Методическое пособие для учителей и
учащихся инженерных классов
физико-математического профиля

"Метод математической индукции"

г. Ядрин, 2015

2+74.102
Н 62

Составитель С.А. Николаева
Метод математической индукции: методическое пособие для учителей и учащихся/ Автор-сост. С.А. Николаева. – Ядрин, 2015. – 28 с.

«Метод математической индукции» рассчитан на 18 часов для работы с учащимися 10 и 11 профильных классов и способствует развитию логического мышления, нестандартного подхода к решению сложных олимпиадных задач и задач группы С единого государственного экзамена по математике. Материал данного курса также адресован учащимся предпрофильных классов, однако может быть использован и в общеобразовательных классах при организации дифференцированной работы на уроках и факультативных занятиях. «Метод математической индукции» рекомендуется учителям общеобразовательных школ для внеклассной работы, с целью привития интереса к предмету, формирования у учащихся навыков исследовательской деятельности и углубления и расширения знаний по данной теме, а также отдельные фрагменты занятий могут быть использованы на уроках алгебры и геометрии.

Содержание:

1. Предисловие ……………………………………………………стр - 2
2. Введение………………………………………………………стр - 4
3. Тематическое и поурочное планирование. ……………………стр - 6
4. Метод математической индукции. ………………………………стр - 7
5. Доказательство делимости и кратности. …………………………стр - 8
6. Доказательство равенств. ………………………………………стр - 10
7. Доказательство тождеств. ………………………………………стр - 10
8. Последовательности. ……………………………………………стр - 12
9. Доказательство неравенств. ……………………………………стр - 12
10. Нахождение суммы ……………………………………………стр - 13
11. Домашняя контрольная работа. …………………………………стр - 14
12. Урок – зачет. ……………………………………………………стр - 15
13. Итоговая контрольная работа. …………………………………стр – 16
14. Задачи на применение метода математической индукции при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ по математике. ....стр - 17
15. Заключение. ……………………………………………………стр - 23
16. Список использованной литературы. ……………………………стр – 24

Предисловие.

Николаева Светлана Александровна – учитель математики высшей категории, педагогический стаж 29 лет. Имеет большой опыт работы в профильных и инженерных классах. За значительные успехи в организации и совершенствовании учебного и воспитательного процессов, формирование интеллектуального, культурного и нравственного развития личности, большой вклад в практическую подготовку учащихся и воспитанников и многолетний добросовестный труд Николаева С.А. награждена Почетной грамотой министерства образования Чувашской Республики, Почетной грамотой министерства образования и науки Российской Федерации. В 2006 году Светлана Александровна стала победителем конкурса лучших учителей Ядринского района и Чувашской Республики и награждена Грантом Главы Ядринского района и Грантом Президента Чувашской Республики, почетной грамотой отдела образования и молодежной политики Ядринской районной администрации за качественную подготовку учащихся к сдаче выпускных экзаменов.

В связи с переходом на профильное обучение возникла необходимость в обеспечении углубленного изучения предмета математики и подготовки учащихся к олимпиадам, сдаче ЕГЭ, продолжению образования в ВУЗах.

Владение приемами решения задач методом математической индукции можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике совмещает два экзамена - выпускной школьный и вступительный в высшее учебное заведение (ВУЗ) и среднее специальное учебное заведение (СУЗ). В связи с этим материал, усвоение которого проверяется при сдаче ЕГЭ, значительно шире материала, проверяемого при сдаче выпускного экзамена. Наряду с вопросами содержания школьного курса алгебры и начала анализа 10 - 11 классов (группа В) выпускникам приходится решать задачи, выходящие за рамки школьной программы (группа С). В школе, как известно, решению задач методом математической индукции уделяется очень мало времени или почти не уделяется. Такие задачи решают в специализированных математических школах или профильных классах, либо на факультативах.

Цель курса:

- Формировать у учащихся умения и навыки по решению задач методом математической индукции, сводящихся к их исследованию для подготовки к олимпиадам, к ЕГЭ и к обучению в вузе.
- Изучение курса предполагает формирование у учащегося интереса к предмету, развитие их математических способностей, подготовку к ЕГЭ, олимпиадам, централизованному тестированию и к вступительным экзаменам в вузы
- Развивать исследовательскую и познавательную деятельность учащегося.
- Обеспечить условия для самостоятельной творческой работы.

При подготовке к экзамену большое внимание следует уделять накоплению у учащихся опыта самостоятельного поиска решений, чтобы на экзамене каждый ученик был готов к полной самостоятельности в работе.

«Метод математической индукции» рассчитан на 18 часов для работы с учащимися 10 и 11 профильных классов и способствует развитию логического мышления, нестандартного подхода к решению сложных олимпиадных задач и задач группы С единого государственного экзамена по математике. Материал данного курса также адресован учащимся предпрофильных классов, однако может быть использован и в общеобразовательных классах при организации дифференцированной работы на уроках и факультативных занятиях. «Метод математической индукции» рекомендуется учителям общеобразовательных школ для внеклассной работы, с целью привития интереса к предмету, формирования у учащихся навыков исследовательской деятельности и углубления и расширения знаний по данной теме, а также отдельные фрагменты занятий могут быть использованы на уроках алгебры и геометрии.

Курс предлагает учащимся знакомство с математикой как с общекультурной ценностью, выработкой понимания ими того, что математика является инструментом познания окружающего мира и самого себя. Если в изучении предметов естественнонаучного цикла очень важное место занимает эксперимент и именно в процессе эксперимента и обсуждения его организации и результатов формируются и развиваются интересы ученика к данному предмету, то в математике эквивалентом эксперимента является решение задач. Собственно весь курс математики может быть построен и, как правило, строится на решении различных по степени важности и трудности задач.

Каждое занятие направлено на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, познакомить их с новыми идеями и методами, расширить представление об изучаемом в основном курсе материале, а главное, порешать интересные задачи.

При направляющей роли учителя школьники могут самостоятельно сформулировать новые для них свойства и даже доказать их. Все должно располагать к самостоятельному поиску и повышать интерес к изучению предмета. Организация на занятиях может несколько отличаться от урочной: ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, выдвигать гипотезы. В курсе заложена возможность дифференцированного обучения.

Реализация данного курса опирается на следующие принципы:

- Обучение через сотрудничество.
- Формирование посильного умения самостоятельно сделать законченную и эстетически оформленную творческую и исследовательскую работу.
- Сочетание в практической деятельности индивидуальной и коллективной форм работы.

Принцип вариативности курса:

- Распределение времени на программные темы;
- Использование средств обучения;
- Выбор формы контроля.

Разработанный курс направлен на решение следующих задач:

- Развивать способности учащихся к математической деятельности.
- Развивать логическое мышление учащихся.
- Предоставить учащимся возможность проанализировать свои способности к математической деятельности.
- Познакомить учащихся с понятием дедукция и индукция, полная и неполная математическая индукция.
- Изучить общий принцип и метод математической индукции.
- Исследовать на наглядном примере метод математической индукции.
- Уметь применять метод математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств, к доказательствам неравенств, к задачам на делимость, для изучения свойств числовых последовательностей.

Требования к уровню усвоения курса.

В результате изучения курса учащиеся смогут:

- Сформировать собственный взгляд при выборе того или иного метода решения в рассмотрении предложенных заданий;
- Научиться применять аналитические методы, используемые в решении задач методом математической индукции;
- Видеть в очень сложном самое простое решение;
- Научиться самостоятельному поиску необходимого теоретического материала, работать со справочно-математической литературой;
- Работать с информацией: накапливать, систематизировать, обобщать.

Введение.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения. И хотя теоретическая механика основывается на трех законах движения Ньютона, сами эти законы явились результатом глубокого продумывания опытных данных, в частности законов Кеплера движения планет, выведенных им при обработке многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге. Наблюдение, индукция оказываются полезными и в дальнейшем для уточнения сделанных предположений.

После опытов Майкельсона по измерению скорости света в движущейся среде оказалось необходимым уточнить законы физики, создать теорию относительности.

В математике роль индукции в значительной степени состоит в том, что она лежит в основе выбираемой аксиоматики. После того как длительная практика показала, что прямой путь всегда короче кривого или ломанного, естественно было сформулировать аксиому: для любых трех точек A, B и C выполняется неравенство $|AB|+|BC|\geq|AC|$.

Лежащее в основе арифметики понятие «следовать за» тоже появилось при наблюдениях за строем солдат, кораблей и другими упорядоченными множествами. Не следует, однако, думать, что этим исчерпывается роль индукции в математике. Разумеется, мы не должны экспериментально проверять теоремы, логически выведенные из аксиом: если при выводе не было сделано логических ошибок, то они постольку верны, поскольку истинны принятые нами аксиомы. Но из данной системы аксиом можно вывести много утверждений. И отбор тех утверждений, которые надо доказывать, вновь подсказывается индукцией. Именно она позволяет отделить полезные теоремы от бесполезных, указывает, какие теоремы могут оказаться верными, и даже помогает наметить путь доказательства.

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

Хотя и выросла область применения метода математической индукции, в школьной программе ему отводится мало времени. Изучив метод математической индукции, учащиеся повысят свои знания в этой области математики, а также научатся решать задачи, которые раньше были им не под силу. Решение таких задач становится занимательным занятием и может привлечь в математические лабиринты всё новых любознательных. По-моему, это является основой любой науки.

Основная функция предметно-ориентированного курса математики «Метод математической индукции": выявление средствами предмета математики направленности личности, ее профессиональных интересов. Содержание курса не дублирует, а расширяет базовый курс по математике и дает возможность познакомиться учащимся с интересными, нестандартными вопросами.

Одной из отличительных черт математики и таких наук, как теоретическая механика, теоретическая физика, математическая лингвистика, является дедуктивное построение теории. Дедуктивное рассуждение – это рассуждение от общего к частному, индуктивное – от частного к общему. Полная индукция (метод перебора конечного числа случаев) имеет в математике ограниченное применение. Многие интересные математические предложения охватывают бесконечное множество частных случаев, а провести проверку для бесконечного множества частных случаев человек не может. Во многих случаях выход из этого затруднения находится в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции. Материал курса не дублирует вузовских программ, но позволяет с более общих позиций взглянуть на школьную математику и усмотреть единство предмета и метода математической науки. Поэтому важно не развивать в обучении те специальные методы, приемы и навыки, которым обучают в вузах, а показать учащимся, как из материала школьного курса математики возникают общие концепции, обладающие теоретической и прикладной ценностью. Весьма существенное место курса занимает решение задач как традиционных школьных, так и задач повышенной трудности. В курсе заложена возможность дифференцированного обучения. Задачи, предлагаемые в данном курсе интересны и часто не просты в решении, что позволяет повысить учебную мотивацию учащихся и проверить свои способности к математике. Вместе с тем, содержание курса позволяет ученику любого уровня активно включиться в учебно-познавательный процесс и максимально проявить себя: занятия могут проводиться на высоком уровне сложности, но включать в себя вопросы, доступные и интересные всем учащимся.

Вопросы, рассматриваемые в курсе, выходят за рамки обязательного содержания. Вместе с тем, они тесно примыкают к школьной программе. Поэтому «Метод математической индукции» будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических знаний и умений, предусмотренных школьной программой, поможет при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ по математике. Данный курс научит учащихся применять метод математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств, к доказательствам неравенств, к задачам на делимость, для изучения свойств числовых последовательностей делимость, для изучения свойств числовых последовательностей.

Тематическое и поурочное планирование курса «МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ» для классов физико – математического профиля.

№	Тема	Количество часов
1	Метод математической индукции (лекция)	1 ч.
2	Доказательство делимости и кратности. Самостоятельная работа (25 мин).	2 ч.
3	Доказательство равенств. Самостоятельная работа (15-20 мин.).	3 ч.
4	Доказательство тождеств. Проверочная работа (домашняя).	3 ч.
5	Последовательности.	2 ч.
6	Доказательство неравенств и нахождение суммы. Домашняя контрольная работа.	3 ч.
7	Урок-зачёт.	2 ч.
8	Контрольная работа (4 варианта)	2 ч.
	всего	**18 ч.**

1.Метод математической индукции. (1 ч.).

а) **Полная и неполная индукция**.

Метод доказательства, при котором мы проверяем утверждение для конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называют <u>*полной индукцией*</u>. Этот метод применим сравнительно редко, поскольку математические утверждения касаются, как правило, не конечного, а бесконечных множеств объектов.

Например:

Теорема: «Любое число – чётное является суммой двух простых чисел».

В естественных науках (физике, химии, биологии) применяют <u>*неполную индукцию*</u>: проведя эксперимент несколько раз, переносят полученные результаты на все случаи.

Тем не менее разбор конечного числа случаев играет важную роль в математике: не давая доказательства того или иного утверждения, он помогает угадать правильную формулировку того утверждения, если она ещё не известна.

<u>Пример 1.</u>

Угадаем с помощью неполной индукции формулу суммы кубов первых n натуральных чисел.

Решение:

$$1^3 = 1$$
$$1^3 + 2^3 = 9$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100,$$

но

$$1 = 1^2$$
$$9 = 3^2$$
$$36 = 6^2$$
$$100 = 10^2.$$

Осталось сообразить, что представляет собой последовательность чисел 1, 3, 6, 10, ... Но

1=1,

3=2+1,

6=1+2+3,

10=1+2+3+4.

Мы приходим, таким образом, к гипотезе, что

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (n^2(n+1)^2)/4$

Для записи из n слагаемых используем $\sum$ «***сигма***»

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

Для записи произведения из n множителей применим обозначение $\prod$ «***пи***»

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k^2}) = (1+\frac{1}{1^2})\cdot(1+\frac{1}{2^2})\cdot k\cdot(1+\frac{1}{n^2})$$
$$\prod_{k=1}^{n+1} A(k) = (\sum_{k=1}^{n} A(k)) + A(n+1)$$
$$\prod_{k=1}^{n+1} A(k) = (\prod_{k=1}^{n} A(k))\cdot A(n+1)$$

б) **Метод математической индукции**.

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции, который принимается как аксиома.

Утверждение P(n), зависящее от натурального n, справедливо при $\forall n \in N$, если:

1) утверждение P(n) справедливо при n=1;

2) для $\forall k \in N$ из справедливости $P(k) \Rightarrow$ справедливость P(k+1)

Доказательство методом математической индукции проводится следующим образом:

Сначала доказывается при n = 1. Эту часть доказательства называют ***базисом индукции.***

Затем следует часть доказательства, называемая ***индукционным шагом.*** В этой части доказывают справедливость утверждения при $n = k + 1$ в предположении справедливости утверждения при n = k (предположение индукции).

Упражнения (Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49):

В классе

- № 73 (1,3)
- № 74 (1)
- № 75 (1)
- № 76 (2)

Домашнее задание:

- № 73 (2, 4)
- № 74 (2)
- № 75 (3,4)
- № 76 (1)

2. Доказательство делимости и кратности. (2 ч)

Пример 2.

Доказать, что любых натуральных n, число

$a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ кратно 3.

Докажем методом полной математической индукции

1) если n = 1, то $a_n = a_1 = 1^3 + 3*1^2 + 5*1 = 9$ – кратно 3,

То есть утверждение справедливо при n = 1.

2) Предположим, что утверждение справедливо при

$n=k, k \geq 1$, т.е. число $a_k = k^3+3k^2+5k$

делится на 3. Установим, что при n=k+1, число

$a_{k+1} = (k+1)^3+3(k+1)^2+5(k+1)$ кратно 3

$a_{k+1} = (k+1)^3+3(k+1)^2+5(k+1) =$

$= k^3+3k^2+3k+1+3k^2+6k+3+5k+5 =$

$= (k^3+3k^2+5k)+(3k^2+9k+9) =$

$= (k^3+3k^2+5k)+3(k^2+3k+3)$

Первое слагаемое кратно 3 по допущению, второе слагаемое кратно 3, так как один множитель равен 3.

Итак, на основании принципа математической индукции делаем вывод, что при $\forall n \in N$ число $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ кратно 3 $\forall n \in N$ число $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ кратно 3

Пример 3.

(Дважды применяется метод математической индукции)

Доказать, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9 для $\forall n \in N$.

Докажем методом полной математической индукции

1) если n=1, то $a_n=a_1=18$ - кратно 9,

то есть утверждение справедливо при n=1.

2) Предположим, что утверждение справедливо при

n=k, $k\ge1$, т.е. число $a_k=4^k+15k-1$ делится на 9

Установим, что при n=k+1, число $a_{k+1}=4^{k+1}+15(k+1)-1$

делится на 9,

$a_{k+1}=4^{k+1}+15(k+1)-1=$

$=4^k\cdot(3+1)+15k+15-1=$

$=3\cdot4^k+4^k+15k-1+15=$

$=(4^k+15k-1)+3\cdot(4^k+5).$

Первое слагаемое делится на 9 по допущению. Докажем, что и второе слагаемое $3\cdot(4^k+5)$ делится на 9, применив метод математической индукции. Достаточно доказать, что 4^k+5 делится на 3.

1) если k = 1, то $a_k=a_1=9$ – кратно 3, т.е. утверждение справедливо при k=1.

2) предположим, что утверждение справедливо, при k=m,

$m\ge1$, т.е. число $a_m=4^m+5$ делится на 3.

Установим, что при k=m+1, число

$a_{m+1}=4^{m+1}+5$ делится на 3,

$a_{m+1}=4^{m+1}+5=4^m\cdot(3+1)+5=3\cdot4^m+(4^m+5).$

Первое слагаемое делится на 3 (очевидно), второе слагаемое делится на3 по допущению.

Итак, на основании принципа полной математической индукции делаем вывод, что при $\forall n\in N$ число $a_n=n^3+3n^2+5n$ делится на 9.

Упражнения:

<u>В классе</u> (3^*, 6^{**}):

Доказать:

1) 9^n+3 кратно 19
2) $7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n$ кратно 19
3) 5^n-3^n+2n кратно 4
4) $2\cdot7^n+1$ делится на 3
5) n^3+5n делится на 3
6) $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ делится на 27

<u>Домашнее задание</u> (3^*, 5^*, 2^{**}, 4^{**}, 6^{**}):

Доказать:

1) n^3+5n кратно 6
2) n^5-n кратно 30 (трижды)
3) $2^{2n}-1$ кратно 3
4) $5^{n+3}+11^{3n+1}$ делится на 17
5) $10^n+18n-28$ делится на 27 (дважды)
6) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11

Самостоятельная работа. (25 мин.)

Вариант 1 (2^*).

1. Доказать, что n^3+11n кратно 6.
2. Доказать, что $5*2^{3n-2}+3^{3n-1}$ делится на 19.

Вариант 2 (2^*).

1. Доказать, что 7^n+3n-1 кратно 9.
2. Доказать, что $6^{2n}+19^n-2^{n-1}$ делится на17.

3. Доказательство равенств. (3ч)

Пример 4.

Доказать, что сумма первых n ($n \in N$) нечётных чисел равна квадрату их числа, т. е. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Докажем методом математической индукции.

1) проверим справедливость утверждения при n=1. Если n=1, то $1=1^2$, т.е. утверждение справедливо при n=1.

2) Предположим справедливость утверждения при n=k,

$$k \geq 1, 1+3+5+...+(2k-1)=k^2$$

Установим, что при n=k+1, равенство будет справедливо

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

Имеем, что $k^2+2k+1=(k+1)^2$

Итак, на основании принципа математической индукции делаем вывод, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2.

Упражнения:

В классе (Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49): № 77, 78(1,3), 79.

Самостоятельная работа. (15-20 мин.)

1 Вариант (2^*).

1) $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

2) $$\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+...+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

2 Вариант (1^*, 2^{**}).

1) $$\frac{7}{1\cdot8}+\frac{7}{8\cdot15}+\frac{7}{15\cdot22}+...+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}=1-\frac{1}{7n-1}.$$

2) $$2+7+14+...+(n^2+2n-1)=\frac{n(2n^2+9n+1)}{6}$$

3 Вариант (1^*, 2^{**}).

1) $$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

2) $$\frac{1}{4\cdot8}+\frac{1}{8\cdot12}+\frac{1}{12\cdot16}+...+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16(n+1)}.$$

Домашнее задание (Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49): № 78 (2,4,5).

4. Доказательство тождеств. (3ч)

Для доказательства тождества A(n)=B(n) можно сначала доказать A(1)=B(1), а потом доказать тождество A(k+1)-A(k)=B(k+1)-B(k). Тогда из истинности тождества A(n)=B(n) при n=k, будет следовать его истинность при n=k+1, а так как оно истинно и при n=1, то по принципу математической индукции доказана его истинность при всех значениях n.

<u>Пример 5.</u>

Доказать: $\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{4^3-4}+...+\frac{1}{(2n)^3-2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}-\frac{n}{2n+1}$.

Пусть $A(n)=\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{4^3-4}+...+\frac{1}{(2n)^3-2n}$,

$B(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}-\frac{n}{2n+1}$.

При n=1 имеем: $A(1)=\frac{1}{6}$, $B(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

$$A(k+1)-A(k)=\frac{1}{(2(k+1))^3-2(k+1)}=\frac{1}{2(k+1)(4(k+1)^2-1)}=$$

$$=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)(2k+3)}.$$

$$B(k+1)-B(k)=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}-\frac{k+1}{2k+3}+\frac{k}{2k+1}=$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}-\frac{k+1}{2k+3}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)(2k+3)}.$$

Таким образом, $A(k+1)-A(k)=B(k+1)-B(k)$, $k\in N$, Следовательно, из равенства $A(k)=B(k)$ следует равенство $A(k+1)=B(k+1)$.

<u>Пример 6.</u>

Докажем тождество: $\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

При n=1 левая часть тождества принимает вид $1-\frac{1}{4}$, а правая часть $\frac{3}{4}$, поэтому тождество истинно при n=1. Запишем теперь это тождество при n=k+1 и при n=k разделим почленно получившиеся равенства. Получим истинное равенство: $1-\frac{1}{(k+2)^2}=\frac{k+3}{2(k+2)}:\frac{k+2}{2(k+1)}$, то есть $\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^3}=\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$, значит, данное тождество истинно для всех n.

<u>Упражнения в классе</u> (3*, 4**):

1) $(a_1+a_2+...+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+...+2a_{n-1}a_n$.

2) $(n+1)(n+2)\cdot...\cdot(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2b-1)$.

3) $3+20+169+...+(2n+1)\cdot2^{n-1}\cdot n!=2^n(n+1)!-1$.

4) $(x+a_1)(x+a_2)\cdot...\cdot(x+a_n)=x^n+(a_1+a_2+...+a_n)\cdot x^{n-1}+$ $+(a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n)^n\cdot x^{n-2}+a_1a_2...a_n$.

<u>Домашнее задание</u> (Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49): № 85 (2)

<u>Домашняя проверочная работа</u> (2*).

1) Доказать: $(n+1)(n+2)...(n+n)=2^4\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)$.

2) Доказать: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$.

5. *Последовательности. (2ч)*

Принцип математической индукции применим в следующей форме.

Утверждение (n), где $n \in N$, верно для всех натуральных $n \geq m$ $(m \in N)$, если выполнены два условия:

1) P(n) справедливо при n=m и n=m+1.
2) Для всякого натурального $k \geq m$ из справедливости P(k) и P(k+1) следует справедливость P(k=2).

Пример 7.

Числа последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ определяются следующими условиями:

$a_1=2$

$a_n=3a_{n-1}+1.$

Докажите, что

$$a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 1).$$

Проверим при n=2, n=1.

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot (5-1) = 2$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \quad a_2 = \frac{1}{2}(5 \cdot 3 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7.$$

2) Докажем, что $\forall k \in N$ из справедливости утверждения при n=k, следует справедливость при n=k+1.

$$a_{k+1} = 3 \cdot a_k + 1 = 3 \cdot (\frac{1}{2}(5 \cdot 3^{k-1} - 1)) + 1 = \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 3^{k-1} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3^{k-1} = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^k - 1) = a_{k+1}.$$

Упражнения в классе (Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49): № 80, 83, 84.

Домашнее задание (Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49): № 82

6. *Доказательство неравенств. (2ч)*

Пример 8.

Доказать, что при $n \in N$, $n \geq 5$ справедливо неравенство $2^n \geq n^2 + n + 2$.

Докажем методом неполной математической индукции:

1) проверим при n=5

$2^5 \geq 5^2 + 5 + 2$

$32 \geq 32.$

2) допустим справедливость при $n = k \geq 5$

$2^k \geq k^2 + k + 2$

$2^k - k^2 - k - 2 \geq 0$

Докажем справедливость неравенства при n=k+1.

$2^{k+1} \geq (k+1)^2 + k + 3$

$2^k \cdot 2 - k^2 - 2k + 1 - k - 3 \geq 0$

$(2^k - k^2 - k - 2) + 2^k - 2k - 2 \geq 0$

Первое слагаемое больше нуля по допущению. Докажем, что $2^k - 2k - 2 \geq 0$, при $k \geq 5$

1) проверим при k=5

$2^5 \geq 2 \cdot 5 + 2$

$32 \geq 12$

2) допустим, что неравенство справедливо при k=m, то есть $2^m \geq 2m + 2$.

Докажем, что при k=m+1 наше неравенство также будет справедливо:

$2^{m+1} \geq 2(m+1) + 2$

$2^m \cdot 2 - 2m - 4 \geq 0$

$2^m + (2^m - 2m - 2) - 2 \geq 0$

$2^m - 2 \geq 0$, так как $m \geq 5$

Пример 9.

Доказать, что неравенство Бернулли при $a \geq -1$ и при $\forall n \in N$.

$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$

Воспользуемся методом полной математической индукции:

1) при n=1 неравенство принимает вид $1 + a \geq 1 + a$, что верно.

2) Предположим, что при n=k неравенство справедливо: $(1+a)^k \geq 1 + k \cdot a$.

Докажем, что $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot a$.

Заметим, что при a=-1 неравенство $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$ выполняется, и поэтому достаточно рассмотреть случай a >-1, то есть a+1>0. В этом случае, умножив обе части неравенства на число 1+a, получим:

$(1+a)^{k+1} \geq (1 + k \cdot a) \cdot (1+a) = 1 + (k+1) \cdot a + ka^2 \geq 1 + (k+1) \cdot a$

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot a$

Упражнения в классе:

Доказать (3*,4*, 5*,6**, 7**):

1) $5^n > 7n - 3, n \in N$

2) $2^{n-1} > n(n+1), n \geq 7, n \in N$

3) $3^n \geq 2^n + n, n \in N$

4) $4^n \geq 3^n + n^2, n \in N$

5) $4^n \geq 3^n + 2^n, n \in N, n \geq 2$

6) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$

7) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

Домашнее задание (Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49): № 89

Нахождение суммы. (1ч.)

Пример 10.

Найти сумму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} > 1$$

Решение:

Найдем $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{4}{5}$$

Каждая из рассматриваемых сумм равна дроби, в числителе которой стоит число слагаемых, а в знаменателе – число, на единицу больше, чем число слагаемых.

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Проверим методом математической индукции:

1) при $n=1, S_1 = \frac{1}{2}$

2) предположим, что наше предположение верно при $n=k, k \geq 1,$ то есть $S_k = \frac{k}{k+1}.$

установим справедливость и при $n = k+1$

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Упражнения в классе (2^*): $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$

1) при каждом $n \in N$ найти сумму $S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + ... + n\cdot n!$

2) найти сумму $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Домашняя контрольная работа.

Вариант 1 (1^*, 3^{**}).

1) Докажите методом математической индукции, что

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{6}{5\cdot 7} + \frac{20}{7\cdot 9} + ... + \frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)}\cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{2n+3} - \frac{1}{3}$$

2) Докажите, что делится на4 при всех натуральных значениях n.

3) Последовательность (X_n) рекуррентна: $x_1=3$; $x_2=6$; $(x_{n+1}-3)(x_{n+1}+2x_n)=-1$, $n \in N$, Докажите, что $x_n=2^n+n$, $n \in N$.

Вариант 2 (1^{**}, 2^*).

1) Докажите методом математической индукции, что

$$(1+a)^{k+1} \geq (2+18+60+...+n\cdot(n+1)(2n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(3n-1)$$

2) Докажите, что $7\cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$, делится на 17 для всех $n \in N$.

3) Докажите, что при $n \in N$, $n \geq 5$, справедливо неравенство $2^n \geq n^n + n + 2$.

7. Урок зачёт. (2ч)

Цель урока: Дифференцированная проверка усвоения знаний, умений и навыков учащимися по теме «Метод математической индукции».

План урока:
1. Орг. момент. Деление класса на пять групп.
В каждой группе есть консультант, сильный, средний и слабый учащиеся.
2. Каждая группа получает по 4 задания дифференцированного характера:

I группа (1^{**}, 2^{***}, 3^{*}).

1. Доказать: $2^2 + 6^2 + ... + (4n-2)^2 = \dfrac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}, n \in N$.

2. Дана последовательность
$a_1, a_2, ..., a_n$.
$a_1 = 2$
$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n$$
Доказать: $a_n = n(n+1)$

3. Доказать: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{5}{3^3} + ... + \dfrac{2n-1}{3^n} = 1 - \dfrac{n+1}{3^n}$.

4. Доказать: $n^3 + 11n$ кратно 6, $n \in N$

II группа (1^{***}, 2^{*}, 4^{**}).

1. Доказать: $n \in N$, $n^n \geq 5$ справедливон неравенство $2^n \geq n^2 + n + 2$.
2. Доказать: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, n \in N$.
3. Доказать: $7^n + 3^{n+1}$ делится на 4, $n \in N$.
4. Доказать: $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$.

III группа (1^{*}, 2^{***}, 4^{**}).

1. Доказать: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, n \in N$.
2. Доказать: $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$.
3. Доказать: $7^n + 3^{n+1}$ делится на 4, $n \in N$.
4. Доказать: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{5}{3^3} + ... + \dfrac{2n-1}{3^n} = 1 - \dfrac{n+1}{3^n}$

IV группа (1^{**}, 2^{*}, 4^{***}).

1. Доказать: $n \in N$, $n^n \geq 5$ справедливон неравенство $2^n \geq n^2 + n + 2$.

2. Доказать: $2^2 + 6^2 + ... + (4n-2)^2 = \frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$, $n \in N$.

3. Доказать: $n^3 + 11n$ кратно 6, $n \in N$.

4. Доказать: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

V группа (2^{***}, 3^{**}, 4^{*}).

1. Доказать: $4^n + 15n - 1$ кратно 9, $n \in N$
2. Дана последовательность

$a_1, a_2, ..., a_n$.

$a_1 = 2$

$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n$

Доказать: $a_n = n(n+1)$

3. Доказать: $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + ... + \frac{2n-1}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$
4. Доказать: $n^3 + 11n$ кратно 6, $n \in N$.

3. В течение первого урока все группы решают свои задания. Кто выполнил все задания - помогает товарищам в группе.

4. В конце урока подводятся в каждой группе итоги работ. Результаты зачёта выставляются в журнал оценок.

5. На втором уроке разбираются на доске задания с подробными решениями. Также решаются задания, предложенные сильным учащимся.

8. Итоговая контрольная работа по теме «Метод математической индукции». (2ч)

I вариант.

1^*) Докажите методом математической индукции:

$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + ... + \frac{2n-1}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$

2) Доказать: $10^n - 9n - 1$ делится на 81, $n \in N$.

3^{**}) Докажите, что если $a_1 = 2, a_2 = 8, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, то $a_n = 3^{n-1}, n \in N$

II Вариант.

1^*) Докажите методом математической индукции:

$4 + 60 + ... + (n+1)(3n-1) \cdot 4^{n-1} = n^2 \cdot 4^n$

2) Докажите, что $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ делится на 43, $n \in N$

3^{**}) Докажите, что при $n \in N$, $n \geq 4$ имеет место неравенство $3^n > 5n^2$.

III Вариант.

1^*) Докажите методом математической индукции

$$\frac{1\cdot 8}{4\cdot 7}+\frac{2\cdot 11}{7\cdot 10}+...+\frac{n(3n+5)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n(n+1)}{3n+4}$$

2) Докажите, что для $n\in N$ справедливо утверждение: $3^{2n}-8n-1$ кратно 16

3**) Докажите, что если $a_1=1, a_2=5, a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, то $a_n=3^n-2^n, n\in N$

IV Вариант.

1*)Докажите методом математической индукции:

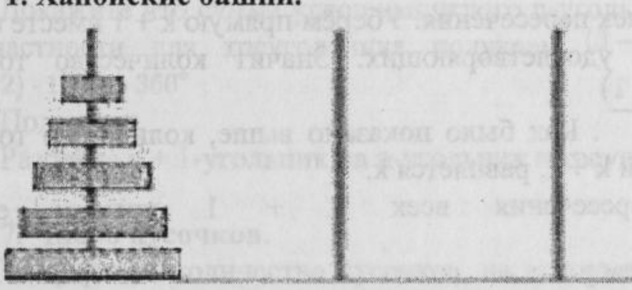
$$3\cdot 2+4\cdot 2^2+5\cdot 2^3...+(n+2)\cdot 2^n=(n+1)\cdot 2^{n+1}-2$$

2) Докажите, что для $n\in N$ справедливо утверждение: $5\cdot 9^{n-1}+2^{4n-3}$ кратно 7

3**) Докажите, что при $n\in N$, $n\geq 6$ имеет место неравенство $2^n>n(n+4)$.

9. Задачи на применение метода математической индукции для подготовки к олимпиадам и ЕГЭ по математике.

1. Ханойские башни.



Есть три стержня и n колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой? Можно или нельзя?

Пирамидку, в которой только одно кольцо n = 1, переместить можно (очевидно).

Предположим, что мы умеем перемещать пирамидки с числом колец $n\leqslant K$.

Попробуем научиться перемещать пирамидку с n = K + 1 . Пирамидку из K колец, лежащих на самом большом K + 1-м кольце, мы можем согласно предположению переместить на любой стержень. Сделаем это, переместим её на третий стержень. Неподвижное K + 1-е кольцо не будет нам мешать провести алгоритм перемещения, так как оно самое большое. После перемещения K колец переместим оставшееся K + 1-е кольцо на второй стержень. Мы можем это сделать, так как второй стержень пустой. Теперь обратим внимание, тот факт, что второй стержень не пустой, не мешает нам класть на него любые кольца, так как имеющееся на нём кольцо самое большое (любое кольцо можно положить на большее, а значит и самое большое по условию задачи). И затем опять применим известный нам по предположению алгоритм перемещения K колец и переместим их на второй стержень, стержень с лежащим внизу K + 1-м кольцом. Таким образом, если мы умеем перемещать пирамидки с K кольцами, то умеем перемещать пирамидки и с K + 1 кольцом.

Следовательно, утверждение верно для всех случаев, то есть для всех n.

Ясно, что методом математической индукции можно решать не все задачи, а только задачи, параметризованные некоторой переменной. Эта переменная называется переменной индукции.

В задаче «Ханойские башни» роль переменной индукции играло количество колец в пирамидке.

2. Пересечение прямых.

Докажите, что любых n прямых, расположенных на одной плоскости, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках.

Решение:

В простейшем случае, когда прямых две, известно, что они непараллельные, а значит, пересекаются как минимум в одной точке. Они не могут пересекаться в более чем одной точке. (а именно, через две точки можно провести прямую и только одну), если бы были хотя бы две точки пересечения у двух прямых, то эти прямые совпадали бы, то есть мы бы имели одну прямую, а не две. Имеем, что должно быть не менее одной (включительно) и не более одной (включительно) точек пересечения, а значит точка пересечения одна и утверждение верно.

Предположим, что оно верно для k прямых, то есть что любых k прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $\frac{k(k-1)}{2}$ точках.

Попробуем доказать его для k + 1 прямых. По предположению, 1-я, 2-я, …, k-я прямая пересекаются в $\frac{k(k-1)}{2}$ точках. Рассмотрим k + 1-ю прямую и одну из прямых, обозначим её i из списка 1-я, 2-я, …, k-я прямая. Как мы уже доказали в любые две прямые, удовлетворяющие условиям задачи, пресекаются ровно в одной точке, а значит и прямые k + 1 и i пересекаются в одной точке. Вспомним, что i обозначает любую прямую из списка 1-я, 2-я, …, k. Отсюда k + 1-я прямая пересекается с каждой из этих k прямых ровно в одной точке.

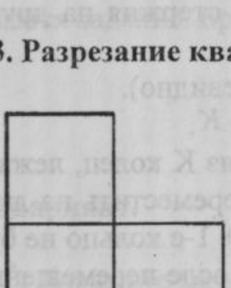
Рассмотрим список из k + 1 прямых и их точек пересечения. Уберём прямую k + 1 вместе с её точками пересечения. Останется k прямых удовлетворяющих. Значит количество точек пересечения у этих k прямых равняется $\frac{k(k-1)}{2}$. Как было показано выше, количество точек пересечения, которое мы убрали вместе с прямой k + 1, равняется k.

Следовательно, количество точек пересечения всех k + 1 прямых есть $\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k^2+k}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$.

То есть для k + 1 прямых утверждение доказано.

Утверждение верно для любого количества прямых.

3. Разрезание квадрата.



Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

Решение:

Для n = 1 получим квадрат размером 2 × 2. Вырежем, скажем, правый верхний квадрат. Останется три квадрата, представляющие из себя «уголки». Утверждение верно.

Пусть это уже доказано для квадратов со стороной 2k с вырезанной одной клеткой. Докажем для квадратов $2^{k+1} \times 2^{k+1}$.

Разбиваем квадрат $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ на четыре квадрата $2^k \times 2^k$ и вырезаем из каждой недырявой части угловую клетку так, чтобы вырезанные клетки образовали уголок:

Таким образом, получаем четыре квадрата, в каждом из которых вырезано по одной клетке, и по предположению индукции их мы можем замостить уголками. Замощение квадрата $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ будет состоят из замощения четырёх квадратов $2^k \times 2^k$ с вырезанной одной клеткой по середине. Что и требовалось доказать.

Упражнение. Допустим, сторона квадрата будет $3^n \times 3^n$. Попытайтесь «интуитивно» понять, почему застелить его «уголками» не получится. Пройдитесь по доказательству в случае квадрата $2^n \times 2^n$ и найдите место, где доказательство «падает».

Попробуйте решить самостоятельно следующие геометрические задачи (4, 5, 6, 7).

4. Три острых угла.

Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 3, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

Подсказка.

Пусть есть такой $K-1$-угольник. Возьмём один из его тупых углов и отрежем его. Число вершин станет K. Новые два угла, появившиеся вместо старого, будут ещё тупее, так как они — внешние углы отрезанного треугольника.

5. Раскраска плоскости.

Плоскость разделена на части n прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что соседние куски будут раскрашены в разные цвета.

Подсказка.

При проведении следующей прямой инвертируйте одну из полуплоскостей.

6. Сумма углов n-угольника.

Докажите что сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$, (или $(n-2)\pi$ радиан). В частности для треугольника получаем $(3-2)\cdot 180^\circ = 180^\circ$, а для четырехугольника — $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$

Подсказка.

Разбейте n + 1-угольник на n-угольник и треугольник.

7. Число кусочков.

Чему равно количество кусочков, на которые n прямых (не проходящих через одну точку) делят плоскость на части? Одна прямая — на две части, две — на четыре. А пятнадцать прямых?

Подсказка.

Воспользуйтесь предыдущей задачей. С проведением каждой прямой посчитайте, сколько «кусочков» вы бы инвертировали бы в предыдущей задаче. Для n прямых, то число кусочков равно $1+(1+2+\ldots+n)$ n штук, то число кусочков равно $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$

8. Доказать равенство. . $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$

Доказательство. Проверим, работает ли эта формула при n = 1:

$1^2=\dfrac{1(1+\frac{1}{2})(1+1)}{3}=1,$

Предположим, что тождество верно при n = k, то есть

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+\frac{1}{2})(k+1)}{3}$$

Докажем при n = k + 1, то есть нужно доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+\frac{3}{2})(k+2)}{3}.$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2)+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+\frac{1}{2})(k+1)}{3}+(k+1)^2=\frac{k(k+\frac{1}{2})(k+1)+3(k+1)^2}{3}=\frac{(k+1)\left(k(k+\frac{1}{2})+3(k+1)\right)}{3}=$$

$$=\frac{(k+1)\left(k(k+\frac{1}{2}+1-1)+3(k+1+1-1)\right)}{3}=\frac{(k+1)\left(k(k+\frac{3}{2})+3(k+2)-k-3\right)}{3}=$$

$$=\frac{(k+1)\left(k(k+\frac{3}{2})+2k+3\right)}{3}=\frac{(k+1)\left(k(k+\frac{3}{2})+2(k+\frac{3}{2})\right)}{3}=\frac{(k+1)(k+\frac{3}{2})(k+2)}{3}$$

Значит, тождество верно для любого n.

9. Доказать. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

10. Доказать. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

11. Докажите, что $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

12. Найдите сумму. $1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{2^n}$.

Подсказка.

$n\frac{1}{2^n}=n+\frac{1}{2^n}$ Сложите отдельно целые и дробные части. К целой части примените сумму арифметической прогрессии. К дробной части примените сумму геометрической прогрессии, смотри предыдущий пример. Выражение должно быть $\dfrac{n(n+1)}{2}+1-\dfrac{1}{2^n}$

13. Неравенство Коши.

Доказать, что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

для любых неотрицательных чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Итак, опишем схему доказательства.

Сначала, докажем тождество для степени двойки n = 2s для.

$$y_1=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_2=\frac{x_3+x_4}{2},\ \ldots,\ y_{2^s}=\frac{x_{2^{s+1}-1}+x_{2^{s+1}}}{2}$$

Доказав для чисел вида 2s, нужно распространить доказательства для всех чисел. Выберем любое k такое, что $2^k\geqslant n$. Для 2k неравенство доказано. Значит, мы должны доказать тождество и для 2k − 1 (тогда оно будет верно и для 2k − 2, и так далее, пока не доберёмся до n).

Затем, предположив, что тождество верно для n = k, нужно доказать его для n = k − 1. Идея доказательства состоит в добавлении k-го элемента, равного среднему арифметическому.

Решение

Сначала методом математической индукции докажем это равенство для всех n, равных степени двойки.

Нужно показать, что $\dfrac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$. Действительно,

$$\frac{x_1+x_2}{2}-\sqrt{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{2}=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2}\geqslant 0$$

Предположим, что мы умеем доказывать неравенство при n = 2k. Докажем его для n = 2k + 1. Итак, у нас есть 2k + 1 чисел $x_1,x_2,\ldots,x_{2^{k+1}}$. Обозначим $\dfrac{x_1+x_2}{2}=y_1,\ \dfrac{x_3+x_4}{2}=y_2,\ \ldots,\ \dfrac{x_{2^{k+1}-1}+x_{2^{k+1}}}{2}=y_{2^k}$. Поскольку чисел $y_1,y_2,\cdots,y_{2^k}$ всего 2k, то по предположению, $\dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_{2^k}}{2^k}\geqslant\sqrt[2^k]{y_1y_2\cdots y_n}$. Следовательно,

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{2^k}}{2^k}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[2^k]{y_1y_2\cdots y_{2^k}}=\sqrt[2^k]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\cdots\left(\frac{x_{2^{k+1}-1}+x_{2^{k+1}}}{2}\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[2^k]{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}\cdots\sqrt{x_{2^{k+1}-1}x_{2^{k+1}}}}=\sqrt[2^{k+1}]{x_1x_2\ldots x_{2^{k+1}}}$$

Итак, неравенство доказано для случаев, когда n есть степень двойки. Теперь индукцией вниз распространяем на остальные n. Это относительно сложный момент в доказательстве. Предположим, что неравенство Коши доказано для n = k. Необходимо доказать, что оно верно и для n = k − 1. Это можно сделать так. Пусть у нас есть k − 1 чисел $x_1,\ldots,x_{k-1}$. Добавим к ним

$x_k = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{k-1}$, — k-е число, равное их среднему арифметическому. Для этих k чисел неравенство Коши по предположению верно, и мы можем его использовать:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{k-1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}}{k-1}}{k} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_{k-1} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{k-1}}$$

Умножим левую и правую части на $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{k-1}\right)^{-1/k}$, получим

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{k-1}\right)^{1-1/k} \geqslant \sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_{k-1}}$$

Возведя обе части в степень $\dfrac{k}{k-1}$, получаем

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{x_1 x_2 \ldots x_{k-1}},$$

что и требовалось доказать.

Ясно, что теперь неравенство доказано для любого n: выбираем любое k такое, что $2^k \geqslant n$. Для 2k неравенство доказано. Значит, оно верно, как мы только что показали, и для 2k − 1, а раз верно для 2k − 1, то верно и для 2k − 2, и так далее, пока не доберёмся до n.

14. Задача про кубы.

Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

Решение

Поскольку $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ делится на 9, то для n = 1 утверждение верно.

Предположим, что оно верно для n = k, то ест· $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 = 9m$ для некоторого натурального числа m. Нам нужно доказать для n = к + 1.

Но действительно,

$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 27k + 9k2 + 27 =$
$= 9m + 27k + 9k2 + 27 = 9(m + 3k + k2 + 3)$

делится на 9, и мы заключаем, что утверждение верно для любого n.

15. Задача про делимость. 32n + 2 + 8n − 9 и 4n + 15n − 1

Докажите, что

а) 32n + 2 + 8n − 9 делится на 16.

б) 4n + 15n − 1 делится на 9.

16. Найдите ошибку в доказательстве.

Утверждение 1. У всех людей глаза одинакового цвета.

Доказательство. Докажем, что в компании из n людей у всех глаза одинакового цвета. При n = 1 утверждение очевидно.

Предположим, что оно верно при n = k. Докажем, что тогда оно верно и для n = k + 1. Итак, пусть перед нами k + 1 человек. Перенумеруем их: первый, второй, третий, …, k-й, (k + 1)-й. По предположению, у любых k из этих людей глаза одинакового цвета. Значит, у первого, второго, …, k-го — глаза одинакового цвета.

Возьмём теперь другую группу из k человек: второй, третий, …, k-й, (k + 1)-й. У них тоже глаза одинакового цвета. В обеих группах присутствовал второй человек. Значит у всех них глаза того же цвета, как и у второго, то есть у всех одинаковые.

Рассуждая таким образом, можно доказать множество других удивительных вещей. Например:

Утверждение 2. Через любые n точек на плоскости можно провести прямую.

Доказательство. При n = 1 и n = 2 теорема справедлива (в силу известной аксиомы геометрии). Остаётся доказать теорему для n, больших, чем 2.

Допустим, что теорема справедлива при некотором n = k, и покажем, что в этом случае она будет сохранять силу и при n = k + 1.

Итак, пусть произвольно заданы (k + 1) точек $M_1, M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$. В силу предположения индукции через k точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ проходит некоторая прямая l. В силу того же предположения через k точек $M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$ также проходит некоторая прямая l'. Эти две прямые имеют по крайней мере две общие точки M2 и Mk. Но две точки определяют единственную прямую. Поэтому прямые l и l' должны совпадать.

Следовательно, прямая l, проходящая через точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, проходит и через точку Mk + 1. Утверждение доказано.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На доске записано рациональное число $q = \frac{m}{n}$. Его можно стереть и записать вместо него либо $q + 1 = \frac{m+n}{n}$, либо $\frac{1}{q} = \frac{n}{m}$. Докажите, что с помощью указанных двух операций можно из единицы получить любое рациональное число. Например, число $\frac{2}{5}$ можно получить так: $1 \to 2 \to \frac{1}{2} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{2} \to \frac{2}{5}$.

2. В прямоугольнике $3 \times n$(3 строки, n столбцов) расставлены фишки трёх цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что, переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трёх цветов.

3. Плоскость поделена на области несколькими прямыми и окружностями. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. Соседними считаются области, границы которых имеют общий отрезок.

4. В компании из n человек (n > 3) каждый узнал по одному новому анекдоту (все анекдоты разные). За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им анекдоты. Докажите, что за 2n − 4 звонков все смогут узнать все новые анекдоты.

5. На координатной плоскости расположено n квадратов одинакового размера так, что их стороны параллельны осям координат. Доказать, что все квадраты можно разбить на три группы так, что в каждой группе квадраты не будут пересекаться.

Заключение.

Изучение курса «Метод математической индукции» необходимо учащимся в наше время, как при подготовке к ЕГЭ, к олимпиадам, так и к вступительным экзаменам в вузы. Владение приемами решения задач методом математической индукции можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Метод математической индукции открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях и на любом другом математическом материале. Именно такие задачи играют большую роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников. Поэтому учащиеся, владеющие методом математической индукции успешно справляются с самыми сложными задачами на олимпиадах и в тестах ЕГЭ по математике (С6).

Список использованной литературы.

1. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. - М.: Наука. - 1987. - стр.396.
2. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика/ Пособие для учителей. - М.: Просвещение. – 1976. - стр.4 - 18.
3. Головина Л.И., Яглом И.М. Индукция в геометрии. - М.: Госуд. издат. т-теор литер. - 1956 - стр.100.
4. Пособие по математике для поступающих в вузы/ Под ред. Яковлева Г.Н. - М.: Наука. – 1981. - стр.47-51.
5. Рубанов И.С. Как обучать методу математической индукции/ Математика в школе. - №1. – 1996. - стр. 14-20.
6. Соломинский И.С. Метод математической индукции. - М.: Наука. - 1974. - стр. - 63.
7. Соломинский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. - М.:Наука. – 1967. - стр.7-59.
8. Виленкин Н.Я и др. Алгебра и математический анализ 10. – М.: Просвещение. – 1992. - стр.39-49.
9. Галицкий М.Л. и др. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа/ Пособие для учителей. - М.:Просвещение. – 1986. - стр.11-19.

Рекомендуемая литература для учащихся.

1. Болдырева М.Х., Дворянинов С.В.и др., «Избранные вопросы школьного курса математики», Выпуск №1, Самара, СИПКРО, 2001г.
2. И.Н. Антипов, Н.Я. Виленкин Избранные вопросы математики, Москва, «Просвещение», 1979г.
3. К.У. Шахно, Элементарная математика для окончивших среднюю школу, Ленинград, 1976г., стр. 46-53.
4. Универсальная энциклопедия школьника, Математика и программирование, Минск, ТОО «Харвест», 1996г., стр. 176-178.

50,00

Методическое пособие для учителей и
учащихся инженерных классов
физико-математического профиля

«Метод математической индукции»

ООО «Арка», 429060 ЧР г. Ядрин, ул. Молодежная, 3
Тир. 300/24 Зак. 741