М.М. Астаф'єва
О.Б. Жильцов
І.І. Юртин

МАТЕМАТИКА
вступ до спеціальності

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних заладів

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я73
А 91

Рецензенти:
Мирослав Горбачук,
доктор фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України (Інститут математики НАН України);
Ганна Кулик,
канд. фіз.-мат. наук, доцент (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»);
Володимир Опанасенко,
канд. пед. наук, доцент (Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист №1/11-6794 від 09.04.2013 р.)

Астаф'єва М.М., Жильцов О.Б., Юртин І.І.
А 91 Математика. Вступ до спеціальності : Навч. посіб. для студ. мат. спец. вищих навч. закл. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2013. — 204 с. : іл.

ISBN 978-966-10-3191-2

У посібнику дається уявлення про предмет математики, її місце в системі наук, роль, яку відіграє математика у пізнанні світу і моделювання як метод такого пізнання. Велика увага приділена проблемам математичної творчості, специфіці математичного мислення, популярно розповідається про розв'язання деяких знаменитих математичних задач. Посібник знайомить із життєвим і творчим шляхом видатних українських математиків, їхнім внеском у математичну науку й освіту, виникненням математичних шкіл.

Читач знайде чимало практичних рекомендацій, як навчитися творчого мислення, як працювати, щоб успішно оволодіти математикою.

Для студентів перших курсів математичних спеціальностей університетів. Книга може бути корисною для учнів старших класів середньої школи та учителів математики.

ББК 22.3я721

ISBN 978-966-10-3191-2

ВСТУПНЕ СЛОВО

Дорогий першокурснику! Молодий наш колего!

Ти вирішив пов'язати з математикою свою майбутню професійну діяльність, а, отже, й своє життя. Це прекрасний вибір, вітаємо Тебе!

Ця книга, сподіваємося, не тільки утвердить Тебе у правильності обраної спеціальності, а й розширить математичний кругозір, допоможе краще уявити собі професію математика або учителя математики, переконатися у її важливості й соціальній значимості, підготуватися до професійної діяльності в умовах високотехнологічного суспільства так, щоб майбутня робота приносила користь людям і внутрішню радість та задоволення від її виконання.

Математика — одна із найдавніших наук, яка сягає своїм корінням в доісторичні часи. Разом із тим, це наука вічно молода, яка живиться і розвивається від постійного притоку нових задач, що пропонує їй саме життя. Сьогодні особливо відчутне проникнення математики в найрізноманітніші сфери науки і практичної діяльності людини, причому не лише природничо-технічні та економічні (фізика, енергетика, електроніка, біологія, екологія, медицина, економіка та ін.), а й гуманітарні (філософія, лінгвістика, історія, соціологія, теорія ігор та ін.). Сфера дії сучасної математики воістину неосяжна. Математика стає універсальною мовою й універсальним інструментом науки і практики загалом.

Щоб досконало оволодіти цією мовою і цим інструментом, знадобиться багато зусиль, терпіння, ентузіазму і щоденної копіткої праці. Але це не буде сізіфова праця. Кожен, хто не шкодуватиме сил та енергії для оволодіння математикою, неодмінно буде сторицею винагороджений незрівнянною радістю чи то від розв'язаної задачі, проблеми, чи від створення чогось нового у самій математиці, чи від досягнень своїх учнів.

Щиро бажаємо Тобі успіхів на цьому шляху!

Розділ 1

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ У ПІЗНАННІ

1.1. ЩО ТАКЕ МАТЕМАТИКА?

Математика — найпрекрасніший
і найпотужніший винахід людського духу.

Стефан Банах

Відповісти на запитання «Що таке математика?» непросто і, залежно від рівня математичних знань того, хто ставить це запитання, і того, хто на нього відповідає, ці відповіді будуть різними. Першокласник скаже, що математика вчить рахувати предмети, додавати, віднімати, множити і ділити числа. Учень основної школи, очевидно, переконуватиме, що математика вивчає числа і геометричні фігури, вирази і функції, пропорції, а також учить розв'язувати рівняння і нерівності. Сьогоднішній старшокласник доповнить цей перелік вивченням похідної та інтеграла, випадкових величин, а також математичних моделей. Студент-математик справедливо зазначить, що частинами математики є й логіка, алгебра і теорія чисел, аналітична, проективна геометрії, теорія ймовірностей, диференціальні рівняння, комплексний аналіз, функціональний аналіз, варіаційне числення тощо. Але й це не буде вичерпною відповіддю, оскільки складниками математики є й багато інших дисциплін, серед яких постійно з'являються нові дисципліни, які часто взаємно проникають одна в одну та інші галузі науки й практичної діяльності людини. Крім того, подібні відповіді не з'ясовують суті справи, оскільки лише перераховують дисципліни, що є складовими математики, напрями її досліджень і не відповідають безпосередньо на питання, що саме, який об'єкт вивчає математика. Про хімію, наприклад, можна говорити, як про науку, що вивчає хімічні перетворення речовин, про біологію – як науку про живу природу і життєві процеси, про фізику – як науку, яка досліджує загальні властивості й закони

руху матерії та перебігу матеріальних явищ, об'єктом соціології є соціальна реальність, а економічної науки — господарство, виробничі відносини. Математику охарактеризувати в такий спосіб неможливо, оскільки об'єктів чи явищ дійсного світу, які були б предметом математики і не стосувалися б хімічних, біологічних, фізичних, соціальних, економічних та інших явищ, немає.

З'ясувати предмет математики намагалися вчені математики і філософи різних країн ще з часів Аристотеля, однак дійти до єдиної думки їм не вдалося. Численні спроби означити предмет математики і дискусії довкола цього питання зводяться до трьох точок зору. Одна з них репрезентована Ф.Енгельсом у праці «Анти-Дюрінг»: «Чиста математика має своїм об'єктом просторові форми і кількісні відношення дійсного світу». Таке уявлення про предмет математики було покладено в основу офіційної точки зору радянських математиків, які мали чітко дотримуватися матеріалістичної позиції. Слабкість цього означення очевидна, особливо для сучасної математики. Тому А. М. Колмогоров, видатний радянський математик (1903 – 1987) у статті «Математика», надрукованій в «Большой советской энциклопедии» (19__ р. вид.), зазначав, що визначення Ф.Енгельса придатне для математики, яка «передує сучасній» (до початку XIX ст.). Стосовно ж математики XIX – XX століть, його можна застосовувати лише за умови надзвичайно розширеного тлумачення термінів «кількісні відношення» і «просторові форми». Щоправда, й Ф. Енгельс не формулював наведену вище думку як означення, а висловив її як заперечення позиції ідеалістів про те, що в чистій (не прикладній) математиці розум має справу не з матеріальними об'єктами, а з продуктами вільної уяви і творчості розуму. У згаданому творі Ф. Енгельс писав так: «Як поняття числа, так і поняття фігури взяті виключно із зовнішнього світу, а не виникли в голові з чистого мислення. Мали існувати речі певних форм і ці форми повинні були порівнюватись, перш ніж можна було дійти до поняття фігури. Чиста математика має своїм об'єктом просторові форми і кількісні відношення дійсного світу, отже, цілком реальний матеріал. Той факт, що цей матеріал набирає надзвичайно абстрактної форми, може лише слабо затушувати його походження із зовнішнього світу. Але щоб бути спроможним дослідити ці форми і відношення в чистому вигляді, треба повністю відокремити їх від їхнього змісту, залишити цей останній осторонь як щось неістотне; у такий спосіб ми дістаємо точки, позбавлені вимірів, лінії, позбавлені товщини й ширини, різні a і b, x і y, сталі і змінні величини, і лише насамкінець ми доходимо до продуктів вільної творчості і уяви самого розуму, а саме, до уявних величин»[1]. А у своїй «Діалектиці природи» Ф. Енгельс пише: «… уся так звана чиста математика займається абстракціями, усі її величини є, строго кажучи, уявні величини», однак, вважає він: «…усі абстракції, доведені до крайності, перетворюються в нісенітницю або у свою протилежність. Математична нескінченність запозичена з дійсності, хоч і неусвідомленим способом, і тому може бути пояснена виключно з дійсності, а не із самої себе, не із математичної абстракції»[2]. Навряд чи можна вважати правомірними подібні міркування стосовно сучасної «чистої» математики, значна частина абстрактних понять якої, що часто є абстракціями від абстракцій, створені уявою, розумом та не відображають жодних об'єктів чи відношень матеріального світу (прикладом подібної абстракції, відомої читачеві зі школи, є комплексне число).

А.М. Колмогоров
читає лекцію

На противагу твердженню про матеріальну природу предмета математики, поширена інша точка зору, репрезентована Н. Бурбакі[3] в «Нарисах з історії математики», яка полягає у тому, що математика – це наука про «математичні структури». Б. В. Гнєденко (1912 – 1995), відомий радянський математик, академік АН УРСР, учень А. М. Колмогорова, роз'яснюючи, що під математичною структурою слід розуміти будь-яку множину, між елементами якої встановлене одне або кілька відношень (виділяють структури алгебраїчні та структури порядку) (топологічні), вважає, що, хоч таке означення відтворює деяку об'єктивну картину того, чим займається математика, оскільки «єдиними об'єктами математики є, власне, те, чим вона займається», однак глибини в ньому нема[4].

Один із найвідоміших бурбакістів Ж. Дьєдонне категорично відстоюючи точку зору про те, що математика лише на стадії зародження і початкового розвитку живилася потребами практики, а на сучасному етапі — вона є виключно витвором розуму й уяви, писав: «Сучасна математика у своїй основі не має жодної утилітарної мети, а є інтелектуальною дисципліною, практична користь від якої зводиться до нуля. Математика – не більше ніж «розкіш», яку може дозволити собі цивілізація»[5].

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Т.20. – С.37 (тут і далі переклади наші. — *Авт.*).

[2] Там же, С.586.

[3] Ніколя Бурбакі – колективний псевдонім групи французьких математиків.

[4] Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика.– М.: Наука, 1991.– 240 с.– С. 24–25.

Незважаючи на те, що й справді можна навести чимало прикладів видатних математичних відкриттів і результатів, які не мають ніякого відношення до матеріальної дійсності, погодитися з думкою Ж. Дьєдонне також не можна, бо вона дуже однобічна і занадто категорична. Інтенсивний розвиток прикладної математики це тільки підтверджує.

Неоднозначність розуміння суті математики, розгалуженість її розділів та застосувань дають підстави й для третьої точки зору, яка полягає у тому, що сформулювати означення математики чи вичерпно описати її предмет неможливо.

В.Й. Левицький, видатний український математик писав: «Подати зміст математики — це завдання непосильне; сказати, що це наука про величини та їхні взаємні відношення, це буде лише невелика частина, яка не вичерпує її змісту, бо ж до математики, побіч чисел і геометричних величин, побіч величин тяглих і нетяглих (неперервних і дискретних — *Авт.*), входить і наука про комбінаторику, і про групи, і вищі числа та їхні комплекси, і про вищі простори і т.д., до яких назву величини можна прикладати лише з деякими застереженнями» (цитування за статтею В.Г. Бевз «Що таке математика?»[6]).

Володимир Йосипович Левицький
(1872 – 1956)

У книзі Волтера Сойєра[7] «Прелюдія до математики» читаємо: «Математичні відкриття настільки різноманітні, що одного разу хтось, мабуть, у відчаї, запропонував означити математику, як «усе, чим займаються математики». …Математики розв'язують пробле-

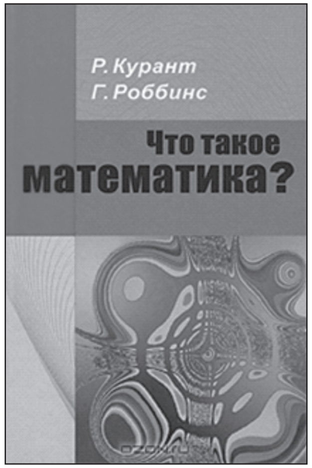
[5] http://www.donnu.edu.ua/journals/dm/_18/3-10%2018_2002.pdf

[6] Там же.

[7] **Волтер Сойєр** (1911–2008) — відомий математик і педагог, популяризатор математики. Народився в Англії, викладав на кількох континентах, написав біля десятка книг про математику і математиків, які перекладені багатьма мовами, за що й дістав прізвисько Другого світового Сойєра.

ми, які колись не вважалися математичними, і важко передбачити, чим вони ще будуть займатися у майбутньому»[8].

Р. Курант, німецький і американський математик (1888 – 1972), написавши, разом з Г. Роббінсом, велику книгу «Що таке математика?», згодом зробив такий висновок: «На запитання «Що таке математика?» неможливо дати обґрунтовану відповідь на основі самих лише філософських узагальнень, семантичних означень або з допомогою обтічного газетно-журнального багатослів'я. Так само як не можна дати загального означення музики чи живопису: ніхто не може оцінити ці види мистецтва, не розуміючи, що таке ритм, гармонія і лад у музиці або форма, колір і композиція у живописі. А для розуміння суті математики ще більшою мірою потрібне справжнє проникнення у її складові елементи» (цитування за статтею В.Г. Бевз «Що таке математика?»[9]).



Обкладинка книги, видання 2010 р.

Безперечно, кожна із трьох наведених точок зору щодо означення математики як предмета має своє підґрунтя і аргументацію, хоча жодна, взята окремо, не може вважатися абсолютною істиною, і, на наш погляд, тільки їхня єдність дає відносно вичерпне та об'єктивне уявлення про сутність математичної науки і цим самим певною мірою відповідає на питання: «Що таке математика?». Важко не погодитися із згадуваними вище Р. Курантом і Г. Роббінсом: «Рух уперед в області математики, безсумнівно, зумовлений потребами, які більшою чи меншою мірою мають практичний характер. Але, раз виникнувши, він неминуче набуває внутрішнього розмаху і виходить за межі безпосередньої практичної корисності»[10].

Вважаємо, що коротко і доступно можна так описати предмет математичної науки.

[8] У.У.Сойер. Прелюдия к математике: Рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предварительным анализом математического склада ума и целей математики. – М.: «Просвещение», 1965. — 354 с. — С. 12–13.

[9] http://www.donnu.edu.ua/journals/dm/_18/3-10%2018_2002.pdf

[10] Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Перевод с английского под редакцией А.Н. Колмогорова.– М.: Издательство Московского Центра непрерывного математического образования, 2001. — 568 с. — С. 20.

Математика — це наука, яка формалізованими методами вивчає реальні й абстрактні об'єкти, структури, явища і процеси та взаємозв'язки між ними.

Ознакою будь-якої математичної дисципліни є не матеріальність об'єкта дослідження, а певний формальний метод, який потенційно допускає найрізноманітніші матеріальні втілення і, отже, практичні застосування в різних галузях. Наприклад, диференціальні рівняння придатні для дослідження процесів, у яких величини неперервно змінюються з певною швидкістю, незалежно від того, який цей процес – фізичний, хімічний, біологічний, економічний, соціальний чи ще якийсь інший (про це детальніше йтиметься в п. 1.3).

Разом із тим, частина математичних задач і результатів не мають або поки що не мають безпосереднього прикладного застосування, але не слід через це применшувати їхню роль. Лише один приклад: здавалося б абсолютна математична абстракція – комплексні числа, що виникли у математиці на початку XVI ст. і вважалися повним безглуздям, породженням «надмірного мудрування» (Д. Кардано[11]), такими, «практична користь від яких зводиться до нуля», майже через чотири століття прислужилися розвитку гідро- і аеродинаміки, а сьогодні активно «працюють» ще й у електро- і радіотехніці, теорії автоматичного керування, теорії пружності і міцності, геодезії і картографії. Виникнувши з «надмірних мудрувань» як щось неіснуюче і нереальне, до теперішнього часу вивчення комплексних чисел розвинулося у важливий розділ вищої математики, який називається «Комплексний аналіз» і з яким ви познайомитеся на старших курсах.

Прикладами математичних проблем і результатів, які, ймовірно, ніколи не знайдуть свого прикладного застосування і, таким чином, не стануть «продуктивною силою суспільства», не врятують економіку від криз, а людство — від екологічних бід, можуть слугувати відома задача теорії чисел про скінченність (чи нескінченність) множини простих чисел-близнюків[12] або знаменита теорема Ферма[13],

[11] **Джероламо Кардано** (1501–1576) — італійський математик, інженер, філософ, медик, астролог; на його честь названі «карданний вал» і формула (Кардано) коренів кубічного рівняння.

[12] Прості числа-близнюки — це пара простих чисел, різниця між якими дорівнює 2: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19),… Відповідь на запитання, скінченна чи нескінченна множина таких пар, досі не знайдена.

[13] Теорема стверджує, що рівняння $x^n + y^n = z^n$ не має цілих ненульових розв'язків при натуральних $n > 2$. Французький математик П'єр Ферма (1601 – 1665) сфор-

яка збурювала уми математиків-професіоналів і любителів понад 350 років. Подібні задачі, історія їхніх розв'язань, як і самі розв'язки, хоч і не мають жодного практичного застосування, безперечно займуть довічне і почесне місце серед культурних цінностей людства, бо вони – виклик людському розуму і торжество інтелекту, плід винахідливості і волі, джерело найвищої естетичної насолоди. І в цьому їхня велика гуманістична місія. Розв'язування таких задач подібне до гри в шахи чи занять спортом або високим мистецтвом.

Дещо перефразовуючи уже цитованих тут Р. Куранта і Г. Роббінса, скажемо: «Не філософські роздуми про предмет математичної науки, а саме активні заняття математикою допоможуть з'ясувати її предметну суть».

Завдання для самостійної роботи

1. Підберіть два — три висловлювання видатних людей про математику, які Вам найбільше сподобалися.
2. На основі власного досвіду вивчення математики, а також пережитих емоцій при вивченні деяких тем або при вдалому розв'язанні якоїсь математичної задачі, створіть свій вислів про математику (математиків), її призначення, місце в реальному житті тощо.
3. Напишіть коротенького листа тій людині, яка мала найбільший вплив на Ваш вибір майбутньої професії математика.

мулював свою теорему в 1637 р. на полях «Арифметики» Діофанта із припискою, що він знайшов воістину чудове її доведення, але поля цієї книжки занадто малі, щоб його викласти. Теорема Ферма була остаточно доведена аж у 1995 р. Ендрю Вайлсом, англійським і американським математиком (див. 2.3.1. Велика теорема Ферма).

1.2. ДЛЯ ЧОГО ВИВЧАТИ МАТЕМАТИКУ?

... Математику вже тому вивчати потрібно, що вона розум до ладу приводить.
Михайло Ломоносов

Виступаючи в 1992 р. перед учителями, академік В.І. Арнольд[14] так розпочав свою лекцію «Для чого ми вивчаємо математику?»: «У 1267 році на це питання уже відповів англійський філософ Роджер Бекон: «Той, хто не знає математики, не може пізнати жодної іншої науки і навіть не може усвідомити свого невігластва». Власне, на цьому можна було б закінчити лекцію, але люди думають, що, можливо, за сім століть щось змінилося».

То чому ж математиці відводять таку винятково важливу роль в інтелектуальному розвитку особистості? У чому її пізнавальна сила? Як математика впливає на людську культуру взагалі?

Навчальні шкільні програми з математики незмінно визначають метою навчання інтелектуальний розвиток учнів, формування прийомів логічного мислення, просторових уявлень і уяви, пам'яті, уваги, інтуїції, умінь аналізувати, класифікувати, узагальнювати, робити умовиводи за аналогією, отримувати наслідки з даних передумов шляхом несуперечливих міркувань тощо. Тобто саме математиці відведена місія формування інтелектуально розвиненої, творчої особистості. І це не випадково. Саме у процесі занять математикою людина навчається мислити. Тому що, як зазначає визначний російський математик, академік П.С. Александров[15], «можливо, ніде людське мислення не виступає з такою силою і так яскраво, як у математиці». Це в усі часи визнавали усі великі мислителі. Недаремно Платон при вході у свою Академію, яка мала об'єднати усі форми людської культури і творчості, написав: «Нехай не увійде сюди той, хто не знає геометрії» (у ті часи слово «геометрія» означало математику загалом). Математику він уважав основною сходинкою на шляху до філософського мислення.

[14] **Володимир Ігоревич Арнольд** (1937 – 2010) — видатний російський математик, академік, лауреат багатьох престижних світових нагород, зокрема, премії Вольфа; основні праці вченого стосуються диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, теоретичної механіки.

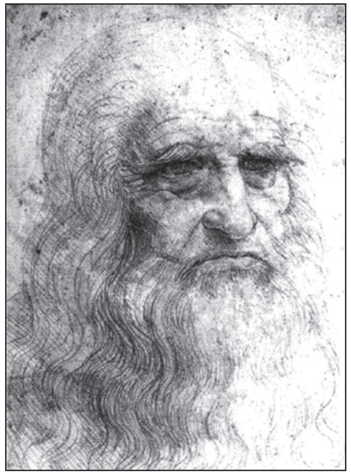
[15] **Павло Сергійович Александров** (1896 – 1982) — визначний російський математик і педагог, академік, основні наукові результати отримав у топології; виховав цілу плеяду вчених-математиків, найвідоміші з яких — Л.С. Понтрягін, А.М. Тихонов, О.Г. Курош та ін.

Очевидно, за часів Платона не протиставляли «фізиків» (сюди зараховують і математиків) і «ліриків» (тобто гуманітаріїв). На жаль, сьогодні побутує думка про те, що «гуманітарний» склад мислення не сприяє засвоєнню математики і, взагалі, «для чого вивчати математику людині, яка хоче стати філологом (юристом, істориком, психологом, дизайнером, архітектором, менеджером тощо)»? А в гуманітарно орієнтованих людей математика часто викликає неприйняття, а то й відразу. І справа тут не в самій математиці, а в певному стереотипі, сформованому, зокрема, невмілим її вивченням і викладанням. Але про ці проблеми мова піде трохи згодом.

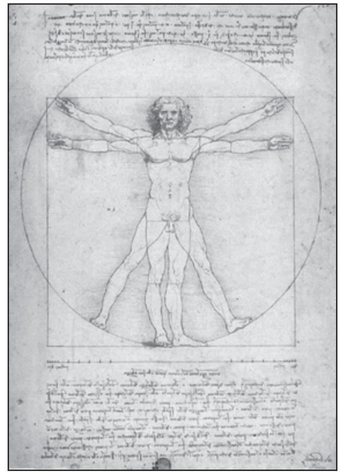
Штучність і невиправданість бар'єра між умовними фізиками і умовними ліриками підтверджується багатьма прикладами. Наведемо лише кілька з них. Уже згадуваний видатний математик Андрій Колмогоров є відомим і як авторитетний мовознавець та історик. Яскравим прикладом «універсальної людини» є Леонардо да Вінчі[16)], великий художник (живописець, скульптор, архітектор) епохи Відродження, автор знаменитої «Джоконди», письменник, який у той же час був талановитим інженером-конструктором, зробив чимало відкриттів у фізиці (оптика, механіка), математиці (геометрія), геології.

Прояви багатогранності таланту можна знайти й серед сучасних українських науковців. Визнаний фахівець у галузі фізики напівпровідників, доктор фізико-математичних наук Максим Стріха (нар. 24 червня 1961 р.) є автором книги віршів «Сонети та октави» (1991), двох літературознавчих монографій та багатьох статей, сформулював і обґрунтував концепцію націєтворчої функції українського художнього перекладу. В його перекладах виходили українською мовою поетичні й прозові твори Аліґ'єрі Данте, Емілі Дікінсон, Роберта Стівенсона, Ред'ярда Кіплінга, Едгара По, Томаса Еліота та інших класиків і сучасних авторів.

[16)] **Леонардо да Вінчі** (1452 – 1519), геніальний італійський художник, винахідник, мислитель, одна із найвизначніших постатей епохи Відродження; увів термін «золотий переріз», суть якого полягає у поділі цілого на дві нерівні частини так, що відношення суми двох частин до більшої з них дорівнює відношенню більшої частини до меншої ($(a+b):a=a:b$) і дорівнює так званому числу золотого перерізу $\varphi = 1{,}61803398874989\ldots$ (цікаво, що $1:\varphi=\varphi-1$). Золотий переріз є символом гармонії, зустрічається у природі так часто, що древні вчені назвали його божественною пропорцією, вважаючи, що Всевишній відвів цьому числу виняткову роль основного структурного принципу при створенні світу; принцип золотого перерізу – вищий прояв структурної й функціональної досконалості цілого і його частин у живописі, архітектурі, музиці, науці, техніці, медицині й природі.



Леонардо да Вінчі.
Автопортрет



Вітрувіанська людина.
Рисунок Леонардо да Вінчі.
Тепер цей рисунок називають канонічними пропорціями. Вітрувіанська людина – одне із найбільш упізнаваних зображень

Наведені приклади свідчать про те, що «фізик» і «лірик» можуть «жити» в одній особі, що між образним і логічним стилями мислення нема антагонізму. Цілком можливо, що таке поєднання притаманне лише видатним особистостям. Однак, стати професіоналом у будь-якій сфері неможливо без розвиненого мислення. Чому ж заняття математикою якнайкраще сприяють інтелектуальному розвитку? Насамперед тому, що математика, вимагаючи спиратися у своїх умовиводах лише на аксіоми або доведені факти, привчає до строгості мислення, а знайомство із властивостями нескінченних множин розвиває уяву. Хтозна, чи доведеться коли-небудь, скажімо, філологу використовувати у професійній діяльності аксіоматичний метод чи нескінченні множини, однак уміння мислити (а, отже, й грамотно висловлювати думку) і уява йому не завадять.

Наведемо один фрагмент із книги В.А. Успенського[17)] «Апологія математики»: «Наприкінці XIX століття в одній із великих аудиторій Московського університету була оголошена лекція на тему: «Чи є інтелект у тварин?». Зібралися кілька десятків чи навіть сотень

[17)] **Успенський Володимир Андрійович** (1930), російський математик і лінгвіст, публіцист, учень А.М. Колмогорова; основні наукові праці стосуються математичної логіки і лінгвістики.

заінтригованих слухачів. Головував заслужений ординарний професор математики Московського університету Микола Васильович Бугаєв, президент Московського математичного товариства і батько Андрія Бєлого. Перед початком лекції він звернувся до аудиторії із запитанням, чи знає хто-небудь, що таке інтелект. Відповідь виявилася негативною. Тоді Бугаєв оголосив, що, оскільки ніхто з присутніх не знає, що таке інтелект, лекція про те, чи є він у тварин, відбутися не може». Це типовий приклад непрямого впливу «математичного» мислення на мислення «гуманітарне». Він також підкреслює, що роль математичної освіти не в тому, щоб розв'язати проблеми, які виникають у різних галузях науки чи практичної діяльності, зокрема, й гуманітарних, а в тому, щоб допомогти фахівцям цих галузей краще усвідомити суть цих проблем і критично поставитися до спроб їхнього розв'язання.

У цьому сенсі заняття математикою можна порівняти зі стройовою підготовкою в армії. Навряд чи в умовах реального бою солдат ходитиме стройовим кроком, але в усіх арміях світу стройова підготовка — неодмінна складова військового навчання, оскільки дисциплінує дії і тренує уміння виконувати команди. Заняття ж математикою тренують дисципліну мислення, найважливішими ознаками якої є чітке усвідомлення різниці між істинним і хибним, доведеним і гіпотетичним, зрозумілим і незрозумілим, змістовним і беззмістовним.

Зазначимо, що для того, аби кваліфікувати висловлення як хибне, беззмістовне чи незрозуміле, часто потрібні неабиякі вольові зусилля, зокрема, коли щось стверджує «визнаний авторитет». Здатність робити такі зусилля, піддавати сумніву і критичному аналізу, незважаючи на авторитети, також виховує математика, яка за своєю природою є наукою демократичною. На відміну від гуманітарних наук, де переконливість того чи іншого твердження часто залежить від наукового авторитету автора, математична істина не залежить від того, хто її встановив: академік чи школяр або студент. Приступаючи до розв'язання математичної задачі, всі перебувають в однакових стартових умовах і переможе не той, у кого більше титулів, а той, хто краще володіє методами розв'язування задач, інтуїцією і виявиться винахідливішим.

Немає в математиці й «царського шляху». Підтверджує це енциклопедична історія, справжня чи вигадана, про великого математика Евкліда і єгипетського царя Птоломея (інший варіант – Архімеда і сиракузького царя Гієрона). Цар виявив бажання вивчити

геометрію і звернувся до математика. Математик почав його навчати, але невдовзі цар обурився, що його навчають точно так, як і всіх інших, не враховуючи його царського статусу, який, на думку царя, передбачав особливий спосіб навчання. На що математик відповів: «Немає царського шляху в геометрії».

Отже, як це не парадоксально, але саме математика, а не політологія, психологія чи ще якась інша гуманітарна наука, якнайкраще виховує таку важливу якість людини, як демократизм.

А може й справді достатньо «призначити» у математиці окремі факти, теореми, задачі на роль «тренажерів мислення», «засобів для гартування волі», і не навантажувати усіх (особливо тих, хто не пов'язує свою професійну діяльність з математикою) великою кількістю понять, фактів, які пропонують шкільні й університетські програми з математики? На жаль, подібні запитання іноді задають і студенти-математики педагогічних спеціальностей, мовляв, для чого нам вища математика, коли у школі викладають лише елементарну?

Спробуємо спростувати таку точку зору.

Почнемо з того, що ніхто від народження не знає, ким стане у майбутньому, із якою сферою діяльності пов'яже своє життя. То чи розумно наперед обмежувати можливості дитини самостійно обирати життєву дорогу? Наведемо, однак, й переконливіші аргументи.

Сьогоднішній світ змінюється шаленими темпами. Не встигла з'явитися нова модель комп'ютера (мобільного телефону, планшета тощо), як вона уже застаріла. А математика – одна із найдавніших наук. І уявіть собі, що безліч фактів, установлених тисячі років тому назад, використовуються й сьогодні.

Давні єгиптяни навічно увійшли в історію завдяки своїм пірамідам, яких не збудували б, не знаючи простих законів математики. При будівництві пірамід і храмів, щоб отримати прямий кут, мотузку ділили на 12 рівних частин, точки поділу помічали, а кінці мотузки зв'язували. Далі троє людей бралися за мотузку в трьох точках, віддалених одна від одної на 3, 4 та 5 частин і максимально розтягували її, щоб утворився трикутник. Людина, що стояла між ділянками мотузки довжинами 3 і 4 частини, виявлялася у вершині прямого кута. Це свідчить, що єгиптянам була відома теорема Піфагора, і якою успішно користуються й дотепер.

З часом сфера застосування математики поступово розширювалася. Математика проникала у землемірство, будівництво, гідротехніку, мореплавство, торгівлю, геодезію, картографію, небесну механіку, військову справу.

У сучасному світі математика – це мова й інструмент будь-якої, без перебільшення, галузі науки і практичної діяльності людини. Сьогодні без математики важко уявити собі розвиток не лише природничих наук (фізики, астрономії, хімії, біології), інженерної справи, економіки, а й традиційно гуманітарних (соціології, лінгвістики, психології, історії, медицини), і сфера проникнення математики постійно розширюється. Математика стає універсальним ключем до всіх наук. Саме тому навчання математики в школі, як зазначено у навчальних програмах, спрямоване також на формування в учнів математичних знань – невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення школярів з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності.

Характерною рисою математичних моделей є їх універсальність і прикладна ефективність. Неможливо і нерозумно вивчати в математиці лише те, що потрібно на практиці в конкретному часі і в конкретних обставинах. Не менш шкідливо відмовлятися від її вивчення через оманливу «непотрібність». Крен політики останніх десятиліть у галузі математичної освіти в бік практичного прагматизму уже призвів до негативних наслідків математичної підготовки школярів і виховання фахівців для народного господарства. Щоб використати унікальні можливості математики в різних прикладних застосуваннях, потрібна серйозна теоретична математична підготовка й уміння думати, а не натискувати кнопки. Саме ця якість математичної освіти останнім часом погіршилася.

Це правда, що математична модель не завжди дає миттєвий результат і не завжди одразу помітно, де можна її застосувати. Ми уже наводили приклад з комплексними числами, які знайшли своє практичне застосування через чотири століття після їх винайдення. А ось ще одна повчальна історія. Конічні перерізи[18] були відкриті в Давній Греції в III – II ст. до н.е. А знадобилася ця теорія Йоганнесу Кеплеру[19] у XVI ст., коли він з'ясовував закони руху планет. Його

[18] Конічний переріз – переріз конуса площиною; якщо площина перерізу перетинає вісь конуса і не перпендикулярна до неї, то перерізом є еліпс.

[19] **Йоганнес Кеплер** (1571–1630) — німецький філософ, математик, астроном, астролог, оптик, відомий насамперед відкриттям законів руху планет, названих на його честь законами Кеплера.

учитель Тіхо Браге протягом двадцяти років вимірював і фіксував положення планет Сонячної системи (спостереження велися неозброєним оком, телескопам у той час астрономи не довіряли). Після смерті учителя Кеплер узявся за математичну обробку результатів спостережень і виявив, що траєкторіями руху планет є еліпси[20]. Однак цей результат він міг би не отримати, якби не був знайомий із теорією конічних перерізів. Справа в тому, що еліпс мало відрізняється від кола, якщо кут нахилу площини перерізу конуса до його осі мало відрізняється від прямого. Це рівнозначно тому, що ексцентриситет[21] еліпса малий. Спочатку Кеплер схильний був думати, що орбіта Марса – коло, але, помітивши незначне відхилення положення Сонця від центра і знаючи, що еліпс із малим ексцентриситетом дуже схожий на коло, провів наближені обчислення з більшою точністю й установив, що орбіта Марса на 0,5% сплюснута в напрямі, перпендикулярному до діаметра, на якому знаходиться Сонце. Так він дійшов висновку, що планети рухаються еліптичними орбітами. (Аналітичне доведення того факту, що орбіти планет мають форму еліпсів (1687 р.), належить Ісааку Ньютону[22].)

Таким чином, ніколи не можна з абсолютною впевненістю стверджувати, що якась абстрактна математична теорія (модель) не потрібна, бо не має свого прикладного застосування, оскільки, можливо, саме вона, за прикладом еліпса, колись, хай навіть через тисячоліття, знайде таки свого Кеплера.

Наведемо ще один приклад, який пояснює деякі парадоксальні, на перший погляд, суспільно-економічні процеси. Розпад могутнього Радянського Союзу, зокрема, крах його економіки, здавалися неможливими, оскільки економіка і добробут зростали. Світова економічна криза, яку ми нещодавно переживали, також для більшості була громом серед ясного неба, адже економіка розвинених країн мала позитивну динаміку. Спробуємо математично пояснити причини і механізм будь-якої економічної кризи. Кожен, хто знайомий із поняттям похідної, а вона вивчається сьогодні в школі, знає, що

[20] Еліпс – геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок площини (фокусів) є величина стала.

[21] Ексцентриситет конуса – число, яке характеризує форму еліпса і є відношенням відстані між фокусом еліпса та його центром до великої півосі; конус і його властивості будуть вивчатися в курсі аналітичної геометрії.

[22] **Ісаак Ньютон** (1642–1727) — англійський фізик, математик і астроном; автор фундаментального твору «Математичні начала натуральної філософії», в якому виклав закон всесвітнього тяжіння і три закони механіки, що лягли в основу класичної механіки; зробив великий внесок у теорію диференціального та інтегрального числень.

похідна характеризує швидкість зміни функції, а похідна другого порядку — швидкість зміни швидкості, тобто прискорення. І що постійно від'ємна похідна другого (і, навіть, вищого) порядку призведе, врешті-решт, до того, що від'ємною стане перша похідна.

Що ж таке економічна криза? Це явище, яке не наступає раптово, одномоментно. Передвісником економічної кризи є спад **темпів** економічного зростання (друга похідна — від'ємна). І якщо навіть економіка зростає (перша похідна — додатна), але почався тривалий спад темпів її зростання, то це уже тривожний сигнал. Бо такий стан речей неодмінно призведе в перспективі й до падіння виробництва та добробуту (перша похідна змінить знак з плюса на мінус), причому темпи погіршення ситуації будуть тільки прискорюватися. Унаслідок інерційності системи ніякими, навіть дуже розумними й правильними заходами швидко поліпшити ситуацію не вдається, бо будь-які зміни призводять до зміни знака лише старшої похідної, а перша похідна залишається від'ємною. Тому будь-яка економічна деградація викликана не стільки сьогоднішніми рішеннями, як учорашніми й позавчорашніми, коли виробництво зростало і ситуація здавалася цілком благополучною. Якби ж то ми, а особливо ті, від кого залежить планування економіки, управління соціально-економічними процесами, кажучи словами Тараса Шевченка, «вчились так, як треба».

І ще один красномовний аргумент на користь математичної освіти. Як відомо, Нобелівську премію не присуджують за відкриття в галузі математики. Але майже усі відкриття, удостоєні цієї найпрестижнішої премії в галузях фізики та економіки, позначені печаттю Математики, бо використовують математичні методи дослідження, різноманітні математичні моделі. Зокрема, серед 69 (на сьогоднішній день) лауреатів Нобелівської премії в галузі економіки понад п'ятдесят є або вченими-математиками, або мають базову математичну освіту, або ж, назвемо їх «математиками-любителями», активно використовують математику у своїх економічних дослідженнях, працюючи на стику математики й економіки.

Наприклад, Нобелівський лауреат 1975 р. «за внесок в теорію оптимального розподілу ресурсів» радянський математик Леонід Канторович – доктор фізико-математичних наук, чиї наукові результати збагатили теорію функцій, функціональний аналіз, теорію множин; він один із творців лінійного програмування, яке успішно застосовував в економічній теорії.

Англійський економіст, лауреат Нобелівської премії в галузі економіки (1984 р.) Річард Стоун – доктор фізико-математичних наук, зробив великий внесок у математичне моделювання економічних процесів.

Американський економіст, Нобелівський лауреат (1994 р.) Джон Форбс – учений-математик, математичний геній якого найбільше виявив себе в теорії ігор і диференціальній геометрії. Дисертацію з теорії ігор написав у віці 21 рік, за неї ж через 45 років отримав Нобелівську премію в галузі економіки. Широкому загалу Джон Форбс відомий за драматичним біографічним фільмом Рона Говарда «Ігри розуму», що отримав премію «Оскар» у чотирьох номінаціях.

Ізраїльському вченому-математику Роберту Ауману Нобелівську премію з економіки присудили в 2005 році за розширення розуміння і аналіз проблем конфліктів і співпраці на основі теорії ігор. На думку професора Аумана будь-які конфлікти описуються певними математичними моделями, які піддаються математичному аналізу; ігнорування цих моделей неодмінно веде до фіаско. А економіка, вважає він, це чиста математика і логіка.

І, нарешті, кілька слів про історію фрази, винесеної в епіграф цього параграфа. Кажуть, що у 1752 р. Михайлові Ломоносову доручили проаналізувати викладання фізики, хімії та математики в Кадетському корпусі (з цього елітного закладу у XVIII ст. вийшли майже всі відомі російські діячі – письменники, вчені, військові, адміністратори). Докладно обґрунтувавши необхідність вивчення хімії та фізики, з приводу математики Ломоносов пише лише одну фразу: «А математику вже тому вивчати потрібно, що вона розум до ладу приводить».

Завдання для самостійної роботи

1. Створіть колективну статтю-розповідь про золотий переріз. Зробіть презентацію.
2. Назвіть дві-три відомі особи, які поєднують у собі «фізика» й «лірика». Розкажіть про них. Наведіть власні міркування щодо такого феномену.
3. Наведіть свої аргументи і конкретні приклади, чому слід вивчати математику.
4. Наведіть приклади художніх творів, кінофільмів, у яких є сюжет про математику, фізику (математиків, фізиків).

1.3. У ЧОМУ СУТЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ?

Математика – це мистецтво називати
різні речі одним і тим же іменем.
Анрі Пуанкаре

Бурхливий розвиток математичного інструментарію та обчислювальної техніки призвів до активного застосування математичного апарату для дослідження різноманітних процесів людської діяльності з допомогою математичного моделювання. Ефективність такого дослідження полягає в тому, що для нього не потрібні дорогі лабораторії, установки, матеріали, а лише ручка, папір та комп'ютер.

Будь-який процес складається з багатьох взаємопов'язаних складників, які формують його стан. Дуже часто цілісне дослідження такого процесу неможливе через різноманітність взаємозв'язків. Тому дослідник змушений будувати модель процесу, залишаючи лише найважливіші, основні, на його думку, складники та зв'язки між ними. То що таке модель?

Модель (від лат. *modulus* — міра, зразок, норма) — матеріальний або уявний об'єкт-замінник, дослідження якого дає нові знання про суттєві властивості об'єкта-оригіналу.

Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою та із зовнішнім середовищем. Модель при цьому є засобом пізнання властивостей і закономірностей поведінки об'єкта. Основним її призначенням у задачах керування, наприклад, є прогноз реакції об'єкта на керуючі дії. Найхарактерніші властивості моделей:

а) *цілеспрямованість*. Модель завжди будується з певною метою. Ця мета залежить від того, які властивості об'єктивного явища вважати істотними, а які — ні. З огляду на це модель є, так би мовити, проекцією об'єктивної реальності під певним кутом зору;

б) *спрощеність*. Модель відтворює лише певну кількість властивостей та відношень, тому завжди простіша за оригінал;

в) *повнота*. Модель має відображати всі істотні, з точки зору мети моделювання, властивості оригіналу;

г) *адекватність*. Модель має вичерпно відтворювати усі властивості процесу, важливі для цілей даного дослідження І ця властивість є найголовнішою, найважливішою, вирішальною при прийнятті рішення щодо можливості використання моделі. Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна вважати її абсолютно (за всіма характеристиками) адекватною оригіналу. Модель лише може наближатись до оригіналу, якщо зберігати в ній усе більше і більше складників та зв'язків процесу.

Математичне моделювання є засобом вивчення реальної системи шляхом її заміни зручнішою для дослідження системою (моделлю), що зберігає істотні ознаки оригіналу. При моделюванні здійснюється апроксимація[23] функції опису більш простою і зручною для практичного аналізу функцією — моделлю.

Як же створити, сконструювати математичну модель реального процесу?

Дослідження і математичний опис об'єкта моделювання полягають у встановленні зв'язків між характеристиками процесу, виявленні його граничних і початкових умов та формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень. Процес побудови будь-якої математичної моделі є послідовністю таких етапів:

1. Побудова реалістичної моделі (механічної, фізичної, біологічної, економічної, соціальної тощо), яка полягає в описі параметрів об'єкта моделювання, що його характеризують, та формулюванні технічного завдання.
2. Побудова математичної моделі. Її починають із уведення певних невідомих змінних, функцій, відображень та встановлення зв'язків між ними і параметрами вхідних діянь об'єкта. Найчастіше математична модель будується у вигляді алгебраїчного рівняння, системи рівнянь і нерівностей, звичайного диференціального рівняння, системи рівнянь, диференціального рівняння в частинних похідних, інтегрального й інтегро-диференціального рівнянь. При стохастичному моделюванні застосовують методи теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, багатовимірної статистики: регресійного, кореляційного, багатофакторного та інших аналізів.
3. Якісний аналіз та перевірка коректності математичної моделі. Математична модель досліджується на існування та кількість розв'язків при різних значеннях заданих вхідних параметрів та функцій.
4. Вибір методу розв'язання математичної задачі: аналітичного (пошук точного розв'язку) чи чисельного (розробка алгоритму побудови наближеного розв'язку задачі, дослідження на точ-

[23] Апроксимація (від лат. approximatio – наближення) – заміна одних математичних об'єктів іншими, у певному сенсі близькими до початкових.

ність наближеного розв'язку та реалізація алгоритму у вигляді комп'ютерної програми).

5. Перевірка адекватності моделі. Якщо модель не задовольняє критерії адекватності, необхідно перевірити, крок за кроком коректність її розробки на всіх етапах – від побудови реалістичної моделі до побудови наближеного чи точного розв'язку.
6. Практичне застосування дослідженої моделі.

Розглянемо кілька математичних моделей, які відповідають певним реальним процесам та розглянемо для них наведені вище етапи. Найпростіші математичні моделі у вигляді рівнянь та систем рівнянь будувалися ще в школі при розв'язанні так званих текстових задач, наприклад, на рух, спільну роботу, сплави, розчини, суміші, числові залежності тощо. То й наш розгляд почнемо зі шкільної задачі.

Модель 1. Для задачі на рух

Мотоцикліст дістався з пункту A до пункту B, подолавши 120 км. Назад він виїхав з тією самою швидкістю, але через годину змушений був спинитися на 10 хв. Після зупинки він збільшив швидкість на 6 км/год і витратив на зворотний шлях стільки ж часу, скільки й на шлях від A до B. Визначити початкову швидкість мотоцикліста.

Це — фізична (механічна) модель реального процесу. Модель ідеалізована, оскільки швидкість мотоцикліста на кожній ділянці вважаємо сталою, що не відповідає реальності.

Щоб побудувати математичну модель, позначимо шукану швидкість — x км/год. Тоді на шлях від A до B мотоцикліст витратив $\frac{120}{x}$ год, а на зворотний шлях, ураховуючи вимушену зупинку, $\left(1+\frac{120-x}{x+6}+\frac{1}{6}\right)$ год. Оскільки, за умовою, ці величини рівні між собою, то маємо рівняння

$$1+\frac{120-x}{x+6}+\frac{1}{6}=\frac{120}{x}.$$

Це і є математична модель.

Рівняння зводиться до квадратного $x^2+42x-4320=0$, що має два корені: $x_1=48, x_2=-90$. Повертаючись до фізичної моделі, робимо висновок, що корінь $x_2=-90$ задачу не задовольняє. Тому залишається $x=48$, тобто початкова швидкість мотоцикліста – 48 км/год.

Модель 2. Для задачі про випуск продукції

Взуттєва фабрика спеціалізується з випуску виробів трьох видів: чобіт, кросівок та черевик. При цьому використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат кожного типу сировини на одну пару взуття та затрати сировини за один день задані в таблиці:

Тип сировини	Норми затрат сировини на одну пару, ум. од.			Затрати сировини за один день, ум. од.
	Чоботи	Кросівки	Черевики	
S_1	5	4	3	3800
S_2	2	1	2	1700
S_3	3	2	2	2250

Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду взуття.

Цим завершується побудова економічної моделі, яка вивчає процес виготовлення взуття на фабриці.

Для побудови математичної моделі введемо змінні x_1, x_2, x_3, які визначають кількість пар взуття, випущених за день: чобіт, кросівок та черевик, відповідно. Тоді, враховуючи норми затрат сировини на одну пару взуття та затрати сировини за один день, відповідно до таблиці, побудуємо математичну модель у вигляді системи трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2+3x_3=3800, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=2300, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=2250. \end{cases}$$

Очевидно, що наведена економічна модель є занадто спрощена. Реально фабрика, зазвичай, виготовляє не три види взуття та використовує для цього не лише три типи сировини. Та, якщо навіть перелічувати усі кількості видів взуття й усі типи сировини, то одержимо також систему рівнянь, але з більшою кількістю рівнянь і невідомих. У навчальних цілях, щоб зрозуміти принцип моделювання, ми обмежилися такою спрощеною моделлю.

Потрібно іще зазначити, що така лінійна модель у вигляді системи одержана із припущення, що затрати сировини прямо пропорційні кількості готової продукції, тобто має місце лінійна залежність. Якщо ж враховуватимемо, що при виготовленні продукції неминуче будуть відходи, то лінійну залежність слід замінити нелінійною, яка врахувала б, якимось чином, наявність таких відходів. Тоді замість лінійної математичної моделі одержимо відповідну нелінійну у вигляді системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Якісний аналіз побудованої моделі полягає у дослідженні сумісності та визначеності отриманої системи лінійних рівнянь. Ці теоретичні питання розглядає навчальна дисципліна «Лінійна алгебра», яка вивчається на першому курсі. Тут ми лише констатуємо, що дана система, а, отже, й задача в цілому, має єдиний розв'язок, у чому читач зможе легко переконатися, після вивчення відповідної алгебраїчної теорії.

У курсі лінійної алгебри вивчаються й різні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Використовуючи один із них (на свій смак), одержимо розв'язок: $x_1 = 250$, $x_2 = 300$, $x_3 = 400$.

Наступні етапи дослідження у наведеному прикладі недоцільні, тому що ця модель є суто навчальною. Однак легко можна уявити етап перевірки адекватності такої моделі, якби кількість видів взуття та типів сировини відповідали реальній кількості видів та типам сировини, що використовуються на взуттєвих фабриках. Та, якщо перевірка на адекватність пройде успішно, цю модель можна буде використовувати на взуттєвих фабриках.

Модель 3. Модель Леонтьєва

Ускладнимо задачу випуску продукції.

Нехай на фабриці є три цехи, кожний із яких випускає свою продукцію. Частина цієї продукції використовується на власні та двох інших цехів виробничі потреби (назвемо цю продукцію напівфабрикатом), а інша частина призначена для зовнішнього споживача, тобто у виробництві цехами не використовується. Для того, щоб урахувати використання напівфабрикату цехами, необхідно знати так звану величину прямих затрат a_{ij}, яка показує кількість продукції i-ого цеху, що йде на виробництво одиниці продукції j-ого цеху (тобто це відношення об'єму продукції i-ого цеху, що використовується при виготовленні своєї продукції j-им цехом, до об'єму продукції j-того цеху). Нехай a_{ij} є сталими. Таким чином маємо сталу матрицю прямих затрат, або так звану технологічну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Також має бути відомо, скільки готової (кінцевої) продукції невиробничого призначення планує випустити кожний цех: y_1, y_2, y_3, відповідно.

Потрібно знайти кількість усієї продукції, готової та напівфабрикату (так званий валовий об'єм), яку має випускати кожний цех, щоб виконати план.

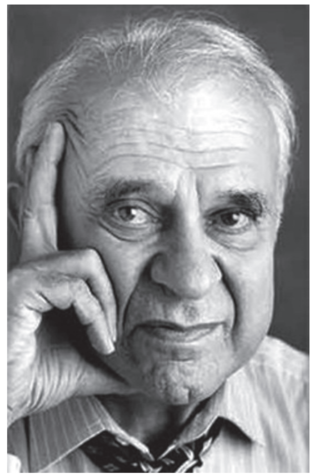
На цьому завершується формулювання економічної моделі.

Для побудови математичної моделі введемо невідомі x_1, x_2, x_3, які означають валовий об'єм продукції, яку повинен випускати кожний цех.

Враховуючи технологічну матрицю та кількість готової продукції, яку випускає кожний цех, одержуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + y_2, \\ x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + y_3. \end{cases}$$

Як бачимо, ця система рівнянь відрізняється від попередньої тим, що невідомі містяться в обох частинах рівняння. Для розв'язання такої системи рівнянь потрібно перенести доданки, що містять невідомі, з правої частини рівняння в ліву. Така математична модель в економіці називається балансовою моделлю Леонтьєва «затрати — випуск». Її автор – американський математик російського походження Василь Леонтьєв. Саме за розвиток цієї ідеї балансової моделі та її застосування до важливих економічних проблем він одержав у 1973 р. Нобелівську премію в галузі економіки.



Василь Васильович Леонтьєв
(1905 – 1999)

Якісний аналіз побудованої математичної моделі полягає в тому, щоб з'ясувати, чи можна однозначно знайти валовий об'єм продукції кожного цеху, який при заданій матриці затрат A забезпечує план випуску кінцевої готової продукції. Забігаючи наперед (про умови існування єдиного розв'язку записаної системи рівнянь читач дізнається в курсі лінійної алгебри), скажемо, що є кілька критеріїв, коли задача має єдиний розв'язок (у цьому випадку модель Леонтьєва називається продуктивною).

Один із них – максимум сум елементів стовпців матриці A не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менша за одиницю.

Модель 4. Для задачі про оптимальний план випуску продукції

Нехай деяке підприємство випускає продукцію заданого асортименту, наприклад, трьох видів, ціна кожного з яких c_1, c_2, c_3 відома. Для її виготовлення використовуються визначеного виду ресурси, наприклад, чотирьох видів, обсяг кожного з яких b_1, b_2, b_3, b_4 відомий. У цьому випадку необхідно задати кількість кожного ресурсу, які затрачаються для виготовлення одиниці продукції зазначеного асортименту. Позначимо a_{ij} — кількість i-ого ресурсу на виготовлення одиниці продукції j-ого асортименту. Таким чином, маємо технологічну матрицю витрат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix},$$

де кожний її елемент означає кількість певного виду ресурсу, який витрачається для виготовлення одиниці продукції відповідного асортименту.

Підприємству потрібно скласти такий план випуску продукції, який може бути технологічно здійсненим при наявних ресурсах усіх видів та задовольняє задані обмеження щодо випуску кожного виду продукції й, у той же час, забезпечує найбільший дохід від реалізації готової продукції.

Це – економічна модель.

Для побудови математичної моделі введемо невідомі x_1, x_2, x_3, які означають кількість виготовленої продукції кожного асортименту. Знаючи ціну кожного виду продукції, складемо так звану цільову функцію

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3\ ,$$

яка визначає загальний дохід підприємства після реалізації усієї продукції. За вимогою задачі, ця функція має досягати максимуму. Очевидно, що чим більшого значення буде набувати кожна змінна x_i, тим більшою буде значення цільової функції. Однак, якщо припустити, навіть, що ринок збуту необмежений, — об'єм виготовленої продукції не може бути як завгодно великим, оскільки його обмежують ресурси.

Зв'язок уведених невідомих з елементами технологічної матриці та обсягами ресурсів дозволяє записати наступні умови обмеження:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le b_4. \end{cases}$$

Додавши до цієї задачі ще умови невід'ємності уведених невідомих, одержимо наступну задачу лінійного програмування:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max\ .$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le b_4. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Це — лінійна модель. Її отримали із припущення, що вся виготовлена продукція кожного асортименту буде реалізована за однією і тією ж ціною, та із припущення, що ресурси витрачаються прямо пропорційно виготовленій продукції, тобто лінійно. Якщо ці припущення зняти й урахувати іншу нелінійну залежність, то отримаємо нелінійну модель.

Дослідження такої математичної моделі на предмет існування розв'язків, їхньої кількості — предмет навчальної дисципліни «Методи оптимізації», яка вивчатиметься на старших курсах.

Ми розглянули три випадки, де досліджували один і той же процес — виготовлення продукції на підприємстві. Будуючи різні економічні моделі одного і того ж процесу, одержали різні математичні моделі.

Усі розглянуті вище моделі стаціонарні, тобто, такі, розв'язки яких не залежать від деяких невідомих. Далі розглянемо математичні моделі, в яких розв'язки, що описують стан реалістичної моделі, залежать від деякої змінної. Часто цією змінною є час. Такі математичні моделі називають динамічними.

Розглянемо кілька задач, які приводять до динамічної моделі у вигляді диференціального рівняння.

Модель 5. Для задачі про вплив інвестицій на випуск продукції

Досліджується вплив інвестицій на приріст випуску продукції. Підприємство випускає продукцію за фіксованою ціною p, яка не залежить від часу. Припустимо, що для розширення виробництва в підприємство вклали інвестиції в розмірі $I(t)$, пропорційному швидкості випуску продукції з коефіцієнтом пропорційності l. Припустимо також, що розмір інвестиції й складає фіксовану частину доходу m: $0 < m < 1$. Визначити, який об'єм продукції випускатиме підприємство після вкладення інвестицій.

Формулювання економічної моделі завершено.

Математична модель. Позначимо $y(t)$ – обсяг продукції підприємства в момент часу t. Припустивши, що вся вироблена продукція реалізована на ринку, визначимо дохід підприємства $Y(t) = py(t)$.

Урахуємо вплив інвестицій на виробництво. За умовою, інвестиції пропорційні швидкості випуску продукції, яка, як відомо, є похідною від $y(t)$. Враховуючи пропорційність швидкості випуску та розміру інвестицій, маємо диференціальне рівняння

$$y'(t) = l \cdot I(t).$$

(У цій рівності нехтується час між випуском продукції та її реалізацією, тобто, вважаємо, що виготовлена продукція одразу ж реалізовується.)

Залишилось ще врахувати, що інвестиції складають фіксовану частину доходу:

$$I(t) = mY(t) = mpy(t).$$

Поєднавши дві останні рівності, одержимо диференціальне рівняння:

$$y'(t) = ky(t), \quad k = lmp,$$

яке і є шуканою математичною моделлю.

Модель 6. Для задачі про чисельність популяції

Розглянемо екологічну задачу, що визначає процес зміни кількості популяцій, на який впливає її народжуваність та вимирання. Нехай народжуваність та вимирання популяції пропорційні її кількості з коефіцієнтами a та b, відповідно. Визначити, як буде змінюватись чисельність популяції з часом.

Це — екологічна модель.

Математична модель. Позначимо через $y(t)$ — чисельність популяції в момент часу t. Тоді чисельність популяції в кожний момент часу t буде збільшуватись завдяки народжуваності на величину $a \cdot y(t)$ та зменшуватися, через вимирання, на величину $b \cdot y(t)$.

Тобто, приріст чисельності є різницею $(a-b) \cdot y(t)$. І цей приріст дорівнює швидкості $y'(t)$ зміни чисельності. Маємо рівняння

$$y'(t) = ky(t), \quad k = a - b.$$

Як бачимо, одержали одну і ту ж математичну модель (одне і те ж диференціальне рівняння) для двох зовсім різних реальних процесів (реалістичних моделей). Відмінність полягає лише у змісті й розмірності функції $y(t)$ та коефіцієнта рівняння k.

Найбільш змістовно та найповніше математичне моделювання реалізовано у фізиці. Один із розділів фізики «Механіка» фактично перетворився у розділ математики. Тут математичними моделями виступають диференціальні рівняння, системи диференціальних рівнянь. У розділах фізики, які вивчають теплові та коливні процеси, математичне моделювання призвело до появи також нового математичного розділу «Рівняння математичної фізики». Не будемо тут розглядати відповідні математичні моделі, з ними читач зустрінеться при вивченні дисциплін «Диференціальні рівняння», «Рівняння математичної фізики», «Функціональний аналіз» та ін.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. У чому полягає мета математичного моделювання?
2. Які основні властивості моделі?
3. Назвіть послідовність етапів побудови математичної моделі.
4. Чим відрізняються між собою стаціонарна та динамічна математичні моделі?
5. ***Задача***. У родині четверо осіб: чоловік, дружина та двоє дітей. Річний дохід сім'ї складає a грн. Заплановано купити холодильник, комп'ютер, дві путівки у табір відпочинку та взуття обом дітям. Розподіліть дохід на перелічені товари та послуги, склавши математичну модель у вигляді одного рівняння. Знайдіть кілька розв'язків моделі у цілих числах, кратних 10. Визначте самостійно розмір річного доходу та ціни тих товарів і послуг, які перелічені у задачі. Додайте інші товари та послуги на Ваш розсуд.
6. Побудуйте математичну модель для вибраної Вами реальної моделі.

Розділ 2

МАТЕМАТИЧНА ТВОРЧІСТЬ

2.1. СПЕЦИФІКА МАТЕМАТИЧНОЇ ТВОРЧОСТІ. ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ І ТВОРЧІСТЬ

Геній – це один відсоток натхнення
і дев'яносто дев'ять відсотків поту.
Томас Едісон

Між роботою учня, який розв'язує задачу з алгебри чи геометрії, і винахідницькою роботою різниця лише в рівні, в якості, оскільки обидві роботи одного характеру .
Жак Адамар

Що означає викладати? – Це означає систематично спонукати учнів до власних відкриттів.
Герберт Спенсер

Не виключаємо, що дехто із читачів, побачивши заголовок, одразу захоче перегорнути кілька сторінок уперед: «А що тут обговорювати? До математичної творчості, винаходу здатні лише математично обдаровані люди, генії. А кого нагородити тим чи іншим талантом – вирішують на небесах. Тобто, як кажуть, не кожному дано». Чи й справді математиком треба народитися, чи це лише міф про вродженість математичних здібностей, придуманий неуспішними, із певних причин, у математиці людьми?

На тему творчості взагалі і математичної творчості зокрема (або творчості в галузі математики) є багато досліджень і статей. Ми не будемо тут аналізувати природу математичної творчості як психічного явища, проникати, що ще складніше, у творчу лабораторію генія, залишимо це заняття психологам. Наша основна мета — заохотити, стимулювати читача до творчого мислення, до розв'язування задач і переконати, що цьому можливо навчатися самому і навчати інших.

Зазначимо, що прагнення збагнути природу наукової творчості і підвищити ефективність творчого мислення, навчитися управляти процесами мислення так, щоб при розв'язанні будь-якої проблеми знаходити правильне і оптимальне рішення, має давню історію. Виникнення евристики – науки про те, як робити відкриття і винаходи, пов'язують з іменем грецького математика Паппа Александрійського (III ст.), хоча сам Папп посилається на своїх попередників, зокрема, Евкліда. Пізніше до проблем пояснення й управління творчістю зверталися багато видатних математиків, наприклад, Декарт, Лейбніц, Больцано, Пуанкаре.

Рене Декарт у своїй праці «Правила для керування розуму»[24] намагався запропонувати універсальний метод розв'язування задач, який, кажучи дуже схематично, містив три пункти: 1) будь-яка задача зводиться до математичної; 2) будь-яка математична задача зводиться до алгебраїчної; 3) будь-яка алгебраїчна задача зводиться до розв'язання одного-єдиного рівняння.

Джордж Пойа (1887 – 1985) – визначний угорський, швейцарський і американський математик та педагог; основні праці стосуються теорії чисел, математичного і функціонального аналізу, математичної статистики і комбінаторики; зробив великий внесок у популяризацію математики та методику математики, зокрема розв'язування математичних задач

Жак Адамар (1865 – 1963) – видатний французький математик-універсал, автор багатьох фундаментальних праць з алгебри, геометрії, функціонального аналізу, математичної фізики, топології, теорії ймовірностей, механіки та ін.; на основі власних спостережень та свідчень видатних математиків досліджував природу математичної творчості

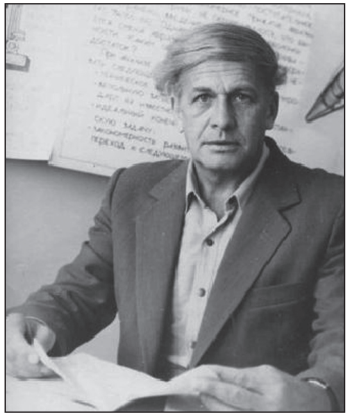
[24] Р. Декарт. Соч. в двух томах. — М., 1989. — Т. 1.

Аналізу технології математичної творчості присвячені роботи Джорджа Пойа, Жака Адамара, Волтера Сойєра та ін. Багато цінних, на нашу думку, висновків і рекомендацій учених будуть викладені далі в цьому посібнику.

Вважаємо, що читачеві було би корисно ознайомитися із цікавими, живими, майже художніми творами цих авторів, зокрема, «Як розв'язувати задачу», «Математика і правдоподібні міркування», «Математичне відкриття» Дж. Пойа, «Прелюдія до математики» В. Сойєра та «Дослідження психології процесу винаходу в галузі математики» Ж. Адамара.

Прикладом дослідження XX ст. у зазначеному напрямі можуть бути праці Генріха Сауловича Альтшуллера, який понад 40 років досліджував природу творчості і розробляв алгоритм розв'язання винахідницьких технічних задач.

Рене Декарт (1596 – 1650) — французький філософ, математик, фізик, фізіолог. У математиці запровадив Декартову систему координат, основоположник аналітичної геометрії



Генріх Саулович Альтшуллер (літ. псевдонім Генріх Альтов) (1926 – 1998) — радянський учений, автор теорій розв'язування винахідницьких задач, развитку технічних систем, развитку творчої особистості, винахідник, письменник-фантаст

«Кілька років тому в одній статті, — пише Г. С. Альтшуллер, я прочитав про те, що першоджерелом найбільших досягнень і відкриттів в усіх сферах культури, науки, техніки і мистецтва є раптове осяяння, що виникає без видимої причини… Вперше я зустрів такий погляд на творчість тридцять років тому, коли почав займатися винахідництвом. Учені і винахідники, розповідаючи про свої відкриття, з дивовижною одностайністю говорили, що їх раптово осіняла ідея, що неможливо не лише управляти творчим процесом, а й зрозуміти, що це таке і як воно відбувається. І хоча про непізнаваність процесу творчості висловлювалися люди, які багато зробили в науці й техніці, я не повірив їм, не повірив одразу і беззаперечно. Чому все можна пізнати, а творчість — ні? Що це за процес, яким, на відміну від усіх інших, не можна керувати?»[25]

Задовго до Г.С. Альтшуллера тезу про винятковість математичних здібностей категорично заперечував В.А. Юнг: «… досвід показує, що математично нездібний розум зустрічається настільки рідко, як очі, що не розрізняють кольорів, чи люди без ніг» («Как преподавать математику»). А учні Г.С. Альшуллера, вчені-винахідники М.Т. Петрович і В.М. Цуріков стверджують: «Теорема коротка, але дуже важлива: "Кожна людина — потенційний винахідник"[26].

Як найчастіше буває, істина десь посередині. Ні саме «натхнення», ні сама «логіка» чи «техніка» із розв'язанням по-справжньому складної проблеми навряд чи справляться. І категорично відкидати вроджені якості, «дар Божий» було б нерозумно. Якби, дотримуючись певних правил, можна було «народжувати» блискучі ідеї, якби натхненню можна було навчитися, – геніїв було би значно більше. Академік А.М. Колмогоров визнавав, що математичним (як і будь-яким іншим) талантом природа обдаровує не всіх. І ніяка наполеглива праця, тренування цього обдарування не замінять. Але, як слушно зауважував учений, і саме обдарування без наполегливої цілеспрямованої праці нічого не варте.

В одній зі своїх статей А.М. Колмогоров зазначає: «Мій досвід показує, що математично обдарованих людей є досить багато, тільки часто вони самі не вірять у свою обдарованість або ж не знаходять у собі сили розвивати її впертою, спрямованою у певному напрямі працею… Адже творчості необхідно навчатися так само, як і будь-якої іншої справи»[27]. Бо «нема царського шляху» ні до математичних знань, ні до математичних відкриттів.

Математична творчість вимагає так званого математичного мислення. У чому ж особливості математичного мислення і як йому навчитися? Коли ми говоримо про математичне мислення, то ро-

[25] Г.С. Альтов. Творчество как точная наука. Теория решения изобретательских задач. — М.: «Советское радио», 1979. — С.3.

[26] Н. Петрович, В. Цуриков. Путь к изобретению.– М.: «Молодая гвардия», 1986. – С. 11.

[27] Колмогоров А.Н. Наука требует горения// Известия. – 1962, 21 февраля.

зуміємо особливий стиль міркувань, з допомогою яких вдається проникати в суть явищ зовнішнього світу та наук про зовнішній світ (фізику, хімію, біологію, економіку, соціологію тощо), формулювати і розв'язувати різноманітні математичні задачі і, навіть, вирішувати повсякденні побутові проблеми та життєві ситуації, безпосередньо з математикою не пов'язані. І, хоча, як сама істина, мислення доволі універсальне і математики не володіють якимось таємним ритуалом мислення, все ж математичне мислення має деякі специфічні особливості і відмінності, зумовлені як специфікою об'єктів, що вивчаються, так і специфікою методів, якими послуговуються.

Олександр Якович Хінчин
(1894–1959)

Відомий математик і педагог А.Я. Хінчин указував на чотири характерні ознаки математичного мислення:

1) чітке дотримання логічної схеми міркувань;

2) лаконізм, «свідоме прагнення завжди знаходити найкоротший, що веде до мети, шлях, безпощадне відкидання всього, що не є необхідним для бездоганної повноцінності аргументації»;

3) чіткість, структурування ходу міркувань. «Якщо, наприклад, для доведення якогось твердження ми маємо розглянути чотири можливих випадки, кожен із яких може бути розбитий на ту чи іншу кількість підвипадків, то в кожен момент міркування математик зобов'язаний чітко пам'ятати, де, в якому випадку чи підвипадку його думка зараз знаходиться і які випадки та підвипадки йому ще залишається розглянути»;

4) скрупульозна точність символіки.[28)]

Не претендуючи на повноту чи універсальність характеристики, вкажемо й ми найхарактерніші, на наш погляд, риси математичного мислення та деякі важливі для математика якості характеру.

Математичному мисленню неодмінно притаманні гнучкість, активність, цілеспрямованість, глибина, широта, здатність до узагальнень, доказовість, критичність, лаконічність, ясність і точність, оригінальність. Очевидно, що деякі із зазначених характеристик перетинаються, взаємно зумовлюються, проте їх суть неоднакова.

[28] А.Я. Хинчин. Педагогические статьи.– М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1963.– С.139–145.

Гнучкість мислення полягає в умінні цілеспрямовано змінювати, у разі необхідності, підхід до розв'язання проблеми, здатність виходити за межі звичного, стандартного способу дій, знаходити нові шляхи розв'язання при зміні умов задачі, додаванні певних обмежень. Вищий рівень гнучкого, нешаблонного мислення – його оригінальність, яка, як правило, виявляється (і формується!) при розв'язуванні нестандартних задач.

Завдяки глибині мислення математику вдається проникати в суть явища, процесу, проблеми, завдання, виявляти характерні ознаки, властивості, бачити суттєві взаємозв'язки між об'єктами, фактами тощо.

Цілеспрямованість мислення допомагає обирати в ході розв'язання проблеми оптимальний шлях, постійно орієнтуючись на кінцеву мету. Тому цілеспрямованість мислення тісно пов'язана із його раціональністю, намаганням відшукати якомога простіший розв'язок поставленої задачі, здатністю відкинути безперспективні шляхи до мети, умінням економно використовувати наявні ресурси.

Раціональне мислення неодмінно передбачає його широту, уміння охоплювати проблему в цілому, здатність до аналогій, узагальнень, до розширення сфери застосування тих чи інших методів і прийомів. Раціональність мислення стимулює організованість пам'яті, коли, як на поличках у шафі педанта, оптимально розташовані необхідні теоретичні відомості: поняття, факти, методи розв'язання тих чи інших типових задач тощо.

Раціональне мислення відзначає лаконічність, ясність, точність висловлень, формулювань, записів. Справжній математичний твір «не терпить жодної «води», ніяких прикрас, ніяких просторікувань, що послаблюють логічну напругу, відволікають убік; гранична скупість, сувора строгість думки та її викладу — невід'ємна риса математичного мислення. Для математики лаконічність думки є незаперечним, віками канонізованим законом»[29)], — стверджував О.Я. Хінчин.

Цілеспрямованість мислення стимулює також його активність, бажання обов'язково розв'язати задачу, здатність розглянути і проаналізувати різні підходи до її розв'язку, прагнення дослідити задачу при зміні умов, спрогнозувати результат, побачити перспективи виникнення нових задач тощо.

[29)] А.Я. Хинчин. Педагогические статьи.– М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1963. – С.139 – 145.

Одна з найважливіших рис математичного мислення — його критичність, що характеризується умінням оцінити правильність обраного шляху вирішення проблеми, вірогідність та значущість отриманого результату. Із критичністю мислення тісно пов'язана така невід'ємна його риса, як доказовість, яка характеризується вимогливістю до повноти доказової бази, потребою і здатністю обґрунтовувати, аргументувати кожен крок розв'язання, кожне судження, умінням перевірити правильність доведення, відрізнити строге доведення від евристичних міркувань, критично подивитися на отриманий результат, відрізнити достовірне від правдоподібного.

Для занять математикою важливими є також певні риси характеру. Це, зокрема, – допитливість, спостережливість, наполегливість, ініціативність, віра у власні сили, чесність, здатність до уяви і фантазії, працелюбність. Як ви помітили, ніяких суто «математичних» якостей тут не зазначено, ними має володіти кожна людина інтелектуальної, творчої професії у будь-якій галузі.

Як же навчитися творчому математичному мисленню, набути навичок винахідництва, виробити необхідні для цього якості інтелекту і риси характеру?

Для розвитку мислення єдиним органічним і апробованим засобом є тренування. Будь-які правила мислення, алгоритми, мотиви неможливо почерпнути ззовні, їх треба «виробити так, щоб вони увійшли в плоть і кров і діяли із силою інстинкту» (Дж. Пойа). Саме тому слід учитися розв'язувати задачі. «Розв'язування задач — це та стовпова дорога в математику, ширшої за яку немає і, мабуть, іншого способу прищепити інтерес до математики і полюбити цю мудру науку не існує»[30] (Вавілов В.В.). Разом із тим, самостійне розв'язання математичної задачі, отримання будь-якого, навіть найскромнішого, математичного результату по праву можна вважати «математичним відкриттям» того, хто цю задачу розв'язав. Бо, як зазначає Дж. Пойа, «процес розв'язання задачі являє собою пошук виходу зі скрутної ситуації або способу обійти перешкоду, — це процес досягнення мети, яка спочатку не видається доступною»[31].

Оскільки ця книга адресована студентам-математикам, яким неодмінно доведеться навчати математики інших, незалежно від того, працюватимуть вони учителями, чи ні, то процес розв'язування математичних задач ми розглядатимемо у нерозривному зв'язку

[30] В.В. Вавилов Университетская школа //45 лет школе имени А.Н. Колмогорова. Сборник статей. Часть 1. – СУНЦ МГУ, 2008.

[31] Дж. Пойа. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. – С. 13.

з процесом навчання розв'язувати задачі, тобто далі будуть тісно переплітатися питання: «Як розв'язати цю задачу?», «Як навчитися розв'язувати задачі такого типу?» і «Як навчити такі задачі розв'язувати?». Навряд чи вдасться коли-небудь сформулювати точні правила («чарівний ключик»), яких слід дотримуватися, аби щось відкрити, принаймні, досі таких правил не знайдено. Питання в іншому. Які умови, принципи дій корисні для успішного розв'язування задач? Розглянемо такі умови й принципи.

1. *Теоретична підготовка*. Успішне розв'язання задач неможливе без належної теоретичної підготовки, володіння основним змістом математичних дисциплін. «Немає нічого більш практичного за хорошу теорію» — казав Кірхгоф[32]. Якість теоретичної підготовки саме у володінні матеріалом, а не у простому запам'ятовуванні і здатності відтворити означення, формули, теореми. Щоб певна інформація, факти, твердження стали надійною базою й інструментом для математичної творчості, базою для отримання нових знань, необхідно проникнути в суть виучуваного, повно, наочно і всебічно розуміти поняття, принципові ідеї, методи, факти. «...Повнота знання досягається лише тоді, коли воно знаходить практичне застосування»[33], — пише Б.В. Гнєденко. «...Знати означає дещо інше, ніж завчити і запам'ятати, — продовжує вчений. — Знати — це значить зрозуміти і зробити пізнане знаряддям подальшого пізнання та практичної роботи»[34].

А щоб знаннями можна було ефективно користуватися при вирішенні проблем, вони мають бути добре організовані й мобілізовані, щоб серед усієї цієї великої кількості фактів, понять, напрацювань попереднього досвіду можна було у потрібний момент швидко обрати ті, які знадобляться для розв'язання конкретної проблеми, задачі. Тому кожне нове поняття чи факт, яким ми поповнюємо знання (свої або наших учнів), не мають виникати з нічого, вони мають відповідати природній допитливості людини і бути зв'язані з власним досвідом, уже наявними знаннями, узгоджуватися зі спорідненими поняттями та фактами. Кожне нове знання має зайняти в системі уже набутих знань оптимальне місце. «Є дещо спільне у формуван-

[32] **Густав Роберт Кірхгоф** (1824 – 1887) – видатний німецький фізик. Разом із німецьким ученим Бунзеном заклав основи спектрального аналізу, відкрив цезій та рубідій. Установив один із законів випромінювання (закон Кірхгофа) та правила для розрахунку електричних кіл (правила Кірхгофа).

[33] Б.В. Гнеденко. Введение в специальность математика. – М.: Наука. – 1991. – С. 113.

[34] Там же. С. 114.

ні повного і зв'язного знання з розрізнених відомостей і побудові стіни з необтесаного каміння: кожне нове знання, як і кожен новий камінь, потрібно розглянути з усіх боків, прикласти до різних місць, перш ніж нове не знайде собі найбільш вдале місце в наявному, так щоб поверхні прилягання були якомога більшими, а пропуски, порожнечі – якомога меншими і ціле було зведене надійно»[35]. Лише добре організовані знання можуть будуть знаряддям дії, а не тягарем пам'яті.

Зазначимо, насамкінець, що й сама по собі теоретична підготовка, оволодіння новими знаннями є процес творчий. І якість теоретичних знань безпосередньо залежить від того, наскільки творчим буде процес їх здобуття: чим більше відомих фактів, теорем, методів ви самостійно «відкриєте», тим вищою буде якість вашої теоретичної підготовки.

2. *Уміння розв'язувати типові задачі.* Саме типові задачі дають можливість виробити загальний підхід, метод їхнього розв'язання, сформувати певні методичні рекомендації. Знаючи методи, стандартні прийоми розв'язування типових задач, немає потреби кожного разу шукати продуктивну ідею, «винаходити велосипед». Такими задачами і відповідними методами є, наприклад, доведення від супротивного, рекурсія, метод математичної індукції – для доведення тверджень, що залежать від натурального n, методи геометричних місць, подібності, допоміжних фігур – в задачах на побудову, метод перебору (проб і помилок), метод Декарта (складання рівнянь) — у так званих текстових задачах, стандартні перетворення, заміни при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, обчисленні інтегралів та багато інших. Не ставлячи собі за мету, та й не маючи такої можливості, розглядати різні типові задачі та методи (це предмет дидактики й методики математики), проілюструємо деякі з них на прикладах конкретних задач. Зазначимо також, що розв'язання усіх задач, тут і надалі, будемо описувати детально, щоб не тільки «унаочнювати» відповідну думку, а й звертати увагу на інші важливі аспекти, «імітувати», наскільки це можливо, цілісний процес, хай навіть маленького, «наукового відкриття».

Задача 1 *(Пойа).* На фермі є кури і кролі. Всього у цих курей і кролів 50 голів і 140 ніг. Скільки курей і скільки кролів на фермі?

[35] Г. Полиа, Г. Сёге. Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. – М.: Наука, 1978. – С. 9.

Розв'яжемо задачу методом Декарта (складання системи рівнянь). Для цього перекладемо умову задачі на мову алгебри.

Словесне формулювання	Мовою алгебри
Є деяка кількість курей	x
Є деяка кількість кролів	y
Разом голів	$x + y = 50$
Разом ніг	$2x + 4y = 140$

Задачу зведено до системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 50, \\ 2x + 4y = 140, \end{cases}$ розв'язуючи яку, знаходимо $x = 30, y = 20$.

Загальний (універсальний) алгоритм розв'язування текстових задач з допомогою рівнянь полягає у наступному.

Перший крок. Добре зрозуміти умову задачі (що — невідомо, що — дано), визначити, що в умові суттєво, а на що можна не зважати. (Наприклад, у попередній задачі важливо не те, що йде мова саме про **курей** і **кролів**, а те, що вони **двоногі** і **чотириногі**. Інформація про те, що тварини живуть на **фермі** для подальшого розв'язання не має жодного значення). Аналогічно, в задачах на рух для того, хто розв'язує, неважливо, чи йде мова про рух автомобіля, чи мотоцикла, літака або ще іншого об'єкта. Ввести змінні (позначити невідомі буквами), одну чи кілька. Найчастіше буквами доцільно позначати те, що у задачі потрібно знайти.

Другий крок. Віднайти в умові задачі ті речення (відомості), які можуть бути записані рівністю. Наприклад, йдеться про рівність двох величин, чи сказано, що одна з величин на стільки-то більша (менша) за іншу, або одна — у стільки-то разів більша (менша) за іншу, або разом певні величини дорівнюють відомому числу тощо.

Третій крок. Виразити потрібні величини через уведені змінні і записати рівняння (систему рівнянь), тобто сконструювати математичну модель.

Четвертий крок. Розв'язати складені рівняння (системи рівнянь).

П'ятий крок. Перевірити, чи отримані розв'язки задовольняють умову задачі. Особливо це важливо, коли дані задачі не числові, а буквені. Корисно, по змозі, скласти загальнішу задачу, проаналізувати, як зміниться результат за тої чи іншої зміни умови.

Принагідно наголосимо на винятковій важливості текстових задач у курсі шкільної математики ще й тому, що саме при розв'язуванні текстових задач учні отримують перший досвід математичного моделювання.

Задача 2. У гості до математика X прийшов математик Y. «Якого віку твої діти?» — запитав господар у гостя. Гість відповів: «У мене три доньки. Добуток їх віку дорівнює 36, а сума — номеру твого будинку. То якого віку мої доньки?». X подумав і сказав: «Задача невизначена, мало інформації, щоб знайти розв'язок». Y погодився і додав: «Моя старша донька білявка», після чого X одразу назвав вік усіх трьох доньок гостя. Як він це зробив?

Аналізуючи умову, одразу маємо помітити, що колір волосся доньки несуттєвий для розв'язання задачі. Тобто, остання інформація, яку надав Y, про те, що старша його дочка білявка, очевидно, цінна лише тим, що з неї випливає: старші діти – не близнюки, старша донька — **одна**, оскільки гість говорив про неї в однині. Щоб розв'язати цю задачу, скористаємося методом перебору (проб і помилок). Розглянемо всі можливі варіанти запису числа 36 у вигляді добутку трьох цілих множників і для кожного варіанта знайдемо суму цих множників (результати оформлено у вигляді таблиці).

№ п/п	Множники	Сума множників
1.	1, 1, 36	38
2.	1, 2, 18	21
3.	1, 3, 12	16
4.	1, 4, 9	14
5.	**1, 6, 6**	**13**
6.	**2, 2, 9**	**13**
7.	2, 3, 6	11
8.	3, 3, 4	10

Із восьми варіантів лише у двох маємо одну й ту ж суму множників — 13 (ці варіанти виділені в таблиці жирним шрифтом). І, очевидно, саме один із цих двох варіантів є розв'язком задачі, бо, якби це було не так, тобто, якби котрийсь із шести інших варіантів задовольняв задачу, то для відповіді на поставлене в задачі запитання цілком достатньо було б інформації, яку гість повідомив спочатку. Тепер же нам знадобляться відомості про старшу дочку, які дозволяють відкинути п'ятий варіант (у ньому — старші доньки є близнятами). Маємо остаточну відповідь: 2, 2 і 9 років.

До речі, бачимо, що в умові був ще один «обманний маневр» — інформація, що сумарний вік дорівнює номеру будинку, про що та-

кож нескладно здогадатися, оскільки сам номер не вказаний (хоча математик X міг про таку «пастку» не здогадуватися, оскільки з великою ймовірністю можна стверджувати, що він таки знав номер свого будинку).

Зазначимо, що існує думка про «другосортність» методу перебору, з якою можна й не погодитися. І навіть більше того, у процесі навчання розв'язуванню задач потрібно заохочувати розумне використання цього методу, бо багато задач можна розв'язати лише методом перебору і наведений приклад добре це ілюструє. Але, разом із тим, слід показувати учням, що в більшості випадків є раціональніші методи розв'язання. Для ілюстрації сказаного повернемося до ***Задачі 1*** і розв'яжемо її методом «проб і помилок».

Міркуємо, приблизно, так. На фермі не можуть бути самі лише кури, бо тоді ніг було би лише 100. Так само не можуть бути самі лише кролі, бо ніг було б 200. Спробуємо перевірити варіант «50 на 50», тобто 25 курей і 25 кролів. Тоді ніг буде: $2\times25+4\times25=150$. Якщо зменшити число курей, то число кролів збільшиться, тобто кількість ніг також збільшиться. Отже, треба збільшувати число курей. Спробуємо, наприклад, число 30 (тоді кролів — 20). Маємо кількість ніг: $2\times30+4\times20=140$. Потрібні числа знайдені.

Звичайно, не факт, що одразу або після невеликої кількості спроб спаде на думку випробувати пару чисел (30, 20). А якщо замість чисел 50 і 140 були би більші числа? А якби значення цих величин були задані буквеними параметрами?... Очевидно, що універсальний алгебраїчний метод для цієї задачі значно ефективніший, ніж метод перебору варіантів.

Дуже часто доводиться поєднувати, комбінувати різні підходи, методи в одній задачі. Розглянемо, для прикладу, наступну задачу.

Задача 3 *(Ейлера).* Фермер купив певну кількість свиней, кіз та овець, усього 100 голів, за 100 крон. Одна свиня коштує $3\frac{1}{2}$ крони, коза — $1\frac{1}{3}$ крони і вівця — $\frac{1}{2}$ крони. Скільки куплено свиней, кіз та овець?

Будемо розв'язувати задачу універсальним методом складання рівнянь.

Нехай купили x свиней, y кіз і z овець. В умові сказано, що усіх тварин було 100, тому маємо рівняння: $x+y+z=100$. Вартість усіх тварин задається виразом $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z$, значення якого, згідно з умовою, дорівнює 100. Маємо друге рівняння: $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=100$.

Перетворюємо його, щоб коефіцієнти стали цілими і записуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 21x+8y+3z=600. \end{cases}$$

У цій системі кількість рівнянь менша за кількість невідомих, тому, якщо система має розв'язки, то їх безліч (питання про існування і кількість розв'язків системи лінійних рівнянь розглядаються у курсі лінійної алгебри). Поставлена задача, очевидно, не може мати безліч розв'язків. Потрібні додаткові відомості, які допоможуть обмежити кількість розв'язків. Для цього уважно проаналізуємо зміст задачі. Оскільки кожне з невідомих *x, y, z* — це кількість куплених тварин, то всі вони мають бути цілими додатними числами. Саме таким обмеженням скористаємося надалі.

Приходимо до так званих діофантових[36)] рівнянь. Виключивши із системи змінну *z*, дістанемо рівняння $y=60-\frac{18x}{5}$, звідки робимо висновок, що *x* кратне числу 5 (бо 18 на 5 не ділиться без остачі). Позначимо $x=5t$, t – ціле число. Тоді

$$y=60-18t, z=100-(x+y)=40+13t.$$

Враховуючи, що значення *x, y, z* додатні, знайдемо t із системи нерівностей

$$\begin{cases} 5t>0, \\ 60-18t>0, \\ 40+13t>0. \end{cases}$$

Маємо $t\in\left(0;\frac{10}{3}\right)$, тобто $t_1=1, t_2=2, t_3=3$. Цим трьом значенням t відповідають три трійки значень *x, y, z*: (5; 42; 53), (10; 24; 66) і (15; 6; 79). Усі вони, з погляду здорового глузду, зміст задачі задовольняють. Отже, задача має три розв'язки.

3. *Синтез емпіричного і теоретичного.* Щоб розв'язати будь-яку задачу, вирішити проблему, отримати нове знання, користуються

36) Рівняння, в яких згідно з умовою допускаються тільки цілочисельні розв'язки, називаються діофантовими на честь давньогрецького математика Діофанта Александрійського (III ст.). Є багато спеціальних методів розв'язування діофантових рівнянь.

певними засобами і застосовують відповідні методи. Методи математичного дослідження умовно поділяють на два види: емпіричні й теоретичні. До емпіричних методів відносять спостереження, вимірювання, тобто різного роду експеримент. Під теоретичними методами в математиці розуміють логічно-дедуктивні та індуктивні дії, які полягають у тому, що кожен факт доводять строгими логічними умовиводами, спираючись на встановлені раніше факти, закони, висновки тощо. Як взаємодіють ці два рівні дослідження, яка роль кожного з них у процесі математичної творчості?

Природний шлях до будь-якого, навіть найскромнішого, відкриття лежить через спостереження і здогад. Ми спочатку здогадуємося про той чи інший факт, а тоді його доводимо, спочатку здогадуємося про ідею доведення, а потім її реалізуємо. І здогад (гіпотеза), найчастіше, ґрунтується на результатах саме емпіричного дослідження (спостереження, попереднього досвіду тощо). Ось чому, навчаючись (чи навчаючи інших) математики, так важливо якомога більше фактів, закономірностей, властивостей підмітити, тобто прийти до них природним шляхом. Наприклад, більшість так званих важливих границь, які вивчаються у курсі математичного аналізу, легко помітити, користуючись відповідними графічними зображенням (рис. 1, а–в).

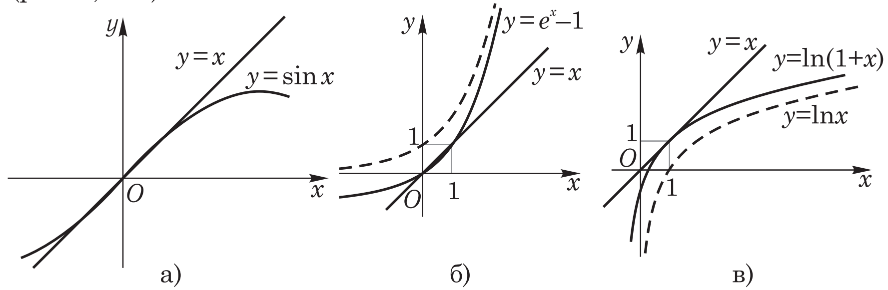


Рис. 1

Емпіричні міркування можуть бути приблизно такими. Оскільки поблизу нуля (початку координат) графіки функцій $y=x$ та $y=\sin x$ (рис. 1, а), $y=x$ та $y=e^x-1$ (рис. 1, б), $y=\ln(1+x)$ (рис. 1, в) практично зливаються, то їхня частка при малих значеннях x близька до одиниці. Тому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Аналогічно, легко «побачити» й наступні границі: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}=1$.

Якщо ж учитель (викладач, підручник) не спонукає підопічного до емпіричних міркувань, якщо учневі висновок, факт, розв'язок, метод, постійно з'являтиметься несподівано і нізвідки, як «бог із машини»[37], то учент, звичайно, не навчиться пошуку істини, не оволодіє прийомами творчого мислення, а сам факт не знайде місця у його свідомості. Не кажучи уже про те, що подібне навчання послабить, якщо не зведе нанівець, бажання вивчати математику, сформує упередження або посіє сумнів щодо власних інтелектуальних здібностей. Учень може підозрювати, що то лише він, через свою необізнаність чи «нематематичність», не бачить, чому твердження правильне.

Однак самі лише емпіричні методи в науковому пізнанні не можуть вважатися надійними, бо приводять до ймовірно-істинного знання. Щоб воно набуло статусу знання достовірного (закон, теорема, формула) потрібна прискіплива «еспертиза» гіпотези, доведення її зі строгим дотриманням логічно-дедуктивних правил. І тут використовуються найрізноманітніші теоретичні загальні та специфічні методи, знайомство з якими чекає на читача в курсах логіки, педагогіки (дидактики), а також усіх математичних дисциплін. Успіх наукового пізнання — у поєднанні, взаємодії емпіричних і теоретичних методів.

Звернемося до шкільного прикладу.

Загальновідома історія про юного Ґаусса[38], який миттєво виконав завдання шкільного вчителя і обчислив суму перших ста натуральних чисел. Переконані, що кожен із вас, будучи школярем і познайомившись із цією історією, внутрішньо відчував упевненість, що й сам міг би домислитися до прийому, який використав Гаус (або

[37] «Бог із машини» (лат. «Dues ex machine») — крилатий латинський вислів, означає несподіване і легке розв'язання складної ситуації, яке не випливає природно із внутрішньої логіки самої події, а викликане втручанням іззовні. Походить від назви прийому в античній драмі, коли у фіналі на сцену з допомогою підйомного пристрою опускався «з небес» один із богів Олімпу і легко розв'язував конфлікт.

[38] Записавши, а ймовірніше уявивши (!) суму перших ста натуральних чисел 1 + 2 + 3 + + … + 97 + 98 + 100, Ґаусс підмітив, що попарні суми доданків, рівновіддалених від кінців записаної суми, рівні між собою і дорівнюють 101 (1 + 100 = 2 + 98 = 3 + 97 = = … = 50 + 51 = 101), а кількість таких пар — 50. Тому шукану суму обчислив так: 101 × 50 = 5050. Кажуть, що Ґаусс до старості всі обчислення проводив, переважно, «у думці».

й домислювався, якщо учитель пропонував саму задачу, а не просто розповів історію).

Карл Фрідріх Ґаусс
(1777 – 1855) —
видатний німецький математик, астроном і фізик, по праву вважається «королем» математиків усіх часів

До цієї історії шкільний учитель звертається перед виведенням формули суми перших n членів арифметичної прогресії. Бо саме цей конкретний приклад наводить на думку, що, можливо, подібну властивість (попарні суми рівновіддалених від кінців членів прогресії є однаковими) має кожна арифметична прогресія. Переконавшись у справедливості домислу, спочатку на кількох інших прикладах, а потім обов'язково довівши (!) зазначену властивість, легко приходять до відомої формули $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}n$.

Ми спробували гіпотетично у загальних рисах реконструювати процес її отримання (відкриття!) на шкільному уроці алгебри. Переконані, що, після належного засвоєння (саме засвоєння!) теми «Арифметична прогресія», учень, набувши певного досвіду, з більшим успіхом робитиме свої відкриття, знайомлячись із геометричною прогресією. І вчитель тут має виступати не інформатором, а мудрим режисером. Наприклад, він має допомогти учням задатися запитаннями: «Якщо кожен член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним сусідніх членів (звідки й назва прогресії), то яку ж характеристичну властивість має геометрична прогресія? Що в ній «геометричного»? Чи не вказує назва прогресії на її характеристичну властивість?». Успіх у відповідях на такі запитання вселятиме в учня впевненість, що він зуміє розв'язати й інші задачі, зокрема, знайти суму перших n членів. І знову виникає сприятлива для вчителя ситуація: аналогія з арифметичною прогресією не спрацьовує, отже, потрібно шукати інший шлях. Є добра нагода спонукати учня до нового пошуку.

При вивченні геометричної прогресії вперше у шкільному курсі математики прокладається місток у вищу математику, а саме в математичний аналіз, у «математику нескінченності» (мова – про суму нескінченної геометричної прогресії). Для вчителя привести учнів до такого серйозного узагальнення – дуже відповідальний момент і він має зробити все можливе, щоб цей крок був для учнів органічним і природним. Принагідно зазначимо, що зробити це майстерно вчитель може лише у тому випадку, якщо, навчаючись в університеті, добре засвоїв курс математичного аналізу. Добре настільки, що учень і не помітить використання «важкої артилерії». Неприпустимо було б «ударити» строгими означеннями ряду чи доведеннями його збіжності. Суть справи має стати «відчутною», прозорою, проілюстрованою. У таких ситуаціях потрібні лише спостережливість, емпіризм, те, що Дж. Пойа називає «правдоподібними міркуваннями». Саме тому ми й наголошуємо на високій кваліфікації вчителя.

Спробуємо передбачити дії кваліфікованого (компетентного) вчителя математики, скажімо, ваші, читачу, дії через 5 – 6 років (коли ви будете дипломованим фахівцем). Сценарій уроку нам бачиться приблизно таким.

Учитель пропонує обчислити суму членів геометричної прогресії: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n + \ldots$. Неважко передбачити правильну відповідь учнів, суть якої в тому, що така сума з кожним доданком «дуже» зростає і не може дорівнювати ніякому натуральному числу, вона може стати більшою за будь-яке надзвичайно велике число. Тому записаний вираз позбавлений розумного смислу. Далі учитель пропонує ще одну суму членів іншої прогресії:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots. \qquad (*)$$

Тут слід очікувати певного внутрішнього опору учня, бо він правильно розуміє, що неможливо додавати (рахувати) нескінченно довго. Однак слід схилити учнів (якщо вони самі цього не запропонують) спробувати поступово додавати доданок за доданком. Обчислюючи тепер суми двох, трьох, чотирьох і т. д. доданків помічаємо, що вони «наближаються» до числа 2, і, залишаючись меншими за 2, все менше і менше від нього відрізняються ($S_2 = 1\frac{1}{2}$, $S_3 = 1\frac{3}{4}$, $S_4 = 1\frac{7}{8}$, $S_5 = 1\frac{15}{16}$, $S_6 = 1\frac{31}{32}$, $S_7 = 1\frac{1}{64}$, ...). Ці спостереження паралельно ілюструються рисунком чи мультимедійним зображенням (нанесенням фарби або штриховки на відповідні ділянки числової прямої). Таким чином учні самі чи з допомогою вчителя приходять до думки: незважаючи на те, що незрозуміло як можна шукати суму нескінченного числа доданків, що, виконуючи зрозумілу їм операцію додавання, практично здійснити це неможливо, суму (*) не можна все ж уважати такою безглуздою, як у попередньому прикладі; більше того, хочеться сказати (передбачити), що вона дорівнює числу 2.

Після цього слід записати суму n членів прогресії $S_n = \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ і ще раз переконатися, що із зростанням номера n сума S_n «прямує» до числа 2, бо дріб $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ «прямує» до нуля, оскільки його знаменник необмежено зростає. Тепер учні цілком готові будуть розв'язати задачу в загальному вигляді і вивести (ми зумисне вживаємо слово «вивести», а не «довести») формулу суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії. Варто також розглянути випадки, коли модуль знаменника прогресії дорівнює одиниці.

Корисним буде цікавий і переконливий приклад, де вже доведений факт може бути використаний на практиці. Учень має побачити, що подібні суми потрібні і вони зустрічаються не тільки в математиці, що це не лише відірвана від життя абстракція, цікава хіба що для тих, хто обере математику своєю професією.

Одним із таких (цікавих) прикладів може бути відомий апорій (парадокс) Зенона[39] про Ахіллеса і черепаху, суть якого зводиться до наступного: «Ахіллес ніколи не наздожене черепаху. Справді, нехай на початку руху їх розділяє відстань a, і Ахіллес біжить у k разів швидше за черепаху. Доки Ахіллес пробіжить цей проміжок довжиною a, черепаха встигне відповзти від нього на відстань a/k. Коли Ахіллес пробіжить і цей проміжок a/k, черепаха подолає відстань a/k^2, і так далі. Таким чином, Ахіллес ніколи не наздожене черепаху, бо між ними завжди буде деяка відстань».

Знайдемо «ахіллесову п'яту» в «аргументації» парадокса. Проміжок часу, який необхідно подолати Ахіллесу від початкової точки руху до тієї точки, де він наздожене черепаху, розбивається на нескінченну «кількість» відрізків. З того, що «кількість» таких відрізків нескінченна, робиться висновок, що сума їхніх величин також нескінченна, тобто Ахіллес завжди відставатиме від черепахи і ніколи її не наздожене. Цей висновок, що подається як очевидний, насправді є хибним: величини проміжків часу утворюють спадну не-

[39] Парадоксальні твердження давньогрецького філософа Зенона Елейського (V ст. до н. е.), обґрунтування яких зовні виглядають бездоганними. Сучасники згадували понад 40 апоріїв Зенона про рух і множини, до наших днів їх дійшло 9.

скінченну геометричну прогресію, знаменник якої $q = \frac{1}{k} < 1$. Тому сума членів такої прогресії скінченна і дорівнює $T = \frac{t_1}{1-q}$, де t_1 — час, за який Ахіллес пробігає відстань a. Наприклад, якщо Ахіллес біжить зі швидкістю сучасного спринтера 10 м/с (36 км/год), а початкова відстань до черепахи дорівнює 90 м, він наздожене черепаху рівно за 10 секунд на відстані 100 м від точки старту (проведіть самостійно відповідні нескладні обчислення).

Наведений з демонстраційною метою приклад вивчення у школі прогресій показує, як може виникнути продуктивна ідея, здогадка, як будується гіпотеза. «Якщо ви хочете мати характеристику наукового методу в трьох словах, то ось вона: здогадуйтесь і перевіряйте»[40], — писав Дж. Пойа. Висловлення здогадки, гіпотези формують уміння творчо мислити (бо це пошук), виховують математичну культуру, дисциплінують думку значно більше, ніж задачі, мета яких набити руку в застосуванні певного правила чи формули. «Спостерігайте, узагальнюйте, доводьте і «передоводьте» по-своєму!»[41]. Важливість цього заклику великого педагога важко переоцінити.

Розв'язавши задачу, корисно подумати, чи не можна знайдений результат перенести на дещо змінену ситуацію, на більш загальні умови, тобто спробувати знайти його аналоги, узагальнення. Зазначимо, що узагальнень одного й того ж факту чи методу може бути декілька. Так, у стереометрії ряд фактів із повним правом можна вважати аналогами теореми Піфагора. Найпростіший загальновідомий факт: квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів (доведіть).

Але є й інші твердження. Якщо просторовим аналогом прямокутного трикутника вважати прямокутний тетраедр, тобто трикутну піраміду з прямим тригранним кутом при вершині, де бічні грані — «катети», а основа — «гіпотенуза», то цікаво було б сформулювати для нього твердження, подібне на теорему Піфагора для прямокутного трикутника і перевірити його правильність. Природно припустити наступне: квадрат площі основи тетраедра дорівнює сумі квадратів площ його бічних граней. Перевіримо правильність такої гіпотези. Очевидно, що експериментальна перевірка на конкретних

[40] Дж. Пойа. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. – С. 350.

[41] Там же. – С. 103.

тетраедрах мало що допоможе, не лише через те, що вимірювання завжди наближені, і, отже, прикладом ми не зможемо навіть спростувати гіпотезу, а ще через те, що й тисячі прикладів, які підтверджують твердження, не завжди гарантують його справедливість. Тому спробуємо довести (чи спростувати) зроблене припущення строгими логічними міркуваннями.

— Що невідомо?

— Квадрат площі основи піраміди.

— А що відомо?

— Площі бічних граней. Крім того, відомо, що ці грані — прямокутні трикутники.

Нехай a, b, c — сторони основи тетраедра, ребра l, m, n сходяться у вершині прямого тригранного кута (рис.2).

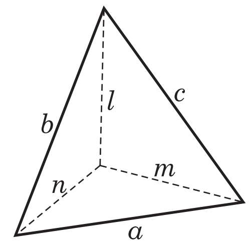


Рис. 2. Просторовий аналог теореми Піфагора

Позначимо площу основи (грані, що лежить напроти прямого тригранного кута) S, а площі бічних граней, які містять сторони a, b, c, — A, B, C, відповідно.

Як знайти зв'язок між A, B, C та S? Можна спробувати виразити площі цих трикутників через їхні сторони, тобто через ребра піраміди. Площу основи S знайдемо за формулою Герона:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Бічні грані — прямокутні трикутники, тому $A = \frac{1}{2}mn$, $B = \frac{1}{2}nl$, $C = \frac{1}{2}lm$. Величина S^2 також може бути виражена через l, m, n, оскільки за теоремою Піфагора:

$$a^2 = m^2 + n^2,\ b^2 = l^2 + n^2,\ c^2 = l^2 + m^2.$$

— Чи досягли ми позитивного результату?

— Частково так. Шуканого зв'язку не видно, але його можна перевірити безпосередньою підстановкою у рівність $S^2 = A^2 + B^2 + C^2$ записаних виразів для A, B, C та S.

Шлях ясний, але внутрішнього задоволення немає. Чому? – Надто громіздкі перетворення треба буде виконати. Може краще спробувати інший підхід?

— Що робить перетворення громіздкими?

— Формула Герона.

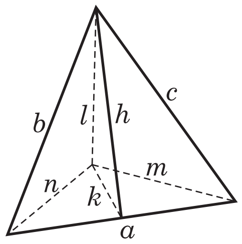


Рис. 3. Добудова просторового аналога

Отже, запишемо площу S за іншою, найпростішою формулою, через основу і висоту. Для цього виконаємо невелику добудову: проведемо $h \perp a$ (рис. 3). Тоді $k \perp a$ (чому?).

Тепер маємо: $S = \dfrac{1}{2}ah$, $h^2 = k^2 + l^2$, $k = \dfrac{2A}{a}$ (поясніть усі записані співвідношення). І завершення перевірки цілком зрозуміле:

$$4S^2 = a^2h^2 = a^2\left(k^2 + l^2\right) = a^2\left(\frac{4A^2}{a^2} + l^2\right) =$$

$$= 4A^2 + a^2l^2 = 4A^2 + \left(n^2 + m^2\right)l^2 =$$

$$= 4A^2 + \left(nl\right)^2 + \left(ml\right)^2 = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2.$$

Звідси $S^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Гіпотеза підтвердилася.

Ми детально виклали гіпотетичний ланцюг міркувань, сумнівів, щоб проілюструвати, як може з'явитися припущення і як воно стає (або не стає) теоремою. Принагідно зазначимо, що з аналогами теореми Піфагора ви ще не раз зустрінетеся, наприклад, при вивченні векторної алгебри, функціонального аналізу, рядів Фур'є (курс математичного аналізу).

Наступним прикладом хочемо ще раз застерегти читача від спокуси приймати емпіричні факти за достовірні. Зокрема, покажемо, що узагальнення «за аналогією» ризиковані.

Серед сум із нескінченним числом доданків (такі суми називають рядами; прикладом ряду, що зустрічається у шкільному курсі алгебри, є вже знайома нам сума нескінченної геометричної прогресії) важливе значення має так званий ряд Лейбніца, сума якого дорівнює ln2:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots = \ln 2\,.$$

Виконаємо деякі елементарні перетворення. Помножимо обидві частини рівності на 2. Дістанемо:

$$2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{2(-1)^n}{n} + \ldots = 2\ln 2\,.$$

Переставимо місцями і згрупуємо певним чином доданки лівої частини останньої рівності, а саме, зберігаючи чергування знаків доданків і зростання знаменників дробів, згрупуємо доданки з одним і тим же непарним знаменником. Для кращої наочності, випишемо більшу кількість доданків. Маємо:

$$2\ln 2 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2\,.$$

Прийшли до очевидно хибного результату $2\ln 2 = \ln 2$. А причина — у перенесенні (за аналогією) переставної властивості, яку мають скінченні суми, на ряди. Детально ці та багато інших питань, що стосуються рядів, ви вивчатимете у курсі математичного аналізу.

Із принципом (умовою) синтезу емпіричного і теоретичного тісно пов'язана роль інтуїції та логіки у творчому процесі.

4. *Інтуїція та логічно-дискурсивне мислення.*

Термін «дискурсивний» походить від латинського «*discursus*» – міркування, аргумент. Дискурсивне мислення передбачає «аргументовані міркування», ланцюжок послідовних відповідей на пов'язані одне з одним запитання, який веде до остаточного встановлення істини. Дискурсивний стиль мислення добре ілюструє сократівський метод діалогу, в ході якого, ставлячи послідовно питання і даючи на них логічно вмотивовані відповіді, ми, крок за кроком, підводимо співрозмовника (чи підходимо самі) до кращого розуміння предмета обговорення і висновку, який спочатку не був очевидним. Дискурсивне пізнання опосередковане, здійснюване шляхом логічних умовиводів, на противагу чуттєвому, безпосередньому пізнанню, яке ще називають інтуїтивним.

Здатність безпосередньо дійти певного висновку, минаючи проміжні сходинки логічного його обґрунтування, — є інтуїція. Інтуїцію вважають продуктом підсвідомості і часто протиставляють її свідомому, логічному мисленню.

Попри усі дискусії щодо пріоритетності раціонального чи ірраціонального, інтелектуального чи чуттєвого, логіки чи інтуїції у творчому процесі, аж до деяких крайніх точок зору, незаперечним залишається факт, підтверджений практикою: чуттєве (інтуїтивне) і логічно вмотивоване — дві невід'ємні ознаки творчого математичного мислення. Істина — кінцевий «продукт» такого мислення — досягається лише спільними зусиллями логічного аналізу та інтуїції, співробітництвом свідомості і підсвідомості. Більше того, є чимало підстав стверджувати, що вони не тільки не виключають, а, навпаки, передбачають одне одного.

Практика показує, що інтуїція не з'являється на голому місці. Кожному великому відкриттю, як правило, передує інтенсивна інтелектуальна робота, пов'язана з постановкою проблеми і спробами, часто безрезультатними, розвязати її засобами логічно-дискурсивного мислення. Свідчення багатьох видатних учених-математиків переконливо говорять про те, що раптові просвітління, несподівані блискучі ідеї приходили лише після тривалої попередньої роботи над проблемою, коли здавалося, що всі логічні резерви пошуку вичерпані, а докладені великі зусилля розуму — абсолютно безплідні. Що ж відбувається з мисленням від моменту, коли припинилася свідома, керована робота розуму над вирішенням проблеми, до моменту появи «блискучої ідеї», інсайту? І як така ідея з'являється? «Ці зусилля, — зазначав Анрі Пуанкаре, — не такі вже й безплідні, як здається; вони запускають машину підсвідомого, без них вона ніколи не прийшла б у дію і нічого б не виробила»[42]. Легендарне яблуко мусило впасти саме на голову Ньютона і цим прислужитися великому відкриттю. Бо лише для того, хто довго і наполегливо думав над проблемою, цей випадок став своєрідним поштовхом, який зрушив думку із протореної дороги і дозволив зробити їй новий якісний стрибок. Ньотонове яблуко, до речі, — далеко не єдиний відомий приклад «підказки» у процесі великого відкриття. Свого часу інженер Самюель Броун додумався до ідеї висячого моста, випадково кинувши оком на павутину, що повисла між гілками дерева. Батько російської авіації М.Є. Жуковський (1847 – 1921) відкрив один зі своїх законів, спостерігаючи, як вода обтікає камінь на дні струмка.

Тобто, виходить, що інтуїція, а точніше, її яскравий вияв у вигляді інсайту, з'являється там, де закінчується логіка. І відбувається це внаслідок роботи думки на рівні підсвідомості, коли вона, думка, завдяки певному поштовху, найчастіше, у вигляді якоїсь образно-чуттєвої підказки виходить на якісно новий рівень, долає бар'єр, що досі перегороджував їй шлях до нового знання. Хтось влучно назвав інтуїцію крилами думки. Образно-чуттєвий «каталізатор» ніби замикає розірване коло логічних міркувань, виявляється саме тим

[42] А. Пуанкаре. Математическое творчество // У кн. Жак Адамар. Исследование психологии процесса изобретения. – М.: Издательство «Советское радио», 1970. — С. 126.

пазлом, якого не вистачало у конструкції з аргументів і який миттєво робить картину цілісною. Звідси й відчуття впевненості у правильності інтуїтивної ідеї, загадковість та несподіваність її появи, миттєвість просвітлення.

І, нарешті, знову наступає період свідомої роботи розуму – встановлення логічного ланцюга суджень і умовиводів, перевірка й упорядкування інтуїтивно отриманих результатів. Таким чином, адекватне наукове пізнання полягає у поєднанні діалектично суперечливих його форм: інтуїтивної та логічно-дискурсивної.

Плоди інтуїції, так само, як емпіричні висновки, мають пройти перевірку логікою, інакше кажучи, кожна гіпотеза має бути доведена або спростована. Лише тоді результат набуває статусу об'єктивної істини. Не можна за догадку, спонтанну ідею, навіть дуже правдоподібну, чіплятися без будь-якої критики, сприймати її за готовий розв'язок. Кожну догадку слід ретельно перевіряти, опонувати їй, доводити чи спростовувати. Тут ми підходимо до ще однієї, дуже важливої якості математичного мислення і ознаки наукової творчості (яка, до речі, суттєво відрізняє її від творчості художньої) — доказовості.

5. *Доказовість.* О.Я. Хінчин писав: «У математиці нема і бути не може «наполовину доведених» чи «майже доведених» тверджень: або повноцінна аргументація така, що ніякі дискусії про правильність доведеного твердження більше неможливі, або аргументація взагалі відсутня»[43]. У кожній догадці, мотивації, кожному обґрунтуванні треба прискіпливо шукати протиріччя; уміння ж його бачити «з ходу» — ключова риса логічного мислення.

Учитель має не тільки навчати учнів доводити, а й виховувати внутрішню потребу не довіряти сліпо відчуттям, результатам, одержаним за аналогією, критично ставитися до висновків, отриманих на основі неповної індукції, виробляти уміння відрізняти припущення від факту. Найкращим засобом для цього можуть служити геометричні ілюстрації, контрприклади. Доречними будуть також цікаві класичні історії, влучні жарти, анекдоти, навіть не обов'язково пов'язані з математикою. Одну з таких історій, запозичену у Дж. Пойа, наводимо тут.

«В історії, яку я збираюся розповісти і за достовірність якої не відповідаю, мова піде про сера Джона і швейцара. Можна припускати, що сер Джон, член Королівського товариства (Британська академія

[43] А.Я. Хинчин. Педагогические статьи.– М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1963.– С.131.

наук — *Авт.*), умів розрізняти гіпотезу і строго доведений факт; однак у тому випадку, про який тут піде мова, розуміння цієї відмінності виявив не сер Джон, а швейцар Королівського товариства.

Одного разу сер Джон трохи запізнювався на збори Королівського товариства; він явно нервував і поспішав. Йому треба було залишити капелюха в гардеробі й отримати номерок. Швейцар, який чергував того дня у гардеробі, чемно сказав: «Ви можете не затримуватися, сер, — я видам Вам капелюха й так». Сер Джон відправився на збори без номерка; хоча він подякував швейцару, однак трохи хвилювався за долю свого капелюха. Але, коли він, повертаючись зі зборів, зайшов у гардероб, швейцар одразу ж подав йому капелюха. Сер Джон був задоволений; тому я не знаю, що спонукало його запитати: «А звідки ви знаєте, що це мій капелюх?». Я не знаю, що не сподобалося швейцарові у цьому запитанні, але він доволі різко відповів: «Я не маю честі знати, чи Ваш це капелюх, сер; але це саме той капелюх, якого Ви мені залишили» [44].

Наступним, уже «математичним», прикладом продемонструємо ризикованість сліпо довіряти відчуттям. На запитання: «Яких чисел більше: натуральних чи усіх раціональних?» студенти-першокурсники, ще не знайомі з теорією дійсного числа, як правило, одразу відповідають: «Звичайно, всіх раціональних» (принаймні іншої відповіді нам жодного разу не довелося чути). Інтуїція підказує. А ви як відповіли (чи відповіли б) на це запитання? На пропозицію обґрунтувати таку відповідь, здебільшого, чуємо мотивацію винятково чуттєву, емоційну: «Серед усіх раціональних чисел натуральні зустрічаються лише де-не-де». Інколи додають: «А раціональних чисел так багато, що між будь-якими двома можна вставити безліч раціональних чисел». Однак, цей, здавалось би, сам по собі зрозумілий правильний висновок, насправді, хибний. Покажемо це, навівши детальний хід дискурсивних міркувань, мотивуючи кожен новий крок думки, задаючи запитання, які має задавати сам собі той, хто навчається, чи вчитель учневі, якого навчає.

Опонуємо нашій гіпотезі, засумніваємося у непогрішності відчуттів.

Порахувати раціональні чисел, як і натуральні, неможливо, бо їх безліч, жодним числом не можна виразити їхню кількість. Але, щоб порівняти чисельності множин, чи обов'язково знати кількість елементів у кожній із них? Наприклад, чи можна порівняти кількість глядачів і стільців у концертній залі, не перераховуючи їх?

[44] Джордж Пойа. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. – С. 329.

— Звичайно, це легко зробити, якщо усі глядачі займуть свої місця, тобто, якщо попарно «зв'язати» глядача і зайнятий ним стілець. Тоді, якщо усі глядачі сидять і вільних місць немає, – кількість елементів в обох множинах одна й та ж; якщо усі глядачі сидять і є вільні місця, – стільців більше, ніж глядачів; якщо ж, навпаки, усі місця зайняті, але деякі глядачі залишаються стояти, – глядачів більше, ніж місць.

— Тобто, якщо припустити, що раціональних чисел стільки ж, скільки й натуральних, то що це мало б означати?

— Що всі раціональні числа можна виписати по порядку, занумерувати, «зв'язати попарно» з натуральними числами.

— Як же знайти послідовність, правило запису, адже раціональних чисел безліч і, на відміну від натуральних, не видно жодної закономірності, черговості розташування їх одне за одним на числовій прямій, таке враження, що вони «товпляться» один біля одного, «розштовхуючи» сусідів?

Ідея спробувати занумерувати усі раціональні числа правильна. Однак тепер може знадобитися підказка. Зробимо таку підказку.

Назвемо висотою дробу (h) суму його чисельника і знаменника. Раціональне число – це звичайний дріб. Тепер будемо виписувати один за одним додатні дроби з висотою h=1, h=2, h=3, h=4 і т.д.

Далі нескладно самостійно (чи майже самостійно) продовжити міркування. Дістанемо послідовність:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{h=2},\ \underbrace{\frac{1}{2},\frac{2}{1}}_{h=3},\ \underbrace{\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}}_{h=4},\ \underbrace{\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}}_{h=5},\ \underbrace{\frac{1}{5},\frac{2}{4},\frac{3}{3},\frac{4}{2},\frac{5}{1}}_{h=6},\ \underbrace{\frac{1}{6},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\frac{6}{1}}_{h=7},\ \ldots\ .$$

Кількість дробів заданої висоти скінченна. Тому виписаними таким чином, тобто занумерованими, будуть **усі** дроби і для цього будуть використані **усі** натуральні числа.

Якщо залишити у записаній послідовності лише нескоротні дроби, щоб одне й те ж раціональне число було записано лише один раз (вилучити слід $\frac{2}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{3},\frac{4}{2}$ і т. д.), то зміститься тільки нумерація. Зміниться також лише нумерація, якщо додати до усіх додатних дробів протилежні, виписуючи їх через один: $\frac{1}{1},-\frac{1}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ і т. д., та число 0. Отже, висунута гіпотеза була неправильною, а тому усіх раціональних чисел «стільки» ж, «скільки» й натуральних.

Останній приклад показує також, що не можна беззастережно переносити ті факти, які мають місце у скінченних множинах (зокрема, «частина менша за ціле») на випадок множин нескінченних.

Сподіваємося, у читача не залишилося сумніву щодо важливості для математичної творчості дедукції, строгих обґрунтувань. Інша справа, якого ж рівня строгості слід дотримуватися при навчанні учнів, студентів? Доведення яких фактів слід обов'язково демонструвати, відтворювати, і як це робити? А коли, без шкоди для знань учня, його математичного розвитку, досить обмежитися розумінням суті самого факту? Усе залежить від віку, рівня розвитку, професійного вибору. Важливо одне — учитель має домогтися, щоб учень (студент) не мав жодного сумніву у правильності того чи іншого твердження. А щоб цього досягти, не завжди варто вдаватися до строгих дедуктивних викладок.

Жак Адамар так відповідав на запитання, для чого потрібні строгі доведення: «Мета математичної строгості полягає в тому, щоб санкціонувати й узаконити завоювання інтуїції, – і жодної іншої мети у неї ніколи не було»[45)].

Говорячи про завдання вчителя, Дж. Пойа підкреслює: «Слід усіма засобами навчати мистецтву доводити, не забуваючи при цьому також і про мистецтво здогадуватися»[46)]. Він наголошує, що людина, яка хоче зробити математику справою свого життя, має навчатися строго доводити; це її професія і характеристична риса її науки. Однак для справжнього успіху вона має навчатися й інтуїтивному мисленню. «Це (правдоподібні міркування – *Авт.*) той тип міркувань, від якого залежить її творча робота»[47)].

Немає гарантованого правила, як навчитися такому мисленню. Але ми впевнені, що це – практичний навик (звісно, при умові ґрунтовної теоретичної підготовки). Йому не тільки можна, а й треба вчитися. Якщо ви розв'язали лише одну задачу (або ознайомилися із її розв'язанням), то дуже мало надії, що вам удасться розв'язати другу, якщо вона навіть не дуже відрізняється від розв'язаної. Але коли ви познайомилися із чужими розв'язаннями багатьох задач, розв'язали самостійно сотню задач і робили це вдумливо, зі всебічним наступним аналізом, то ваші шанси успішно розв'язати будьяку іншу задачу значно зростають. Можна з упевненістю стверджувати, що ймовірність появи здогадки, продуктивної ідеї, якість і потенціал інтуїції прямо пропорційні кількості розв'язаних задач.

[45)] Жак Адамар. Исследование психологии процесса изобретения. – М.: Издательство «Советское радио», 1970. – С. 93.

[46)] Дж. Пойа. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. – С. 288.

[47)] Дж. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения.– М.: «Наука», 1975. – С. 16.

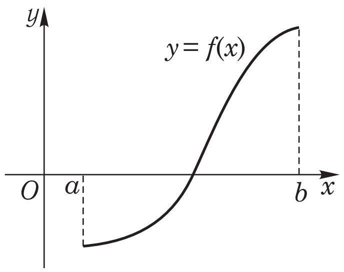
Із сказаного, звичайно, не варто робити висновок, що строгі доведення потрібні лише математикам-професіоналам, а тому нема потреби забивати ними голови усіх учнів, особливо тих, хто не планує пов'язувати своє життя з математикою. І з наведеною вище цитатою Жака Адамара погодитися можна лише частково. Теорема – це та ж задача на доведення, а про роль задач ми уже вели мову. Крім того, строгі міркування дисциплінують думку, формують потрібний для наукової творчості у будь-якій галузі склад розуму, а доведення багатьох теорем вражають витонченістю, викликають справжнє захоплення, укріплюють інтерес до математики. «Учень, на якого математичне доведення жодного разу не справило незабутнього враження, упустив одне із найважливіших інтелектуальних переживань»[48)], — зазначає Дж. Пойа.

Звичайно, було би безглуздям давати у школі, наприклад, аксіоматичну теорію числа. Жоден учень не зрозумів би, для чого йому заплутане означення натурального числа, якщо він і без цього означення безпомилково це число впізнає. Так само тривіальне доведення, де «щасливий кінець» зрозумілий від самого початку, може лише відбити бажання займатися математикою, особливо у здібних учнів, бо в них може скластися враження, що математика – це нудна наука, яка зовсім неочевидним способом доводить очевидні речі. Ми ведемо до того, що шкільний учитель має тонко відчувати межу, міру, вирішуючи, які твердження доводити, як доводити, а строгі доведення яких пропустити.

Однак, поминути доведення факту, твердження, не означає обмежитися самим його повідомленням. У математиці знати — означає, перш за все, розуміти. Якщо вчитель теорему не доводить, то він має знайти способи роз'яснити її з позиції «здорового глузду» так, щоб в учня не залишилося ні найменшого сумніву в її справедливості.

Наприклад, у школі не доводять (але сам факт вивчають) теорему Вейєрштрасса про нуль функції, неперервної на відрізку (з доведенням цієї теореми читач познайомиться у курсі математичного аналізу). Нагадаємо, що зміст теореми полягає у наступному: «Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків, то існує точка c всередині відрізка $[a;b]$ така, що $f(c) = 0$». Теорема дуже важлива, бо на ній ґрун-

[48)] Джордж Пойа. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. – С. 317.



Терема Вейєрштрасса
Рис. 4

тується (загальний) метод інтервалів розв'язування рівнянь і нерівностей. Але строге її доведення школяреві недоступне, бо спирається на твердження, вивчення яких шкільною програмою не передбачено.

На нашу думку, воно й не є потрібним, бо геометрична ілюстрація (рис. 4) робить твердження очевидним: суцільна лінія (*неперервна функція*), проведена з нижньої півплощини у верхню, чи навпаки (*функція на кінцях відрізка набуває значень різних знаків*), мусить, принаймні один раз, перетнути вісь абсцис (*існує точка, в якій функція перетворюється в нуль*).

Геометрична ілюстрація, схеми, погляд на задачу чи проблему з позицій здорового глузду важливі у рівній мірі як для непрофесіонала, так і для дослідника, який фахово займається математикою. Бо це – елемент емпіричних і, так само, раціональних міркувань, які, часто, дуже швидко і ефективно допомагають формувати гіпотезу, натрапити на ідею розв'язання, ясно побачити результат. «Учитель повинен навчати розв'язувати задачу так, наче цей процес містить одну третю математики і дві третини здорового глузду»[49]. Так, крім усього, формується відчуття, що математика – це просто!

Наївно було б сподіватися, що, детально розглянувши на кількох прикладах «процес відкриття», як ми це робили вище, нам забезпечено натхнення і народження продуктивних ідей. Щоб навчитися підмічати закономірності, бачити аналогії, перевіряти гіпотези, продукувати нові ідеї треба виявляти ініціативу, багато і цілеспрямовано трудитися. Коли Ньютона запитали, як йому прийшла в голову блискуча ідея, що дозволила відкрити закон всесвітнього тяжіння (знаємо історію про яблуко, що впало на голову Ньютона), вчений відповів: «Думав про нього постійно». Ця фраза до певної міри виражає й зміст наступної умови.

6. *Воля, наполегливість, віра.* Суттєвим фактором, що впливає на успіх при розв'язуванні задачі, є прагнення її розв'язати. Недостатньо лише добре зрозуміти задачу, за яку ви взялися. Дж. Пойа пише: «Задача може захопити вас більше чи менше, ваше бажання розв'язати її може бути більш чи менш сильним. Але я стверджую, що поки воно не стане дуже сильним, ваші шанси розв'язати складну по-справжньому задачу будуть мізерні»[50]. Якщо якась задача, буквально, заволоділа вами, у вас виникає гостра необхідність її розв'язати, а у випадку гострої необхідності людина здатна мобілізувати колосальні резерви свого організму і не лише фізичні, а й інтелектуальні, вольові, творчі.

[49] Дж. Пойа. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. – С. 313.

Учитель же має усіма доступними йому засобами заманити, «втягнути» учня в задачу, проблему, викликати інтерес, бажання її розв'язати. Тобто розбудити допитливість, ініціативу. Це дуже непросте завдання і можна сказати, що у кожного вчителя свій «секрет» майстерності, однак і тут можна з певністю стверджувати: «Якщо вчителя самого не заполонив дух творчості, а його бажання розбудити в учня інтерес, прищепити любов до математики не надто велике, його шанси справитися із цим завданням мізерні».

Найголовніше завдання вчителя математики — не у кількості повідомлених учням і навіть доведених теорем і формул. Найголовніше його завдання — пробуджувати інтерес до математики, розвивати творчі здібності, які у більшій чи меншій мірі має від природи абсолютно кожна людина, навчати думати. Великою помилкою шкільного вчителя була би орієнтація на так званого середнього учня. Здібні до математики учні потребують такої ж, якщо не більшої, уваги, як і відстаючі.

Для всіх математиків характерна «зухвалість розуму» (У. Сойєр). Люди, здібні до математики, готові прийняти будь-який виклик. Волтер Сойєр у своїй книзі «Прелюдія до математики» дає наступну ілюстрацію цієї якості. Якщо розказати здібним до математики школярам, що ніхто не зумів з допомогою циркуля і лінійки поділити кут на три рівні частини (доведено, що задача не має розв'язку), то обов'язково хтось із них спробує поділити і буде вірити, що таки розв'яже задачу, хоч і знатиме, що уже понад 2000 років це не вдавалося нікому.

Подібну наполегливість слід усіляко підтримувати. Але, якщо учневі постійно пропонувати непосильні задачі, якщо він раз за разом терпітиме поразку, то незабаром він утратить інтерес до математики. Тому чи не головним завданням учителя є захоплювати математикою і утверджувати віру учня у власні сили, пропонуючи задачі, що відповідають його знанням, розумно й непомітно допомагаючи їх розв'язати. Створюючи ситуацію успіху, учитель зможе

[50] Дж. Пойа. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. – С. 246.

прищепити смак до самостійного мислення і розвинути необхідні для цього здібності. Великий педагог В.О. Сухомлинський вважав, що успіх у навчанні – єдине джерело внутрішніх сил дитини, які породжують енергію для переборення труднощів і бажання вчитися.

7. *Естетичне почуття.* Професіоналам-математикам не потрібні жодні аргументи на користь важливості в математиці естетичного фактора. Коли математик говорить про свою роботу, ми часто чуємо захопливе: «красива теорема», «філігранне доведення», «чудовий результат».

Володимир Іванович Вернадський (1863 – 1945) — український філософ, природознавець, засновник багатьох нових напрямів у природознавстві; один із засновників і перший Президент Української Академії наук (1919); засновник першої наукової бібліотеки в Україні

Геніальний учений світового рівня В.І. Вернадський так висловився про красу математики: «Математика, якщо її правильно зрозуміти, володіє не лише істиною, а також величною красою — тією холодною терпкою красою, якою володіє мистецтво творення, — без звернення до якої б то не було слабкості нашої натури, без блиску зовнішнього оформлення живописом чи музикою, і все ж красою такої піднесеної чистоти і такої строгої досконалості, яку може явити нам лише найвище мистецтво».

Але, крім естетичної сторони самої математики, краса і гармонія якої викликають захоплення справжніх «гурманів», її власний розвиток потребує естетичного джерела. Кожний математик знає, що у його роботі естетичне почуття є таким же важливим робочим інструментом, як і логічне мислення. Анрі Пуанкаре вбачав у дарі творчого прозріння та інтуїції заслугу не лише теоретичного, логічного, а й естетичного фактора. Він уважав, що підсвідомість, яка «працює» на заключному етапі народження «блискучої ідеї», обирає цю ідею із сотень інших, керуючись саме критерієм краси і гармонії. Що спеціальне естетичне почуття відіграє в процесі математичної творчості роль «тонкого решета», яке відсіює неправильні ідеї.

Усім відомі численні приклади, коли великі вчені у галузях фізики, математики, хімії малювали картини, грали на скрипці, писали вірші і музику тощо. Яскравим прикладом є уже згадуваний Леонардо да Вінчі – геніальний художник і видатний учений в галузях математики, фізики, природознавства. Великий фізик XX ст., лауреат Нобелівської премії Альберт Ейнштейн вправно грав на скрипці і навіть давав публічні благодійні концерти класичної музики. Яків Френкель – видатний радянський фізик-універсал був прекрасним музикантом і живописцем. Софія Ковалевська — видатний вченийматематик і письменниця. Список можна продовжувати. Когорта ж учених, які самі не створювали творів мистецтва, але були їхніми знавцями і палкими шанувальниками, ще чисельніша.

І ніхто з них не вважає, що мистецтво – лише хобі, спосіб відпочинку і приємного проведення часу. Академіку Л.Д. Ландау (1908 – 1968) належать слова: «Фізик, який не сприймає поезії і мистецтва — поганий фізик». Багато разів згадуваний тут академік А.М. Колмогоров уважав необхідною умовою розвитку математичної інтуїції особи її інтереси за рамками математики, у першу чергу в мистецтві і літературі, спорті. Сам учений був яскравим прикладом такої зацікавленості. Окрім того, що А.М. Колмогоров відомий мовознавець (займався теорією вірша), він – великий поціновувач літератури, музики й живопису, знавець скульптури й архітектури; багато часу віддавав заняттям спортом. В.А. Успенський, учень Колмогорова, згадує, що Андрій Миколайович, вирішуючи, брати того або іншого студента собі в учні чи не брати, завжди звертав увагу на його нематематичні, загальнокультурні інтереси. Він влаштовував претендентам своєрідний екзамен: просив, наприклад, прочитати кілька рядків із твору улюбленого поета. Не всі витримували це суворе випробування.

Чому для професійної роботи математика є такими важливими «нематематичні інтереси»? Для наукової діяльності мистецтво відіграє роль «гімнастики розуму», «тренує» фантазію, допомагає знаходити нові зв'язки й асоціації. Наукова фантазія виховується на фантазії художній (має місце й зворотний зв'язок, особливо в науковій фантастиці), наукова інтуїція за своєю суттю споріднена з інтуїцією митця. Цю думку добре виразила Софія Ковалевська в одному з листів: «Я розумію, чому Вас так дивують мої одночасні заняття літературою і математикою. Багато хто, кому ніколи не випадало нагоди краще пізнати математику, плутають її з арифметикою і вважають наукою сухою й нецікавою. Наспрвді ж, це наука, яка потребує найбільше фантазії, і один із перших математиків нашого століття (Карл Вейєрштрасс — *Авт.*) казав абсолютно правильно, що не можна бути математиком, не будучи поетом у душі. Тільки, звичайно, щоб зрозуміти правильність цього визначення, треба відмовитися від забобону, що поет має придумувати неіснуюче, що фантазія і вигадка – одне й те ж. Мені здається, що поет має лише бачити те, чого не бачать інші, бачити глибше за інших. І це саме має робити математик».

В одному анекдоті про Давида Гільберта зафіксована дещо парадоксальна, як і належить анекдотові, думка про те, що для математика навіть більше, ніж для поета, потрібні добре розвинена уява, фантазія, оригінальне мислення. Гільберта запитали про одного із колишніх його учнів. — А, ви про цього? Він став поетом. Для математики у нього було занадто мало уяви, — сказав учений.

Софія Василівна Ковалевська (1850 – 1891) — російський математик, письменниця (роман «Нігілістка» у 1920 р. був надрукований в СРСР); авторка праць з математичного аналізу, механіки і астрономії; перша жінка, яку обрано чл.-кор. Петербурзької Академії наук.

Давид Гільберт (1862 – 1943) — видатний німецький математик-універсал; у 1900 р. на ІІ Міжнародному конгресі математиків у Парижі представив 23 важливі, на його погляд, математичні проблеми, відомі як знамениті проблеми Гільберта; дві із них не розв'язані й до сьогодні.

На завершення можна сказати, що математика — наука, яка, якщо її зрозуміти і полюбити, здатна викликати естетичні переживання не менші, ніж справжній мистецький шедевр, бо, кажучи

словами І.М. Гельфанда[51)], її поєднує з музикою та іншими видами мистецтва, чотири найважливіші риси: перше – краса, друге – простота, третє – точність і четверте – безумні ідеї. Разом із тим, математики саме у творах мистецтва черпають натхнення і дух фантазії, без яких жодна творчість неможлива.

Навчатися творчості нелегко. Ще важче розвивати творчі здібності своїх учнів, навчати їх творчого мислення. Недаремно запитання: «Чого і як навчати молоде покоління?» було і залишається центральним у будь-якому людському суспільстві.

Як побудувати урок? Як прочитати лекцію? Як підвести учня (студента) до вирішення поставленої проблеми? Які задачі обрати для розв'язання за даною темою? Як організувати роботу над задачею, щоб вона принесла найбільшу користь для досягнення тієї чи іншої навчальної мети? Як створити атмосферу творчості в класі (аудиторії)? Як допомогти такому-то конкретному учневі (студентові) подолати певні труднощі? Безліч подібних питань щоденно постають не лише перед початківцем, а й перед досвідченим шкільним учителем чи університетським викладачем. Викладання не терпить застою і трафарету. Часто буває так, що вдало проведене сьогодні заняття в одній аудиторії, завтра, з іншими учнями (студентами), уже потребує зовсім інших підходів. Тому не може бути сумнівів, що професія вчителя — одна із найбільш творчих професій, а педагогічна діяльність надає винятково широкі можливості для творчості.

Багато секретів педагогічної майстерності ви відкриєте для себе, вивчаючи психологічні та педагогічні дисципліни, методику навчання математики. Деякі корисні методичні поради, сподіваємося, ви знайдете у цьому посібнику. Більше — підкаже вам власний досвід. Але перша і найголовніша, так би мовити, необхідна умова, без якої, попри багато інших, важливих якостей та умінь, ви не станете гарним учителем математики, — це любити і знати математику. Адже не можна навчити когось того, чим не володієш сам.

Для того, щоб людство рухалося по шляху прогресу, воно потребує постійного притоку свіжих умів, здатних побачити у звичному, усталеному можливості для вдосконалення, готових відмовитися від загальноприйнятого задля змін на краще. Ось чому так важливо, щоб молодь професійно зростала в атмосфері творчого пошуку, постановки і розв'язання нових проблем. Найсприятливішим періо-

51) **Ізраїль Мойсейович Гельфанд** (1913 – 2009) — видатний математик, біолог. педагог і організатор математичної освіти в СРСР (до 1989) та США; основні праці стосуються функціонального аналізу та диференціальних рівнянь.

дом для формування творчої особистості, готової до самостійного розв'язання нових проблем, є шкільні та студентські роки, бо саме тоді молода людина визначається зі своїми уподобаннями, ставить життєві цілі, випробовує свої сили і здібності. Тож не втратьте цей золотий час!

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть задачу. Уявімо, що земну кулю по екватору обтягнуто обручем і так само обтягнуто тенісний м'ячик. Далі уявімо, що довжину кожного обруча збільшили на один метр. Тоді обручі відійдуть від поверхні тіл, які вони обтягували, на деяку відстань. У якому випадку ця відстань буде більшою — для земної кулі, чи для тенісного м'ячика ?
Для формування яких якостей мислення свого учня Ви запропонували б цю задачу?

2. Наведіть приклад емпіричного висновку. Опишіть детально емпіричні міркування, які привели до нього. Доведіть (або спростуйте) Ваш емпіричний висновок, використовуючи прийом логічно-дискурсійного мислення.

3. Задача (*про «готель Гільберта»*). Одного разу до готелю, власником якого був математик Ікс, прибуває гість і розчаровано дізнається, що вільних номерів нема. Однак портьє, який також любив математику, подумавши трохи, запевняє гостя, що зможе розв'язати проблему і таки справді поселяє його в окремий номер. Наступного вечора портьє стикається із новою проблемою — до готелю, усі номери якого зайняті, приїжджають ще стільки ж гостей, скільки проживають зараз. Однак це його анітрохи не засмутило, він зумів розмістити всіх так, що кожен постоялець, як той, що уже мешкав у готелі, так і новоприбулий, мав окремий номер, і лише радісно потирав руки, підраховуючи великі прибутки готелю. Розв'яжіть і Ви задачу, з якою успішно впорався портьє.

4. Знайдіть у літературних чи інших джерелах історію якогось відкриття у природничих науках. Як, на Вашу думку, сьогоднішні умови життя впливають на творчі здібності людини?

2.2. ЛЕГЕНДАРНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ВІД НАЙДАВНІШИХ ЧАСІВ ДО НАШИХ ДНІВ

Проблеми – рушійна сила математики
Давид Гільберт

Упродовж усієї своєї історії від найдавніших часів, розв'язуючи різні задачі, математики наштовхувалися на труднощі. Деякі задачі не піддавалися розв'язанню багато десятків, а то й сотень років. Такі задачі ставали знаменитими, вони обростали легендами, а пошук шляхів їх розв'язання ставав своєрідним викликом математикам усього світу, захоплював азартом. На місце одних, розв'язаних, проблем виникали нові. Цей безперервний процес пошуку приводив до нових відкриттів і нових запитань. Так розвивається математика, так вона проникає в інші, нематематичні галузі, допомагаючи й там розв'язувати багато проблем. Вивчаючи різні математичні дисципліни, читач знайомитиметься із деякими такими проблемами та їх розв'язаннями, дізнається й про зміст нерозв'язаних до сьогодні задач. Ми ж зробимо лише короткий екскурс в історію й назвемо деякі із знаменитих задач та серій таких задач. Детальнішому ознайомленню читача з чотирма знаменитими задачами, які недавно розв'язані, буде присвячено наступний параграф.

Уже в V ст. до н. е. у грецькій математиці були сформульовані три знамениті задачі про квадратуру круга, подвоєння куба й трисекцію кута, які привернули загальну увагу і відіграли величезну роль в історії математики. У цих задачах треба було з допомогою циркуля і лінійки: побудувати квадрат, рівновеликий (тобто рівний за площею) даному кругу; знайти куб, об'єм якого був би удвічі більший за об'єм заданого куба; поділити даний кут на три рівні частини, відповідно. Суть вимоги виконати ці побудови з допомогою циркуля і лінійки означає, що жодними іншими інструментами користуватися не можна, циркуль використовується тільки для проведення кола, а лінійка — тільки для проведення прямих. Лише в XIX ст. було доведено, що виконати ці побудови циркулем і лінійкою неможливо. Але пошуки розв'язання кожної із задач чи доведення їх нерозв'язності спричинилися до введення в математику нових понять, розробки різних методів розв'язування задач, розвитку математичної теорії в цілому.

Із виникненням і розвитком алгебри з'являються проблеми, пов'язані з розв'язуванням алгебраїчних рівнянь. Це, зокрема, задача про розв'язування в радикалах цілих раціональних рівнянь із одним невідомим. До XVI ст. була відома лише формула для знаходження коренів квадратного рівняння. Першим великим відкриттям була формула коренів кубічного рівняння (1545 р.), яку довели італійські математики Сципіон дель Ферро, Нікколо Тарталья і Джироламо Кардано. Пізніше Лодовіко Феррарі, учень Кардано, знайшов формулу коренів і для деяких рівнянь четвертого степеня. Однак лише у XIX ст. норвезький математик Нільс Абель довів, що формули, яка б виражала корені багаточлена п'ятого і вищих степенів через коефіцієнти, використовуючи тільки арифметичні дії і радикали, не існує, а через кілька років французький математик Еваріст Галуа знайшов критерій розв'язності в радикалах цілих раціональних рівнянь. Дослідження, що стосувалися алгебраїчних рівнянь привели, зокрема, до відкриття комплексних чисел та виникнення нової алгебри.

Знамениту задачу, яка увійшла в історію як Велика теорема Ферма, було сформульовано у XVII ст., а розв'язано аж у XX ст. (про неї мова піде далі).

У науковому світі поширена практика складання відомими вченими або організаціями списків нерозв'язаних проблем. Це, найчастіше, гіпотези, які протягом тривалого часу не вдається розв'язати. Такими є, зокрема, так звані проблеми Гільберта, Ландау, проблеми тисячоліття.

У 1900 р. на Другому Міжнародному математичному конгресі у Парижі 38-річний німецький математик Давид Гільберт оголосив список із двадцяти трьох математичних проблем, які, на його думку, потрібно було б розв'язати у XX ст. Ні до, ні після нього ніхто такого титанічного завдання перед собою не ставив. Адже яким універсалом треба було бути, щоб настільки глибоко розбиратися в різних галузях математики. Ці завдання називаються тепер знаменитими проблемами Гільберта (див. таблицю).

Галузь математики	№ проблеми
Основи математики	1, 2
Алгебра	13, 14, 17
Теорія чисел	7 – 12
Геометрія	3, 4, 18
Топологія	16
Алгебраїчна геометрія	12 – 16, 22
Групи Лі	5, 14, 18
Дійсний і комплексний аналіз	13, 22
Диференціальні рівняння	16, 19 – 21
Математична фізика і теорія ймовірностей	6
Варіаційне числення	23

На сьогодні залишаються нерозв'язаними дві з них, восьма і шістнадцята проблеми. Про розв'язання десятої проблеми Гільберта розповімо у наступному параграфі.

За прикладом Гільберта Інститут Клея (США) визначив сім важливих математичних проблем, які уже багато років учені не можуть розв'язати, і оголосив їх проблемами нового тисячоліття. Інститут заснував премію «Мілленіум» у розмірі 1 млн. доларів США за розв'язання кожної із проблем. Ось їхній перелік:

— рівність класів P і NP (важлива задача теорії алгоритмів);

— гіпотеза Ходжа (стосується алгебраїчної геометрії);

— гіпотеза Пуанкаре (задача топології); розв'язана 2006 року Григорієм Перельманом;

— гіпотеза Рімана (стосується теорії чисел); гіпотеза є частиною восьмої проблеми Гільберта;

— квантова теорія Янга – Мілса (важлива задача фізики елементарних частин та теорії груп);

— рівняння Нав'є–Стокса (задача гідродинаміки);

— гіпотеза Берча і Свіннертона – Дайера (задача пов'язана з теорією еліптичних кривих).

Згадані вище проблеми Ландау стосуються теорії простих чисел. Це чотири задачі, жодна з них досі не розв'язана. Враховуючи, що усі вони мають просте формулювання, для розуміння якого досить шкільних математичних знань, наведемо їх повністю.

1 (*гіпотеза Ґольдбаха*). Кожне парне число, більше за 2, може бути записане у вигляді суми двох простих чисел, а кожне непарне число, більше за 5, – у вигляді суми трьох простих чисел.

2. Множина простих чисел-близнюків нескінченна.

3 (*Гіпотеза Лежандра*). Між n^2 і $(n+1)^2$ є просте число, де n – натуральне число.

4. Множина простих чисел виду n^2+1 нескінченна.

Завершимо далеко неповний огляд так званих знаменитих задач комбінаторною задачею про хід коня, що буде цікава математикам, які люблять грати в шахи.

Задача (*про хід коня*). Скільки існує маршрутів шахового коня, який проходить через усі поля шахівниці по одному разу?

Ця задача відома, принаймні з XVIII ст. Леонард Ейлер присвятив їй велику роботу «Розв'язання одного цікавого питання, яке, здається, не піддається жодному дослідженню» (1757 р.)

До сьогодні вдалося «порахувати» кількість усіх замкнених маршрутів (26 534 728 821 064). Питання про кількість незамкнених маршрутів досі залишається відкритим.

Назвемо ще один клас задач, що спричинив появу і розвиток цілих галузей математичної науки. Мова – про так звані екстремальні або оптимізаційні задачі.

Зазначимо, що теорія екстремальних задач була предметом дослідження ще з давніх часів. Заснування у 823 році до н. е. Карфагена[52)] (міста-держави на території сучасного Тунісу) пов'язують із відомою легендою про те, що фінікійській царівні Дідоні — засновниці Карфагена, було дозволено взяти для цього територію, яку вона може оточити шкурою бика. Мудра царівна розрізала шкуру на тоненькі смужки і зв'язаною з них мотузкою відмежувала цілий пагорб, на якому й заснувала цитадель нового міста. Хитрощі, до яких вдалася Дідона, дають нам приклад постановки і розв'язку оптимізаційної задачі про плоску криву фіксованої довжини, яка охоплює фігуру найбільшої площі.

Про деякі екстремальні задачі писали Аристотель, Евклід, Архімед. Постановка окремих задач, які можна інтерпретувати як задачі оптимального управління, зустрічалися, наприклад, у «Математичних засадах натуральної філософії» Ісаака Ньютона (1687). Сюди належить і задача про брахістохрону — криву найкоротшого спуску, тобто ту з усіх можливих кривих, що з'єднують дві точки, вздовж якої важка кулька, що котиться (чи ковзає без тертя) з початкової точки, за найкоротший час досягає кінцевої її точки. Задача про брахістохрону розв'язана Йоганном Бернуллі в 1696 р. Виявилося, що цією кривою є циклоїда, із багатьма цікавими властивостями якої ви познайомитеся в курсах аналітичної геометрії та математичного аналізу. До широковідомих класичних задач оптимального управління належить також задача про підйом ракети на задану висоту з мінімальними витратами палива й двоїста їй задача про підйом ракети на максимальну висоту при заданій кількості палива, названа ім'ям Роберта Ґоддарда, американського вченого і винахідника, одного з піонерів ракетної техніки.

[52)] Місто Карфаген згадує І.П. Котляревський у поемі «Енеїда», куди, після того, як греки спалили Трою, прибув «парубок моторний» Еней: «… Еней по берегу попхався / І сам не знав, куди слонявся», / Аж гульк — і в город причвалав. / В тім городі жила Дідона, / А город звався Карфаген…».

Починаючи із XVII ст., розвиваються так звані варіаційні методи дослідження екстремальних задач. Одним із перших є відомий принцип Ферма — про траєкторію, по якій світло проходить від однієї точки до іншої за найкоротший час.

Із оптимізаційними задачами ви зустрічалися ще в школі. Це задачі про найбільшу площу при заданому периметрі, найменші витрати матеріалу тощо, які розв'язують з допомогою похідної. На сьогодні є багато методів розв'язання оптимізаційних задач, вони є предметом дослідження функціонального аналізу, варіаційного числення, математичного програмування, випуклого аналізу.

Завдання для самостійної роботи

Розв'яжіть задачі:

1. Маємо l погонних метрів сітки для огорожі. Треба обгородити нею прямокутну ділянку найбільшої площі.
2. Через точку $A(1;2)$ провести пряму так, щоб вона утворювала з додатними півосями координат трикутник найбільшої площі.
3. На сторінці книги друкований текст має займати S см^2. Верхнє і нижнє поля мають бути по b см, а праве і ліве — по a см. Якщо брати до уваги лише економію паперу, то якими мають бути оптимальні розміри сторінки?
4. Вікно має форму прямокутника, який завершується півкругом. Периметр дорівнює P. Якими мають бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільше світла?
5. Картина, висота якої 1,4 м, висить на стіні так, що її нижній край знаходиться на 1,8 м вище від ока спостерігача. На якій відстані від стіни має стати спостерігач, щоб його положення було найкращим для огляду картини?
6. Визначити відношення висоти конуса до радіуса основи за умови, що його бічна поверхня найменша, а об'єм заданий.
7. У даний конус вписати циліндр найбільшого об'єму.

2.3. ДЕЯКІ ЗНАМЕНИТІ ЗАДАЧІ, РОЗВ'ЯЗАНІ СУЧАСНИКАМИ

Одного разу Альберта Ейнштейна запитали: «Як робляться відкриття?» Ейнштейн відповів: «А так: усі знають, що ось це неможливо зробити. І раптом з'являється хтось, хто не знає, що це неможливо. Він і робить відкриття».

З народних переказів

Доведення – це ідол, якому математики приносять себе в жертву

Артур Еддінгтон

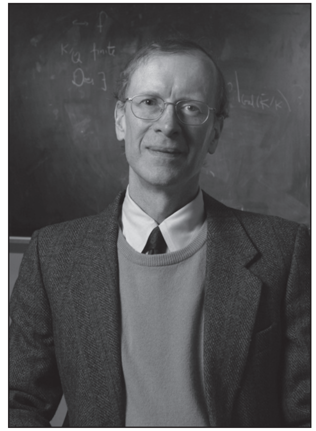
2.3.1. Велика теорема Ферма

П'єр Ферма (1601 – 1665)
Зробив великий внесок у розвиток аналітичної геометрії, теорії чисел, математичного аналізу, теорії ймовірностей

Важко знайти більш знамените і більш легендарне математичне твердження, ніж Велика теорема Ферма. Ця головоломка, зміст якої цілком зрозумілий будь-якому школяреві, простотою формулювання вводила в оману, приковувала до себе увагу математиків усього світу протягом понад три з половиною століття. Її історія починається з 1637 року, коли видатний французький математик П'єр Ферма, який, однак, не був професійним математиком (за фахом він юрист), заявив, що «ніякий степінь цілого числа, якщо він більший від квадрата, не можна записати у вигляді суми двох таких же степенів цілих чисел». Інакше кажучи, рівняння

$$x^n + y^n = z^n$$

не має цілих ненульових розв'язків при $n > 2$. Цей висновок, який пізніше дістав назву Великої (або останньої) теореми Ферма, він записав на полях «Арифметики» Діофанта. І, наче дражнячи нащадків хибними сподіваннями на простоту доведення, тут же залишив їм коротке повідомлення, що знає доведення цього твердження, але не наводить його через те, що на полях для нього занадто мало місця. Так почався марафон пошуку доведення, який тривав майже 360 років. Перед теоремою спасували такі загальновизнані велетні думки, як Карл Ґаусс, Леонард Ейлер, Андріен Марі Лежандр, Петер Густав Лежен Діріхле. Остаточна крапка у вирішенні проблеми була поставлена у 1995 році. Її автор — англійський і американський математик, професор Прістонського університету (США) Ендрю Вайлс.



Ендрю Джон Вайлс
(*Andrew John Wiles*)
Народився 1953 року в Кембриджі (Великобританія); з 1982 р. проживає в США; професор математики Прістонського університету (США); лауреат премії Вольфа (1996)

Сенсаційне доведення Великої теореми Ферма вивело математику на перші шпальти найавторитетніших національних газет усього світу. Повна перипетій, красива і драматична, багато в чому повчальна історія цього відкриття заслуговує того, щоб хоча б побіжно, у загальних рисах розглянути основні її віхи.

Очевидно, що при $n = 2$ задача зводиться до відшукання так званих піфагорових трикутників, тобто прямокутних трикутників із цілочисельними сторонами, оскільки рівність $x^2 + y^2 = z^2$ виражає зміст теореми Піфагора, відомої уже понад два тисячоліття. Очевидно, що рівняння має цілочисельні розв'язки, наприклад, (3, 4, 5) або (7, 24, 25) чи (8, 15, 17). Піфагорійці віднайшли метод відшукання таких розв'язків і довели, що їх безліч.

А що ж буде, коли рівняння Піфагора трохи змінити? Математики списували стоси паперу, намагаючись віднайти хоча б одну трійку натуральних чисел, яка задовольняє рівнянню $x^3 + y^3 = z^3$, але всі зусилля були марними.

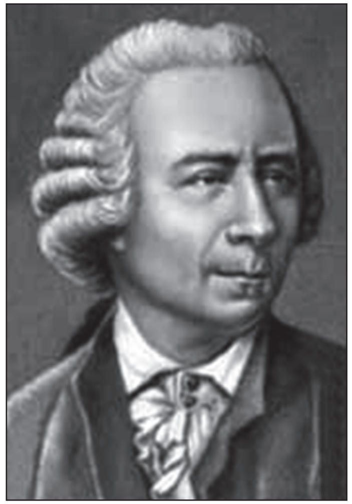
Великому математикові XVIII ат. Леонардові Ейлеру, в 1753 р., майже через 100 років після смерті П'єра Ферма, вдалося зробити перший результативний крок і довести, що зазначене рівняння третього степеня цілочисельних ненульових розв'язків не має. Зазначимо, що для $n = 4$ теорему довів сам П'єр Ферма, і це доведення містилося «на полях» того ж примірника Діофантової «Арифметики» як частина розв'язання зовсім іншої задачі. Незважаючи на відсутність деяких важливих деталей у коротких записах Ферма, в них добре простежувалася ідея методу доведення, який називається методом нескінченного спуску, і Ейлер легко «реставрував» повний ланцюжок міркувань.

Щоб довести, що рівняння $x^4 + y^4 = z^4$ не має цілочисельних розв'язків, Ферма припустив протилежне, що такий (гіпотетичний) розв'язок є: $x = X_1, y = Y_1, z = Z_1$, де X_1, Y_1, Z_1 – натуральні числа. Аналізуючи цю трійку, він показав, що якби розв'язок (X_1, Y_1, Z_1) справді існував, то тоді обов'язково існував би розв'язок (X_2, Y_2, Z_2), де $X_2 < X_1, Y_2 < Y_1, Z_2 < Z_1$. Розглядаючи цей новий розв'язок, зміг довести, що тоді існує ще менший розв'язок (X_3, Y_3, Z_3) і т.д. Тобто Ферма виявив цілу спадну послідовність розв'язків, але це неможливо, бо найменше натуральне число — 1 і тому «спуск» на певному кроці мусить закінчитися, з чого випливає, що розв'язків не може бути безліч. Отже, припущення про те, що рівняння четвертого степеня має цілочисельні розв'язки неправильне і, таким чином, для випадку $n = 4$ теорема доведена.

Ейлер, використовуючи запропонований Ферма метод нескінченного спуску і залучаючи комплексні числа, довів теорему для $n = 3$.

Однак і через сто років після смерті вченого Велика теорема Ферма була доведена лише для цих двох часткових випадків. Після результату Ейлера не було жодного поступу у розв'язанні проблеми. До початку XIX ст. за нею закріпилася репутація найскладнішої проблеми в теорії чисел. Доки сенсаційна заява однієї юної француженки не вдихнула нові надії.

Мова — про Софі Жермен, яка зробила для доведення Великої теореми Ферма більше, ніж усі її попередники-чоловіки. Але, як не парадоксально, вимушена була працювати в інтелектуальній конспірації і ховати своє авторство за чоловічим іменем. Справа в тому, що Софі Жермен випало жити в часи, коли суспільство упереджено, дискримінаційно ставилося до жінок, коли панував стереотип, що заняття математикою – не жіноча справа, бо непосильне для розумових здібностей жінки. Щоб здобути університетську математичну освіту, Софі довелося вступити на заочну форму навчання до Політехнічної школи у Парижі (куди приймали лише чоловіків) під виглядом колишнього студента Антуана Огюста Леблана, який на той час у Парижі уже не проживав.



Леонард Ейлер (1707 – 1783) – видатний швейцарський математик та фізик, який більшу частину свого життя провів у Німеччині та Росії

Софі Жермен (1776 – 1831) – французький математик, філософ і механік; внесла вагомий вклад у диференціальну геометрію, теорію чисел і механіку

Адміністрація навчального закладу надсилала на адресу Софі конспекти, методичні матеріали, завдання, призначені для Леблана, а Софі щотижня відправляла в університет свої розв'язки під псевдонімом. Викладачі, отримуючи блискуче виконані домашні завдання месьє Леблана, були здивовані такими успіхами слабкого колись студента. І Жозеф Луї Лагранж, який у той час викладав у Політехнічній школі, запросив Леблана на очну зустріч. Професор був вражений, коли замість Леблана на зустріч прийшла красива дівчина. Предметна розмова з нею не розчарувала Лаґранжа, і з тих пір Софі Жермен мала в особі великого вченого надійного друга і мудрого наставника. Це додавало їй упевненості у своїх силах, і незабаром Софі перейшла від навчальних задач до вивчення ще недосліджених математичних проблем. Зацікавила її й Велика теорема Ферма.

У результаті кількох років роботи над теоремою Софі Жермен досягла певних успіхів. Вона, на відміну від своїх попередників, досліджувала задачу не для окремих значень n, а знайшла деякі загальні підходи до цілого класу рівнянь $x^n + y^n = z^n$, а саме, якщо n — просте число, таке, що $2n + 1$ — також просте (такими є, наприклад, прості числа 3, 5, бо $2 \times 3 + 1 = 7$ та $2 \times 5 + 1 = 11$ — прості числа). Свої результати вона виклала у листі до найбільшого фахівця в теорії чисел, самого Карла Ґаусса, підписавшись псевдонімом все того ж Леблана. Гаус високо оцінив роботу і у листі-відповіді писав: «Я захоплений тим, що арифметика знайшла у Вашій особі такого талановитого друга»[53].

Результати Софі Жермен могли бути назавжди помилково приписані Антуану Огюсту Леблану, якби не відомий випадок. У 1806 р. Наполеон захопив Прусію, і французька армія штурмувала німецькі міста. Хвилюючись за долю Карла Ґаусса, Жермен звернулася до свого друга, командуючого військами, генерала Жозефа Марі Пернеті з проханням потурбуватися про безпеку вченого. Генерал вжив необхідних заходів і сказав математикові, що той зобов'язаний своїм життям мадемуазель Жермен. Ґаусс подякував, але був здивований, бо ніколи не чув про таку. Софі Жермен довелося у черговому листі відкрити Ґауссу своє справжнє ім'я.

Нових кроків до мети Жермен зробити не вдалося, і в 1809 р. вона покинула заняття чистою математикою та теоремою Ферма, спрямувавши свої зусилля на дослідження в галузі фізики, де також досягла чималих успіхів.

У 1825 р. метод Софі Жермен успішно застосували Густав Діріхле та Адрієн Марі Лежандр, які, незалежно один від одного, довели теорему для $n = 5$.

Петер Густав Лежен Діріхле
(1805 – 1859) —
німецький математик; основні результати стосуються математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, теорії чисел

Адрієн-Марі Лежандр
(1752 – 1833) —
французький математик; основні наукові результати отримав у теорії чисел та математичному аналізі

[53] Цит. за кн.: Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Москва: МЦНМО, 2000. – С. 108.

Через 14 років французький математик Габріель Ламе, удосконаливши метод Софі Жермен, довів Велику теорему Ферма для $n = 7$.

Після прогресу, досягнутого завдяки роботам Софі Жермен, Французька Академія наук установила серію премій, серед яких Золота медаль і 3000 франків, тому математику, який зуміє розгадати таємницю Великої теореми Ферма.

Нарешті, 1 березня 1847 року Академія зібралася на одне з найдраматичніших своїх засідань. Той самий Габріель Ламе, який сім років тому довів теорему для рівняння сьомого степеня, повідомив поважному зібранню найвідоміших математиків XIX ст., що він знайшов доведення Великої теореми Ферма й для загального випадку та виклав його ідею. Він також запевнив, що деякі незначні прогалини в обґрунтуванні будуть ліквідовані в найкоротший час і повне доведення найближчими тижнями буде опубліковане в журналі, який видає Академія.

Аудиторія завмерла від захоплення. І тут слова попросив Огюстен Луї Коші. Він вийшов за кафедру і, звертаючись до членів Академії, заявив, що він давно працює над Великою теоремою Ферма, виходячи приблизно з тих же ідей, що й Ламе, знайшов її доведення і найближчим часом має намір його опублікувати.

Габріель Ламе (1795 – 1870) — французький математик, фізик, інженер; в 1820 – 1832 рр. працював у Росії

Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) — видатний французький математик, відомий своїми визначними результатами у різних галузях математики; його ім'я внесено до списку ста найбільших учених Франції, який міститься на першому поверсі Ейфелевої вежі

Обидва математики усвідомлювали, що тепер вирішальне значення має лише час: хто перший представить повне доведення? Через три тижні обидва математики подали до Академії у закритих конвертах письмовий виклад своїх міркувань. У Працях Академії вийшли публікації, в яких Ламе та Коші розкривали деякі деталі своїх доведень.

Інтрига наростала. І розв'язалася вона неочікуваним способом. Німецький математик Ернст Куммер, визнаний фахівець в галузі чистої математики, листом повідомив Академію, що ознайомився з публікаціями фрагментів обидвох доведень і визнає їх помилковими. Причина помилки у наступному. Обидва доведення спираються на принцип єдиності розкладу натурального числа на прості множники[54], доведений ще Евклідом. Але в доведеннях використовуються комплексні числа, а в множині комплексних чисел єдиність розкладу на множники порушується. Наприклад,

$$6 = 2\times 3 \;\text{ і }\; 6 = \left(1 - i\sqrt{5}\right)\left(1 + i\sqrt{5}\right).$$

Куммер усе ж відзначив, що при певній модифікації використаного методу з його допомогою можна довести теорему для всіх $n < 100$.

Ернст Едуард Куммер (1810 – 1893) — німецький математик; найвизначніші наукові результати отримав в алгебрі і теорії чисел

Але нищівний удар Куммера по надіях математиків полягав в іншому. Він обґрунтував, що довести Велику теорему Ферма в загальному вигляді (одразу для всіх n) відомими на поточний момент математичними методами неможливо. Це означало, що повне доведення Великої теореми Ферма лежало за межами можливостей тогочасної математики. Що ж до премії Французької Академії наук, то вона дісталася саме Ернсту Куммеру.

Після робіт Ернста Куммера надії відгадати загадку, яку залишив П'єр Ферма, ослабли, як ніколи раніше. Реанімувати процес пошуку вдалося Паулю Вольфскелю — німецькому промисловцю і математику, швидше любителю, ніж професіоналу. Легенда донесла до нас романтичну

[54] Мова йде про так звану основну теорему арифметики: «Будь-яке натуральне число, відмінне від одиниці, може бути єдиним способом записане у вигляді добутку простих множників». Наприклад, 36 = 2 × 2 × 3 × 3.

історію, згідно з якою події розгорталися так. Пауль Вольфскель, член родини, яка славилася своїм багатством і меценатством, в університеті вивчав математику. І хоча присвятив життя розбудові імперії сімейного бізнесу, все ж заняття математикою не полишав і деякі зв'язки з професійними математиками підтримував. Починається історія з того, що Пауль пристрасно закохався в одну молоду даму, яка не відповідала йому взаємністю. Через це нерозділене кохання молодий Пауль вирішив піти із життя. Він чітко спланував своє самогубство: визначив дату смерті і вирішив, що вистрелить собі в голову при першому ударі годинника рівно опівночі. Привів до ладу усі свої справи, а в останній день склав заповіт і написав прощальні листи рідним та друзям. Коли все було зроблено, до опівночі ще залишалося кілька годин. Пауль пішов у бібліотеку і став гортати математичні журнали. В одному з них натрапив на статтю Куммера, в якій математик обґрунтовував своє твердження про неможливість існуючими на той час математичними засобами довести Велику теорему Ферма.

Пауль Вольфскель (1856 – 1906) — німецький промисловець і меценат; засновник премії свого імені за доведення Великої теореми Ферма

Оскільки сам Пауль також робив спроби довести теорему, він став зацікавлено читати статтю Куммера. Йому здалося, що він помітив у доведенні слабке місце. Це його зацікавило, і він вирішив перевірити, чи справді у міркуваннях Куммера є помилка (тоді для Великої теореми Ферма все ж зберігався шанс бути доведеною старими методами). Пауль узявся детально «пройтися доведенням», заповнивши усі прогалини. Коли він закінчив роботу, – надворі був уже ранок. Поганою новиною для математиків закінчилися зусилля Пауля — виявлені недоліки у доведенні вдалося усунути і переконатися, що Куммер таки має рацію і, таким чином, Велика теорема Ферма, як і раніше, залишалася неприступною. Але була й добра новина — час, визначений для самогубства минув, а сам Пауль отримав від роботи такий заряд бадьорості й оптимізму, що передумав помирати. Він знищив усі прощальні листи, написані напередодні, і змінив заповіт. Винагороду в 100 тис. марок, згідно із заповітом

Пауля Вольфскеля, мав отримати перший, хто доведе знамениту теорему. Термін виконання заповіту — 101 рік після його смерті.

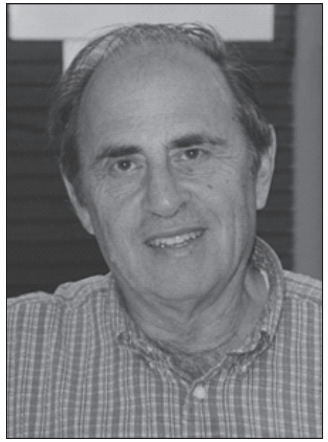
Коли після смерті Пауля Вольфскеля його заповіт був оприлюднений, він не мав великого впливу на досвідчених професіоналів-математиків, оскільки вони, знаючи усю історію пошуків, не дуже вірили, що Велику теорему Ферма вдасться колись довести і не хотіли витрачати час на безнадійну справу. Однак стимул добре спрацював стосовно нової аудиторії молодих математиків, які прагнули випробувати свої сили при розв'язанні неприступної головоломки.

На адресу Королівського математичного товариства в Ґьоттінгені (Німеччина) посипалися тисячі листів із доведеннями Великої теореми Ферма. Вони переправлялися відомому математику, визнаному фахівцю з теорії чисел Едмунду Ландау, який на той час був деканом математичного факультету Ґьоттінгенського університету. Переважна більшість авторів були ентузіастами-любителями, які не мали достатньої математичної підготовки для розв'язання такої складної проблеми. Однак усі «доведення» доводилося ретельно вивчати і давати відповідь їхнім авторам. Робити це доручали ассистентам та аспірантам. Щоб хоч трохи полегшити роботу, було видрукувано бланки листів-відповідей із стандартним текстом: «*Шановний (а) _____. Дякую Вам за надісланий рукопис із доведенням Великої теореми Ферма. Перша помилка міститься на с.___ у рядку____. Через неї все доведення втрачає силу. Професор Е. Ландау*».

Ажіотаж, переважно серед математиків-любителів, навколо Великої теореми Ферма був настільки великим, що листи з її «доведеннями» надходили також до редакцій різних видань та на математичні кафедри університетів по усьому світу. Разом із тим, математики-професіонали зосередилися на глибшому вивченні фундаментальних питань у своїх галузях та теорії чисел, щоб зрозуміти, які проблеми можуть бути розв'язані, а які — ні.

У 1931 р. Курт Ґьодель доводить знамениту теорему неповноти, спрощена суть якої полягає в тому, що в математиці є істинні твердження, довести які неможливо (так звані нерозв'язні чи відкриті проблеми).

Пол Коен у 1963 р. розробив метод, який, в окремих випадках, дозволяє перевірити розв'язність тієї чи іншої проблеми. Саме йому вдалося довести нерозв'язність гіпотези континууму, про що йшлося у попередньому параграфі.



Пол Джозеф Коен (1934 – 2007) — американський математик; в 1966 р. нагороджений медаллю Філдса

Курт Фрідріх Ґьодель (1906 – 1978) — австрійський логік, математик і філософ математики

Роботи Ґьоделя і Коена відобразилися й на пошуках доведення Великої теореми Ферма. Можливо, вона належить до нерозв'язних проблем і ми шукаємо те, чого не існує? Якби вдалося це довести, то звідси одразу ж випливала б істинність теореми. Справді, для доведення її хибності (якщо припустити, що вона хибна) спосіб є — досить навести хоча б один приклад. Тобто хибність Великої теореми Ферма суперечить її нерозв'язності. Однак не вдавалося ані знайти доведення, ані довести, що зробити це неможливо.

Із винайденням комп'ютерів почалася комп'ютерна атака на Велику теорему Ферма. З допомогою, нових технологій удалося перевірити її істинність для $n \le 4000000$. Але для математиків такий успіх мав лише косметичний характер і не розв'язував проблему по суті, бо ніяке число прикладів, що підтверджують гіпотезу, не може розцінюватися доведенням її істинності для всіх випадків, якщо таких безліч. Наведемо лише один промовистий приклад. Протягом двох століть ні вручну, ні з допомогою комп'ютера не вдавалося спростувати гіпотезу Ейлера, який, подібно Ферма, припустив, що рівняння $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ не має цілих ненульових розв'язків. А в 1988 р. Наум Елкіс із Гарвардського університету не тільки знайшов такий розв'язок:

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 187\,960^4 = 20\,615\,673^4,$$

а й довів, що їх безліч.

Нарешті, ми підійшли у нашій розповіді до вирішальної події у житті Великої теореми Ферма.

У 1975 р. Ендрю Вайлс вступив до аспірантури Кембріджського університету. І хоча Ендрю останні роки інтенсивно працював над пошуками доведення Великої теореми Ферма, оскільки довести її мріяв ще з дитинства, як тільки вперше десятирічним школярем прочитав про неї, тепер він усвідомлював, що займатися цією проблемою зараз не може, що, вступивши в ряди професіоналів-математиків, має бути більш прагматичним. Його науковим керівником був Джон Коутс. Він запропонував Вайлсу займатися сучасним напрямом в математичній науці, так званою теорією еліптичних кривих (рівнянь виду $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, де a, b, c — числа), яка на той час бурхливо розвивалася. Як пізніше з'ясувалося, ця пропозиція Джона Коутса зіграла вирішальну роль у долі Ендрю Вайлса. Отримані наукові результати у зазначеній галузі озброїли його саме тими методами, які допомогли довести Велику теорему Ферма.

Дослідження еліптичних кривих неодмінно було пов'язане з математичними об'єктами зовсім іншими за своєю природою, так званими модулярними формами (комплексно-значна функція комплексної змінної). Справа в тому, що в 1955 р. молодий математик Токійського університету Ютака Таніяма висловив гіпотезу про те, що кожна еліптична крива модулярна, тобто кожному еліптичному рівнянню відповідає модулярна форма. Гіпотеза викликала великий інтерес, бо прокладала місток між математичними об'єктами різної природи (еліптична крива двовимірна, модулярна форма – чотиривимірна), а, отже, й між різними математичними теоріями. Вона уможливила розв'язання й багатьох проблем в теорії еліптичних функцій, які доти не вдавалося вирішити.

Після трагічної загибелі Таніями у 1958 р. його друг і колега Ґоро Шимура намагався довести гіпотезу і знайшов численні приклади на її підтвердження. У математичну літературу гіпотеза увійшла під іменем Таніями-Шимури.

Здогадка японських математиків ставала все популярнішою. Було встановлено, що з гіпотези Таніями-Шимури випливають багато фундаментальних математичних фактів і методів. Математики вибудували цілі теорії із припущення, що гіпотеза Таніями-Шимури правильна. І вся ця велика математична споруда ризикувала розсипатися в одну мить, якби виявилося, що гіпотеза хибна. Однак довести чи спростувати гіпотезу Таніями-Шимури виявилося непросто і проблема ніяк не піддавалася розв'язанню.

У 1984 р. німецький математик Ґерхард Фрей установив, що Велика теорема Ферма є наслідком гіпотези Таніями-Шимури. Так несподівано виявився зв'язок арифметичної задачі XVII ст. з абстрактною математичною проблемою XX ст.

Схематично хід міркувань Ґ. Фрея виглядав так. Фрей припустив, що рівняння Ферма $x^n + y^n = z^n$ має ненульовий цілий розвязок (A, B, C) при деякому $n = N > 2$. Складними перетвореннями звів це рівняння до вигляду

$$y^2 = x^3 + \left(A^N - B^N\right)x^2 - A^N B^N .$$

Ця еліптична крива (Фрея), не має відповідної їй модулярної форми (факт немодулярності кривої Фрея строго довели у 1986 р. Кен Рібет та Баррі Мазур). А це суперечить гіпотезі Таніями-Шимури, яка стверджує, що кожна еліптична крива модулярна. Отже, припущення про те, що рівняння Ферма має цілі розв'язки при $n > 2$, неправильне.

Результат Фрея–Рібета–Мазура буквально окрилив Ендрю Вайлса. Він чітко побачив шлях до здійснення своєї дитячої мрії. Залишалося довести гіпотезу Таніями-Шимури. Завершивши роботу над дисертацією в Кембріджі, він переїхав до США і став професором Прістонського університету. Ендрю Вайлс знав про еліптичні криві та модулярні форми більше за будь-кого, однак, як справжній учений, розумів, що це ще не гарантує йому успіху. Адже багато вчених математиків, серед них і його науковий керівник Джон Коутс, уже 30 років безуспішно атакували гіпотезу Таніями-Шимури. Тому роботу над доведенням гіпотези японських математиків, а отже й Великої теореми Ферма ретельно приховував.

Проаналізувавши спроби своїх попередників довести гіпотезу Таніями-Шимура, Ендрю Вайлс обрав принципово інші ідеї, а методом доведення – математичну індукцію. Перший крок індукції йому вдалося зробити лише через три роки. І для цього довелось опанувати теорію груп Ґалуа[55].

Тепер учений шукав метод, який дозволив би йому зробити й другий крок індукції. Однак через два роки наполегливих пошуків, він прийшов до висновку, що усі відомі йому методи у даній ситуації безпорадні. Вайлс почав шукати нові інструменти. Він сподівався, що модифікувавши відомий йому ще з аспірантських часів метод аналізу еліптичних кривих японського математика Івасави, можна

[55] **Еваріст Ґалуа** (1811 – 1832) — видатний французький математик, засновник сучасної вищої алгебри; загинув на дуелі.

успішно застосувати до своєї задачі. Але й тут зазнав невдачі. За порадою Дж. Коутса Ендрю Вайлс вивчає новий потужний метод аналізу еліптичних рівнянь, що носив назву Коливагіна[56)]–Флаха. І відчуває — це саме те, що треба, що модифікувавши й узагальнивши цей метод, проблему вдасться розв'язати. Через кілька місяців гіпотеза Таніями-Шимура була доведена.

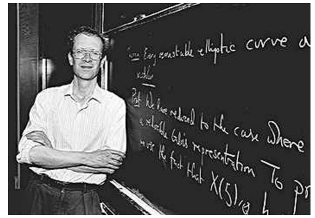
Однак, Ендрю Вайлс не став поспішати. Він вирішив піддати експертизі ті частини доведення, де він використовував ним же узагальнений метод Коливагіна–Флаха, оскільки не вважав, що володіє методом досконало. На роль такого експерта Вайлс обрав свого колегу по університету професора Ніка Катца. Для того, щоб Нік Катц міг зрозуміти суть справи та розібратися у зазначеній частині доведення, йому необхідний був цілий курс лекцій. А щоб ніхто не здогадався, над чим так зосереджено працюють два професори, вдалися до хитрого маневру. Ендрю Вайлс об'явив спецкурс для аспірантів під назвою «Обчислення, пов'язані з еліптичними кривими», і Нік Катц відвідував лекції разом з аспірантами (уже через кілька тижнів він залишився єдиним слухачем, бо технічно складні обчислення і перетворення аспірантів не зацікавили). Прослухавши курс, Кац підтвердив, що метод працює бездоганно. Це було на початку 1993 р.

Сім років напруженої роботи нарешті принесли очікуваний результат. Ендрю Вайлс вирішив, що настав час оприлюднити своє відкриття. Для цього він обрав конференцію з теорії чисел, яка мала проводитися в Кембриджі у червні. Заявлена тема серії лекцій «Модулярні форми, еліптичні криві і представлення Ґалуа», як і тема Прістонського спецкурсу, прочитаного для Ніка Катца, не віщувала сенсації, Вайлс зберігав конспірацію до самого кінця. Однак після першої ж лекції, що відбулася 21 червня в Кембриджському інституті Ісаака Ньютона, у публіки виникли цілком певні підозри і поповзли чутки. Колишній аспірант Вайлса професор Карл Рубін повідомляв своєму колезі з Америки: «Вайлс прочитав сьогодні свою першу лекцію. Він не оголосив про доведення гіпотези Таніями-Шимури, але рухається в цьому напрямі і попереду в нього ще дві лекції».

І ось 23 червня 1993 р. Ендрю Вайлс розпочав свою третю, останню лекцію. До того часу чутки про ймовірне відкриття поширилися

[56] **Віктор Олександрович Коливагін** (н. 19__ р.) — російський математик, який у 80-і роки відкрив так звані ейлерівські системи, що використовуються, зокрема, при дослідженні еліптичних кривих; емігрував до США.

настільки, що в залі зібралися всі математики Кембриджа. Слухачі стояли навіть у коридорі. «У нас справді було відчуття, що ми присутні на історичній події», – згадує Джон Коутс. «Мені ніколи не доводилося слухати такої чудової доповіді, повної блискучих ідей, з таким драматичним сюжетом і в такому блискучому виконанні. Кожен черговий крок необхідно випливав із попереднього»[57)]. В залі запанувала тиша. Доповідач, насамкінець, записав на дошці формулювання Великої теореми Ферма і, повернувшись до аудиторії, промовив: «Думаю, на цьому мені слід зупинитися». Після невеликої паузи зал вибухнув аплодисментами.



Ендрю Вайлс під час доповіді 23 червня 1993 р.

Сенсаційна новина про те, що Велика теорема Ферма доведена, миттєво облетіла світ. Бригади телевізійників і наукових оглядачів газет висадили десант в Інститут Ньютона. Однак тріумфальний виступ на конференції ще не був фінальним акордом, як би переконливо він не виглядав. Математичне співтовариство з нетерпінням чекало результатів експертизи повного тексту доведення, яку мали здійснити авторитетні фахівці.

Вайлс надіслав рукопис із повним доведенням (200 сторінок) до редакції журналу «Inventiones Mathematicae», і його редактор Баррі Мазур залучив до рецензування не двох–трьох, як зазвичай, а шістьох рецензентів. Серед них був і Нік Катц, якому випало рецензувати саме ту частину доведення, з якою він уже знайомився в Прістоні. Рецензенти ретельно, рядок за рядком вивчали доведення з метою переконатися, що помилок у ньому нема. Коли рецензенти заходили у глухий кут, вони просили Ендрю Вайлса пояснити, звідки береться той чи інший висновок, співвідношення тощо. На всі запитання Вайлс відповідав вичерпно й одразу, непорозуміння з'ясовувалися і робота просувалася далі.

Наприкінці серпня Нік Катц у черговий раз помітив у доведенні одну проблему, про яку написав Вайлсу. На цей раз відповідь його не задовольнила. Він повторив своє запитання. Наполегливість Катца змусила Ендрю звернути прискіпливішу увагу на суть проблеми. І тут наступив найдраматичніший для Ендрю Вайлса поворот. Він помітив свою помилку, але найгіршим було те, що це була фундаментальна помилка у вирішальній частині доведення. Суть її по-

[57)] Цит. за кн.: Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Москва: МЦНМО, 2000. – С. 230.

лягала в тому, що Вайлс неправомірно застосував підсилений ним же метод Коливагіна-Флаха. Виявлена помилка не означала, що доведення уже неможливо врятувати, але зрозумілим було одне — Вайлс має ліквідувати цю суттєву прогалину.

Ендрю Вайлс з усіх сил кинувся на боротьбу з помилкою, яка загрожувала зруйнувати все. Але пройшло півроку, а всі зусилля позитивного результату не дали. Рецензентам усе важче ставало зберігати таємницю, поповзли чутки, що в доведенні Вайлса виявлена непоправна помилка. Ендрю Вайлс був у відчаї і вже готовий був публічно визнати, що помилився.

За порадою колеги і друга Пітера Сарнака, він робить останню спробу. Але тепер не один. Вайлс запрошує до себе в Прістон для сумісної роботи вченого з Кембриджського університету, колишнього свого аспіранта Річарда Тейлора, який був одним із рецензентів рукопису. Знову ретельний аналіз застосованого методу, причин, чому він не працює, розгляд альтернативних підходів… Так пройшло ще сім місяців, а усунути помилку не вдавалося.

Розв'язання проблеми прийшло несподівано. «У понеділок, 19 вересня, — згадує Ендрю Вайлс, — я зранку сидів у себе в кабінеті, вивчаючи метод Коливагіна–Флаха. Я не сподівався на те, що мені вдасться змусити його запрацювати, але хотів принаймні з'ясувати, чому цей метод не спрацьовує. Я розумів, що чіпляюся за соломинку, але хотів до кінця розібратися у причинах своєї невдачі. Раптом, абсолютно несподівано, мене осінила ідея. Я зрозумів, що, хоч метод Коливагіна–Флаха не працював на повну силу, у ньому є все, що необхідно, для застосування теорії Івасави, на яку я спирався спочатку. Мені стало ясно, що від методу Коливагіна–Флаха я можу взяти все необхідне для того, щоб зробити ефективним мій початковий підхід трирічної давнини. Так із руїн і попелу методу Коливагіна–Флаха виникло правильне вирішення проблеми… Розв'язок був несказанно красивий, такий простий і витончений. Я ніяк не міг збагнути, чому він раніше не приходив мені в голову»[58].

Виправлений варіант доведення був переданий на перевірку і через рік, у 1995 р., було оголошено, що воно бездоганне.

Свою перемогу над такою неприступною і примхливою «жінкою», як Велика теорема Ферма, що цілком заполонила розум і серце вченого на довгих вісім років, він подарував чотирьом іншим, найдорожчим своїм жінкам. Саме їм, дружині Наді, доне-

[58] Цит. за кн.: Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Москва: МЦНМО, 2000. – С. 250.

чкам Клер, Кейт, Олівії, присвячена знаменита фінальна стаття Ендрю Вайлса «Модулярні еліптичні криві і Остання теорема Ферма» в центральному математичному журналі «Аннали математики» («Annals of Mathematics»), де публікують найвагоміші математичні результати.

Таким чином, наприкінці XX ст., майже у 360-літній епопеї Великої теореми Ферма, що насправді весь цей час була гіпотезою, поставлена крапка. Поставив цю крапку Ендрю Вайлс і цим самим навічно вписав своє ім'я в Історію. Однак, безперечно, це була колективна перемога. Її наближали й багато його попередників та сучасників, а Вайлсу лише випала щаслива доля блискуче завершити справу. Значення цієї перемоги не тільки і не стільки чисто спортивне, що черговий раз доводить торжество людського генію. Змагаючись із Великою теоремою Ферма, математики отримали багато фундаментальних, цікавих і цінних результатів, пов'язаних з іншими складними математичними задачами.

Повертаючись на початок нашої історії, задамо собі запитання: «Чи справді П'єр Ферма довів теорему»?. Ясна річ, що у XVII ст. не було і бути не могло того арсеналу засобів, яким користувалися математики XX ст. Версія, що Ферма довів теорему, користуючись лише наявним на той час інструментарієм, на думку більшості математиків, малоймовірна. Залишається припустити, що доведення П'єра Ферма, якщо таке існувало, містило помилку. Але сам математик її не помітив. Або ж — Ферма геніально вгадав.

2.3.2. Десята проблема Гільберта: діофантові рівняння

Ця проблема, як і Велика теорема Ферма, також пов'язана з теорією чисел. Ще давньогрецький математик Діофант (III ст. н. е.) намагався дати відповідь на запитання, чи має алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами цілі розв'язки. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = z^2$, як ми вже знаємо, має безліч цілочисельних розв'язків (наслідок із теореми Піфагора), а рівняння $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ цілочисельних розв'язків, крім нульового, не має (Велика теорема Ферма).

Одна із проблем (десята), озвучена Давидом Гільбертом на Другому Всесвітньому конгресі математиків у 1900 р. має назву задачі про розв'язність будь-якого діофантового рівняння.

Що таке діофантове рівняння?

Це рівняння виду

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

де $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — багаточлен від n змінних із цілими коефіцієнтами, допустимі значення змінних – множина цілих чисел.

У чому ж така заслуга Діофанта, що рівняння зазначеного класу стали називати його іменем? Адже цілі раціональні рівняння розв'язували й до нього. Справа в тому, що Діофант першим здійснив поворот від «геометричної» до «буквеної» алгебри, запропонувавши розв'язувати рівняння алгебраїчними методами. До нього використовувалася лише геометрія: усі задачі на доведення, знаходження невідомих величин розв'язували з допомогою геометричних побудов.

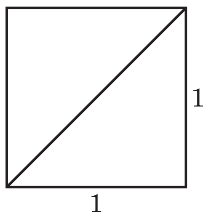


Рис. 5

Наприклад, треба розв'язати рівняння $x^2 = 2$. Будуємо квадрат зі стороною 1 лін. од. (рис. 5). Довжина діагоналі цього квадрата — додатний розв'язок рівняння. Як ми знаємо, він не є раціональним ($\sqrt{2}$). До речі, саме цей факт похитнув позиції геометрії і навіть викликав паніку у давньогрецьких математиків (про це детальніше йтиметься у курсах дисциплін: математичний аналіз, теорія чисел, числові системи).

І, нарешті, що таке десята проблема Гільберта? У чому її суть?

Задача полягає у наступному. Дано довільне діофантове рівняння з довільним числом невідомих і довільними цілими коефіцієнтами. Треба вказати загальний метод, який дозволяє за скінченне число кроків дізнатися, чи має рівняння цілочисельні розв'язки.

Від III ст., коли жив Діофант, до 1900 р., коли Гільберт озвучив задачу про розв'язність діофантового рівняння, пройшло понад шістнадцять століть. Чому ж математики за стільки часу не розв'язали проблему?

Слід сказати, що математики часу не гаяли. Вони винайшли безліч різних методів і специфічних прийомів для розв'язання багатьох діофантових рівнянь, а також установили нерозв'язність багатьох інших діофантових рівнянь. Гільберт же закликає покінчити з «різноманітністю методів», коли для окремого класу рівнянь, а то й для одного окремого рівняння треба шукати свій, специфічний метод.

Десята проблема Гільберта – це, кажучи сучасною термінологією, масова проблема і, до речі, з усіх двадцяти трьох – вона єдина масова проблема. Що таке *масова проблема (чи масова задача)*?

Масова проблема (задача) утворюється внаслідок сумісного розгляду серії однотипних окремих задач. Наприклад, задача про множення довільних натуральних чисел чи задача знаходження коренів будь-якого квадратного рівняння — масові задачі. Окремою задачею про множення є, наприклад, вимога знайти добуток чисел 327 і 7540. Її розв'язком є число 24 525. Вимога розв'язати квадратне рівняння $5x^2 + 3x - 2 = 0$ — також окрема задача. Її розв'язком є корені рівняння: $x_1 = -1, x_2 = \dfrac{2}{5}$.

Розв'язати масову задачу (проблему) — означає знайти не число чи якийсь інший конкретний об'єкт, а метод, процедуру, користуючись якими можна розв'язати кожну окрему задачу цієї серії. Розв'язками наведених вище двох масових задач є алгоритм множення натуральних чисел та формула коренів квадратного рівняння, відповідно. Результат множення чисел 327 і 7540 ми змогли назвати не тому, що знали його напам'ять, а тому, що вміли множити «в стовпчик» і зробили це. Аналогічно, корені квадратного рівняння не «дістали» з пам'яті чи вгадали, а знайшли за відомою формулою коренів $\left(x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$ квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

Десята проблема Гільберта полягає в тому, що для кожного діофантового рівняння із зчисленної[59] їхньої множини потрібно вміти дати однозначну відповідь: «так» (має розв'язок) чи «ні» (розв'язку не має). Тобто треба мати універсальний інструмент (процедуру, алгоритм), який дозволить тестувати будь-яке діофантове рівняння і безпомилково встановити «діагноз» («так» або «ні»). Треба, крім того, бути впевненому в надійності такого інструмента, знати, що він ніколи не помилиться.

На сьогодні відомо, що такого універсального інструмента (методу, алгоритму) нема, тобто десята проблема Гільберта має негативний розв'язок. І його нема не тому, що не зуміли поки що винайти, а тому, що його бути не може.

Чому ж до кінця XIX ст. задача про розв'язність діофантових рівнянь залишалася невирішеною і Гільберт поставив її математикам

[59] Зчисленна множина — це така нескінченна множина, всі елементи якої можна занумерувати. Тобто, у зчисленній множині елементів «стільки» ж, «скільки» всіх натуральних чисел. У п. 2.1 ми довели, що раціональних чисел «стільки» ж, «скільки» й натуральних, отже, множина раціональних чисел зчисленна. Переконайтеся, що множина усіх діофантових рівнянь зчисленна, занумерувавши їх.

XX ст.? Десята проблема Гільберта – це масова задача і вона є проблемою інформатики, а інформатики на той час ще не існувало.

У 1970 році російський математик Ю.В. Матіясевич, спираючись на результати досліджень Мартіна Девіса, Гіларі Патнем, Джулії Робінсон, довів, що такого способу, на жаль, немає.

Не будемо вникати в математичні деталі процесу розв'язання проблеми, оскільки це не є предметом нашої навчальної дисципліни і, крім того, потребує спеціальних знань окремих розділів математики, з якими читач ще не знайомий. Зупинимося лише на хронології та загальній ідеї доведення.

Отже, хронологічний процес дослідження і розв'язання десятої проблеми Гільберта наступний:

— ***початок 50-их років***. Гіпотеза Мартіна Девіса;

— ***початок 60-их років***. Частковий прогрес, якого досягли Мартін Девіс, Гіларі Патнум, Джулія Робінсон;

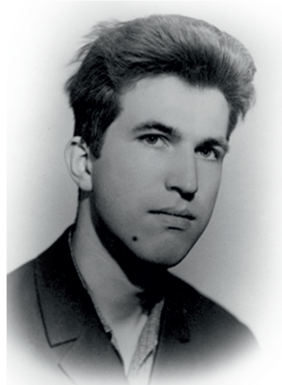
— ***1970 рік***. Останній крок. Ю. В. Матіясевич доводить, що не існує алгоритму, за яким можна будь-яке діофантове рівняння перевірити на наявність розв'язків.

Що означає довести подібне? У чому принцип такого доведення? Ю.В. Матіясевич розповідає про такий випадок[60]. Через кілька днів після однієї зі своїх лекцій про десяту проблему Гільберта і негативне її розв'язання, він отримав електронного листа. Писав студент, який слухав ту лекцію: «Шановний професоре. Ви помиляєтеся. Я — чудовий програміст і минулої ночі написав програму, яка про кожне діофантове рівняння, подане на вхід, видає висновок: «1», якщо воно має розвязок і «0» – у протилежному випадку. Програму додаю. Можете перевірити її на своїх улюблених діофантових рівняннях і переконатися, як швидко вона працює».

І справді, що робити у подібній ситуації? Є програма, не обов'язково цього конкретного студента, назвемо її — програма (умовного) студента (*S*). Подаємо на вхід діофантове рівняння (*M* = 0), на виході отримуємо відповідь.

$$M = 0 \rightarrow \boxed{S} \rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

[60] http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=3578&option_lang=rus



Юрій Володимирович Матіясевич (нар. 1947 р.) — російський математик, доктор фізико-математичних наук, академік Російської АН

Зліва направо: **Мартін Девіс, Джулія Робінсон, Юрій Матіясевич** (Калгарі, 1982 р.)

Припустимо, що програма працює безперервно місяць, два і жодного разу не помилилася. Чи означає це, що вона і є шуканим інструментом? Ні, звичайно. Адже діофантових рівнянь безліч і випробувати її бездоганність, послідовним перебором усіх рівнянь практично неможливо жодному комп'ютеру. Єдиний вихід довести неспроможність програми – контрприклад. Тобто, треба написати іншу програму, назвемо її програмою професора (*P*), яка б, отримавши на вході програму *S*, дала на виході діофантове рівняння ($M_S = 0$), таке, що при тестуванні його програмою *S* отримаємо наперед помилкову відповідь. А саме, якщо діофантове рівняння $M_S = 0$ має розв'язки, то програма *S* дасть відповідь – «0», а якщо ж воно розв'язків не має, то, навпаки, – «1».

$$S \rightarrow \boxed{P} \rightarrow M_s = 0 \rightarrow \boxed{S} \rightarrow \text{помилка}$$

Ю.В. Матіясевич показав, що для будь-якої програми *S* можна знайти, за допомогою програми *P*, рівняння $M_S = 0$, на якому програма *S* дасть збій, тобто помилиться.

Отже, припустимо, що ми вміємо для кожної програми *S* скласти програму *P*, яка конструює потрібне рівняння $M_S = 0$. Але, знову ж, ми не можемо бути впевненими, що досконалої програми *S* немає, оскільки не можемо в такий спосіб перевірити усі гіпотетично можливі програми. Тобто, слід довести, що, яка б не була програма *S* (існуюча в даний момент чи можлива у майбутньому), для неї знайдеться діофантове рівняння $M_S = 0$, на якому вона помилиться. Доведенням цього факту Ю.В. Матіясевич поставив останню крапку у розв'язанні десятої проблеми Гільберта. Було тоді математику лише 23 роки!

Як і у випадку доведення Великої теореми Ферма, математичний апарат, розвинутий для розв'язання десятої проблеми Гільберта, дозволив отримати ще чимало цікавих результатів. Наприклад, побудувати багаточлен з цілими коефіцієнтами, множина всіх додатних значень якого при цілочисельних значеннях змінних є множиною всіх простих чисел.

2.3.3. Проблема чотирьох фарб

Проблема чотирьох фарб – математична задача, що почала свою історію в середині XIX ст. Англієць Френсіс Ґутрі, розфарбовуючи якось карту графств Британії, використав 4 кольори (рис. 6). Йому стало цікаво, яку мінімальну кількість фарб необхідно взяти, щоб розфарбувати ними будь-яку карту так, щоб ніякі дві сусідні (які мають спільну ділянку межі) області не були зафарбовані одним кольором. Очевидно, що трьох фарб для цього замало. Розфарбувати, дотримуючись указаного принципу, наприклад, «карту», зображену на рис. 7, трьома фарбами не вдасться, треба мати чотири. Але чи достатньо чотирьох фарб для будь-якої іншої карти? Сам Ґутрі не зміг розв'язати головоломку. А оскільки він не був професійним математиком, то звернувся із запитанням

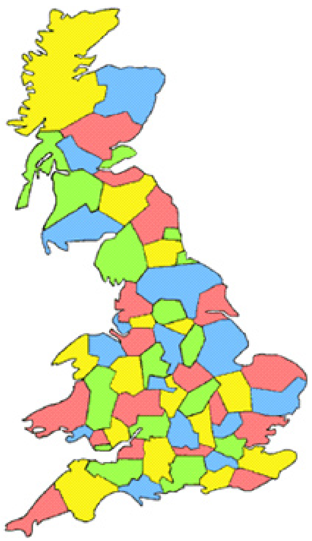


Рис. 6. Чотириколірна карта графств Британії

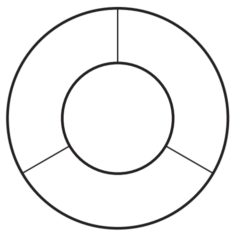


Рис. 7. Кожна із чотирьох областей має спільну межу з трьома іншими

до брата Фредеріка, який студіював математику в Університетському коледжі Лондона, сподіваючись на відповідь. Було це в 1852 р.

Фредерік, у свою чергу, розповів про задачу своєму професору, Августу де Моргану[61)], який у листі до свого друга – видатного ірландського математика і фізика Вільяма Гамільтона[62)] писав: «Мій студент попросив мене пояснити одну задачу, яка не була мені раніше відома і пояснення якій я не знайшов. Він стверджує, що, якщо будь-яку фігуру розбити будь-яким способом на частини і розфарбувати їх різними кольорами так, щоб частини, які мають спільну лінію межі, були зафарбовані різними кольорами, то для цього досить буде взяти фарби чотирьох кольорів. Мені відомі приклади, коли треба використати чотири фарби. Питання: чи можна придумати приклад, коли треба пять або більше кольорів? Якщо Ви наведете приклад, який покаже, наскільки я тупий, то, думаю, мені слід буде вчинити, як Сфінксу[63)]».

Гамільтону не вдалося придумати карту, для розфарбування якої необхідно було би п'ять кольорів, але він не зумів також довести, що такої карти не існує. Звістка про проблему чотирьох фарб швидко розповсюдилася, проблема зацікавила математиків в усьому світі. Однак, незважаючи на те, що задача здавалася простою, жодного прогресу в її розв'язанні не було протягом чверті століття.

Перша надія на успіх з'явилася в 1879 р. Британський математик Альфред Брей Кемпе (1849 – 1922) в одному з американських математичних журналів опублікував статтю, в якій навів доведення гіпотези Гатрі. Він стверджував, що для розфарбування будь-якої карти потрібно щонайбільше чотири кольори. Проведена перевірка доведення підтвердила його правильність.

Однак, через 11 років, у 1890 р. англійський математик Персі Джон Гівуд (1861 – 1955) знайшов таки принципову помилку у доведенні Кемпе. Гіпотеза виявилася не доведеною. Але була й добра

[61)] **Август де Морган** (1806 – 1871) — шотландський математик і логік; з його іменем повязані відомі співвідношення — теоретико-множинні співвідношення (закони де Моргана)

[62] **Вільям Ровен Гамільтон** (1806 – 1865) — визначний ірландський математик, відомий своїм внеском в алгебру, теорію диференціальних рівнянь, фізику, астрономію.

[63] Сфінкс – міфічна істота з головою жінки, тулубом і лапами лева, крилами орла і хвостом бика. У грецькій міфології – Сфінкс сидів на скелі біля входу у грецьке місто Фіви і кожному, хто туди входив, задавав одну й ту ж загадку: «Хто вранці ходить на чотирьох, опівдні – на двох, а увечері – на трьох»? Чимало людей загинуло в лапах істоти, не зумівши знайти відгадку. Після того, як Едіп відгадав загадку Сфінкса (людина: немовля повзає на чотирьох, пізніше людина ходить на двох, а в старості ходить з паличкою), чудовисько з досади кинулося вниз і розбилося об скелі.

новина. Гівуду вдалося довести, що максимальна кількість кольорів, потрібних для того, щоб розфарбувати будь-яку карту, не перевищує п'яти.

Ще одним позитивним результатом обох досліджень було те, що вони добре прислужилися розвитку нової математичної галузі — топології.

То все таки: чотири чи п'ять? До 1970 р. математикам удалося лише частково розв'язати проблему. Поступово збільшуючи число n областей, справедливість гіпотези про чотири фарби була встановлена для $n < 40$. Здавалося, проблема чотирьох фарб повторює історію Великої теореми Ферма.

І ось у 1976 р. два математики з Іллінойського університету (США) Вольфґанґ Гакен (Wolfgang Haken) і Кеннет Аппель (Kenneth Appel), застосувавши принципово новий метод, заявили, що довели теорему, суть якої наступна: «Для того, щоб будь-яку географічну карту розфарбувати так, аби кожні дві сусідні області були різного кольору, досить мати чотири фарби». Цим самим проблема чотирьох фарб розв'язана остаточно. У чому полягав метод?

Гакен і Аппель математично звели задачу до набору скінченного числа карт (за різними варіантами доведення від 1400 до 1900) із скінченним числом областей у кожній із них. Кожну із цих карт, з точки зору традиційної математики, слід було б розфарбовувати вручну. Але, зрозуміло, що, враховуючи різні варіанти комбінування фарб для кожної карти, ця задача непосильна жодному колективу людей. Гакен і Аппель застосували комп'ютер. Через п'ять років роботи, починаючи з 1970 р., вони помітили, що комп'ютер самостійно генерує нові ідеї. Машина стала пропонувати стратегії і видавати комбінації, розумніші, ніж передбачали самі автори програми.

Кеннет Аппель і **Вофґанґ Гакен** за роботою (1970 р.)

У червні 1976 р., Гакен і Аппель заявили, що вони перевірили усі можливі варіанти карт, витративши 1200 годин машинного часу, і на розфарбовування жодної з них не було використано більше, ніж чотири кольори. Проблема чотирьох фарб Ґатрі, нарешті, була вирішена.

За наступні роки кількість варіантів, достатніх для перевірки, вдалося зменшити майже до 600. А в 2004 р. краще із відомих доведень разом із комп'ютерною програмою перебору вдалося повністю формалізувати і перевірити та підтвердити його коректність (!) з допомогою універсальної програми Coq.

Проблема чотирьох фарб стала першою серйозною математичною задачею на доведення, яку розв'язали з допомогою комп'ютера. Чи задовольняє таке доведення математиків? Частина з них прохолодно і насторожено сприйняла відкриття. Наведемо приклади його оцінки з точки зору двох критеріїв: краси і довіри.

Математик Філіп Девіс так описує свої відчуття, коли дізнався, що проблема чотирьох фарб розв'язана: «Моєю першою реакцією було «Приголомшливо! Як їм удалося розв'язати цю проблему?!». Я чекав якоїсь блискучої нової ідеї, краса якої перевернула б усе моє життя. Але коли я почув відповідь: «Вони розв'язали проблему, перебравши тисячі випадків і пропустивши всі варіанти один за одним через комп'ютер», — мене охопив глибокий сум. Я подумав: «Отже, усе зводилося до простого перебору, і проблема чотирьох фарб зовсім не заслуговувала називатися хорошою проблемою»[64].

Тепер щодо довіри. Чи можна вважати твердження правильним, якщо переконатися у його правильності «на власні очі» нема можливості. Звідки взяти повноту аргументації, якщо вона від нас прихована? Адже перевірити комп'ютерне розв'язання традиційним способом, вивчаючи правомірність кожного кроку, неможливо. Ми задаємо запитання — комп'ютер видає відповідь. Але обґрунтування відповіді залишається для нас незрозумілим. Відомий американський математик Рональд Ґрехем так висловився про подібну ситуацію: «Я був би дуже розчарований, якби можна було підключитися до комп'ютера, запитати в нього, чи правильна гіпотеза Рімана, й отримати відповідь: «Так, правильна, але Ви не зможете зрозуміти чому»[65].

Кожен математик, і ви — наш читачу, також, маєте право на власну оцінку переваг і недоліків обох шляхів розв'язання складних проблем: «ручного» та «машинного». Частково опонуючи думці про те, що комп'ютерне розв'язання не може викликати довіри через те, що «доведення нам не зрозуміле», зазначимо лише, що доведення Великої

[64] Цит. за кн.: Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Москва: МЦНМО, 2000. – С. 273.

[65] Цит. за кн.: Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Москва: МЦНМО, 2000. – С. 272.

теореми Ферма, наприклад, можуть повністю зрозуміти, у кращому випадку, 10% фахівців з теорії чисел, але це не заважає усім нам не сумніватися, що воно правильне. Принаймні, сьогодні не можна не рахуватися з тим, що складність багатьох математичних проблем перевищує людські можливості. Питання в тому, як і яку математику може «робити» комп'ютер. І над цим потрібно думати.

2.3.4. Гіпотеза Пуанкаре

Жюль Анрі Пуанкаре (1854 – 1912) — видатний французький математик, фізик, астроном і філософ

Серед семи проблем третього тисячоліття першою і поки що єдиною розв'язаною проблемою є гіпотеза Пуанкаре. Офіційною датою її розв'язання вважається 2006-й рік, коли, після всіх фахових експертиз, доведення російського математика Григорі Яковича Перельмана було визнано правильним. Дослідження Г.Я. Перельмана стало найвизначнішою науковою подією 2006 року, а сам автор – найрозумнішою людиною планети. Йому була присуджена найпрестижніша нагорода — Філдсівська медаль, яку називають Нобелівською премією в галузі математики, і премія «Мілленіум» Інституту Клея розміром 1 млн. доларів США. Новина про те, що гіпотеза Пуанкаре доведена, викликала справжній ажіотаж у засобах масової інформації, очолила рейтинги найбільш обговорюваних подій в Інтернеті. У розряд сенсаційних подію вивело ще й те, що автор відкриття, Г.Я. Перельман, відмовився від нагороди і мільйона доларів.

То хто ж такий Пуанкаре? І в чому суть його гіпотези?

Прізвище цього видатного математика ми вже згадували у зв'язку з аналізом механізмів математичної творчості. Однак Анрі Пуанкаре успішно працював у різних галузях науки: комплексному аналізі, небесній механіці, алгебраїчній геометрії, теорії чисел, фізиці світла тощо. Французький математик першим, задовго до Альберта Ейнштейна, сформулював принцип відносності, увів поняття чотиривимірного простору–часу. Анрі Пуанкаре справедливо вважають засновником топології, в якій він отримав багато значних наукових результатів і в якій 1904 року сформулював гіпотезу, що носить його ім'я.

Гіпотеза Пуанкаре полягає в тому, що кожна однозв'язна тривимірна поверхня гомеоморфна тривимірній сфері. Щоб зрозуміти суть цього твердження, достатньо деяких інтуїтивно-наївних уявлень про топологію та її предмет, які, припускаємо, читач отримав із популярної літератури для школярів на тему топології. Тому нехай читач вибачить нас за те, що, можливо, розповідатимемо відомі речі, і все ж, за прикладом авторів подібних видань, популярно пояснимо зміст понять, присутніх у формулюванні гіпотези Пуанкаре.

Уявімо собі, що фігури, виготовлені із міцного еластичного матеріалу, який легко піддається деформаціям, але не ламається і не рветься. Тоді, деформуючи (стискуючи, розтягуючи, згинаючи, але не розриваючи і не склеюючи), наприклад, кубик, можна з нього отримати м'ячик чи стакан, а бублик перетворити, скажімо, на чашку, в якої є вушко з діркою (див. зображення[66]). Думаємо, що читач легко уявив собі ці перетворення і може їх повторити, працюючи із пластиліном. Перетворення (деформація) фігури, при якому не порушується її цілісність і нічого не склеюється, топологи називають гомеоморфізмом, а дві фігури, одну з яких можна перетворити в іншу (і навпаки) з допомогою гомеоморфізму – гомеоморфними. Наприклад, сфера гомеоморфна поверхні куба, але не гомеоморфна поверхні тора (бублика).

З точки зору топології гомеоморфні фігури однакові. Для топології важливі лише ті властивості фігури, які не змінюються при гомеоморфізмі. Такі властивості називають топологічними властивостями, або інваріантами. Топологічним інваріантом є, наприклад, кількість «дірок» (кубик і м'ячик дірок не мають, а бублик і чашка мають одну дірку). Топологія займається вивченням топологічних властивостей (інваріантів) фігур, на відміну від геометрії, яка вивчає форму і розміри фігур. Тому топологію образно називають гумовою геометрією.

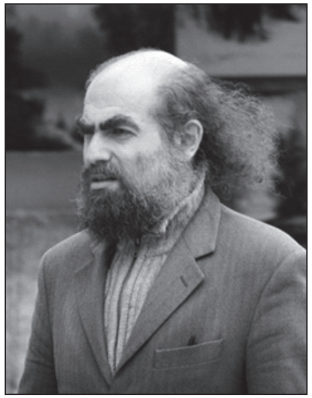
Обмежимося уявленнями про поверхню, які читач має зі школи. Скажемо лише, що зміст його буде уточнюватися в різних дисциплінах вищої математики. Виходитимемо з того, що читач добре уявляє собі сферу (поверхню кулі), поверхні циліндра, призми тощо. Це все — двовимірні поверхні у тривимірному просторі. Лінія на площині (пряма, коло, парабола тощо) — одновимірна. Тривимірна «поверхня» у чоти-

[66] http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Mug_and_Torus_morph.gif

ривимірному просторі — це абстракція, що є узагальненням одновимірних (у двовимірному просторі) та двовимірних (у тривимірному просторі) об'єктів. Геометрично уявити їх неможливо.

І, нарешті, поняття однозв'язності. Поверхню називають однозв'язною, якщо будь-яку замкнену криву на ній можна неперервною деформацією стягнути в точку так, щоб при цьому крива увесь час залишалася на поверхні. Площина, сфера – однозв'язні поверхні, поверхня тора – не однозв'язна (меридіан чи паралель в точку не стягуються).

Якби гіпотезу Пуанкаре сформулювати для тривимірного простору і двовимірних поверхонь у ньому, то вона мала б такий геометричний зміст: «будь-яку однозв'язну поверхню можна неперервно деформувати у сферу або, що те саме, будь-яку фігуру без дірок можна деформувати в кулю». У правильності такого твердження ніхто б не сумнівався. Пуанкаре припустив, що так само буде і для тривимірних поверхонь у чотиривимірному просторі. Григорій Перельман довів, що це справді так.



Григорій Якович Перельман (нар. 1966 р.) — видатний російський математик, довів гіпотезу Пуанкаре

Історія доведення гіпотези Пуанкаре нагадує історію доведення Великої теореми Ферма. Як і Ендрю Вайлс, геній-самітник Григорій Перельман на довгих сім років практично перестав публікуватися і, взагалі, нічим про себе не нагадував. Ніхто не знав, над чим він працює. І раптом, як грім серед ясного неба, — доведення одного, більш загального геометричного факту, із якого безпосередньо випливає гіпотеза Пуанкаре.

Хто такий Григорій Перельман? Народився і виріс у Ленінграді (тепер Санкт-Петербург). Ріс математично обдарованою дитиною. Його незвичайність виявляла себе з раннього дитинства. Уже в шестирічному віці любив класичну музику. Закінчив знамениту 239-у школу з поглибленим вивченням математики, випускниками якої були багато відомих учених, зокрема, Юрій Матіясевич, автор розв'язання десятої проблеми Гільберта. В 1982 р. у складі збірної команди Радянського Союзу брав участь у 23-ій Міжнародній математичній олімпіаді в Будапешті і став там абсолютним переможцем із фантастичним особистим результатом — 42 бали із 42 можливих. Закінчив математико-механічний факультет Ленінградського університету. Закінчив аспірантуру і працював у Санкт-Петербурзькому відділенні Математичного інституту імені В.О. Стеклова Російської академії наук. Там же в 1992 р. захистив кандидатську дисертацію.

Перебуваючи на стажуванні в США, познайомився особисто з Річардом Гамільтоном і слухав його лекції. Написав кілька оригінальних статей і отримав пропозиції щодо роботи від кількох провідних університетів США. Але не прийняв жодної і повернувся до Санкт-Петербурґа в інститут, в якому працював. З того часу зосередився над гіпотезою Пуанкаре.

Річард Гамільтон (нар. 1943 р.) — американський математик, професор математики Колумбійського університету; коло наукових інтересів: диференціальна геометрія, топологія

Доведення Григорія Перельмана ґрунтується на ідеях, розвинутих на початку 80-их років минулого століття Річардом Гамільтоном, який отримав важливі топологічні висновки із фактів, що стосуються диференціальних рівнянь, а саме, так званих потоків Річчі.

Як і у випадку з Великою теоремою Ферма, гіпотеза Пуанкаре знала чимало помилкових доведень. Однак вони також принесли багато користі. У процесі пошуку і виправлення помилок було винайдено нові методи, значно розвинуто теорію, зокрема, й топологію малих розмірностей. Виявилося, що у багатовимірному випадку усе значно простіше. Наприклад, уже в 50-і – 60-і роки минулого століття твердження, аналогічні до гіпотези Пуанкаре, були доведені для вищих розмірностей. Тривимірний випадок продовжував залишатися твердим горішком.

У вересні 2002 р. Григорій Якович Перельман завершив доведення гіпотези Пуанкаре і розмістив своє доведення в Інтернеті на сайті архіву попередніх робіт Лос-Аламоської наукової лабораторії. Через кілька місяців учений розіслав текст доведення спеціалістам, які також працювали над гіпотезою, зокрема Гамільтону. Зазначимо, що Перельман порушував існуючий порядок подачі претендентами своїх доведень, який передбачає надсилання тексту доведення до редакції математичного журналу і лише після висновку експертної комісії, яку призначає редакція, воно може бути опубліковане.

Незвичним був і сам текст доведення. Він був гранично стислий, конспективний, містив багато скорочень. Пройшло чотири роки, поки доведення Перельмана ретельно вивчили провідні фахівці світу і зробили його детальне пояснення. Досить сказати, що, якщо надіслана робота Григорія Перельмана містилася на 60 сторінках, то її «роз'яснення» у вигляді книги двох математиків, американця Джона Морґана і китайця Тяня Ґана, займають 473 сторінки.

Джон Морґан, математик із Колумбійського університету, так згадує роботу над доведенням Перельмана: «Я багато разів, читаючи Перельмана, ловив себе на думці, що не розумію жодного слова. Я йшов додому і думав над цим. Якщо не розумів, то розмовляв із Гамільтоном, іншими математиками. Коли ж, нарешті, я розумів, що це значить — через години, дні, іноді тижні — я запитував себе: «О'кей, якщо мені треба пояснити ці основні тези в одному параграфі, як я це зроблю?». Так повторювалося знову і знову. Я жодного разу не знайшов параграфа, який Перельман виклав інакше, ніж як неймовірно стислий опис аргументів»[67). Доводилося звертатися за роз'ясненнями й до Григорія Перельмана. — Я зустрічався з ним, коли він приїжджав 2003 року до Америки, щоб пояснити свої ідеї. Після того як він повернувся до Росії, я листувався з ним електронною поштою, намагаючись зрозуміти його роботу. Він завжди був дуже привітний і терплячий, пояснюючи свої ідеї[68)], — говорить Джон Морґан. Однак Морґан не шкодував свого часу на доведення Перельмана з трьох, як він вважає, причин: «Перша — я сам тополог, і тому хотів зрозуміти розв'язання найфундаментальнішої проблеми топології. Як же цей хлопець зробив це? Друга — коли я почав розуміти аргументи, я дедалі більше переймався красою доведення. І третя — я хотів принести користь математичній спільноті, я хотів, щоб топологи змогли зрозуміти таке прекрасне доведення»[69)].

У серпні 2006 р. на Міжнародному математичному конгресі, що проходив у Мадриді, король Іспанії Хуан Карлос в урочистій обстановці вручав медалі Філдса найдостойнішим. Усього лауреатів було четверо. Серед них — Григорій Перельман. Проте, російський математик, на відміну від інших лауреатів, на церемонію вручення не з'явився.

[67)] Цит. за статтею: Валентина Гаташ. На математичному Евересті вирують пристрасті// «Дзеркало тижня», №42, 4 листопада 2006 року.

[68)] Там же.

[69)] Там же.

Нікому достеменно не відомі мотиви такого вчинку (сам учений з Математичного інституту звільнився, контактів із колегами майже не підтримує, а пресу ігнорує), але найпоширеніші дві версії. Найвищою нагородою для вченого є саме розв'язання проблеми, а не премії, – вважає Григорій Перельман. Крім того, називає рішення світового математичного співтовариства несправедливим, оскільки, на думку Перельмана, внесок Гамільтона у доведення гіпотези Пуанкаре, анітрохи не менший, ніж його.

Гіпотезу Пуанкаре називали «Формулою Всесвіту» через її винятково важливе значення для вивчення складних фізичних процесів у теорії світобудови. Тепер ця формула, завдяки Григорію Перельману, доведена.

Завдання для самостійної роботи

Дайте відповіді на наступні запитання:

1. Що стверджує Велика теорема Ферма? Хто і коли її сформулював?
2. Які основні віхи в історії Великої теореми Ферма?
3. Хто і коли поставив, можливо, останню крапку в історії доведення Великої теореми Ферма?
4. Що найбільше захоплює Вас в історії Великої теореми Ферма?
5. Які риси характеру Ендрю Вайлса Вам імпонують?
6. У чому, на Вашу думку, значення Великої теореми Ферма?
7. У чому суть десятої проблеми Гільберта? Що пов'язує цю проблему з іменем Давида Гільберта?
8. Хто і коли розв'язав десяту проблему Гільберта? У чому полягала ідея доведення?
9. Що таке проблема чотирьох фарб?
10. Хто і як розв'язав проблему чотирьох фарб? Коли це було? Як Ви оцінюєте спосіб, яким була розв'язана проблема чотирьох фарб?
11. Хто такий Анрі Пуанкаре? У чому суть гіпотези Пуанкаре? Коли вона була сформульована?
12. Хто і коли довів гіпотезу Пуанкаре?
13. У чому схожість історій доведення Великої теореми Ферма та гіпотези Пуанкаре?
14. Хто такий Григорій Перельман? Як Ви оцінюєте відмову Григорія Перельмана від медалі Філдса?

2.4. ВИДАТНІ УКРАЇНСЬКІ МАТЕМАТИКИ, ЇХНІЙ ВНЕСОК У МАТЕМАТИЧНУ НАУКУ ТА МАТЕМАТИЧНУ ОСВІТУ

Наука захоплює нас тільки тоді, коли, зацікавившись життям великих дослідників, ми починаємо стежити за історією їхніх відкриттів .

Джеймс Максвелл

Кожен період історії математики мав своїх видатних учених. По різному складалися їхні долі. Одні зажили слави і безсмертя ще за життя, іншим судилося пройти складні шляхи і розділити трагічну долю свого народу або своїм генієм підносити на світовий рівень науковий авторитет інших держав і народів.

Щедра талантами українська земля подарувала людству не тільки чудових співаків, композиторів, художників, письменників, а й визначних математиків. Обмежений обсяг параграфа не дозволяє розповісти про всіх українських математиків, детально розглянути їхні наукові доробки. Ми сподіваємося, що пропоновані короткі розповіді про деяких із них, які зробили значний внесок у світову науку, спонукатиме читача до ширшого знайомства із життєвим та творчим шляхом українських учених-математиків, сприятиме розвитку інтересу до математики, плекатиме найкращі патріотичні почуття.

Михайло Васильович Остроградський (1801 – 1862)

Михайло Васильович Остроградський

Михайлу Остроградському належить одне з найпочесніших місць в історії світової математичної науки. Непересічний талант, сміливий і гострий розум, висока математична ерудиція, знання сучасного природознавства дозволили Михайлу Васильовичу зробити першорядні відкриття в багатьох галузях математики і механіки.

Народився Михайло Остроградський 24 вересня 1801 року в селі Пашенна Кобеляцького повіту на Полтавщині. Тут пройшли його дитячі та шкільні роки. Він походив із відомого українського козацько-старшинського роду і завжди цим пишався.

Уже в дитинстві був дуже спостережливим і захоплювався різними вимірюваннями — його цікавила глибина кожного колодязя, розміри кожної ями. Коли Михайлові виповнилося 8 років, батько віддав його до Полтавської гімназії. Але хлопчик жвавої та веселої вдачі, звиклий до роздольного життя у рідному селі, особливою старанністю не відзначався. Незважаючи на очевидні здібності, науками він не захопився і мріяв лише про те, щоб стати військовим. До речі, для цього він мав усе необхідне — богатирську зовнішність, міцне здоров'я, вміння оперативно оцінювати ситуацію. Однак після певних вагань батько все-таки везе сина до Харкова для підготовки і вступу до університету. І в 1816 р. юнак стає студентом.

Спочатку юний Остроградський вчився неохоче. Він не одразу відчув своє справжнє покликання. На його щастя, викладач математики А. Ф. Павловський, педагог з широкою ерудицією, захоплений своєю професією, помітив надзвичайні здібності юнака і зумів пробудити у ньому свідомий інтерес до науки. Поступово Остроградський починає вчитися з величезним захопленням і невдовзі вже дивує свого вчителя успіхами. Блискуче закінчивши у 1818 р. університет, Остроградський живе рік у батька. Та згодом, остаточно вирішивши присвятити себе математиці, знову повертається до Харкова для вдосконалення своїх знань у прикладній математиці та одержання ступеня кандидата. В цей час у країні посилюються переслідування прогресивних діячів, зокрема науковців. Активізується реакційне чиновництво і в Харківському університеті. Тому наміри Остроградського наштовхуються тут на опір. Йому закидають нехтування лекціями з філософії та богослов'я. І хоча в 1820 р. він добре склав усі необхідні екзамени і був відзначений серед найкращих, видачу йому кандидатського диплома затягували, вимагаючи складати все нові й нові іспити. Обурений таким ставленням до себе, юнак повертає до ректорату одержаний раніше атестат і просить викреслити назавжди його ім'я зі списків студентів.

Сталося це у 1822 р. Ця прикра історія анітрохи не пригасила в ньому любов до науки. Остроградський приймає сміливе рішення — їхати до Парижа, який був у той час центром наукових досліджень з тих проблем, що найбільше цікавили молодого математика.

Остроградський прожив у Парижі шість років (1822–1828). Там у цей час працювали такі титани науки, як П. С. Лаплас, С. Д. Пуассон, О. Л. Коші, Ж. Б. Фур'є. Навчаючись у них, М. В. Остроградський невдовзі і сам заявив про себе на повний голос. Талант і завзятість молодого вченого привернули увагу корифеїв. У 1826 р. він подає до Паризької Академії наук своє дослідження з поширення хвиль на поверхні рідини. Цими проблемами займалися і П. С. Лаплас, Ж. Д. Лагранж, С. Д. Пуассон, О. Л. Коші. Та Остроградський знайшов принципово новий підхід. Успіх молодого вченого став його значним внеском в гідродинаміку.

У 1828 р. М. В. Остроградський повертається в Росію уже відомим ученим. Він подає до Петербурзької Академії наук три праці, в одній із яких наводить оригінальне виведення центрального в теорії потенціалу рівняння Пуассона. В теорії теплоти вчений уперше формулює метод розв'язання задач математичної фізики, так званий метод Фур'є, який сам Фур'є застосовував лише в окремих випадках, доводить формулу, що пов'язує потрійний інтеграл з інтегралом по поверхні, яка тепер має назву «формула Остроградського–Гаусса», висуває ряд важливих проблем математичного аналізу, які стали об'єктом досліджень багатьох видатних математиків на ціле століття. Багато результатів, отриманих М. В. Остроградським, увійшли до університетських курсів різних математичних дисциплін, із якими читач ще познайомиться.

До Остроградського приходять слава і визнання. У 1831 р. його обирають академіком Петербурзької Академії наук, згодом він стає членом-кореспондентом Паризької Академії наук, дійсним членом ряду інших академій: Римської, Туринської, Американської, почесним членом Київського та Московського університетів та багатьох наукових товариств.

Діапазон наукової творчості Остроградського був надзвичайно широким. Учений займався аналітичною механікою, теорією удару, балістикою, варіаційним численням, алгеброю, теорією чисел, теорією ймовірностей тощо. Основоположник теорії гідро- та аеродинаміки М. Є. Жуковський писав, що роботи Остроградського з самої тільки механіки охоплюють собою майже всі питання, на вирішенні яких зосереджувались у той час думки видатних європейських математиків.

У Петербурзі повною мірою розкрився ще один визначний його талант — талант блискучого лектора і педагога. Від славетного Коші він успадкував лаконічність, легкість, витонченість викладу. Головну мету освіти М. В. Остроградський вбачав у тому, щоб пробудити здатність до самостійного мислення. Він намагався виховати у своїх учнях почуття гідності та впевненості у своїх силах. Великого значення надавав учений підвищенню ролі теоретичних знань в інженерній практиці, формуванню інженерної інтелігенції. Тому

не дивно, що він залишив після себе велику кількість талановитих учнів.

Авторитет і популярність М. В. Остроградського були такими, що вже саме його ім'я стало синонімом вченого. Батьки, відправляючи дітей вчитись, бажали їм «стати другим Остроградським».

Михайло Остроградський в усьому був людиною широкої натури, дотепним і товариським. Сучасники розповідали про нього багато веселих історій. Його цінували не тільки за великий розум, а й за скромність, щирість, простоту, за його повагу до людей праці, за людську гідність і принциповість.

Працюючи у Петербурзі, Михайло Васильович ніколи не втрачав зв'язків з рідною землею. Влітку майже щороку приїжджав в Україну і тут, у своєму маєтку, проводив відпустку. Він захоплювався українським співом, поезією народних свят, шанував народне слово. Маючи чудову пам'ять, знав багато віршів, добре декламував. Найбільше любив Тараса Шевченка. І коли їм довелося зустрітись, вони заприязнилися. Приятелював також із багатьма іншими представниками передової української інтелігенції того часу: І. Котляревським, П. Гулаком-Артемовським, М. Лисенком, М. Максимовичем та ін. За демократичні погляди, а найбільше через своє українське походження, патріотизм, якого ніколи не приховував, уважався «неблагонадійним», за ним був установлений постійний поліційний нагляд.

За свою майже 40-річну наукову діяльність Михайло Васильович написав близько 50 наукових творів, присвячених найрізноманітнішим розділам математики і механіки: диференціальному й інтегральному численню, вищій алгебрі, геометрії, теорії ймовірностей, теорії чисел, аналітичній механіці, математичній фізиці, балістиці тощо. Чимало наукових результатів Остроградського знаходять своє застосування сьогодні, в нових галузях; у сьогоднішніх досягненнях науки є й частка його праці.

Помер М. В. Остроградський раптово 1 січня 1862 у Полтаві по дорозі з Пашенної до Харкова на лікування. Похований у сімейному склепі у Пашенній.

ЮНЕСКО у 2001 р. внесла М. В. Остроградського до переліку видатних математиків світу. За рішенням цієї організації у 2001 р. міжнародна наукова громадськість відзначила 200-річчя з дня народження славетного українського математика.

У запропонованих нижче статтях, нарисах, біографічному романі цікаво, захоплююче розповідається про дитячі та юнацькі роки майбутнього вченого, його наукові відкриття та особистісні людські якості.

1. Бевз В. М.В. Остроградський – математик, механік, педагог // Математика в школі. — 2001. — № 4. — С. 66–69.
2. Галай Г., Гриневич Г. Михайло Васильович Остроградський // Галай Г. Гриневич Г. Учням про видатних математиків.– К., 1976. — С. 105–108.
3. Конфорович А., Сорока М. Остроградський: Біогр. роман.— К.: Молодь, 1980. — 213 с.: ілюстр. — (Сер. біогр. творів «Уславлені імена»; вип. 47).
4. Конфорович А.Г., Сорока М.О. До першокореня істини // Аксіоми для нащадків: Укр. імена у світовій науці. — Львів: «Меморіал», 1992. — С. 73–89.
5. Сита Г. Михайло Васильович Остроградський // У світі математики. — К., 1985. — Вип. 16. — С. 142–151.
6. Сита Г. Михайло Остроградський // У світі математики. — 2001. — Т. 7., Вип. 3.– С.89–93.

Ювілейна монета «Михайло Остроградський»

Номінал — 2 гривні; присвячена 200-річчю з дня народження видатного українського вченого-математика; в обігу — з 20 серпня 2001 року; виготовлена з нейзильберу; діаметр монети 31,0 мм, вага — 12,8 г, гурт — рифлений, тираж — 30 000 штук; автори: ескізів — Микола Кочубей, моделей — Володимир Атаманчук.

Георгій Феодосійович Вороний (1868 – 1908)

Георгій Феодосійович Вороний належить до когорти найвідоміших українських математиків минулого. Визнаний фахівцями як один із найяскравіших талантів у галузі теорії чисел, алгебри і геометрії на межі XIX–XX століть, Г.Ф. Вороний за своє коротке життя встиг надрукувати всього дванадцять статей. Але яких! Вони дали поштовх для розвитку кількох нових напрямків в аналітичній теорії

чисел, алгебраїчній теорії чисел, геометрії чисел, які нині активно розвиваються у багатьох країнах. Праці Георгія Вороного набули особливо великого значення за останні тридцять років. Це пов'язано з розвитком комп'ютерної графіки, молекулярної біології, радіаційної фізики, космології, творенням штучного інтелекту — галузей, яких за часів Вороного не існувало. Багатокутники, мозаїки та діаграми Вороного, названі на його честь, використовуються в інформатиці.

Георгій Феодосійович Вороний

Народився Г.Ф. Вороний 28 квітня 1868 року у с. Журавка на Полтавщині (тепер село — Варвинського району, Чернігівської області). Його дід замолоду чумакував, а потім, придбавши невелику ділянку землі над річкою Удай, займався сільським господарством. Батько закінчив Київський університет і здобув ступінь магістра філології. Георгій закінчив Прилуцьку гімназію 1885 року, де, як писалося в характеристиці, «здобув знання дуже добрі, а з математики, до якої має особливий нахил і покликання, здобув знання, що виділяються з ряду учнівських успіхів з математики».

Цього ж року в «Журналі елементарної математики», який видавав відомий математик і педагог, професор Київського університету В. П. Єрмаков, з'явилася перша публікація Георгія Вороного «Розкладання багаточленів на множники на основі властивостей коренів квадратного рівняння». А в серпні того ж року він приїхав до Петербурга, щоб вивчати в університеті улюблену математику. Північна столиця зустріла його не вельми привітно. Сподівання бути прийнятим на казенний кошт і звертання до ректора з таким проханням виявилися марними. Стипендію Георгій Вороний отримав лише на останньому курсі навчання. До того весь час тяжіла над ним матеріальна скрута. Грошей, що присилав батько, не вистачало, і тому на життя доводилося заробляти приватними уроками, які забирали багато сил і часу, відволікали майбутнього вченого від занять математикою.

Саме в роки навчання в університеті Вороний остаточно визначив своє майбутнє як ученого-математика. Його юнацька любов до цієї науки завдяки виключній внутрішній самодисципліні і наполегливій щоденній праці поступово перетворилась у непереборну пристрасть до пошуку нових математичних фактів, зміцнила його віру у свої творчі можливості. «Прокидаюсь я о 5-ій ранку і відразу берусь за Математику… Що за чудова наука! Хоч і дуже багато формул, але всі вони настільки симетричні, що легко запам'ятовуються… Я знаю, я твердо вірю, що на ґрунті вченої діяльності і тільки на ньому я знайду своє щастя… Я не поет, не знаю того натхнення, яке описують поети, але я знаю хвилини не самовдоволення, не гордості, – все це приходить потім, — а моменти, коли розум цілком охоплює ідею, яка раніше, наче м'ячик, вислизала. Тоді я забуваю, що я існую…». Цей запис у щоденнику Георгія Вороного датований 31 грудня 1888 року.

Восени 1889 р. Георгій Вороний блискуче склав випускні іспити і захистив кандидатську роботу (що тепер відповідає – дипломній), темою якої було дослідження про числа Бернуллі. У листопаді 1889 р. його залишили при університеті для підготовки до магістерських екзаменів на основі подання, підписаного усіма провідними професорами-математиками: А.А. Марковим, М.А. Коркіним, Ю.В. Сохоцьким, К.А. Поссе. Додатково було направлено клопотання факультету про стипендію для Г.Ф. Вороного — 600 рублів на рік, яке задовольнили у січні 1890 р. Одночасно він був призначений позаштатним учителем у Петергофській прогімназії.

Отже, Георгій щасливий. Він стає незалежним матеріально, йому не треба більше віднімати для себе частину невеликих коштів у батька, що його завжди дуже гнітило, і, нарешті, він, маючи можливість утримувати сім'ю, може одружитися з коханою Ольгою (Ольга Крицька із сусіднього з Журавкою села Богдани), що стала його вірною дружиною й другом усього життя.

«Моє майбутнє вже значною мірою визначилось… Мій теперішній науковий настрій — …наукові екскурсії до різних незнаних сфер… Жага до пошуків … розвинулась у мене неймовірно; я через силу випускаю перо з рук, втрачаю сон, коли мені здається, що зачепив щось…».

У квітні 1894 р. Георгій Вороний захистив магістерську дисертацію «Про цілі алгебраїчні числа, що залежать від кореня рівняння третього степеня» і отримав призначення до Варшавського університету, де і працював майже до кінця своїх днів.

До викладацької праці ставився дуже відповідально. В бібліотеці Інституту математики НАН України зберігається підручник з аналітичної геометрії, що містить лекції, які читав Г. Ф. Вороний своїм студентам. Вражає чіткий виклад кожної теми, зрозумілі означення, ретельні креслення, велика кількість прикладів, на яких пояснюються нові методи, досить широко подані формули сферичної тригонометрії, використання векторів та операцій над ними, що для підручника кінця XIX ст. було нововведенням.

У Варшаві вийшла у 1986 р. окремим виданням докторська дисертація Г.Ф. Вороного «Про одне узагальнення алгоритму неперервних дробів». Ця робота принесла йому визначний успіх і була відзначена премією імені В. Я. Буняковського, теж, до речі, уродженця української землі. Академік Д. О. Граве згадував: «Георгій Вороний — геніальний український математик. Він під час свого перебування в Петербурзькому університеті займався з гідним подиву успіхом кубічною областю і в цій області зробив геніальне відкриття. Він узагальнив на кубічну область алгоритм неперервних дробів, що дає алгебраїчні одиниці в квадратичній області. Це узагальнення марно шукали з часів Ейлера протягом XIX ст. усі найвидатніші математики».

У 1898 р. Московське математичне товариство обрало Георгія Вороного своїм членом. У серпні того ж року він брав участь у роботі X з'їзду російських природознавців і лікарів у Києві, де прочитав доповідь: «Про число коренів порівняння третього степеня при простому модулі». 1901 року на наступному XI з'їзді російських природознавців і лікарів у Петербурзі він виступив з трьома доповідями. В одній з них Вороний запропонував оригінальний метод узагальненого підсумовування розбіжних рядів. У 1907 р. Вороного було обрано членом-кореспондентом Петербурзької Академії наук.

Протягом багатьох років Г.Ф. Вороний працював над питаннями арифметичної теорії квадратичних форм. Він мав особливу звичку обмірковувати і тримати свої висновки в голові доти, доки вони остаточно не визріють і не набудуть належної їм досконалої форми. Надсилаючи роботу до редакції журналу, він зазначає: «Протягом дванадцяти років я вивчав властивості паралелоедрів. Я можу сказати, що це тернисте поле для досліджень і що одержані результати, викладені в цьому мемуарі, коштували мені дорого… Тримірні паралелоедри відіграють тепер важливу роль в теорії кристалічних тіл, і кристалографи вже звернули увагу на властивості цих дивних багатогранників, але до цього часу кристалографи вдовольнялись описом паралелоедрів із суто геометричної точки зору. Я вже давно помітив, що задача розбиття n-мірного аналітичного простору на опуклі конгруентні багатогранники тісно пов'язана з арифметичною теорією додатних квадратичних форм».

Ця робота – напевне, найвищий вияв його геніальних осяянь, — стала лебединою піснею вченого. Здоров'я Георгія Вороного погіршувалося. У листі до друга він пише: «Лікарі забороняють мені працювати. Та я й сам помітив, що сильна розумова напруга завжди викликає реакцію у моїй недузі. Але вони не знають, що означає для мене не займатися математикою. Лише моя дружина знає, що математика для мене життя, все».

Лікарі вважали, що Вороному необхідна тривала відпустка, радили виїхати на лікування. Але він, як і в попередні роки, на літо перебрався в Журавку, яка завжди давала йому нові сили і здоров'я. І справді, там його самопочуття значно поліпшилося. Та вже у Варшаві наприкінці жовтня 1908 року хвороба різко загострилася, а 20 листопада Георгія Вороного не стало. Було йому лише 40 років…

Поховали великого математика в рідному селі.

У статтях та нарисах, перелік яких пропонуємо нижче, можна детальніше ознайомитися з життям і науковою діяльністю цього талановитого математика, прочитати уривки з його щоденника.

1. Горбачук М. Л. На вершині цариці наук. // Аксіоми для нащадків.– Львів: «Меморіал». — 1992. — С. 169 — 182.
2. Конфорович А. Зачарований числами // Конфорович А. У пошуках інтеграла.— К., 1990.— С. 84 — 98.
3. Сита Г. Г.Ф. Вороний // У світі математики. — К., 1991. — Вип. 20. — С. 89–92.
4. Сита Г. Мозаїки Вороного // Математика в школі. — 2000. — № 4. — С. 5–9; № 6. — С. 8–11.

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942)

«Моя любов – Україна і математика» – так визначив своє життєве кредо видатний український математик Михайло Кравчук. Син Неба, Поет німого числа, Лицар математики, Учений з обличчям Христа, творець музики чисел, титан математичної думки, корифей математики, гордість української математики – так називають Михайла Кравчука науковці й журналісти. Його математичними відкриттями та працями користується весь науковий світ. Утім, у світі не знали лише одного: що він – українець. На жаль, ім'я цього генія на десятки років було викреслено з історіографії української науки, а сам він тривалий час залишався невідомим на своїй Батьківщині.

Народився М.П. Кравчук 27 вересня 1892 р. в селі Човниці на Волині, в сім'ї землеміра. Початкову освіту здобув удома. В 1901 р. вся родина переїхала до Луцька, де 1910 року Михайло закінчив,

Михайло Пилипович Кравчук

із золотою медаллю, гімназію. Цього ж року вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету університету Св. Володимира у Києві, по закінченні якого (1914 р.) з дипломом 1-го ступеня був залишений там, за рекомендацією професора Д. Граве, як професорський стипендіат для підготовки до наукової й викладацької роботи.

Після отримання звання приват-доцента Михайло Кравчук працює і як математик-науковець, і як педагог. Викладає в новостворених 1-ій та 2-ій українських гімназіях, Українському народному університеті, з 1918-го – співробітник Української академії наук. Кажуть, у нього була така красива українська мова, що лекції з алгебри приходили послухати філологи.

Михайло Кравчук стає членом комісії математичної термінології при Інституті української наукової мови УАН. 1919 року публікує курс лекцій з геометрії, які він прочитав в Українському народному університеті. Цього ж року опубліковано перший переклад українською мовою широковідомого підручника з геометрії Кисельова, здійснений М. П. Кравчуком. У другій половині 20-х років підкомісія математичної секції природничого відділу Інституту української наукової мови під головуванням М. Кравчука створює тритомний математичний словник.

Одна за одною з'являються друковані праці М. Кравчука. Вражає широта і розмаїтість його наукової творчості. Ряд глибоких результатів з теорії білінійних форм та лінійних перетворень завершується докторською дисертацією «Про квадратичні форми та лінійні перетворення», яку вчений блискуче захищає 14 грудня 1924 р. Це був перший в УРСР захист докторської дисертації. 1925 р. М. П. Кравчукові було присвоєно звання професора.

29 червня 1929 р. він був одностайно обраний дійсним членом Всеукраїнської академії наук. Далі – вісім років плідної праці над розв'язанням складних математичних проблем, блискучі результати в алгебрі й теорії чисел, теорії аналітичних функцій, теорії ймовірностей, математичній статистиці. Зокрема, в теорії ймовірностей він увів багаточлени біноміального розподілу, відомі у світовій ма-

тематиці як багаточлени Кравчука. Не втратили й досі актуальності його дослідження з аналітичних функцій, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. У цей період М.П. Кравчук також видає підручники для вищої школи, публікує статті з методики викладання математики, історії математики, філософії, продовжує працювати над удосконаленням математичної термінології.

У спогадах учнів М. П. Кравчук постає неперевершеним педагогом. Його лекції відзначалися багатством і глибиною змісту, чіткістю і ясністю, особливою красою та витонченістю викладу, водночас великим умінням найскладніші математичні положення викласти просто й зрозуміло. Вражала не тільки досконала українська мова викладача, але і його закоханість в тему, подану в ідеально чіткій формі, навіть з певними, до місця, жартами.

Протягом усієї своєї викладацької та наукової роботи (в сільській школі, Київському університеті, політехнічному інституті, Академії наук та ін. закладах, де доводилося працювати) М.П. Кравчук шукав і знаходив талановиту молодь, усіляко підтримував і сприяв їй. Його учнями були Архип Люлька — відомий учений, генеральний конструктор авіаційних двигунів, Сергій Корольов — славетний конструктор космічних кораблів, відомі вчені-математики Олександр Смогоржевський, Валентин Зморович, Павло Бондаренко та ін.

Вільно володіючи французькою, німецькою, італійською, російською, польською мовами, М.П. Кравчук підтримував наукові й особисті дружні зв'язки з відомими математиками світу — Ж. Адамаром, Д. Гільбертом, Р. Курантом, _. Трікомі, М. Лузіним та багатьма іншими. Для науковця світ не мав кордонів. Але прийшов страшний 1937-й рік. І в газеті «Комуніст» з'явилася стаття — «Академік Кравчук підтримує ворогів народу». Далі – ганебні псевдосудилища в Інституті математики, політехнічному інституті, університеті. Йому дорікали за листування з ученими, що жили у Львові, за націоналізм. Серед обвинувачів, на жаль, був і його вчитель, академік Граве. 21 лютого 1938 р. його заарештували, звинувативши у стандартному для тих літ наборі стереотипів «контрреволюційної» діяльності: український буржуазний націоналіст (член Наукового Товариства ім. Т. Шевченка у Львові, послуговується українською мовою, читає історичні праці Михайла Грушевського, водив дружбу з Миколою Зеровим, Агатангелом Кримським), шпигун (знає іноземні мови, листується з «польськими запроданцями» М.О. Зарицьким та М.Й. Чайковським (обидва українські математики зі Львова — *Авт.*), підтримує зв'язки з «буржуазними» вченими) і т.ін. 23 верес-

ня 1938 р. Михайло Пилипович був засуджений до 20 років тюремного ув'язнення і відправлений у п'ятирічне заслання на Колиму. Три каторжних зими і літа відбув він там, хворий і пригнічений несправедливістю, а 9 березня 1942 р. пішов на віки вічні у колимську мерзлоту. Реабілітований посмертно 15 вересня 1956 року.

Памятник М. П. Кравчуку біля НТУ України «КПІ»
(відкритий 29 жовтня 2009 р.)

М.П. Кравчук – автор понад 180 наукових праць, в тому числі більше десяти монографій з різних галузей математики. Його наукові результати давно дістали міжнародне визнання. Граве, Лузін, Крилов, Пфейфер, Адамар, Курант, Трікомі, Гільберт та інші визначні математики дали найвищу оцінку його науковому доробку. Відомо, що Джон Вінсент Атанасов при створенні першого комп'ютера користувався науковими результатами М.П. Кравчука.

Однак, як згадує Ніна Опанасівна Вірченко — науковець і дослідник праць М.П. Кравчука, й після реабілітації його боялися друкувати. І лише 1992 року, після довгих літ забуття, наукова громадськість України широко відзначила 100-річчя від дня народження видатного вченого.

Його ім'я занесено ЮНЕСКО до Міжнародного календаря визначних наукових діячів. Упродовж багатьох років Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут» проводить Міжнародні наукові конференції імені академіка Кравчука (у 2012 р. проведено уже тринадцяту конференцію). На одній з алей університетського парку споруджено пам'ятник цьому видатному вченому. У селі Човниця відкрито музей М.П. Кравчука. А у 2009 р. його іменем названа одна з вулиць у Києві.

Хоч і запізно, але ім'я М.П. Кравчука повернулося в український науковий пантеон. Його життя і творчість — взірець наукової і моральної висоти Вченого і Людини.

Дізнатися більше про життєвий і творчий шлях М.П. Кравчука можна з наступних статей, книг, телефільму.

1. Вірченко Н. О. Корифей української математики // Аксіоми для нащадків: Укр. Імена у світовій науці. — Львів «Меморіал», 1992. — С. 89–109.
2. Вірченко Н. О. Математика світової слави // Математика в школі. — 1998. — № 2. — С. 46–51.
3. Вірченко Н. О. Нотатки з Міжнародного форуму пам'яті Михайла Кравчука // Математика в школі. — 2002. — № 5. — С. 2–5.
4. Вірченко Н. О. Велет української математики.— К.: ВД «Науковий світ», 2012. — 64 с.
5. Микола Сорока. Колимська теорема Кравчука: Біографічний роман. — К.: ВД «Науковий світ», 2010. — 240 с.
6. Художньо-документальний телефільм «Голгофа академіка Кравчука» (автор сценарію Микола Сорока, режисер Олександр Рябокрис, оператор Валерій Фетисов, науковий консультант Ніна Вірченко).

Віктор Михайлович Глушков (1923–1982)

Віктор Михайлович Глушков

Внесок українського математика Віктора Михайловича Глушкова у математику, кібернетику та обчислювальну техніку був добре помітний і високо оцінений ще за життя вченого. «Наукові праці В.М. Глушкова — це величезний банк знань, залишений у спадок сьогоднішньому і майбутнім поколінням»[70], — так оцінює науковий доробок ученого Борис Миколайович Малиновський, сучасник і колега В.М. Глушкова.

Віктор Михайлович Глушков народився 24 серпня 1923 р. в Ростові-на-Дону в сім'ї гірничого інженера Михайла Івановича Глушкова. Батько, Михайло Іванович родом із станиці Луганської (тепер Станично-Луганське районний центр Луганської області), мати, Віра Йосипівна — із станиці Каменської (тепер м. Каменськ-Шахтинський Ростовської області, Росія), розташованих на Сіверському Дінці. У 1928 р. сім'я переїхала на шахту ім. Артема біля міста Шахти, найбільшу на Донбасі. У своїх спогадах

[70] Малиновский Б.Н. История вычислительной техники в лицах. — К.: Фирма «КИТ», ПТОО «А. С. К.», 1995. — 384 с.

В. М. Глушков розповідає, що батько закінчив Дніпропетровський гірничий інститут. Працювати на шахті доводилося «за десятьох», бо після сумнозвісної «шахтинської справи»[71] не вистачало фахівців. І лише, коли справи трохи налагодилися, батька перевели в трест у місто Шахти. Це було в 1929 р. З того часу родина проживала у цьому місті. 21 червня 1941 р. Віктор із золотою медаллю закінчив Шахтинську середню школу № 1.

Випереджати час Віктор Михайлович умів уже в школі. Діапазон його захоплень був надзвичайно широкий: філософія, математика, фізика, література, ботаніка. Окремі дисципліни вивчав в обсязі вузівських курсів. До кінця восьмого класу опанував основні університетські математичні дисципліни. Повчальним для читача може бути метод навчання, яким користувався. Знову звернемося до спогадів самого В.М. Глушкова, зафіксованих у цитованій вище книзі Б. М. Малиновського.

«Батько був радіоаматором і залучив мене до цього. Коли ми жили на шахті ім. Артема, він увесь час майстрував радіоприймачі та акумулятори. Я дивився, як батько паяє, слухав радіопередачі і уже влітку між четвертим та п'ятим класами розпочав сам робити радіоприймачі. Причому мене вже не задовольняло сліпе повторення відомих схем, я почав вивчати книги спочатку для радіоаматорів, потім з радіотехніки.

І коли пішов у п'ятий клас, то вже став робити радіоприймачі за власними схемами. Варто сказати, що в цьому велику роль зіграли науково-популярні журнали, такі, як «Техника молодежи», «Знание и сила», що у той час були дуже цікавими. Не пам'ятаю, в якому із них побачив конструкцію електрогармати з трьома соленоїдами і пелюстками-тримачами, між якими затискалося сталеве осердя — снаряд. При вмиканні гармати снаряд пролітав перший соленоїд і розмикав контакти, через які подавався електричний струм. Потім він влітав у наступний соленоїд і т.д. Я зробив гармату точно за описом, і вона працювала, але погано, тому що механічні контакти затискали снаряд дужче за норму. І тоді мені вдалося зробити перше відкриття – систему керування польотом снаряда… і моя гармата запрацювала краще, ніж описана у журналі. Це окрилило мене і підштовхнуло до думки зробити прицільний пристрій для визначення кута підняття ствола гармати.

[71] Показовий політичний процес в СРСР 1928 року над інженерами і техніками вугільної промисловості Донбасу за сфабрикованими звинуваченнями у шкідницькій діяльності; *шахтинців* (53 особи) засуджено до розстрілу та різних термінів ув'язнення.

Для пристрою прицілювання знадобився розрахунок кулачково-ексцентрикового механізму. Я зрозумів, що потрібні математичні знання. Математика необхідна була й при вирішенні іншої проблеми — точного розрахунку сили тяги і динаміки польоту снаряда. Ці задачі вирішуються методами диференціального та інтегрального числення, потребують дуже тонкого розуміння фізики твердого тіла, магнетизму. Це були перші задачі, що я сам собі поставив. Тоді я навчався в п'ятому класі. З того часу я привчив себе не просто перегортати книгу і витягати знання невідомо для чого, а обов'язково під певну задачу. Важка задача потребує, як правило, найрізноманітніших знань. У чому перевага такого методу засвоєння знань? **Коли ви просто читаєте книгу, то вам здається, що усе зрозуміли. А насправді в пам'яті майже нічого не відклалося. Коли читаєш під кутом зору, як це можна застосувати до своїх задач, тоді прочитане запам'ятовується на все життя.** Такому методу навчання я слідував завжди».

Шкільних саморобок В.М. Глушкова не перелічити: телевізор, телескоп, керована модель трамвая і короткохвильовий передавач та приймач команд, прожектор, домашній телефон, збільшувач до фотоапарата та ін.

Подиву гідна наполегливість і самодисципліна, які проявляв майбутній вчений уже в дитячому віці. Знову «послухаємо» самого Віктора Михайловича.

Про фізичне самовдосконалення: «Оскільки фізично я був розвинений досить слабко, то почав активно займатися фізкультурою. До десятого класу в мене були дуже гарні результати. Наприклад, я майже на свій зріст стрибав у висоту, навчився плавати. Причому спочатку ледве не потонув через короткозорість — не додивився і шубовснув туди, де глибоко, ну, і пішов на дно. Мене витягли і відкачали. Це мені не сподобалося, і я вирішив навчитися плавати. Батько мене декілька разів намагався навчити, але в мене нічого не виходило. Взагалі за натурою я заочник і не люблю, коли хтось допомагає. Що ж я зробив? Згадавши закон Архімеда, я зрозумів, чому в мене не виходить: голову тримаю високо. Як тільки я занурився настільки, що лише визирав ніс, то відразу поплив. І переплив досить глибокий канал».

Про виховання зібраності, організованості: «Оскільки я вважав себе дуже неорганізованою людиною, і це мене хвилювало, я спеціально включав у розклад своїх занять не тільки те, що подобалося, але і нелюбимі дисципліни, – наприклад, французьку мову, креслення і малювання».

І навіть самовиховання музичного слуху, відсутність якого усвідомив у п'ятому класі, виявилося небезуспішним. Наполегливість, навчання і «генетична пам'ять» зробили своє. Будучи уже дорослим, Віктор Михайлович зізнавався: «Люблю співати пісні, особливо українські. У мене бабуся співала українських пісень і розмовляла наполовину українською мовою».

В.М. Глушков мріяв після закінчення школи вступити на фізичний факультет Московського університету. Однак війна, що розпочалася на другий день після його випускного вечора, зруйнувала плани юнака.

Він одразу подав заяву до артучилища, але через поганий зір його не прийняли. Вступив до Ростовського університету. Восени 1941 р. та навесні 1942 р., будучи першокурсником, рив окопи й протитанкові рови. Але і тут у хвилини відпочинку не покидав занять математикою та фізикою. У 1942 р., після другого взяття Ростова німцями, Віктор Михайлович разом із матір'ю опиняється в окупованих Шахтах. Війна стала найважчим випробуванням для мільйонів радянських людей, а для В. М. Глушкова, як і для багатьох інших, вона спричинила особисту трагедію: фашисти розстріляли матір.

Восени 1944 року В.М. Глушков вступив на теплотехнічний факультет Новочеркаського індустріального інституту. Навчатися було нелегко. Доводилося паралельно заробляти собі на життя. Віктор Михайлович згадував, що спочатку він розвантажував вагони на станції, а влітку влаштувався на роботу «за спеціальністю». Їхня бригада із семи чоловік, відновила опалення в приміщеннях інституту, відремонтувала котли. Наступного року Глушков ремонтував електротехнічне обладнання. Таким чином він одержав спеціальності слюсаря водопровідника й техніка-електрика. Але на четвертому році навчання Віктор Михайлович зрозумів, що його не так цікавить теплофізика, як науки математичного профілю. І в 1947 р. він поновлюється одразу на п'ятий курс фізико-математичного факультету Ростовського університету, для чого складає всю академічну різницю за 4 роки. Сумарно за два приїзди до Ростова — 45 іспитів, усі на відмінно! Іноді по 5–6 дисциплін на день. Наступного року Віктор Михайлович паралельно закінчує обидва навчальні заклади й одержує дипломи про вищу технічну та вищу математичну освіту.

Із дружиною вони їдуть на Урал, де В.М. Глушков влаштовується викладачем в Уральський лісотехнічний інститут (м. Свердловськ). У Свердловську Глушкова доля зводить із професором Свердловського університету С.М. Черніковим, математиком і чудовим педагогом. Під його впливом В.М. Глушков освоює нову для себе галузь математики і в 1951 році блискуче захищає кандидатську дисертацію з теорії груп.

Однак широта інтересів Віктора Михайловича не дозволяє йому іти второваною дорогою. Його увагу привертає малодосліджена на той час топологія, він починає займатися однією дуже складною проблемою з теорії топологічних груп, пов'язаною з п'ятою проблемою Гільберта. А в грудні 1955 р. в Московському університеті В. М. Глушков захищає докторську дисертацію, в якій вирішив узагальнену п'яту проблему Гільберта. Спогади самого Віктора Михайловича дають нам можливість краєм ока «зазирнути» у творчу лабораторію генія. Послухаємо його. «З 1951 року я став займатися практично новою галуззю. Вникати треба було в теорію топологічних просторів (це досить складна галузь). Я продовжував працювати в Лісотехнічному інституті, читав лекції. Часто ловив себе на тому, що виписую інтеграл на дошці, а в голові у цей момент мигтять думки про цю теорему. Я розумів, що якщо припинити цей штурм, то потім дуже багато часу витратиш на відновлення уже досягнутого. Над п'ятою проблемою Гільберта працювали також американці. Так ось, я розв'язав її, тобто зробив більше, ніж американці. Причому розв'язав простішим методом, який краще підходить і для дослідження звичайної проблеми Гільберта. Над основною теоремою з узагальненої п'ятої проблеми я бився три роки підряд. Підсвідомість працювала, навіть коли я спав. Іноді вночі здавалося, що все вийшло. А вранці вставав, сідав за стіл, дивлюся — ні, помилка. Трирічний безперервний штурм закінчився в 1955 році. Я з дружиною поїхав на Кавказ у туристичний похід. На Казбеку при підйомі на льодовик мені прийшла в голову ідея, що дозволяла обґрунтувати розв'язання узагальненої проблеми Гільберта. Однак я привчив себе до того, що в моїх міркуваннях обов'язково є помилка і не одразу повірив собі. Став шукати її, але все виходить. Потім раптом нібито знайшов помилку, але ні – знову виходить. У поїзді все записав, а потім ще шість місяців доопрацьовував. Вийшло сторінок 60. Причому це було всього лише доведення однієї теореми. Досі ще нікому в світі не вдалося знайти коротше доведення. Ця робота принесла мені популярність серед математиків і величезне — творче, чи що, щастя».

Після захисту докторської дисертації вченого одразу ж обрали членом Московського математичного товариства. Без сумніву, його чекало велике майбутнє на ниві вищої математики – улюбленої з дитинства, де він уже завоював визнання видатних спеціалістів і мав незаперечний авторитет. Але він покидає абстрактну математику і знову обирає принципово новий творчий шлях, зовсім незвіданий, тепер уже — на все життя.

У серпні 1956 р. В. М. Глушков радикально змінив сферу своєї діяльності, пов'язавши її з кібернетикою, обчислювальною технікою і прикладною математикою. Від цього часу В. М. Глушков жив і працював у Києві. Тут він керував Лабораторією обчислювальної техніки і математики Інституту математики АН України, створеної раніше С. О. Лебедєвим і відомої своїми піонерськими розробками обчислювальних машин МЕСМ і БЕСМ[72]. У 1957 р. В. М. Глушков став директором Обчислювального центру АН УРСР з правами науково-дослідної організації. Через п'ять років, у грудні 1962 р. на базі Обчислювального центру був організований Інститут кібернетики Академії наук України. Його директором став В. М. Глушков.

Неможливо на кількох сторінках розповісти про результати В.М. Глушкова і очолюваного ним колективу. Зазначимо лише, що Інститут кібернетики АН України став провідним кібернетичним центром Радянського Союзу, а його міжнародна популярність була величезною. У 60 – 70-і роки Інститут привертає увагу кібернетиків усього світу. В. М. Глушков знову вражає своєрідними «рекордами» наукової творчості, тепер уже в галузі кібернетики. Йому належать біля півтисячі наукових праць у цій галузі, багато з яких перекладені іноземними мовами. За ініціативою В.М. Глушкова і при безпосередній участі фахівців Інституту кібернетики у Києві видають першу в світі «Енциклопедію кібернетики» (1973 р. — українською мовою; 1974 р. — російською мовою). Міжнародний авторитет В.М. Глушкова величезний. У 1969 р., наприклад, він отримав понад сто запрошень із різних країн прочитати лекції з питань кібернетики.

Про рівень таланту науковця і організатора промовисто говорить перелік найвищих звань і нагород, яких був удостоєний В.М. Глушков:

— вчені звання: член-кореспондент АН УРСР (1958), академік АН УРСР (1961), академік АН СРСР (1964); член Німецької академії

[72] Абревіатури: МЭСМ — Малая электронно-счётная машина; БЭСМ — Большая электронно-счётная машина.

природодослідників «Леопольдіна» (1970); іноземний член Болгарської академії наук (1974); іноземний член Академії наук НДР (1975); іноземний член Польської академії наук (1977); Почесний доктор Дрезденського технічного університету (1975); почесний іноземний член Кібернетичного товариства Польщі (1975);
— державні звання: Герой Соціалістичної Праці (1969); Заслужений діяч науки Української РСР (1978);
— премії: Ленінська премія (1964); Державна премія СРСР (1968, 1977); Державна премія УРСР (1970, 1981); Премія Ради Міністрів СРСР (1981); Премія імені Крилова АН СРСР (1978, 1980); Премія імені Лебедєва АН УРСР (1979);
— ордени і медалі: ордени Леніна (1967, 1969, 1975); орден Жовтневої Революції (1973); орден Народної республіки Болгарія I ступеня (НРБ, 1973), орден «Знамя Труда» (НДР, 1976); «Срібний сердечник» (Silver Core) від IFIP (англ.) (1974); медаль «Піонер комп'ютерної техніки» Міжнародного комп'ютерного Товариства (1997, посмертно).

Невеликий відрізок часу відміряла доля Віктору Михайловичу. Важка хвороба і невмолима смерть обірвали стрімкий політ ученого. 30 січня 1982 р. В.М. Глушкова не стало. Похований у Києві, на Байковому кладовищі.

Через усе своє життя В.М. Глушков проніс радість першовідкриття і виховав багато молодих учених. На його честь Академія наук України заснувала премію імені В.М. Глушкова. Ім'я академіка В.М. Глушкова носять створений ним Інститут кібернетики АН України та один із проспектів столиці України.

Із запропонованих нижче джерел можна більше довідатися про сторінки життя, наукові відкриття академіка В.М. Глушкова та його колег у галузі кібернетики.

1. Галай І., Гриневич Г. Віктор Михайлович Глушков // Галай І., Гриневич Г. Учням про видатних математиків. — К., 1976. — С. 154–156.
2. Конфорович А. Багатогранність таланту академіка В.М. Глушкова // У світі математики. — К., 1973. — Вип. 4. — С. 173–179.
3. Конфорович А. Правофланговий кібернетики // Конфорович А. У пошуках інтеграла. — К., 1990. — С. 232–249.
4. Малиновский Б. Н. Академик В. Глушков. Страницы жизни и творчества. — К.: «Наукова думка», 1993. — 140 с.
5. Малиновский Б. Н. История вычислительной техники в лицах. — К.: Фирма «КИТ», ПТОО «А. С. К.», 1995. — 384 с.

6. Малиновский Б. Н. Очерки по истории компьютерной науки и техники в Украине. — К.: «Феникс», 1998. — 452 с.

Ми розповіли лише про чотирьох українських математиків, які зробили помітний внесок у скарбницю світової науки і культури. Але їх набагато більше. Наш святий обов'язок знати і пам'ятати імена вчених-українців. Це необхідно нам для того, щоб ми самі зрозуміли, хто ми є у цьому світі і який залишаємо по собі слід в історії людства.

Завдання для самостійної роботи

1. Складіть свій список «10 найвизначніших імен» українських математиків. Коротко обґрунтуйте свій вибір.
2. Напишіть реферат про одного з українських математиків.

2.5. НАУКОВІ МАТЕМАТИЧНІ ШКОЛИ В УКРАЇНІ

Уся гордість учителя в учнях
у рості посіяних ним зерен.
Дмитро Менделеєв

Наука не є і ніколи не буде
закінченою книгою.
Альберт Ейнштейн

Враховуючи інтенсивне проникнення математики в усі галузі науки, виробництва, господарювання і сфери людської діяльності, про що йшлося в п. 1.2, випускники університету за спеціальністю «математика» мають широкий вибір щодо працевлаштування і можливості побудови професійної кар'єри. Будь-якому інженеру (економісту, екологу, соціологу) доводиться застосовувати математику для розв'язування технічних (економічних, технолого-екологічних та соціальних) проблем. А оскільки потрібні для цього знання математики і математичних методів є далеко не у всіх спеціалістів відповідних галузей, то до спільної роботи із фахівцями цих галузей у науково-дослідні інститути, проектні організації, організаційно-управлінські установи, аналітичні служби, планові відділи, на заводи тощо все частіше залучають математиків. Не рідкістю сьогодні є посади математика-інженера, математика-економіста, математика-актуарія, математика-програміста тощо.

З тієї ж причини зростає й потреба у висококваліфікованих учителях і викладачах математики (досить лише зазначити, що серед репетиторів найбільшою популярністю стабільно користуються, крім іноземних філологів, математики).

Але є ще один напрям професійної діяльності випускника-математика — розвиток математичної науки. Той, хто обирає саме цей шлях, як правило, вступає до аспірантури (стає аспірантом) або «прикріплюється» до наукової установи (стає пошуковцем), де під керівництвом досвідченого вченого-математика, найчастіше, доктора наук, професора розв'язує нові задачі, розвиваючи тим самим математичну науку, здебільшого її теоретичні аспекти.

Де і як здійснюється розвиток математичної теорії?

Зазвичай, наука розвивається не вченими-одинаками (хоча є винятки, як, наприклад, Ендрю Вайлс чи Григорій Перельман, про яких уже йшлося), а групами науковців, які формують так звані наукові математичні школи. Що ж таке наукова школа?

Поняття наукової школи широко й неоднозначно трактується у науковому співтоваристві. Синтезуючи точки зору на сутність математичної школи різних авторитетних учених з різних галузей та наукознавців (В.Б. Гасилова, Д.Д. Зербіно, К.О. Ланге, Н.І. Родного, Л.Л. Хоружої, Ю.О. Храмова), дамо наступне тлумачення поняття «наукова школа».

Наукова школа — це неформальний науковий колектив представників різних поколінь, який формується навколо відомого вченого або групи вчених (засновників школи) і реалізовує протягом довгострокового періоду визначену засновниками програму досліджень або наукову ідею, продукує нові знання, отримує вагомі результати, що мають суспільне визнання у певній науковій галузі.

Основними функціями наукової школи є:
— продукування нових наукових знань;
— поширення наукових знань (комунікація);
— підготовка наукової зміни з дослідників-початківців.

Наукова школа формується, як правило, повільно, не народжується раптово, її неможливо створити адміністративним рішенням. Неодмінна умова виникнення наукової школи – наявність вченого-лідера, непересічної особистості, генератора ідей, який охоче ними ділиться зі своїми учнями. Здебільшого, це талановитий дослідник-учитель, який не дає готових знань, а веде свою наукову паству і сам іде попереду разом із нею. В науковій школі концентруються зусилля багатьох молодих учених, які й після смерті свого вчителя продовжують його справу, розвивають і поглиблюють його наукові ідеї, започатковуючи нові напрями й наукові школи. Тому «продукування» нових учених — завдання наукової школи не менш важливе, ніж продукування нових знань, наукових ідей та результатів.

Наукові школи формувалися давно, як тільки з'являлися мудреці, філософи, які розвивали науку. Коротко зупинимося лише на одній з них — школі Піфагора.

Це була перша філософська школа, заснована Піфагором у VI ст. до нашої ери в місті Кротоні (Сицилія). Незважаючи на те, що Піфагорійська школа зробила вагомий внесок у розвиток математики, її не можна вважати математичною школою в сучасному розумінні, оскільки тоді ще не існувало окремих наук, усі вони були складовими філософії. А філософи неодмінно мали знати математику, астрономію, музику тощо.

Популярність і авторитет Піфагора пояснюються неабиякими особистісними якостями філософа, його мудрістю й умінням вести за собою інших, а також високою моральністю ідей та життєвих принципів, які він та його однодумці проповідували. Моральні принципи, що їх проповідував Піфагор, і сьогодні варті наслідування. Наприклад, кожна людина має дотримуватися таких правил: цуратись хитрощів, відвертати від тіла хворобу, від душі — невігластво, від утроби — розкіш, від громади — смуту, від сім'ї — сварку.

Філософія Піфагорійської школи трималася на «трьох китах»:

— на мудрості, яка формувалась при вивченні наук;

— на глибоких почуттях, зокрема, любові, які виховувалися музикою;

— на силі й витривалості, які гартувалися фізичними вправами й спортом.

Кожний учень проходив у Школі кілька основних етапів.

Першим був самий вступ до Школи. Не кожний міг з першого разу вступити до Школи Піфагора. Зверталась увага на те, наскільки розвинутим, розумним та фізично сильним був «абітурієнт» (слід зазначити, що фізичному вихованню приділялась велика увага). Якщо за якимись параметрами претендент не підходив, Піфагор давав відповідні поради для самовдосконалення та радив приходити наступного разу через 3 роки.

Після вступу починався випробувальний період становлення. У цей період, який тривав п'ять років, особа ще не вважалася піфагорійцем, а називалась акусматиком (слухачем). Перша вправа Піфагора для акусматиків полягала у тренуванні уміння мовчати, головна мета якої — «навчитися думати і відучитися базікати». Роздуми та мовчання допомагали самозаглибитися, почути голос свого внутрішнього «Я». Старші учні Піфагора навчали акусматиків слухати й спостерігати, знайомили із прийомами поліпшення розумових здібностей, розвитку пам'яті тощо.

Лише після того, як акусматик успішно проходив випробувальний етап, він ставав повноцінним учнем Школи — піфагорійцем. Тепер він носив ім'я математика — «того, хто пізнає». Основний дидактичний принцип, який сповідували в школі Піфагора: «Учень — це не посудина, яку потрібно наповнити, а факел (смолоскип), який треба запалити». На цьому етапі проводилися спеціальні навчання. Математикам давалась цілісна картина світу, розкривалася структура природи, людини. Піфагорійці пізнавали основні принципи і закони світобудови, гармонію Всесвіту й людської душі.

На наступному, найвищому щаблі піфагорійці опановували складну науку керувати суспільством, бути політиками. Навчалися спрямовувати людей до вищих цілей, допомагаючи усвідомити своє призначення, існування вищих принципів і законів людського суспільства й держави. Основний принцип — потрібно керувати людьми, виходячи із загального блага, а не із власних чи чужих інтересів.

Зазначимо, що виняткове значення у пізнанні піфагорійці відводили числам. Математику Піфагор уважав знаряддям пізнання світу. Фізичні, етичні, соціальні й релігійні поняття отримали у піфагорійців математичне забарвлення. Науці про числа відводиться величезне місце у світоглядній системі, тобто фактично математика оголошується філософією.

Головний піфагорійський символ (пентаграма) — п'ятикутна зірка, утворена діагоналями правильного п'ятикутника. Саме така фігура дуже поширена у живій природі.

Піфагорійцям належать багато теорем у теорії чисел, ряд сформульованих ними задач не розв'язані досі. У школі Піфагора було зроблено відкриття про несумірність сторони і діагоналі квадрата, яке започаткувало нову епоху в історії математики і привело врешті-решт до винайдення ірраціональних чисел. А доведення піфагорійцями несумірності сторони і діагоналі квадрата — перше відоме в історії математики доведення «від супротивного».

Найважливіші життєві принципи піфагорійці формулювали у вигляді лаконічних заповідей (акусм). Ось деякі з них:

— Роби лише те, що згодом не засмутить тебе і не змусить каятися.

— Не роби ніколи того, чого ти не знаєш. Але навчися всьому, що слід знати, і тоді ти будеш вести спокійне життя.

— Не нехтуй здоров'ям свого тіла. Принось йому вчасно їжу і пиття, роби вправи, яких воно потребує.

— Привчайся жити просто і без розкоші.

— Не лягай спати, не проаналізувавши свої вчинки за минулий день.

— Не порушуй справедливості.

— Не заспокоюйся на досягнутому.

— Не віддавайся меланхолії.

— Не дратуй того, хто в гніві.

— Не приймай під свою покрівлю балакунів і легковажних людей.

Далі коротко зупинимося на наукових математичних школах, які формувалися в Україні на початку та всередині XX ст. і функціонують дотепер.

Потужні наукові математичні школи діють в науково-дослідних математичних інститутах, насамперед, в Інституті математики НАН України, а також при математичних кафедрах тих університетів, які, крім навчання студентів, готують наукові кадри. Найбільш розвинуті й авторитетні математичні школи зосереджені у великих університетських містах: Києві, Харкові, Одесі, Львові, Чернівцях.

Дмитро Олександрович Граве
(1863 – 1939)

Засновником першої математичної школи в Україні можна вважати Дмитра Олександровича Граве, уродженця Новгородської губернії, тепер Вологодської області в Росії. У 1897 р. Д.О. Граве переїхав до Харкова, де до 1899 р.обіймав посаду професора Харківського університету. З 1899 р. і до самої смерті працював у м. Києві. У 1934 р. став першим директором Інституту математики АН УРСР. Тут Дмитро Олександрович об'єднав навколо себе потужну і досить велику групу математиків, які одержали фундаментальні наукові результати з алгебри, прикладної математики, механіки. Серед його учнів такі видатні вчені, як М. П. Кравчук, Ю. Д. Соколов, О.Ю. Шмідт, Б.М. Делоне, М.Г. Чеботарьов та ін.

Розвиток алгебри в СРСР фактично починається з київської алгебраїчної школи Граве.

Саме під керівництвом і у співпраці з Д.О. Граве розкрився блискучий науковий талант Михайла Пилиповича Кравчука, чий життєвий і творчий шлях досить детально описано у попередньому параграфі. Науковий доробок М. П. Кравчука (понад 180 праць) не тільки вагомий сам по собі, а й дозволив у майбутньому отримати надважливі результати з алгебри і теорії чисел, теорії аналітичних функцій, теорії ймовірностей, математичної статистики. Геній Михайла Пилиповича випередив час — чимало його наукових ідей стали активно використовувати й розвивати лише через півстоліття. А результати, що їх отримав М.П Кравчук в галузі теорії ймовірностей та математичної статистики, знайшли потужний розвиток у ряді нових математичних шкіл, пов'язаних з іменами таких видатних математиків, як М. М. Боголюбов, Б. В. Гнєденко, А. В. Скороход, В. С. Королюк та інших.

Борис Володимирович Гнєденко
(1912 – 1995)

Борис Володимирович Гнєденко, учень А.М. Колмогорова та О.Я. Хінчина, у вересні 1945 року на запрошення Академії наук України переїхав із Москви до Львова. Працюючи у Львівському університеті, Борис Володимирович часто приїжджав у Київ та проводив наукові семінари в Інституті математики АН УРСР та на механіко-математичному факультеті КДУ імені Т.Г. Шевченка. У 1949 р. був переведений до Києва і в цьому ж році створив відділ теорії ймовірностей в Інституті математики та очолив кафедру алгебри, аналізу і теорії ймовірностей в Київському університеті. Б.В. Гнєденко привніс до Київського університету дух і традиції Московської математичної школи, яка особливо відзначалася активним залученням молоді до наукової творчості та підтримкою молодих учених.

За неповних 15 років, що працював Б.В. Гнєденко в Україні (в 1960 р. із сім'єю переїхав у Москву), він залишив тут яскравий науковий слід. Учень Бориса Володимировича, академік В.С. Королюк у своїх автобіографічних спогадах пише: «Думаю, Б.В. Гнєденко є одним із найунікальніших учителів, серед чиїх учнів тільки членів Національної академії наук України, принаймні, десять: академіки НАН України — В.С. Королюк, А.В. Скороход, В.С. Михалевич, І.М. Коваленко, Ю.М. Єрмольєв; члени-кореспонденти НАН України — І.Й. Гіхман, Є.Л. Ющенко (Рвачова), М.Й. Ядренко, М.І. Портенко, Т.П. Мар'янович»[73]. Саме в Києві під керівництвом Б.В. Гнєденка була створена потужна, відома згодом в усьому світі наукова школа з теорії ймовірностей, стохастичних процесів, математичної статистики. Це на запрошення Б.В. Гнєденка, на той час директора Інституту математики АН УРСР, очолити Лабораторію обчислювальної техніки і математики цього інституту до Києва приїхав В.М. Глушков. Про результати роботи цієї Лабораторії, яка до 1962 року виросла в Інститут кібернетики АН УРСР, ми уже згадували в попередньому параграфі. У випадку із В.М. Глушковим Борис Володимирович виявив себе як мудрий і далекоглядний стра-

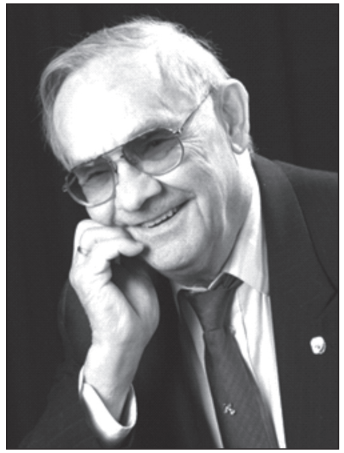
[73] Володимир Семенович Королюк. Творчий шлях. — Київ: Інститут математики НАН України. 2009. — С.31.

тег. Він допомагав формувати колектив Лабораторії, по-людськи піклувався про співробітників. Про його високі моральні і чисто людські якості свідчить хоча б такий факт, що про нього згадує В.С. Королюк у цитованій вище праці. В.М. Глушков із родиною приїхав до Києва в 1956 р., Лабораторія знаходилася в Феофанії, передмісті Києва. На той час це було глухе місце, далеке від центру Києва, із поганим транспортним сполученням. Щоб створити комфортніші умови для роботи, Б.В. Гнєденко віддав колективу науковців свій директорський автомобіль та особняк у Феофанії.

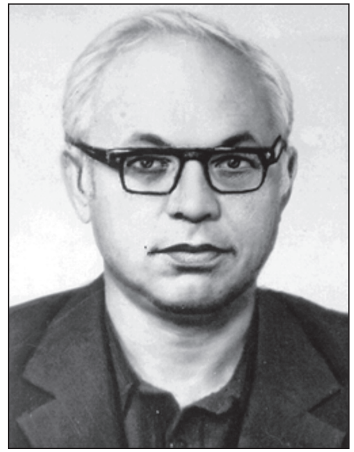
55 років творчої діяльності Б.В. Гнєденка були дуже плідними. Крім цілої плеяди вихованих ним талановитих науковців-математиків (колишні аспіранти і докторанти згадують дивовижну прозорість і чіткість постановок математичних задач, бачення можливих шляхів їхнього розв'язання), вчений опублікував біля 350 наукових праць, в їх числі 20 монографій; чимало з них перекладені іноземними мовами та перевидані за кордоном. Борис Володимирович був блискучим педагогом. Його лекції відзначалися економністю, точністю і ясністю викладу матеріалу. Колеги й учні Б.В. Гнєденка говорять про нього як про відкриту, уважну, доброзичливу, принципову і щиру в оцінках будь-яких явищ і подій людину.

Одними з перших учнів Б.В. Гнєденка в Україні були Анатолій Володимирович Скороход та Володимир Семенович Королюк. Коли Б.В. Гнєденко переїхав зі Львова до Києва і став викладати в Київському університеті ім. Т.Г. Шевченка, вони навчалися на старших курсах цього університету. Ці два талановиті студенти, маючи уже певний дослідницький досвід (А.В. Скороход, наприклад, уже мав певні наукові результати, які отримав під керівництвом свого викладача Й.І. Гіхмана), активно включилися в наукові дослідження за тематикою Б.В. Гнєденка і успішно розв'язали ряд непростих математичних проблем. Результати дипломної роботи В.С. Королюка, виконаної під керівництвом Б.В. Гнєденка, публікуються в 1951 р. в журналі «Доповіді Академії наук УРСР». Три наукові статті А.В. Скорохода друкують журнали «Успехи математических наук» та «Доклады АН СССР». Це були найавторитетніші журнали в СРСР, де публікували свої праці академіки, доктори наук, рідше — кандидати наук. Публікація тут робіт студента — унікальний виняток, що свідчить про дуже високий їхній науковий рівень.

Обидва талановиті студенти продовжують дослідження під керівництвом Б.В. Гнєденка в аспірантурі.



Володимир Семенович Королюк
(нар. 1925)



Анатолій Володимирович Скороход
(1930 – 2011)

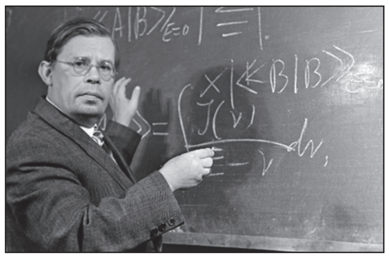
Навчаючись в аспірантурі, А.В. Скороход та В.С. Королюк під керівництвом свого вчителя отримують фундаментальні результати, які публікуються в центральних союзних математичних журналах. Однак їхня плідна співпраця переривається у 1953 р. На запрошення Берлінського університету імені Гумбольдта Б.В. Гнєденко на два роки їде працювати до Німеччини. Але перед поїздкою Борис Володимирович потурбувався про своїх учнів, посприявши переведенню їх в аспірантуру Московського університету імені М.В. Ломоносова під опіку А.М. Колмогорова та Є.Б. Динкіна. Науковим керівником В.С. Королюка став академік А.М. Колмогоров, а А.В. Скорохода — академік Є.Б. Динкін. Після закінчення навчання в аспірантурі А.В. Скороход та В.С. Королюк блискуче захищають кандидатські дисертації в Московському університеті та повертаються в Київ.

Тут А.В. Скороход продовжив свою тісну співпрацю з Й.І. Гіхманом, розпочату ще в студентські роки, коли Йосип Ілліч був його викладачем. Невдовзі вони стали не лише колегами, а й близькими друзями. Обидва математика заснували та розвинули новий напрям у теорії ймовірностей — випадкові процеси та видали перший підручник з теорії випадкових процесів. У той час А.В. Скороход очолює відділ теорії випадкових процесів в Інституті математики АН УРСР, а Й.І. Гіхман — кафедру теорії ймовірностей та математичної статистики в Київському державному університеті імені Тараса Шевченка. Їм двом вдалося об'єднати зусилля науковців інституту та університету й прискорити розвиток теорії ймовірностей в Україні. З'явилося багато молодих талановитих математиків у цій галузі. Математична школа здобула заслужене визнання в науковому світі. Її представників стали запрошувати провідні університети Європи, Америки, Азії.

З 1993 р. академік Анатолій Володимирович Скороход працював професором Мічиганського університету (США). Невдовзі він став членом Американської академії мистецтв і наук. Видатний учений і педагог (автор понад 450 наукових праць, із яких біля 40 монографій і підручників, підготував 56 кандидатів і 17 докторів наук), патріот України (за свою громадянську й патріотичну позицію у 1968 – 1992 рр. підпадав в СРСР під заборони читати студентам лекції та виїжджати за кордон), людина великої душі Анатолій Володимирович Скороход помер у США 4 січня 2011 року.

В.С. Королюк після повернення з Москви до Києва активно включився, за пропозицією Б.В. Гнєденка, в роботу зі становлення кібернетики в Україні. Однак він не залишав дослідження в галузі теорії ймовірностей і, паралельно з роботою в лабораторії В.М. Глушкова, очолював в Інституті математики АН УРСР відділ теорії ймовірностей. Має біля 350 наукових праць, 23 монографії, багато із яких перекладені іноземними мовами і перевидані за кордоном. Академік В.С. Королюк виховав 10 докторів та понад 40 кандидатів наук. Його талановиті учні успішно продовжують наукові дослідження в галузі теорії ймовірностей та її різноманітних застосувань, започатковують і розвивають нові напрями, готують наукові кадри.

Ще однією величною постаттю в математиці, засновником багатьох наукових шкіл є Микола Миколайович Боголюбов, учень М.М. Крилова.



Микола Миколайович Боголюбов
(1909 – 1992)

Народився Микола Миколайович 21 серпня 1909 року в Нижнім Новгороді. У тому ж році батько Микола Михайлович Боголюбов отримав місце законовчителя в Ніжинському історико-філологічному інституті князя Безбородька, і сім'я поселилася в Ніжині (Чернігівська область).

Під час громадянської війни родина переїхала на Полтавщину. У сільській школі, де навчався Ми-

кола, заняття проводилися виключно українською мовою. Це дало йому відчуття свого зв'язку з Україною, яка на все життя стала його Батьківщиною. Хоч за своє життя Микола Миколайович подовгу мешкав і працював у Росії, він уважав себе українцем. Про це свідчать неодноразово заповнені ним власноруч анкети. Слід зазначити також, що перші свої підручники М.М. Боголюбов писав українською мовою. Зокрема, його «Лекції з квантової статистики» були видані у 1949 р. українською, перекладені англійською і лише з часом цей підручник вийшов російською.

Після закінчення семирічки Микола разом із сім'єю переїжджає до Києва і продовжує навчатися самотужки, при підтримці свого батька. До речі, посвідчення про закінчення семирічки було єдиним документом про освіту, що він отримав за все своє життя[74].

У тринадцять років Микола вже глибоко знав не тільки елементарну, а й вищу математику. Рівень підготовки й математичні здібності юного Миколи Боголюбова так вразили Д.О. Граве при знайомстві з ним, що академік порекомендував батькові, аби син не вступав до університету, а працював за індивідуальною програмою, і дозволив Миколі Боголюбову відвідувати свої семінари. У 1924 р., у п'ятнадцятирічному віці, М.М. Боголюбов написав першу наукову працю, а вже наступного року був прийнятий до аспірантури Академії наук до академіка М.М. Крилова, як такий, що має феноменальні математичні здібності, хоч не має атестатів про середню і вищу освіту. Ще через чотири роки, в 1929 р., Микола Миколайович Боголюбов отримав ступінь доктора фізико-математичних наук. Унікальний випадок, чи не так?

Неоціненний вклад вніс М. М. Боголюбов також у розвиток фізики. Він був засновником радянських наукових шкіл у галузі нелінійної механіки, статистичної фізики і квантової теорії поля. Ще працюючи в Києві заснував Інститут теоретичної фізики у Києві та був першим його директором (сьогодні цей Інститут носить ім'я М.М.Боголюбова). Переїхавши в Москву створив та очолював багато науково-дослідних інституцій (у Московському університеті в 1953 р. заснував кафедру квантової статистики і теорії поля, якою керував до останніх днів свого життя). За видатні заслуги в розвитку науки М.М. Боголюбов мав величезний авторитет у світі. Його обрали членом багатьох іноземних академій (у Болгарії, НДР, Польщі, США та ін.), наукових закладів і товариств.

[74] А. Загородній, В. Хряпа. Микола Боголюбов — людина і вчений //http://www.u-nik.org.ua/PDF_ARCHIVE/35%20%282009%29/118.pdf

Юрій Олексійович Митропольський
(1917 – 2008)

Талановитим учнем Миколи Боголюбова був Юрій Олексійович Митропольський, автор більш ніж 750 наукових праць, серед яких 53 монографії, виданих багатьма мовами світу; підготував 100 кандидатів та 25 докторів наук.

Наведемо коротко основні етапи становлення великого науковця.

Розпочав наукову діяльність в 1946 р. під керівництвом М.М. Боголюбова, будучи на той час молодшим науковим співробітником Інституту будівельної механіки АН УРСР. У 1948 р Ю.О. Митропольський захищає кандидатську, а в 1951 р. – докторську дисертації, працюючи старшим науковим співробітником Інституту математики АН УРСР.

Протягом 1958–1987 рр. Ю.О. Митропольський очолював Інститут математики НАНУ, з 1988 року — був почесним його директором.

У 1958 р. він обраний членом-кореспондентом АН УРСР, у 1961 р. — дійсним членом Академії наук УРСР, головою бюро Відділення фізико-математичних наук АН УРСР. У 1963–1983 рр. Ю.О. Митропольський — академік-секретар відділення математики, механіки і кібернетики АН УРСР, член президії АН УРСР.

У 1965 р. за видатні досягнення в галузі теорії нелінійних коливань Ю.О.Митропольському присуджено Ленінську премію, у 1968 р. — присвоєно звання Героя Соціалістичної Праці з врученням ордена Леніна і золотої медалі «Серп і молот».

Одночасно з роботою в Інституті математики він очолював у Президії АН УРСР ряд відділень: фізико-математичних наук (1961 – 1963), математики, механіки і кібернетики (1963 – 1982), математики і механіки (1982 – 1986), математики (1986 – 1990). З 1991 року Ю.О. Митропольський — радник Президії Національної академії наук України.

За винятковий особистий внесок у зміцнення наукового потенціалу України, визначні здобутки в розвитку та організації фундаментальних досліджень в галузі математики, багаторічну плідну наукову діяльність Юрію Олексійовичу Митропольському у 2007 р. присвоєно звання Героя України з врученням ордена Держави.

Три видатних математики М.М. Крилов, М.М. Боголюбов та Ю.О. Митропольський створили потужну математичну школу з теорії нелінійних коливань, механіки, диференціальних рівнянь.

Щоб уявити собі масштаб цієї школи, наведемо наукове дерево лише однієї її найбільшої гілки — школи академіка А.М. Самойленка, директора Інституту математики НАНУ (http://www.imath.kiev.ua/~sam/go/tree.pdf), вихованці якої тепер працюють практично в усіх вищих навчальних закладах України, очолюють Інститути математики цих навчальних закладів, математичні факультети, кафедри математичного профілю, готують кваліфікованих фахівців з математики.

Без сумніву, центром наукових математичних досліджень в Києві та Україні є Інститут математики НАНУ та механіко-математичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка. Практично кожний відділ в Інституті та кожна кафедра факультету концентрують і виховують науковців-математиків та розвивають математичну школу свого математичного напряму.

Ці математичні школи виконували та виконують донині своє головне призначення – проведення фундаментальних досліджень та підготовку висококваліфікованих наукових кадрів.

Микола Вікторович Працьовитий
(нар. 1959)

Яскравим представником молодшого покоління вихованців школи Інституту математики є Микола Вікторович Працьовитий — директор Фізико-математичного інституту Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова. Він та його учні продовжують гілку Б.В. Гнеденка, В.С. Королюка, А.Ф. Турбіна.

Микола Вікторович навчався в аспірантурі Інституту математики АН УРСР з 1983 року по 1986 рік за спеціальністю теорія ймовірностей і математична статистика. У 1987 р. успішно захистив кандидатську, а в 1998 р. — докторську дисертації. Один із перших, разом зі своїм учителем Анатолієм Федоровичем Турбіним, започаткував в Україні дослідження фракталів та розробку фрактальних методів. Наукові інтереси М.В.Працьовитого лежать в області фрактального аналізу та фрактальної геометрії, метричної та ймовірнісної теорії чисел тощо. Вагомі наукові результати дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей математичних об'єктів започаткували новий напрям у теорії ймовірностей – фрактальний. Сьогодні М.В. Працьовитий очолює в Інституті математики НАНУ відділ фрактального аналізу.

М.В. Працьовитий опублікував 4 монографії та понад 300 наукових і науково-методичних статей. Його роботи добре відомі як в Україні, так і за її межами. Під його керівництвом уже підготовлено і захищено 15 кандидатських і одну докторську дисертації. Проводить велику роботу з розвитку міжнародних наукових зв'язків.

Що таке фрактал?

Фрактал – це нескінченно самоподібна геометрична фігура, кожний фрагмент якої повторюється при зменшенні масштабу. Масштабна інваріантність, що спостерігається у фракталах, може бути або точною, або наближеною.

Фрактальні властивості мають такі природні об'єкти, як сніжинка, якщо її нескінченно «добудовувати»; за фрактальними алгоритмами ростуть кристали, дерева.

Прикладом найпростішого фрактала є «сніжинка Коха» (рис. 8). Її побудова починається із правильного трикутника, довжина сторони якого дорівнює 1. Сторона трикутника вважається базовою ланкою. Далі, на будь-якому кроці ітерації кожна ланка заміняється на утворюючий елемент — ламану, що складається по краях з відрізків довжиною 1/3 від довжини ланки, між якими розміщаються дві сторони правильного трикутника зі стороною в 1/3 довжини ланки. Усі відрізки – сторони отриманої кривої вважаються базовими ланками для наступної ітерації. Крива, що одержується в результаті n-ї ітерації, при будь-якому n, називається передфракталом, і лише при $n \to \infty$ крива Коха стає фракталом. Отримана в результаті ітераційного процесу фрактальна множина є лінією нескінченної довжини, що обмежує скінченну площу. Справді, на кожному кроці кількість сторін результуючого багатокутника збільшується в 4 рази, а довжина кожної

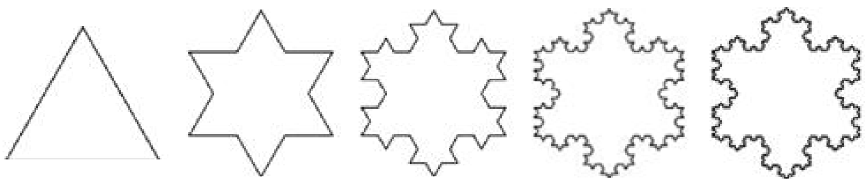


Рис. 8. Перші 5 ітерацій сніжинки Коха

сторони зменшується тільки в 3 рази, тобто довжина багатокутника на n-ій ітерації дорівнює $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$ і прямує до нескінченності при необмеженому збільшенні n. А площа фігури, обмеженої фракталом дорівнює, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\dots\right)\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Фракталом є також так звана Канторова множина – точкова множина числової прямої, з якою ви зустрінетеся на старших курсах при вивченні теорії функцій дійсної змінної та функціонального аналізу.

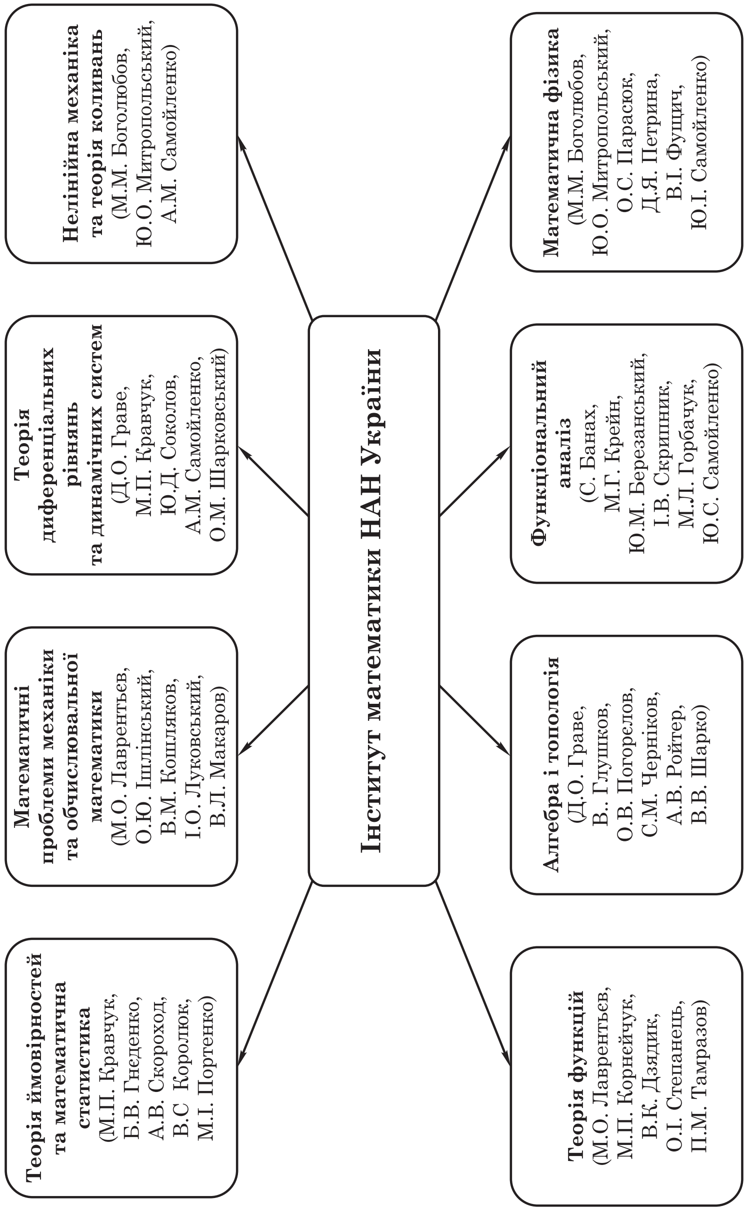
Приклади фракталів зображені на рис. 9 Слід сказати, що, завдяки своїй самоподібності, фрактали – дуже красиві геометричні об'єкти, варті, щоб ними захоплюватися і милуватися як справжніми художніми витворами (див. напр. https://www.google.com.ua/search?q=%D1%84%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B0%D0%BB%D0%B8&hl=ru&client=firefox&hs=7u9&tbo=u&rls=org.mozilla:ru:official&tbm=isch&source=univ&sa=X&ei=0H68UM_5LNHotQb6m4DgCQ&ved=0CE8QsAQ&biw=1600&bih=717).

Рис. 9. Приклади фракталів

Щоб знайти інші сторінки сайту, на яких зображено фрактали, достатньо у будь-якій пошуковій системі Інтернету задати ключове слово «фрактал» та запустити пошук.

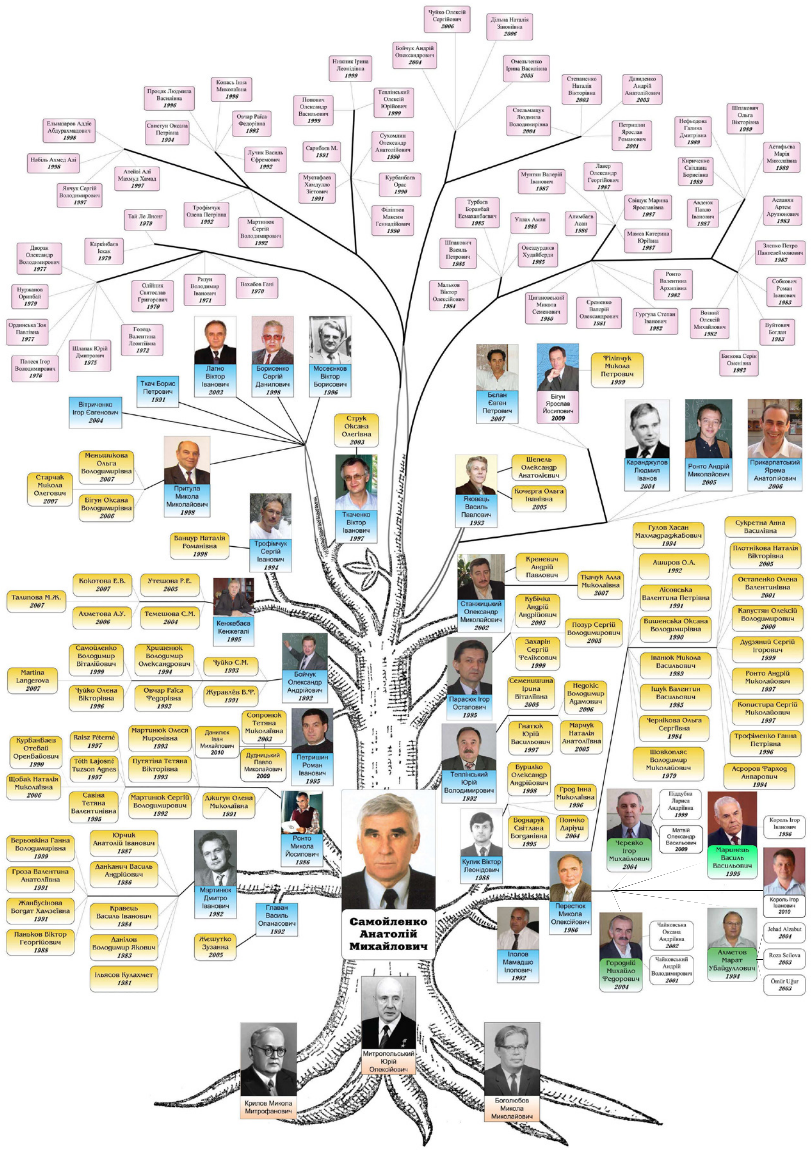
У наш час фрактали застосовують при аналізі структур ландшафтів, отриманих аерокосмічною зйомкою, для вивчення поверхонь пористих середовищ, вони виявилися ефективними при розпізнаванні образів на радіолокаційних зображеннях, стисненні інформації та ін. Однак, щоб зрозуміти природу фракталів, спосіб їхньої побудови, суть фрактальних методів потрібні глибокі знання багатьох математичних дисциплін, зокрема, теорії ймовірностей, функціонального аналізу, топології та ін.

Математичні школи в Інституті математики НАН України[75]



75) http://www.imath.kiev.ua/institute/?cat=1&lang=ua

Наукове дерево математичної школи Крилова-Боголюбова-Митропольського-Самойленка



Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Що таке наукова школа?
2. Які основні функції наукової школи?
3. Виберіть 4 акусми Піфагорійської школи, які, на Ваш погляд, є актуальними для: а) сучасного вчителя; б) сучасної людини.
4. Який головний дидактичний принцип школи Піфагора? Чи актуальний він сьогодні? Відповідь обґрунтуйте.
5. Поцікавтеся у своїх викладачів, вихованцями і представниками яких наукових шкіл вони є. Попросіть їх розповісти про свою наукову школу, наукового керівника, поділитися спогадами про період написання дисертації.

Розділ 3

ПРОФЕСІЯ МАТЕМАТИКА / УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Якщо ваш план – на рік, садіть рис.
Якщо ваш план – на десятиліття, садіть дерева.
Якщо ваш план – на все життя, навчайте дітей.
Конфуцій

Майбутнє народу і країни залежить
від того, який учитель у школі.
Борис Гнєденко

3.1. МАТЕМАТИЧНА КОМПЕТЕНТНІСТЬ БАКАЛАВРА НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.040201 МАТЕМАТИКА

Ми не раз чули (і адекватно розуміємо) вислів: «Я не компетентний у цих питаннях». Ми й самі вживаємо для характеристики того чи іншого фахівця слова «компетентний», «некомпетентний». Ми хочемо навчатися у компетентного вчителя (тобто, професіонала, майстра, глибокого знавця своєї справи) і не підемо лікуватися до лікаря, про якого чули, що він некомпетентний. Тобто більшість людей безпомилково визначають тих, про кого кажуть, що вони «компетентні спеціалісти». А що саме робить їх такими? Відповідь на це питання залежить не тільки від роду занять спеціаліста, а й від історичного періоду розвитку суспільства. Не кажемо уже про те, що неможливо уявити собі «професора» з оповідання Івана Франка «Грицева шкільна наука» у класі сучасної школи. Але й «компетентність» інженера електронної техніки кінця XIX ст. сьогодні нас абсолютно не задовольнить. І подібне можна сказати про представника будь-якої професії. За останні десятиліття значно зросла динаміка процесів, багатократно збільшився інформаційний потік. Сьогодні з'являються професії, про які десять–п'ятнадцять років тому ніхто й не чув. Змінюються вимоги до попередніх професій — вони стають більш інтегрованими, менш спеціальними. Усі ці чинники диктують необхідність підготовки фахівця, що не просто має певну «суму знань і умінь», а є творчою особистістю, готовою діяти в умовах швидких змін і невизначеності оточуючого середовища. Як результат — актуалізація так званого компетентнісного підходу в освіті, що передбачає підготовку «компетентного» (у певній предметній галузі) індивіда, актуальність концепції неперервного навчання.

Очевидно, що зміст поняття «компетентність» не тільки ширший за просто «знання» чи «уміння», чи «навички», але навіть більший за їх разом узятих. Оскільки складовими компетентності, крім знання (що це таке?) й уміння (як це зробити?), є й мотивація (чому?), етичний вибір (які наслідки?), соціальний чинник (з ким?).

Система компетентностей в освіті має ієрархічну структуру, рівні якої складають:

1. **Ключові компетентності** (навчальна, культурна, громадянська, соціальна, підприємницька) — здатність здійснювати складні поліфункціональні, поліпредметні, культурно доцільні види діяльності, ефективно розв’язуючи актуальні індивідуальні та соціальні проблеми.
2. **Загальногалузеві компетентності** — компетентності, які формуються впродовж засвоєння змісту тієї чи іншої освітньої галузі і які виявляють себе у розумінні місця відповідної галузі у суспільстві, а також в умінні застосовувати їх на практиці у рамках культурно доцільної діяльності, для розв’язку індивідуальних та соціальних проблем.
3. **Предметні компетентності** — складова загальногалузевих компетентностей, яка стосується конкретного предмета.

Поряд із терміном «компетентність» у педагогічній літературі та різних нормативних і методичних матеріалах з питань освіти зустрічаємо термін «компетенція». Зазначимо, що тут мають на увазі дещо інше, ніж ми звично вкладаємо в цей термін, коли розуміємо під ним певне коло повноважень. Говорячи, наприклад, «ці питання не в моїй компетенції», ми кажемо, що не можемо їх вирішувати, бо не маємо на це відповідних повноважень або їхнє вирішення не входить у коло наших обов’язків.

У науковій педагогічній літературі нема єдиного погляду на зміст термінів «компетенція» і «компетентність». На основі аналізу трактувань зазначених понять різними вченими (з ними ви ще будете знайомитися, вивчаючи педагогічні дисципліни), будемо розуміти під **компетенцією** знання, уміння, навик, готовність, мотивовану здатність тощо, що, у поєднанні з іншими, дозволяє якісно виконувати конкретну професійну роботу, тобто, у певному розумінні, відчужену, наперед задану вимогу до підготовки фахівця, а під **компетентністю** – уже сформовану професійну і особистісну якість (характеристику) індивіда.

Далі розглянемо математичну компетентність – предметну компетентність такої професійної галузі, як математика. Як зазначає доктор педагогічних наук Сергій Анатолійович Раков, математична компетентність — це вміння бачити та застосовувати математику у реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичні моделі, досліджувати їх методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень[76].

Компетентність фахівця формується певним набором компетенцій. Якими ж компетенціями слід оволодіти, щоб стати компетентним фахівцем у математичній галузі? Вважаємо, що **математична компетентність** бакалавра напряму підготовки 6.040201 Математика формується компетенціями, які, враховуючи рекомендації МОН України (лист від 31.07.2008 р., № 1/9484), умовно поділимо на чотири групи: **соціально-особистісні**, **інструментальні**, **загальнонаукові** та, власне, **професійно-математичні**.

А. Соціально-особистісні компетенції:

A_1. Навики міжособистісних стосунків; готовність працювати в команді.

A_2. Уміння вести дискусію, поважаючи чужу точку зору та спокійно й аргументовано відстоюючи свою.

A_3. Здатність діяти в соціумі з урахуванням позицій та інтересів інших людей.

A_4. Здатність вступати в комунікацію з метою бути зрозумілим.

A_5. Повага до істини, неприйняття будь-яких маніпуляцій заради вигоди; критичне ставлення до результатів, висновків міркувань (своїх і чужих); турбота про якість виконуваної роботи.

A_6. Захопленість математикою і обраною професією, задоволення від занять нею;

A_7. Креативність, здатність до системного мислення;

A_8. Цілеспрямованість, наполегливість у навчанні, пошуку істини чи шляхів розв’язання проблеми, терплячість і працьовитість;

A_9. Здатність до самонавчання, уміння шукати і грамотно працювати з інформацією, здобувати нові знання, використовуючи нові освітні та інформаційні технології.

[76] Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Харків: Факт, 2005. – 360 с.

Б. Інструментальні компетенції:

$Б_1$. Здатність до письмової та усної комунікації рідною мовою;

$Б_2$. Спроможність використовувати у професійній діяльності іноземні мови.

$Б_3$. Володіння і користування математичною символікою (розуміння тверджень, висловлень, записаних мовою математичних символів, «переклад» мови математичних символів на природну мову і навпаки, тлумачення природної мови мовою математичної символіки).

$Б_4$. Здатність розуміти і використовувати математичні засоби наочності (графіки, діаграми, таблиці, схеми та ін.) для ілюстрації, інтерпретації, аргументації.

$Б_5$. Використання допоміжних засобів та інструментів, насамперед, ІТ (знання про існування різних інструментів і ресурсів, корисних для роботи математика, їх можливості та обмеження, уміння користуватися подібними інструментами та ресурсами у професійній діяльності, здатність освоювати нові).

$Б_6$. Дослідницькі навички.

В. Загальнонаукові компетенції:

$В_1$. Базові уявлення про основи філософії, психології, педагогіки, що сприяють розвитку загальної культури й соціалізації особистості, схильності до етичних цінностей, знання вітчизняної історії, економіки й права, розуміння причинно-наслідкових зв'язків розвитку суспільства й уміння їх використовувати у професійній і соціальній діяльності.

$В_2$. Базові знання фундаментальних наук в обсязі, необхідному для освоєння професійних дисциплін.

$В_3$. Базові знання в галузі інформатики й сучасних інформаційних технологій; навички використання програмних засобів і навички роботи в комп'ютерних мережах, уміння створювати бази даних і використовувати інтернет-ресурси.

Г. Професійно-математичні компетенції:

$Г_1$. Базові знання та уміння навчальних дисциплін ОПП підготовки бакалавра зазначеного напряму (фундаментальної і прикладної математики, інформатики і комп'ютерних наук, фізики, педагогіки, психології, методики викладання математики) згідно із вимогами до знань та умінь, сформульованими в робочих навчальних програмах відповідних дисциплін.

$Г_2$. Математичне мислення (розуміння поставленої задачі, уміння сформулювати проблему, передбачити очікуваний результат, володіння методами доведень, уміння довести твердження, виділити головну ідею, основні смислові лінії, на основі аналізу побачити і коректно сформулювати результат, наслідки з нього, узагальнення поняття чи результату на ширший клас об'єктів, здатність оцінити правильність і переконливість аргументів, обґрунтованість висновків, бачити різницю між доведенням того чи іншого факту і евристичними міркуваннями, прикладом, що ілюструє твердження, суперечливість інформації, помилки у міркуваннях, оцінювати вірогідність одержаного результату, прагнення розглядати усі можливі випадки, зокрема, й особливі, креативність, творчість).

$Г_3$. Обчислювальна культура (навики обчислень, зокрема, усних, тотожних перетворень виразів, вибору раціональних методів і способів обчислень, перетворень, ефективне використання технічних засобів).

$Г_4$. Постановка і розв'язання математичних задач (уміння формулювати математичну задачу, визначати до якого класу задач вона належить, володіння різними методами розв'язування задач, бажання і здатність розв'язувати задачу різними способами, порівнювати їх).

$Г_5$. Математичне моделювання (уміння безпосередньо застосовувати математичні поняття, теореми, формули в конкретних областях реального світу, життєвих ситуаціях; аналіз існуючих моделей конкретного процесу чи явища, оцінка їхньої обґрунтованості, надійності, області і можливості застосування, інтерпретація елементів моделі в контексті моделюючого реального процесу, створення власної моделі реального процесу чи явища, апробація, усунення недоліків, порівняння з альтернативними моделями, здатність подати результат, отриманий з допомогою математичної моделі у термінах і поняттях предметної області досліджуваного процесу, явища, проблеми).

$Г_6$. Презентація результатів та передача знань (здатність публічно презентувати власні та відомі наукові результати, уміння точно і доступно викласти знання в усній формі, педагогічна майстерність; здатність, на основі здобутої фундаментальної освіти, викладати математику в основній школі).

Уміння розв'язувати задачі найбільш повно характеризує рівень математичного розвитку особи, це один із найголовніших (якщо не найголовніший) показників математичної компетентності фахівця. Тому формування зазначеної компетенції – дуже важливий компонент навчальної діяльності університету й студента-математика. Зазначимо, що, навчаючи (чи навчаючись) розв'язувати задачі, формуються, крім, власне уміння розв'язувати задачі, й ряд інших компетенцій, зокрема математичне мислення, обчислювальна культура, поглиблення теоретичних знань, уміння користуватися математичною символікою, засобами наочності, дослідницькі навички, креативність, цілеспрямованість, наполегливість, працьовитість тощо.

На сьогодні у міжнародній моніторинговій практиці загальноприйняті три рівні математичної компетентності: рівень відтворення, рівень установлення зв'язків, рівень міркувань. Ці рівні математичної компетентності в основному виявляють себе при розв'язуванні математичних задач, що й відповідає трьом рівням складності (базовому, вищому за базовий і високому) різних контрольно-вимірювальних матеріалів з математики, зокрема тестових завдань ЗНО з математики випускників шкіл.

Пропонуємо й ми розрізняти три рівні сформованості уміння розв'язувати задачі: низький, середній, високий. Коротку характеристику кожного рівня наводимо нижче.

Рівень	Характеристика
Низький	Здатність розв'язувати типові задачі за зразком чи заданим алгоритмом, застосовуючи стандартні прийоми і технічні навики, належно виконуючи необхідні безпосередні обчислення та тотожні перетворення; розуміння, які саме факти, формули використовуються при розв'язанні, знання цих фактів і формул.
Середній	Розв'язування задач типових або відомих чи таких, що виходять за їхні межі лише незначною мірою. Здатність аналізувати й осмислювати умови і вимоги задачі, з'ясовувати тип задачі, висловлювати ідею розв'язання, складати план розв'язання і реалізовувати його; усвідомлення необхідності проаналізувати (перевірити) отриманий результат, здатність виконати такий аналіз чи перевірку; уміння користуватися у процесі розв'язання стандартними прийомами, використовувати необхідні теоретичні знання, користуватися математичною символікою та математичними засобами наочності; допускається незначна кількість несуттєвих помилок чи недоліків.
Високий	Є розвитком попереднього рівня. Здатність продукувати ідеї щодо розв'язання задачі, порівнювати їхньої, висувати гіпотези, розуміти необхідність їх перевірки; оптимально обирати математичний інструментарій, в т.ч. й математичні моделі, для досягнення результату; інтегрувати знання із різних розділів математики, самостійно виробляти алгоритм дій, виявляти творчість; уміння бачити математичну задачу (проблему) в контексті інших дисциплін чи галузей, життєвої практики, аналізувати і застосовувати її результати в умовах неповної, ймовірної чи надлишкової вихідної інформації, проводити узагальнення отриманих результатів.

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть у науковій літературі декілька означень понять «компетентність» та «компетенція». Проаналізуйте їх.
2. Підберіть завдання, виконання яких, на Вашу думку, дозволять перевірити рівень сформованості певної компетенції (або компетентності) майбутнього математика.

3.2. СУЧАСНИЙ УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ – ЯКИЙ ВІН?

Розкажи – і я забуду,
покажи – і я запам'ятаю,
дай спробувати – і я зрозумію.
Китайське прислів'я

Посередній учитель викладає.
Хороший учитель пояснює.
Видатний учитель показує.
Великий учитель надихає.
Вільям Артур Ворд

Сьогодні є дуже широкий спектр сфер людської діяльності, які потребують математиків, причому, він постійно розширюється, про що уже йшлося. Слід сказати, що усі види математичної діяльності цікаві й мають суспільну цінність. Однак особливе місце і особливу значимість у суспільстві займає професія вчителя математики.

Учитель, а особливо хороший учитель, має великий вплив на розвиток дітей, підлітків, молоді в цілому, на їхнє прагнення пізнавати й творити, на їхні моральні й духовні ціннісні орієнтири. Без перебільшення можна стверджувати, що майбутнє суспільств, народів, людства — в руках учителя. Звісно, виконати сповна це високе призначення може лише талановитий, творчий педагог, справжній майстер своєї справи.

Професія вчителя благородна й найдзвичайна водночас ще й тому, що вона зв'язує різні покоління, дозволяє продовжити в учнях себе — свої мрії, ідеї, ідеали, справу. Таким чином, хороший учитель живе вічно — у пам'яті, душах, учинках, творчості своїх підопічних та їхніх учнів і нащадків. Кожен із нас більшою чи меншою мірою завдячує своєму вчителю й професійному виборі. Віримо, що й на шляху професійного становлення ви матимете лише найкращих наставників, які залишать помітний інтелектуальний і моральний слід у вашому житті.

Які ж якості потрібно розвинути в собі, щоб стати справжнім учителем, щоб приносити користь і радість своїм учням і щоб самому знаходити у професії смисл життя? Кожен сам має сформувати свій ідеал учителя і прагнути до нього.

Визначальні характеристики хорошого вчителя можна довго перераховувати. Це, насамперед, досконале знання свого предмета, захоплення ним, бо неможливо навчати інших того, чого не знаєш

і не вмієш сам. Однак, щоби бути хорошим учителем, мало знати й любити дисципліну, яку викладаєш. Адже навчання не є автоматичним (чи механічним) укладанням власних знань у голови учнів. Треба любити педагогічну справу, добре володіти методикою викладання дисципліни, знати і враховувати психологічні, фізіологічні, вікові особливості особи, яку навчаєш. І, безумовно, треба любити й поважати людей. Сучасний учитель — особистість творча, відкрита до нових освітніх технологій. Він сам постійно вчиться й удосконалюється, а також навчає своїх учнів самостійно здобувати знання, вчитися допитливо й охоче, створює умови для розвитку їхніх творчих здібностей. Сучасний учитель має бути високоосвіченою, ерудованою людиною, добре володіти ІКТ.

Гарного педагога вирізняють самовіддача, відповідальність, ініціативність, інтелігентність, демократизм, висока культура праці, самокритичність, такт, толерантність, культура міжособистісного спілкування, справедливість, доброзичливість, послідовність, чесність, щирість, доброта, почуття гумору, неабиякий артистизм. Учитель має сам бути вільною особистістю і виховувати вільну, самостійну, відповідальну, критично мислячу і достойну Людину.

Хороший учитель вимогливий до себе й до інших. Розумна вимогливість привчає учнів систематично працювати і виховує повагу до предмета. Помиляються ті вчителі (викладачі), які сподіваються завоювати любов підопічних і авторитет своїм ліберальним ставленням, заниженими вимогами до їхньої підготовки, завищенням оцінок. Подібна «тактика» призводить лише до того, що учні перестають вникати в суть дисципліни, наполегливо оволодівати нею і починають уважати нормальним явищем отримувати гарні оцінки за неповноцінні знання. Позаочі вони скептично, а то й зневажливо ставляться як до дисципліни, так і до її викладача, «добренького» й невимогливого. Крім того, якщо вчитель послаблює вимоги до знань та умінь учня, — він цим самим підриває його віру у власні сили, бо наперед заявляє про свою капітуляцію, демонструє, що й сам не вірить у свого підопічного, у його здатність засвоїти предмет на належному рівні. Учитель, який любить свою справу й відповідально до неї ставиться, не буде байдужим до долі свого предмета й успіхів своїх учнів. А справжня, а не удавана, любов до учнів, віра в них, уболівання за результати їхнього навчання, не дозволять учителеві бути невимогливим і непринциповим, несправедливим і нещирим.

Перелічені вище якості важливі для вчителя будь-якої дисципліни, а не лише для вчителя математики, — справедливо зауважите ви. А може взагалі нема якихось особливих вимог до вчителя математики? Зазначимо, однак, що питання про сучасного вчителя саме математики не тільки правомірне, а й не безпідставне. І підтвердженням цього є той загальновідомий (і прикрий) факт, що конкурси при вступі в університети на математичні й технічні спеціальності у рази відстають від відповідних показників на спеціальності гуманітарні, скільки б не переконували соціологи, що країні сьогодні потрібні «технарі» (інженери, конструктори, математики, фізики, програмісти) і що випускники гуманітарних спеціальностей можуть у майбутньому зіткнутися з проблемами працевлаштування.

Специфіка предмета математики, про що йшлося в п. 1.1, наштовхує вчителя математичних дисциплін на проблеми, які невідомі іншим учителям-предметникам, а це, у свою чергу, диктує особливі вимоги до викладання математики. Оскільки математика не вивчає безпосередньо речі реального оточуючого світу, її здебільшого не цікавить матеріальна природа об'єкта дослідження і користується вона формалізованими методами, то й навчання математики неодмінно вимагає підняття на певний рівень абстрактності. Цією особливістю пояснюються методичні труднощі, які постають перед учителем математики і які значно менше відчувають викладачі інших предметів. Учителю математики доводиться долати певні бар'єри у свідомості учнів, створені їхніми уявленнями про математику як суху, формальну науку, ніяк не пов'язану із життям. А для цього слід якомога частіше, завжди, коли це можливо, розв'язувати задачі із практичним змістом, удаватися до математичного моделювання явищ і процесів з різних галузей, що вимагає від учителя не лише глибоких знань математики, а й обізнаності в інших сферах, чіткого бачення міжпредметних зв'язків.

Абстрактність, складна логічна будова математичних означень і тверджень, суха математична мова, позбавлена образності, барвистості, нерідко стає значною перешкодою для розуміння математики. Як часто, на жаль, ми чуємо від школярів (чи їхніх батьків): «Я (чи моя дитина) математику не розумію (чи не розуміє)». Чия провина в цьому? Якщо не цілковита, то принаймні значна доля вини лягає на того, хто цієї математики дитину навчає. Що має зробити вчитель, аби знайомство учня з новим математичним поняттям, методом чи теоремою було приємним і природним? Перш за все — сам має настільки добре, в усіх деталях і тонкощах володіти відповідним

матеріалом, щоб могти пояснити суть справи прозоро, «на пальцях». Візьмемо на себе сміливість стверджувати, що кожне глибоке математичне поняття чи твердження за своєю суттю є простим. Учитель (викладач) має домогтися від учнів розуміння цієї суті, демонструючи різні її прояви — наочні, чуттєві, а не лише сформульовані словесно чи з допомогою математичних формул. Проілюструємо сказане на прикладі вивчення методу математичної індукції. Розуміння цього важливого методу доведення традиційно викликає труднощі в учнів саме через «нестравність» його математично-словесного формулювання, а не через саму суть.

Наведемо можливий варіант формулювання, який, неважко передбачити, доведе учня до паніки.

Нехай маємо деяке твердження $P(n)$, де $n \in N$. Якщо $P(1)$ істинне і якщо з того, що $P(k)$ істинне, випливає істинність $P(k+1)$ для деякого $k \in N$, то $P(n)$ істинне для всіх $n \in N$.

Якщо вчитель обмежиться подібним формулюванням (адже ж — усе зрозуміло!) і вимагатиме від учня знати його напам'ять, то він не доможеться ні відтворення пропонованого тексту, ні, тим більше, уміння користуватися методом математичної індукції при доведенні тверджень.

Пропонуємо наш варіант (він, звісно, не єдино можливий) пояснення суті методу математичної індукції.

Починаємо з гри «Чорна скринька». Вносимо (можна під музику із симфонічної поеми Р. Штраусса «Так говорив Заратустра», виконуваної в «прелюдії» у відомій телепередачі «Що? Де? Коли?» та з відповідною артистичністю) «чорну скриньку» і пропонуємо учням («знавцям») завдання-запитання: «Відомо, що у цій скриньці — натуральні числа. Точно відомо також, що тут є число 1, а також те, що, разом із будь-яким натуральним числом, тут є й наступне за ним натуральне число. За одну хвилину назвіть натуральні числа, що знаходяться в чорній скриньці». Відповідь очевидна: у чорній скриньці — **всі натуральні числа**, і автори не пам'ятають випадку, коли б учні за хвилину не знайшли правильної відповіді. Пропонуємо їм детально пояснити свою відповідь і сформулювати результат розв'язаної задачі. Спільно приходимо до такого очевидного твердження: «Якщо деяка множина натуральних чисел містить число 1 і якщо, разом із кожним своїм елементом k, вона містить також число $k+1$, то це — множина **всіх** натуральних чисел». Повідомляємо, що сформульоване твердження називається принципом математичної індукції. Суть його ми з'ясували, навіть не вдаючись до реальних об'єктів (мова йшла про абстрактні числа), але достатньо унаочнивши (через гру) саму ситуацію. Саме на принципі математичної індукції ґрунтується однойменний метод доведення. Перш ніж перейти до математичного трактування його суті, знову з'ясуємо, у чому тут справа, наочним, чуттєвим способом.

На рис. 10 бачимо поставлені на вузьке ребро одна за одною пластинки (кісточки доміно), які утворюють ланцюг. Відстань між сусідніми пластинками така, що будь-яка з них, падаючи, штовхає сусідню пластинку і викликає її падіння. Якщо штовхнути першу пластинку в напрямі до сусідньої, то, очевидно, одна за одною, падатимуть усі наступні пластинки, а в кінцевому результаті впаде увесь ланцюг, якби він навіть був нескінченним. Бо, якщо падає перша пластинка (а вона падає, бо ми її штовхнули), то впаде й друга, оскільки, ми знаємо, що падіння будь-якої пластинки викликає падіння наступної. З цієї ж причини впаде третя пластинка (бо впала друга), а за нею — четверта і т. д. (Кожен із нас бачив спеціально влаштовувані демонстрації падіння кісточок доміно. Фіксуються навіть рекорди на побудову якомога довшого демонстраційного ланцюга.) У цьому простому й цілком зрозумілому наочному прикладі — не менш проста й зрозуміла суть методу математичної індукції. Після подібного прикладу наведене вище словесно-математичне формулювання суті методу математичної індукції уже не буде здаватися «страшним».

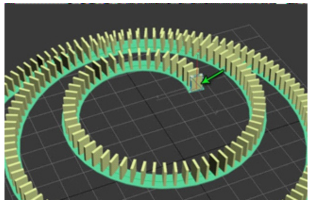


Рис. 10

Далі неодмінно слід розв'язати кілька вправ на доведення тверджень цим методом. Наприклад, довести, що при $x>-1$ для всіх натуральних n виконується нерівність $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Доведення. *Крок перший*. Перевіримо, чи виконується пропонована нерівність при найменшому, тобто першому, натуральному n. Підставимо у нерівність $n=1$: $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$, тобто $1+x \geq 1+x$. Ця нерівність, очевидно правильна. Тобто наше твердження правильне при $n=1$, ми це перевірили (аналог: перша кісточка доміно впала, бо ми її штовхнули).

Крок другий. Чи можемо ми бути впевненими, що, як тільки нерівність правильна при деякому натуральному n, нехай при $n=k$, то це означатиме її правильність і при наступному значенні n, тобто й при $n=k+1$? Перевіримо. Нехай при $x>-1$ нерівність $(1+x)^k \geq 1+kx$ правильна, де k – якесь натуральне число. Зазначимо, що наше припущення правомірне, оскільки одне таке k ми знаємо, це $k=1$. З'ясуємо тепер, чи випливає з цього припущення істинність нерівності $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. (Аналог: якщо падає хоч одна, будь-яка, кісточка доміно, — падатиме й наступна.) Домноживши обидві частини нерівності $(1+x)^k \geq 1+kx$ на додатний вираз $(1+x)$, маємо:

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

або те саме, що

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2.$$

Враховуючи, що $kx^2 \geq 0$, з останньої нерівності записуємо:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Отже, так, випливає істинність нерівності.

Крок третій. Робимо висновок. Що ми маємо? Пропонована для доведення нерівність правильна при $n=1$ (ми це перевірили). Крім того, ми встановили (довели), що з істинності нерівності при $n=k$ випливає її істинність і при $n=k+1$. Таким чином, унаслідок математичної індукції, нерівність правильна для всіх натуральних n.

Як бачимо, вчителю математики потрібно проявляти певну винахідливість, цілеспрямовано докладати чимало зусиль, щоб у кожному конкретному випадку знайти оптимальний спосіб, можливо, навіть для кожного учня свій, з допомогою якого він оволодіє абстрактними математичними поняттями і твердженнями. А сьогоднішні можливості ІКТ грамотному педагогу в цьому допоможуть.

При навчанні математики дуже важливими є пояснення вчителя. Якщо тексти для школярів з історії, географії, літератури життєві, а мова художніх творів яскрава, образна, і тому учень має великі шанси опрацювати їх без сторонньої допомоги, то тексти підручників з математики найчастіше потребують певної їхньої ретрансляції вчителем. Учитель ніколи не повинен економити час на поясненні нового матеріалу. В ході пояснення слід домагатися від слухачів повного, наочного і всебічного розуміння принципових ідей, методів, постановок задач і результатів. Лише тоді учні відчуватимуть радість від пізнання, навчатимуться мислити логічно, послідовно, доказово, відрізняти головне від другорядного.

Звернемо увагу на ще одну, дуже важливу особливість математики, яка породжує й відповідні вимоги до вчителя математики. Математика, як, можливо, ніяка інша наука, немислима без задач. Про роль і місце задач у математиці ми уже вели мову. Без перебільшення можна сказати, що вся математика — в задачах, що математика — це і є задачі. Перед учителем стоїть надзвичайно складне і найважливіше завдання – навчати учнів розв'язувати задачі. Треба розвивати у своїх вихованців смак до дослідження, озброювати їх методами дослідницької роботи. Хороший учитель математики не дає готові істини, а лише супроводжує в пошуку істини. Найвірніший шлях до педагогічної майстерності у зазначеному напрямі — самому наполегливо (і постійно !) опановувати мистецтво розв'язування задач.

У кожного вчителя (викладача) бувають заняття, які приносять йому особливе задоволення, які він сам уважає дуже вдалими. А що сприяло успіху? Що слід робити, аби такими ж успішними були всі заняття? Де джерело натхнення? На ці питання немає однозначної відповіді. Як і нема єдиного рецепту успіху. Його доводиться увесь час шукати. І в цьому чи не найбільша привабливість учительської професії. У ній без творчого горіння, експерименту, без постійного пошуку нових рішень на кожному уроці, у кожному класі, з кожним окремим учнем обійтися неможливо.

Учитель математики має бути в деякій мірі чарівником. Він має вміти складне й заплутане вмить зробити простим і зрозумілим. Він має навчити розв'язувати задачі, до яких іще вчора учень боявся й підійти. Він відкриває учням очі на красу, величність і значимість математики. Він легко й непомітно спрямовує їх по стежці, що веде до маленьких і більш вагомих перемог. Він з'являється в класі і підопічні завмирають в очікуванні чуда. І лише від нього залежить, чи це чудо відбудеться.

Шановна, Ларисо Михайлівно!

Насамперед, хочу повідомити Вам, що я вступила до Київського університету імені Бориса Грінченка за спеціальністю „математика". Так, так, саме математика. Я просто, не побоюсь цього слова, „закохалася" в цей університет. Він захопив мене своєю величчю та надзвичайно теплою атмосферою. В мене таке відчуття, що я вже багато років навчаюсь тут, і, приходячи на заняття, мені не хочеться йти додому.

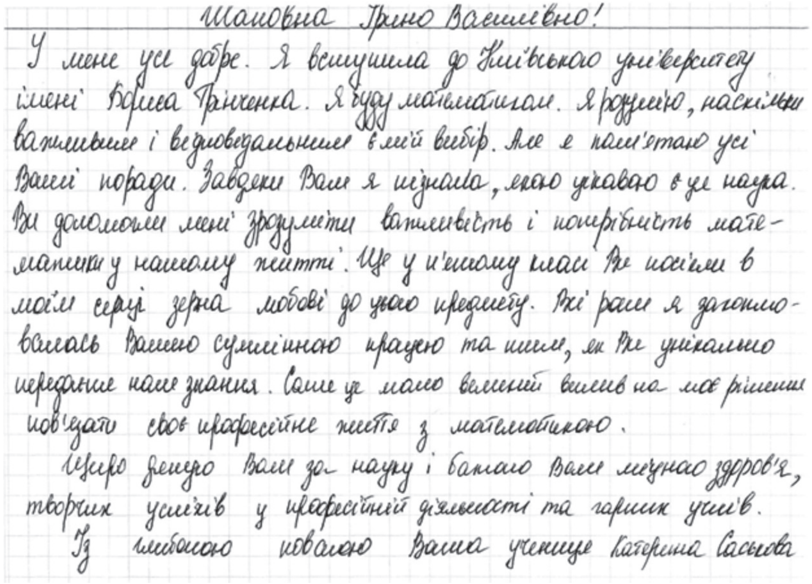
А чому саме на математику вступила я?, – ви запитаєте. Я поясню. В буквальному розумінні цього слова, мене „осяяло", і в останній момент подачі документів мені захотілося навчитись математиці. Я хочу, щоб математика стала мені подругою по життю, а, водночас, я стану вірною їй. І зараз, я впевнена, що зробила правильний вибір. До кінця не можу передати своїх відчуттів, та мені надзвичайно подобається.

Ви скажете, що буде важко. Так, я знаю, та я не цураюся труднощів. По життю я звикла до них, тому, думаю, що ми з математикою будемо йти назустріч одна одній. Не хвилюйтесь, я впораюсь!

Хочу сказати Вам, Ларисо Михайлівно, велике дякую! За те, що незважаючи ні на що, Ви завжди вірили в мене та підтримували мою віру у власні сили. Дякую, за прокладену ту дорогу, по якій я можу йти далі. Дякую, Вам Учителю, за ті безцінні знання, яких мене навчили!

З повагою Вікторія.

Лист своїй учительці студентки Київського університету імені Бориса Грінченка Вікторії Кудлюк



Шановна Ірино Василівно!

У мене усе добре. Я вступила до Київського університету імені Бориса Грінченка. Я буду математиком. Я розумію, наскільки важливий і відповідальний мій вибір. Але я пам'ятаю усі Ваші поради. Завдяки Вам я пізнала, якою цікавою є ця наука. Ви допомогли мені зрозуміти важливість і потрібність математики у нашому житті. Ще у п'ятому класі Ви посіяли в моїм серці зерна любові до цього предмету. Всі роки я захоплювалась Вашою сумлінною працею та тим, як Ви унікально передавали нам знання. Саме це мало великий вплив на моє рішення пов'язати своє професійне життя з математикою.

Щиро дякую Вам за науку і бажаю Вам міцного здоров'я, творчих успіхів у професійній діяльності та гарних учнів.

Із глибокою повагою Ваша учениця Катерина Саськова

Лист своїй учительці студентки Київського університету імені Бориса Грінченка Катерини Саськової

Завдання для самостійної роботи

1. Назвіть десять рис, які, на Вашу думку, мають бути притаманні кожному вчителю математики.
2. Назвіть дві–три риси (якщо вважаєте, що такі є), які обов'язково мають бути у вчителя математики, але не обов'язкові для вчителя іншого предмета. Обґрунтуйте свою відповідь.
3. Створіть колективний портрет гіпотетичного сучасного вчителя математики (*завдання для групи студентів*).
4. Згадайте урок математики, який викликав у Вас захоплення.
5. Напишіть твір на тему: «Мій ідеал учителя математики».
6. Якщо я стану вчителем (викладачем) математики (математичних дисциплін), то я обов'язково буду… (*розкажіть, яким / якою Ви себе бачите в цій іпостасі*).

3.3. ЯК НАВЧАТИСЯ, ЩОБ СТАТИ ДОБРИМ ФАХІВЦЕМ, АБО ДЕСЯТЬ ЗАПОВІДЕЙ СТУДЕНТУ-МАТЕМАТИКУ

Вивчення математики — неначе підйом альпіністів на високу гірську вершину. Вивчаючи цю науку, будь старанним і спокійним, працюй систематично, життєрадісно й уважно. Тільки тоді ти станеш розвиненою людиною і будеш здібним до вивчення всіх інших наук.

Олександр Хінчин

Навчити математики не можна нікого, навчитися – може кожен.

Леонід Фінкельштейн

Отже, позаду школа, зовнішнє незалежне оцінювання, вибір спеціальності та навчального закладу і перший крок до омріяної професії зроблено, Ви — студент. Однак, незважаючи на позитивну мотивацію до навчання, частині студентів-першокурсників не вдається успішно оволодівати знаннями. Чому? Причин тут декілька. Насамперед — недостатня шкільна математична підготовка, попри те, що зовнішнє тестування за курс середньої школи пройдено із пристойним результатом. Є й інші причини. У частини першокурсників слабо сформовані такі риси, як внутрішня готовність до учіння та уміння навчатися самостійно, контролювати та оцінювати себе, володіти своїми індивідуальними особливостями пізнавальної діяльності, правильно розподіляти свій робочий час. А методи навчання у вищому навчальному закладі суттєво відрізняються від шкільних. Якщо у школі навчальний процес побудований так, що новий матеріал подається невеликими порціями, його опрацювання, закріплення, контроль чергуються і чітко регламентовані, то в зовсім інші обставини потрапляє вчорашній школяр, переступивши поріг вищого навчального закладу. Лекції, лекції, лекції… Більшість студентів хибно вважає, що до них не треба готуватися. Коли ж починаються практичні заняття, то відповідний лекційний матеріал устиг майже повністю «вилетіти з голови». Крім того, його нагромадилося так багато, що «логічно» дійти висновку про непотрібність підготовки, бо на самому занятті викладач усе розкаже. Є й категорія студентів, які не вміють правильно розподіляти свої зусилля, раціонально організувати свій час і, як наслідок, швидко втрачають працездатність. А ще — нове оточення, нові друзі, нове місце проживання, нові враження, віддаленість від батьків, відсутність їх безпосереднього щоденного контролю і підтримки. Подібні труднощі й обставини (об'єктивні та суб'єктивні) певною мірою неминучі, з ними стикається майже кожен першокурсник. Тому слід навчитися їх долати, аби процес соціально-психологічної та дидактичної адаптації в університеті пройшов швидко, безболісно і з найменшими втратами. Зазначимо, що в адаптаційний період ви не залишитеся сам на сам із труднощами, ваші старші колеги, викладачі, різні служби університету завжди готові надати цільову допомогу кожному студентові з урахуванням конкретних індивідуальних проблем. Не нехтуйте можливістю таку допомогу отримати.

Спираючись на власний досвід, не лише студентський, а й багатолітній педагогічний, дамо й ми деякі поради, як досягти успіху у навчанні. Не претендуючи на їх ексклюзивність чи універсальність, все ж сподіваємося, що вони стануть у нагоді першокурсникові, який приступив до систематичного вивчення математики, обравши її своєю професією.

1. Ліквідуй прогалини у знаннях.
2. Працюй систематично.
3. Добре вивчай теорію.
4. Усвідомлено розв'язуй задачі.
5. Завжди, де це можливо, спирайся на здоровий глузд.
6. Раціонально розподіляй час.
7. Вір у власні сили.
8. Навчайся наполегливо й активно.
9. Веди здоровий спосіб життя, дружи з фізкультурою і спортом.
10. Підвищуй свою загальну культуру, розвивай естетичний смак.

Розглянемо ці поради детальніше.

1. *Ліквідуй прогалини у знаннях.*

Одним із головних завдань студента-математика є засвоєння глибоких і систематичних знань багатьох математичних дисциплін. Зверніть увагу, що ми кажемо «засвоєння», а не «запам'ятання чи вивчення», наприклад. А успішне оволодіння знаннями, уміннями і навичками з цих дисциплін можливе лише на базі ґрунтовної математичної підготовки в обсязі програми загальноосвітньої школи.

На жаль, як свідчить практика, значна частина студентів-першокурсників мають суттєві прогалини у засвоєнні математичних знань, умінь і навичок за школу. Поширеним недоліком математичної підготовки випускників шкіл є також формалізм у засвоєнні знань. Багато вчорашніх абітурієнтів на першій же контрольній роботі з елементарної математики дають відповіді, які яскраво ілюструють недоліки, а іноді просто провали у їхній математичній підготовці. Лише кілька прикладів подібних відповідей цілком реальних студентів-математиків:

$$\sin 5 \text{ не існує;}$$

$$\sqrt{16} = \pm 4;$$

$$\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{8\pi}{7};$$

$$\text{нерівність } x^2 - 2x + 3 > 0 \text{ не має розв'язків;}$$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 y} = \log_2(x - y);$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

а то й

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

Перед цими студентами так само, як і перед їхніми викладачами, гостро постає проблема усунення прогалин, корекції знань. Ми не випадково говоримо тут про корекцію знань. Справа в тому, що часто те чи інше твердження учень чи студент формулює неправильно, помилково трактує певне явище чи зв'язок, «за аналогією» робить неправильний висновок, неправомірно використовує те чи інше правило, факт. Це зустрічається при формальному засвоєнні знань та умінь, незалежно від того, чиєї провини в такому засвоєнні більше: вчителя чи самого учня. Однак, потім досить важко буває «перевчити», «відучити» від помилки. Навіть після пояснення її суті та причини, дехто продовжує наступати на ті самі граблі. У цьому зв'язку доречно згадати таку історію. Розповідають, що один молодий художник, який навчався у непрофесіонала, намалював картину і показав її Рафаелю. «Що ви думаєте про цю картину?», — запитав він знаменитого митця. «Що ви могли б дечого навчитися, якби ви нічого не знали», — відповів Рафаель.

Усунення прогалин, які утворюються на різних етапах шкільного навчання, є винятково важливим фактором підвищення ефективності навчання у вищому навчальному закладі, а також першочерговим завданням самостійної навчальної роботи студентів-першокурсників. Із цією метою, зокрема, слід якнайповніше скористатися можливістю, яку дає вивчення нормативної навчальної дисципліни «Елементарна математика». Хоча змістове наповнення зазначеного курсу відоме студентам ще зі шкільної лави, проте він не є механічним повторенням чи дублюванням відповідного шкільного матеріалу. Його завдання — навести лад у тій «сумі» математичних понять і фактів, які учень отримав у школі, повторити і систематизувати їх, а також виробити деякі навчальні, самоосвітні й дослідницькі навички. З допомогою викладача кожен зможе з'ясувати свої прогалини в знаннях і виробити план корекційних дій та конкретні завдання й рекомендації щодо його виконання.

2. *Працюй систематично.*

У студентському середовищі математиків поширені різні жартівливі настанови першокурсникам, навчених досвідом старшокурсників. Одна із них так чи інакше стосується нашої проблеми: «Першокурснику, пам'ятай, що любити математику треба неперервно, а не лише в особливих точках». І хоча математичні терміни «неперервність» та «особливі точки» першокурснику ще не знайомі (зате студенти старших курсів — знавці) та й суті настанови не стосуються буквально (на те воно й жарт), все ж ми добре розуміємо, що йдеться про важливість систематичності й повноти у вивченні математики. І справді, незнання, слабке знання, нерозуміння хоча би однієї ланки (теми, окремої теореми, формули тощо) робить практично неможливим якісне засвоєння наступного матеріалу. Така вже особливість математики.

Видатний російський фізіолог, Нобелівський лауреат академік І.П. Павлов (1849 — 1936), звертаючись до студентів і молодих науковців, казав: «Із самого початку привчайте себе до суворої послідовності в накопиченні знань. Вивчайте ази науки, перш ніж намагатись зійти на її вершини. Ніколи не беріться за наступне, не засвоївши попереднього. Ніколи не намагайтеся замаскувати прогалини своїх знань»[77]. Замасковане незнання вчений називає мильною булькою, яка неодмінно лусне і призведе до конфузу, поставить вас у смішне становище. Тому надзвичайно важливо уже з перших днів навчання привчити себе до регулярних цілеспрямованих занять математикою, перш за все до регулярного відвідування лекцій, практичних, лабораторних занять і ретельного виконання домашніх завдань. А щоб викладач міг бачити реальний стан ваших знань та умінь, ваші проблеми, прогалини й, відповідно, допоміг

[77] Павлов И.П. Избранные труды. — М., 1954. — С. 36.

розробити саме для вас індивідуальну програму виправлення ситуації — ніколи не списуйте!

Систематичності й послідовності навчання сприяє також часте повторення й удосконалення раніше вивченого.

3. *Добре вивчай теорію.*

Про важливість теоретичної підготовки для математичної творчості, а отже, для розв'язування задач, йшлося у другому розділі. Спробуємо дати деякі рекомендації і поради, як отримати добру теоретичну підготовку.

Як треба слухати лекцію і готуватися до лекції? Найважливіше завдання студента на лекції з будь-якої математичної дисципліни — зрозуміти. Те, що зрозуміло, надовго залишається в пам'яті і стає основою, фундаментом для отримання нових знань. Математик — той, хто розуміє (Дж. Пойа). Однак самого лише розуміння матеріалу лекції недостатньо. Отриману інформацію необхідно осмислити невідкладно, щоб до нової лекції ці знання допомогли отримувати нові. Найкраще: прочитати вдома лекцію у той же день, поки свіжі в пам'яті враження від неї, з'ясувати усі важливі моменти, прояснити незрозуміле; далі — перед наступною лекцією, щоб актуалізувати отримані на попередній знання; і особливо ретельно — готуючись до практичного, лабораторного чи семінарського заняття.

При вивченні будь-якого курсу чи окремого його розділу, теми, так же само, як і при повторенні раніше вивченого, необхідно подбати про добре засвоєння понять і термінів. Саме засвоєння, а не запам'ятання! Механічне запам'ятовування і відтворення означень, без глибокого розуміння суті відповідного поняття чи явища, смислу того чи іншого терміна, нічого, крім шкоди, не принесе. Не кажучи уже про те, що механічно завчені означення довго в пам'яті не тримаються, вони не служитимуть цеглинками у будівлі цілісного знання, бо ми не побачимо їхнього місця у цій будівлі і лише породимо нові труднощі. Крім того, те, чого не розумієш, важко запам'ятати навіть на короткий час. Адже математичні означення — не вірші, запам'ятати які допомагають чітка ритмічна структура і милозвучність. Зате, якщо ми чітко розумітимемо, що воно таке, для чого потрібне і як із ним поводитися, — жити стане набагато легше. Запам'ятання — неодмінний наслідок розуміння. Більше того, той, хто добре засвоїв поняття, зможе бачити зв'язки між ними, тобто — висувати гіпотези, формулювати теореми, а, отже, відчути радість відкриття. Ось чому при вивченні теорії слід приділяти означенням особливу увагу, домагаючись беззаперечного розуміння того чи іншого поняття на простому, навіть примітивному, рівні. Класичним прикладом поняття, яке важко дається першокурснику, є границя послідовності (функції), яка вивчається у курсі математичного аналізу. Проілюструємо можливий спосіб засвоєння на прикладі означення границі послідовності дійсних чисел.

Почати краще з геометричного означення: «Число a називається границею числової послідовності $\{x_n\}$ (позначають цей факт так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), якщо у будь-який ε-окіл точки a потрапляють усі члени послідовності, починаючи з деякого».

Отже, перш за все маємо розуміти, що таке числова послідовність і що таке ε-окіл точки. Із числовими послідовностями першокурсники знайомі ще зі школи, де вивчали арифметичну та геометричну прогресії. Тому добре уявляють послідовність як нескінченний ряд виписаних підряд чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Тобто кожному натуральному числу n відповідає одне і тільки одне дійсне число x_n — n-ий член послідовності. Інакше кажучи, послідовність — це функція натурального аргументу, значеннями якої є числа $x_n, n \in N$. А ε-околом точки a називають інтервал з радіусом ε із центром у точці a, тобто проміжок $(a-\varepsilon; a+\varepsilon), \varepsilon > 0$.

Тепер «розбираємо» саме означення. У ньому мова йде про числову послідовність $\{x_n\}$ (тобто точки на числовій осі) і дійсне число (точку) a. Причому говориться, що у **будь-якому** ε-околі точки a є члени послідовності, причому, їх там безліч. Тобто, якщо уявити собі, що точки (члени послідовності) одна за одною з'являються на числовій прямій (ще краще, якщо це буде мультимедійна демонстрація), то вони скупчуватимуться біля точки a, бо ж сказано — «**у будь-якому околі**», отже, у як завгодно малому, в тому числі. Візьмемо, наприклад, послідовність, задану формулою $a_n = 2n+3$. Це — арифметична прогресія, перший член якої 5, а різниця дорівнює 2: 5, 7, 9, 11, 13, …, $2n$+3, … . Очевидно, що на числовій прямій ці точки розташовані рівномірно на відстані 2 одиниці одна від одної, тому ніякого скупчення ми не побачимо. Точки ж послідовності $x_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ скупчуються біля нуля, причому який би малий ε-окіл точки 0 ми не взяли, у ньому будуть, як стверджується в означенні, **усі члени послідовності, починаючи з деякого**. Тобто за межами цього околу залишається лише скінченне число перших членів, а увесь «хвіст» послідовності потрапить в окіл точки 0. Наприклад, якщо $\varepsilon = 1$, то в околі нуля з радіусом 1 будуть усі члени послідовності, крім першого; якщо $\varepsilon = 0{,}1$, то в інтервал $(-0{,}1; 0{,}1)$ потраплять усі члени послідовності, починаючи з одинадцятого, і лише десять перших членів — за межами околу; при $\varepsilon = 0{,}001$ у відповідний окіл потрапить тисяча перший член $\left(\frac{1}{1001}\right)$ й усі наступні і т. д. Очевидно, що так буде для будь-якого $\varepsilon > 0$, причому, чим менше ε, тим більша (але все одно скінченна!) кількість перших членів залишиться за межами ε-околу точки 0. І для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми завжди можемо цю кількість указати. Справді, із нерівності $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ знаходимо: $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тобто, усі члени, починаючи з номера $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, потрапляють в ε-окіл точки 0. Отже, число 0 є границею послідовності $x_n = \frac{1}{n}$.

Розглянемо таку послідовність $\{y_n\}: 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, 5, \ldots$. Тут члени з парними номерами також скупчуються біля нуля, і в будь-якому (як завгодно малому) його околі є безліч членів послідовності. Але й за межами цього околу залишається безліч членів послідовності з непарними номерами, які ніде не скупчуються, а рівномірно віддаляються в нескінченність. Тобто у будь-який (як завгодно малий) окіл точки 0 потрапляють не **усі** члени послідовності, починаючи з деякого, а лише через один. Отже, число 0 не є границею цієї послідовності.

А члени послідовності $z_n = (-1)^{n-1}: 1, -1, 1, -1, \ldots$ скупчуються у двох точках 1 та–1. Жодне із чисел 1 чи —1 границею послідовності $\{z_n\}$ не є, бо, хоч у довільному (як завгодно малому) околі точки, скажімо 1, є безліч членів послідовності, але, знову ж, це не «**всі, починаючи з деякого**», а лише через один, з непарними номерами, а всі члени з парними номерами (а їх також безліч!) у цей окіл не потрапляють (вони скупчуються в точці –1).

Добре уяснивши собі геометричну (графічну) чи механічну (динамічну) суть поняття границі послідовності, нема потреби слово в слово (як вірш) запам'ятовувати наведене вище означення, його можна сформулювати трохи інакше, наприклад, так: «Число a називається границею числової послідовності $\{x_n\}$ (позначають цей факт так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), якщо у будь-який ε-окіл точки a потрапляють усі члени послідовності, крім, можливо, скінченного числа перших членів». І це також буде правильно.

Тепер не викличе труднощів й аналітичне (мовою не геометрії, а математичного аналізу) означення границі послідовності, оскільки до нього приходимо природно, перефразовуючи геометричний зміст границі. Справді, геометричний факт, що члени послідовності $\{x_n\}$ містяться в ε-околі точки a , мовою алгебри означає нерівність:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

або, після додавання до усіх її частин $-a$:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon ,$$

чи, використовуючи, знак модуля:

$$|x_n - a| < \varepsilon . \qquad (*)$$

Причому нерівність (*) виконується для будь-якого ε, але не обов'язково для всіх членів послідовності (тобто не обов'язково для всіх номерів *n*), а лише, «починаючи з деякого». А із якого саме починаючи, залежить від ε . Чим воно менше, тим більший порядковий номер члена послідовності, починаючи з якого виконується нерівність (*). У суті розібралися, формулюємо означення: «Число a називається границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер n_0 (що залежить від ε), що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ ». Кожне слово в цьому означенні важливе, але, зрозумівши його суть, ми нічого не переплутаємо. Бо розумітимемо, що, коли:

а) слова «для будь-якого $\varepsilon > 0$ » замінити на «існує $\varepsilon > 0$ », то границею послідовності $x_n = \dfrac{1}{n}$, наприклад, яку ми розглянули вище, можна вважати будь-яке число, скажімо, 10. Бо, взявши $\varepsilon = 10$ чи будь-яке число, більше за 10, нерівність (*) виконується для всіх *n* (геометрично: усі члени послідовності потрапляють в ε-окіл точки 10);

б) слова «знайдеться такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ » замінити на «для всіх *n*», то послідовність $x_n = \dfrac{1}{n}$ не має границі, бо ж не у будь-який ε-окіл нуля потрапляють **усі** члени послідовності, наприклад, в інтервал $(-0{,}1; 0{,}1)$ не потрапляють 10 перших членів;

в) слова «для будь-якого $\varepsilon > 0$ » замінити на «для будь-якого ε », то жодна послідовність не матиме границі, бо при $\varepsilon \le 0$ нерівність (*) виконуватися не може; і т. ін.

Вимога глибоко вникати в суть такою ж мірою стосується й математичних тверджень. Будь-який новий закон (теорему, формулу) слід неодмінно ясно собі уявити, відчути інтуїтивно. Для цього найбільш придатними є наочні інтерпретації фактів, що вивчаються (зокрема, геометричні, графічні) та перевірка на конкретних простих прикладах (І. Ньютон казав: «При вивченні науки приклади корисніші за правила»). І лише після цього приступати до знайомства з доведенням, а, ще краще, по можливості, довести самостійно. «Кращий спосіб вивчити що-небудь — це відкрити самому» (Дж. Пойа). Але, якщо знайти своє доведення (ідею) не вдається, то розібратися у прочитаному чи прослуханому на лекції треба настільки добре, щоб, по-перше, з'явилося відчуття, ніби до цього спроможний був би дійти й сам, а, по-друге, суть справи міг би пояснити кожному зустрічному, навіть не математикові. А для цього математику слід читати з олівцем і папером, не можна математичну теорію читати як легке художнє чтиво. Дуже корисним буде таки справді пояснити комусь (товаришеві, однокурснику, наприклад) виучуваний факт та його доведення, бо, навчаючи іншого, ви, крім іншого, вчитеся чітко і точно висловлювати думку, відповідати на запитання, вести діалог із опонентом. Усе це дозволить при вивченні нового домогтися повного, наочного і всебічного розуміння принципових ідей, методів, постановок задач і результатів.

Кожне нове знання треба аналізувати з погляду його зв'язку з раніше отриманими у цій чи інших навчальних дисциплінах. Нові поняття, факти мають увійти в систему знань, розширити кругозір.

І, нарешті, для того, щоб знання зберігалися в довготерміновій пам'яті, необхідні повторення й узагальнення. Останнє є більш високим ступенем осмислення матеріалу.

4. *Усвідомлено розв'язуй задачі.*

Побутує цілком слушна думка, що при вивченні математики головне — задачі. Адже саме задачі є метою і засобом навчання та математичного розвитку, а теорія глибоко усвідомлюється у процесі практичного її застосування. Прогалини у формуванні математичних умінь і навичок справляють зворотний негативний вплив на засвоєння теоретичних знань. Набуті ж знання без належного практичного застосування недостатньо усвідомлюються, не набувають системного характеру і погано фіксуються пам'яттю, що призводить до їх забування. Задачі — єдино можливий шлях розвитку творчих здібностей, тому про умови та принципи, необхідні для успішного розв'язування задач, уже йшлося у другому розділі, присвяченому математичній творчості.

Відповідь на питання, як же навчитися розв'язувати задачі, дуже проста — треба розв'язувати задачі. Дж. Пойа писав, що «розв'язування задач — це практичне мистецтво, подібне до плавання чи катання на лижах, чи гри на фортепіано: ви можете навчитися цього, лише наслідуючи хороші взірці і постійно практикуючись ... Якщо ви захочете навчитися плавати, то маєте зайти у воду, а якщо захочете стати людиною, яка добре розв'язує задачі, ви повинні будете їх розв'язувати»[78]. При цьому важливо усвідомити, що мистецтвом розв'язувати математичні задачі можна оволодіти лише наполегливо й самостійно працюючи.

Не вдаватимемося тут у деталі підходів і методів до різного типу математичних задач (їхній опис ви знайдете у різних спеціально для цього призначених посібниках), а вкажемо лише обов'язкові етапи розв'язання будь-якої задачі. Це — дослідження умови, складання плану розв'язання, реалізація цього плану, перевірка результату.

Беручись за задачу, необхідно: чітко уяснити, що дано і що треба знайти (довести, з'ясувати, побудувати); вияснити зміст незрозумілих слів (термінів), фраз; розділити умову задачі на складові частини і викласти її зміст своїми словами. Дуже важливим елементом аналізу умови задачі є переведення інформації, що міститься в ній, на математичну мову чи мову того методу, який плануємо використати. Наприклад, якщо в умові задачі сказано, що швидкість легкового автомобіля (a км/год) більша за швидкість автобуса (b км/год) на 15 км/год, то математичною мовою це означає: $a — b = 15$. Під час такого дослідження-аналізу корисно, по змозі, відповісти на запитання: «Чи можливе виконання умови? Чи нема в умові протиріч? Чи достатньо даних для визначення невідомих (виконання вимоги задачі)? Чи даних недостатньо або надлишок?».

Перш ніж приступити до пошуку шляхів розв'язання, слід ще раз переконатися, що умову задачі ви правильно й чітко зрозуміли. Для цього корисною буде ілюстрація задачі (даних і шуканих величин, зв'язків між ними) будь-якими засобами наочності (наприклад, схема, рисунок).

Після дослідження умови задачі намічаються кроки для її розв'язання і послідовність, у якій вони мають бути виконані, тобто

[78] Джордж Пойа. Математическое открытие. — М.: «Наука», 1970. — С. 13.

розробляється план (алгоритм). Тут слід, у першу чергу, з'ясувати, чи зустрічалися ви раніше з подібною задачею, чи можна було б до задачі застосувати вже відомі вам підходи. Тут також слід задавати собі запитання: «Які висновки випливають із даних задачі? Які з цих висновків можуть бути корисними для відповіді на поставлене у задачі запитання (вимогу)? Чи можна змінити вихідні дані або / та невідомі так, щоб вони оптимальніше могли бути використані?» тощо. Подібні запитання відіграють також роль стимулятора, каталізатора. І насамкінець: «Чи всі вихідні дані використані?».

Знайти шлях розв'язання, продуктивну ідею часто допомагає розгляд часткового випадку, пошук аналогічної задачі у нижчій розмірності. Якщо ви не можете розв'язати якусь задачу, складіть самі найпростішу задачу того ж типу і подивіться, що вона вам підкаже. Наприклад, якщо вам важко зобразити схематично графік показникової функції $y = a^x$, то прикиньте «по точках» графіки, наприклад, $y = 2^x$ та $y = 0{,}5^x$; якщо ваш братик-семикласник не знає, як знайти 15% (тобто 0,15) від комплекту із 20 олівців, то запропонуйте йому знайти, скільки є олівців у двох, трьох, п'яти, n таких комплектах, і зверніть його увагу, що для знаходження відповіді кожного разу використовувалася дія множення; якщо молодший школяр забув правило знаходження невідомого дільника, то треба пропонувати йому придумати простий приклад (скажімо: $15 : x = 5$), де відповідь $x = 3$ одержується, якщо 15 (ділене) поділити на 5 (частку). Саме такий шлях усіх узагальнень: від простого, наочного — до абстракції, поширення на ситуацію, яку уявити неможливо (гіпотеза Пуанкаре, про яку йшлося в п.п. 2.3.4, у звичному нам тривимірному просторі для двовимірної поверхні є наочно-очевидним фактом).

Реалізуючи свій план розв'язання, перевіряйте кожен крок, упевніться, що процес на останньому його кроці відповідає поставленому на початку завданню. Якщо це не так, то слід переглянути усі попередні кроки. Якщо ваш план привів до мети, подумайте, що з нього може знадобитися в інших задачах, за даною конкретною ситуацією намагайтеся побачити загальний метод.

Перевірка отриманого результату може проводитися кількома способами: встановлення відповідності між шуканою величиною і вихідними даними; складання і розв'язання оберненої задачі; розв'язання задачі іншим способом (це само собою дуже корисно, бо виробляється досвід, а, порівнюючи способи, обирається коротший і ефективніший); оцінка результату з позиції здорового глузду.

Отже, задача розв'язана, відповідь перевірена. І що далі? А тепер, можливо, найголовніше. Ще раз «пройдіть», проаналізуйте увесь шлях розв'язку, акцентуйте увагу на ідеї розв'язання, подумайте, що допомогло прийти до неї, чому інші ідеї (якщо такі були) виявилися непродуктивними. Якщо вам задача сподобалася, задайте її своїм друзям, близьким, розкажіть про свій спосіб розв'язання. Якщо ви поділитеся цією задачею з іншими, вона стане по-справжньому «Вашою», увійде у скарбничку «Ваших» задач. І чим повнішою буде ця скарбничка, тим легше буде вам розв'язувати задачі, тим частіше вас будуть осіняти блискучі ідеї.

І ще кілька порад організаційного характеру:

— пам'ятайте, що для успішного розв'язування задач необхідне глибоке розуміння відповідного теоретичного матеріалу;
— при вивченні нової теми ретельно ознайомтеся з наведеними у підручнику (в посібнику, на лекції) прикладами розв'язаних задач, не лінуйтеся їх уважно розібрати; розв'язування задач на нову тему варто починати із простіших, поступово підвищуючи рівень складності;
— уміння, пов'язані з обчисленнями, тотожними перетвореннями виразів тощо слід доводити до автоматизму; якщо систематично не тренувати навички, то вони втрачаються;
— ніколи не користуйтеся різного роду «розв'язниками» (принаймні до спроби розв'язати самому), шукайте свій шлях;
— задачу, яка викликала у вас значні труднощі, обговоріть з однокурсниками, викладачами; ніколи не залишайте нерозв'язаних задач.

5. *Завжди, де це можливо, спирайся на здоровий глузд.*

Здоровий глузд — це концентрат величезного досвіду, набутого людством узагалі і кожним із нас зокрема. З нього ми черпаємо відомості про світ, у якому живемо, явища, процеси, оточуючі нас предмети, об'єкти. І тому він є добрим поводирем у тих ситуаціях, процесах, на яких він сформований.

Апелювання до здорового глузду не дозволить отримати відповідь, наприклад, $\log_{0,5}14$ у задачі про об'єм піраміди (бо $\log_{0,5}14<0$), 276 років — у задачі про вік людини чи 1,2 — у задачі про ймовірність появи події. Уміння керуватися здоровим глуздом — важлива складова математичної культури.

Вихідним пунктом багатьох математичних (і не тільки) відкриттів має бути (і є) здоровий глузд, саме він, найчастіше, дозволяє формулювати гіпотезу. Однак у ситуації, що виходить за межі нашого досвіду, жодних «здорових» уявлень у нас не виникне, а «здоровий глузд» у принципово нових умовах може виявитися поганим порадником (див. приклад про порівняння чисельності множин усіх раціональних і усіх натуральних чисел у п. 2.1). Тому кожен висновок, продиктований «здоровим глуздом» має потрапляти під прицільний обстріл критики.

6. *Раціонально розподіляй час.*

Не слід відкладати виконання домашнього завдання, розрахунково-графічної роботи, підготовку до практичного, семінарського чи лабораторного заняття, контрольної роботи, колоквіуму тощо на останній момент. Починайте виконувати домашнє завдання, як тільки його отримали, тоді ви матимете можливість об'єктивно оцінити його обсяг і складність та розрахувати й раціонально розподілити свої сили. Добре дисциплінує і допомагає раціонально розподіляти час потижневе планування своєї навчальної роботи і свого дозвілля.

7. *Вір у власні сили.*

«Успіх приходить до тих, хто вірить у власні сили» — ці слова Вінстона Черчілля якнайкраще підходять до процесу навчання. Ніколи не пасуйте перед труднощами, ні за яких обставин не здавайтеся. Пам'ятайте, що помилки і невдачі — не кінець світу, а лише початок справжнього навчання, результатом якого обов'язково буде радість перемоги, бо багато чого можна навчитися, аналізуючи власні помилки.

8. *Навчайся наполегливо й активно.*

Знання не приходять самі по собі, хочемо ми цього, чи ні. Знання треба наполегливо шукати, перш ніж вони стануть нашими. Знання — результат великої праці й самопожертви, самодисципліни й відповідальності.

І хоча під час навчання в університеті викладачі докладатимуть максимум зусиль, щоб зробити ваш шлях до обраної професії легким і цікавим, розуміння математики, як пише Р. Курант, «не набувається лише безболісно розважальним способом — так само, як, наприклад, не можна набути музичної культури шляхом читання журнальних статей (як би яскраво вони не були написані), якщо не навчитеся слухати уважно і зосереджено. Неможливо обійтися без діяльного контакту із самим змістом живої математичної науки»[79].

9. *Веди здоровий спосіб життя, дружи з фізкультурою і спортом.*

Здоров'я і здоровий спосіб життя — якісна передумова здатності до складної навчальної діяльності і творчої активності, а в майбутньому — до професійної самореалізації. Тому турбота про власне здоров'я має бути одним із першочергових завдань молодої людини.

Основні вимоги здорового способу життя:
- — рухова активність, заняття фізкультурою і спортом, оптимальні фізичні навантаження;
- — раціональне харчування;
- — умови праці, що задовольняють санітарно-гігієнічні норми;
- — раціональний режим праці й відпочинку;
- — відмова від шкідливих звичок;
- — оволодіння знаннями, уміннями відновлювати сили, оздоровлювати організм.

10. *Підвищуй свою загальну культуру, розвивай естетичний смак.*

Про виняткову важливість естетичного фактора для математичної творчості ми вже вели мову (див. п. 2.1.). Укажемо тут і на інші аспекти проблеми. У більшості школярів, слід визнати, небезпідставно склався стереотипний образ математика, учителя математики як сухого нецікавого зануду. Це, у свою чергу, призводить до того, що незначна їх частина любить математику, а ще менша — обирає її сферою професійної діяльності. Про згубність для майбутнього держави і суспільства подібної тенденції ми вже говорили. Отже, щоб змінити ситуацію, аби для більшої кількості школярів математика ставала улюбленим предметом, у школу має прийти вчитель, який знає не тільки математику, а й є цікавою та багатогранною особистістю із широким кругозором, учитель високої культури, естет.

Слід сказати, що обмежений у загальнокультурному плані математик, як правило, не є висококласним математиком. Як справедливо зазначає І.М. Гельфанд у своєму привітанні з ювілеєм знаменитого Московського фізико-математичного ліцею «Друга школа», «хороший математик сьогодні не може займатися тільки математикою… Чим ширший горизонт, тим зручніша і легша математична техніка»[80]. Доречно відмітити, що гуманітарні дисципліни і навіть фізкультура у цьому навчальному закладі викладаються на такому високому рівні, що школу жартома називають фізико-математичною з історико-літературним і фізкультурним ухилом.

[79] Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Перевод с английского под редакцией А.Н. Колмогорова.— М.: Издательство Московского Центра непрерывного математического образования, 2001.— 568 с.— С. 34.

Загальнокультурний рівень людини тісно пов'язаний не лише з її інтелектуальним розвитком, а й із духовним та фізичним здоров'ям. Так, наприклад, кожен студент знає про згубний вплив на організм людини тютюну й алкоголю. Разом із тим, практика паління і вживання спиртних напоїв, на жаль, доволі поширена у студентському середовищі. Найчастіше цигарка чи чарка, бокал є свого роду комунікативним фактором. Людям широкого кругозору, високої духовності нема потреби вдаватися до подібних посередників для знайомства, налагодження стосунків чи спілкування.

Врешті-решт, високий загальнокультурний рівень фахівця будь-якої галузі є передумовою нарощення його творчого потенціалу, уміння «тримати удар», діяти конструктивно й відповідально в різних життєвих ситуаціях.

Завдання для самостійної роботи

1. Сформулюйте свої десять умов успішного навчання. Які труднощі відчуваєте Ви у навчанні?
2. Дайте відповіді на питання анонімної анкети «Ваше ставлення до здорового способу життя». Ваші відповіді будуть використані лише у даному дослідженні; конфіденційність гарантується.

I. ***Ви виросли:***
а) в великому місті;
б) в невеликому містечку;
в) в селі.

II. ***Ваша стать:***
а) жіноча;
б) чоловіча.

III. ***Чи вважаєте Ви, що маєте шкідливі звички?***
А) так;
б) ні.

[80] История школы //Голос. Издательство «Второй школы», №2. — 2008. — С. 2.

IV. ***Як Ви проводите свій вільний час?***

а) сиджу вдома, дивлюся телевізор, граю у комп'ютерні ігри;
б) гуляю з друзями на свіжому повітрі;
в) займаюся спортом;
г) сиджу із друзями в кафе;
ґ) іду в театр, кіно, на виставку;
д) у мене нема вільного часу.

V. ***Чи дотримуєтеся Ви правильного режиму харчування?***

а) так;
б) ні;
в) як вийде.

VI. ***Як часто Ви робите ранкову зарядку?***

а) кожен день;
б) ніколи;
в) час від часу;
г) що це таке?

VII. ***Чи займалися Ви коли-небудь якимось видом спорту, відвідували секцію (якщо так, то яким / яку)?***

*а) так*____;
б) ні.

VIII. ***Коли Ви останній раз займалися спортом?***

а) на останньому занятті фізкультури;
б) учора;
в) тиждень тому;
г) місяць тому;
ґ) не пам'ятаю.

IX. ***Як Ви вважаєте, чи сприяє здоровий спосіб життя успіху у навчанні, роботі?***

а) так;
б) ні;
в) важко відповісти.

X. ***Чи можете Ви собі дозволити відвідування спортивних секцій, басейну тощо.***

а) можу, регулярно відвідую;
б) можу, але не бачу в цьому смислу;
в) не можу через брак часу;
г) не можу через брак коштів.

XI. ***Чи часто Ви задумуєтеся про правильність свого способу життя?***

а) часто;
б) рідко;
в) взагалі про це не думаю.

XII. ***Ваше особисте ставлення до здорового способу життя:***

а) це чудово;
б) можна обійтися й без нього;
в) іноді слід дотримуватися;
г) не можу відповісти.

XIII. ***Для підняття життєвого тонусу, на Вашу думку, необхідно (вибрати усі можливі варіанти):***

а) дотримуватись режиму дня;
б) займатись спортом;
в) прогулюватись на природі;
г) уживати алкоголь;
ґ) використовувати легкі наркотики;
д) читати художню літературу;
е) слухати музику, відвідувати концерт, театр;
*є) Ваш варіант*____.

XIV. ***Як Ви вважаєте, абсолютно здорова нація це:***

а) ілюзія;
б) реальність?

ДОДАТОК

МАТЕМАТИКА В АФОРИЗМАХ І ВИСЛОВЛЮВАННЯХ ВІДОМИХ ЛЮДЕЙ

Знайомство з думками світлих умів є чудовою розумовою вправою: воно запліднює розум і удосконалює мислення.

Йоганн Гердер

1. Суть математики, її предмет

Математика – це різновид мистецтва.

Норберт Вінер

Логіка – це гігієна, правил якої математик дотримується, щоб зберегти свої ідеї здоровими і сильними.

Герман Вейль

Математика (на відміну від об'єктів реального світу) цілком створена людиною. Кожна теорема, кожне доведення – це продукт людського розуму. В математиці можна зрозуміти абсолютно всі деталі. У цьому сенсі математика – це щось конкретне, тоді як оточуючий світ – абстракція.

Моріс Клайн

Математику як науку не можна означити, не визнавши її найочевиднішої властивості – того, що вона цікава.

Нільс Бор

Дати сьогодні загальне уявлення про математичну науку – означає зайнятися справою, яка від самого початку наштовхується на майже непереборні труднощі завдяки широті й різноманітності розглядуваного матеріалу.

Ніколя Бурбакі

Із часів греків говорити «математика» – означає говорити «доведення».

Ніколя Бурбакі

Математика – це наука свідомої і послідовної логічної думки.

Ніколя Бурбакі

Математика – наука, яка обертається у сфері ідеального, але стає засобом дослідження, розуміння і пізнання світу реального.

Волтер Вайт

Математика – це єдина симфонія нескінченного!

Герман Вейль

Математика є менше знанням, ніж умінням. Ось чому вона здатна розвинути властивості розуму і характеру, пов'язані з навиками до абстракції, до суворої, цілеспрямованої дисципліни і висловлювання різними мовами (мовою спілкування, фігур, формул і графіків) схематично, стисло і чітко.

Дональд Макміллан

У математиці більше, ніж будь-де, виявляє себе приказка: хто сказав А, той має сказати й Б.

Андрій Конфорович

Доведення – це середовище, в якому зароджуються, розвиваються і гинуть математичні поняття.

Анатолій Скороход

Математична мова не терпить ухилянь, математичні висновки тверді, як скеля, і ніякими фразами, ніякою софістикою їх не спростувати.

Анатолій Скороход

Математика є менше знанням, ніж умінням.

Філіп Дейвіс

Математика найбільш ощадлива до слів. Вона може обійтися навіть зовсім без слів. Для неї не існує мовних бар'єрів, бо її мова, як і мова музики, зрозуміла для всіх людей світу.

Казимир Дзевановський

Математика – цариця всіх наук, а арифметика – цариця математики.

Карл Ґаусс

Математика – це шлях до вивчення природи.

Анрі Пуанкаре

Музика може підносити або заспокоювати душу,
Живопис – радувати око,
Поезія – пробуджувати почуття,
Філософія – давати поживу розуму,
Інженерна справа – удосконалювати життя людей матеріально,
А МАТЕМАТИКА здатна досягти усіх цих цілей.

Моріс Клайн

Я хочу відзначити чотири найважливіші риси, спільні для математики, музики й інших наук та мистецтв: перше – краса, друге – простота, третє – точність і четверте – божевільні ідеї.

Ізраїль Гельфанд

Математика – наука велика, пречудовий витвір однієї з найблагородніших здібностей людського розуму.

Дмитро Писарєв

Чиста математика за своєю науковою цінністю незмірно вища від усіх своїх застосувань, навіть астрономічних; через це вона дуже приваблива.

Микола Чернишевський

Не вважайте, що математика суха, важка для розуму і відразлива для здорового глузду. Навпаки, тільки вона прояснює здоровий глузд.

Вільям Томсон

Найвища гармонія обдарованого уявою інтелекту завжди наділена переважно математичним характером.

Едгар По

Математика – це мова природи.

Джозайя Гіббс

Математика – одна з найдавніших наук; вона також – одна з найактивніших, бо її сила у завзятті вічної юності.

Дж.Форсайт

Математика – це велетенський пінцет наукової логіки.

Дж.Голстед

Математика – королева і служниця наук.

Ерік Белл

Суть математики – у вічній молодості.

Ерік Белл

Якщо хтось хоче коротко і виразно охарактеризувати суть математики, той має сказати, що це наука про нескінченне.

Анрі Пуанкаре

Математика – ворота і ключ від усіх наук і мирських справ.

Роджер Бекон

Математика – найкоротший шлях до самостійного мислення.

Веніамін Каверін

Модель – це основна форма, за допомогою якої математика зв'язана із зовнішнім світом.

Юрій Митропольський

Якщо обґрунтування різних обчислень на машинах і є однією з функцій математики, – сама ж математика у жодному разі не зводиться до цих обчислень, так само, як і математична обдарованість не зводиться до уміння швидко і точно рахувати.

Павло Александров

Логіка – це гігієна для математика, але не вона живить його: хлібом насущним для нього є важливі проблеми.

Андре Вейль

Механіка – це рай математичних наук, за її допомогою досягають математичного плоду.

Леонардо да Вінчі

Чиста математика є вагомим доказом реальності знань, набутих за посередництвом самого лише чистого розуму.

Іммануїл Кант

Уся математика – це, власне, одне велике рівняння для інших наук.

Новаліс

У більшості наук наступне покоління відкидає те, що попереднє побудувало, те, що одне встановило – наступне знищує. І тільки у математиці кожне покоління добудовує новий поверх тієї самої споруди.

Герман Ганкель

Математика – барометр цивілізації.

Микола Єругін

Математика – основа всього точного природознавства.

Давид Гільберт

Математика – найнадійніша форма пророцтва.

Вільгельм Швебель

У математиці нема символів для заплутаних думок.

Анрі Пуанкаре

Математика – це мистецтво називати різні речі одним і тим же іменем.

Анрі Пуанкаре

Математика – єдиний досконалий метод, який дозволяє водити самого себе за ніс.

Альберт Ейнштейн

Ніде, крім математики, ясність і точність висновків не дозволяє ухилитися від відповіді розмовами довкола питання.

Олександр Александров

Математичні науки, природничі науки і гуманітарні науки можна назвати, відповідно, надприродними, природними і неприродними.

Лев Ландау

Між духом і матерією посередником є математика.

Гуґо Штейнгаус

«Очевидний» – найнебезпечніше слово в математиці.

Ерік Белл

2. Значення математики

Немає науки, не пов'язаної з математикою: будь-яка наука, якщо вона має бути ґрунтовно розроблена, потребує застосування вищої математики.

Леонард Ейлер

Немає жодної галузі математики, якою б абстрактною вона не була, щоб її коли-небудь не можна було застосувати до явищ дійсного світу.

Микола Лобачевський

Математика – головна професія майбутнього.

Микола Єругін

Математика і властивий їй стиль мислення мають безперечно розглядатися як суттєвий елемент загальної культури сучасної людини.

Георгій Шилов

Математика показує дорогу до вершини гори, але вона не може зробити гору нижчою.

Василь Сухомлинський

З видатною культурною цінністю математики може зрівнятися лише цінність її як зброї нашого впливу на реальний світ.

Дональд Макміллан

Навіть найабстрактніші математичні результати врешті-решт впливають і на ті, які безпосередньо використовуються на практиці.

Анатолій Скороход

Знання математики – не лише прикраса національної культури; воно – умова економічного існування та елемент безпеки.

Едвард Сміт

Ні одна наука не зміцнює так віру в силу людського розуму, як математика.

Джордж Пойа

Знання законів перспектив – це одночасно й знання проективної геометрії, принаймні її елементарних понять. Саме тому чудовими полотнами майстрів епохи Відродження ми й досі захоплюємося.

Микола Кованцов

Хай не видасться перебільшенням, якщо ми скажемо, що великі духовні сили здатна пробудити в людині й математична проблема, чітко поставлена і математично захоплююча.

Микола Кованцов

Кожне нове відкриття є за формою математичним.

Флоріка Кимпан

Німе число… Почути його мову дано не кожному. Зрозуміти його суть можуть лише обрані і одержимі. Бо, заговоривши, воно стає прозорливим поводирем на незчисленних роздоріжжях науки.

Леонід Письмен

Відомий польський математик Гуго Штейнгаус жартома стверджує, що існує закон, який формулюється так: математик зробить це краще. А саме, якщо доручити двом людям, один із яких – математик, виконати будь-яку незнайому їм роботу, то результат завжди буде таким: математик виконає її краще.

Казимир Дзевановський

Намагаючись осмислити оточуючі нас загадки, обдумуючи і аналізуючи власні спостереження, я прийшов врешті-решт до царства математики. І хоча я абсолютно необізнаний у розумінні вивчення і знання точних наук, часто в мене більше спільного з математиками, ніж із моїми колегами-художниками.

Юліан Тувім

Механіка – це рай математичної науки, оскільки ми отримуємо в ній плоди математики.

Леонардо да Вінчі

А математику вже тому вивчати потрібно, що вона розум до ладу приводить.

Михайло Ломоносов

Людина, яка не знає математики, не здатна ні до яких інших наук. Більше того, вона навіть не здатна оцінити рівень свого невігластва, а тому не шукає від нього ліку.

Роджер Бекон

Хто здібний до математики, той успішний в усіх науках про природу.

Платон

Всесвіт – це грандіозна книга, відкрита для кожного, а написана вона мовою математики.

Галілео Галілей

Політ – це математика.

Валерій Чкалов

Усе, що було до цього у фізиці темним, математика зробила ясним, правильним і очевидним.

Михайло Ломоносов

Хімія – права рука фізики, математика – її очі.

Михайло Ломоносов

Математика – це більше, ніж наука, це – мова.

Нільс Бор

Найвище призначення математики полягає у тому, щоб знаходити прихований порядок у хаосі, який нас оточує.

Норберт Вінер

Хоч би як добре працювала машина, вона зможе розв'язувати всі поставлені перед нею задачі, але сама жодної задачі не придумає.

Альберт Ейнштейн

У людей, які засвоїли великі принципи математики, одним органом чуття більше.

Чарльз Дарвін

Жодна інша наука не навчає так ясно розуміти гармонію природи, як математика.

Пауль Карус

Фізик без математики сліпий.

Михайло Ломоносов

Нехай той, хто не математик, не читає мене.

Леонардо да Вінчі

Навряд чи можна мати якусь практичну користь від знання того, що число π ірраціональне; але кожен, хто це знає, погодиться, що не знати цього не можна.

Едвард Тітчмарш

Той, хто не здатен освоїти математику, не цілком є людиною. У кращому випадку це – вихований примат, якого навчили носити черевики, приймати ванну і не смітити в домі.

Роберт Хайнлайн

Розквіт і довершеність математики тісно пов'язані з добробутом держави.

Наполеон

Поняття математики – це поняття науки взагалі. Тому всі науки мають стати математикою.

Новаліс

Я шаную математику як найбільш піднесену, корисну науку, оскільки її застосовують там, де це доречно, але я проти того, щоб нею зловживали, застосовуючи її до речей, які зовсім не належать до її сфери і які перетворюють благородну науку на безглуздя, немовби все існує лише остільки, оскільки його можна математично довести. Хіба не дурень був би той, хто поставив би під сумнів кохання своєї коханої, бо *вона не змогла дати математичних доказів свого кохання? Розміри свого посагу вона може обґрунтувати математично, але не своє кохання.*

Йоганн Вольфґанґ фон Гете

Власне астрономія (як наука) почала існувати відтоді, як поєдналася з математикою.

Олександр Герцен

Математика – це найкращий і навіть єдиний можливий вступ до вивчення природи. Без геометрії і алгебри неможливе вивчення механіки; без геометрії, алгебри й механіки неможливе вивчення астрономії; без геометрії, алгебри, механіки й астрономії неможливе вивчення фізики й фізичної географії; без фізики не можна взятися за хімію; без фізики й хімії немає змоги підступитися до фізіології тварин і рослин.

Дмитро Писарєв

Математичні науки, що досягли високого ступеня досконалості, багато в чому мають бути зразком того стану, до якого повинні прагнути й інші науки.

Микола Чернишевський

Математик справедливо може пишатися своєю наукою і ставити її за приклад усім іншим.

Микола Чернишевський

Неможливо поглиблено займатися будь-якою точною наукою, не знаючи математики.

Джеймс Максвелл

Серед усіх наук, що відкривають людству шлях до пізнання законів природи, наймогутніша, найвеличніша наука – математика.

Софія Ковалевська

Без математики сучасна астрономія і фізика неможливі; у своїй теоретичній частині ці науки, так би мовити, розчиняються в математиці.

Давид Гільберт

Сучасна математика, це найдивовижніше творіння інтелекту, дала людині можливість зором проникнути в нескінченний час, рукою сягнути в безмежний простір.

Дж. Н. Батлер

Проникнення до більш глибоких принципових проблем фізики вимагає дуже тонких математичних методів.

Альберт Ейнштейн

Саме математика завжди була і є джерелом філософії, вона створила філософію і тому може називатися «матір'ю філософії».

Володимир Стеклов

Жодна природнича наука, якщо йдеться не про збирання матеріалу, а про справжню творчість, не обійдеться без математики, матері всіх наук. Що ж до фізики, то тепер математика і фізика такою мірою злилися в одне ціле, що іноді важко розмежувати – де закінчується математика і де починається фізика.

Володимир Стеклов

Математик, натураліст і технік мають іти рука об руку. Кожний із них потребує допомоги іншого. Тільки їхня спільна праця може бути успішною і дати належні плоди.

Дмитро Граве

Математика увійде в усі галузі знання.

Костянтин Ціолковський

Математика – головна професія майбутнього.

Микола Єругін

Інженер, що не володіє математичними методами, це не інженер, а монтер. Інженер у повному розумінні цього слова немислимий без знання математики.

Ігор Александров

Найбільшу радість тілу дає світло сонця, найбільшу радість духові – ясність математичної істини. Ось чому науці про перспективу, в якій споглядання світлої *лінії – величезна втіха для очей – поєднується із ясністю математики – величезною втіхою для розуму, – треба віддавати перевагу над усіма іншими людськими дослідженнями і науками.*

Леонардо да Вінчі

Математика – це те, з допомогою чого люди управляють природою і собою.

Андрій Колмогоров

У вивчення природи математика робить найбільший внесок, оскільки вона розкриває впорядкований зв'язок ідей, відповідно до якого влаштований Всесвіт.

Прокл Діадох

Хто нехтує досягненнями математики, той завдає шкоди всій науці, бо той, хто не знає математики, не може вивчити інші точні науки і не може пізнати світ.

Роджер Бекон

Кожного разу, коли та чи інша наука переходить від етапу простого споглядання дійсності до етапу абстрактного мислення, усвідомлення цієї дійсності на абстрактному рівні, неминуче виникають передумови для використання в науці математичних методів.

Віктор Глушков

Моделювання стоїть поруч із геометричним тлумаченням і являє ще вищий ступінь наочності.

Микола Жуковський

Стверджуючи, що геометричний метод можна застосувати не до всього, помиляються, – але мають рацію, коли кажуть, що його не слід застосовувати до всього. Кожен предмет має бути трактований по-своєму. Геометричний метод надто сухий, щоб застосувати його при навчанні манерам… Але, якщо доводиться колинебудь відмовлятися від його застосування, то все ж слід пам'ятати про нього; це свого роду компас для розуму і вузда для уяви.

Дені Дідро

У моральному плані математика навчає нас прискіпливо ставитися до того, що стверджується в якості істини, що висувається як аргумент або висловлюється як

доведення. Математика вимагає ясності понять і тверджень і не терпить ні туману, ні бездоказових заяв.

Олександр Александров

Хто хоча б один раз переконався в силі математичних законів, той буде помічати їх дію на кожному кроці, як у природі, так і в мистецтві.

Вернер Гейзенберґ

Математика – це наука про нескінченне, в якій людина, істота скінченна, ставить собі за мету осягнути нескінченне з допомогою знаків.

Герман Вейль

Тоді як фізика у своєму розвитку з настанням нинішнього сторіччя схожа на могутній потік, що мчить в одному напрямку, математика більше подібна до дельти Нілу, води якої, пінячись, розливаються в усіх напрямках.

Герман Вейль

Математика є наймогутнішим засобом для удосконалення наших розумових здібностей і дає нам можливість правильно мислити.

Галілео Галілей

Геометрія наближає розум до істини.

Платон

Можна сказати, що Ньютон був просто вимушений відкрити диференціювання та інтегрування, щоб мати можливість розвивати механіку.

Олександр Александров

Щоб поставити машині задачу, треба багато знати. Цінність обчислювальної машини залежить тільки від того, наскільки розумно буде використовувати її людина.

Норберт Вінер

Жодна інша наука не навчає так ясно розуміти гармонію природи, як математика.

Євген Карус

Математика дає найчистіше й найбільш безпосереднє переживання істини; на цьому ґрунтується її цінність для загальної освіти людей.

Макс фон Лауе

Математика — це гімнастика розуму і підготовка до філософії.

Ісократ

Математичне знання додає енергії розумові, позбавляє його упередженості, легковірства й забобонів.

Дж. Арбатнот

Жодної науки не можна пізнати без математики.

Роджер Бекон

Якщо ми хочемо в інших науках прийти до безперечної вірогідності й безпомилкової істини, то треба, щоб підвалини [всякого] знання лежали в математиці.

Роджер Бекон

Хто зухвало візьметься за філософію, нехтуючи, однак, математикою, той повинен буде визнати, що ніколи не увійде в двері істини.

Томас Брадвардін

Астрономія – безперечно, найголовніша з благородних наук і найдостойніше заняття вільної людини, – спирається майже на всі математичні науки.

Миколай Коперник

Поза математикою не існує жодної надійної галузі знання, окрім тієї, яка породжена математикою.

Роберт Рекорд

Немає науки, не пов'язаної з математикою: будь-яка наука, якщо вона хоче бути ґрунтовно розроблена, потребує застосування вищої математики.

Леонард Ейлер

Математика завжди була непримиренним ворогом наукових нісенітниць.

Домінік Франсуа Араго

Математика – панівна наука нашого часу. Її завоювання зростають день у день, хоч і без галасу. Хто не має її за собою, той колись матиме її проти себе.

Йоганн Гербарт

Математика для вченого – те саме, що скальпель для анатома: найнеобхідніший інструмент, без якого неможливо осягнути суть речей. Тим, хто спробує іти вперед без цього знаряддя, доведеться зупинитися на порозі.

К. Хансшін

Без математики – не збагнути глибин філософії, без філософії – не збагнути глибин математики; без їх обох не збагнути нічого.

Жан-Батист Бордас-Демулен

Математика як наука має чудові методи, що дають її істинам той ступінь вірогідності, на якому сумнів неможливий, і саме це, роблячи математику торжеством людського розуму, ставить її на перше місце серед наук.

Петро Лавров

Математика – це зібрання висновків, які можуть бути застосовані до будь-чого.

Бертран Рассел

Наш досвід переконує нас, що природа – це реалізація найпростіших математичних ідей.

Альберт Ейнштейн

Ми абсолютно впевнені, що сьогодні віршознавство без математики вже неможливе.

Андрій Колмогоров

У кожній природничій науці стільки істини, скільки в ній математики.

Іммануїл Кант

Математика навчає точності думки, підкоренню логіці доведення, поняттю строго обґрунтованої істини, а все це формує особистість, можливо, більше, ніж музика.

Олександр Александров

Головна сила математики в тому, що, разом із розв'язком однієї конкретної задачі, вона створює загальні прийоми і методи, що можуть бути застосовані в багатьох ситуаціях, які навіть не завжди можна передбачити.

Марк Башмаков

Математична істина залишається на віки вічні, а метафізичні привиди минають, як маячня хворого.

Вольтер

Якщо ми справді щось знаємо, то ми знаємо це завдяки математиці.

П'єр Гассенді

Математика невіддільна від інших галузей – фізики, біології, музики, поезії, філософії та інших класичних дисциплін.

Ізраїль Гельфанд

Математик – це людина, яка не тільки одразу ж схоплює чужу думку, а й також бачить, із якої логічної помилки вона випливає.

Гельмут Нар

Хто з дитячих років займається математикою, той розвиває увагу, тренує свій мозок, свою волю, виховує наполегливість і впертість у досягненні мети.

Олексій Маркушевич

Було б добре, якби ці знання вимагала сама держава і якби осіб, які займають вищі державні посади, привчали займатися математикою, а в потрібні моменти до неї звертатися.

Платон

3. Вивчення математики, навчання математиці, математична творчість

Ті, хто віддається практиці без знання, схожі на моряка, що вирушає в дорогу без керма і компаса. Практика завжди має базуватися на доброму знанні теорії.

Леонардо да Вінчі

Жодне людське дослідження не може називатися справжньою наукою, якщо воно не пройшло через математичні доведення.

Леонардо да Вінчі

Хто знається на розв'язуванні задач, повинен мати дві несумісні якості: живу уяву і непохитну впертість.

Говард Івс

Існує багато різних способів добре викладати, а ще більше – викладати погано, найгірший спосіб – викладати нудно. Результати навчання математики дуже залежать від майстерності педагога.

Ісай Шур

Хороший математик сьогодні не може займатися лише математикою. Чим ширший горизонт, тим зручніша і легша математична техніка.

Ізраїль Гельфанд

Велике щастя – творити, досліджувати, вивчати і викладати математику.

Річард Беллман

Неможливо навчити застосовувати математику, не навчивши самої математики.

Евальд Ільєнков

Методика викладання математики – не наука, а мистецтво.

Лев Кудрявцев

Ризикуючи перебільшити (сподіваюся, що не більше, ніж є перебільшенням будь-яке категоричне твердження), я сказав би, що майбутнє людства і його доля в руках учителів математики.

Гендрік Лоренц

Слід пам'ятати, що навчання математики, навчання володіти математичними методами має бути спрямовано на дві цілі: на навчання певних алгоритмів і навчання пошуку.

Лев Кудрявцев

Математика здає свої фортеці лише сильним і сміливим.

Андрій Конфорович

Від цікавого факту до внутрішньої краси математичного прийому – таким є надійний метод навчання учнів математики.

Юрій Шиханович

При вивченні математики вправи майже так само необхідні, як при навчанні гри на роялі.

Арсеній Закревський

Розвязування задач – це та стовпова дорога в математику, ширшої за яку немає і, очевидно, іншого способу прищепити цікавість до математики і полюбити цю мудру науку не існує.

Валерій Вавілов

Кращий спосіб вивчити що-небудь – це відкрити самому.

Джордж Пойа

Легкість математики ґрунтується на можливості чисто логічної її побудови, трудність, яка багатьох відлякує, – на неможливості іншого викладу.

Гуґо Штейнгаус

Не дивися на доведення як на процес, який тебе примушує, – дивися на нього як на процес, який тебе веде.

Гуґо Штейнгаус

Слава і популярність Ейлера є наслідком не тільки незрівнянної сили його генія. Їх викликала незвичайна широта його наукових інтересів; важко назвати таку ділянку математичних наук, де б він не створив нової галузі чи не просунув потужно вперед її розвиток. Цей, за висловом Д'Аламбера, «диявол в людській подобі» створив за своє життя (при цьому багато років перебуваючи в незрячому стані) більше, ніж за цей час середня людина могла би просто описати.

Михайло Кравчук

Математика – наука молодих. Інакше й не може бути. Заняття математикою – це така гімнастика розуму, для якої потрібні вся гнучкість і вся витривалість молодості.

Норберт Вінер

Помилково думати, що строгість в математиці – ворог простоти. Навпаки, численними прикладами підтверджується, що строгий метод простіший, легший і доступніший. Будь-яке зусилля в бік строгості спрямовує нас до віднайдення простіших методів доведення.

Давид Гільберт

Запитується, якій із двох якостей слід віддати перевагу: доступності чи строгій точності? Очевидно, що саме запитання містить неправильне припущення: воно припускає, що строга точність позбавлена доступності; але має місце протилежне: чим строгіша дедукція, тим доступніша вона для сприйняття, оскільки точність полягає у зведенні всього до найпростіших принципів. Звідси випливає також, що строгість у власному значенні цього слова, неодмінно тягне за собою найприроднішій і найпряміший метод.

Жан Д'Аламбер

Математик – той, хто розуміє.

Джордж Пойа

У математиці, як у будь-якій іншій науці, дуже багато романтики, але ніколи не слід забувати, що її вивчення – це не суцільне свято. Ні, часто – це прозаїчні будні, коли треба рано вставати, пізно лягати, багато розв'язувати і постійно думати, думати й думати.

Микола Кованцов

Лише допитлива до самозабуття людина може бути хорошим математиком.

Костянтин Феоктистов

Побудова математичних моделей – це свого роду мистецтво, де тісно переплітаються і знання теорії, і досвід, і інтуїція.

Макс Ейве

Математика любить сміливих.

Олександр Самарський

Саме на подоланні труднощів росте і розвивається математик.

Олександр Хінчин

Вивчення математики – неначе підйом альпіністів на високу гірську вершину. Вивчаючи цю науку, будь старанним і спокійним, працюй систематично, життєрадісно і уважно. Тільки тоді ти станеш розвиненою людиною і будеш здібним до вивчення всіх інших наук.

Олександр Хінчин

Математика – справа аж ніяк не тільки розуму, але також і фантазії.

Фелікс Клейн

Погане навчання наводить завжди неминуче на думку, що предмет під силу тільки особливо обдарованим.

Лоренц Саффорд

Розв'язування задач – специфічне досягнення розуму, розум же – особливий дар, яким наділена людина. Здатність до подолання перешкод, до знаходження обхідного

маневру там, де не видно прямого шляху, підносить розумну тварину над тупою, людину – над найрозумнішою твариною і талановитих людей – над іншими людьми.

Джордж Пойа

Математик, оскільки він відчуває в собі красу істинного, досконалий лише настільки, наскільки він сам є досконалою людиною. Лише тоді він буде діяти ґрунтовно, проникливо, обачно, чисто, ясно, привабливо, навіть елегантно. Все це необхідно, щоб стати подібним на Лагранжа.

Йоганн Вольфґанґ фон Гете

Вивчення математики наближає до безсмертних богів.

Платон

Розділ філософії, який називається математикою, є найлегшим із усіх розділів з точки зору означень і доведень… Цей розділ філософії дає нам гнучкість, зміцнює розуміння, привчає нас ненавидіти недомовленості, оскільки його вихідні положення загальновідомі, доведення легкі, в ньому уява допомагає розуму і мало протиріч.

Омар Хайям

Предмет математики настільки серйозний, що корисно не упускати нагоди зробити його трохи цікавим.

Блез Паскаль

Якщо математика, настільки властива людському розуму, залишається для багатьох безуспішним заняттям, то це по справедливості слід приписати недолікам у мистецтві і способі викладання.

Микола Лобачевський

Багато чого із математики не залишається в пам'яті, але коли зрозумієш її, тоді легко при потребі згадати забуте.

Михайло Остроградський

Тих, хто займається викладанням математики, можна порівняти з дорожнім знаком: вони мають однією стрілкою показувати в уже пройдене минуле, а другою – в іще незвідане майбутнє.

Ґуґо Штейнгаус

Необхідність спеціальних здібностей для вивчення і розуміння математики часто перебільшують.

Андрій Колмогоров

Розумова праця на уроках математики – наріжний камінь мислення.

Василь Сухомлинський

Логікою доводять, інтуїцією винаходять.

Анрі Пуанкаре

Логіка нам говорить, що на такому-то шляху ми можемо бути впевнені, що не зустрінемо перешкод; вона не каже, який шлях веде до мети. Для цього необхідно бачити мету здалеку і цьому нас навчає інтуїція. Без неї математик був би подібний на письменника, який прикутий до граматики, але не має ідей.

Анрі Пуанкаре

Я постійно тримаю в голові предмет свого дослідження і терпляче чекаю, поки перший проблиск мало-помалу перетвориться на повне і яскраве світло.

Ісаак Ньютон

Праця математика не проста механічна праця, її не може виконати машина, якою б досконалою ми її собі не уявляли.

Анрі Пуанкаре

Із усіх наук найбільше фантазії потребує математика, і це підтверджується тим фактом, що серед математиків ми зустрічаємо багато винахідників.

Віктор Кирпичов

Один давній французький математик сказав: «Математичну теорію можна вважати досконалою тільки тоді, коли вона настільки ясна, що її зміст легко міг би зрозуміти будь-хто». Цю вимогу ясності й доступності, тут так гостро поставлену щодо математичної теорії, я ще гостріше поставив би щодо математичної проблеми, яка претендує на досконалість; адже ясність і доступність нас приваблюють, а ускладненість і заплутаність відлякують.

Давид Гільберт

Математична проблема має бути достатньо складною, щоб нас спокусити, але водночас і не зовсім неприступною, щоб не зробити безнадійними наші зусилля. Вона має бути провідною зорею на звивистих стежках до прихованих істин, нагороджуючи нас врешті-решт радістю знайденого розв'язку.

Давид Гільберт

Якщо навчання математики певною мірою відображає те, як твориться математика, то в ньому повинно знайтися місце і для здогаду, для правдоподібного умовиводу.

Джордж Пойа

Розв'язання будь-якої простої, але не зовсім стандартної математичної задачі може потребувати деякого напруження, зате натомість дозволяє вам відчути тріумф відкриття.

Джордж Пойа

Є математики-тактики. Вони одразу штурмують задачі, які не піддавалися зусиллям попередніх дослідників. Інші математики – стратеги. Вони спочатку пильно аналізують поняття, охоплювані задачею, вивчають зв'язки між ними тощо; так саме розв'язання здається майже тривіальним. Обидва ці підходи безумовно важливі і плідні для розвитку математики.

Владислав Дзядик

Справжнім математиком є лише той, хто, по-перше, глибоко розуміє красу цієї науки і, по-друге, спроможний розв'язувати нетривіальні математичні задачі.

Владислав Дзядик

Відкриття, навіть найменше, завжди осяяння: після тривалих безплідних (але обов'язкових!) роздумів раптом, неначе ззовні, приходить результат так несподівано, немовби хтось його підказав… Але оскільки відкриття – результат осяяння, свого роду чудо, в тому, що це чудо станеться, ніколи не можна бути впевненим. Тим більше, що труднощі, які стоять на шляху, наперед не відомі.

Марк Азбель

Метод розв'язання добрий, якщо від самого початку ми можемо передбачити – а далі підтвердити це, – що слідуючи цьому методу, ми досягнемо мети.

Готфрід Вільгельм Лейбніц

Перша умова, якої слід дотримуватися в математиці, – це бути точним, друга – бути ясним і, наскільки можна, простим.

Лазар Карно

Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!

Джордж Пойа

Розв'язання складної математичної проблеми можна порівняти із взяттям фортеці.

Наум Віленкін

Уміння розв'язувати задачі – таке ж практичне мистецтво, як уміння плавати або ходити на лижах. Його можна навчитися тільки шляхом наслідування і тренування.

Джордж Пойа

Людину, що вміє спостерігати й аналізувати, обманути просто неможливо. Її висновки будуть безпомилкові, як теореми Евкліда.

Артур Конан Дойль

Геніальні математики пропонують теорему, талановиті її доводять.

Жак Адамар

Навчити математики не можна нікого, навчитися – може кожен.

Леонід Фінкельштейн

Щоб писати музику, треба любити музику. А щоб стати математиком, треба захоплюватися чарівністю закономірностей і логічною стрункістю законів. Це не означає, звичайно, що таке захоплення має бути єдиною пристрастю… Але, якщо ви не будете зачаровані математикою, ви в математиці нічого не створите.

Волтер Сойєр

4. Краса в математиці

Помиляються ті, хто вважає, що математика нічого не говорить про прекрасне… Насправді ж, вона говорить перш за все про нього і виявляє його. …Найважливіші види прекрасного – це злагодженість, співмірність і визначеність, математика якнайбільше виявляє саме їх.

Аристотель

Математика, якщо її правильно зрозуміти, володіє не тільки істиною, але й вищою красою – красою холодною і строгою, подібною до краси скульптури, без будь-якої апеляції до наших слабостей, без цих замаскованих капканів живопису й музики, драматургії й історії.

Бертран Рассел

Більше, ніж коли-небудь, математика є одночасно культурою в лоні культури і технікою в серці техніки. Вона являє собою культурну цінність сама по собі, ідеал формальної краси, закладеної у творах мистецтва – в тому, що в них є найбільш класичного. Цей ідеал виражається словами міра, порядок, відношення, пропорція, які є математичними термінами. Математика – це школа, в якій навчаються логіки на кожному кроці.

Олександр Александров

За допомогою математики відкривають нові, часто дивовижні і несподівані факти. У мистецтві прекрасне завжди містить елемент несподіваного, хоча не все несподіване прекрасне, – тоді як в математиці несподіване завжди прекрасне.

Костянтин Феоктистов

Нема нічого прекраснішого за просте і ясне доведення нетривіального факту.

Костянтин Феоктистов

Математика подібна до мистецтва – і не тому, що являє собою «мистецтво обчислювати» чи «мистецтво доводити», а тому, що математика, як і мистецтво, – це особливий спосіб пізнання.

Анатолій Скороход

Математика – це широкий чудовий пейзаж, відкритий перед усіма, для кого мислення приносить найбільшу радість.

Сергій Коваль

Математична творчість – це мистецтво, створення краси через встановлення логічних зв'язків між поняттями. Як і в інших мистецтвах, краса в математиці включає впорядкування хаосу, досягнення мети найменшими засобами, відкриття несподіваної взаємозалежності понять, які, здавалось би, не мають нічого спільного. Сприйняття краси в математиці приносить ті ж самі відчуття повноти самовираження, що й правильне розуміння музики, живопису і будь-якого іншого мистецтва.

Віктор Фукс

У математиці не менше логіки й краси, ніж у шахах. І є перевага: математики не розігрують між собою звання абсолютного чемпіона.

Юрій Лепьохін

Могутність і краса математичної думки – у граничній чіткості її логіки, витонченості її конструкцій, майстерній побудові абстракцій.

Едуардас Межелайтіс

Математика – цариця всіх наук. Її коханий – істина, її вбрання – простота і ясність. Палац цієї володарки оточений тернистими заростями, і щоб дійти до нього, треба продиратися крізь хащі. Випадковий подорожній не знайде в її палаці нічого привабливого. Краса його відкривається лише розуму, який любить істину і загартовувався в боротьбі з труднощами.

Ян Снядецький

Математика – це наука, яка вимагає присутності фантазії більше, ніж будь-яка інша наука.

Софія Ковалевська

Натхнення потрібне в геометрії не менше, ніж у поезії.

Олександр Пушкін

Не можна бути справжнім математиком, не будучи трохи поетом.

Карл Вейєрштрасс

Є в математиці щось таке, що викликає людське захоплення.

Фелікс Хаусдорф

Математика і поезія – це витвір тієї самої сили уяви, тільки у першому випадку уява звернена до голови, а в другому – до серця.

Теренс Хілл

Я не фахівець із математики, а тільки прихильник її, невдаха, закоханий у цю найпрекраснішу із наук.

Поль Валері

Математика – неначе сила людського духу, покликана винагородити нас за недосконалість наших почуттів і за короткочасність нашого життя.

Жан Фур'є

Геометрія є прообраз краси світу.

Йоганн Кеплер

Усі думають, що математика наука суха, нудна і полягає лише в умінні рахувати. Це нісенітниця. Цифри в математиці відіграють мізерну, останню роль. Це – вища філософська наука, наука найвидатніших поетів.

Михайло Остроградський

Математика має потрійну мету. Вона повинна давати інструмент для вивчення природи. Крім того, у неї є філософська спрямованість і, смію сказати, – естетична. Вона має заохочувати філософа до дослідження ідеї числа, простору і часу. До того ж знавцям вона дарує насолоду, схожу до тієї, яку отримують від живопису й музики. Вони захоплюються струнким гармонією чисел і форм, їх вражає, коли нове відкриття розгортає перед ними неочікувані перспективи… Щоправда, лише *небагатьом обраним дарований привілей відчувати це повною мірою. Але хіба не так само відбувається і з усіма високими мистецтвами? Тому я без тіні вагання скажу, що математику слід леліяти заради неї самої, а теорії, які не знаходять застосування у фізиці, треба вивчати так само, як і будь-які інші.*

Анрі Пуанкаре

Математика також може похвалитися творчою уявою, своїми чудовими теоремами, своїми доведеннями і методами, досконалість форми яких зробило їх класичними. Занадто вже «практичний» той, хто не може побачити поезії в математиці.

Вальтер Вайт

У людей, які часто стикаються з математикою, врешті-решт з'являється почуття математичної витонченості використовуваних прийомів, здатність відчувати математичну красу теорій.

Поль Дірак

Хороша музика, – «дар божественних звуків», – вона будується зі суворим дотриманням форми. У фугах Баха, як в алгоритмі, як у формулі, є строга послідовність. У цій строгості – джерело їх вражаючої сили. Так само у строгій послідовності математичних об'єктів є своя внутрішня музика, своя краса – жар холодних формул. Але так само, як для розуміння структури музики потрібна музична культура, так і переживання краси математики потребує культури математичної.

Олександр Александров

Математика зачаровує нас, неначе квітка лотоса.

Аристотель

Для мене знайти доведення математичної теореми дорожче, ніж здобути все персидське царство.

Демокріт

Кажуть, що в голові Архімеда уяви було набагато більше, ніж у голові Гомера.

Вольтер

З усіх мов світу найкраща – це мова штучна, вельми стисла мова, мова математики.

Микола Лобачевський

Хіба не можна музику описати як математику почуття, а математику – як музику розуму? Адже суть обох одна й та ж. Музикант відчуває Математику, математик думає Музикою. Музика – це мрія. Математика — це діяльне життя. І кожна досягне своєї вершини з допомогою іншої, коли людський інтелект, розвинутий до досконалості, засяє, прославлений якимось майбутнім Моцартом-Діріхле чи Бетховеном-Гауссом – союзом, що уже досить виразно провіщено генієм та працями Гельмгольца.

Джеймс Сильвестр

Незвична краса панує у царині математики, краса, подібна не так до краси мистецтва, як до краси природи; розважливий розум уміє цінувати цю красу так само, як і красу природи.

Ернст Куммер

За покликанням насправді ми поети, тільки наш обов'язок – усе, що вільно творимо, ретельно пізніше доводити.

Леопольд Кронекер

Мені здається, що поет має бачити те, чого не бачать інші, бачити глибше, ніж інші. Це саме повинен і математик.

Софія Ковалевська

У математиці так само, як і в музиці, малярстві або поезії. Будь-хто може стати юристом, лікарем чи хіміком і досягти в обраній галузі успіху, якщо він тямущий і працьовитий, але стати художником, чи музикантом, чи математиком може не кожен: звичайна тямущість і працьовитість, самі по собі, нічого тут не важать.

Август Мебіус

Щоб творити музику, треба любити музику, а не успіх (або, принаймні, музику не менше, ніж успіх). А щоб стати математиком, треба захоплюватися чарівністю закономірностей і логічною стрункістю законів.

Волтер Сойєр

Якби в математиці не було краси, то, мабуть, не було б і самої математики. Бо яка ж тоді сила притягувала б до цієї нелегкої науки найбільших геніїв людства?

Микола Чайковський

Пізнати істинну красу рівнянь може тільки фахівець. Ця естетика – поки що для небагатьох. Але про те, що вона існує, мають знати всі, бо інакше будь-які естетичні уявлення будуть обмежені.

Єремій Парнов

Математика – це широкий розкішний краєвид, відкритий усім, для кого мислення становить справжню радість.

В. Фухс

Він став поетом – для математики у нього не вистачило фантазії.

Давид Гільберт про одного зі своїх учнів

У задачах з елементарної геометрії іноді доводиться використовувати дуже дотепні, тонкі прийоми; і той, хто в молодості пізнав їхню чарівність, ніколи їх не забуде.

Еміль Борель

Математика в усі часи була і залишається «першою красунею» серед наук і, отже, естетичні принципи науки найбільш яскраво виявляються в математиці.

Олександр Волошинов

Натхнення потрібне в математиці, як і в поезії.

Олександр Пушкін

Математика є прообраз краси світу.

Йоганн Кеплер

Математики схожі на закоханих… Погодьтеся з математиком у якомусь найпростішому твердженні, і він виведе з нього наслідок, із яким ви також вимушені будете погодитись, а із цього наслідку – ще один.

Бернар Фонтенель

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аксіоми для нащадків. — Львів: «Меморіал». – 1992.
2. Альтов Г.С. Творчество как точная наука. Теория решения изобретательских задач. — М.: «Советское радио», 1979. — ___ с.
3. Бевз В. Г. «Що таке математика?» http://www.donnu.edu.ua/journals/dm/_18/3-10%2018_2002.pdf
4. Вавилов В.В. Университетская школа //45 лет школе имени А.Н. Колмогорова. Сборник статей. Часть 1. – СУНЦ МГУ, 2008.
5. Володимир Семенович Королюк. Творчий шлях. – Київ: Інститут математики НАН України. 2009. –368 с.
6. Вірченко Н. О. Велет української математики. — К.: ВД «Науковий світ», 2012. – 64 с.
7. Галай Г. Гриневич Г. Учням про видатних математиків. — К., 1976. — ___ с.
8. Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика. — М.: Наука, 1991. — 240 с.
9. Дзеркало тижня, №42, 4 листопада 2006 року.
10. Загородній А., Хряпа В.. Микола Боголюбов — людина і вчений // http://www.u-nik.org.ua/PDF_ARCHIVE/35%20%282009%29/118.pdf.
11. Газ. Известия. – 1962, 21 февраля.
12. Конфорович А. Зачарований числами // Конфорович А. У пошуках інтеграла. — К., 1990. — ___ с.
13. Конфорович А. Правофланговий кібернетики // Конфорович А. У пошуках інтеграла. — К., 1990. — ___ с.
14. Конфорович А., Сорока М. Остроградський: Біогр. роман. — К.: Молодь, 1980. — 213 с.: ілюстр. — (Сер. біогр. творів «Уславлені імена»; Вип. 47).
15. Курант Р., Роббинс Г.. Что такое математика? Перевод с английского под редакцией А.Н. Колмогорова. — М.: Издательство Московского Центра непрерывного математического образования, 2001. — 568 с.

16. Малиновский Б. Н. Академик В. Глушков. Страницы жизни и творчества. — К.: «Наукова думка», 1993. – 140 с.
17. Малиновский Б. Н. История вычислительной техники в лицах. — К.: Фирма «КИТ», ПТОО «А. С. К.», 1995. – 384 с.
18. Малиновский Б. Н. Очерки по истории компьютерной науки и техники в Украине. — К.: «Феникс», 1998. – 452 с.
20. Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Т.20.
21. Математика в школі. — 1998. – № 2, 2001. — № 4, 2002. – № 5.
22. Микола С. Колимська теорема Кравчука: Біографічний роман. – К.: ВД «Науковий світ», 2010. – 240 с.
23. Петрович Н., Цуриков В.. Путь к изобретению. — М.: «Молодая гвардия», 1986. — ___ с.
24. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: «Наука», 1975. — ___ с.
25. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1970. — ___ с.
26. Полиа Г., Сёге Г.. Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. – М.: Наука, 1978. — ___ с.
27. Пуанкаре А. Математична творчість // Кн. Жак Адамар. Исследование психологии процесса изобретения. – М.: Издательство «Советское радио», 1970.
28. Сингх С. Великая теорема Ферма. Москва: МЦНМО, 2000. — ___ с.
29. Сойер У.У. Прелюдия к математике: Рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предварительным анализом математического склада ума и целей математики. – М.: «Просвещение», 1965. – 354 с.
30. У світі математики. — К., 1973. — Вип. 4, 1991. — Вип. 20, 1985. — Вип. 16, 2001. — Вип. 3.
31. Файл: http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Mug_and_Torus_morph.gif
32. Хинчин А.Я. Педагогические статьи. – М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1963.
33. Юрий Алексеевич Митропольский под редакцией А.М. Самойленко www.mathsociety.kiev.ua/Mitropolsky_90.DOC

ЗМІСТ

Навчальне видання

АСТАФ'ЄВА Марія М__________
ЖИЛЬЦОВ Олексій Б__________,
ЮРТИН Іван І__________

МАТЕМАТИКА. ВСТУП ДО СПЕЦІАЛЬНОСТІ

Навчальний посібник

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Обкладинка *Андрія Кравчука*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 18.06.2013. Формат 60×84/16. Папір друкарський.
Гарнітура SchoolBook. Умовн. друк. арк. 11,86. Умовн. фарбо-відб. 11,86.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-3191-2

9 789661 031912