-1}, відповідні до відношень R та R^{-1} у вигляді $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} & a_{i_4} & a_{i_5} \end{bmatrix}$. Перевірити, що $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_A$, де 1_A − тотожне відображення множини $A\{1, 2, 3, 4, 5\}$ на себе, а символ «$\circ$» означає послідовне виконування відображень f та f^{-1}. Накреслити схематичне зображення відношень R та R^{-1}, де

$$R = \{(1,2),(2,5),(3,4),(4,3),(5,1)\}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Графіки відношень R та R^{-1} мають відповідно вигляд



а функції f та f^{-1} є:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Перевіримо, що $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_A$.

$$f \circ f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 1_A;$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 1_A.$$

Приклад 5.9 Встановити, чи є відношення

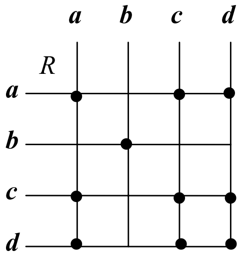
$$R = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(c,a),(c,c),(c,d),(d,a),(d,c),(d,d)\},$$

задане на множині $A = \{a,b,c,d\}$, відношенням часткового порядку? Якщо так, то записати його в матричному вигляді.

Р о з в ’ я з а н н я

Відношення R буде відношенням часткового порядку, якщо воно є рефлексивне, антисиметричне та транзитивне, тобто якщо виконуються співвідношення: aRa для кожного $a \in A$; (a,b) та $(b,a) \in R$; з співвідношень aRb, bRc випливає співвідношення aRc.

Перевіримо виконання наведених умов за графіком та таблицею.



R	a	b	c	d
a	1		1	1
b		1		
c	1		1	1
d	1		1	1

Вочевидь, що подані умови виконуються.

5.1.2 Перевірочні тести

1 Задано множину $\{x$: x – ціле і $x^2 \leq 25\}$. Яка з наведених нижче множин збігається з вихідною множиною?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; *б*) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

в) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$; *г*) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2 Задано множину $\{x$: x – додатне парне ціле число і менше за $14\}$. Яка з наведених нижче множин збігається з вихідною множиною?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; *б*) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$;

в) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; *г*) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

3 Задано множину $\{a\}$. Які з наведених нижче множин вичерпують всі підмножини цієї множини?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\varnothing$, $\{a\}$; *б*) $\{a\}$; *в*) $\{0, a\}$; *г*) $\varnothing$, $\{0, a\}$.

4 Задано множину $\{a, b\}$. Які з наведених нижче множин вичерпують всі підмножини цієї множини?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{a\}$, $\{b\}$; *б*) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$; *в*) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$; *г*) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$.

5 Скільки елементів складають множину $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4.

6 Скільки елементів складають множину $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) 1; *б*) 2; *в*) 3; *г*) 4.

7 Скільки елементів складають множину $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) 3; *б*) 4; *в*) 6; *г*) 7.

8 Скільки елементів складають множину $\{\varnothing, \{\varnothing\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) 6; *б*) 7; *в*) 9; *г*) 10.

9 Скільки елементів складають множину $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) 3; *б*) 4; *в*) 5; *г*) 6.

10 Яка з поданих нижче множин є об'єднанням множин $A = \{1, 2, 6, 7\}$ та $B = \{2, 3, 5, 6\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; *б*) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$;
в) $\{2, 3, 5, 6\}$; *г*) $\{2, 6\}$.

11 Яка з поданих нижче множин є перерізом множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$; *б*) $\{1, 3, 5\}$;
в) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; *г*) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

12 Яка з поданих нижче множин є різницею множин $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ та $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; *б*) $\{2, 4, 6\}$; *в*) $\{1, 7\}$; *г*) $\varnothing$.

13 Яка з поданих нижче множин є симетричною різницею множин А = $\{1, 2, 4, 6, 7\}$ та $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{1, 3, 5, 7\}$; *б*) $\{2, 4, 6\}$; *в*) $\{1, 7\}$; *г*) $\varnothing$.

14 Яка з поданих нижче множин є доповненням множини $A = \{x$: x – додатне парне число$\}$ до універсуму $U = \{x$: x – додатне ціле число$\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\overline{A} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$; *б*) $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$;
в) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$; *г*) $\overline{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

15 Задано три множини: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Яка з поданих нижче множин є доповненням множини $A \cap (B \cup C)$ до універсуму $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{2, 4, 5, 6, 7\}$; *б*) $\{1, 3, 8, 9, 10\}$;
в) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; *г*) $\{4, 5, 6, 9, 10\}$.

16 Яка з поданих нижче множин є декартовим добутком $A \times B$ множин $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{a, b\}$?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$;
б) $\{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$;
в) $\{\{1, 2, 3\}, \{a, b\}\}$;
г) $\{\{A\}, \{B\}\}$.

17 Нехай $A = \varnothing$. Яка з поданих нижче множин є множиною всіх підмножин множини A?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{\varnothing\}$; *б*) $\varnothing$; *в*) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; *г*) $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$.

18 Нехай $A = \{1, 2, 3\}$. Яка з поданих нижче множин є булеаном вихідної множини?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

б) $\{\varnothing, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$;

в) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;

г) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3, 1\}\}$.

19 Яке з наведених нижче тверджень є хибним?

Можливі варіанти відповідей:

а) $A \bigcup \varnothing = A$; *б*) якщо $A \subseteq B$, то $A \bigcup B = A$;

в) $A \setminus \varnothing = A$; *г*) якщо $A \bigcup B = A$, то $B \subseteq A$.

20 Нехай $A = \{2, 3, 4\}$, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Кожна підмножина множини $A \times B$ є бінарне відношення. Яке з наведених нижче бінарних відношень “елемент $x \in A$ є дільник елемента $y \in B$” є правильним?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$;

б) $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$;

в) $\{(2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$;

г) $\{(4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$.

5.1.3 Відповіді до тестових завдань з теми «Множини»

1 *г*. **2** *б*. **3** *а*. **4** *в*. **5** *б*. **6** *а*. **7** *б*. **8** *а*. **9** *а*. **10** *б*. **11** *б*. **12** *в*. **13** *а*. **14** *в*. **15** *б*. **16** *б*. **17** *а*. **18** *г*. **19** *б*. **20** *б*.

5.2 Розв’язування задач з теми «Математична логіка»

5.2.1 Способи задання бульових функцій. Перевірка на повноту

Приклад 5.10 Бульову функцію задано формулою алгебри логіки

$$\varphi(x, y, z) = (x \vee y) \to y \oplus z.$$

Треба задати цю функцію:

1) таблицею істинності;
2) вектором значень;
3) порядковим номером;
4) номерами наборів, на яких $\varphi = 1$;
5) картою Карно;
6) графічно;
7) Д. д. н. ф. та д. к. н. ф. (досконалою диз’юнктивною та кон’юнктивною нормальними формами).

Р о з в ’ я з а н н я

1)

x y z	$x \vee y$	$y \oplus z$	φ
0 0 0	0	0	1
0 0 1	0	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	1	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

2) $\varphi(x, y, z) = (11100110)$;

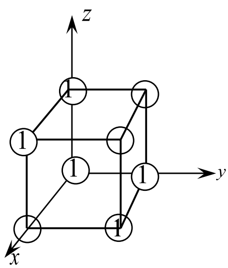
3) $n = 2 + 2^2 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 230$;

4) $\varphi = \{0, 1, 2, 5, 6\}$;

5)

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1			1

6)



7) Функція дорівнює 1 на наборах (000), (001), (010), (101), (110), тому її д. д. н. ф. має вигляд

$$x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^0 z \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}.$$

Функція дорівнює 0 на наборах (011), (100), (111), тому її д. к. н. ф. має вигляд

$$(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}})(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}})(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}}) = (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Приклад 5.11 Перевірити на повноту систему бульових функцій

$$\{xy \vee xz \vee yz;\ x \oplus y \oplus z; 1\}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Перевірити на повноту цю систему функцій можна за допомогою таблиці Поста. Щоби скласти таблицю Поста, слід з'ясувати, чи належить функція з даної множини до кожного з класів Поста.

Складемо таблицю істинності функції $\varphi_1(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$:

x	y	z	xy	xz	yz	φ_1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

За таблицею встановлюємо, що функція $\varphi_1(x, y, z)$ зберігає константу 0, зберігає константу 1 і є самодвоїстою, тому що кожне значення функції є запереченням симетричного до нього значення. Функція є монотонною, тому що її зображено формулою бульової алгебри без заперечень $\overline{x}$.

Щоби знайти многочлен Жегалкіна функції φ_1, складемо д. д. н. ф. і замінимо кожну диз'юнкцію на суму за модулем 2, а інверсію $\overline{x}$ − $x \oplus 1$. Тоді

$$\varphi_1(x,y,z) = \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz = (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz =$$
$$= \underline{xyz} \oplus yz \oplus \underline{xyz} \oplus xz \oplus \underline{xyz} \oplus xy \oplus \underline{xyz} = xy \oplus xz \oplus yz.$$

Оскільки многочлен Жегалкіна функції містить кон’юнкції змінних, доходимо висновку, що функція є нелінійною.

Складемо таблицю істинності функції $\varphi_2(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$:

x	y	z	φ_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

За таблицею встановлюємо, що функція φ_2 зберігає константу 0, не зберігає константу 1 і є несамодвоїстою.

З огляду на те, що $100 \le 111$, але $\varphi(1,0,0) > \varphi(1,1,1)$, доходимо висновку, що функція є немонотонною. Функція $\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$ є лінійною, оскільки задається многочленом Жегалкіна, який не містить кон’юнкцій змінних.

Функція $\varphi_3 = 1$ не зберігає константу 0, є несамодвоїстою, монотонною й лінійною.

За результатами досліджень складемо таблицю Поста:

Класи Поста / Функції	P_0	P_1	S	L	M
$x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z$	+	+	+	−	+
$x \oplus y \oplus z$	+	−	−	+	−
1	−	+	−	+	+

де P_0 − клас функцій, які зберігають константу 0; P_1 − клас функцій, які зберігають константу 1; S − клас самодвоїстих функцій; L − клас лінійних функцій; M − клас монотонних функцій.

Оскільки в кожному стовпці таблиці є знак мінус, то для кожного класу Поста в даній системі є хоча б одна функція, яка до цього класу Поста не належить. За теоремою Поста, така система бульових функцій є функціонально повною.

5.2.2 Перевірочні тести

1 Яке з наведених нижче суджень буде хибним?

а) якщо $2^2 = 4$, то $3^2 = 9$; *б*) якщо $2^2 = 5$, то $3^2 = 9$;
в) якщо $2^2 = 5$, то $3^2 = 10$; *г*) якщо $2^2 = 4$, то $3^2 = 10$.
Можливі варіанти відповідей:
а); *б*); *в*); *г*).

2 Висловлення може бути:
Можливі варіанти відповідей:
а) алгоритмічним; *б*) математичним;
в) істинним; *г*) графічним.

3 Законом алгебри висловлень є:
Можливі варіанти відповідей:
а) правило Крамера; *б*) правило де Моргана;
в) правило буравчика; *г*) правило Лопіталя.

4 Логічною операцією є:
Можливі варіанти відповідей:
а) ділення; *б*) добування кореня;
в) стрілка Пірса; *г*) стрілка годинника.

5 Яке з поданих нижче тверджень буде правильним?
Можливі варіанти відповідей:
а) $x \vee x = \overline{x}$; *б*) $x \wedge x = x^2$; *в*) $x \downarrow x = \overline{x}$; *г*) $x \wedge x = 0$.

6 Якщо $x = 1$, а $y = 0$, то яка з поданих нижче функцій буде істинною?
Можливі варіанти відповідей:
а) $x \wedge y$; *б*) $y \to x$; *в*) $x \to y$; *г*) $x \downarrow y$.

7 Якщо $x = 1, y = 1, z = 1,$ то яка з поданих нижче функцій буде хибною?
Можливі варіанти відповідей:
а) $x \to z$; *б*) $x \vee y \to z$; *в*) $x \wedge y \to \overline{z}$; *г*) $\overline{x \vee y} \vee z$.

8 Яке з поданих нижче тверджень буде правильним?
Можливі варіанти відповідей:
а) $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = x \wedge y$; *б*) $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = x \vee y$;
в) $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = x \wedge y$; *г*) $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \bar{x} \vee \bar{y}$;

9 Яка з поданих нижче систем функцій буде повною?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\{\wedge, \leftarrow\}$; *б*) $\{\wedge, \oplus\}$; *в*) $\{\wedge, \neg\}$; *г*) $\{\wedge, \vee\}$.

10 Яке з поданих нижче тверджень буде першим дистрибутивним законом?

Можливі варіанти відповідей:

а) $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1\overline{x_2} \vee x_1\overline{x_3}$; *б*) $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3$;

в) $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$; *г*) $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_3})$.

11 Яке з поданих нижче тверджень буде законом поглинання?

Можливі варіанти відповідей:

а) $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$; *б*) $x_1 \vee x_1x_2 = \overline{x_1}$;

в) $x_1(x_1 \vee x_2) = \overline{x_1}$; *г*) $x_1(x_1 \vee x_2) = x_2$.

12 Який з поданих нижче виразів буде диз'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

а) $\frac{x_1}{x_2} \vee x_3$; *б*) $x_1 \vee x_1x_2 \vee \overline{x_3}$;

в) $1 \vee x_1 \vee x_2x_3$; *г*) $0 \vee x_1 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.

13 Який з поданих нижче виразів буде кон'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

а) $x_1x_2 \vee x_3x_4$; *б*) $x_1 \vee x_1x_2 \vee x_3$;

в) $(x_1 \vee x_2)\overline{x_3}$; *г*) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3x_4 \vee x_2)$.

14 Який з наведених нижче виразів буде досконалою диз'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

а) $x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$; *б*) $x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}$;

в) $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_1x_2$; *г*) $1 \vee x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2}$.

15 Який з наведених нижче виразів буде досконалою кон'юнктивною нормальною формою?

Можливі варіанти відповідей:

а) $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$; *б*) $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2$;

в) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2})$; *г*) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

16 Бульова алгебра побудова з використанням:

Можливі варіанти відповідей:

а) сталої 1, диз'юнкції, кон'юнкції;

б) диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення;

в) імплікації, заперечення, сталої 0;

г) диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення.

17 Алгебра Жегалкіна побудована з використанням:

Можливі варіанти відповідей:

а) сталої 0, сталої 1, диз'юнкції;

б) додавання за модулем 2, сталої 1;

в) кон’юнкції, додавання за модулем 2, сталої 1;

г) кон’юнкції, диз’юнкції, додавання за модулем 2.

18 Алгебра Вебба побудована за допомогою якої кількості операцій?

Можливі варіанти відповідей:

а) однієї; *б*) двох; *в*) трьох; *г*) чотирьох.

19 Алгебра Шеффера побудована за допомогою кількості операцій:

Можливі варіанти відповідей:

а) однієї; *б*) двох; *в*) трьох; *г*) чотирьох.

20 Метод Квайна−Мак-Класкі мінімізації бульових функцій побудований на основі операцій?

Можливі варіанти відповідей:

а) поглинання та відбиття; *б*) додавання та віднімання;

в) склеювання та поглинання; *г*) склеювання та розрізування.

5.2.3 Відповіді до тестових завдань з теми «Математична логіка»

1 *г*. **2** *в*. **3** *б*. **4** *в*. **5** *в*. **6** *б*. **7** *в*. **8** *а*. **9** *г*. **10** *б*. **11** *а*. **12** *б*. **13** *в*. **14** *а*. **15** *г*. **16** *б*. **17** *в*. **18** *а*. **19** *а*. **20** *в*.

5.3 Розв’язування задач з теми «Теорія графів»

5.3.1 Метричні характеристики графів. Транспортні мережі

Приклад 5.12 Орграф $G(X,U)$ задано списком:

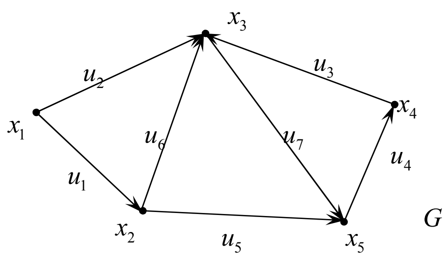
$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$;

$U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_2,x_5),(x_2,x_3),(x_3,x_5)\}$.

Задати його у геометричний та матричний способи.

Р о з в ’ я з а н н я

а) Геометричний спосіб задання орграфа $G(X,U)$:



b) Матричний спосіб задання орграфа $G(X,U)$:

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\},\ \ U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}.$$

Матриця суміжності:

$$\begin{array}{c} \\ \\ A(G)= \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця інцидентності:

$$B(G)=\begin{array}{c|ccccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ \hline x_1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Приклад 5.13 Граф $G=(X,U)$ задано матрицею суміжності

$$A(G)=\begin{array}{c|ccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

а) Побудувати геометричне зображення графа. Визначити тип графа, типи його ребер та вершин.

б) Побудувати декілька підграфів, дерево та ліс.

в) Записати можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнений маршрут, ланцюг та простий ланцюг, цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона.

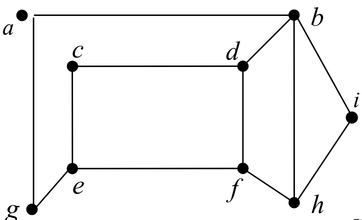
г) Обчислити метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

Р о з в ’ я з а н н я

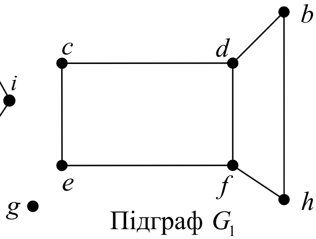
а) Геометричне зображення графа G:

G – скінченний неорієнтований зв’язний плоский граф без петель і кратних ребер, який не має висячих вершин:

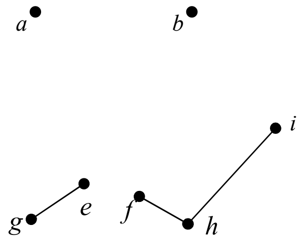
б) Графи G_1 та G_2 є підграфами графа G:



Граф G

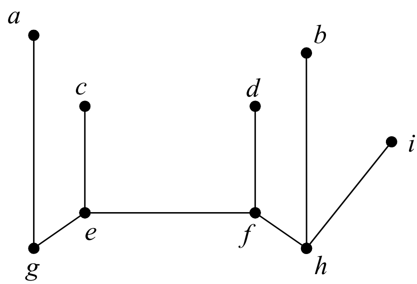


Підграф G_1



Підграф G_2

Для того щоби граф $G=(X,U)$ став лісом, слід, наприклад, вилучити з нього ребра: $u_1=\{a,b\}$, $u_2=\{b,d\}$, $u_4=\{b,i\}$, $u_8=\{c,d\}$:



Внаслідок вилучення зазначених ребер здобудемо ліс, який і є деревом.

в) Побудуємо можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнений маршрут, ланцюг та простий ланцюг, цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона.

Маршрутом є така послідовність ребер та вершин:

$$au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}e.$$

Замкнутий маршрут є:

$$au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}eu_{11}gu_{12}a.$$

Ланцюгом є маршрут:

$$au_1bu_2du_7fu_6hu_3bu_4i.$$

Простим ланцюгом є маршрут:

$$au_1bu_2du_7fu_6hu_5i.$$

Циклом є ланцюг:

$$du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5hu_3bu_2d.$$

Простим циклом є цикл:

$$cu_8du_7fu_{10}eu_9c.$$

Ланцюга й циклу Ейлера в графі не має.

Ланцюгом Гамільтона є ланцюг:

$$fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5h\,.$$

Циклом Гамільтона є цикл:

$$au_1bu_4iu_5hu_6fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}a\,.$$

г) Обчислимо метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

Запишемо матрицю відстаней між вершинами графа:

$$\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

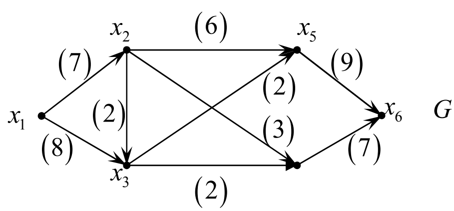
Знаходимо: $e(a)=3$; $e(b)=3$; $e(c)=3$; $e(d)=3$; $e(e)=3$; $e(f)=3$; $e(g)=3$; $e(h)=3$; $e(i)=3$;

$r(G)=3$; $d(G)=3$;

$C(G)=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ − центр графа;

$m=12$, $n=9$, $p=1$, $\lambda=12-9+1=4$.

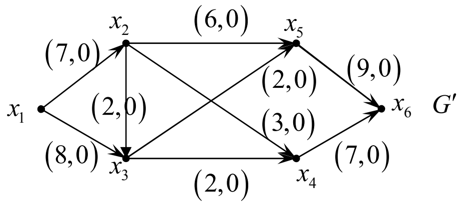
Приклад 5.14 Обчислити повний потік у транспортній мережі G (в дужках зазначено пропускні здатності дуг):



Потік φ називається ***повним***, якщо будь-який шлях в транспортній мережі G з x_1 до x_6 містить хоча б одну насичену дугу (***насичена дуга*** – дуга, на якій потік по ній дорівнює її пропускній здатності, тобто $\varphi(u) = c(u)$).

Скористаємося алгоритмом знаходження повного потоку.

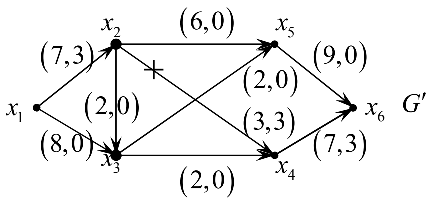
1. Припустімо, що $\varphi(u) = 0$, тобто розпочинаємо з нульового потоку. Візьмемо $G' = G$.



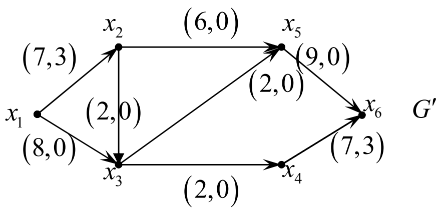
2. Вилучимо з орграфа G' усі дуги, насиченими за потоку φ в транспортній мережі G. Здобутий орграф знову позначимо через G'. За нульового потоку насичені дуги є відсутні.

3. Знаходимо в G' простий ланцюг з x_1 в x_6. Якщо такого ланцюга немає, то φ – повний потік, який ми відшукували в транспортній мережі G. Якщо інакше, − переходимо до кроку 4. В нашому випадку такий простий ланцюг − $\eta_1 = x_1x_2x_4x_6$.

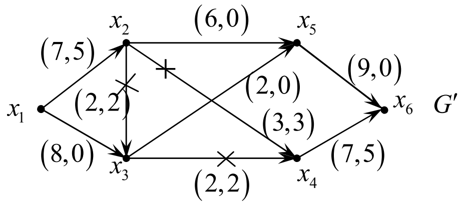
4. Збільшимо потоки по дугах з η_1 на 3 до насичення дуги (x_2, x_4). Внаслідок цього матимемо потік $\varphi = \varphi_1$, який містить одну насичену дугу:



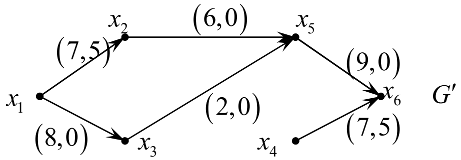
Позначимо її знаком «×» (аналогічно будемо позначатимемо знаком «×» й решту насичених дуг) і вилучимо з орграфа G'. Здобутий орграф знову позначимо через G'



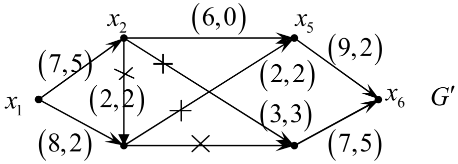
5. Відокремимо в G' простий ланцюг $\eta_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_6$ і збільшимо потік на 2 до насичення дуг (x_2, x_3) (x_3, x_4). Внаслідок цього матимемо потік $\varphi = \varphi_2$, який містить три насичені дуги:



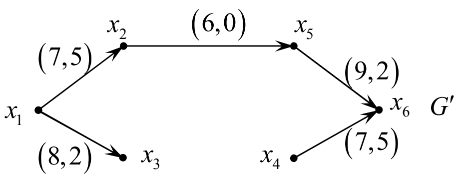
Вилучимо ці дуги з орграфа G'. Здобутий орграф знову позначимо через G':



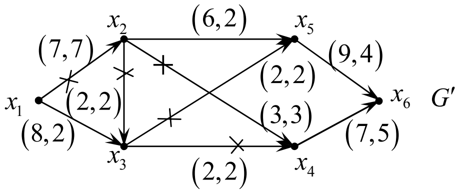
6. Виокремимо в G' простий ланцюг $\eta_3 = x_1 x_3 x_5 x_6$ і збільшимо потік на 2 до насичення дуги (x_3, x_5). Внаслідок цього матимемо потік $\varphi = \varphi_3$, який містить чотири насичені дуги:



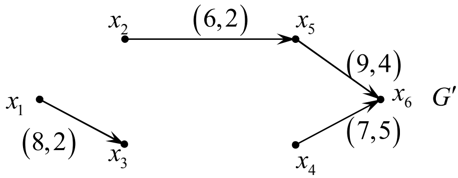
Вилучимо ці дуги з орграфа G'. Здобутий орграф знову позначимо через G':



7. Відокремимо в G' простий ланцюг $\eta_4 = x_1 x_2 x_5 x_6$ і збільшимо потік на 2 до насичення дуги (x_1, x_2). Внаслідок цього здобудемо потік потік $\varphi = \varphi_4$, який містить насичені дуги:



Вилучимо ці дуги з орграфа G'. Здобутий орграф знову позначимо через G':



Очевидно, що в G' не існує шляху із x_1 до x_6. Отже, в транспортній мережі G з потоком φ_4 не існує шляху з x_1 до x_6, який не включав би насичених дуг, тобто потік φ_4 є повним. Величина φ_4 здобутого повного потоку дорівнює 9.

5.3.2 Перевірочні тести

1 Задано означення:

„Стверджуватимемо, що задано граф G, якщо подано дві множини:

1) непорожня скінченна множина $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, де $x_i,\ i = \overline{1,n}$ − вершини графа;
2) множина U, складена з упорядкованих пар вершин”.

Що саме воно подає?

Можливі варіанти відповідей:

а) орієнтований граф; *б*) неорієнтований граф;
в) мультиграф; *г*) псевдограф.

2 Для яких скінченних графів не можна побудувати матрицю інцидентності?

Можливі варіанти відповідей:

а) для орієнтованих псевдографів; *б*) для неорієнтованих псевдографів;
в) для орієнтованих мультиграфів; *г*) для неорієнтованих мультиграфів.

3 Чи завжди можна побудувати матрицю суміжності для заданого скінченного графа?

Можливі варіанти відповідей:

а) лише для орієнтованих графів; *б*) лише для неорієнтованих графів;
в) завжди; *г*) не завжди.

4 Якщо два графи є ізоморфні, то що можна стверджувати про їхні матриці суміжності після відповідного перенумерування вершин другого графа?

Можливі варіанти відповідей:

а) матриці не є рівні; *б*) матриці є рівні;

в) матриць суміжності не існує; *г*) матриці є нульові.

5 Граф без петель і кратних ребер – це граф:

Можливі варіанти відповідей:

а) повний; *б*) зв'язаний;

в) звичайний; *г*) незв'язний.

6 Планарний граф – це граф:

Можливі варіанти відповідей:

а) у тривимірному просторі; *б*) у n-вимірному просторі;

в) у одновимірному просторі; *г*) на площині.

7 Орграф без циклів – це орграф:

Можливі варіанти відповідей:

а) контурний; *б*) ациклічний;

в) безконтурний; *г*) циклічний.

8 Граф без циклів – це граф:

Можливі варіанти відповідей:

а) контурний; *б*) ациклічний;

в) безконтурний; *г*) циклічний.

9 Простий цикл – це:

Можливі варіанти відповідей:

а) шлях;

б) замкнений ланцюг;

в) замкнений ланцюг, в якому всі вершини, окрім першої й останньої, є різні;

г) ланцюг.

10 Простий контур – це:

Можливі варіанти відповідей:

а) шлях; *б*) простий шлях;

в) замкнений шлях; *г*) простий замкнений шлях.

11 Граф, у якого кожна пара вершин − зв'язна, є:

Можливі варіанти відповідей:

а) ейлерів; *б*) зв'язний;

в) незв'язний; *г*) гамільтонів.

12 Граф називається нероздільним, якщо:

Можливі варіанти відповідей:

а) він є незв'язний і не має точок зчленування;

б) він є зв'язний і не має точок зчленування;

в) він є зв'язний і має точки зчленування;

г) він є незв'язний і має точки зчленування.

13 Сепарабельний граф – це:

Можливі варіанти відповідей:

а) нероздільний граф;

б) роздільний граф;

в) граф, який має хоча б одну точку зчленування;

г) граф, який має хоча б один міст.

14 Скінченний граф є ейлеровим графом тоді й лише тоді, коли:

Можливі варіанти відповідей:

а) він є зв'язний і всі його вершини мають парні степені;

б) він є зв'язний;

в) всі його вершини мають парні степені;

г)він є не зв'язний.

15 Якщо існує цикл у скінченному графі, в якому кожне ребро графа брало участь хоча б один раз, то такий цикл називається:

Можливі варіанти відповідей:

а) ейлеровим; *б*) гамільтоновим;

в) простим; *г*) елементарним.

16 Для кожного графа цикломатичне число − це:

Можливі варіанти відповідей:

а) $\lambda = 0$; *б*) $\lambda = 1$; *в*) $\lambda \geq 0$; *г*) $\lambda < 0$.

17 Найти слушне означення дерева:

Можливі варіанти відповідей:

а) дерево – це зв'язний граф без циклів;

б) дерево – це зв'язний граф з циклами;

в) дерево – це зв'язний граф, цикломатичне число якого є додатне;

г) дерево – це незв'язний граф без циклів.

18 Ліс − це:

Можливі варіанти відповідей:

а) довільний граф, який не має циклів;

б) граф з циклами;

в) довільний граф, який містить гамільтонів цикл;

г) довільний граф, який містить ейлерів цикл.

19 Теорема Форда-Фалкерсона − це:

Можливі варіанти відповідей:

а) найбільша величина потоку в транспортній мережі дорівнює найменшій пропускній здатності розрізу;

б) найменша величина потоку в транспортній мережі дорівнює найменшій пропускній здатності розрізу;

в) поняття – найбільша величина потоку в транспортній мережі та найбільша пропускна здатність розрізу − є непорівнянні;

г) найбільша величина потоку в транспортній мережі дорівнює найбільшій пропускній здатності розрізу.

5.3.3 Відповіді до тестових завдань з теми «Теорія графів»

1 *а*. **2** *а*. **3** *в*. **4** *б*. **5** *в*. **6** *г*. **7** *в*. **8** *б*. **9** *в*. **10** *г*. **11** *б*. **12** *б*. **13** *в*.; **14** *а*. **15** *а*. **16** *в*. **17** *а*. **18** *а*. **19** *г*.

5.4 Розв'язування задач з теми «Елементи теорії чисел»

5.4.1 Алгоритм Евкліда. Розв'язання конгруенцій першого степеня та систем конгруенцій.

Приклад 5.15 Знайти остачу від ділення 317^{259} на 15.

Розв'язання

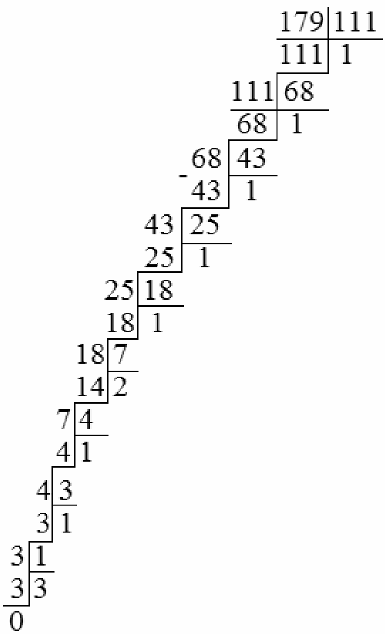
Оскільки $317 \equiv 2 \pmod{15}$, то $317^{259} \equiv 2^{259} \pmod{15}$. За теоремою Ейлера, $2^{\varphi(15)} \equiv 1 \pmod{15}$. Оскільки $\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8$, то $2^8 \equiv 1 (\bmod 15)$. З огляду на те, що $259 = 32 \cdot 8 + 3$, дістанемо $2^{259} = (2^8)^{32} \cdot 2^3 \equiv 8 \pmod{15}$.

Отже, 317^{259} при діленні на 15 дає остачу 8.

Відповідь: 8.

Приклад 5.16 Розв'язати конгруенцію $111x \equiv 49 \pmod{179}$.

Розв'язання



Розв'язок шукатимемо у вигляді $x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} \cdot 49 \pmod{179}$, де n – число неповних часток; P_{n-1} − чисельник передостаннього відповідного дробу в розкладанні $\frac{179}{111}$ у ланцюговий дріб.

Чисельники відповідних дробів обчислюємо за формулою $P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}$, де $P_0 = 1$.

q_k		1	1	1	1	1	2	1	1	3
p_k	1	1	2	3	5	8	21	29	50	

Оскільки $n = 9$, то $x \equiv (-1)^8 \cdot 50 \cdot 49 \pmod{179}$ або $x \equiv 2450 \pmod{179}$. Звідси $x \equiv 123 \pmod{179}$.

Відповідь: $x \equiv 123 \pmod{179}$.

Приклад 5.17 Розв'язати систему конгруенцій $\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{12}; \\ 7x \equiv 2 \pmod{8}; \\ 3x \equiv 1 \pmod{5}. \end{cases}$

Р о з в ' я з а н н я

Додамо до правої частини першої конгруенції −12. Тоді дістанемо $5x \equiv -10 \pmod{12}$. Звідси $x \equiv -2 \pmod{12}$, або $x \equiv 10 \pmod{12}$.

До лівої частини другої конгруенції додамо $-8x$. Тоді $-x \equiv 2 \pmod{8}$. Звідси $x \equiv -2 \pmod{8}$, або $x \equiv 6 \pmod{8}$.

До правої частини третьої конгруенції додамо 5. Матимемо $3x \equiv 6 \pmod{5}$, або $x \equiv 2 \pmod{5}$.

Отже, маємо систему конгруенцій $\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{12}; \\ x \equiv 6 \pmod{8}; \\ x \equiv 2 \pmod{5}. \end{cases}$

З першої конгруенції випливає, що $x = 12k + 10$. Підставимо знайдене x в другу конгруенцію, дістанемо $10 + 12k \equiv 6 \pmod{8}$, або $12k \equiv -4 \pmod{8}$. Звідси $3k \equiv -1 \pmod{2}$; $3k \equiv 3 \pmod{2}$. Отже, $k \equiv 1 \pmod{2}$, або $k = 2l + 1$, і $x = 10 + 12 + 24l = 22 + 24l$. Підставивши $x = 22 + 24l$ в останню конгруенцію, дістанемо $22 + 24l \equiv 2 \pmod{5}$, або $24l = -20 \pmod{5}$. Звідси дістанемо $l \equiv 0 \pmod{5}$, або $l \equiv 5m$, де $m \in Z$.

Остаточно

$$x = 22 + 24 \cdot 5m = 22 + 120m \text{ або } x \equiv 22 \pmod{120}.$$

В і д п о в і д ь: $x \equiv 22 \pmod{120}$.

Приклад 5.18 Довести, що $n^3 - n + 7$ є конгруентне до 7 за модулем 6.

Р о з в ' я з а н н я

Якщо $n^3 - n + 7 \equiv 7 \pmod{6}$ то

$n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}$, $n(n^2 - 1) \equiv 0 \pmod{6}$, $n(n+1)(n-1) \equiv 0 \pmod{6}$.

Так як $[n(n+1)(n-1)] \vdots 2$ і $[(n-1)n(n+1)] \vdots 3$, то $[(n+1)n(n+1)] \vdots 6$.

Приклад 5.19 Довести, що $(2+7)^5 \equiv 2^5 + 7^5 \pmod{5}$.

Р о з в ' я з а н н я

$$(2+7)^5 = 2^5 + 5 \cdot 2^4 \cdot 7 + 10 \cdot 2^3 \cdot 7^2 + 10 \cdot 2^2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 2 \cdot 7^4 + 7^5 \equiv 2^5 + 7^5 \pmod{5},$$

так як

$$5\left(2^4 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7^2 + 2^3 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^4\right) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Приклад 5.20 Довести, що якщо $50a - b + 60c \equiv 0 \pmod{398}$, то

$$a - 4b + 41c \equiv 0 \pmod{199}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Конгруенцію $50a-b+60c\equiv 0\pmod{398}$ помножимо на 8 і віднімемо певне кратне модуля. Оскільки $400a\equiv 2a\pmod{398}$ та $480c\equiv 82c\pmod{398}$, то $2a-8b+82c\equiv 0\pmod{398}$. Тепер всю конгруенцію і модуль поділимо на 2:

$$a-4b+41c\equiv 0\pmod{199}.$$

Приклад 5.21 Розв'язати конгруенцію $7x\equiv 5\pmod 9$.

Р о з в ' я з а н н я

Застосуємо теорему Ейлера. $\varphi(9)=9\left(1-\frac{1}{3}\right)=6$; $\varphi(9)-1=5$ Тоді за формулою $x=b\cdot a^{\varphi(m)-1}\cdot(\operatorname{mod} m)$ маємо $x=5\cdot 7^5+9t$; $x=245+9t$, або $x=2+9t$, де $t=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; $x=\{\ldots,2,11,20,29,\ldots,245,\ldots\}$.

В і д п о в і д ь: $x\equiv 2\pmod 9$.

Приклад 5.22 Розв'язати конгруенцію $31x\equiv 19\pmod{83}$.

Р о з в ' я з а н н я

Застосуємо формулу $x=(-1)^n b\cdot P_{n-1}\cdot(\operatorname{mod} m)$. P_{n-1} знайдемо з таблиці

n		0	1	2	3
q_n		2	1	2	10
p_n	1	2	3	8	

Тому $\frac{m}{a}=\frac{83}{31}=[2,1,2,10]$, а $x\equiv 19\cdot 8\cdot(-1)^3\pmod{83}$ або $x\equiv 152\pmod{83}$. Звідки

$$x\equiv 14+83t,$$

де $t=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, $x=\{\ldots,14,97,180,\ldots\}$.

В і д п о в і д ь: $x\equiv 14\pmod{83}$.

Приклад 5.23 1) Знайти дві останні цифри числа 11^{245};

2) знайти дві останні цифри числа 2^{99}.

Р о з в ' я з а н н я

1 Для того щоби знайти R останніх цифр числа a, доволі знайти остачу від ділення цього числа на 10^R. В нашому випадку $a=11^{245}$; $R=2$.

Оскільки $(11,100)=1$, то, за теоремою Ейлера, $11^{\varphi(100)}\equiv 1\pmod{100}$, де $\varphi(100)=\varphi(2^2\cdot 5^2)=100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=40$, тобто $11^{40}\equiv 1\pmod{100}$.

Оскільки $245=40\cdot 6+5$, то

$$11^{245}=11^{40\cdot 6+5}=\left(11^{40}\right)^6\cdot 11^5\equiv 1^6\cdot 11^5=121^2\cdot 11\equiv 21^2\cdot 11=441\cdot 11\equiv 41\cdot 11=451\equiv$$
$$\equiv 51\pmod{100}.$$

Отже, дві останні цифри числа 11^{245} – 5 та 1.

В і д п о в і д ь: 51.

2 Знайти дві останні цифри числа 2^{99}.

Для того щоби знайти дві останні цифри числа 2^{99}, доволі знайти остачу від ділення цього числа на 10^2.

Оскільки $(2, 100) = 2 > 1$, то теорему Ейлера застосовувати не можна. Знайдемо $(2^{99}, 100) = (2^{99}, 2^2 \cdot 5^2) = 2^2 = 4$. Отже $2^{99} = 2^{97} \cdot 4$ і $100 = 25 \cdot 4$.

Тепер знайдемо остачу від ділення числа 2^{97} на 25. Оскільки $(2, 25) = 1$, то, за теоремою Ейлера, $2^{\varphi(25)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 25)$, де $\varphi(25) = \varphi(5^2) = 25 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$. Отже $2^{20} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 25)$.

Оскільки $97 = 20 \cdot 4 + 17$, то

$2^{97} = 2^{20 \cdot 4 + 17} = (2^{20})^4 \cdot 2^{17} \equiv 1^4 \cdot 2^{17} = (2^5)^3 \cdot 4 \equiv 7^3 \cdot 4 = 343 \cdot 4 \equiv 18 \cdot 4 = 72 \equiv 22 (\mathrm{mod}\ 25)$.

Виходячи з цієї конгруенції, $2^{97} = 25 \cdot k + 22$.

Помножимо обидві частини конгруенції на $4 = (2^{99}, 100)$, дістанемо $2^{99} = 100 \cdot k + 88$.

Отже, число 2^{99} закінчується на дві вісімки.

Відповідь: 88.

Приклад 5.24 Розв’язати конгруенції:

1) $3x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$; 2) $12x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$; 3) $7x \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 19)$; 4) $52x \equiv 27 (\mathrm{mod}\ 65)$; 5) $10 \cdot x \equiv 25 (\mathrm{mod}\ 35)$.

Розв’язання

1) Випробовуючи числа $0, 1, 2, 3, 4$, які становлять повну систему найменших невід’ємних лишків за модулем 5, знаходимо, що конгруенції задовольняє число 2, тобто дістанемо розв’язок: $x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$, або клас чисел $x = 5 \cdot k + 2$.

Відповідь: $x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$.

2) $12x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$.

Вилучивши $7x$ з лівої частини конгруенції (див. основні властивості конгруенцій), дістанемо конгруенцію: $5x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$. Шляхом випробувань знаходимо розв’язок: $x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 7)$.

Відповідь: $x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 7)$.

3) $7x \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 19)$.

Оскільки $(7, 19) = 1$, то конгруенція має один і лише один розв’язок (клас чисел x за модулем 19). Знайдемо його двома способами.

а) *Спосіб Ейлера.* Розв’язок знаходиться за формулою $x \equiv b \cdot a^{\varphi(m)-1} (\mathrm{mod}\ m)$, де $\varphi(m)$ – функція Ейлера. Оскільки

$$\varphi(19)=19\left(1-\frac{1}{19}\right)=18, \text{ то } x \equiv 4\cdot 7^{18-1}=4\cdot 7^{17}=4\left(7^3\right)^5\cdot 7^2=4(343)^5\cdot 7^2 \equiv$$

$$\equiv 4\cdot 1^5\cdot 7^2=4\cdot 49\equiv 4\cdot 11=44\equiv 6(\operatorname{mod} 19), \text{ то } x\equiv 6(\operatorname{mod} 19).$$

б) За допомогою скінчених неперервних дробів знаходимо потрібні дані для формули: $x\equiv(-1)^n b\cdot P_{n-1}(\operatorname{mod} m)$. Маємо:

$$\begin{array}{r|l}
19 & 7 \\ \hline
\underline{14} & 2 = q_0
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
7 & 5 \\ \hline
\underline{5} & 1 = q_1
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
5 & 2 \\ \hline
\underline{4} & 2 = q_2
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
2 & 1 \\ \hline
\underline{2} & 2 = q_3 \\
0 &
\end{array}$$

.

Тому

$$P_{-2}=0;\quad P_{-1}=1;\quad P_s=P_{s-1}\cdot q_s+P_{s-2};\quad s=0,\dots,n.$$

s	-2	-1	0	1	2	3
q_s			2	1	2	2
P_s	0	1	2	3	8	1 9

Оскільки $n=3$, то $P_{n-1}=8$.

Звідки $x\equiv(-1)^3\cdot 4\cdot 8=-32\equiv-13\equiv 6(\operatorname{mod} 19)$.

Результати збіглися: $x\equiv 6(\operatorname{mod} 19)$.

В і д п о в і д ь: $x\equiv 6(\operatorname{mod} 19)$.

4) $52x\equiv 27(\operatorname{mod} 65)$.

Ця конгруенція не має розв'язку, оскільки $(52,\ 65)=13>1$, а 27 не ділиться на 13.

В і д п о в і д ь: Розв'язків немає.

5) $10\cdot x\equiv 25(\operatorname{mod} 35)$.

Оскільки $(10,\ 35)=5>1$ і 25 ділиться на 5, то конгруенція має п'ять розв'язків, які знаходяться за формулою:

$$x_{k+1}\equiv m_1\cdot k+\alpha(\operatorname{mod} m),$$

де $k=0,\dots,4$; число α – розв'язок конгруенції $a_1x\equiv b_1(\operatorname{mod} m_1)$, де $a_1=2$; $b_1=5$; $m_1=7$.

Розв'яжемо конгруенцію $2\cdot x\equiv 5\pmod 7$. Шляхом випробувань знаходимо розв'язок: $x\equiv 6\pmod 7$. Тому $\alpha=6$. Отже, $x_{k+1}\equiv 7\cdot k+6\pmod{35}$, а саме:

$x_1\equiv 6\pmod{35}$,

$x_2\equiv 7+6=13\pmod{35}$;

$x_3\equiv 14+6=20\pmod{35}$;

$x_4\equiv 21+6=27\pmod{35}$;

$x_5\equiv 28+6=34\pmod{35}$;

Відповідь: $x_{k+1}\equiv 7\cdot k+6\pmod{35}$, $k=0,\dots,4$.

Приклад 5.25. Розв'язати системи конгруенцій:

1) $\begin{cases} x\equiv 4\pmod 5; \\ x\equiv 1\pmod{12}; \\ x\equiv 7\pmod{14}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\equiv 1\pmod{25}; \\ x\equiv 2\pmod 4; \\ x\equiv 3\pmod 7; \\ x\equiv 4\pmod 9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x\equiv 7\pmod{10}; \\ 2x\equiv 5\pmod{15}; \\ 7x\equiv 5\pmod{12}. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x\equiv 1\pmod 9; \\ 5x\equiv 3\pmod 7; \\ 4x\equiv 5\pmod{12}. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x\equiv 1\pmod{10}; \\ 4x\equiv 3\pmod 5; \\ 2x\equiv 7\pmod 9. \end{cases}$

Розв'язання

1) $\begin{cases} x\equiv 4\pmod 5; \\ x\equiv 1\pmod{12}; \\ x\equiv 7\pmod{14}. \end{cases}$ З першої конгруенції маємо: $x=5\cdot t+4\ \ (*)$.

Підставимо $(*)$ в другу конгруенцію: $5\cdot t+4\equiv 1\pmod{12}$, або $5\cdot t\equiv 9\pmod{12}$, звідки $t\equiv 9\pmod{12}$, або $t=12\cdot t_1+9$. Підставимо знайдене значення t в рівність $(*)$, дістанемо: $x=5\cdot(12\cdot t_1+9)+4=60\cdot t_1+49\ \ (**)$.

Знайдене значення x підставимо в третю конгруенцію: $60\cdot t_1+49\equiv 7\pmod{14}$, або $60\cdot t_1\equiv -42\pmod{14}$, або $4\cdot t_1\equiv 0\pmod{14}$. Скорочуючи члени конгруенції та модуль на 2, дістанемо: $2\cdot t_1\equiv 0\pmod 7$, або $t_1\equiv 0\pmod 7$, звідки $t_1=7\cdot t_2+0$. Підставимо знайдене значення t_1 в рівність $(**)$, знаходимо: $x=60\cdot(7\cdot t_2+0)+49=420\cdot t_2+49$. або $x\equiv 49\pmod{420}$.

Перевірка: $49-4=45$ ділиться на 5; $49-1=48$ ділиться на 12; $49-7=42$ ділиться на 14.

ЗАУВАЖЕННЯ. Розв'язавши конгруенцію $4\cdot t_1 \equiv 0 \pmod{14}$, ми дістали конгруенцію $2\cdot t_1 \equiv 0 \pmod 7$ і розв'язок її $t_1 \equiv 0 \pmod 7$, або $t_1 = 7\cdot t_2 + 0$, що привело до розв'язку $x = 420\cdot t_2 + 49$ заданої в умові системи. Але конгруенція $4\cdot t_1 \equiv 0 \pmod{14}$ має ще другий розв'язок: $t_1 \equiv 7 \pmod{14}$, або $t_1 = 14\cdot t_2 + 7$, оскільки $d = (4, 14) = 2$, яке при підстановці до рівності $(**)$ дає розв'язок $x = 840\cdot t_2 + 469$. Однак $469 \equiv 49 \pmod{420}$, тобто числа 459 и 49 належать до одного класу лишків за модулем 420, тому ми не знаходимо цей другий розв'язок системи.

Взагалі, якщо деяка конгруенція системи або конгруенція відносно t_i має d розв'язків за певним модулю m, то для розв'язку системи доволі обмежитися лише розв'язком рівносильної до неї конгруенції за модулем $\frac{m}{d}$.

В і д п о в і д ь: $x \equiv 49 \pmod{420}$.

2) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{25}; \\ x \equiv 2 \pmod 4; \\ x \equiv 3 \pmod 7; \\ x \equiv 4 \pmod 9). \end{cases}$

Модулі даної системи є попарно прості, тому, за китайською теоремою про залишки, розв'язок можна знайти за формулою

$$x_0 = \frac{M}{m_1}\cdot y_1\cdot\alpha_1 + \frac{M}{m_2}\cdot y_2\cdot\alpha_2 + \frac{M}{m_3}\cdot y_3\cdot\alpha_3 + \frac{M}{m_4}\cdot y_4\cdot\alpha_4;$$

$$x \equiv x_0 \pmod M. \qquad (*)$$

Знаходимо: $M = [25, 4, 7, 9] = 6300$; $\frac{M}{m_1} = \frac{6300}{25} = 252$; $\frac{M}{m_2} = \frac{6300}{4} = 1575$; $\frac{M}{m_3} = \frac{6300}{7} = 900$; $\frac{M}{m_4} = \frac{6300}{9} = 700$.

Складемо конгруенції: $252\cdot y_1 \equiv 1 \pmod{25}$; $1575\cdot y_2 \equiv 1 \pmod 4$; $900\cdot y_3 \equiv 1 \pmod 7$; $700\cdot y_4 \equiv 1 \pmod 9$, звідки $y_1 = -12$; $y_2 = -1$; $y_3 = 2$; $y_4 = 4$.

Тепер за формулою $(*)$ маємо

$$x_0 = 252\cdot(-12)\cdot 1 + 1575\cdot(-1)\cdot 2 + 900\cdot 2\cdot 3 + 700\cdot 4\cdot 4 = 10426 \equiv 4126 \pmod{6300}.$$

Отже, $x \equiv 4126 \pmod{6300}$.

В і д п о в і д ь: $x \equiv 4126 \pmod{6300}$.

3) $\begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{10}; \\ 2x \equiv 5 \pmod{15}; \\ 7x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases}$

З першої конгруенції маємо: $x \equiv 9 \pmod{10}$, або $x = 10 \cdot t + 9 \quad (*)$. Підставимо це значення x в другу конгруенцію і розв'яжемо її відносно t:

$$2 \cdot (10 \cdot t + 9) \equiv 5 \pmod{15};\ 20 \cdot t \equiv -13 \pmod{15};\ 5 \cdot t \equiv 2 \pmod{15},\ (**)$$

але $(5, 15) = 5$ і 2 не ділить 5, тому конгруенція $(**)$ відносно t не має розв'язків, отже, не має розв'язків і дана система конгруенцій.

В і д п о в і д ь: розв'язків немає.

4) $\begin{cases} 4x \equiv 1 \pmod 9; \\ 5x \equiv 3 \pmod 7; \\ 4x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases}$

В даній системі конгруенцій бачимо, що в третій конгруенції $(4, 12) = 4$, але 5 не ділиться на 4, тому вона не має розв'язків, отже, не розв'язуючи систему, можна стверджувати, що вона не має розв'язків.

В і д п о в і д ь: розв'язків немає.

5) $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{10}; \\ 4x \equiv 3 \pmod 5; \\ 2x \equiv 7 \pmod 9. \end{cases}$

З першої конгруенції маємо: $x \equiv 7 \pmod{10}$, або $x = 10 \cdot t + 7 \quad (*)$. Підставивши x в другу конгруенцію, дістанемо $4 \cdot (10 \cdot t + 7) \equiv 3 \pmod 5$; $40 \cdot t \equiv -25 \pmod 5$. Оскільки коефіцієнти дістаної конгруенції є кратні до 5, то вона має місце за кожного значення t; інакше кажучи, ця конгруенція не накладає жодних обмежень на значення x з другої конгруенції системи. Тому продовжуємо розв'язування, підставляючи значення x з $(*)$ у третю конгруенцію системи: $2 \cdot (10 \cdot t + 7) \equiv 7 \pmod 9$; $20 \cdot t \equiv -7 \pmod 9$; $20 \cdot t \equiv 2 \pmod 9$; $10 \cdot t \equiv 1 \pmod 9$; $t \equiv 1 \pmod 9$, або $t = 9 \cdot t_1 + 1$. Знайдене значення підставляємо в рівність $(*)$ і знаходимо: $x = 10 \cdot (9 \cdot t_1 + 1) + 7 = 90 \cdot t_1 + 17$, тобто $x \equiv 17 \pmod{90}$.

Перевірка: $3 \cdot 17 - 1 = 50$ ділиться на 10; $4 \cdot 17 - 3 = 65$ ділиться на 5; $2 \cdot 17 - 7 = 27$ ділиться на 9.

В і д п о в і д ь: $x \equiv 17 \pmod{90}$.

5.4.2 Перевірочні тести

1 Користуючись алгоритмом Евкліда, знайти найбільший спільний дільник чисел 1001 та 6253.

Можливі варіанти відповідей:

а) 12; *б*) 13; *в*) 14; *г*) 15.

2 $a \equiv b\left(\bmod m\right)$, коли:

1) різниця $a-b$ ділиться на m;
2) $a = b + mt$, де t є ціле;
3) a ділиться на m і b ділиться на m.

Можливі варіанти відповідей:

а) усі твердження є слушні; *б*) твердження 1 та 2 є еквівалентні;
в) твердження 3 є наслідком 1; *г*) твердження 2 є помилкове.

3 $a_1 \equiv b_1\left(\bmod m\right)$; $a_2 \equiv b_2\left(\bmod m\right)$. Які твердження вірні?

Можливі варіанти відповідей:

а) $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2\left(\bmod \left(m+1\right)\right)$; *б*) $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2\left(\bmod m\right)$;
в) $ka_1 \equiv kb_1 \cdot b_2\left(\bmod \left(m-1\right)\right)$; *г*) $a_1^k \equiv b_1^k\left(\bmod m\right)$, де k – неціле число.

4 Чи завжди можливо обидві частини конгруенції поділити на їхній спільний дільник k?

Можливі варіанти відповідей:

а) завжди; *б*) за $(k, m) = 1$;
в) ніколи; *г*) коли цей дільник є непарне число.

5 Задана конгруенцію $21 \equiv -15\left(\bmod 6\right)$. Яка конгруенція є наслідком заданої?

Можливі варіанти відповідей:

а) $7 \equiv -5\left(\bmod 5\right)$; *б*) $42 \equiv -30\left(\bmod 12\right)$;
в) $7 \equiv -5\left(\bmod 2\right)$; *г*) $7 \equiv 11\left(\bmod 9\right)$.

6 Які сукупності чисел утворюють повні системи лишків за модулем 6?

Можливі варіанти відповідей:

а) –11, 11, 12, 20, 33, 64, 83; *б*) –13, 2, 5, 17, 20, 64;
в) 1, 14, 18, 35, 40, 75; *г*) 3, 5, 7, 11, 13.

7 Які числа утворюють зведену систему лишків за модулем 6?

Можливі варіанти відповідей:

а) –11, 11; *б*) 5, 2, 1; *в*) 1, 11, 13, 35; *г*) 67, 71, 73, 79.

8 Число примітивних класів за модулем 14 дорівнює:

Можливі варіанти відповідей:

а) 3; *б*) 5; *в*) 6; *г*) 78.

9 Число примітивних класів за модулем 13 дорівнює:

Можливі варіанти відповідей:

а) 7; *б*) 12; *с*) 13; *г*) 87.

10 Конгруенція $113x \equiv 89\left(\bmod 311\right)$ має розв’язок.

Можливі варіанти відповідей:

а) $x \equiv -46 - 48\left(\bmod 311\right)$; *б*) $x \equiv -47\left(\bmod 311\right)$;
в) $x \equiv 256\left(\bmod 311\right)$; *г*) $x \equiv 5\left(\bmod 25\right)$.

11 Конгруенція $441x \equiv 15\left(\bmod 303\right)$ має розв’язок (зазначте повний розв’язок):

Можливі варіанти відповідей:

а) $x \equiv 13(\mathrm{mod}\,303)$; *б*) $x \equiv 11;114(\mathrm{mod}\,303)$;

в) $x \equiv 13;114;25(\mathrm{mod}\,303)$; *г*) $x \equiv 7(\mathrm{mod}\,37)$.

5.3. Відповіді до тестових завдань з теми «Елементи теорії чисел»

1 *а*. **2** *б*. **3** *б*. **4** *б*. **5** *с*. **6** *в*. **7** *а*. **8** *в*. **9** *б*. **10** *в*. **11** *в*.

5.5 Розв'язування задач з теми «Алгебраїчні структури»

5.5.1 Групи. Кільця. Поля

Приклад 5.26 На множині $M = \{a, b, c\}$ задано бінарну операцію $(*)$:

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	a	c
c	a	c	b

З'ясувати:

а) властивості операції $(*)$;

б) існування нейтрального елемента;

в) чи припускає дана задана операція обернену операцію.

Р о з в ' я з а н н я

а) З'ясуємо властивості операції $(*)$.

Оскільки $a * c = c * a = a$, $a * b = b * a = b$, $b * c = c * b = c$, – операція $(*)$ є комутативна.

Оскільки $(a * b) * c = b * c = c$, $a * (b * c) = a * c = a$, – операція $(*)$ не є асоціативна.

б) З'ясуємо існування нейтрального елемента.

Нейтральний елемент e не існує.

в) З'ясуємо, чи допускає задана операція обернену операцію.

Операція $(*)$ допускає обернену операцію, оскільки у кожному рядку й у кожному стовпці таблиці подано всі елементи множини M лише один раз.

Приклад 5.27 Задано множину $H = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ підстановок з симетричної групи S_4:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Перевірити, чи є H підгрупою групи S_4.

б) Встановити порядок елемента σ_2.

в) Визначити парність підстановки σ_3.

г) Розкласти на добуток циклів підстановку σ_4.

Р о з в ’ я з а н н я

а) Перевіримо, чи є H підгрупою групи S_4.

Оскільки група S_4 є скінченною, множина H буде підгрупою S_4, якщо вона є замкнена щодо групової операції. Маємо:

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \sigma_2$; $\sigma_1 \cdot \sigma_3 = \sigma_3 \cdot \sigma_1 = \sigma_3$; $\sigma_1 \cdot \sigma_4 = \sigma_4 \cdot \sigma_1 = \sigma_4$; $\sigma_1^2 = \sigma_1$; $\sigma_2 \cdot \sigma_3 = \sigma_3 \cdot \sigma_2 = \sigma_4$; $\sigma_2 \cdot \sigma_4 = \sigma_4 \cdot \sigma_2 = \sigma_3$; $\sigma_3 \cdot \sigma_4 = \sigma_4 \cdot \sigma_3 = \sigma_2$; $\sigma_2^2 = \sigma_1$, $\sigma_3^2 = \sigma_1$; $\sigma_4^2 = \sigma_1$.

Отже, добуток кожних двох елементів множини H − елемент тієї самої множини, тому H є підгрупою групи S_4. σ_1 – одиничний елемент H .

б) Встановимо порядок елемента σ_2. Оскільки $\sigma_2^2 = \sigma_1$, то порядок елемента σ_2 дорівнює 2.

в) Визначимо парність підстановки σ_3. Підстановка σ_3 містить чотири інверсії і є парною.

г) Розкладемо на добуток циклів підстановку σ_4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,4)(2\,3)$$

(так позначають цикли).

Приклад 5.28 Скласти таблиці додавання й множення в кільці $GF_3[x]/(2x^3 + x^2 + 1)$ для многочленів другого степеня вигляду $ax^2 + bx$.

Р о з в ’ я з а н н я

Є шість многочленів зазначеного вигляду: x^2, $x^2 + x$, $x^2 + 2x$, $2x^2$, $2x^2 + x$, $2x^2 + 2x$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Загальний вигляд многочленів другого степеня $ax^2 + bx + c$, де за умовою задачі $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$, але для спрощення розглядається лише випадок, коли многочлен має вигляд $ax^2 + bx$.

Для розв’язання задачі слід використати таблиці додавання й множення в полі GF_3:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Наприклад, додамо многочлени $x^2 + 2x$ і $2x^2 + 2x$. З огляду на те, що $1 + 2 = 0$, $2 + 2 = 1$, дістанемо

$$\left(x^2 + 2x\right) + \left(2x^2 + 2x\right) = x^2(1 + 2) + x(2 + 2) = x.$$

Здобутий результат занесемо до таблиці:

Операція «+»	x^2	x^2+x	x^2+2x	$2x^2$	$2x^2+x$	$2x^2+2x$
x^2						
x^2+x			$2x^2$			
x^2+2x						x
$2x^2$						
$2x^2+x$						
$2x^2+2x$					x^2	

Решту порожніх клітинок таблиці пропонуємо заповнити самостійно.

Тепер помножимо ці многочлени. З огляду на те, що $1\cdot 2=2$, $2\cdot 2=1$, $1+2=0$, дістанемо

$$\left(x^2+2x\right)\cdot\left(2x^2+2x\right)=2x^4+x^3+2x^3+x^2=2x^4+x^3\left(1+2\right)+x^2=2x^4+x^2.$$

Знайдемо остачу від ділення $2x^4+x^2$ на $2x^3+x^2+1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & +\;0x^3 & +\;x^2 & +\;0x & +\;0 & 2x^3+x^2+1 \\ \cline{6-6} 2x^4 & +\;x^3 & + & x & & x+1 \\ \cline{1-5} & 2x^3 & +\;x^2 & +\;2x & & \\ & 2x^3 & +\;x^2 & + & 1 & \\ \cline{2-5} & & & 2x & +\;2 & \end{array}$$

Тут ураховувалося, що $0-1=2$, тому що $1+2=0$.

Отже, $\left(x^2+2x\right)\cdot\left(2x^2+2x\right)=2x+2$.

Здобутий результат занесемо до таблиці:

Операція «•»	x^2	x^2+x	x^2+2x	$2x^2$	$2x^2+x$	$2x^2+2x$
x^2			x			
x^2+x						
x^2+2x						$2x+2$
$2x^2$						
$2x^2+x$						
$2x^2+2x$		$2x^2+2x$				

Решту порожніх клітинок таблиці пропонуємо заповнити самостійно.

5.5.2 Перевірочні тести

1 Яка множина є групою відносно операції множення?

Можливі варіанти відповідей:

а) множина цілих чисел;

б) множина парних цілих чисел;

в) множина невід’ємних чисел;
г) множина додатних раціональних чисел.

2 Яка множина є підгрупою групи S_3?
Можливі варіанти відповідей:
а) {e, (23), (132)}; *б*) {e, (12), (123)}; *в*) {e, (132), (123)}; *г*) {e, (13), (12)}.

3 Яка множина не є кільцем відносно операцій додавання і множення?
Можливі варіанти відповідей:
а) множина натуральних чисел; *б*) множина раціональних чисел;
в) множина парних цілих чисел; *г*) множина дійсних чисел.

4 Яка множина є полем відносно операцій додавання і множення?
Можливі варіанти відповідей:
а) множина цілих чисел; *б*) множина парних цілих чисел;
с) множина натуральних чисел; *г*) множина раціональних чисел.

5 Який многочлен є незвідним над полем $GF(2)$?
Можливі варіанти відповідей:
а) $x^2 + x$; *б*) $x^2 + x + 1$; *в*) $x^2 + 1$; *г*) x^2.

6 Яка матриця над полем $GF(3)$ має обернену матрицю?
Можливі варіанти відповідей:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; *г*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7 Яка матриця над полем $GF(3)$ має ранг 2?
Можливі варіанти відповідей:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; *г*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8 Яка множина не є кільцем?
Можливі варіанти відповідей:
а) множина парних цілих чисел відносно операцій додавання і множення;
б) множина, що складається з числа 0;
в) множина цілих чисел відносно операцій додавання і множення;
г) множина, що складається з чисел 0 і 1.

9 Яка множина є кільцем?
Можливі варіанти відповідей:
а) множина цілих чисел відносно операцій множення і ділення;
б) множина раціональних чисел відносно операцій додавання і множення;
в) множина парних чисел відносно операцій додавання і ділення;
г) множина натуральних чисел відносно операцій віднімання і множення.

5.5.3 Відповіді до тестових завдань з теми «Алгебраїчні структури»

1 *г*. **2** *в*. **3** *а*. **4** *г*. **5** *б*. **6** *б*. **7** *а*. **8** *г*. **9** *б*.

Розділ 6

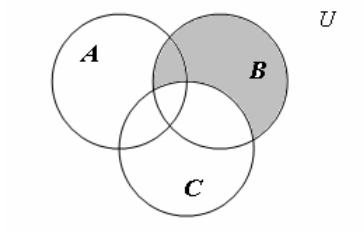
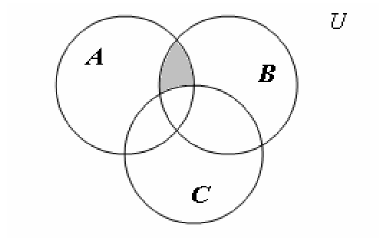
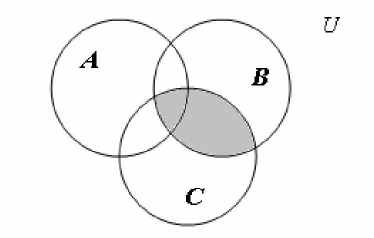
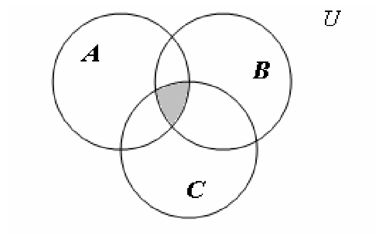
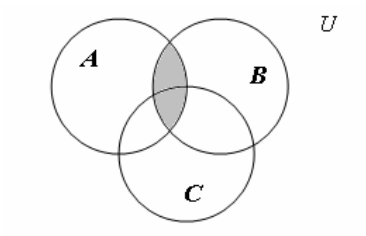
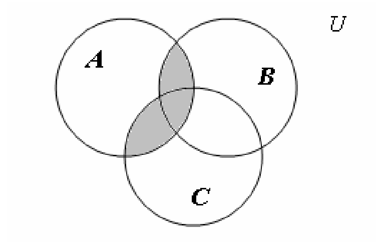
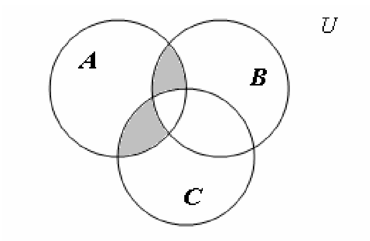
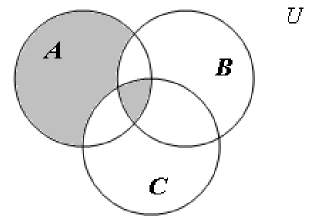
РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

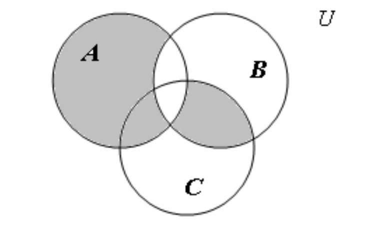
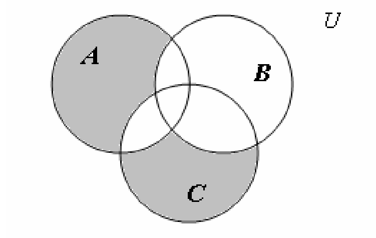
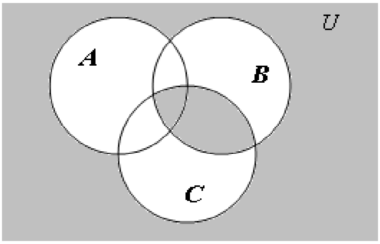
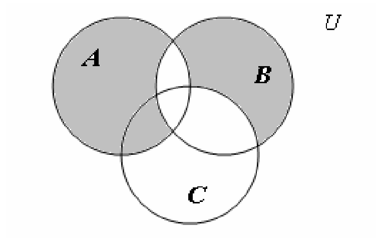
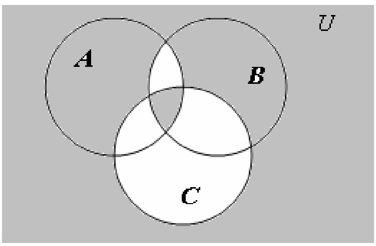
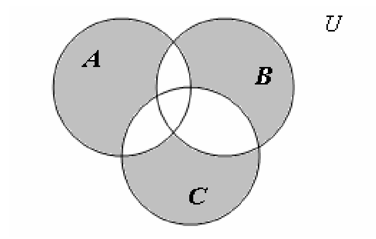
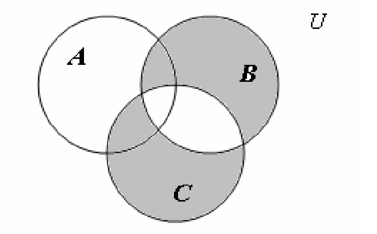
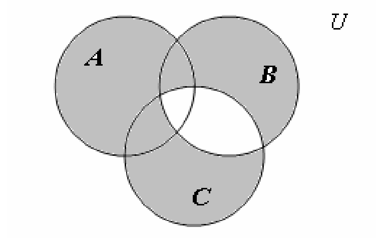
6.1 Розрахункові завдання з теми «Множини»

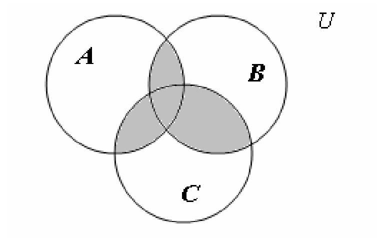
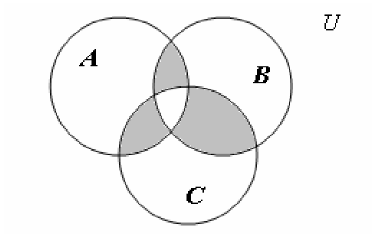
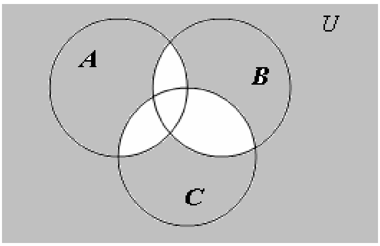
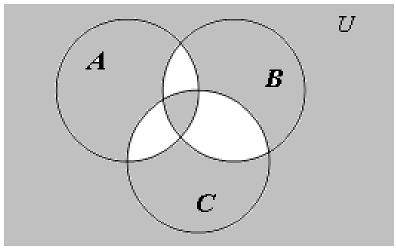
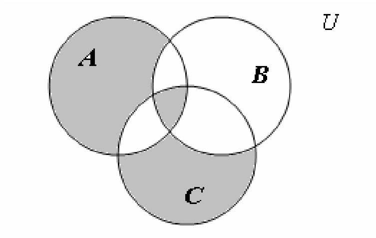
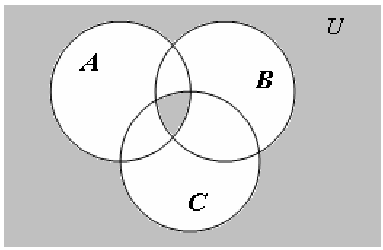
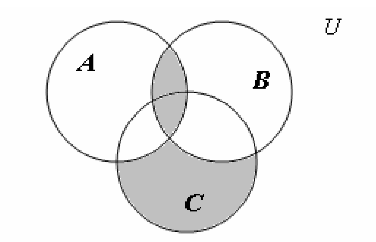
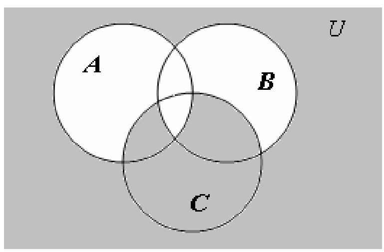
6.1.1 Знайти $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, якщо:

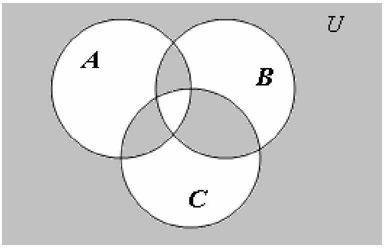
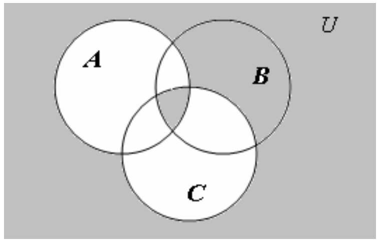
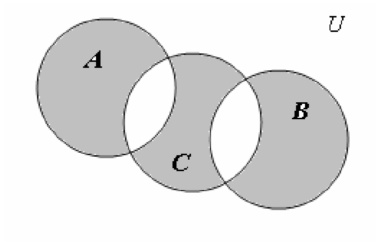
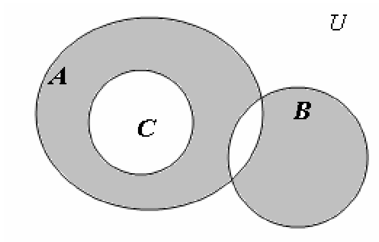
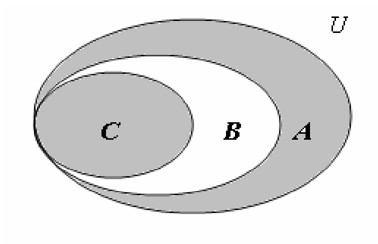
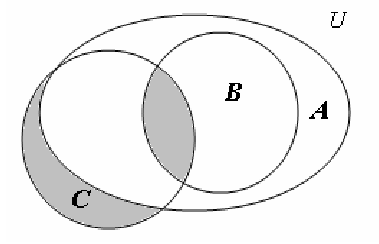
№ вар.	***A***	***B***
01	{1, 3, 5}	{2, 4}
02	{1, 2, 4}	{3, 1, 5, 0}
03	{2, 5, 4}	{3, 1, 5}
04	[−1, 3]	(2, 6)
05	(0, 1)	{0, ½, 1}
06	(3, 5)	(2, 4)
07	{1, 2, 3, 4}	{2, 4, 6, 8}
08	(0, 9)	[–5, 5]
09	{1, 3, {2, 4}, 0}	{{1, 3}, 2, 4}
10	{1, {2, 5}, 6}	{1, 2, 5, 6}
11	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 4)\wedge(x\le 40)\right\}$	$\left\{x\in B \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 5)\wedge(x\le 40)\right\}$
12	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 4)\wedge(x\le 30)\right\}$	$\left\{x\in B \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 6)\wedge(x\le 40)\right\}$
13	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 2)\wedge(x\le 20)\right\}$	$\left\{x\in B \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 3)\wedge(x\le 30)\right\}$
14	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 9)\wedge(x\le 100)\right\}$	$\left\{x\in B \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 10)\wedge(x\le 100)\right\}$
15	(3, 5)	[2, 4]
16	$\left\{(x, y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\le 4\right\}$	$\left\{(x, y)\in R^2 \middle| x\in(1, 2]\wedge y\in[-2, +\infty)\right\}$
17	$\left\{(x, y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\le 4\right\}$	$\left\{(x, y)\in R^2 \middle| x\in[1, 3)\wedge y\in[-1, 1]\right\}$
18	{*a*, *b*, *c*, *e*, *d*}	{*a, e, l, k, n*}
19	{{*a, b*}, {*c, d*}}	{*a, b, c, d*}
20	[2, 5]	{0, 1, 2, 3, 4, 5}
21	(3, 5)	(2, 4)
22	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 3)\wedge(x\le 30)\right\}$	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 5)\wedge(x\le 50)\right\}$
23	$\left\{x\in R \middle| x\le 1\right\}$	$\left\{x\in R \middle| x>0\right\}$
24	{1, 5, 3, 0, 7}	{2, 4, 0, 6}
25	$\left\{x\in R \middle| x\le 2\right\}$	$\left\{x\in R \middle| x\le 0\right\}$
26	(2, 6]	[4, 9)
27	{*a, c, b*}	{*c, d, k*}
28	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge(x\vdots 2)\wedge(x\le 10)\right\}$
29	{2, 3, 7, 8, 9, 11, 19, 20}	$\left\{x\in A \middle| (x\in N)\wedge((x\vdots 2)\vee(x\vdots 3))\wedge(x\le 100)\right\}$
30	{2, 5, 4}	{2, 5, 4}

6.1.2 Опишіть множину, яка відповідає затемненій частині діаграми Ейлера-Венна:

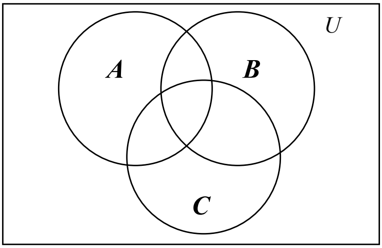
№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
01		02	
03		04	
05		06	
07		08	

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
09		10	
11		12	
13		14	
15		16	

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
17		18	
19		20	
21		22	
23		24	

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
25		26	
27		28	
29		30	

6.1.3 На діаграмі Ейлера-Венна трьох множин − A, B, C − зазначити точки, які належать до множини R.



№ вар.	*R*	№ вар.	*R*
01	$(A\cup B\cup C)\cap\overline{B}$	02	$(A\cap B)\cup C$
03	$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{A}$	04	$(A\cup B)\setminus(A\cap C)$
05	$A\cap(B\cup C)$	06	$(\overline{A\cup B})\cap C$
07	$A\cup(B\cap C)$	08	$(A\cap B)\setminus C$
09	$((A\setminus B)\cup(B\setminus A))\cap C$	10	$(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$
11	$A\cap(B\setminus C)$	12	$((A\cup B)\setminus C)\cup(C\setminus(A\cup B))$
13	$A\cup(B\setminus C)$	14	$((A\cup B)\setminus C)\cap\overline{A}$
15	$A\setminus(B\setminus C)$	16	$C\setminus(A\cap B)$
17	$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cup\overline{C})$	18	$C\setminus(A\cup B)$
19	$(\overline{A\cap B})\cup C$	20	$(C\setminus A)\cup(B\setminus C)$
21	$A\setminus C\cup B$	22	$(\overline{A}\cap B)\cup(A\setminus B\setminus C)$
23	$(A\setminus B)\cap C$	24	$(A\cap B\cap C)\cup C$
25	$((A\cup C)\setminus C)\cap B$	26	$(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$
27	$(A\cap B)\cup(A\cap C)$	28	$(A\cup\overline{C})\cap B$
29	$(B\setminus C)\cap A$	30	$A\setminus B\cup(A\cap B)\cup C$

6.1.4 Довести наступні тотожності:

№ вар.	Завдання
01	$\overline{A \cap \overline{\overline{B}}} \cup B = \overline{A} \cup B$
02	$\left((A \cup B \cap C) \cup \overline{A} \cap B \cap C)\right) \cap \left(B \cap C \cap \overline{A}\right) = B \cap C \cap \overline{A}$
03	$\left(A \cap B \cap C \cap \overline{U}\right) \cup \left(\overline{A} \cap C\right) \cup \left(\overline{B} \cap C\right) \cup (C \cap U) = C$
04	$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D).$
05	$A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$
06	$A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
07	$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
08	$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$
09	$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
10	$A \cap \left(B \setminus A\right) = \varnothing$
11	$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$
12	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
13	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
14	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
15	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
16	$\overline{\left(A \cap \overline{U}\right) \cup \left(B \cap \overline{U}\right)} = \left(\overline{A} \cup U\right) \cap \left(\overline{B} \cup U\right)$
17	$\left[(A \cap U) \cup \left(B \cap \overline{U}\right)\right] \cup \left[(C \cap U) \cup \left(D \cap \overline{U}\right)\right] = \left[(A \cup C) \cap U\right] \cup \left[(B \cup D) \cap \overline{U}\right]$
18	$\overline{(\overline{A} \cup B \cup C)} \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
19	$\overline{\overline{A} \cup C} \cup (B \cup B \cap C) \cap (\overline{B} \cup \overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{C}$
20	$\overline{(C \setminus A) \cap (C \setminus B)} = A \cup B \cup \overline{C}$
21	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
22	$A \setminus \left(B \cup C\right) = \left(A \setminus B\right) \setminus C$
23	$A \oplus (A \oplus B) = B$
24	$A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$
25	$A \oplus (A \cap B) = A \setminus B$
26	$(A \oplus B) \cup (A \cap B) = A \cup B$
27	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
28	$A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$
29	$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
30	$(A \cap \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B}) \setminus C$

Вказівка. $(A \oplus B) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (\overline{A} \cap B)$.

6.1.5 Задано вихідні множини $A = \{1, 2\}$; $B = \{3, 4\}$; $C = \{4, 5, 6\}$; $D = \{a, b, c\}$; $H = \{a, c, d\}$; $Q = \{c, d, e\}$. Знайти:

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
01	$A\times B$	02	$C\times(B\times A)$
03	$B\times A$	04	$(C\times B)\times A$
05	$(A\times B)\times C$	06	$C\times B$
07	$A\times(B\times C)$	08	A^2
09	$A\times B\times C$	10	C^2
11	$(A\times B)^{-1}$	12	$(C\times(B\times A))^{-1}$
13	$(B\times A)^{-1}$	14	$((C\times B)\times A)^{-1}$
15	$((A\times B)\times C)^{-1}$	16	$(C\times B)^{-1}$
17	$(A\times(B\times C))^{-1}$	18	$D\times H$
19	$(A\times B\times C)^{-1}$	20	$H\times D$
21	$Q\times H$	22	$Q\times(D\times H)$
23	$D\times Q$	24	D^2
25	$(D\times H)\times Q$	26	H^2
27	$D\times(H\times Q)$	28	Q^2
29	$D\times H\times Q$	30	$(D\times H)^{-1}$

6.1.6 Знайти функції f та f^{-1}, які відповідають відображенням R та R^{-1} визначених на множені $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Перевірити, що $f*f^{-1}=f^{-1}*f=1_A$, де 1_A – тотожне відображення множини A на себе. Накреслити схематичне зображення R та R^{-1}.

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
01	$R=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,3),(5,1)\}$	02	$R=\{(1,3),(2,4),(3,2),(4,1),(5,5)\}$
03	$R=\{(1,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}$	04	$R=\{(1,5),(2,4),(3,1),(4,3),(5,2)\}$
05	$R=\{(1,4),(2,1),(3,3),(4,2),(5,5)\}$	06	$R=\{(1,4),(2,5),(3,2),(4,3),(5,1)\}$
07	$R=\{(1,3),(2,1),(3,5),(4,2),(5,4)\}$	08	$R=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}$
09	$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$	10	$R=\{(1,3),(2,2),(3,1),(4,5),(5,4)\}$

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
11	$R=\{(1,5),(2,3),(3,1),(4,2),(5,4)\}$	12	$R=\{(1,5),(2,2),(3,4),(4,1),(5,3)\}$
13	$R=\{(1,4),(2,5),(3,1),(4,3),(5,2)\}$	14	$R=\{(1,1),(2,2),(3,4),(4,3),(5,5)\}$
15	$R=\{(1,5),(2,2),(3,4),(4,1),(5,3)\}$	16	$R=\{(1,2),(2,5),(3,1),(4,4),(5,3)\}$
17	$R=\{(1,3),(2,1),(3,2),(4,4),(5,5)\}$	18	$R=\{(1,5),(2,2),(3,1),(4,3),(5,4)\}$
19	$R=\{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3),(5,5)\}$	20	$R=\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,2),(5,1)\}$
12	$R=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,2),(5,4)\}$	22	$R=\{(1,1),(2,2),(3,5),(4,3),(5,4)\}$
14	$R=\{(1,5),(2,1),(3,4),(4,2),(5,3)\}$	24	$R=\{(1,4),(2,1),(3,5),(4,3),(5,2)\}$
16	$R=\{(1,3),(2,2),(3,4),(4,5),(5,1)\}$	26	$R=\{(1,5),(2,3),(3,1),(4,2),(5,4)\}$
18	$R=\{(1,2),(2,5),(3,1),(4,4),(5,3)\}$	28	$R=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,5)\}$
20	$R=\{(1,5),(2,1),(3,3),(4,2),(5,4)\}$	30	$R=\{(1,4),(2,1),(3,3),(4,5),(5,2)\}$

6.2 Розрахункові завдання з теми «Математична логіка»

6.2.1 Бульову функцію $f(x, y, z)$ задано формулою алгебри логіки. Треба задати цю функцію:

8) таблицею істинності;
9) вектором значень;
10) порядковим номером;
11) номерами наборів, на яких $f=1$;
12) картою Карно;
13) графічно;
14) д. Д. Н. Ф. Та д. К. Н. Ф. (досконалими диз'юнктивною та кон'юнктивою нормальними формами).

№ вар.	$f(x,y,z)$	№ вар.	$f(x,y,z)$
01	$(x\to y)\wedge(y\to z)$	02	$x\oplus(y\to z)$
03	$(x\wedge y)\oplus(x\wedge z)\oplus(y\wedge z)$	04	$(x\vee\overline{y})\oplus(y\to z)$
05	$x\wedge y\vee x\wedge y\vee y\wedge z$	06	$(x\oplus y)\to y\wedge z$
07	$x\wedge(x\vert y)\vee z$	08	$(x\vee y)\wedge(y\oplus z)$
09	$x\wedge y\to z$	10	$(x\to y)\oplus(y\vee z)$
11	$x\vee\overline{y}\wedge z\oplus\overline{z}$	12	$(x\downarrow y)\to(y\oplus z)$
13	$(\overline{x}\wedge y\oplus z)\wedge(x\wedge z\to y)$	14	$(x\vert y)\vee(y\to z)$

№ вар.	$f(x,y,z)$	№ вар.	$f(x,y,z)$
15	$x \to (y \to z)$	16	$(x \oplus y) \downarrow (y \vert z)$
17	$(x \oplus y) + (y \downarrow z)$	18	$(x \wedge y) \to (y \downarrow z)$
19	$(x \downarrow y) \vert (y \downarrow z)$	20	$(x \vert y) \downarrow (x \to z)$
21	$x \vee y \oplus z$	22	$x \to (y \vert z)$
23	$x \vert (y \to z)$	24	$x \vert z \to (y \vert z)$
25	$(x \to y) \wedge (y \oplus z)$	26	$(x \oplus y) \downarrow (y \vee z)$
27	$(x \vee y) \oplus (x \wedge y)$	28	$(x \vert y) \to (y \oplus z)$
29	$(x \wedge y) \to (x \oplus z)$	30	$(x \to y) \oplus (y \downarrow z)$

6.2.2 Перевірити на повноту подані нижче множини бульових функцій:

№ вар.	Завдання	№ вар	Завдання
01	$\{x \vee y;\ x \oplus y;\ 1\}$	02	$\{0;1;x \sim y\}$
03	$\{x \sim y;1;x \vee y\}$	04	$\{x \vee y \oplus x;x \sim y;0\}$
05	$\{x \vee y;\ x \oplus y \oplus 1\}$	06	$\{x \vee y;\ x \wedge y \oplus y \wedge z\}$
07	$\{0;\ 1;\ (x \wedge y) \vee z\}$	08	$\{\overline{x};\ 1;\ x \oplus y\}$
09	$\{0;\ 1;\ x \oplus y\}$	10	$\{x \oplus y;\ x \vee y \vee \overline{z}\}$
11	$\{x \wedge y \oplus x;x \sim y;0\}$	12	$\{\overline{x} \wedge \overline{y} \vee z;\ x \oplus y\}$
13	$\{x \vee y;\ x \wedge y \oplus x \wedge z\}$	14	$\{x \sim y;x \oplus y;x \wedge y \oplus z\}$
15	$\{x \oplus y;\ x \vee y \vee \overline{z}\}$	16	$\{x \to y;\ x \oplus y \oplus z\}$
17	$\{\overline{x \to y};\ \overline{x}\}$	18	$\{x \wedge y \oplus z;(x \sim y) \oplus z\}$
19	$\{x \wedge y \oplus x;\ 1\}$	20	$\{x \wedge y;\ x\}$
21	$\{x \oplus y;x \sim (y \wedge x)\}$	22	$\{x \wedge y;\ x \vee y;\ 1\}$
23	$\{x \wedge y;x \oplus y;x \sim (x \vee y)\}$	24	$\{x \oplus y;\ x \vee y\}$
25	$\{x \sim y;1;x \vee y\}$	26	$\{x \vee y \vee z;\ x \wedge y;\ 0;\ 1\}$
27	$\{x \wedge y;\ x \oplus y \oplus 1\}$	28	$\{x \to y;\ \overline{x}\}$
29	$\{0;\ 1;\ x \wedge y \vee z\}$	30	$\{x \to y;\ 0\}$

6.2.3 Методом Квайна−Мак-Класкі мінімізувати логічну схему

$$f(x,\ y,\ z,\ u) = \underset{1}{\mathrm{V}}(0, 5, 10, 15, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)\,,$$

де $a_1 = |n-15|$; $a_2 = \left[\dfrac{n}{2}\right]$; $a_3 = \left[\dfrac{n}{3}\right]$; $a_4 = \left[\dfrac{n}{4}\right]$; $a_5 = 2 + a_3$; $a_6 = |13 - a_2|$; $a_7 = 5 + a_4$; $a_8 = |14 - a_4|$; n – номер варіанта (1 ... 30).

6.3 Розрахункові завдання з теми «Теорія графів»

6.3.1 Виконати такі завдання:

6.3.1.1 *Побудувати граф, який містить:*

a) 3 вершини і 3 ребра;

b) 4 вершини і 7 ребер;

c) 7 вершин і 3 ребра.

6.3.1.2 *Побудувати орграф, який містить:*

a) 4 вершини і 3 дуги;

b) 5 вершини і 2 дуги;

c) 6 вершини і 3 петлі.

6.3.1.3 *Побудувати мультиграф який містить:*

a) 3 паралельних ребра;

b) 6 паралельних ребер;

c) 3 і 6 паралельних ребер.

6.3.1.4 *Побудувати граф, для якого:*

a) одна вершина має степінь 5;

b) дві вершини мають степінь 5;

c) три вершини мають степінь 5.

6.3.1.5 *Побудувати простий граф, який містить:*

a) 3 вершини;

b) 5 вершин;

c) 7 вершин.

6.3.1.6 *Побудувати граф, який містить:*

a) 5 вершин, 4 ребра (з яких дві є петлі);

b) 4 вершини, 6 ребер (з яких 3 є петлі);

c) 7 вершин (з яких 3 є ізольовані), 7 ребер (з яких 3 є петлі).

6.3.1.7 *Побудувати однорідний граф 3-го степеня, який містить:*

a) 4 вершини;

b) 6 вершин;

c) 10 вершин.

6.3.1.8 *Побудувати трикомпонентний граф, який містить:*

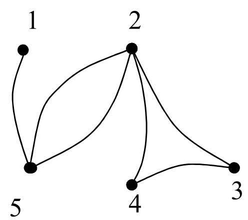
a) одну ізольовану вершину;

b) дві ізольовані вершини;

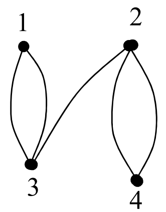
c) три ізольовані вершини.

6.3.1.9 *Скласти список всіх пар суміжних вершин кожного графа:*

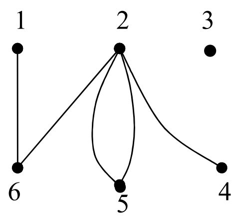
a)



b)



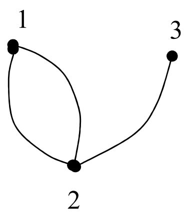
c)



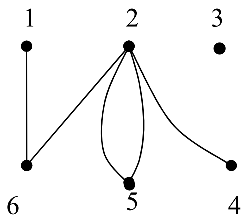
6.3.1.10 *Для кожного графа з завдання 6.3.1.9 вказати всі ребра, що інцидентні вершинам 2 і 4.*

6.3.1.11 *Побудувати матрицю суміжності кожного графа:*

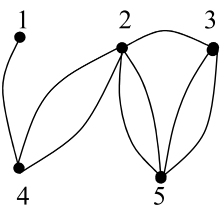
a)



b)



c)



6.3.1.12 *Побудувати матриці інцидентності кожного графа з завдання 6.3.1.11.*

6.3.1.13 *За кожною даною матрицею суміжності побудувати її граф:*

$$a)\ \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array};\qquad b)\ \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array};\qquad c)\ \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

6.3.1.14 *За кожною даною матрицею інцидентності побудувати її граф:*

$$a)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad b)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad c)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

6.3.1.15 *Для кожної матриці суміжності з завдання 6.3.1.13 побудувати її матрицю інцидентності.*

6.3.1.16 *Для кожної матриці інцидентності з завдання 6.3.1.14 побудувати її матрицю суміжності.*

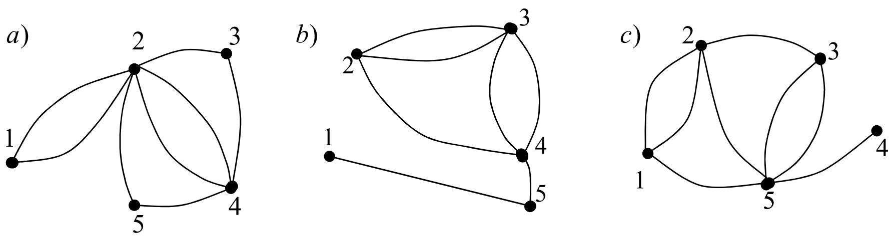
6.3.1.17 *Побудувати два ізоморфних графи, які містять:*

a) 3 вершини і 4 ребра;

b) 4 вершини і 3 паралельних ребра;

c) 5 вершин і 3 петлі.

6.3.1.18 *Зазначити два маршрути (скласти список), які поєднують вершини 2 та 4 графа:*



6.3.1.19 *Скласти матриці суміжності графів, заданих в завданні 6.3.1.18.*

6.3.1.20 *Скласти матриці інцидентності графів, заданих в завданні 6.3.1.18.*

6.3.1.21 *Знайти найбільшу довжину ланцюга, який поєднує вершини 1 та 5 графа задачі 6.3.1.18.*

6.3.1.22 *Побудувати всі цикли графа задачі 6.3.1.18.*

6.3.1.23 *Знайти діаметр графа задачі 6.3.1.18.*

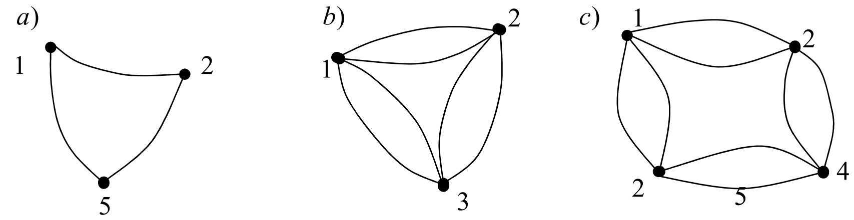
6.3.1.24 *Побудувати повний граф, який містить:*

a) 3 вершини;

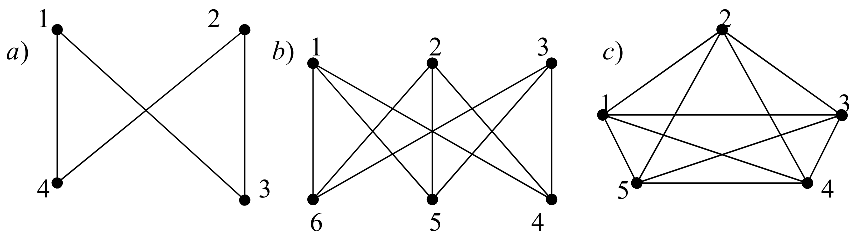
b) 4 вершини;

c) 5 вершин.

6.3.1.25 *Побудувати ейлерів цикл кожного графа*:



6.3.1.26 *Побудувати гамільтонів цикл кожного графа:*



6.3.1.27 *Побудувати дерево, яке містить:*

a) 5 вершин;

b) 8 вершин;

c) 8 ребер.

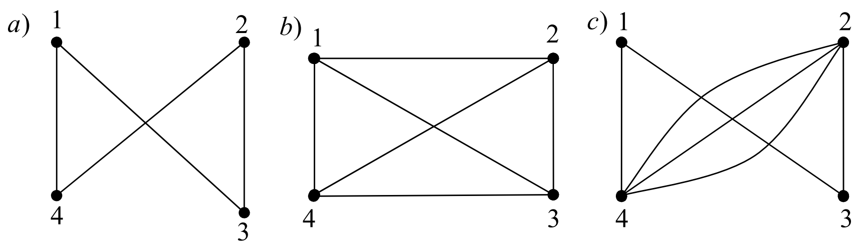
6.3.1.28 *Побудувати ліс, який містить:*

a) 2 дерева;

b) 4 дерева;

c) 7 дерев.

6.3.1.29 *Побудувати планарне зображення кожного графа:*



6.3.1.30 *Чи є планарним кожний граф задачі 6.3.1.29?*

6.3.2 Орграф $G(X,U)$ задано списком:

$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$;

$U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_2,x_5),(x_2,x_3),(x_3,x_5)\}$.

Задати цей граф у геометричний та матричний способи.

№ вар.	Завдання
01	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_6),(x_3,x_2),(x_4,x_3),(x_4,x_5),(x_5,x_3),(x_5,x_6),(x_6,x_1),(x_6,x_4)\}$
02	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_5,x_2),(x_5,x_3),(x_5,x_6),(x_6,x_4)\}$
03	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_2,x_6),(x_3,x_4),(x_4,x_1),(x_4,x_5),(x_4,x_6)\}$
04	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_5),(x_2,x_5),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_4,x_5),(x_4,x_7),(x_6,x_1),$ $(x_6,x_5),(x_6,x_7),(x_7,x_5)\}$
05	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_1,x_5),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_5,x_6),(x_6,x_3)\}$
06	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_4),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_5,x_4),(x_5,x_6),(x_7,x_4),(x_7,x_6)\}$
07	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_3,x_7),(x_4,x_5),(x_5,x_6),(x_6,x_3),(x_7,x_8),(x_8,x_2),(x_9,x_4)\}$
08	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_5),(x_1,x_6),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_3,x_7),(x_6,x_2),(x_6,x_3),$ $(x_6,x_5),(x_7,x_1),(x_7,x_2),(x_7,x_4)\}$
09	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_1,x_8),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_5),(x_3,x_7),(x_4,x_2),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_6,x_5),(x_6,x_7),$ $(x_7,x_1),(x_8,x_6),(x_8,x_7)\}$
10	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_5,x_7),(x_6,x_5),(x_6,x_7),(x_6,x_8)\}$

№ вар.	**Завдання**
11	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_4),(x_1,x_6),(x_1,x_{10}),(x_2,x_3),(x_3,x_5),(x_3,x_8),(x_4,x_2),(x_4,x_6),(x_5,x_2),$ $(x_5,x_4),(x_6,x_7),(x_6,x_{10}),(x_8,x_5),(x_8,x_7),(x_9,x_7),(x_9,x_8),(x_{10},x_7),(x_{10},x_9)\}$
12	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_4),(x_4,x_3),(x_4,x_5),(x_6,x_1),(x_6,x_2),(x_6,x_3),(x_6,x_4),(x_6,x_5),(x_6,x_7),$ $(x_6,x_8),(x_6,x_9),(x_7,x_1),(x_7,x_9),(x_8,x_5),(x_8,x_9)\}$
13	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_2),(x_6,x_2)\}$
14	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_6),(x_2,x_8),(x_3,x_7),(x_4,x_2),(x_5,x_4),(x_5,x_{10}),(x_6,x_3),(x_6,x_5),(x_7,x_4),$ $(x_8,x_3),(x_9,x_1),(x_9,x_7),(x_{10},x_8),(x_{10},x_9)\}$
15	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_4),(x_3,x_4),(x_5,x_4),(x_6,x_4),(x_7,x_4),(x_7,x_5),(x_7,x_6)\}$
16	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_2),(x_4,x_5),(x_5,x_6),(x_6,x_4)\}$
17	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_8),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_5,x_7),(x_6,x_4),(x_7,x_1),(x_8,x_6)\}$
18	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_3,x_1),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6),(x_6,x_4),(x_6,x_7),(x_7,x_5)\}$
19	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_5),(x_3,x_1),(x_3,x_4),(x_5,x_4),(x_5,x_6),(x_6,x_7),(x_7,x_3),(x_7,x_4)\}$
20	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_2,x_6),(x_3,x_2),(x_4,x_8),(x_5,x_1),(x_6,x_1),(x_6,x_7),(x_7,x_3),(x_8,x_3),(x_8,x_5)\}$
21	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_5),(x_4,x_2),(x_5,x_1),(x_6,x_4)\}$
22	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_6),(x_2,x_7),(x_3,x_7),(x_4,x_7),(x_5,x_3),(x_5,x_4),(x_7,x_1),(x_7,x_5),(x_7,x_6)\}$

№ вар.	Завдання
23	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_6),(x_4,x_2),(x_4,x_5),(x_5,x_1),(x_6,x_4),(x_6,x_5)\}$
24	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_4,x_2),(x_5,x_2),(x_5,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6)\}$
25	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_5),(x_3,x_2),(x_4,x_1),(x_4,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6)\}$
26	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_1,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_7),(x_4,x_6),(x_4,x_8),(x_5,x_2),(x_5,x_4),(x_6,x_1),(x_6,x_3),$ $(x_7,x_5),(x_8,x_6)\}$
27	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ $U=\{(x_1,x_4),(x_2,x_1),(x_3,x_2),(x_4,x_5),(x_5,x_8),(x_6,x_3),(x_7,x_6),(x_8,x_7)\}$
28	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_2,x_1),(x_2,x_5),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_2),(x_4,x_6),(x_5,x_3),(x_5,x_4),(x_5,x_6),$ $(x_6,x_2),(x_6,x_3)\}$
29	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_1,x_7),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_3,x_7),(x_4,x_1),(x_4,x_5),(x_5,x_6),(x_5,x_7),$ $(x_6,x_4),(x_7,x_4)\}$
30	$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ $U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_6),(x_4,x_1),(x_4,x_5),(x_5,x_6)\}$

6.3.3 Граф $G=(X,U)$ задано матрицею суміжності

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_i \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Побудувати геометричне зображення графа. Визначити тип графа, типи ребер та вершин.

b) Побудувати декілька підграфів, дерево та ліс.

c) Побудувати можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнений маршрут, ланцюг та простий ланцюг, цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона.

d) Обчислити метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

№ вар.	$A(G)$	**№ вар.**	$A(G)$
01	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$	02	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$
03	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$	04	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$
05	$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 1&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$	06	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$

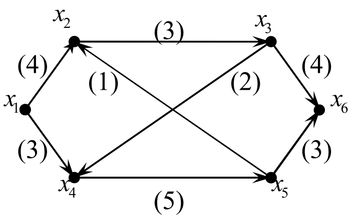
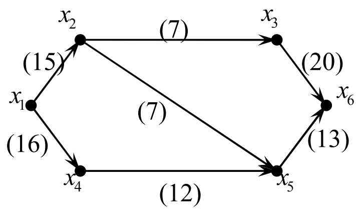
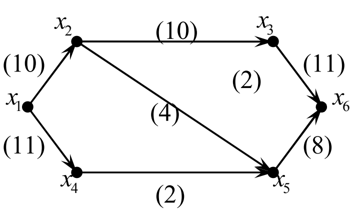
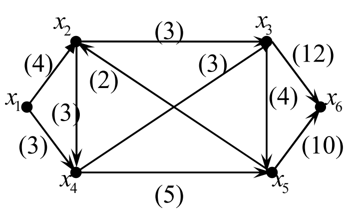
№ вар.	$A(G)$	№ вар.	$A(G)$
07	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	08	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
09	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

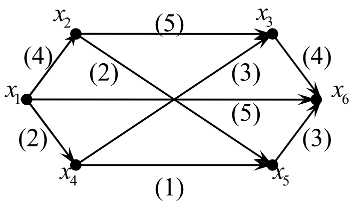
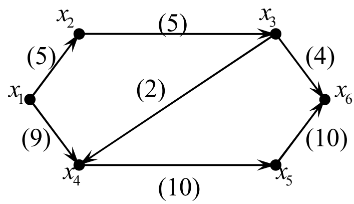
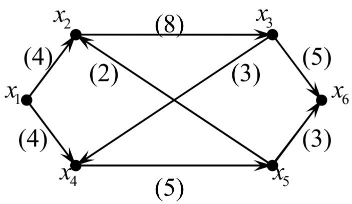
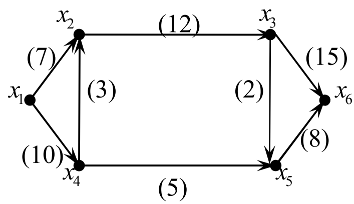
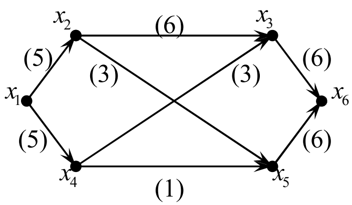
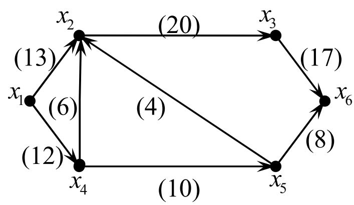
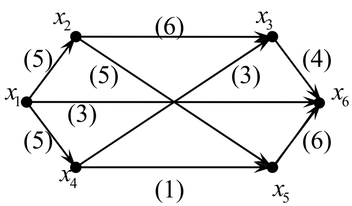
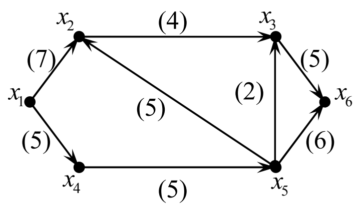
№ вар.	$A(G)$	№ вар.	$A(G)$
15	$\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0\\ 1&0&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$

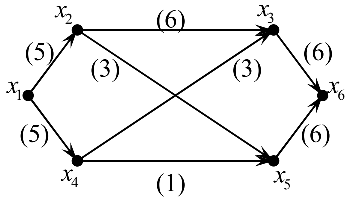
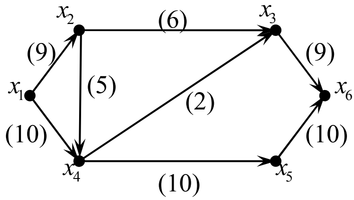
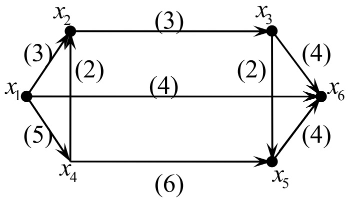
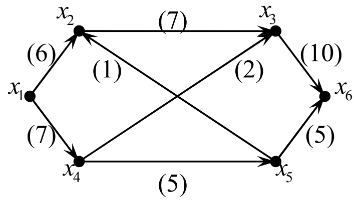
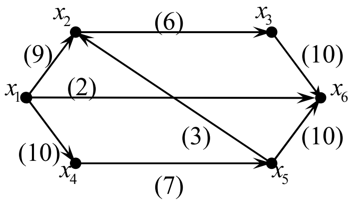
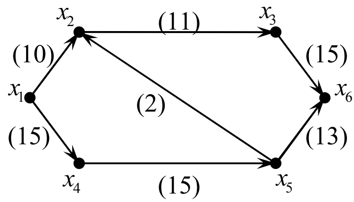
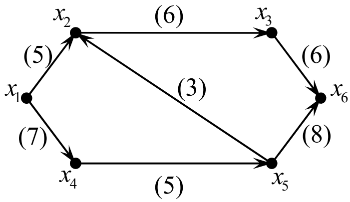
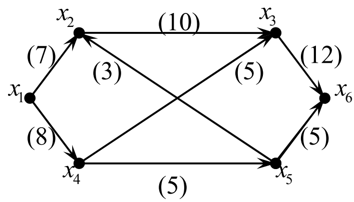
№ вар.	$A(G)$	**№ вар.**	$A(G)$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

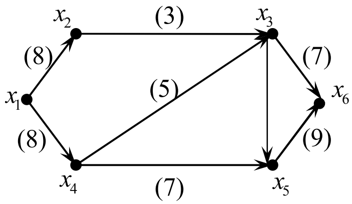
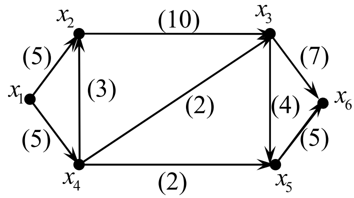
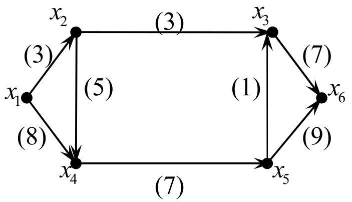
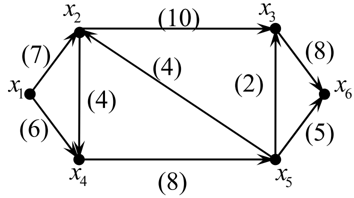
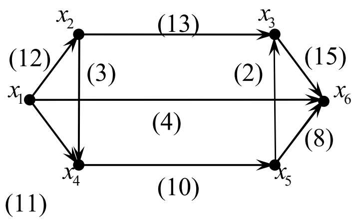
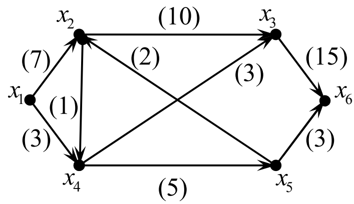
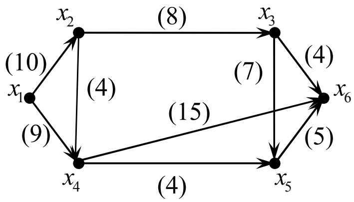
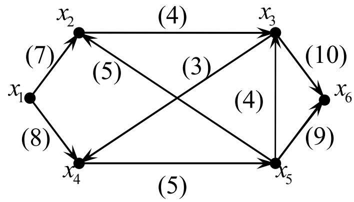
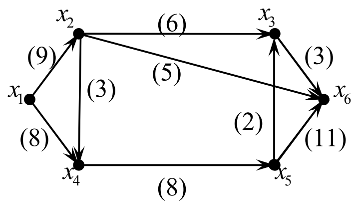
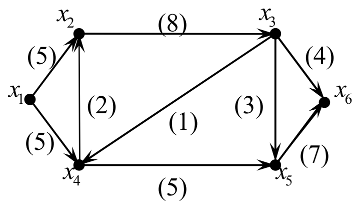
№ вар.	$A(G)$	№ вар.	$A(G)$
29	$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$

6.3.4 Обчислити повний потік в транспортній мережі G (в дужках зазначено припустимі пропускні здатності дуг).

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
01		02	
03		04	

№ вар.	**Завдання**	**№ вар.**	**Завдання**
05		06	
07		08	
09		10	
11		12	

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>Завдання</th><th>№ вар.</th><th>Завдання</th></tr>
<tr><td>21</td><td>
</td><td>22</td><td>
</td></tr>
<tr><td>23</td><td>
</td><td>24</td><td>
</td></tr>
<tr><td>25</td><td>
</td><td>26</td><td>
</td></tr>
<tr><td>27</td><td>
</td><td>28</td><td>
</td></tr>
<tr><td>29</td><td>
</td><td>30</td><td>
</td></tr>
</table>

6.4 Розрахункові завдання з теми «Елементи теорії чисел»

6.4.1 Розкласти кожне непарне число a на два множники, подавши його у вигляді різниці квадратів двох натуральних чисел.

Приклад*:* число $1365 = 37^2 - 2^2 = (37 - 2)(37 + 2) = 35 \cdot 39$.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	6643	1769	3551	6497	1817	2407	6655	1879	3661	6475

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	1835	2509	6755	6557	2701	6917	2121	3795	6775	1591

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	1989	3773	1941	7201	6501	2321	3737	7567	5119	2711

6.4.2 Знайти точне значення функції $\pi(x)$ і наближене значення функції $\pi(x)$, обчислити відносні похибки наближених значень $\pi(x)$ за заданих x.

Вказівка. Функцію $\pi(x)$ визначено для всіх натуральних x: вона дорівнює кількості простих чисел в натуральному ряді, які не перевищують x. Значення $\pi(x)$ знаходиться точно безпосереднім підрахунком простих чисел або наближено, при великих значеннях x, за формулою $\pi(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	4	50	100	5	8	26	38	51	6	101

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	7	10	37	11	13	28	53	29	35	57

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x	12	25	9	15	17	105	39	16	48	90

6.4.3 Знайти значення числових функцій $\tau(a)$, $\sigma(a)$, $\varphi(a)$ (функція Ейлера) для заданих a.

Вказівки. Функцію $\tau(a)$ дорівнює кількості всіх натуральних дільників даного числа a. Функція $\tau(a)$ визначається для всіх натуральних a за формулою $\tau(a)=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)...(\lambda_n+1)$, де $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$ – показники степенів простих дільників в канонічному розкладанні числа $a=p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}\cdot...\cdot p_n^{\lambda_n}$. Якщо p – просте, то $\tau(p)=2$.

Функція $\sigma(a)$ дорівнює сумі всіх натуральних дільників даного числа a. Функція $\sigma(a)$ визначається для всіх натуральних a за формулою $\sigma(a)=\dfrac{p_1^{\lambda_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\dfrac{p_2^{\lambda_2+1}-1}{p_2-1}...\dfrac{p_n^{\lambda_n+1}-1}{p_n-1}$, де $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$ – прості дільники числа a та $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – показники степенів простих дільників в канонічному розкладанні числа $a=p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}...p_n^{\lambda_n}$. Якщо p – просте, то $\sigma(p)=p+1$.

Функцію Ейлера $\varphi(a)$ дорівнює кількості натуральних взаємно простих чисел з числом a таких, що не перевищують a. Функція Ейлера визначається для всіх натуральних чисел a за формулою
$\varphi(a)=a\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)$, де $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$ – прості дільники числа a в канонічному розкладанні числа $a=p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}...p_n^{\lambda_n}$.

Основні властивості функції Ейлера:

1) $\varphi(1)=1$;

2) $\varphi(p)=p-1$, де p – просте число;

3) $\varphi(p^{\lambda})=p^{\lambda-1}(p-1)$, де p – просте число;

4) функція Ейлера є мультиплікативна, тобто $\varphi(a\cdot b\cdot...\cdot l)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)\cdot...\cdot\varphi(l)$ для попарно простих *a, b, ..., l.*

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	375	720	957	988	1500	4340	1545	1899	1605	2330

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	2990	1440	1200	960	1988	1445	1893	1312	2900	550

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	1960	990	1890	4320	360	750	1990	1212	1505	560

6.4.4 Написати всі три види як повних, так і зведеної систем лишків за даним модулем $m = \left[\dfrac{N}{2} + 6\right]$, де N − номер варіанта.

Вказівки. Повною системою найменших невід'ємних лишків за даним модулем m є система чисел $\{0, 1, 2 ..., m-1\}$.

Повною системою найменших за абсолютною величиною недодатніх лишків за даним модулем m є система чисел $\{-(m-1), -(m-2),... -2, -1, 0\}$.

Повною системою абсолютно найменших лишків за даним модулем m є:

за непарного m – система чисел $\left\{-\left[\dfrac{m}{2}\right],\ -\left[\dfrac{m}{2}\right]+1,\ ...,\ 0,\ 1,\ ...,\ \left[\dfrac{m}{2}\right]\right\}$;

за парного m – система чисел

$$\left\{-\frac{m}{2},\ -\frac{m}{2}+1,\ ...,\ 0,\ 1,\ ...,\ \frac{m}{2}-1\right\},\ \text{або}\ \left\{1-\frac{m}{2},\ 2-\frac{m}{2},...,m-\frac{m}{2}\right\}.$$

Сукупність взаємно простих з модулем m чисел, взятих з повної системи лишків, називається з в е д е н о ю системою лишків за цим модулем m.

6.4.5 Знайти остачу від ділення:

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
1	25^{38} на 13	11	13^{100} на 7	21	5^{38} на 3
2	5^{200} на 29	12	15^{60} на 13	22	35^{18} на 11
3	16^{47} на 19	13	35^{70} на 12	23	35^{39} на 12
4	42^{42} на 25	14	45^{83} на 24	24	45^{18} на 7
5	13^{57} на 15	15	6^{76} на 26	25	37^{78} на 15
6	3^{100} на 29	16	15^{91} на 35	26	21^{38} на 13
7	36^{37} на 49	17	24^{100} на 7	27	45^{28} на 11
8	34^{71} на 25	18	20^{30} на 13	28	24^{36} на 13
9	27^{41} на 4	19	17^{50} на 12	29	23^{58} на 7
10	35^{43} на 16	20	15^{28} на 7	30	55^{38} на 7

6.4.6 Знайти останні дві цифри числа *a:*

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	15^{91}	17^{50}	35^{18}	35^{39}	21^{38}	45^{28}	55^{38}	37^{78}	24^{36}	23^{58}
№ вар	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	42^{42}	36^{37}	35^{43}	35^{70}	45^{83}	24^{100}	15^{28}	20^{30}	5^{38}	45^{18}
№ вар	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	15^{35}	5^{200}	13^{57}	16^{47}	34^{71}	6^{76}	27^{41}	3^{100}	15^{60}	13^{100}

6.4.7 Розв’язати конгруенції:

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
1	$a)\ 162x \equiv 36 \pmod{84}$ $b)\ 265x \equiv 25 \pmod{535}$	2	$a)\ 3x \equiv 27 \pmod{37}$ $b)\ 265x \equiv 25 \pmod{535}$
3	$a)\ 57x \equiv -39 \pmod{72}$ $b)\ 381x \equiv 81 \pmod{417}$	4	$a)\ 12x \equiv 1 \pmod{7}$ $b)\ 215x \equiv 105 \pmod{265}$
5	$a)\ 3x \equiv 1 \pmod{5}$ $b)\ 258x \equiv 66 \pmod{318}$	6	$a)\ 3x \equiv 23 \pmod{7}$ $b)\ 244x \equiv 256 \pmod{508}$
7	$a)\ 3x \equiv 1 \pmod{13}$ $b)\ 94x \equiv 58 \pmod{142}$	8	$a)\ 5x \equiv 7 \pmod{13}$ $b)\ 413x \equiv 210 \pmod{497}$
9	$a)\ 8x \equiv 3 \pmod{4}$ $b)\ 1687x \equiv 7 \pmod{1757}$	10	$a)\ 5x \equiv 3 \pmod{12}$ $b)\ 339x \equiv 360 \pmod{573}$
11	$a)\ 2x \equiv 7 \pmod{15}$ $b)\ 104x \equiv 64 \pmod{248}$	12	$a)\ 4x \equiv 11 \pmod{15}$ $b)\ 332x \equiv 12 \pmod{286}$
13	$a)\ 6x \equiv 5 \pmod{9}$ $b)\ 939x \equiv 69 \pmod{951}$	14	$a)\ 21x \equiv 2 \pmod{17}$ $b)\ 232x \equiv 320 \pmod{328}$
15	$a)\ 54x \equiv -32 \pmod{70}$ $b)\ 122x \equiv 54 \pmod{694}$	16	$a)\ 23x \equiv 2 \pmod{15}$ $b)\ 134x \equiv 120 \pmod{256}$
17	$a)\ 87x \equiv -18 \pmod{39}$ $b)\ 1165x \equiv 500 \pmod{1205}$	18	$a)\ 29x \equiv 8 \pmod{17}$ $b)\ 415x \equiv 125 \pmod{1465}$
19	$a)\ 5x \equiv 16 \pmod{7}$ $b)\ 116x \equiv 88 \pmod{164}$	20	$a)\ 6x \equiv 14 \pmod{16}$ $b)\ 514x \equiv 28 \pmod{262}$
21	$a)\ 12x \equiv 1 \pmod{3}$ $b)\ 623x \equiv 63 \pmod{553}$	22	$a)\ 10x \equiv 8 \pmod{14}$ $b)\ 185x \equiv 25 \pmod{235}$
23	$a)\ 8x \equiv 1 \pmod{5}$ $b)\ 741x \equiv 210 \pmod{519}$	24	$a)\ 15x \equiv 25 \pmod{20}$ $b)\ 278x \equiv 210 \pmod{526}$
25	$a)\ 6x + 5 \equiv 1 \pmod{7}$ $b)\ 114x \equiv 120 \pmod{174}$	26	$a)\ 38x \equiv 1 \pmod{17}$ $b)\ 844x \equiv 640 \pmod{1436}$

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
27	$a)\ 6x+5\equiv 6(\bmod 7)$ $b)\ 1402x\equiv 256(\bmod 362)$	28	$a)\ 29x\equiv 7(\bmod 13)$ $b)\ 177x\equiv 27(\bmod 393)$
29	$a)\ 2x\equiv 7(\bmod 15)$ $b)\ 184x\equiv 88(\bmod 328)$	30	$a)\ 17x\equiv 5(\bmod 11)$ $b)\ 218x\equiv 128(\bmod 226)$

6.4.8 Розв’язати систему конгруенцій:

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
1	$\begin{cases} x\equiv 13\ (\bmod 16) \\ x\equiv 3\ (\bmod 10) \\ x\equiv 9\ (\bmod 14) \end{cases}$	2	$\begin{cases} x\equiv 2\ (\bmod 17) \\ 5x\equiv 3\ (\bmod 9) \\ 8x\equiv 4\ (\bmod 14) \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x\equiv 2\ (\bmod 11) \\ 5x\equiv 3\ (\bmod 6) \\ 5x\equiv 11\ (\bmod 12) \end{cases}$	4	$\begin{cases} 3x\equiv 5\ (\bmod 14) \\ 5x\equiv 1\ (\bmod 9) \\ 7x\equiv 2\ (\bmod 25) \end{cases}$
5	$\begin{cases} 4x\equiv 3\ (\bmod 7) \\ 5x\equiv 4\ (\bmod 11) \\ 11x\equiv 8\ (\bmod 13) \end{cases}$	6	$\begin{cases} 7x\equiv 4\ (\bmod 15) \\ 3x\equiv 23\ (\bmod 28) \\ 5x\equiv 8\ (\bmod 11) \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x\equiv 7\ (\bmod 13) \\ 5x\equiv 8\ (\bmod 17) \\ 3x\equiv 7\ (\bmod 31) \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x\equiv 7\ (\bmod 13) \\ 5x\equiv 8\ (\bmod 17) \\ 14x\equiv 35\ (\bmod 19) \end{cases}$
9	$\begin{cases} 5x\equiv 2\ (\bmod 12) \\ 7x\equiv 2\ (\bmod 8) \\ 3x\equiv 1\ (\bmod 5) \end{cases}$	10	$\begin{cases} 4x\equiv 7\ (\bmod 13) \\ x\equiv 2\ (\bmod 9) \\ 8x\equiv 4\ (\bmod 14) \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x\equiv 8\ (\bmod 20) \\ 5x\equiv 8\ (\bmod 9) \\ 4x\equiv 1\ (\bmod 21) \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x\equiv 5\ (\bmod 14) \\ 5x\equiv 3\ (\bmod 6) \\ 5x\equiv 11\ (\bmod 12) \end{cases}$

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
13	$\begin{cases} 2x \equiv 9 \pmod{15} \\ 5x \equiv 4 \pmod{7} \\ 7x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{21} \\ 5x \equiv 22 \pmod{31} \\ 4x \equiv 5 \pmod{29} \end{cases}$
15	$\begin{cases} 8x \equiv 1 \pmod{13} \\ 5x \equiv 7 \pmod{18} \\ 2x \equiv 1 \pmod{9} \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{11} \\ 7x \equiv 3 \pmod{25} \\ 3x \equiv 2 \pmod{17} \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{13} \\ 3x \equiv 7 \pmod{31} \\ 14x \equiv 35 \pmod{19} \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{13} \\ 5x \equiv 11 \pmod{16} \\ 5x \equiv 2 \pmod{9} \end{cases}$
19	$\begin{cases} 5x \equiv 8 \pmod{17} \\ 3x \equiv 7 \pmod{31} \\ 14x \equiv 35 \pmod{19} \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x \equiv 9 \pmod{15} \\ 3x \equiv 16 \pmod{25} \\ 4x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$
21	$\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{25} \\ 6x \equiv 3 \pmod{33} \\ 4x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$	22	$\begin{cases} 4x \equiv 7 \pmod{13} \\ 5x \equiv 3 \pmod{9} \\ 8x \equiv 4 \pmod{14} \end{cases}$
23	$\begin{cases} 4x \equiv 7 \pmod{13} \\ x \equiv 2 \pmod{17} \\ 5x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{13} \\ 2x \equiv 17 \pmod{21} \\ 5x \equiv 31 \pmod{32} \end{cases}$
25	$\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{25} \\ 6x \equiv 3 \pmod{33} \\ 4x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{14} \\ 3x \equiv 2 \pmod{11} \\ 5x \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$
27	$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{17} \\ x \equiv -1 \pmod{3} \\ 2x \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$	28	$\begin{cases} 6x \equiv 11 \pmod{13} \\ 5x \equiv 6 \pmod{7} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$
29	$\begin{cases} 2x \equiv 31 \pmod{35} \\ 4x \equiv 7 \pmod{25} \\ 5x \equiv 18 \pmod{21} \end{cases}$	30	$\begin{cases} 4x \equiv 7 \pmod{15} \\ 5x \equiv 7 \pmod{9} \\ 2x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

6.5 Розрахункові завдання з теми «Алгебраїчні структури»

6.5.1 На множині $M = \{a, b, c\}$ задано бінарну операцію ($*$). З'ясувати:

a) властивості операції ($*$);

b) існування нейтрального елемента;

c) чи припускає дана операція обернену?

№ вар.	Завдання	№ вар.	Завдання
1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & a & c & b \\ \hline b & c & b & c \\ \hline c & b & c & a \\ \hline\end{array}$	2	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ \hline b & b & a & c \\ \hline c & a & c & b \\ \hline\end{array}$
3	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & a & c & b \\ \hline b & c & b & c \\ \hline c & b & c & b \\ \hline\end{array}$	4	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ \hline b & a & b & c \\ \hline c & c & c & b \\ \hline\end{array}$
5	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ \hline b & c & b & c \\ \hline c & b & c & a \\ \hline\end{array}$	6	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & a & b \\ \hline b & a & c & a \\ \hline c & c & b & c \\ \hline\end{array}$
7	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ \hline b & c & a & b \\ \hline c & c & b & c \\ \hline\end{array}$	8	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ \hline b & a & a & b \\ \hline c & c & b & c \\ \hline\end{array}$
9	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ \hline b & b & a & b \\ \hline c & c & b & a \\ \hline\end{array}$	10	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ \hline b & c & b & c \\ \hline c & b & a & c \\ \hline\end{array}$
11	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & a & b \\ \hline b & a & c & c \\ \hline c & b & c & b \\ \hline\end{array}$	12	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & c & a & c \\ \hline b & a & b & b \\ \hline c & c & a & c \\ \hline\end{array}$
13	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ \hline b & a & b & b \\ \hline c & b & c & c \\ \hline\end{array}$	14	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline * & a & b & c \\ \hline a & b & a & c \\ \hline b & a & c & b \\ \hline c & c & b & c \\ \hline\end{array}$

№ вар.	Завдання
15	

$*$	a	b	c
a	b	b	c
b	a	c	b
c	b	a	c

№ вар.	Завдання
16	

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	a	c
c	a	c	b

№ вар.	Завдання
17	

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

№ вар.	Завдання
18	

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	c	b
c	a	b	c

№ вар.	Завдання
19	

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	c
c	a	c	b

№ вар.	Завдання
20	

$*$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	c
c	a	c	b

№ вар.	Завдання
21	

$*$	a	b	c
a	b	c	b
b	c	a	c
c	a	b	b

№ вар.	Завдання
22	

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	b
c	b	c	a

№ вар.	Завдання
23	

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	c	b
c	c	b	c

№ вар.	Завдання
24	

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	c
c	a	c	a

№ вар.	Завдання
25	

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

№ вар.	Завдання
26	

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	c	a	b
c	b	c	c

№ вар.	Завдання
27	

$*$	a	b	c
a	b	a	b
b	b	c	c
c	a	c	b

№ вар.	Завдання
28	

$*$	a	b	c
a	c	c	b
b	a	b	a
c	b	a	c

№ вар.	Завдання
29	

$*$	a	b	c
a	c	b	b
b	a	c	c
c	b	a	b

№ вар.	Завдання
30	

$*$	a	b	c
a	c	a	c
b	b	c	a
c	c	b	c

6.5.2 Задано множину $H = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ підстановок з симетричної групи S_4. Треба:

a) перевірити, чи є H підгрупою групи S_4;

b) установити порядок елемента σ_2;

c) визначити парність підстановки σ_3;

d) розкласти на добуток циклів підстановку σ_4.

№	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
01	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$
02	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$
03	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$
04	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$
05	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$
06	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$
07	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$
08	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$
09	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$

№	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
16	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$

6.5.3 Скласти таблиці додавання та множення в кільці $GF_3[x]/(p(x))$ для многочленів другого степеня, які мають вигляд ax^2+bx:

№ вар.	$P(x)$	№ вар.	$P(x)$	№ вар.	$P(x)$
1	x^3	11	x^3+x^2+1	21	x^3+2x^2+2
2	x^3+1	12	x^3+x^2+2	22	x^3+2x^2+x
3	x^3+2	13	x^3+x^2+x	23	x^3+2x^2+x+1
4	x^3+x	14	x^3+x^2+x+1	24	x^3+2x^2+x+2
5	x^3+x+1	15	x^3+x^2+x+2	25	x^3+2x^2+2x
6	x^3+x+2	16	x^3+x^2+2x	26	x^3+2x^2+2x+1
7	x^3+2x	17	x^3+x^2+2x+1	27	x^3+2x^2+2x+2
8	x^3+2x+1	18	x^3+x^2+2x+2	28	$2x^3$
9	x^3+2x+2	19	x^3+2x^2	29	$2x^3+1$
10	x^3+x^2	20	x^3+2x^2+1	30	$2x^3+2$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. − 2-е изд. − СПб.: Питер, 2007. − 364 с.
2. **Иванов Б.Н.** Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Полный курс. − М.: Физматлит, 2007. − 408 с.
3. **Джеймс А. Андерсен.** Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Изд-й дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
4. **Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г.** Дискретная математика. – Харьков: «Компания СМИТ», 2004. – 480 с.
5. **Акимов О.Е.** Дискретная математика: логика, группы, графы. − 2-е изд., дополн. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 376 с.
6. **Москинова Г.И.** Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2003. – 240 с.
7. **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельський Г.М.** Дискретная математика для инженеров. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
8. **Нефедов В.Н., Осипова В.А.** Курс дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: МАЙ, 1992. − 264 с.
9. **Сигорский В.П.** Математический аппарат инженера. – Изд. 2-е, стереотип. – К.: Техніка, 1977. −768 с.
10. **Яблонский С.В.** Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979. − 272 с.
11. **Грибанов В.У., Титов П.И.** Сборник упражнений по теории чисел. – М.: Просвещение, 1985. − 144 с.
12. **Морокішко Є. П.** Збірник задач і вправ з теорії чисел. – К.: Центр „Магістр-S”, 1996 − 158 с.
13. **Кострикин А. И.** Введение в алгебру. − М.: Физматлит, 1977. Ч.I. − 495 с.
14. **Оре О.** Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
15. **Горбатов В. А.** Основы дискретной математики: Учеб. пособие для студ. вузов. – М.: Высшая школа, 1986. − 311 с.
16. **Кук Д., Бейз Г.** Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990. − 384 с.
17. **Столл Р.** Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. −232 с.
18. **Серпинский В.** О теории множеств. – М.: Просвещение, 1966. − 61 с.
19. **Кузичев А. С**. Диаграммы Венна. – М.: Наука, 1968. − 253 с.
20. **Харари Ф.** Теория графов. – М.: Наука, 1973. – 300 с.
21. **Березина Л.Ю.** Графы и их применение: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979. − 143 с.
22. **Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.** Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977. − 368 с.
23. **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984. − 223 с.

24. **Новоселов В.Г., Скатков А.В.** Прикладная математика для инженеров-системотехников. Дискретная математика в примерах и задачах. – К.: УМК ВО, 1992. – 200 с.
25. **Емеличев В.А.** и др. Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Мельников Д.И. – М.: Наука, 1990. − 384 с.
26. **Биркгоф Г., Барти Т.** Современная прикладная алгебра / пер. с англ. – М.: Мир, 1976. − 400 с.
27. **Зыков А.А.** Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. − 381 с.
28. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. − 432 с.
29. **Мелихов А.Н.** Ориентированные графы и конечные автоматы. – М.: Наука, 1971. − 415 с.
30. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику / Пер. с англ. – М.: Наука, 1984. − 320 с.
31. **Блейхут Р.** Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / Пер. с англ. − М.: Мир, 1986. − 576 с.
32. **Виноградов И.М.** Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. − 176 с.
33. **Мельников О.В.** и др. Общая алгебра / Мельников О.В., Ремесленников В.Н. – М.: Наука, 1990. Т. 1,2. − 592 с.
34. **Проскуряков И.В.** Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984. − 336 с.
35. **Фадеев Д.К., Соминский И.С.** Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. − 287 с.
36. **Глаголев В.В.** Основы теории систем. Методы дискретной математики: Учеб. пособие. – Тула, 1987. − 89 с.
37. **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984. – 223 с.
38. **Евстигнеев В.А.** Применение теории графов в программировании. − М.: Наука, 1985. – 352 с.
39. **Белоусов А.И., Ткачев С.Б.** Дискретная математика: учебник для вузов / Под ред. В. С. Забурина, А. П. Крищенко. – М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 744 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIX).
40. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. − 312 с.
41. **Ленг С.** Алгебра / пер. с англ. – М.: Мир, 1968. − 480 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Стрелковська Ірина Вікторівна
Буслаєв Анатолій Григорович
Харсун Олексій Михайлович
Пашкова Тетяна Леонідівна
Баранов Миколай **Іванович**
Григор'єва Тетяна Ігорівна
Вишневська Віолета Михайлівна
Кольцова Лілія Леонідівна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Редактор – Л.А. Кодрул
Редагування та комп'ютерне макетування – Т.В. Кірдогло

Видавництво ОНАЗ ім. О.С. Попова
(Свідоцтво ДК № 3633 від 27. 11.2009 р.)

Здано в набір 3.02.2010 р. Підписано до друку 2.03.2010 р.
Формат 60/88/16. Тираж 500 прим.
Обсяг 13,86 друк. арк. Зам. № 4064.
Віддруковано на видавничому устаткуванні фірми RISO
у друкарні редакційно-видавничого центру ОНАЗ ім. О.С. Попова
м. Одеса, вул.. Старопортофранківська, 61
Тел. (048) 720-78-94