М.О. Перестюк, М.Я. Свіщук

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
з диференціальних рівнянь

Допущено
Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник
для студентів університетів
та технічних вищих закладів освіти

КИЇВ
«ТВіМС»
2004

ББК 22.161. 6я73
П27

УДК 517.2

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Н.О. Вірченко*
(Нац. техн. ун-т України «КПІ»),
д-р фіз.-мат. наук, проф. *О.К. Лопатін*
(Ін-т математики НАН України),
д-р фіз.-мат. наук, проф. *І.О. Парасюк*
(Київський націон. ун-т ім. Т. Шевченка)

Перестюк М.О., Свіщук М.Я.
П27 Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник –
К.: ТВіМС, 2004. – 224 с.
ISBN 966-95255-3-5.

Навчальний посібник містить близько 1200 задач з основних розділів нормативного курсу звичайних диференціальних рівнянь. У кожній главі подано основні відомості з теоретичного курсу, наведено приклади розв'язування типових задач.

Для студентів університетів та вищих навчальних закладів освіти.

П $\frac{1602120000-020}{2004}$ **ББК 22.161. 6я73**

ISBN 966-95255-3-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Стрімкий розвиток сучасного світу в усіх його проявах з кожним роком вимагає від кожної людини зокрема, та людства в цілому, все більшого вміння пристосовуватися до швидкоплинних умов навколишнього середовища, вміння отримувати та аналізувати велику кількість інформації тощо. Саме тому сьогодні наука взагалі і математика зокрема визнаються пріоритетами людської цивілізації, оскільки від наявності науково упорядкованого світогляду у конкретної людини або окремо взятої групи залежить їх особистий успіх у суспільній самореалізації.

Важливість математики, як фундаментальної, так і конкретно прикладної науки, обумовлюється перш за все швидким розвитком інформаційних технологій, визнанням інноваційного шляху розвитку економіки кожної країни запорукою успішного конкурування на світових ринках. Таким чином, природно виникає потреба пов'язання абстрактної математики з її конкретними прикладеннями у багатьох наукових галузях. Виявляється, що абсолютна більшість шляхів від так званої «чистої» математики до математики прикладної пролягає саме через величну теорію диференціальних рівнянь. Більш того, ми цілком визначено можемо говорити про проблеми теорії диференціальних рівнянь як про ґрунт, на якому виникли багато інших математичних теорій (лінійна алгебра, теорія груп Лі, функціональний аналіз, квантова механіка тощо), що дає нам право визначити теорію диференціальних рівнянь, як основу природничо-наукового математичного світогляду.

Свої початки диференціальні рівняння беруть ще з часів Ньютона, коли природні явища почали записувати за їх допомогою. Саме небесна механіка була першою галуззю науки, в якій відповідні закони описували диференціальними рівняннями. Поняття «aequatio differentialis» або «диференціальне рівняння» вперше було введено видатним німецьким математиком Вільгельмом Готфрідом Лейбніцем у 1676 році. Сучасна теорія диференціальних рівнянь являє собою величезну множину різних ідей та методів, багато з яких вже можна визначати як виключно корисні з точки зору практичних застосувань і тому нам залишається тільки дивуватися прозорливості Ньютона, який основне своє відкриття видав у вигляді анаграми: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa», що можна перекласти на сучасну математичну мову як: «Корисно розв'язувати диференціальні рівняння».

Дійсно, дуже важко уявити собі досвідченого сучасного інженера, фізика або, тим більше, математика без знання теорії диференціальних рівнянь і навичок їх розв'язування. Саме допомога в здобутті навичок розв'язування диференціальних рівнянь і є головною метою даного навчального посібника.

Книга написана з урахуванням багаторічного досвіду та традицій викладання базового курсу диференціальних рівнянь викладачами кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Навчальний посібник містить приклади та задачі з диференціальних рівнянь в обсязі програми нормативного курсу для студентів механіко-математичних факультетів університетів і технічних вищих закладів освіти з поглибленим вивченням математики. Він є практичним забезпеченням підручників: *А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк* «Диференціальні рівняння» [11] та *А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк* «Диференціальні рівняння в задачах» [10].

Посібник складається з чотирьох глав (відповідно до типів задач і методів їх розв'язування) та додатків.

Значну увагу приділено інтегруванню диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів, проблемам коливності розв'язків та дослідженню їхньої стійкості в сенсі Ляпунова, рівнянням з частинними похідними. Практично в кожну главу вміщено задачі з математичного моделювання процесів природничого характеру (фізичного, хімічного, біологічного тощо) та геометричні задачі, які моделюються диференціальними рівняннями. В усіх параграфах подано основні методи та наведено розв'язання кількох типів задач.

Кожна самостійна робота має десять варіантів тематично скомпонованих завдань, які можна використати для індивідуальних завдань та контрольних робіт студентів.

До більшості задач дано відповіді.

Автори висловлюють подяку викладачам, аспірантам кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь, студентам Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також Мельничуку О.В. особисто за допомогу при підготовці навчального посібника.

Глава 1
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1. Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \tag{1.1}$$

де F – задана функція змінних x, y, y'; y – невідома функція аргументу x; $y' = \frac{dy}{dx}$, а рівняння, розв'язане відносно похідної (*канонічна форма*), –

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

(f – задана функція змінних x, y).

Часто застосовують *симетричну форму* запису рівняння типу

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1.3}$$

де $M(x, y), N(x, y)$ – задані функції змінних x, y.

Зазначимо, що F, f, M, N в (1.1)–(1.3) є неперервними функціями своїх змінних. Будь-яка неперервно диференційовна на інтервалі $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює диференціальне рівняння на тотожність на I, називається *розв'язком цього рівняння.*

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$, яке неявно задає розв'язок рівняння, називається *інтегралом рівняння.* Якщо $\Phi(x, y) = 0$ – інтеграл диференціального рівняння (1.2), то згідно з ним

$$d\Phi(x, y) = \Phi'_x(x, y)\,dx + \Phi'_y(x, y)\,dy,$$

тобто

$$\Phi'_x(x, y) + \Phi'_y(x, y) \cdot f(x, y) = 0. \tag{1.4}$$

Функція $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in D \subset \mathbb{R}$, задана параметрично, є розв'язком диференціального рівняння (1.2), якщо

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \text{при } t \in D.$$

Задача знаходження розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння, який задовольняє задану початкову умову $y(x_0) = y_0$, називається *початковою задачею*, або *задачею Коші* (рис. 1).

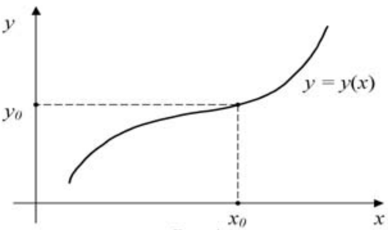

Рис.1

2. Рівняння (1.2) у кожній точці області визначення породжує вектор, що утворює з додатним напрямом осі Ox кут, тангенс якого дорівнює значенню $f(x, y)$ у цій точці. Множина всіх таких векторів (одиничної довжини) є *полем напрямів*.

Крива, яка в кожній своїй точці дотикається до одного з векторів, що належить полю напрямів, є інтегральною.

Ізокліною диференціального рівняння називається крива, в кожній точці якої напрям поля однаковий. Для рівняння (1.2) ця крива задається співвідношенням $f(x, y) = k$, де $k = \text{const}$.

Якщо в точці (x_0, y_0) функція перетворюється на невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$, то її або довизначають за неперервністю, або вважають, що в точці (x_0, y_0) поле невизначене (у разі, якщо f не можна довизначити). Наприклад, вважатимемо, що в точці $(0, 0)$ диференціальне рівняння $y' = \frac{\sin x}{x}$ породжує напрям, такий, що $\operatorname{tg} \alpha = 1$, тоді як напрям поля, породженого рівнянням $y' = \frac{x+y}{x-y}$, є невизначеним у цій точці.

Додаткову інформацію про інтегральні криві диференціального рівняння можна отримати, досліджуючи лінії екстремальних точок, точок перегину, ізокліни нуля, асимптоти інтегральних кривих і т.д. [10 (1.17, 1.18, 1.19)].

3. Для складання диференціального рівняння заданої n-параметричної сім'ї кривих

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{1.5}$$

необхідно продиференціювати (1.5) n разів за змінною x, вважаючи, що y є функцією аргументу x. Дістанемо систему, яка складається з $(n+1)$ рівнянь і з якої слід вилучити всі параметри $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Універсального методу складання диференціального рівняння, що описує перебіг деякого еволюційного процесу, не існує. У багатьох випадках залежність між досліджуваними величинами ґрунтується на відомих фізичних законах (Ньютона, Ціолковського, збереження енергії, збереження імпульсу і т.д.). Часто застосовують експериментальні дані. При цьому використовують геометричний зміст похідної (тангенс кута нахилу дотичної) та її фізичний зміст (швидкість перебігу процесу) [10 (Вступ)].

При використанні геометричного змісту не лише похідної, а й визначеного інтеграла (площа криволінійної трапеції), дістанемо інтегро-диференціальне рівняння. Такі рівняння отримуються також при використанні деяких формул, які містять інтеграли (довжина дуги кривої, площа поверхні, об'єм тіла обертання, робота сили тощо). У найпростіших випадках інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння зводяться до диференціальних рівнянь шляхом диференціювання.

Приклад 1. Чи є функція $y = \operatorname{tg} x$ розв'язком диференціального рівняння $y' = y^2 + 1$?

Розв'язання. Оскільки $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, то задана функція задовольняє диференціальне рівняння також і на кожному з інтервалів $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, на яких має місце неперервна диференційовність цієї функції, а тому вона є розв'язком даного нам рівняння.

Приклад 2. Довести, що функція $y = \varphi(x)$, задана параметрично: $x = te^t$, $y = e^{-t}$, є розв'язком диференціального рівняння $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = -\frac{e^{-t}}{e^t + te^t},$$

а після підставляння отриманого виразу для похідної в рівняння дістанемо:

$$(1 + t) \cdot \left(-\frac{e^{-t}}{e^t(1 + t)}\right) + e^{-2t} = 0.$$

Приклад 3. Знайти інтегральні криві рівняння $y' = \frac{y}{x}$.

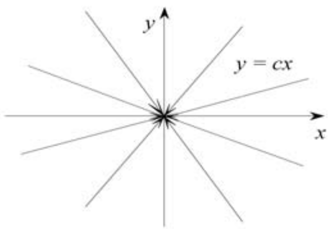

Рис.2

Розв'язання. Використаємо метод ізоклін. Для заданого рівняння ізокліни мають вигляд $\frac{y}{x} = k$, $k = \text{const}$, або $y = kx$, де $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{x_0}$. А, отже, інтегральними кривими є саме півпрямі $y = Cx$ $(x \neq 0)$ (C – довільна стала) (рис. 2).

Пояснення. Оскільки в точці $(0,0)$ поле не визначено, то прямі $y = Cx$ не можуть бути інтегральними кривими, оскільки точка $O(0,0)$ не належить жодній з цих кривих.

Приклад 4. Для диференціального рівняння $y' = -\frac{x}{y}$ записати по одному розв'язку:

а) в явній формі; **б)** в неявній формі; **в)** в параметричній формі.

Розв'язання.

а) Легко помітити, що функція $y = \sqrt{1-x^2}$ є розв'язком заданого рівняння, якщо $x \in (-1,1)$. Маємо $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

б) Функція $y = y(x)$, задана неявно співвідношенням $y^2 + x^2 = 1$, $y > 0$, також задає розв'язок цього рівняння. Справді, в силу рівняння повний диференціал цієї функції дорівнює

$$d(x^2 + y^2 - 1) = 2x\,dx + 2y\,dy = 2x\,dx - \frac{x}{y} \cdot 2y\,dx = 0.$$

в) Параметрично задана функція $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (0,\pi)$ також задає розв'язок рівняння, оскільки для цієї функції маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Зазначимо, що кожна з функцій а)–в) задає y як неперервно диференційовну функцію аргументу x.

Приклад 5. Скласти диференціальне рівняння сім'ї парабол $y^2 = Cx$.

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівності $y^2 = Cx$ по змінній x, дістанемо

$$\begin{cases} y^2 = Cx; \\ 2yy' = C; \end{cases}$$

або $y = 2xy'$ – шукане диференціальне рівняння.

Приклад 6. Скільки розв'язків $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$ визначає співвідношення $y(x + \ln x) = 1 - y$?

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння визначене в правій півплощині, тобто лише тільки при $x > 0$. Оскільки розв'язком диференціального рівняння може бути лише неперервно диференційовна функція, то функцію $y = \varphi(x)$, задану співвідношенням $y(x + \ln x) = 1 - y$, розглянемо на предмет неперервної диференційовності при $x > 0$.

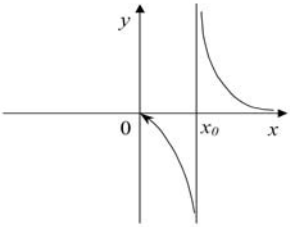

Рис.3

Маємо $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$, $y' = \frac{x+1}{x(1+x+\ln x)^2}$.

Легко помітити, що існує точка $x_0 > 0$, така, що $1 + x_0 + \ln x_0 = 0$. Знайдена із співвідношення функція $y(x)$ і її похідна неперервні на кожному з інтервалів $(0, x_0)$, $(x_0, +\infty)$, і, отже, задане співвідношення визначає два розв'язки диференціального рівняння, якщо знайдена функція формально задовольняє рівнянню. Останнє твердження має місце

$$-\frac{(x+1)x}{x(1+x+\ln x)^2} + \frac{1}{1+x+\ln x} = \frac{\ln x}{(1+x+\ln x)^2},$$

якщо $x \in (0, x_0)$, або $x \in (x_0, +\infty)$. Графіки розв'язків (інтегральні криві) зображено на рис. 3.

Приклад 7. Користуючись методом ізоклін, побудувати наближено інтегральні криві рівняння $xy' = 2y$.

Розв'язання. Ізокліни даного рівняння задаються співвідношеннями $\frac{2y}{x} = k$, або $y = \frac{kx}{2}$, де $k = \text{const}$. Оскільки заміна x на $-x$ не змінює рівняння, то, отже, його інтегральні криві симетричні відносно обох осей координат. Досліджуючи поведінку інтегральних кривих в першому квадранті, ми отримаємо повну картину поведінки всіх інтегральних кривих даного рівняння.

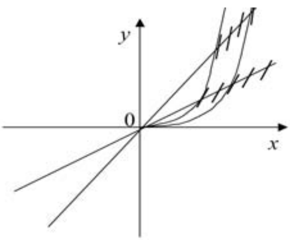

Рис.4

Для побудови інтегральних кривих складемо таблицю $(k = \operatorname{tg}\alpha)$:

k	α	y
0	0	0
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{x}{2}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$

і так далі.

Навіть обмежившись кількома ізоклінами, можна зобразити інтегральні криві, які лежать у першому квадранті (рис. 4). Зауважимо, що вісь Ox також є інтегральною кривою.

Довести, що задані функції є розв'язками вказаних рівнянь $(c \in \mathbb{R})$:

1. $y = \frac{\sin x}{x},\ xy' + y = \cos x.$

2. $y = x\sqrt{1-x^2},\ yy' = x - 2x^3.$

3. $y = e^{\arcsin cx},\ xy' = y\operatorname{tg}(\ln y).$

4. $y = e^x \displaystyle\int\limits_0^x e^{s^2}\,ds + ce^x,\ y' = e^{x+x^2}.$

5. $y = x \displaystyle\int\limits_0^x \frac{\sin s}{s}\,ds,\ xy' = y + \sin x.$

6. $y = x\left(\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx + c\right),\ xy' - y = xe^x.$

7. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad x + yy' = 0.$

8. $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}; \end{cases} \quad (1+xy)y' + y^2 = 0.$

9. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = t^2(2\ln t + 1); \end{cases} \quad y'\ln\dfrac{y'}{4} = 4x.$

10. $y = x(x - \ln|x|),\ (x-y)\,dx + x\,dy = 0.$

11. $x = ye^{cy+1},\ y' = \frac{y}{\ln x - \ln y}.$

12. $x = y\ln y,\ y'(x+y) = y.$

Перевірити, чи є наступні співвідношення інтегралами вказаних рівнянь ($c = \mathrm{const}$):

13. $e^{-y} - cx = 1,\ xy' + 1 = e^y.$

14. $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2},\ xy^2\,dy + y^3\,dx = \frac{dx}{x}$

15. $y^2 + 2cx = c^2,\ yy'^2 + 2xy' = y + 1.$

16. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0,\ c > 0,\ (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0.$

17. $x = y\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,dt,\ y = xy' + y^2\sin x^2.$

18. $x\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = y\ln y,\ xy' + x\ln y = x\sin x + y\ln y.$

Методом ізоклін побудувати інтегральні криві таких рівнянь:

19. $y' = \dfrac{y-x}{y+x}.$

20. $y' = x + 1$

21. $y' = x + y.$

22. $y' = y - x.$

23. $y' = (y-1)^2.$

24. $y' = (y-1)x.$

25. $y' = x^2 - y^2.$

26. $y' = \cos(x-y).$

27. $y' = \dfrac{x-1}{y}.$

28. $y' = (1-y)(1-x).$

29. $y' = y - x^2 + 2x.$

30. Для диференціального рівняння $y' = f(y)$, де

$$f(y) = \begin{cases} 3y^{\frac{2}{3}}, & y \le 0; \\ 2y^{\frac{1}{2}}, & y > 0, \end{cases}$$

знайти проміжки, на яких задані функції будуть його розв'язками:

а) $y = (x-1)^2;$

б) $y = \begin{cases} (x-1)^2, & x > 1; \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$

в) $y(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0; \\ 0, & 0 \le x \le 1; \\ (x-1)^2, & x > 1. \end{cases}$

Накреслити графіки, пояснити геометричний зміст.

31. Для диференціального рівняння $y' = f(y)$, де

$$f(y) = \begin{cases} 3y^{\frac{2}{3}}, & y \le 0; \\ 2\sqrt{y}, & 0 < y \le 1; \\ 2, & y > 1, \end{cases}$$

знайти проміжки, на яких задані функції будуть його розв'язками:

$$\textbf{а)}\ y = x^2; \qquad \textbf{б)}\ y = \begin{cases} x^3, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 2x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Накреслити інтегральні криві наступних рівнянь:

32. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x+y}{|x+y|}$.

33. $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y = x; \\ 0, & \text{якщо } y \ne x. \end{cases}$

34. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x+|y|}{y+|y|}$.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{|xy|}$.

Скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

36. $y = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$.

37. $\arcsin x + \arcsin y = C,\ C \in \mathbb{R}$.

38. $x^2 + y^2 = Ce^{\operatorname{arctg} \frac{x}{y}}$ – сім'я логарифмічних спіралей, $C \in \mathbb{R}$.

39. $x \operatorname{tg}(x + C) = y,\ C \in \mathbb{R}$.

40. $x \operatorname{ch}(x + C) = y,\ C \in \mathbb{R}$.

41. $\rho^2 = a \cos 2\theta,\ a$ – параметр.

42. $\frac{x^2}{a^2+c} + \frac{y^2}{b^2+c} = 1,\ c$ – параметр.

43. Знайти диференціальне рівняння всіх кіл на площині.

44. Знайти диференціальне рівняння всіх парабол на площині.

45. Знайти диференціальне рівняння всіх кіл, які дотикаються до осі ординат.

46. Знайти диференціальне рівняння сім'ї циклоїд $x = C(t - \sin t)$; $y = C(1 - \cos t),\ C \in \mathbb{R}$.

47. Скільки розв'язків диференціального рівняння $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ визначає співвідношення $y = \frac{1}{x} + C$ при кожному фіксованому значенні $C \in \mathbb{R}$? Накреслити інтегральні криві.

48. Скільки розв'язків диференціального рівняння $y' = \dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}}}$ визначає співвідношення $y = \sqrt[3]{x^2} + C$ при кожному фіксованому значенні $C \in \mathbb{R}$? Накреслити інтегральні криві. Чи має рівняння інші розв'язки? Які?

49. Довести, що функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком задачі Коші $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком інтегрального рівняння $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$.

50. Показати, що співвідношення $y = Cx^m$ задає розв'язок диференціального рівняння $xy' - my = 0$ для кожного $C \in \mathbb{R}$.

51. Показати, що всі розв'язки диференціального рівняння $(1 + xy)\,dx - (x^2 + 1)\,dy = 0$ можна подати у вигляді співвідношення $y = x + C\sqrt{1 + x^2}$, де C – довільна дійсна стала.

52. Показати, що всі розв'язки диференціального рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$ можна подати у вигляді співвідношення $y(Cx + \ln x + 1) - 1 = 0$, $C \in \mathbb{R}$.

§ 2. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

1. Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Очевидно, що функції $y = C_0$ такі, що $g(C_0) = 0$, є розв'язками рівняння (2.1). Інші розв'язки, вздовж яких $g(y) \neq 0$, задовольняють співвідношення

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C, \tag{2.2}$$

де C – довільна стала.

Розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ можна подати як

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi. \tag{2.3}$$

2. З диференціальним рівнянням

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{2.4}$$

пов'язано поняття *векторного поля на прямій*. Вектори поля завдовжки $|f(y)|$ мають своїм початком точку $O(0,0)$; напрям їх або збігається з додатним напрямом осі Oy, якщо $f(y) > 0$, або протилежний до нього, якщо $f(y) < 0$.

Точки, в яких напрям поля не визначений, називаються *особливими*, або *положеннями рівноваги*.

За векторним полем неважко схематично зобразити інтегральні криві рівняння.

Для побудови інтегральних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2.5}$$

зручно користуватися полем напрямів. Ізокліни для (2.5) мають вигляд $f(x) = k$, де k – стала. Знак функції $f(x)$ визначає характер монотонності розв'язків рівняння (2.5). Оскільки $\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x)$, то з рівності $f'(x) = 0$ легко визначити точки перегину інтегральних кривих. Знак похідної $f'(x)$ визначає характер опуклості останніх.

Рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c) \tag{2.6}$$

заміною $z = ax + by + c$, де z – нова функція аргументу x, зводяться до рівнянь типу (2.4).

3. Зазначимо, що при інтегруванні рівняння

$$M(x)N(y)\, dx + P(x)Q(y)\, dy = 0 \tag{2.7}$$

в процесі відокремлення змінних при переході до рівняння $\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0$ можлива втрата інтегральних кривих, які визначаються співвідношеннями $P(x) = 0$, $N(y) = 0$. Слід зважати також на те, що при перепозначенні довільної сталої $C \to \varphi(C)$ необхідно враховувати можливе звуження області її визначення.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$3e^x \sin y\,dx + \frac{2 - e^x}{\cos y}\,dy = 0.$$

Розв'язання. Область визначення цього рівняння $\left\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}\right\}$. Відокремлюючи змінні, дістанемо $\frac{3e^x}{2-e^x}\,dx + \frac{dy}{\sin y \cdot \cos y} = 0$. При цьому можлива втрата інтегральних кривих $x = \ln 2$, $y = \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Формальне інтегрування дає $-3\ln|2 - e^x| + \ln|\operatorname{tg} y| = C_1$, де $C_1 \in \mathbb{R}$. Після потенціювання матимемо $\dfrac{\operatorname{tg} y}{(e^x)^3} = \pm e^{C_1}$. Прийнявши нове позначення довільної сталої й поклавши $C = \pm e^{C_1}$, отримаємо

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2^x)^3} = C. \tag{2.8}$$

Співвідношення (2.8) визначає всі без винятку розв'язки вихідного рівняння (в тому числі й $x = \ln 2$, $y = \pi k$), якщо C пробігає множину всіх дійсних чисел, $C \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що розв'язок $x = \ln 2$ дістаємо з (2.8) граничним переходом по C $(C \to \infty)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{y}\,dx = \frac{x}{2}\,dy$.

Розв'язання. Областю визначення рівняння є множина $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$. Відокремлюючи змінні, знайдемо $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$, при цьому $x \neq 0$, $y \neq 0$. Формальне інтегрування дає $\sqrt{y} = \ln|x| + C_1$, а після перепозначення $C_1 = \ln C$ дістанемо

$$y = \ln^2 Cx. \tag{2.9}$$

Співвідношення (2.9) дає можливість отримати інтегральну криву $x = 0$ $(y > 0)$ граничним переходом при $C \to \infty$. Дві інші (втрачені в процесі формального інтегрування) інтегральні криві $y = 0$ $(x > 0)$, $y = 0$ $(x < 0)$ неможливо отримати із співвідношення (2.9) при жодному значенні C, а, отже, їх треба приєднати до однопараметричної сім'ї (2.9).

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Права частина рівняння не визначена при $x = 0$. Довизначимо її за неперервністю, покладаючи $y' = 1$ при $x = 0$.

Розв'язок цього рівняння не виражається в елементарних функціях, тому подамо його у формі Коші

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi + y_0. \tag{2.10}$$

Незважаючи на те, що інтеграл у правій частині (2.10) не виражається через елементарні функції, з (2.10) все ж таки можна отримати деяку інформацію про хід інтегральних кривих досліджуваного рівняння. Отже, кожна інтегральна крива має свою горизонтальну асимптоту, оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \frac{\pi}{2} + y_0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\frac{\pi}{2} + y_0$ (тут використовуємо той факт, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$). Прямі $x = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ є лініями екстремумів інтегральних кривих, а вісь ординат – множиною точок їх перегину.

Приклад 4. Дослідити хід інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

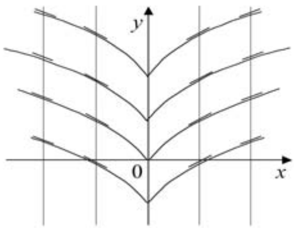

Рис.5

Розв'язання. Права частина рівняння визначена й неперервна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $(y \in \mathbb{R})$. Ізоклінами є прямі $x = a$, де a – дійсне число, при цьому ізоклінами нуля $x = 0$ є розв'язки рівняння $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. У лівій півплощині інтегральні криві спадають, оскільки $\frac{dy}{dx} < 0$, у правій – зростають $\left(\frac{dy}{dx} > 0\right)$. Ліній екстремумів немає. Оскільки $y'' < 0$, то в обох півплощинах інтегральні криві опуклі вгору, точок перегину немає. При $|x| \to +\infty$ напрями дотичних до інтегральних кривих наближаються до горизонтального.

Отриманої інформації достатньо для побудови інтегральних кривих (рис. 5), аналітичний вираз для яких легко знайти, проінтегрувавши рівняння $y = x^{\frac{2}{3}} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Дослідити хід інтегральних кривих за полем напрямів і, проінтегрувавши рівняння, накреслити виділену інтегральну криву:

53. $y' = -\dfrac{1}{x^2};\ M\,(1;1)\,.$ **54.** $y' = \dfrac{1}{\sin x};\ M\,\left(\frac{\pi}{2};0\right)\,.$

Знайти вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти інтегральних кривих, які проходять через дану точку; зробити рисунки:

55. $y' = -2xe^{-x^2};\ M\,(0;1)\,.$ **56.** $y' = \dfrac{1}{1+x^2};\ M\,(0;0)\,.$

57. $y' = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2};\ M\,(0;-1)\,.$ **58.** $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}};\ M\,(1;0)\,.$

59. $y' = e^{-x^2};\ M\,(0;0)\,.$

Вказівка: скористатися невласним інтегралом $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

60. $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x};\ M(0;0).$ **61.** $y' = 1 + y^2;\ M(0;0).$

62. $y' = y;\ M(0;1).$ **63.** $y' = -y^2;\ M(0;1).$

64. $y' = y^3 - 1;\ M(0;1).$

Знайшовши розв'язки вигляду $y = b$, побудувати схематично інтегральні криві рівнянь:

65. $y' = y^2 - 1.$ **66.** $y' = y^2 - 5y + 6.$

67. $y' = y^2 - 4.$ **68.** $y' = \sin y.$

69. $y' = y \ln y.$ **70.** $y' = y^{\frac{2}{3}}.$

71. $y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} y}.$ **72.** $y' = 2\sqrt{y} + 1.$

73. $y' = y\left(1 - y^2\right)\,.$ **74.** $y' = \begin{cases} y \cdot \ln\left(y^2\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Вивчити поле напрямів, породжене рівнянням (методом ізоклін), вказати області зростання й спадання розв'язків, знайти лінії екстремумів, перегинів та накреслити схематично інтегральні криві. Розв'язати рівняння та вивчити поведінку його розв'язків. Порівняти отримані результати:

75. $y' = 0.$

76. $y' = 1.$

77. $y' = -1.$

78. $y' = -2x.$

79. $y' = -x^2.$

80. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

81. $y' = -2xe^{-x^2}.$

82. $y' = e^{-x^2}.$

83. $y' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

84. $y' = -\dfrac{1}{x}.$

85. $y' = -y.$

86. $y' = y^2.$

87. $y' = \dfrac{1}{y}.$

88. $y' = 2\sqrt{|y|}.$

89. $y' = 2\sqrt{y}.$

90. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$

91. $y' = e^y.$

92. $y' = -y^2 - 2xy - x^2.$

93. $y' = 2xy.$

94. $y' = y\cos x.$

95. $y' = \dfrac{2xy}{1-x^2}.$

96. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x}.$

97. $y' = \dfrac{3x^2}{2y}.$

98. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}}.$

99. $x\left(y^2-1\right)dx + y\left(x^2-1\right)dy = 0.$

Проінтегрувати рівняння та розв'язати задачі Коші. Накреслити інтегральні криві:

100. $y' = y;\ M(0;1).$

101. $y' = -y;\ M(0;1).$

102. $y' = -y^2;\ M(0;0);\ M(1;1).$

103. $y' = y-1;\ M(1;1).$

104. $y' = 2\sqrt{y};\ M(-1;1);\ M(0;0).$

105. $y' = \sqrt{4y^2-1};\ M\left(0;\frac{1}{2}\right).$

106. З'ясувати, в чому полягає принципова різниця між розв'язками задачі Коші з початковою умовою $y(0)=2$ для рівнянь $y' = 2x\sqrt{y-2}$ та $y' = 4xy - 4x - xy^2$. Накреслити графіки.

Розв'язати інтегральні рівняння, звівши їх до диференціальних:

107. $y = \int\limits_0^x \sqrt{y}\, dx.$

108. $\sqrt{y} = \int\limits_0^x y\, dx.$

109. $y = \int\limits_1^x e^{-y}\, dx,\ (x > 0)\,.$

110. $y = \int\limits_0^x y\, dx + 1.$

Проінтегрувати рівняння:

111. $y' = \sin^3 x.$

112. $y' = x^2 e^x.$

113. $y' = \sqrt{1 - x^2}.$

114. $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$

115. $y' = \frac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}.$

116. $y' = \frac{2x}{x^2+1}.$

117. $y' = x\cos x.$

118. $y' = \cos^2 x.$

119. $y' = \frac{x}{\ln x}.$

120. $y' = \frac{e^x}{x}.$

121. $y' = \sin x \cos 3x.$

122. $y' = \frac{1}{\ln x}.$

123. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}.$

124. $y' = \ln x + 1.$

125. $y' = e^y.$

126. $y' = y + 1.$

127. $y' = \ln y.$

128. $y' = 1 + \frac{1}{y^2}.$

129. $y' = y\ln y.$

130. $y' = 1 + \frac{1}{y}.$

131. $y' = 2\sqrt{|y|}.$

132. $y' = \cos^2 y.$

133. $y' = \sqrt{y - x}.$

134. $y' = \frac{1}{x+y-1}.$

135. $y' = \sqrt{y - x} + 1$ (накреслити інтегральні криві).

136. $y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x.$
Вказівка: підставити $x^2 - y = z.$

137. $(y - x)\sqrt{1 + x^2} \cdot y' = \left(1 + y^2\right)^{\frac{2}{3}}.$
Вказівка: підставити $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v.$

138. $(ax - by)\, dx + (bx + ay)\, dy = 0$ (зробити рисунок).
Вказівка: перейти до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi.$

Відокремити змінні та проінтегрувати рівняння. Розв'язати поставлені задачі Коші там, де задана початкова точка:

139. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0.$

140. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2;\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$

141. $\left(y^2 + xy^2\right) y' + x^2 - yx^2 = 0.$

142. $e^y \left(1 + x^2\right) dy - 2x\left(1 + e^y\right) dx = 0.$

143. $\left(xy^2 + x\right) dx + \left(y - x^2 y\right) dy = 0.$

144. $(x+2)e^y\,dx + y\sqrt{x+1}\,dy = 0.$

145. $\left(1 + y^2\right)\,dx - \left(y\sqrt{1+y^2}\right)\left(1 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}\,dy = 0.$

146. $\left(1 + y^4\right)(\cos x + \sin x)\,dx + y\sqrt{\sin 2x}\,dy = 0;\ M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right).$

147. $y - xy' = a\left(1 + x^2 y'\right)$, a – параметр.

148. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$

149. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$

150. $\left(1 + y^2\right)\left(e^{2x}\,dx - e^y\,dy\right) - (1 - y)\,dy = 0.$

Знайти розв'язки, які задовольняють вказані умови:

151. $x^2 y' - \cos 2y = 1,\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{9\pi}{4}.$

152. $3y^2 y' + 16x = 2xy^3$, $y(x)$ – обмежена при $x \to +\infty$.

153. Знайти криві, для яких сума відрізків нормалі MN і піднормалі PN (рис. 6) є сталою величиною, що дорівнює a.

Вказівка. Скористатися формулою довжини відрізка нормалі $MN = \left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|.$

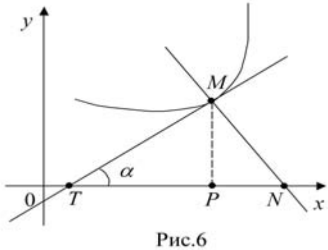

Рис.6

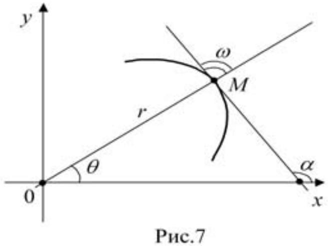

Рис.7

154. Знайти криву, для якої сума довжин дотичної та піддотичної пропорційна добутку координат точки дотику (рис. 6).
Вказівка. Використати формули довжини відрізків дотичної TM та піддотичної TP, а саме $TM = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$, $TP = \frac{y}{y'}$.

155. Знайти криві, для яких тангенс кута між дотичною та додатним напрямом осі Ox обернено пропорційний абсцисі точки дотику.

156. Знайти криву в полярній системі координат, яка перетинає всі радіус-вектори під кутом ω, таким, що $\operatorname{tg}\omega = \theta$ (рис. 7).
Вказівка. Скористатися формулою $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{r}{r'_\theta}$; оскільки $\omega = \alpha - \theta$, то $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$; тому $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{r}{r'_\theta}$.

157. Знайти криві, для яких піднормаль PN (див. рис. 6) скрізь дорівнює p.
Вказівка. Використати формулу довжини піднормалі $PN = |yy'|$.

158. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою повітря і температурою тіла (закон Ньютона). Знайти закон охолодження тіла, якщо температура повітря дорівнює 20°C і тіло протягом 20 *хв* охолодилося від 100°C до 60°C. Через скільки хвилин температура знизиться до 30°C?

159. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини (кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна кількості цієї речовини в даний момент часу). Через скільки днів залишиться 1% початкової кількості?

160. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 1,5 *м/с*, через 4 *с* його швидкість становила 1 *м/с*. Коли швидкість зменшиться до 0,01 *м/с*? Який шлях пройде човен до повної зупинки?

161. Кількість світла, що поглинається шаром води, пропорційна кількості світла та товщині водяного шару. Так, шар води товщиною 35 *см* поглинає половину світла, яке на нього падає. Яку частину світла поглинає шар води товщиною 2 *м*?

162. Маса ракети з повним запасом палива дорівнює M, без палива становить m; швидкість виходу продуктів горіння з ракети дорівнює C, а початкова швидкість ракети – нулю. Знайти швидкість ракети після згоряння всього палива, нехтуючи силою тяжіння та опором повітря (формула Ціолковського).

Розв'язати задачі **163–166** з такою умовою: швидкість витікання рідини з посудини $v = k\sqrt{2gh}$, де $g \approx 10$ *м/с*^{2}, h – висота рівня рідини над отвором, k – коефіцієнт в'язкості (для води $k = 0,6$).

163. За який час витече вся вода з циліндричного бака діаметром 1,8 *м*, заввишки $H = 2,45$ *м* через круглий отвір радіуса 3 *см* у дні. Вісь бака вважати вертикальною.

164. Розв'язати попередню задачу, вважаючи, що вісь циліндра розташована горизонтально, а отвір знаходиться в найнижчій частині циліндра.

165. Лійка має вигляд конуса, радіус основи якого дорівнює 6 *см*, а висота 10 *см*. За який час витече вся вода з наповненої доверху лійки через отвір діаметром 0,5 *см*, зроблений у вершині конуса?

166. Стародавній водяний годинник – це чаша (поверхня обертання), з якої через невеликий отвір у дні витікає вода. Такі годинники використовувалися для вимірювання часу промов адвокатів у давньогрецьких судах. Знайдіть форму водяного годинника, при якій рівень рідини знижується рівномірно.

§ 3. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

1. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною* виміру m, якщо для довільного $t > 0$ виконується рівність $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$.

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

називається *однорідним*, якщо $f(x, y)$ – однорідна функція виміру нуль.

Рівняння в симетричній формі

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{3.2}$$

є однорідним, якщо $M(x,y)$ та $N(x,y)$ – однорідні функції одного й того самого виміру.

Однорідні рівняння (3.1) і (3.2) можна трактувати як такі диференціальні рівняння, що є інваріантними щодо розтягу. Заміна

$$\frac{y}{x} = z, \tag{3.3}$$

де $z = z(x)$, перетворює однорідне рівняння на рівняння з відокремлюваними змінними.

Перехід до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ також відокремлює змінні в однорідному рівнянні.

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{3.4}$$

легко зводиться до однорідного:

а) за допомогою заміни $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, де (x_0, y_0) – координати точки перетину прямих $a_ix + b_iy + c_i = 0$ $(i = 1, 2)$;

б) якщо ці прямі не перетинаються, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, і рівняння (3.4) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, наприклад, за допомогою заміни змінних вигляду $a_2x + b_2y + c_2 = z$, де $z = z(x)$.

2. Рівняння (3.1) називається *квазіоднорідним* з вагою квазіоднорідності σ, якщо $f(tx, t^\sigma y) = t^{\sigma-1}f(x,y)$, тобто якщо рівняння (3.1) інваріантне відносно заміни $x \to tx$, $y \to t^\sigma y$; (у загальному випадку (3.1) інваріантне відносно заміни $x \to t^\alpha x$, $y \to t^\beta y$).

Квазіоднорідне рівняння заміною

$$\frac{y}{x^\sigma} = z, \tag{3.5}$$

де $z = z(x)$, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Заміна змінних

$$t = x^{\sigma} \tag{3.6}$$

перетворює квазіоднорідне рівняння на однорідне.

3. Поле напрямів, породжене однорідним рівнянням, не визначене в точці $(0,0)$. Ця точка є особливою для однорідного рівняння.

Ізокліни однорідного рівняння $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ можна подати у вигляді $y = kx$ $(x \neq 0)$. Причому, якщо k не задовольняє умову $k = \varphi(k)$, то тоді прямі $y = kx$ $(k \neq 0)$ є інтегральними кривими.

Особливими розв'язками однорідного рівняння можуть бути півосі Oy та півпрямі $y = z_i x$ $(x \neq 0)$, де z_i – корені рівняння $z = \varphi(z)$.

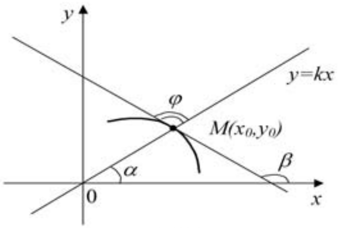

Рис.8

Для однорідного рівняння $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ можна легко знайти тангенс кута, під яким інтегральні криві перетинають промінь $y = kx$. Нехай M – точка перетину деякої інтегральної кривої з прямою $y = kx$ (рис. 8), β – кут між дотичною, проведеною до інтегральної кривої в точці M, та віссю абсцис. Тоді кут між дотичною до інтегральної кривої і прямою $y = kx$ дорівнює $(\beta - \alpha)$. Тому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha}.$$

Оскільки точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на прямій $y = kx$, то $\operatorname{tg}\beta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_M = = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = f(k)$. Отже

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(k) - k}{1 + kf(k)}. \tag{3.7}$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру, то дане рівняння однорідне. Застосовуючи заміну $y = z \cdot x$, де $z = z(x)$ – нова функція, отримуємо

$$xz' + z = z\frac{|x|}{x}\sqrt{1-z^2} \quad \text{або} \quad x\frac{dz}{dx}\operatorname{sign} x\sqrt{1-z^2}.$$

Очевидно, функції $z = \pm 1$ є розв'язками останнього рівняння. Для знаходження інших його розв'язків відокремимо змінні. Інтегруючи отримане рівняння, маємо $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{\operatorname{sign} x}{x}\,dx$, звідки отримуємо $\arcsin z = \operatorname{sign} x \cdot \ln|x| + C$.

Повертаючись до початкових змінних, дістаємо множину розв'язків вихідного рівняння

$$\begin{cases} \arcsin \frac{y}{x} = \operatorname{sign} x \, \ln|x| + C; \\ y = \pm x. \end{cases}$$

Приклад 2. Звести рівняння $(x+y+2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0$ до однорідного і знайти його розв'язки.

Розв'язання. Оскільки точка $(-1, 3)$ є точкою перетину прямих $x+y-2=0$ та $x-y+4=0$, то заміна $x = u-1$, $y = v+3$ приводить до рівняння $(u+v)\,du + (u-v)\,dv = 0$. Здійснивши заміну, властиву для однорідних рівнянь: $z = \frac{u}{v}$, $z = z(v)$, дістанемо:

$$\frac{(z+1)\,dz}{z^2+2z-1} + \frac{dv}{v} = 0.$$

Інтегруючи останнє рівняння та повертаючись до змінних x, y, маємо розв'язки вихідного рівняння $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння, $\frac{dy}{dx} + \frac{2x+2y-1}{x+y-2} = 0$, попередньо звівши його до рівняння з відокремлюваними змінними.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінних $x + y = z$, де $z = z(x)$ і, таким чином, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dz}{dx} - 1 + \frac{2z-1}{z-2} = 0$, розв'язками якого є функції з однопараметричної сім'ї $z - 3\ln|z+1| = C$, де C – довільна стала. Отже, розв'язки вихідного рівняння описуються однопараметричною сім'єю функцій $2x + y - 3\ln|x+y+1| = C$.

Приклад 4. Дослідити рівняння $\left(x^2y^2-1\right)dy+2xy^3\,dx=0$ на квазіоднорідність і знайти всі його розв'язки.

Розв'язання. Вважатимемо, що вага x в рівнянні дорівнює 1, а вага y дорівнює σ. Тоді, відповідно, dx матиме вагу 0, dy – вагу $(\sigma-1)$.

Дане рівняння буде квазіоднорідним, якщо всі його доданки $x^2y^2\,dy$, $2xy^3\,dx$ і dy мають однакову вагу. Для цього система рівнянь $2+2\sigma+\sigma-1=1+3\sigma=\sigma-1$ має бути сумісною. Остання система дійсно є сумісною і має розв'язок $\sigma=-1$, тому ми можемо стверджувати, що дане рівняння є квазіоднорідним.

Зауважимо, що вагу квазіоднорідності σ можна було б знайти, вимагаючи безпосередньо від рівняння інваріантності відносно перетворення $x\to tx$, $y\to t^\sigma y$. Використовуючи такий підхід до проблеми, дістанемо рівняння $\left(t^{3\sigma+1}x^2y^2-t^{\sigma-1}\right)dy+2t^{3\sigma+1}xy\,dx=0$. Останнє рівняння збігається з вихідним, якщо тільки $3\sigma+1=\sigma-1$, тобто при $\sigma=-1$.

Тепер ми обґрунтовано можемо звести дане нам рівняння або до однорідного, або до рівняння з відокремлюваними змінними. В першому випадку заміна $y=u^{-1}$ приводить нас до однорідного рівняння $(u^{-2}-x^2u^{-4})\,du+2xu^{-3}\,dx=0$. А в другому випадку, застосовуючи заміну типу (3.5): $z=\frac{y}{x^{-1}}$, де $z=z(x)$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними $(z^2-1)x\,dz+(z+z^3)\,dx=0$. Інтегруючи останнє рівняння та повертаючись до змінних x, y, знаходимо розв'язки вихідного рівняння: $1+x^2y^2=Cy$, $C\in\mathbb{R}$. Зауважимо, що втрачений в процесі формального інтегрування розв'язок $y=0$, може бути отриманим з останнього співвідношення граничним переходом по C $(C\to+\infty)$.

Скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

167. $y=Cx^2$.

168. $y=\frac{C}{x}$.

169. $C=\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

170. $x^2+y^2-Cy=0$.

171. $y-\sqrt{x^2+y^2}=C$.

172. $x=Ce^{\frac{y}{x}}$.

Дослідити методом ізоклін поле напрямів, які породжуються диференціальним рівнянням, накреслити інтегральні криві та дослідити їх поведінку:

173. $y' = \frac{y}{2x}$.

174. $y' = -\frac{y}{2x}$.

175. $y' = \frac{x}{4y}$.

176. $y' = -\frac{x}{4y}$.

177. $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$.

178. $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

179. $y' = -\frac{x-1}{y+2}$.

180. $y' = \frac{y}{x-1}$.

Розв'язати рівняння:

181. $x(x+2y)\,dx + (x^2-y^2)\,dy = 0$.

182. $(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

183. $(x-2y)\,dy + (y-x)\,dx = 0$.

184. $x\,dy = (ax+by)\,dx$.

185. $y' = \dfrac{y}{x+y}$.

186. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

187. $(y-x)\,dx = (x+y)\,dy$.

188. $x\,dx - y\,dy = 0$.

189. $(y^2-4xy)\,dx = (2x^2-2xy+2y^2)\,dy$.

190. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.

191. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$.

192. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx = x\,dy$.

193. $(2x-4y+6)\,dx + (x+y-3)\,dy = 0$.

194. $(2x+y+1)\,dx - (4x+2y-3)\,dy = 0$.

195. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

196. $(y'+1)\ln\dfrac{x+y}{x+3} = \dfrac{x+y}{x+3}$.

197. $2x\,dy + (x^2y^4+1)y\,dx = 0$.

198. $x^3(y'-x) = y^2$.

199. $y\,dx + x(2xy+1)\,dy = 0$.

200. $2y' + x = 4\sqrt{y}$.

201. $2xy' + y = y^2\sqrt{x-x^2y^2}$.

202. $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6-y^4} + y^2$.

203. Не розв'язуючи рівняння, накреслити його інтегральні криві, використовуючи співвідношення (3.7):

а) $y' = \dfrac{y(2y-x)}{x^2}$.

б) $y' = \dfrac{2y^2-x^2}{xy}$.

в) $y' = \dfrac{2y^3-x^2y}{2x^2y-x^3}$.

г) $xy' = y + \sqrt{y^2+\dfrac{y^3}{x}}$.

204. Знайти криву, для якої трикутник, утворений віссю Oy, дотичною та радіус-вектором точки дотику, є рівнобедреним (розглянути всі можливі випадки).

205. Знайти криву, піддотична TM якої є середнім арифметичним координат точки дотику (див. рис. 6).

206. Знайти криву, для якої відношення відрізка, який відтинається дотичною на осі Oy, до відрізка, який відтинається нормаллю на осі Ox, є сталою величиною, рівною k.

207. При яких m і n рівняння $\frac{dy}{dx} = ax^m + by^n$ є квазіоднорідним? Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = x^m + 2y^2$ за умови, що воно є квазіоднорідним.

208. Довести, що рівняння $(ax + by + c_1)dx + (ay - bx + c_2)dy = 0$ має своїми інтегральними кривими логарифмічні спіралі.

§ 4. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

1. Диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x), \tag{4.1}$$

де $a(x)$, $b(x)$ – довільні неперервні функції, називається *лінійним*, якщо його розглядати, як рівняння відносно функції $y = y(x)$.

Зауважимо, що, відповідно до загальноприйнятої класифікації, рівняння (4.1) зазвичай називають *лінійним неоднорідним рівнянням*, якщо $b(x)$ не дорівнює тотожно нулю на області визначення. Поряд з рівнянням (4.1) також розглядають рівняння

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0, \tag{4.2}$$

яке називають *лінійним однорідним рівнянням*, відповідним рівнянню (4.1).

Загальними методами розв'язування лінійних рівнянь є методи Лагранжа (або метод варіації довільної сталої), Бернуллі та Ейлера.

Метод Лагранжа. Оскільки рівняння (4.2) є рівнянням з відокремлюваними змінними, то воно може бути легко розв'язане у загальному вигляді:

$$\widetilde{y} = \widetilde{C} \exp\left(-\int a(x)dx\right), \tag{4.3}$$

де $\widetilde{C}$ – довільна дійсна стала.

Згідно з методом, який запропонував видатний французький математик Лагранж, розв'язок рівняння (4.1) шукаємо у формі (4.3), але розглядаючи $\widetilde{C}$ не як сталу, а як деяку невідому функцію від x, тобто $\widetilde{C} = \widetilde{C}(x)$:

$$y = \widetilde{C}(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right). \tag{4.4}$$

Підставимо (4.4) у (4.1) і дістанемо, таким чином, диференціальне рівняння для знаходження функції $\widetilde{C}(x)$:

$$\frac{d\widetilde{C}}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx}, \tag{4.5}$$

звідки випливає

$$\widetilde{C}(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C. \tag{4.6}$$

Підставляючи вираз (4.6) для $\widetilde{C}(x)$ у (4.4), отримаємо загальний розв'язок рівняння (4.1)

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C\right). \tag{4.7}$$

Розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ має вигляд

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} b(\xi)e^{\int\limits_{\xi}^{x} a(\vartheta)d\vartheta}d\xi. \tag{4.8}$$

Метод Бернуллі. Згідно з методом Бернуллі розв'язки рівняння (4.1) шукаємо у вигляді

$$y(x) = u(x)v(x), \tag{4.9}$$

де $u(x)$, $v(x)$ визначаються рівняннями:

для $u(x)$

$$u' + a(x)u = 0, \tag{4.10}$$

для $v(x)$

$$v' e^{-\int a(x)dx} = b(x). \tag{4.11}$$

Рівняння (4.10), (4.11) можна легко дістати після формального підставляння (4.9) в (4.1).

Розв'язуючи рівняння (4.10), (4.11), отримаємо:

$$u = e^{-\int a(x)dx}; \qquad v = C + \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx. \tag{4.12}$$

Підстановкою (4.12) у (4.9) ми в загальному випадку отримаємо вираз, аналогічний (4.7).

Метод Ейлера (метод інтегрувального множника). Доможуючи рівняння (4.1) на функцію $m(x) = e^{\int a(x)dx}$ – так званий *інтегрувальний множник*, ми одержимо рівняння

$$(a(x)y - b(x))e^{\int a(x)dx} dx + e^{\int a(x)dx} dy = 0,$$

яке можна переписати у вигляді

$$a(x)ye^{\int a(x)dx} dx + e^{\int a(x)dx} dy = b(x)e^{\int a(x)dx} dx,$$

або

$$d\left(ye^{\int a(x)dx}\right) = b(x)e^{\int a(x)dx} dx.$$

Інтегрування останнього рівняння дає

$$ye^{\int a(x)dx} = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C,$$

що еквівалентно (4.7).

Рівняння (4.7) називають *формулою загального розв'язку* лінійного неоднорідного рівняння (4.1).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним відносно функції $y = y(x)$. Продемонструємо на прикладі цього рівняння кожний із запропонованих методів.

Метод Лагранжа дає такий ланцюжок перетворень:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{y} = \widetilde{C}e^{-x^2} \left(\widetilde{C} \in \mathbb{R}\right);$$

$$y = \widetilde{C}(x)e^{-x^2}, \quad y' = \widetilde{C}'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\widetilde{C}(x);$$

$$\frac{d\widetilde{C}(x)}{dx} = 2x, \quad \widetilde{C}(x) = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = e^{-x^2}\left(x^2 + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Метод Бернуллі приводить до інших перетворень:

$$y(x) = u(x)v(x); \quad u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}.$$

Для визначення u маємо рівняння $u' + 2xu = 0$, одним із розв'язків якого є $u = e^{-x^2}$; тоді v визначаємо з рівняння $v'e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \Rightarrow v = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

І, остаточно, отримуємо розв'язок $y = e^{-x^2}\left(x^2 + C\right)$.

Метод інтегрувального множника вимагає виконання таких перетворень: знаходимо $m(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$; помноживши рівняння на знайдену функцію, дістанемо $d\left(ye^{x^2}\right) = 2xdx$, звідки випливає $ye^{x^2} = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2. До лінійних зводяться рівняння вигляду

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)a(x) = b(x) \tag{4.13}$$

застосуванням заміни $z = f(y)$, де z – нова функція аргументу x. Зокрема, *рівняння Бернуллі*

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \qquad n \neq 0, 1, \tag{4.14}$$

яке можна переписати у вигляді

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + a(x)y^{1-n} = b(x), \qquad y \neq 0,$$

зводиться до лінійного рівняння заміною $z = y^{1-n}$.

Проте, розв'язувати рівняння Бернуллі, як правило, зручніше без переходу до лінійного рівняння. На практиці більш раціональним виявляється безпосереднє застосування до (4.14) методу Бернуллі, тобто відшукання розв'язків у вигляді (4.9).

Рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \tag{4.15}$$

у загальному випадку не інтегрується в квадратурах. Якщо відомий деякий частинний розв'язок рівняння (4.15), наприклад $y_1(x)$, то заміною $y = y_1 + z$ (де z – нова функція аргументу x) рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі. Заміна $y = y_1 + \frac{1}{z}$ (де $z = z(x)$) зводить рівняння Ріккаті відразу до лінійного рівняння відносно функції $z(x)$.

3. Рівняння Ріккаті вигляду

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \tag{4.16}$$

де A, B, C – деякі дійсні сталі, такі, що $(B+1)^2 \geq 4AC$, має частинний розв'язок $y_1 = \frac{a}{x}$, стала a в якому визначається безпосередньо при підстановці y_1 в (4.16). Одночасно (4.16) є квазіоднорідним рівнянням ($\sigma = -1$). Рівняння Ріккаті

$$y' = a\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + c, \tag{4.17}$$

підстановкою $y = zx^{\frac{1}{2}}$, де $z = z(x)$, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Спеціальне рівняння Ріккаті

$$y' + Ay^2 = Bx^m, \tag{4.18}$$

де A, B – дійсні сталі, а $m = 0$ або $m = -2$, легко інтегрується в елементарних функціях. Для інших значень m, якщо тільки вони задовольняють рівність

$$\frac{m}{2m+4} = k, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{4.19}$$

можна використати перехід до нових змінних t, $z(t)$ за формулами:

$$y = \frac{z}{x}, \qquad x^{m+2} = t. \tag{4.20}$$

В результаті дістанемо рівняння

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t, \quad \left(\alpha = \frac{k}{2}\right),$$

яке зводиться до рівняння типу (4.17) внаслідок послідовного застосування підстановок

$$z = \frac{t}{a+u} \quad \left(a = \frac{1+\alpha}{\gamma}\right) \qquad \text{або} \qquad z = a + \frac{1}{u} \quad \left(a = -\frac{\alpha}{\beta}\right), \tag{4.21}$$

які відповідно збільшують або зменшують k рівно на одиницю.

Рівняння (4.15) можна звести до рівняння вигляду $y' = \pm y^2 + R(x)$ комбінацією підстановок $y = \alpha(x)z$, $y = z + \beta(x)$, де $z = z(x)$.

Першою з підстановок можна досягти того, щоб коефіцієнт при y^2 дорівнював ± 1.

Друга підстановка перетворює на нуль коефіцієнт при y, не змінюючи при цьому коефіцієнт при y^2. Якщо ж $R(x) = Bx^m$, то отримаємо в результаті спеціальне рівняння Ріккаті (4.18).

Приклад 2. Розв'язати рівняння Ріккаті $y' = -y^2 + x^2 + 1$.

Розв'язання. Очевидно, що $y = x$ є розв'язком цього рівняння. Покладаючи $y = x + z$, отримаємо рівняння Бернуллі $z' + 2xz = z^2$. Якщо ж застосувати заміну $y = x + \frac{1}{z}$, то отримаємо лінійне рівняння $z' - 2xz = 1$, звідки будемо мати $z = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}dx + C\right)$, а тому $\frac{1}{y-x} = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}dx + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням типу (4.16). Знайдемо його частинний розв'язок $y_1 = \frac{a}{x}$. Для визначення a маємо квадратне рівняння $a^2 + 2a + 1 = 0$, звідки випливає $a = -1$. Покладаючи $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, де z – нова функція аргументу x, дістанемо лінійне рівняння $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}$, яке легко інтегрується.

Приклад 4. Розв'язати спеціальне рівняння Ріккаті $y' = y^2 + x^{-4}$.

Розв'язання. Маємо $m = -4$, для якого умова (4.19) виконується, оскільки $k = \frac{-4}{-4\cdot 2+4} = 1$ – ціле число. Застосуємо спочатку підстановку (4.20), тобто покладаємо $y = \frac{z}{x}$, $x^{-2} = t$, де $z = z(t)$. Дістанемо рівняння $tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t$, (тут $\alpha = \frac{1}{2}$). Оскільки $k = +1$, то ми повинні однократно застосувати другу з підстановок (4.21), тобто покласти $z = -1 + \frac{t}{u}$, де $u = u(t)$. Таким чином, маємо рівняння типу (4.17): $tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t$. Замінивши в останньому рівнянні $u = v\sqrt{t}$, дістанемо $\sqrt{t}\, v' = \frac{1+v^2}{2}$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи останнє рівняння, матимемо $v = \operatorname{tg}\left(\sqrt{t} + C\right)$. Повертаючись до вихідних змінних, отримаємо розв'язки спеціального рівняння Ріккаті у вигляді $y = \frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} + C\right) - \frac{1}{x}$, де C – довільна дійсна стала.

4. До лінійних зводиться також рівняння Міндінга-Дарбу

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy + R(x,y)(x\,dy - y\,dx) = 0, \tag{4.22}$$

де $M(x,y)$, $N(x,y)$ – однорідні функції виміру m; $R(x,y)$ – однорідна функція деякого іншого виміру l. Заміна $\frac{y}{x} = u$, де $u = u(x)$, зводить рівняння (4.22) до рівняння Бернуллі відносно функції $x = x(u)$.

Розв'язати рівняння:

209. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$.

210. $(2x+1)y' = 4x + 2y$.

211. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

212. $y = x(y' - x\cos x)$.

213. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2-1}$.

214. $y' = \dfrac{y}{3x^2 - y}$.

215. $y' = y^4\cos x + y\operatorname{tg} x$.

216. $y'x^2\sin y = xy' - 2y$.

217. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

218. $\left(2x^2y\ln y - x\right)y' = y$.

Методом ізоклін вивчити поле напрямів, породжене диференціальним рівнянням, та зобразити схематично інтегральні криві:

219. $y' + 2xy = 0.$ **220.** $y' - xy = 1.$ **221.** $y' - \dfrac{y}{x} = x.$

Звести рівняння до лінійних та розв'язати їх. Розв'язати задачу Коші там, де вказано початкову умову:

222. $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} + (2-x)\ln y = x\left(e^{2x} - e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$

223. $\sec^2 y\,\dfrac{dy}{dx} + x\operatorname{tg} y = x.$ **224.** $e^{-x}\dfrac{dy}{dx} - e^{-x} = e^{y}.$

225. $\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\,\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2\sqrt{1+y}}{x} = 2(x+5).$

226. $\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2+1.$

227. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}.$ **228.** $3\,dy + \left(1 + e^{x+3y}\right)dx = 0.$

229. $\sin x\,dy - \cos x\,dx = e^{-y}\sin x\,dx.$

230. $3y' - y\sin x + 3y^4\sin x = 0.$

231. $y' + \sin x\cdot\operatorname{tg} y = \dfrac{\sin x}{\cos y}.$

232. $\cos x\,\dfrac{dy}{dx} - y\sin x = y^4.$ **233.** $xy' + y = xy^2\ln x.$

234. $y' + \dfrac{y}{x} = y^4\left(1-x^2\right);\quad M(1,1).$

235. $y' - y\operatorname{tg} x = -y^2\cos x.$

236. $\dfrac{dy}{dx} + xy = y^2\left(\sin x + x\cos x\right);\quad M(0,1).$

237. $\left(x^3 - y - 3x^2y + y^3\right)dx + 2x^3\,dy = 0.$

238. $\left(x^2 + y^2 + 2x - 2y\right)dx + 2(y-1)\,dy = 0.$

239. $y\,dx + x\,dy + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0.$

240. $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx - x\,dy = 0.$

241. $\left(y^3 + 2xy^2\right)dy - 2y^3\,dx + (x+y)(x\,dy - y\,dx) = 0.$

242. $\left(x^2y + y^3 - xy\right)dx + x^2\,dy = 0.$

243. $\left(2xy - x^2y - y^3\right)dx - \left(x^2 + y^2 + x^3 - xy^2\right)dy = 0.$

244. $\left(3x^4y^2 + y^5\right)dx - \left(xy^4 + 2x^5y\right)dy = 0.$

245. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\,dt + x + 1.$

246. $\int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)\,dt.$

247. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною та радіус-вектором точки дотику, є сталою величиною і дорівнює a^2.

248. Довести, що всі розв'язки рівняння $\frac{dx}{dt} = ax + f(t)$, де $a = \mathrm{const} < 0$, $f(t)$ – неперервна при $t \in [t, \infty)$, обмежені при $t \to \infty$.

249. Довести, що лінійне рівняння $y' = ky + f(x)$, де k – стала $(k \neq 0)$, $f(x) = f(x+\omega)$, $\omega > 0$, має один частинний розв'язок $y = \varphi(x)$, такий, що $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)$. Знайти цей розв'язок.

250. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо відомі два його частинні розв'язки y_1, y_2.

251. Записати лінійне однорідне рівняння, частинним розв'язком якого є функція y_1.

252. Показати, що одним з розв'язків рівняння $y' + ky = kq(x)$, $x \geq 0$, $k = \mathrm{const}$, є функція $y = k\int\limits_0^\infty q(x-t)e^{-kt}dt$.

253. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + p(x)y = 0$, звівши його до рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою відповідної заміни незалежної змінної $t = \psi(x)$.

254. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, звівши його до рівняння, яке не містить доданка з шуканою функцією, шляхом заміни змінних $y = \alpha(x)z$, де $\alpha(x)$ – деяка неперервно диференційовна функція.

255. Загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд $y = a(x)C + b(x)$. Довести обернене: диференціальне рівняння кожної сім'ї кривих такого вигляду є лінійним.

256. Показати, що єдиним розв'язком рівняння $y' - y = -\frac{1}{x}$, $(x > 0)$, таким, що $y \to 0$ при $x \to \infty$, є розв'язок $y = \int\limits_x^\infty e^{\frac{x-t}{t}}\,dt$.

257. Довести, що рівняння $y' + a(x)y = b(x)$ залишається лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t)$ і при довільній заміні функції $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, де φ, α, β – довільні неперервно диференційовні функції.

258. Знайти криві, для яких відрізок, який відтинається дотичною на осі Oy, дорівнює квадрату ординати точки дотику.

Розв'язати рівняння Ріккаті:

259. $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$.

260. $y' + y^2 = -\frac{1}{4x^2}$.

261. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

262. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$.

263. $y' = y^2 + \frac{1}{x^2}$.

264. $x^3y' - y^2 - x^2y + x^2 = 0$.

265. $y' = y^2 + x^{-\frac{4}{3}}$.

266. $y' = -y^2 + x^{-\frac{8}{3}}$.

267. $y' = -y^2 + x^{-4}$.

268. $y' = y^2 + x^{-\frac{8}{5}}$.

269. Розв'язати рівняння, звівши коефіцієнт при y^2 до одиниці:

а) $xy' = x^2y^2 - (2x+1)y + 1$;

б) $xy' = x^2y^2 - y + 1$.

270. Розв'язати рівняння, знищивши попередньо доданки, які містять y, y^2:

а) $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$.

б) $y' = y^2 - 2x^2y + x^4 + 2x + 4$.

271. Довести, що будь-які чотири розв'язки рівняння Ріккаті пов'язані ангармонічним співвідношенням $\dfrac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \dfrac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{const}$.

272. Проінтегрувати рівняння Дарбу:

а) $dx - dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$;

б) $\left(x^2 + 2y^2\right)dx - xy\,dx - (x\,dy - y\,dx) = 0$;

в) $\left(x^3 - y\right)dx + \left(x^2y + x\right)dy = 0$.

273. Довести, що диференціальним рівнянням сім'ї кривих $y = \dfrac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\varphi_3(x) + \varphi_4(x)}$ є рівняння Ріккаті.

274. Скласти рівняння Ріккаті вигляду $y' = y^2 + p(x)y + q(x)$ за двома його неперервними розв'язками y_1 та y_2.

275. Знайти періодичний розв'язок рівняння $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

276. У посудину, що містить 100 *л* 10 %-го розчину солі, щохвилини вливається 30 *л* води і витікає 20 *л* розчину. Яка кількість солі залишиться в посудині через 10 *хв*, якщо вважати, що суміш неперервно перемішується?

277. Ракету пущено вертикально вгору з початковою швидкістю 100 *м/с*. Опір повітря сповільнює її рух, надаючи ракеті від'ємного прискорення, пропорційного квадрату її швидкості $(-kv^2)$. Через який час ракета досягне найбільшої висоти?

278. Точка масою m рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності α). Крім того, точка зазнає опору середовища, пропорційного швидкості (коефіцієнт пропорційності β):

а) записати закон зміни швидкості $v(t)$ у вигляді диференціального рівняння;

б) знайти $v(t)$ у вигляді аналітичної формули;

в) припустимо, що $\alpha = 0$, $\beta = \text{const}$ і у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ маса зменшується в $0,1$ рази відносно свого попереднього значення, тобто $m(t_i+0) = 0,1 \cdot m(t_i)$. Керуючись законом збереження імпульсу $v(t_i + 0)m(t_i + 0) = v(t_i)m(t_i)$, знайти аналітичну формулу для $v(t)$.

279. Точка масою m рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна кубові часу, який сплинув з моменту, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності α). Крім того, точка зазнає опору середовища, пропорційного добутку часу та швидкості (коефіцієнт пропорційності β):

а) записати закон зміни швидкості $v(t)$ у вигляді диференціального рівняння;

б) знайти $v(t)$ у вигляді аналітичної формули;

в) припустимо, що $\alpha = 0$, $\beta = \text{const}$ і у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ точка зазнає впливу імпульсної сили, яка спричиняє миттєву зміну швидкості згідно із законом $v(t_i+0)=\gamma v(t_i)$, де $\gamma=\text{const}>0$. Знайти аналітичний вираз для $v(t)$ у цьому разі. Вважаючи, що $t_{i+1}-t_i=\tau$ для довільного i визначити γ, при якому $v(t)$ буде τ-періодичною функцією.

280. Надійністю приладу $p(t)$ називають ймовірність його безвідмовної роботи до моменту часу t. Відомо, що швидкість зміни надійності певного приладу пропорційна (з коефіцієнтом α) надійності в даний момент часу. Вважаючи, що в початковий момент часу надійність дорівнює одиниці, визначити:

а) закон зміни надійності у вигляді диференціального рівняння;

б) закон зміни надійності у вигляді аналітичної функції;

в) надійність наприкінці другого року експлуатації, якщо відомо, що протягом року експлуатації надійність приладу зменшилася вдвічі;

г) з метою підвищення надійності приладу у фіксовані моменти часу t_i $(t=1,2\ldots)$ здійснюють ремонтні роботи, внаслідок чого надійність змінюється відповідно до закону $p(t_i+0)=\beta p(t_i)$, $\beta=\text{const}>1$. Знайти аналітичну формулу для $p(t)$. Вважаючи, що $\forall i:\ t_{i+1}-t_i=\tau$, визначити значення β так, щоб $p(t)$ була τ-періодичною функцією.

281. В умовах боротьби за існування швидкість збільшення кількості особин популяції пропорційна (з коефіцієнтом α) кількості особин у даний момент часу, а швидкість їх зменшення пропорційна (з коефіцієнтом β) квадрату кількості особин:

а) записати закон зміни кількості особин $x(t)$ у вигляді диференціального рівняння;

б) знайти аналітичний вираз для $x(t)$;

в) якою повинна бути кількість особин, щоб з плином часу вона: збільшувалася? зменшувалася? не змінювалася?;

г) нехай в умовах задачі $\alpha=\text{const}$, $\beta=0$ і у фіксовані моменти часу кількість особин змінюється відповідно до закону $x(t_i+0)=\gamma x(t_i)$, $\gamma=\text{const}>0$, $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$. Знайти аналітичну формулу для $x(t)$. Вважаючи, що $\forall i:\ t_{i+1}-t_i=\tau$, визначити γ так, щоб $x(t)$ була τ-періодичною (обмеженою) функцією часу.

§ 5. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК

1. Якщо для диференціального рівняння

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{5.1}$$

виконується умова повноти

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0, \tag{5.2}$$

то (5.1) називається *рівнянням в повних диференціалах* (РПД).

Всі розв'язки РПД задовольняють умову $u(x,y) = C$, де u – функція від двох змінних, повний диференціал якої дорівнює лівій частині рівняння (5.1), тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y).$$

Для знаходження функції $u(x,y)$ досить виконати один з наступних ланцюгів перетворень:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \ \Rightarrow \qquad u = \displaystyle\int M(x,y)\,dx + \varphi(y) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int M(x,y)\,dx\right) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$ –

диференціальне рівняння для знаходження $\varphi = \varphi(y)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \ \Rightarrow \qquad u = \displaystyle\int N(x,y)\,dy + \psi(x) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int N(x,y)\,dy\right) + \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y)$ –

диференціальне рівняння для знаходження $\psi = \psi(x)$.

Розв'язок задачі Коші для РПД (5.1) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ зручно шукати у вигляді

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)\,d\eta = 0 \tag{5.3}$$

або

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, \eta)\,d\eta = 0. \tag{5.3*}$$

Якщо (5.1) не є РПД (умова повноти (5.2) не виконується), то не виключається можливість зведення (5.1) до РПД шляхом домноження цього рівняння на деяку функцію $m(x, y)$, яку називають *інтегрувальним множником* рівняння (5.1).

Диференціальне рівняння для знаходження інтегрувального множника – це умова повноти для перетвореного рівняння. Для $m = m(\omega)$, де $\omega = \omega(x, y)$, воно має вигляд:

$$\frac{m'}{m} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : \left(-M\,\frac{\partial \omega}{\partial y} + N\,\frac{\partial \omega}{\partial x}\right), \quad m' = \frac{dm}{d\omega}. \tag{5.4}$$

Якщо $m = m(x)$, то (5.4) набуває вигляду:

$$\frac{m'}{m} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{N}, \quad m' = \frac{dm}{dx}; \tag{5.5}$$

якщо $m = m(y)$, то

$$\frac{m'}{m} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \cdot -\frac{1}{M}, \quad m' = \frac{dm}{dy}. \tag{5.6}$$

Інтегрувальний множник рівняння з відокремлюваними змінними

$$A(x)B(y)\,dx + C(x)F(y)\,dy = 0$$

дорівнює

$$m = m(x, y) = \frac{1}{B(y)C(x)}. \tag{5.7}$$

Для лінійного рівняння $y' + a(x)y = b(x)$:

$$m = m(x) = \exp\left(-\int a(x)\,dx\right). \tag{5.8}$$

Для однорідного рівняння:

$$m = m(x, y) = \frac{1}{Mx + Ny}. \tag{5.9}$$

***Теорема* (про загальний вигляд інтегрувального множника).** *Якщо $m_1(x,y)$ – інтегрувальний множник рівняння (5.1), u_1 – відповідний інтеграл цього рівняння, тобто $du_1 = m_1 M\,dx + m_1 N\,dy$, тоді кожна функція вигляду $m_1(x,y)\varphi(u_1)$, де φ – неперервно диференційовна функція від u_1, також є інтегрувальним множником рівняння (5.1).*

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(y^3+yx^2\right)dy=0$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умови повноти (5.2):

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2xy-2xy=0.$$

Отже, дане рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Для його розв'язання скористаємося, наприклад, ланцюжком а):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+xy^2 \Rightarrow \quad u=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+\frac{d\varphi}{dy}=y^3+xy^2 \Rightarrow \quad \varphi(y)=\frac{y^4}{4}.$$

Множину всіх розв'язків досліджуваного рівняння можна подати у вигляді:

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Зауважимо, що при розв'язанні рівняння змінна u відіграє допоміжну роль – до формального запису множини розв'язків вона не входить.

Приклад 2. Знайти інтегрувальний множник рівняння

$$\left(x^3+xy^2-y\right)dx+\left(y^3+x^2y+x\right)dy=0.$$

Розв'язання. Розіб'ємо ліву частину рівняння на групи, для кожної з яких інтегрувальний множник знаходиться просто:

$$\left[x\left(x^2+y^2\right)dx+y\left(x^2+y^2\right)dy\right]+\left[x\,dy-y\,dx\right]=0.$$

Розглянемо два диференціальних рівняння

$$x\left(x^2+y^2\right)dx+y\left(x^2+y^2\right)dy=0 \qquad \text{та} \qquad x\,dy-y\,dx=0.$$

Інтегрувальним множником першого рівняння є $m_1=\frac{1}{x^2+y^2}$, його інтеграл дорівнює $u_1=x^2+y^2$. Інтегрувальний множник другого рівняння дорівнює $m_2=\frac{1}{xy}$, а інтегралом є $u_2=\frac{y}{x}$.

Використовуючи теорему про загальний вигляд інтегрувального множника, подамо інтегрувальний множник першого рівняння у вигляді $m_1\varphi(u_1)$, а другого $m_2\psi(u_2)$. Підберемо неперервно диференційовні функції φ і ψ так, щоб $m_1\varphi\left(x^2+y^2\right)=m_2\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто покладемо $\varphi\left(x^2+y^2\right)=1$, а $\psi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}:\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$, і, в результаті, дістанемо:

$$m(x,y)=m_1\,\varphi(u_1)=m_2\,\psi(u_2)=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Дослідити рівняння щодо умови повноти. Якщо умова повноти виконується, розв'язати рівняння:

282. $\left(2x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(4xy+xe^{xy}+2y\right)dy=0.$

283. $\left(y+e^x\right)dx+x\,dy=0.$

284. $\left(4xy+2x^2y\right)dx+\left(2x^2+3y^2\right)dy=0.$

285. $\dfrac{x}{x^2+y^2}\,dx+\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dy=0.$

286. $\left(\frac{1}{x}+y\right)dx+\left(3y^2+x\right)dy=0.$

287. $yx^{y-1}\,dx+x^y\ln x\,dy=0.$

288. $\dfrac{x}{y^2}\,dx-\dfrac{x^2}{y^3}\,dy=0.$

289. $\left(3x^2-y\cos x\right)dx-\sin x\,dy=0.$

290. $2xye^{x^2}\,dx+\left(2-e^{x^2}\right)dy=0.$

291. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$

292. $\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0.$

293. $3x^2\left(1+\ln y\right)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy.$

294. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$

295. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy=0.$

296. $(2x\cos y-y\sin 2x)\,dx+\left(\cos^2 x-x^2\sin y\right)dy=0.$

297. $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0.$

298. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

299. $e^{-y}\,dx-(2y+xe^{-y})\,dy=0.$

300. $\left(2x+y^2\sin x\right)dx-\left(y^2-2y\cos x\right)dy=0.$

Розв'язати рівняння методом інтегрувального множника $m=m(x)$ або $m=m(y)$:

301. $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2y\,dy=0.$

302. $y^2(x-3y)\,dx+\left(1-3xy^2\right)dy=0.$

303. $(2xy+ax)\,dx+dy=0.$

304. $y'+ay=e^{mx}.$

305. $y\,dx=\left(y^3-x\right)dy.$

306. $\left(1+\frac{3y^2}{x^2}\right)dx=\frac{2y}{x}\,dy.$

307. $\left(2xy+y^2\right)dx+\left(2x^2+3xy+4y^2\right)dy=0.$

308. $dx+\left(x+e^{-y}y^2\right)dy=0.$

309. $\left(2xy^2-y\right)dx+\left(y^2+x+y\right)dy=0.$

310. $y(1-y\sin x)\cos^2 y\,dx-\left(y^2+x\cos^2 y\right)dy=0.$

Методом інтегрувального множника розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

311. $x\,dy-(x+y)\,dx=0.$

312. $(py-qx)\,dx-(px-qy)\,dy=0.$

313. $y'=2\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{y}{x}.$

Знайти інтеграли рівнянь без квадратур (використати теорему про загальний вигляд інтегрувального множника):

314. $\left(x^2+y^2+1\right)dx-2xy\,dy=0.$

315. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad m = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$

316. $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0.$

Розв'язати рівняння методом інтегрувального множника вигляду $m = m(x+y)$ або $m = m(x-y)$:

317. $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)dy = 0.$

318. $\left(y - \frac{ay}{x} + x\right)dx + a\,dy = 0, \quad (a$ – параметр).

319. $\left(10x^3 + y^2 + 9x^2y\right)dx + \left(7y^2 + 6xy + x^3\right)dy = 0.$

320. $dx + x\,\mathrm{ctg}(x+y)(dx+dy) = 0.$

321. $(x+3y)\,dx + 2y\,dy + a(x+y)(x\,dy - y\,dx) = 0,$ $\quad (a$ – параметр).

Розв'язати рівняння методом інтегрувального множника $m = m(\omega)$, де $\omega = x^2 + y^2$, або $\omega = x^2 - y^2$. Чи можна застосувати інший метод розв'язування?

322. $(y\cos\alpha + x\sin\alpha)\,dx + (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,dy = 0.$

323. $(x + x^2 + y^2)y' - y = 0.$

324. $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx - x\,dy = 0.$

325. $\dfrac{dy}{y(x^2+y^2)} = \left(\dfrac{1}{x(x^2+y^2)} - \dfrac{1}{xy}\right)dx.$

326. $\left(x^2y^3 + y\right)dx + \left(x^3y^2 - x\right)dy = 0.$

327. $\left(x - \dfrac{y}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx + \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0.$

328. $2y^3y' + xy^2 - x^3 = 0.$

Розв'язати рівняння, застосовуючи метод інтегрувального множника або здійснюючи заміну змінних:

329. $x\,dx + \left(xy - y^3\right)dy = 0.$

330. $2y\left(1 + x^2\right)dx + x\,dy = 0.$

331. $\left(3x^2y + 6xy + \dfrac{y^2}{x}\right)dx + \left(3x^2 + y\right)dy = 0.$

332. $\left(6x - 2y - 2y^2\right)dx + \left(5x^2 - 8xy - x\right)dy = 0.$

333. $\left(2y^2 - 9xy\right)dx + \left(3xy - 6x^2\right)dy = 0, \quad m(x,y) = x^\alpha y^\beta.$

334. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1+y^2}$.

335. $(y-x)\,dx + y\,dy = x\,d\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

336. $(x^2 + 3\ln y)y\,dx = x\,dy, \quad (m = a\ln x + b\ln y)$.

337. $\left(x^2 + 2x + y\right)dx = \left(x - 3x^2y\right)dy$.

338. $y' + \dfrac{y}{2(x+y)} - \dfrac{1}{4x(x+1)} = 0$.

339. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0$.

340. $\frac{1}{x}\left(x^2y^2 - 4xy - 1\right)dx - \frac{1}{y}(1+4xy)\,dy = 0$.

341. $x^2y(y\,dx + x\,dy) = 2y\,dx + x\,dy$.

342. $(2x^2y^3 - 1)y\,dx + \left(4x^2y^3 - 1\right)dy = 0$.

343. $\left(x^2 - \sin^2 y\right)dx + x\sin 2y\,dy = 0$.

344. $\left(6xy^2 + x^2\right)dy - y\left(3y^2 - x\right)dx = 0$.

345. $\left(2x^3y^2 - y\right)dx + \left(2x^2 + y^3 - x\right)dy = 0$.

346. $\left(x^2 - y\right)dx + x(y+1)\,dy = 0$.

347. $y^2(y\,dx - 2x\,dy) = x^3(x\,dy - 2y\,dx)$.

348. $(6xy + 2y + 8)\,dx + x\,dy = 0$.

349. $\left(2x^2y + x\right)y' - x^2y^2 + 2xy^2 + y = 0$.

350. $\left(2x - 2y - x^2 + 2xy\right)dx + \left(2x^2 - 4xy - 2x\right)dy = 0$, $m = e^{ax}e^{by}$.

351. Довести, що інтегрувальний множник рівняння Бернуллі $p(x)y' + q(x)y = r(x)y^m$ має вигляд

$$m(x,y) = y^{-m}\frac{1}{p(x)}\exp\left[(1-m)\int\frac{q(x)}{p(x)}\,dx\right].$$

Застосовуючи результат задачі **351**, розв'язати методом інтегрувального множника рівняння Бернуллі:

352. $y' + y = y^4$.

353. $xy' + 2y = xy^3$.

354. $y^2\,dx + \left(2yx - x^4\right)dy = 0$.

355. $x^2y' + xy = y^{\frac{3}{2}}$.

356. $x^3y' + 2x^2y = y^{-3}$.

357. $x^2y' - 3xy = -2y^{\frac{5}{3}}$.

§ 6. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ

1. Точка (x_0, y_0) називається *точкою єдиності розв'язку задачі Коші*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad M(x_0,y_0), \tag{6.1}$$

якщо через неї проходить лише тільки одна інтегральна крива рівняння (6.1). Якщо ж через початкову точку проходить більше однієї інтегральної кривої, то вона називається *точкою неєдиності*. Множину всіх точок неєдиності називають *особливою множиною*. Якщо ця множина містить інтегральні криві, то останні називаються *особливими інтегральними кривими*, а відповідні їх розв'язки – *особливими розв'язками* рівняння.

Теорема Пеано **(достатні умови існування розв'язку задачі Коші).** *Нехай функція $f(x,y)$ неперервна відносно обох змінних у прямокутнику*

$$\Pi = \{(x,y): \ |x-x_0| \le a, \ |y-y_0| \le b\}, \tag{6.2}$$

де a, $b > 0$.

Тоді задача (6.1) на проміжку Пеано

$$I = (x_0 - h, x_0 + h), \tag{6.3}$$

де

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|, \tag{6.4}$$

має принаймні один розв'язок.

Теорема Пікара **(достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші).** *Нехай функція $f(x,y)$:*

1) *неперервна в прямокутнику (6.2) відносно обох змінних;*

2) *рівномірно відносно x задовольняє умову Ліпшица по змінній y, тобто для будь-яких y_1, y_2, $|y_0 - y_i| \le b$ $(i = 1, 2)$ існує $L = \text{const} > 0$:*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|. \tag{6.5}$$

Тоді задача Коші (6.1) на проміжку (6.3) має єдиний розв'язок.

2. Розв'язок, існування та єдиність якого гарантується теоремою Пікара, можна знайти як границю рівномірно збіжної послідовності Пікара $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, де

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi. \tag{6.6}$$

Різниця між точним розв'язком задачі Коші та n-м наближенням Пікара задовольняє оцінку

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}\, h^n. \tag{6.7}$$

Теореми Пікара і Пеано дають змогу встановити існування розв'язку задачі Коші на досить малому відрізку I. Для застосування цих теорем параметри a, b прямокутника П слід вибирати такими, щоб цей прямокутник вміщувався в область визначення рівняння.

3. Побудований згідно теоремами Пікара і Пеано розв'язок можна продовжити (ліворуч, праворуч чи в обидва боки). Так, якщо область визначення D досліджуваного рівняння є обмеженою множиною в $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) \in C(D)$, то розв'язок $y = \varphi(x)$, визначений на I, можна продовжити до виходу на межу області D.

Розв'язок задачі Коші (6.1) можна продовжувати на інтервал (α, β), якщо функція $f(x,y)$ у смузі $\alpha < x < \beta$, $-\infty < y < +\infty$ ($a \geq -\infty$, $\beta \leq +\infty$) є неперервною і задовольняє нерівність $|f(x,y)| \leq a(x)|y| + b(x)$, де $a(x)$, $b(x)$ – неперервні додатні функції.

Розв'язок називається *непродовжуваним* (або *повним*), якщо будь-яке його продовження збігається з ним самим. Областю визначення непродовжуваного розв'язку є максимальний інтервал існування.

Приклад 1. З'ясувати, чи має рівняння $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ особливі розв'язки і знайти їх у випадку існування.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов теореми Пікара. Функція $f(x,y)=3y^{\frac{2}{3}}$ є неперервною в $\mathbb{R}^2$, але не задовольняє умову Ліпшица вздовж прямої $y=0$.

Справді, припустивши від супротивного, що існує стала Ліпшица L, така, що $|y_1^{\frac{2}{3}}-y_2^{\frac{2}{3}}|\le L|y_1-y_2|$, при $y_1\ne 0$, $y_2=0$, дістанемо $|y_1^{\frac{2}{3}}|\le L|y_1|$ або $L|y_1^{\frac{1}{3}}|\ge 1$. Остання нерівність не виконується для достатньо малих $|y_1|$.

Оскільки $y=0$ є розв'язком рівняння, то саме він може бути особливим. Знайдемо інші розв'язки цього рівняння:

$$y^{-\frac{2}{3}}\,dy=3\,dx\Rightarrow\quad\int y^{-\frac{2}{3}}\,dy=\int 3\,dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 3y^{\frac{1}{3}}=3x+3C\Rightarrow\quad y=(x+C)^3.$$

Таким чином, для довільного x_0 через точку $(x_0,0)$ проходять принаймні дві інтегральні криві: $y=0$ і $y=(x-x_0)^3$. Тому $y(x)\equiv 0$ є особливим розв'язком досліджуваного рівняння. Інших особливих розв'язків немає, оскільки верхня і нижня площини є областями єдиності розв'язків.

Приклад 2. Методом послідовних наближень Пікара знайти третє наближення до розв'язку задачі Коші

$$\frac{dy}{dx}=x-y^2,\ y(0)=0 \text{ в квадраті } \mathbb{K}=\left\{(x,y):\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\right\}.$$

На якому проміжку теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень? Оцінити похибку між точним розв'язком задачі Коші і третім наближенням Пікара.

Розв'язання. Функція $f(x,y)=x-y^2$ неперервна по сукупності своїх змінних в $\mathbb{R}^2$. Оскільки $f'_y=-2y$, то $f(x,y)$ задовольняє умову Ліпшица в квадраті $\mathbb{K}$ зі сталою $L=\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{K}} f'_y(x,y)=2$.

$M=\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{K}}|f(x,y)|=2$, тому $h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}=\min\left\{1,\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$. Отже, наближення Пікара до розв'язку поставленої задачі Коші збігаються принаймні на проміжку $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Наближення обчислюємо за формулою (6.6):

$$y_{n+1} = \int_0^x (\xi - y_n^2(\xi))d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Маємо

$$y_1(x) = \int_0^x (\xi - 0)\, d\xi = \frac{x^2}{2};$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\xi - \frac{\xi^2}{4}\right) d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20};$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(\xi - \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^5}{20}\right)^2\right) d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Різниця між точним розв'язком $y(x)$ і третім наближенням оцінюється за формулою (6.7):

$$|y(x) - y_3(x)| \le \frac{ML^2}{3!}\, h^3 = \frac{2 \cdot 2^2}{6} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{6}\,.$$

Для завдань **358 – 362**:

1. Перевірити виконання умов теореми Пікара для поставлених задач Коші.

2. Побудувати наближення Пікара $\{y_i\}_{i=0}^2$ за схемою (6.6).

3. Знайти розв'язок задачі Коші в аналітичній формі, застосовуючи відомі методи інтегрування, та порівняти результати п. 2 і 3.

358. $y' = x - 2y; \quad y(1) = 3.$

359. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 2\,\dfrac{y}{x}; \quad y(1) = 6.$

360. $y' - \dfrac{1}{x}\, y = 2x^3; \quad y(1) = 1.$

361. $y' - 4y = e^{2x}; \quad y(0) = -4.$

362. $y' = \sin x - 4y; \quad y(\pi) = -3.$

Для наступних задач Коші методом послідовних наближень Пікара побудувати п'ять послідовних наближень Пікара:

363. $y' = 4 - y; \quad y(0) = 0.$

364. $y' = xy; \quad y(0) = 1.$

365. $y' = 2 - x; \quad y(2) = -2.$

366. $y' = y + x; \quad y(1) = 4.$

367. $y' = y \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Використовуючи достатні умови єдиності, виділити такі області площини, в яких через кожну точку проходить єдина інтегральна крива:

368. $y' = xy + y^3.$

369. $y' = 1 + (2y - 3x)^{\frac{1}{3}}.$

370. $(x - 1)y' = y^{\frac{1}{2}} - x.$

371. $y' = 2 + \operatorname{ctg} y.$

372. $(y - x)y' = y \ln x.$

373. $xy' = y + \left(y^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}.$

Вказати відрізок, на якому поставлена задача Коші має розв'язок:

374. $y' = e^y + x; \quad y(1) = 0.$

375. $y' = 2y^2 + 3xe^y \sin(xy); \quad y(2) = 4.$

376. $y' = x + y^3; \quad y(0) = 0.$

377. $y' = (xy)^3 - \sin y; \quad y(2) = 2.$

378. $y' = 2y^2 - x; \quad y(1) = 1.$

379. $y' = (2x + 3y)^2 - e^x; \quad y(1) = 1.$

380. $y' = 1 + y^2; \quad y(0) = 0.$

381. $y' = y^2 - x\cos(xy); \quad y(1) = 2.$

382. Виділити ті області площини, в яких виконуються умови теореми Пікара для рівняння $y' = \frac{y}{x}$. Чи має це рівняння особливі розв'язки? Відповіді обґрунтувати.

383. Чи має рівняння $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ розв'язки, визначені на всій площині? Особливі розв'язки?

384. Скільки розв'язків має задача Коші $y' = x^2 + y^2;\ y(0) = 0$?

385. Знайти всі розв'язки задачі Коші $y' = \sin(xy);\ y(0) = 0$.

386. Чи можуть графіки двох розв'язків рівняння $y' = x + y^2$:

а) перетинатися в деякій точці площини?

б) дотикатися в деякій точці площини?
Відповідь обґрунтувати.

387. Як поводять себе на проміжку $[0, 2]$ послідовні наближення Пікара (див. (6.6)) для диференціальних рівнянь: **а)** $y' = y^2$; **б)** $y' = -y^2$; **в)** $y' = y$, якщо $y(0) = 1$?

388. Використовуючи теорему Пікара, знайти ті розв'язки диференціальних рівнянь, в кожній точці яких порушується умова єдиності (особливі розв'язки). Накреслити інтегральні криві:
а) $y' = \dfrac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$; **б)** $y' = 2(|y|)^{\frac{1}{2}}$; **в)** $y' = x^2 + y^2$.

389. При яких невід'ємних значеннях змінної m порушується єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння $\frac{dy}{dx} = |y|^m$ та в яких точках?

390. Скільки розв'язків рівняння $y' = f(x, y)$, де f і f'_y – неперервні в $\mathbb{R}^2$ функції, проходить через точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ в заданому напрямку, який утворює з віссю Ox кут α?

391. Довести, що розв'язки диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = g(y)$, де $y \in (a, b)$, $g(y) > 0$, визначені на всій осі (продовжувані на $\mathbb{R}$) тоді і тільки тоді, коли для всіх α, β: $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ інтеграли $\int\limits_a^\alpha \frac{dy}{g(y)}$ та $\int\limits_\beta^b \frac{dy}{g(y)}$ розбіжні. Навести приклади.

§ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

1. Як і рівняння, розв'язане відносно похідної, рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0 \tag{7.1}$$

в області визначення породжує поле напрямів. На відміну від канонічного рівняння, за рівнянням (7.1) можна визначити не один, а кілька напрямів поля в одній точці.

Задача Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок, якщо кількість інтегральних кривих, які проходять через точку

(x_0, y_0), збігається з кількістю напрямів поля, породжених рівнянням (7.1) у цій точці.

Розв'язок рівняння (7.1), у кожній точці якого порушується умова єдиності, називається *особливим.*

***Теорема* (достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші).** *Якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна по змінній x, неперервно диференційовна по змінних y, y' в деякому околі точки (x_0, y_0, y_0'), де y_0' – один з коренів рівняння $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, і така, що $F'_{y'}(x, y, y') \neq 0$, то в досить малому околі точки (x_0, y_0) існує єдиний розв'язок задачі Коші $y(x_0) = y_0$.*

2. Для розв'язування рівняння (7.1) застосовують два підходи.

А. Якщо (7.1) можна розв'язати відносно похідної, тобто дістати одне або кілька рівнянь вигляду $y' = f(x, y)$, то, проінтегрувавши кожне з одержаних рівнянь, матимемо множину розв'язків вихідного рівняння. При цьому особливими розв'язками рівняння (7.1) будуть лише такі, які є особливими хоча б для одного з отриманих рівнянь.

Б. Якщо (7.1) можна подати у вигляді

$$x = g(y, y') \tag{7.2}$$

або

$$y = h(x, y'), \tag{7.3}$$

то застосовують *метод введення параметра* (МВП).

Застосування МВП до рівнянь (7.2), (7.3) приводить до таких перетворень:

для (7.2)	для (7.3)
$x = g(y, y')$	$y = h(x, y')$.

Покладемо $y' = p$, тоді

$$\begin{cases} y = g(y, p); \\ y = y; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = h(x, p); \\ x = x. \end{cases} \tag{7.4}$$

Застосовуємо диференціальне співвідношення

$$dy = p\,dx; \tag{7.5}$$

тоді з (7.4) маємо

$$dx = g'_y\,dy + g'_p\,dp, \qquad\qquad dy = h'_x\,dx + h'_p\,dp. \tag{7.6}$$

Підставляння (7.6) у (7.5) дає

$$(1 - p\,g'_y)\,dy = p\,g'_p\,dp, \qquad (h'_x - p)\,dx + h'_p\,dp = 0. \tag{7.7}$$

((7.7) – диференціальне рівняння для знаходження функцій $y = y(p)$ та $x = x(p)$). Інтегруючи (7.7), дістанемо

$$y = B(p, C), \qquad\qquad x = M(p, C). \tag{7.8}$$

Підставивши (7.8) в (7.4), знаходимо множини розв'язків рівнянь (7.2), (7.3) відповідно:

$$\begin{cases} x = g(B(p, C), p) = A(p, C); \\ y = B(p, C); \end{cases} \qquad \begin{cases} x = M(p, C); \\ y = h(M(p, C), p) = N(p, C). \end{cases} \tag{7.9}$$

Методом введення параметра інтегруються *рівняння Лагранжа*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{7.10}$$

та *рівняння Клеро*

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{7.11}$$

До рівняння Клеро зводяться задачі знаходження кривої за властивостями її дотичної, якщо останні не залежать від точки дотику. Формально множину розв'язків рівняння (7.11) дістають заміною в ньому y' на C.

Особливий розв'язок рівняння (7.11) шукають як обвідну знайденої однопараметричної сім'ї прямих.

3. Відомі випадки, коли жоден із запропонованих підходів не може бути застосованим безпосередньо до вихідного рівняння (7.1). Щоб розв'язати таке рівняння (у разі, коли воно є інтегровним), варто використовувати певні специфічні властивості самого рівняння. Розглянемо наступні випадки.

3.1. Рівняння (7.1) є узагальнено однорідним (квазіоднорідним), якщо воно інваріантне відносно заміни $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^\sigma y$, де σ – деяке дійсне число, $\lambda > 0$. Зробивши в ньому заміну

$$\begin{cases} x = e^t; \\ y = ze^{\sigma t}, \end{cases} \tag{7.12}$$

де z – нова функція аргументу t, яке можна розв'язувати відносно однієї із змінних t, z або z'.

3.2. Рівняння

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0, \tag{7.13}$$

де $P(x, y')$ і $Q(x, y')$ – однорідні функції змінних x та y' відповідно вимірів k та m $(k \geq m)$, легко інтегрувати в параметричній формі, шляхом введення параметра t згідно зі співвідношенням

$$\frac{y'}{x} = t. \tag{7.14}$$

В результаті застосування такого вигляду параметризації отримаємо

$$x = \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1,t)}{P(1,t)}}; \quad y = t \cdot \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1,t)}{P(1,t)}}. \tag{7.15}$$

Використовуючи диференціальне співвідношення $dy = y'dx$, знайдемо множину розв'язків рівняння (7.13) у параметричній формі.

3.3. Множину розв'язків рівняння

$$F(y') = 0 \tag{7.16}$$

можна подати у вигляді

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0, \tag{7.17}$$

де C – довільна дійсна стала. Міркування у цьому разі такі: якщо число A є коренем рівняння $F(z) = 0$, то з рівності $y' = A$ дістанемо $y = Ax + C$, звідки $A = \frac{y-C}{x}$.

Зауважимо, що рівняння вигляду (7.13), або рівняння більш загального вигляду

$$P(x, y') = 0 \text{ або } Q(y, y') = 0, \tag{7.18}$$

можуть мати особливі розв'язки

$$x = a \text{ або } y = b, \tag{7.19}$$

де a і b визначаються з рівностей відповідно

$$\lim_{y' \to \pm\infty} P(a, y') = 0 \text{ та } Q(b, 0) = 0. \tag{7.20}$$

4. Для визначення особливих розв'язків рівняння (7.1) використовуються два загальних методи.

Метод p–дискримінантної кривої. Якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна по змінній x і неперервно диференційовна по y і y', то особливий розв'язок (якщо він існує) задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0; \\ F'_p(x, y, p) = 0. \end{cases} \tag{7.21}$$

де $p = y'$. Вилучивши з системи (7.21) параметр p, знайдемо рівняння p–дискримінантної кривої. Для кожної вітки p–дискримінантної кривої необхідно перевірити, чи є вона інтегральною кривою і чи порушується в кожній її точці умова єдиності.

Метод c–дискримінантної кривої. Якщо відома однопараметрична сім'я $\Phi(x, y, C) = 0$ розв'язків рівняння (7.1) і при цьому функція $\Phi(x, y, C)$ неперервно диференційовна по C, то, вилучивши параметр C із системи

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0, \end{cases} \tag{7.22}$$

отримаємо рівняння c–дискримінантної кривої.

Обвідна системи кривих – це крива, яка в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих сім'ї. Обвідна (якщо вона існує) обов'язково входить до складу c–дискримінантної кривої.

Вітка $y = \varphi(x)$ c–дискримінантної кривої є обвідною, якщо тільки

$$\Phi'_x(x, y, C)\big|_{y=\varphi(x)} \neq 0 \text{ або } \Phi'_y(x, y, C)\big|_{y=\varphi(x)} \neq 0.$$

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння

$$y'^3 - \left(x^2 + xy + y^2\right) y'^2 + xy \left(x^2 + xy + y^2\right) y' - x^3 y^3 = 0. \tag{7.23}$$

Розв'язання. Застосувавши перший підхід ((7.2)–(7.11)), подамо рівняння у вигляді

$$\left(y' - xy\right)\left(y' - x^2\right)\left(y' - y^2\right) = 0.$$

Прирівнюючи кожен з співмножників до нуля та інтегруючи кожне з отриманих рівнянь, дістанемо:

$$y = C \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right), \quad y = \frac{x^3}{3} + C, \quad y + \frac{1}{x + C} = 0.$$

Множину розв'язків рівняння (7.23) можна записати також наступним чином:

$$\left(y - C \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\left(y - \frac{x^3}{3} - C\right)\left(y + \frac{1}{x + C}\right) = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння

$$\ln y' + \sin y' - x = 0. \tag{7.24}$$

Розв'язання. Це рівняння не можна розв'язати відносно похідної, тому застосуємо МВП. Дістанемо

$$y' = p, \quad x = \ln p + \sin p, \quad dx = \frac{dp}{p} + \cos p \, dp;$$

а оскільки $dy = p\, dx$, то

$$dy = p\left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp \quad \text{або} \quad dy = (1 + p\cos p)\, dp,$$

звідки $y = p + \cos p + p\sin p + C$.

Отже, маємо множину розв'язків рівняння (7.24) у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \ln p + \sin p; \\ y = p + \cos p + p\sin p + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Приклад 3. Проінтегрувати рівняння

$$(xy' - y)\ln\left(y' - \frac{y}{x}\right) = y. \tag{7.25}$$

Розв'язання. Оскільки задане рівняння не можна розв'язати відносно жодної зі змінних x, y або y', то спробуємо скористатися підходом, запропонованим у (7.12)–(7.20).

Дослідимо (7.25) на квазіоднорідність. Підстановка $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^\sigma y$ дає

$$\lambda^\sigma(xy' - y)\ln\left(\lambda^{\sigma-1}\left(y' - \frac{y}{2}\right)\right) = \lambda^\sigma y.$$

Отже, (7.25) інваріантне відносно запропонованої заміни, якщо тільки $\sigma = 1$; заміна типу (7.12) $x = e^t$, $y = z(t)e^t$ приводить до рівняння

$$z'\ln z' = z, \tag{7.26}$$

яке вже розв'язане відносно змінної z.

Зауважимо, що процедура запровадження вказаної змінної вимагає ретельності, оскільки ми замінюємо не одну змінну, а одразу дві: $\left(\frac{x}{y}\right) \to \left(\frac{t}{z}\right)$ і при цьому $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$. Рівняння (7.26) вже можна параметризувати, поклавши $z' = p$. Дістанемо $z = p\ln p$; $dz = (\ln p + 1)\,dp = p\,dt \Rightarrow \frac{\ln p + 1}{p}\,dp = dt$, $(p > 0)$.

Система

$$\begin{cases} t = \dfrac{(\ln p)^2}{2} + \ln p + C; \\ x = p\ln p, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{7.27}$$

задає однопараметричну сім'ю розв'язків рівняння (7.26) у параметричній формі. Повертаючись до вихідних змінних, дістанемо розв'язки рівняння (7.25).

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$e^{y'} + y' = 1. \tag{7.28}$$

Розв'язання. Згідно з (7.16)–(7.20) множину розв'язків цього рівняння можна описати одразу

$$e^{\frac{y-x}{x}} + \frac{y-C}{x} = 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Особливих розв'язків рівняння (7.28) не має, оскільки система (7.21) для цього рівняння має вигляд

$$\begin{cases} e^p + p = 1; \\ e^p + 1 = 0, \end{cases}$$

що є свідченням відсутності дискримінантних кривих, а, отже, і особливих розв'язків.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Розв'язання. Для цього рівняння можна було б здійснити ланцюжок перетворень (7.4)–(7.9), покладаючи $y' = p$. Проте процедура інтегрування значно спрощується, якщо параметр вводиться відповідно до співвідношення $y' = \operatorname{tg}(p)$. Дістанемо

$$x = \frac{\operatorname{tg} p}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 p}} = \pm \sin p,$$

$dx = \pm \cos p \, dp$, $dy = y' \, dx = \operatorname{tg} p \, dx = \operatorname{tg} p(\pm \cos p) = \pm \sin p \, dp$. Звідки ми отримуємо розв'язки в параметричній формі

$$\begin{cases} y = \mp \cos p + C; \\ x = \pm \sin p. \end{cases}$$

Вилучивши параметр p, знайдемо однопараметричну сім'ю розв'язків

$$x^2 + (y - C)^2 = 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

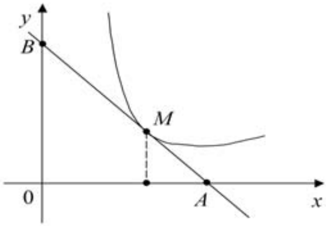

Рис.9

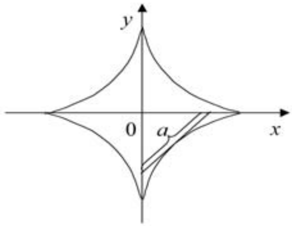

Рис.10

Крім цих, існують ще й особливі розв'язки, які можна знайти або методом c–дискримінантної кривої, або граничним переходом (7.20), покладаючи у вихідному рівнянні $x = a$. Дістанемо $x = \pm 1$.

Приклад 6. Знайти криву, відрізок дотичної до якої, що міститься між осями координат, має сталу довжину a.

Розв'язання. Нехай X, Y – рухомі координати, $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої, (x, y) – довільна точка кривої. З рівняння дотичної до кривої у точці (x, y): $Y - y = y'(X - x)$ знаходимо відрізки OA і OB, які дотична відтинає на координатних осях (рис. 9):

$$|OA| = x - \frac{y}{y'}; \quad |OB| = y - xy'.$$

За умовою задачі $AB = a$, тому

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = a^2 \text{ або } y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{7.29}$$

Кожне з рівнянь (7.29) є рівнянням Клеро. Тому формально ми можемо виписати однопараметричні сім'ї їх розв'язків:

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}. \tag{7.30}$$

Для знаходження особливих розв'язків застосуємо метод c–дискримінантної кривої. Для цього з системи

$$\begin{cases} y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}; \\ x \pm \frac{a\left(1+2C^2\right)}{\sqrt{(1+C^2)^3}} = 0 \end{cases}$$

вилучаємо параметр C; отримаємо

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \tag{7.31}$$

Знайдена астроїда є обвідною побудованих сімей кривих (рис. 10), а отже, (7.31) задає особливий розв'язок вихідного рівняння.

Приклад 7. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y = x + y' - \ln y'. \tag{7.32}$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини (7.32) по y', дістанемо

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \tag{7.33}$$

Вилучаючи з системи (7.32), (7.33) y', матимемо

$$y = x + 1, \tag{7.34}$$

яке є розв'язком рівняння (7.32), оскільки після підставляння його у рівняння дістанемо тотожність $x + 1 \equiv x + 1$.

Для перевірки того, що (7.34) являє собою особливий розв'язок, знайдемо множину розв'язків рівняння (7.32) МВП. Маємо:

$$y = x + p - \ln p \quad (p = y'),\, dy = dx + \left(1 - \frac{1}{p}\right) dp = p\, dx \Rightarrow$$

$$(1 - p)\, dx + \left(1 - \frac{1}{p}\right) dp = 0.$$

З останнього випливає, що або $x = \ln p + C$, $y = p + C$ – множина розв'язків у параметричній формі, або $p = 1 \Rightarrow y = x + 1$, що збігається з (7.34).

Знайдену однопараметричну сім'ю розв'язків можна подати у вигляді.

$$y = e^{x-C} + C. \tag{7.35}$$

Візьмемо довільну точку (x_0, y_0) на прямій (7.34). Покажемо, що через цю точку проходить одна з кривих сім'ї (7.35) з тим самим напрямом поля. Іншими словами, необхідно переконатися, що в кожній точці прямої (7.34) до неї дотикається одна з кривих сім'ї (7.35). Останнє означає, що (7.34) задає особливий розв'язок рівняння (7.32).

Умови дотику двох кривих $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ запишемо для точки (x_0, y_0):

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{7.36}$$

Для (7.34), (7.35) умови (7.36) набувають вигляду

$$e^{x_0 - C} + C = x_0 + 1, \quad e^{x_0 - C} = 1.$$

З другої рівності знаходимо $C = x_0$; підставляючи його у першу рівність, дістанемо $x_0 + 1 = x_0 + 1$. Ця рівність справедлива для всіх x_0. Отже, умови дотику виконуються і (7.34) – особливий розв'язок рівняння (7.32).

Проінтегрувати рівняння та розв'язати поставлені задачі Коші:

392. $yy' = (xy + 1)y' + x = 0$; $M(1, 1)$.

393. $y'^2 = 4|y|$.

394. $y'^2 = \dfrac{1}{4|x|}$.

395. $xy'^2 - 2y' - y = 0$.

396. $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$; $M(0, 1)$, $M(1, 0)$, $M(0, 0)$.

397. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$.

398. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

Знайти особливі розв'язки рівнянь, якщо відомі однопараметричні сім'ї розв'язків:

399. $y^2(1 + y'^2) = a^2$; $(x + C)^2 + y^2 = a^2$.

400. $y'^2 - 4y = 0$; $\left(\sqrt{y} - x - C\right)\left(\sqrt{y} + x - C\right) = 0$.

Методом p-дискримінантної кривої знайти особливі розв'язки рівнянь:

401. $y'^2 - 4y = 0$.

402. $y'^2 + 2xy' + 2x^2 = y$.

403. $y'^2 - 4yy' - y' + 4y = 0$.

404. $y'^2 - 4y = 0$.

Знайти обвідні однопараметричних сімей кривих і зобразити їх графічно:

405. $y = Cx^2 - C^2$. **406.** $y = C(x-C)^2$.

407. $Cy = (x-C)^2$. **408.** $xy = Cy - C^2$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

409. $y = \frac{xy'^2}{2} + \frac{y'^2}{x^2}$.

410. $6x^2y - 6y'^2 + (12x^2 - 3x^2)y' - 6x^4 + x^3 = 0$.

411. $y'(x - \ln y') = 1$. **412.** $y'^4 - y'^2 = y^2$.

413. $y' = \exp\left(\dfrac{xy'}{y}\right)$. **414.** $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

415. $y = -\dfrac{y'^3}{12} + \dfrac{xy'}{2} + \dfrac{y'^2}{4} + \dfrac{x^2}{y'^2} + x$.

416. $x = \dfrac{y}{y'} \ln y - \dfrac{y'^2}{y^2}$.

417. $y'^3 + y^2 = xyy'$. **418.** $x = y'\sqrt{1 + y'^2}$.

419. $x(y'^2 - 1) = 2y'$. **420.** $2xy' - y = y' \ln yy'$.

421. $y'^4 = 2yy' + y^2$. **422.** $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

423. $y = xy' - y'^2$. **424.** $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

425. $y = x(1 + y') + y'^2$. **426.** $2y(y' + 2) = xy'^2$.

427. $y + xy' = 4\sqrt{y}$. **428.** $y'^3 = 3(xy' - y)$.

429. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$. **430.** $y'^4 - 1 = 0$.

Вказівка. У рівняннях **430–433** використати (7.16)–(7.20).

431. $y' - \sin y' = 0$. **432.** $y'^2 - 3y' + 1 = 0$.

433. $y' - |y'| = 0$. **434.** $e^{x^3y' + 2x^2y} + x^3y' + 2x^2y = 0$.

Вказівка. Використати (7.12).

435. $x^4 + 7y'^4 - 24x^2y' = 0$.

Вказівка. У рівняннях **435–437** використати (7.13)–(7.15).

436. $5x^3 + y'^3 - 21xy' = 0$. **437.** $4y'^4 + x^4 = 20xy'$.

438. Чи мають рівняння:

а) $y^2 - \left(\frac{2}{3}\, yy'\right)^{\frac{3}{2}} = 0$; **б)** $y' = \sqrt[3]{y}$;

в) $y' = \sqrt{y} + 1$

особливі розв'язки? Чи виконується при цьому достатня умова обвідної?

439. Методом p–дискримінантної кривої довести, що рівняння:

а) $y - 2xy' - y'^2 = 0$;

б) $x + yy' = ay'^2$ (a – дійснозначний параметр)

не мають особливих розв'язків.

440. В яких точках площини порушується єдиність розв'язку задачі Коші для рівнянь:

а) $y'^2 - (y^2 + x)y' + xy^2 = 0$;

б) $y'^2 - (x^2 + y^3)y' + x^2y^3 = 0$;

в) $y'^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0$?

Написати по три різних розв'язки кожного з цих рівнянь, які проходять через точку $(0, 0)$.

§ 8. ЗАДАЧІ ПРО ТРАЄКТОРІЇ

1. *Ізогональною траєкторією сім'ї кривих*

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{8.1}$$

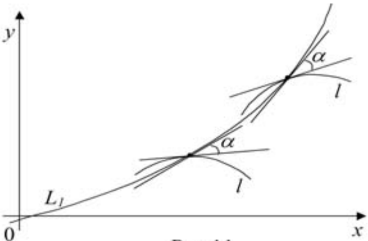

Рис.11

де C – параметр сім'ї, називається крива L_1 (рис. 11), яка перетинає всі криві L цієї сім'ї під одним і тим самим кутом α. Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то траєкторія називається *ортогональною.* Ізогональні (ортогональні) траєкторії задовольняють деяке рівняння. Для знаходження його необхідно:

1) скласти диференціальне рівняння сім'ї (8.1);

2) замінити в отриманому рівнянні y' на $\frac{y'-k}{1+ky}$, якщо $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ $(k = \operatorname{tg}\alpha)$, або на $-\frac{1}{y'}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Якщо сім'я кривих задається полярними координатами

$$\Phi(r, \varphi, C) = 0, \tag{8.2}$$

то для знаходження диференціального рівняння сім'ї ізогональних (ортогональних) траєкторій потрібно:

1) скласти диференціальне рівняння сім'ї (8.2);

2) замінити в ньому $\frac{dr}{d\varphi} = \dot{r}$ на $\frac{1+kr/\dot{r}}{r/\dot{r}-k}$, якщо $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, і на $-\frac{r^2}{\dot{r}}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(k = \operatorname{tg}\alpha)$.

Приклад 1. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї кіл з центром в початку координат

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{8.3}$$

Розв'язання. Складемо диференціальні рівняння сім'ї (8.3): $x + yy' = 0$. В отриманому рівнянні замінимо y' на $-\frac{1}{y'}$, дістанемо диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій $x - \frac{y}{y'} = 0$ або $y' = \frac{y}{x}$. Інтегруючи це рівняння, знаходимо шукані траєкторії $y = Cx$ $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$.

Приклад 2. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї

$$r = 2a\sin\varphi. \tag{8.4}$$

Розв'язання. Знайдемо диференціальне рівняння сім'ї (8.4)

$$\begin{cases} r = 2a\sin\varphi; \\ \dot{r} = 2a\cos\varphi. \end{cases}$$

Вилучаємо з цієї системи a: $r = \dot{r}\operatorname{ctg}\varphi$. Замінимо $\dot{r}$ на $-\frac{r^2}{\dot{r}}$, отримаємо $-\frac{r^2}{\dot{r}} = \operatorname{tg}\varphi$. Інтегруючи це рівняння, знайдемо шукану сім'ю траєкторій $r = 2C\cos\varphi$, $C \in \mathbb{R}$.

Знайти ортогональні траєкторії сімей ліній:

441. Гіпербол $xy = a$.

442. Парабол $y^2 = 2p(x - a)$.

443. Гіпербол $x^2 - y^2 = a$.

444. Кіл $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

445. Еліпсів $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

446. $r^2 = \ln(\operatorname{tg}\varphi) + C$.

447. Лемніскат $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Вказівка. Перейти до полярних координат.

448. Цисоїд $(2a - x)y^2 = x^3$.

449. Співфокусних парабол $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$.

450. Кардіоїд $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

451. Знайти криві, які перетинають усі криві сім'ї логарифмічних спіралей $r = ae^{\theta}$ під кутом $\frac{\pi}{4}$.

452. Знайти криві, які перетинають криві сім'ї $xy = a$ під кутом $\frac{\pi}{4}$.

453. Знайти криві, які перетинають криві сім'ї $x^2 + y^2 = a^2$ під кутом α.

454. Знайти ізогональні траєкторії (кут перетину $\alpha = \frac{\pi}{4}$) сім'ї прямих $y = ax$.

455. Знайти ізогональні траєкторії (кут перетину α) сім'ї кіл $\rho = a\cos\theta$.

456. Знайти ізогональні траєкторії сімей кривих, заданих полярними координатами ρ, θ:

а) $\rho = C\,\theta$; **б)** $\rho = C\,\theta^2$; **в)** $\rho = C\ln\theta$; **г)** $\rho = C(1 - \cos\theta)$.

§ 9. РІЗНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Для рівнянь **457–484** знайти:
1) область визначення рівняння;
2) область існування розв'язку задачі Коші $y(x_0) = y_0$;
3) область існування й єдиності;
4) особливі точки та особливі криві;
5) вивчити поле напрямів, породжене диференціальним рівнянням (побудувати кілька ізоклін, визначити напрями поля в точках, які лежать на осях координат);
6) вказати області зростання та спадання розв'язків;
7) знайти лінії екстремумів та перегинів;
8) схематично зобразити інтегральні криві;
9) проінтегрувати рівняння та вивчити поведінку інтегральних кривих в околах особливих точок та особливих кривих, а також на межі області визначення та на нескінченності відповідно до аналітичної форми розв'язків;
10) зобразити знайдені інтегральні криві та зіставити їх з 8):

457. $y' = |x|$.

458. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

459. $y' = \frac{1}{|x|}$.

460. $y' = \frac{|x|}{x}$.

461. $y' = 2\sqrt{x}$.

462. $y' = 2\sqrt{|x|}$.

463. $y' = ay$.

464. $y' = ay^2$.

465. $y' = \frac{|y|}{y}$.

466. $y' = \frac{1}{y}$.

467. $y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{9}}$.

468. $y' = y^{\frac{3}{2}}$.

469. $yy' = -x^3$.

470. $y' = y \ln |y|$.

471. $x^3 y' = 2y$.

472. $y' = -2\,\frac{y}{x}$.

473. $y' = 2\,\frac{y}{x}$.

474. $y' = -\frac{y}{x}$.

475. $y' = \frac{y}{x}$.

476. $y' = -\frac{x}{y}$.

477. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

478. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

479. $y' = \frac{2x+y}{x}$.

480. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.

481. $y' + 2xy = 1$.

482. $y' = -y \cos x$.

483. $y' = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

484. $y' = \begin{cases} -\frac{x}{y}, & y \ne 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Визначити тип кожного рівняння та вказати методи його інтегрування:

485. $y' = y^2 - x^2 + 2.$

486. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$

487. $y\,dx + \left(x - 2\sqrt{-\frac{x}{y}}\right)\,dy = 0.$

488. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy\,dx = 0.$

489. $y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0.$

490. $(y - 1)\,dx + 2(x + 1)\,dy = 0.$

491. $(y + x^3)\,dy + (3x^5 + 3x^2y)\,dx = 0.$

492. $(x + y - 1)\,dx - (x - y - 1)\,dy = 0.$

493. $(3x + 3y - 1)\,dx + (x + y - 1)\,dy = 0.$

494. $(x + 2y + 1)\,dx - (x - 3)\,dy = 0.$

495. $2(y - 2xy - x^2\sqrt{y}) + x^2y' = 0.$

496. $(x + x^2)y' - (1 + 2x)y = 1 + 2x.$

Проінтегрувати рівняння і там, де вказано, виділити інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, досліджуючи попередньо питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші:

497. $|y'| + y = 1$. Зобразити інтегральні криві.

498. $y'|y'| = -2y$. Зобразити інтегральні криві.

499. $|y'| = |y| + 1$; $M(0, 0)$.

500. $y' = |y| + |x|$; $M(0, 0)$.

Виявити, які початкові значення можна задавати, щоб задача Коші мала єдиний розв'язок:

501. $x^2y' + xy = 1.$

502. $y' + y\sqrt{1 + x} = 0.$

503. $y' + e^xy = 0.$

504. $y' + y\ln x = 0.$

505. При яких m кожний розв'язок рівняння є продовжуваним на всю вісь $-\infty < x < +\infty$?

а) для рівняння $y' = |y|^m$, якщо $m \in [0, 1]$;

б) для рівняння $y' = (y^2 + e^x)^m$, якщо $m \le 0,5$.

Розв'язати рівняння, вказавши їхні типи:

506. $\left(2xy^2 - y\right) dx + \left(y^2 + x + y\right) dy = 0.$

507. $y^2 = (xyy' + 1)\ln x.$

508. $xy' = 2y + \sqrt{1 + y'^2}.$

509. $y' = 3x + \sqrt{y - x^2}.$

510. $y'^2 = 4y(xy' - 2y)^2.$

511. $xy' = x^2 e^{-y} + 2.$

512. $x\,dy - 2y\,dx + xy^2(2x\,dy + y\,dx) = 0.$

513. $\left(x^3 - 2xy^2\right) dx + 3x^2 y\,dy = x\,dy - y\,dx.$

514. $(yy')^3 = 27x(y^2 - 2x^2).$

515. $y' - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2-1}.$

516. $(2x - \ln(y+1))\,dx - \frac{x+y}{y+1}\,dy = 0.$

517. $y' = \frac{(1+y)^2}{x^3+y+1}.$

518. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}.$

519. $\left(x\sqrt{y^2+1} + 1\right)\left(y^2+1\right) dx = xy\,dx.$

520. $xyy' - x^2\sqrt{y^2+1} = (x+1)\left(y^2+1\right).$

521. $\left(x^2 - 1\right) y' + y^2 - 2xy + 1 = 0.$

522. $dx - dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0.$

523. $y' - \frac{4}{x^2} y = x\sqrt{y}.$

524. $y' + y^2 = 1 + x^2.$

525. $xy\,dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$

526. $\left(x + \frac{y}{x}\right) dx + \left(1 + \frac{y^3}{x}\right) dy = 0.$

527. $y' = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}.$

528. $(\sin x + y)\,dy + \left(y\cos x - x^2\right) dx = 0.$

529. $(e^y + 2xy)\,dx + (e^y + x)x\,dy = 0.$

530. $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}.$

531. $x^2(dy - dx) = (x+y)y\,dx.$

532. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1.$

533. $x(x+1)(y' - 1) = y.$

534. $y'^2 - yy' + e^x = 0.$

535. $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y.$

536. $2y' = x + \ln y'.$

537. $(\cos x - x\sin x)y\,dx + (x\cos x - 2y)\,dy = 0.$

538. $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y.$

539. $\left(2x^2 y - 2y^2\right) y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1.$

540. $yy' = 4x + 3y - 2.$

541. $y^2y' + x^2\sin^3 x = y^3 \operatorname{ctg} x.$

542. $x\,dy - y\,dx = x\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$

543. $(x^2y^2+1)y + (xy-1)^2xy' = 0.$

544. $y^2 + x^2y'^5 = xy(y'^2 + y'^3).$

545. $y' = \sqrt[3]{2x - y + 2}.$

546. $(y' - x\sqrt{y})(x^2-1) = xy.$

547. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$

548. $y'^3 + (y'^2 - 2y')x = 3y' - y.$

549. $y' \operatorname{tg} y + 4x^3\cos y = 2x.$

550. $x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'.$

Розв'язати рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними за допомогою заміни шуканої функції (f, φ – неперервні функції):

551. $(xy' - y)f(x) = y^2 - x^2.$

552. $y(1+xy)\,dx + x(1-xy)\,dy = 0.$

553. $(x^2 - y^4)y' - xy = 0.$

554. $y' = \frac{y}{x} + x^\lambda f\left(\frac{y}{x}\right).$

555. $y' = y^2 f(xy).$

556. $y' = \varphi(x)f(xy) - \frac{y}{x}.$

557. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} + y = f(\sin x - y)$, де $f(z) = \begin{cases} z, & z > 0; \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$ Знайти розв'язок, який проходить через точку $M(0,1)$.

558. Довести, що розв'язок задачі Коші $y(x_0) = y_0$ для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x)$, де f – неперервна при $x \in [a, +\infty)$, $x_0 \ge a$, y_0 – будь-яке дійсне число, має горизонтальну асимптоту $y = y_0 + b$ (тут $b = \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$).

559. Використовуючи результат попередньої задачі, виявити, при яких значеннях λ інтегральна крива рівняння $\frac{dy}{dx} = x^\lambda$, яка проходить через точку (x_0, y_0), де x_0 належить області визначення правої частини рівняння, y_0 – довільне, має горизонтальну асимптоту.

560. Розглянемо рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна в усіх точках інтервалу (a,b), крім точки ξ, $\xi \in (a,b)$, $f(x) \to +\infty$ при $x \to \xi$.

Тоді $x = \xi$ є розв'язком рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)}$. Довести, що якщо інтеграли $\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$ і $\int\limits_\xi^b f(x)\,dx$ збіжні, то $x = \xi$ є особливим розв'язком, якщо ж ці інтеграли розбіжні, то $x = \xi$ – частинний розв'язок. Зробити рисунки для випадків **1)** $f(x) \to +\infty$ при $x \to \xi \pm 0$; **2)** $f(x) \to -\infty$ при $x \to \xi - 0$, $f(x) \to +\infty$ при $x \to \xi + 0$:
а) розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$ і $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ (зробити рисунки);
б) проінтегрувати рівняння $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} x^{-\frac{1}{3}} & \text{при } x < 0; \\ x^{-2} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ (зробити рисунок).

561. При яких значеннях λ диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = x^{-\lambda}$ має розв'язок $x = 0$? При яких λ цей розв'язок буде особливим?

562. Вказати, при яких значеннях λ диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = y^\lambda$ має розв'язок $y = 0$. При яких λ цей розв'язок буде особливим? Вивчити та порівняти поведінку інтегральних кривих рівнянь $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$ і $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$. Зробити рисунки.

563. Показати, як са́ме рівняння $a(x\,dy - y\,dx) + (b + b_1x + b_2y)\,dy + {}$ $+ (c + c_1x + c_2y)\,dx = 0$ зводиться до однорідного рівняння або до рівняння з відокремлюваними змінними.

564. Підібравши частинний розв'язок рівняння $y' + y\cos x = \cos x \sin x$, знайти його загальний розв'язок.

565. Підібравши частинний розв'язок рівняння $y' + y\varphi(x) = \varphi(x)\varphi'(x)$, знайти його загальний розв'язок.

566. Звести рівняння $y^{m-1}y' + a(x)y^m = b(x)$ до лінійного за допомогою заміни шуканої функції.

567. Звести рівняння $y' + (y^2 - \varphi^2(x))f(x) - \varphi'(x) = 0$ до рівняння Бернуллі за допомогою заміни шуканої функції.

Виявити, чи буде $y = 0$ особливим розв'язком диференціального рівняння:

568. $y' = \begin{cases} y\sin\frac{1}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

569. $y' = \begin{cases} \sqrt{y\sin\frac{1}{y}}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

570. Дано рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, де f – неперервна в $\mathbb{R}^2$ і така, що $f(x,y) > 0$ при $xy < 0$; $f(x,y) < 0$ при $xy > 0$. Довести, що розв'язок задачі Коші $y(x)$ такий, що $y(0) = 0$, існує. Чи гарантується його єдиність?

571. За допомогою заміни незалежної змінної звести рівняння

$$y = \frac{a(x)}{a'(x)}\,y' + f\left(\frac{y'}{a'(x)}\right)$$

до рівняння Клеро.

572. Показати, що розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ для рівнянь **а)** $y' = x^3 - y^3$; **б)** $y' = xy + e^{-y}$ визначений при $x \in [x_0, +\infty)$, тобто нескінченно продовжуваний вправо.

573. Нехай у рівнянні $\frac{dx}{dt} - a(t)x = f(t)$, $a(t) \geq 0$, $f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Довести, що кожний розв'язок цього рівняння прямує до нуля при $t \to +\infty$.

Вказівка. Подати загальний розв'язок рівняння у вигляді інтеграла з нескінченною границею.

574. Знайти ізогональні траєкторії сімей кривих (C – дійснозначний параметр, α – кут перетину, r, θ – полярні координати):

а) $x^2 - y^2 = C^2$, $\alpha = 45°$;

б) $y + Cx = 1$, $\alpha = 30°$;

в) $Cy - x = 1$, $\alpha = 60°$;

г) $y = Ce^x$, $\alpha = 45°$;

д) $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = C$, $\alpha = 90°$;

е) $x^2 - Cy = 1$, $\alpha = 90°$;

є) $r = Ce^{-\theta}$, $\alpha = 90°$;

ж) $r = C\theta^2$, $\alpha = 90°$.

Глава 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

§ 10. РІВНЯННЯ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ. ІНТЕГРОВНІ ТИПИ РІВНЯНЬ

1. Диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (10.1)$$

допускає зниження порядку в наступних випадках.

1.1. Рівняння має вигляд

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (10.2)$$

Заміна $y^{(k)} = z$, де $z = z(x)$, знижує порядок рівняння (10.2) на k одиниць.

1.2. Якщо рівняння не містить явно незалежної змінної, тобто є автономним:

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (10.3)$$

то тоді заміна $y' = p$, де $p = p(y)$ – нова функція аргументу y, знижує порядок рівняння (10.3) на одну одиницю. При цьому враховуємо, що $y'' = pp'$, $y''' = p''p + p'^2$ і т.д.

1.3. Якщо рівняння (10.1) однорідне відносно змінних y, $y', \ldots, y^{(n)}$, тобто

$$F\left(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right), \quad t > 0,$$

і тому інваріантне відносно розтягів $(x, y) \to (x, ty)$, то його порядок можна знизити на одиницю заміною

$$\frac{y'}{y} = u, \quad u = u(x). \qquad (10.4)$$

1.4. Квазіоднорідне рівняння (10.1) (інваріантне щодо розтягів $(x,y) \to (tx, t^k y)$) спрощується заміною

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt}, \tag{10.5}$$

де $z = z(t)$, а вага квазіоднорідності визначається з умови інваріантності

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1}y', \ldots, t^{k-n}y^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{10.6}$$

При заміні (10.5) похідні перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = (z' + kz) \cdot e^{(k-1)t}; \\ y'' &= \frac{dy'}{dt} \cdot e^{-t} = \left[z'' + (2k-1)\, z' + k(k-1)\, z\right] \cdot e^{(k-2)t} \end{aligned} \tag{10.7}$$

і т.д.

1.5. Рівняння у формі повної похідної

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx} G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0$$

допускає очевидне зниження порядку на одиницю. В результаті інтегрування дістанемо:

$$G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C_1, \tag{10.8}$$

де $C_1 = \text{const}$. Співвідношення (10.8) називають *першим інтегралом рівняння.*

Якщо рівняння (10.1) не має форми першої похідної, то в деяких випадках воно може набути бажаної форми при множенні його на деяку функцію $m\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ – інтегрувальний множник. Слід мати на увазі, що при цьому можуть з'явитися зайві розв'язки (розв'язки рівняння $m = 0$), а також можлива втрата деяких розв'язків (у разі розривності m). Так, рівняння $y'' = f(y)$, якщо домножити його на $m = 2y'$, набуває вигляду

$$2y'y'' = 2y'f(y) \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx}(y'^2) = \frac{d}{dx}\left(2\int f(y)\, dy\right),$$

а отже, розв'язки його задаються співвідношенням

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\int f(y)\,dy + C_1}} = \pm x + C_2.$$

Лінійне рівняння другого порядку $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, якщо $q(x) = p'(x)$, є рівнянням у формі повної похідної. Його можна подати у вигляді $\frac{d}{dx}(y' + p(x)y) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)$ і знизити порядок на одиницю. Дістанемо лінійне рівняння першого порядку, яке легко розв'язати відомими методами (Лагранжа, Бернуллі тощо).

2. Рівняння (10.1) можна розв'язати, тобто знайти його розв'язки у вигляді комбінацій елементарних функцій чи квадратур у наступних випадках.

2.1. Якщо (10.1) має вигляд

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0, \tag{10.9}$$

то:

а) Рівняння (10.9) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(x), \tag{10.10}$$

де f – неперервна на $I = (a, b)$ функція; тоді множину розв'язків можна подати як

$$y = \underbrace{\iint \dots \int}_{(n \text{ разів})} f(x)\,dx \dots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n. \tag{10.11}$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння (10.10) з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{10.12}$$

можна записати у формі

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x}}_{(n \text{ разів})} f(\xi)\,d\xi \dots d\xi + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \dots + y_0^{(1)}(x - x_0) + y_0. \tag{10.13}$$

Застосовуючи співвідношення (10.11), (10.13), зручно користуватися формулою

$$\underbrace{\iint \ldots \int}_{(n\ \text{разів})} f(x)\,dx \ldots dx = \frac{1}{(n-1)!} \int f(t)(x-t)^{n-1} dt. \qquad (10.14)$$

б) Якщо (10.9) допускає параметризацію $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, причому φ – диференційовна функція, тоді для знаходження розв'язків цього рівняння у параметричній формі слід застосовувати такий ланцюжок перетворень:

$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx; \quad dy^{(n-1)} = \psi(t)\, d(\varphi(t)) = \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt;$

$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C_1 = \psi_1(t, C_1);$

$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx; \quad dy^{(n-2)} = \psi_1(t, C_1)\, \varphi'(t)\, dt;$

$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\, \varphi'(t)\, dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2)$ і т.д.

2.2. Якщо (10.1) має вигляд

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (10.15)$$

і (10.15) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$, то, ввівши нову невідому функцію $u(x) = y^{(n-1)}$, дістанемо $u' = f(u)$, звідки $x + C_1 = \int \frac{du}{f(u)}$.

Припустимо, що з отриманої рівності легко дістати $u = \varphi(x, C_1)$. Тоді матимемо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку $y^{(n-1)} = \psi(x, C_1)$ вигляду (10.10). Якщо ж (10.15) можна параметризувати:

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \qquad (10.16)$$

причому φ є диференційовною функцією, то, застосовуючи диференціальне співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$, дістанемо $\varphi'(t)\, dt = \psi(t)\, dx$, звідки

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C_1, \quad (\psi(t) \neq 0).$$

Далі $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \varphi(t)\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$

$y^{(n-2)} = \int \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C_2,$

. . . .

$dy = y'dx,\ y = \xi(t, C_1, \ldots, C_n).$

Отже, у параметричній формі маємо n-параметричну сім'ю розв'язків рівняння (10.15)

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C_1, \quad y = \xi(t, C_1, \ldots, C_n).$$

2.3. Якщо рівняння (10.1) має вигляд

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0 \tag{10.17}$$

і (10.17) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то, зробивши заміну $y^{(n-2)} = u(x)$, дістанемо $y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right) = f(u)$ або $u'' = f(u)$. Застосовуючи до отриманого рівняння підхід, запропонований у п. 1.5, знаходимо

$$\int \frac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)\,du + C_1}} = x + C_2. \tag{10.18}$$

Повертаючись до вихідних змінних, тобто підставляючи знайдені з (10.17) значення u в співвідношення $y^{(n-2)} = u$, дістанемо рівняння $(n-2)$-го порядку вигляду (10.10). Якщо ж (10.17) можна параметризувати, отримаємо

$$y^{(n-2)} = \varphi(t); \quad y^{(n)} = \psi(t);$$

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = y^{(n-1)}\,\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}$$

або

$$y^{(n)}dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dy^{(n-1)}, \quad \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = y^{(n-1)}dy^{(n-1)}.$$

Інтегруючи, дістанемо $y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_1}$.

Подальше перетворення добутого диференціального рівняння проводимо аналогічно з (10.16).

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням типу (10.10). Для відшукання множини його розв'язків можна застосувати формули (10.11) безпосередньо. Дістанемо

$$y = \int te^t(x-t)\,dt + C_1x + C_2.$$

Але, оскільки для розв'язання задачі Коші необхідно знаходити ще й y', то зручніше виконати послідовне інтегрування заданого рівняння. Маємо

$$y' = (x-1)e^x + C_1; \quad y = (x-2)e^x + C_1x + C_2.$$

Враховуючи початкові умови, отримуємо систему рівнянь $-1 + C_1 = 0$, $-2 + C_2 = 1$. Звідки випливає, що шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд $y = (x-2)\,e^x + x + 3$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' = -e^{-x^2}$.

Розв'язання. Оскільки інтеграл від правої частини не виражається через елементарні функції, то зручно користуватися одразу формулами (10.11), (10.14). Дістанемо $y = \int e^{-t^2}(x-t)\,dt + C_1x + C_2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x - e^{y''} + y''^2 = 0$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді $x = e^{y''} - y''^2$. Покладемо $y'' = p$ та застосуємо диференціальне співвідношення $dy' = y''\,dx$. Дістанемо $x = e^p - p^2$, $dx = (e^p - 2p)\,dp$, $dy' = p(e^p - 2p)\,dp$. Звідки $y' = e^p(p-1) - \frac{2}{3}p^3 + C_1$. Оскільки $dy = y'\,dx$, то маємо

$$dy = \left[e^{2p}(p-1) - \left(\frac{2}{3}p^3 + 2p^2 - 2p - C_1\right)\,e^p + \frac{4}{3}p^4 - 2C_1p\right]\,dp.$$

А отже, співвідношення

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{p}{2} - \dfrac{3}{4}\right) \cdot e^2 - \left(\dfrac{2}{3}p^3 - 2p + 2 - C_1\right) \cdot e^p + \dfrac{4}{15}p^5 - C_1p^2 + C_2; \\ x = e^p - p^2, \end{cases}$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, задають множину розв'язків вихідного рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' = xy'' + y''^2$.

Розв'язання. Оскільки задане рівняння не містить шуканої функції, то його порядок можна знизити, застосувавши підстановку $y' = z$, де $z = z(x)$. Отримаємо рівняння Клеро $z = xz' + z'^2$, яке легко розв'язується. Однопараметрична сім'я розв'язків рівняння Клеро має вигляд $z = xC + C^2$ (C – довільна стала, параметр сім'ї). Крім того, існує ще й *особливий розв'язок*, який можна знайти як обвідну однопараметричної сім'ї, вилучивши з системи $\begin{cases} z = xC + C^2 \\ 0 = x + 2 \end{cases}$ параметр C. Дістанемо $z = -\frac{x^2}{4}$.

Повертаючись до вихідних змінних , маємо $y = \frac{1}{2}C_1^2x^2 + C_1^2x + C_2$ – загальний розв'язок, $y = -\frac{x^3}{12} + C_1$ – сім'я особливих розв'язків ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

Приклад 5. Розв'язати рівняння $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння інваріантне щодо розтягів $(x, y) \to (x, ty)$. Воно не змінюється від підставляння $y \to ty$, $y' \to ty'$, $y'' \to ty''$. Заміна $\frac{y'}{y} = u$, де $u = u(x)$, знижує порядок рівняння на одиницю.

Справді, маємо $y' = yu$, $y'' = y'u + yu'$, а отже, $x(u^2 + u') - xu^2 - u = 0$ або $xu' = u$.

Інтегруючи знайдене рівняння та повертаючись до вихідних змінних, дістанемо множину розв'язків досліджуваного рівняння: $y = C_1 \exp\left[C_2x^2\right]$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$.

Розв'язання. Покажемо, що рівняння інваріантне відносно розтягів $(x, y) \to (tx, t^ky)$. Справді, внаслідок підставляння $x \to tx$, $y \to t^ky$, $y' \to t^{k-1}y'$, $y'' \to t^{k-2}y''$ дістанемо

$$t^{k+2}x^4y'' + t^{3k}x^3y'^3 - 3t^{3k}x^2y'^2y + 3t^3xy'y^2 - t^{3k}y^3 = 0;$$

отже, при $k + 2 = 3k$, тобто при $k = 1$, рівняння не змінюється. Тому необхідно зробити заміну, притаманну квазіоднорідним рівнянням, тобто $x = e^t$, $y = ze^t$, де $z = z(t)$ – нова функція аргументу t. При цьому необхідно мати на увазі, що

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t};$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right) e^{-t} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t},$$

тобто

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} + z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right) e^t.$$

Дістанемо

$$\frac{dz^2}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^3 = 0.$$

Заміна $z' = p$, де $p = p(z)$, приведе до рівняння першого порядку $\frac{dp}{dz}p + p + p^3 = 0$, розв'язки якого можна подати у вигляді $\left\{\begin{array}{l} p = \operatorname{tg}(C_1 - z); \\ p = 0. \end{array}\right.$ Здійснюючи перетворення в зворотному порядку, дістанемо

$$C_2 x \sin\left(C_1 - \frac{y}{x}\right) = 1.$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $yy' = y'^2$.

Розв'язання. Помноживши рівняння на функцію $m = \frac{1}{y''y'}$, дістанемо $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$ – рівняння у формі повних похідних. Знижуючи його порядок, матимемо $y' = C_1 y$, звідки $y = C_2 e^{C_1 x}$.

Знайти розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початкові або граничні умови:

575. $y''' = e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$

576. $y''' = \dfrac{e^x}{x}; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0.$

577. $y'' = 1; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$ Зробити рисунок.

578. $y'' = 2; \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.$ Зробити рисунок.

Знизити порядок рівнянь до першого:

579. $yy'' = y'^2 + 2xy^2$.

580. $y''^2 - yy''' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$.

581. $y'' + \frac{2}{x}y' + y^2 = 0$.

582. $y'^2 + 2xyy'' = 0$.

583. $y''' + (y-2)y' = 0$.

584. $y'''y'^2 = 1$.

585. $x^2(y^2y''' - y'^3) - 2y^2y' - 3xyy'^2 = 0$.

586. $y^2(y'y''' - 2y''^2) - yy'^2y'' = 2y'^4$.

587. $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2$.

588. $x^2yy'' + 1 = (1-y)xy'$.

589. $y'' + 2yy'^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y'$.

590. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1$.

Розв'язати рівняння, скориставшись їх квазіоднорідністю:

591. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

592. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$.

593. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$.

594. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

595. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

596. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

597. $y(xy'' + y') = xy'^2(1-x)$.

598. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.

599. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}$.

600. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$.

601. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$.

602. $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$.

603. $xyy'' + yy' - x^2y'^3 = 0$.

Розв'язати рівняння, виділивши повні похідні:

604. $y'' = 2yy'$.

605. $yy''' - y'y'' = 0$.

606. $yy'' = y'$.

607. $y'' = y'^2y$.

608. $yy'' = y'(y'+1)$.

609. $y''y + y'^2 = 1$.

610. $xy'' = 2yy' - y'$.

611. $y'' = xy' + y + 1$.

612. $xy'' - y' = x^2yy'$.

613. $5y'''^2 - 3y''y'''' = 0$.

Розв'язати рівняння:

614. $xy^{(4)} = 1.$

615. $xy' = \sin x.$

616. $y''' = 2xy''.$

617. $y'' = \sin(x^2).$

618. $y''' = \frac{\sin x}{x}.$

619. $y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}.$

620. $x = e^{-y''} + y''.$

621. $y''^2 = 1.$

622. $x = \dfrac{y}{\sqrt{1 + y''^2}}.$

623. $y'' = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}.$

624. $x^2 y'' = y'^2.$

625. $y'(1 + y'^2) = ay''.$

626. $y'' x \ln x = y'.$

627. $xy'' = y' \ln \left(\frac{y'}{x}\right).$

628. $yy'' = y'^2.$

629. $1 + y'^2 = 2yy''.$

630. $yy''^2 = 1.$

631. $2yy'' + y^2 + y'^4 = 0.$

632. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0.$

633. $y'''y'^2 = y''^3.$

634. $2yy'' = y^2 + y'^2.$

635. $y''^3 + xy'' = 2y'.$

636. $2y'(y'' + 2) = xy''^2.$

637. $y^4 - y^3 y'' = 1.$

638. $(y' + 2y)y'' = y'^2.$

639. $yy'' = y^2 - y'^3.$

640. $y'' + \cos xy' - \sin xy = 0.$

641. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1.$

642. Знайти інтегральні криві рівняння $yy'y'' = y'^2 + y'^3$, які проходять через точку $(0, 0)$ і дотикаються в цій точці до прямої $x + y = 0$. Скільки таких кривих існує і чому?

643. Знайти форму кривої, що її набуває гнучка однорідна нерозтяжна нитка з закріпленими кінцями, якщо на нитку діє навантаження, горизонтальна проекція якого однакова на кожну одиницю довжини. Масою нитки знехтувати.

644. Знайти форму кривої, що її набуває гнучка нерозтяжна нитка з закріпленими кінцями під дією власної маси.

645. Довести, що рівняння руху маятника $y'' + \sin y = 0$ має розв'язок $y(x)$ такий, що $y(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

646. Знайти криву, радіус кривизни якої дорівнює 1.

Вказівка. $R = \dfrac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}.$

647. Знайти криву, радіус кривизни якої пропорційний кубові нормалі.

Вказівка. $R = \dfrac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}$ – радіус кривизни, $MN = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$ – довжина відрізка нормалі (див. рис. 6, § 2).

648. Балка завдовжки l лежить кінцями на двох опорах. До середини балки підвішений вантаж P. Знайти рівняння пружної лінії та її найбільший прогин.

Вказівка. Якщо початок координат помістити в нерухому точку балки, вісь Ox спрямувати вздовж балки, а Oy – вертикально вниз, то згинальний момент у точці (x, y): $M = P(l - x) = EI\frac{d^2y}{dx^2}$, де E – модуль Юнга; I – момент інерції площі поперечного перерізу балки відносно нейтральної лінії.

649. Обчислити швидкість, з якою впаде на Землю (під дією земного тяжіння) тіло, що в початковий момент перебуває на орбіті Місяця (прискорення земного тяжіння обернено пропорційне квадрату відстані тіла від Землі).

650. Використовуючи дані попередньої задачі, обчислити час падіння тіла з місячної орбіти на Землю.

§ 11. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Лінійне неоднорідне рівняння (ЛНР) n-го порядку має вигляд

$$L[y] = f(x), \tag{11.1}$$

де $L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y$, $a_i(x)$, $f(x)$ – неперервні функції; $x \in I = (a, b)$ $(i = \overline{1, n})$.

Відповідне йому однорідне рівняння (ЛОР)

$$L[y] = 0. \tag{11.2}$$

Заміна незалежної змінної

$$x = \Phi(t), \tag{11.3}$$

де Φ – неперервно диференційовна n-разів функція така, що $\Phi'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (\alpha, \beta)$, для яких $x = \Phi(t) \in (a, b)$, не порушує лінійності рівняння.

Заміна невідомої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x), \tag{11.4}$$

де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – неперервно диференційовні n-разів функції; $\alpha(x) \neq 0$ при $x \in I$, $z = z(x)$, також не порушує лінійності рівняння. Однорідна заміна ($\beta(x) \equiv 0$), відповідна (11.4), застосована до ЛОР, не порушує його лінійності й однорідності.

Комбінації замін (11.3), (11.4) використовують для спрощення вихідного ЛНР чи ЛОР. Доведено [10, завдання 2.23], що якщо ЛОР (11.2) зводиться до ЛОР зі сталими коефіцієнтами заміною (11.3), то остання обов'язково має вигляд

$$t = C \int \sqrt[n]{a_n(x)}\, dx. \tag{11.5}$$

2. Якщо y_1 – нетривіальний частинний розв'язок ЛОР (11.2), то підстановка

$$y = y_1 \int z(x)\, dx, \tag{11.6}$$

де $z = z(x)$ – нова невідома функція, зводить ЛОР (11.2) до ЛОР $(n-1)$-го порядку.

3. Якщо відомо k нетривіальних розв'язків ЛОР (11.2), то, застосовуючи підстановку типу (11.6) послідовно, порядок рівняння можна знизити на k одиниць і при цьому дістати знов-таки ЛОР.

Підстановка

$$y' = yu \tag{11.7}$$

де $u = u(x)$ – нова функція, також дає змогу знизити порядок ЛОР (11.2) на одиницю, але при цьому рівняння втрачає лінійність. Отримане рівняння належить до типу Ейлера-Ріккаті. Якщо u_1 – його частинний розв'язок, то

$$y_1 = \exp\left[\int u_1(x)\, dx\right] \tag{11.8}$$

буде частинним розв'язком ЛОР (11.2).

Якщо рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-k}y^{(k)} = f(x), \tag{11.9}$$

де $k \in [1, n) \subset \mathbb{N}$, його порядок можна знизити на k одиниць, застосовуючи підстановку

$$y^{(k)} = z, \tag{11.10}$$

де $z = z(x)$.

Рівняння (11.1), як лінійне, може одночасно бути рівнянням у формі точних похідних. Таким, наприклад, є рівняння

$$y'' + p(x)y' + p'(x)y = f(x),$$

оскільки його можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dx}\big(y' + p(x)\,y\big) = f(x)$$

і в результаті інтегрування дістати

$$y' + p(x)y = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Загальний розв'язок ЛНР (11.1) подається як сума

$$y = \overline{y} + \widetilde{y}, \tag{11.11}$$

де $\overline{y}$ – загальний розв'язок ЛОР (11.2); $\widetilde{y}$ – довільний частинний розв'язок відповідного йому ЛНР (11.1). При цьому для знаходження $\widetilde{y}$ застосовують найчастіше метод Лагранжа або метод невизначених коефіцієнтів (див. §13).

Розв'язати лінійні рівняння, що допускають зниження порядку:

651. $y'' + \frac{2}{x}y' = 0.$ **652.** $xy''' + y'' = 3x^2.$

653. $x^2y''' + xy'' - y = 3x^2.$ **654.** $xy'' \ln x + y' = 0.$

Розв'язати лінійні рівняння як рівняння в точних похідних або відшукати попередньо інтегрувальний множник:

655. $y'' + p(x)y' + p'(x) = 0$.

656. $y'' + 2(\operatorname{tg} x)\, y' + \frac{2}{\cos^2 x} y = 0$.

657. $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$.

658. $y'' + 2xy' + 2y = 2x$.

659. $x^2 y'' - xy' + y = x^2$.

660. $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

661. $y'' \sin^2 x + y' \sin 2x = 2y$.

662. Знайти вигляд ЛОР другого порядку, яке зводиться заміною (11.8) до спеціального рівняння Ріккаті

$$z' + az^2 = bz^m.$$

663. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0,$$

звівши його до рівняння Ріккаті.

Позбутися доданків з першою похідною за допомогою заміни невідомої функції:

664. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$.

665. $xy'' + 2y' - xy = e^x$.

666. $y'' + \frac{2}{x} y' - a^2 y = 2$.

Позбутися доданків з першою похідною, виконавши заміну вигляду (11.4):

667. $x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0$.

668. $2xy'' + y' - 2y = 0$.

669. $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2) y' + y = 0$.

670. $y'' - y' + e^{2x} y = 0$.

671. $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

Комбінуючи заміни (11.3), (11.4), зробити сталим коефіцієнт при шуканій функції і позбутися доданків з першою похідною:

672. $x^4y'' + k^2y = 0.$ **673.** $x^4y'' - k^2y = 0.$

674. $y'' + 2xy' + \left(\frac{1}{x^2} + x^2 + 1\right) y = 0.$

675. $y'' - 2xy' - \left(\frac{1}{x^2} + x^2 - 1\right) y = 0.$

Виконати заміну (11.5) так, щоб коефіцієнти отриманого рівняння були сталими:

676. $x^3y''' - 3x^2y'' + 5xy' - 2y = 0.$

677. $y'' - \dfrac{x}{1-x^2}\, y' + \dfrac{1}{1-x^2}\, y = 0.$

678. $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$

679. Дано рівняння

$$L[y] = y''' + h_1(x)y'' + h_2(x)y' + h_3(x)y = f(x).$$

Виконати заміну невідомої функції (11.4) так, щоб:

а) перетворене рівняння було лінійним однорідним і не містило доданків з $(n-1)$-ю похідною;

б) з'ясувати, якою може бути функція $\alpha(x)$, щоб перетворене рівняння допускало зниження порядку на одиницю.

680. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

якщо відомо, що воно має два лінійно незалежних розв'язки, які є многочленами.

Вказівка. Нехай y_1, y_2 – знайдені лінійно незалежні розв'язки. Підстановка $y = y_1 \int z\, dx$ зведе рівняння до ЛОР другого порядку, яке матиме частинний розв'язок $z_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$.

Звести до лінійних рівняння Ріккаті:

681. $y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}.$ **682.** $xy' - 5y - y^2 - x^2 = 0.$

683. $y' = y^2 - x^{-\frac{4}{3}}.$

§ 12. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

ЛОР n-го порядку в канонічній формі має вигляд

$$L[y] = y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + h_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + h_n(x)y = 0, \qquad (12.1)$$

де $h_i(x)$ – неперервні на $I = (a, b)$ функції, $i = \overline{1, n}$.

Основні властивості розв'язків (12.1) випливають з властивостей лінійного диференціального оператора:

1. $L[0] = 0$;
2. $L[y_i] = 0 \Rightarrow \quad L\left[\sum\limits_{i=1}^{m} C_i y_i\right] = 0, \quad C_i = \text{const},\ i = \overline{1, m}$;
3. $L[u + iv] = 0 \Rightarrow \quad L[u] = 0,\ L[v] = 0$.

Функції $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_m(x)$ називаються *лінійно залежними* на множині I, якщо існують $\alpha_i = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$, такі, що $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Phi_i(x) = 0. \qquad (12.2)$$

Якщо ж тотожність (12.2) має місце лише при $\alpha_i = 0$ $(\forall i = \overline{1, m})$, то функції $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_m(x)$ називаються *лінійно незалежними* на множині I.

1. Для того щоб функції $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_m(x)$ були лінійно незалежними на $[a, b]$, необхідно й достатньо, щоб *визначник Грама* $\Gamma(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ був не тотожним нулю на $[a, b]$:

$$\Gamma(\Phi_1, \ldots, \Phi_m) := \det \begin{pmatrix} (\Phi_1, \Phi_1) & (\Phi_1, \Phi_2) & \cdots & (\Phi_1, \Phi_m) \\ (\Phi_2, \Phi_1) & (\Phi_2, \Phi_2) & \cdots & (\Phi_2, \Phi_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Phi_m, \Phi_1) & (\Phi_m, \Phi_2) & \cdots & (\Phi_m, \Phi_m) \end{pmatrix} \neq 0; \qquad (12.3)$$

де $(\Phi_i, \Phi_j) := \int\limits_a^b \Phi_i(x)\Phi_j(x)\,dx, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m},\ x \in [a,b].$

2. Якщо $\Phi_i(x)$ мають неперервні похідні до $(m-1)$-го порядку включно, то для лінійної незалежності системи функцій $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^m$ на інтервалі I достатньо, щоб *визначник Вронського* (*вронскіан*) був не тотожним нулю хоча б в одній точці інтервалу I, тобто $\exists x \in I$:

$$W(x) = W[\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m] := \det \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_m \\ \Phi_1' & \Phi_2' & \cdots & \Phi_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(m-1)} & \Phi_2^{(m-1)} & \cdots & \Phi_m^{(m-1)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

3. Якщо $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^m$ – лінійно залежна на I система функцій і $\Phi_i(x)$ – неперервно диференційовні $(m-1)$ раз на I, то

$$W(x) = W[\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m] \equiv 0, \quad x \in I.$$

4. Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ – розв'язки деякого ЛОР на інтервалі I, то відмінність вронскіана від нуля на I є необхідною й достатньою умовою лінійної незалежності цих функцій, тобто

$$\{\Phi(x)\}_{i=1}^m \ \text{– л.н.з.} \quad \Longleftrightarrow \quad W(x) \neq 0, \forall x \in I. \tag{12.4}$$

Умова (12.4) легко перевіряється, якщо для (12.1) використати формулу Остроградського-Ліувілля

$$W(x) = W(x_0) \exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} h_1(\xi)\,d\xi\right]. \tag{12.5}$$

З (12.5) випливає, що $W(x) \equiv 0$ на I або $W(x) \neq 0,\ x \in I$.

Будь-яка система n лінійно незалежних розв'язків ЛОР n-го порядку називається *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР) цього рівняння.

Якщо $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ – ФСР рівняння (12.1), то загальний розв'язок його має вигляд

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{12.6}$$

де C_i – довільні сталі.

ФСР $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^n$ є нормованою в точці x_0, якщо матриця Вронського, побудована по цій системі функцій, дорівнює одиничній матриці. Якщо $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^n$ нормована в точці x_0 ФСР рівняння (12.1), то розв'язок задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_0^{(1)},\, \ldots,\, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{12.7}$$

можна подати у вигляді

$$y = y_0 y_1(x) + y_0^{(1)} y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x). \tag{12.8}$$

При побудові ФСР для ЛОР другого порядку зручно користуватися *формулою Абеля*

$$y = C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int h_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx + C_2 y_1, \tag{12.9}$$

яка є наслідком формули (12.5). При $C_1 = 1,\ C_2 = 0$ з (12.9) легко дістати розв'язок ЛОР, лінійно незалежний з нетривіальним розв'язком y_1 цього рівняння. Якщо ж трактувати C_1, C_2 як довільні сталі, то (12.9) можна розглядати як загальний розв'язок рівняння другого порядку за умови, що y_1 – відомий нетривіальний його розв'язок.

Приклад 1. Довести, що необхідною й достатньою умовою лінійної незалежності двох функцій $\Phi_1(x)$ та $\Phi_2(x)$ на I є відмінність від тотожної константи відношення цих функцій:

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} \not\equiv \mathrm{const}, \quad x \in I.$$

Розв'язання. Припустимо від супротивного, що $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} \not\equiv \mathrm{const}$ при $x \in I$, але функції $\Phi_1(x)$ та $\Phi_2(x)$ лінійно залежні на I, тобто $\exists C_1, C_2$:

$$C_1^2 + C_2^2 > 0, \quad C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in I.$$

Нехай, наприклад, $C_1 \neq 0$; враховуючи, що $\Phi_2(x) \neq 0$ на I, дістанемо

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} = \frac{C_1}{C_2} \equiv \mathrm{const},$$

що суперечить припущенню.

Приклад 2. Використовуючи результат прикладу 1, дослідити на лінійну залежність функції:

а) $y_1 = \operatorname{tg} x, \quad y_2 = \operatorname{ctg} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

б) $y_1 = \sin 2x, \quad y_2 = \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Розв'язання.

а) Оскільки $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg}^2 x$, то задані функції лінійно незалежні на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

б) Відношення $\frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = 2$, отже, функції y_1 та y_2 лінійно залежні.

Приклад 3. Дослідити на лінійну залежність функції

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{якщо } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$
$$y_2(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{якщо } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 0, & \text{якщо } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо лінійну комбінацію $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$. Якщо $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то дістанемо $\alpha_2 y_2 = 0$, а тому $\alpha_2 = 0$. На відрізку $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ маємо $\alpha_1 y_1 = 0$, звідки $\alpha_1 = 0$. Отже, $y_1(x)$, $y_2(x)$ – лінійно незалежні на $[0, 1]$, хоча вронскіан $W[y_1, y_2] \equiv 0$ на $[0, 1]$.

Приклад 4. Перевірити, що функції $y_1 = x^2$, $y_2 = x^5$ утворюють ФСР деякого ЛОР другого порядку. Розв'язати для цього рівняння задачу Коші з початковими умовами $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

Розв'язання. Задані функції є неперервно диференційовними двічі. Визначник Вронського

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 3x^6 \not\equiv 0.$$

Отже, функції y_1, y_2 можуть утворювати ФСР деякого ЛОР другого порядку, коефіцієнти якого є неперервними функціями при $x \neq 0$.

Немає потреби складати рівняння, досить записати його загальний розв'язок $y = C_1 x^2 + C_2 x^5$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Щоб задовольнити початкові умови $C_1 + C_2 = 1$ та $2C_1 + 5C_2 = -2$ необхідно покласти $C_1 = \frac{7}{3}$, $C_2 = -\frac{4}{3}$. Отже, розв'язком поставленої задачі Коші є функція $y = \frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^5$.

Приклад 5. Довести, що функції $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = x^2$ утворюють ФСР деякого ЛОР третього порядку.

Розв'язання. Задані функції тричі неперервно диференційовні. Визначник Вронського

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = e^x\left[(x-1)^2 + 1\right] \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, $\{y_1, y_2, y_3\}$ є ФСР для ЛОР, яке можна подати у вигляді

$$\det\begin{pmatrix} x & e^x & x^2 & y \\ 1 & e^x & 2x & y' \\ 0 & e^x & 2 & y'' \\ 0 & e^x & 0 & y''' \end{pmatrix} = 0,$$

або, після розкладання за останнім стовпцем і скорочення на e^x,

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

якщо відомі два його частинні розв'язки $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$.

Розв'язання. Оскільки $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^4 \neq 0$ при $x \neq 0$, то розв'язки y_1, y_2 лінійно незалежні на $\mathbb{R}$.

Побудуємо третій розв'язок y_3 – лінійно незалежний з розв'язками y_1, y_2. Для цього знизимо порядок рівняння за допомогою заміни $y = y_1 \int u\,dx$, де $u = u(x)$ – нова функція аргументу x. Дістанемо рівняння $u'' + \frac{3}{x}u' = 0$. Оскільки $y_2 = x^3$ є розв'язком вихідного рівняння, то $u = \left(\frac{y}{x^2}\right)' = 1$ – розв'язок перетвореного рівняння. Зручно застосувати формулу Абеля

$$u = \int e^{-\int \frac{3}{x}\,dx}dx + C_2 = \frac{C_1}{2x^2} + C_2.$$

А, отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3.$$

Дослідити на лінійну залежність функції в області їх визначення:

684. $y_1 = x$, $y_2 = 2x$, $y_3 = x^2$.

685. $y_1 = x^2$, $y_2 = x \cdot |x|$.

686. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \cos 2x$.

687. $y_1 = 5$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = \sin^2 x$.

688. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \cos(x+1)$, $y_3 = \cos(x-2)$.

689. $y_1 = x$, $y_2 = a^{\log_a x}$.

690. $y_1 = 1$, $y_2 = \arcsin x$, $y_3 = \arccos x$.

691. $y_1 = 2\pi$, $y_2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{2\pi}$, $y_3 = \operatorname{arcctg} \frac{x}{2\pi}$.

692. $y_1 = e^{-\frac{ax^2}{2}}$, $y_2 = e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot \int\limits_0^x e^{\frac{a\xi^2}{2}} d\xi$.

693. $y_1 = x$, $y_2 = x \int\limits_{x_0}^1 \frac{e^\xi}{\xi^2} d\xi$, $x_0 > 0$.

Користуючись визначником Грама, довести, що задані системи функцій лінійно залежні:

694. $y_1 = x$, $y_2 = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

695. $y_1 = 1$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = (\sin x - \cos x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

696. $y_1 = 3$, $y_2 = \sin^2 2x$, $y_3 = \cos^2 2x$.

Знайти визначник Вронського (вронскіан) для вказаних систем функцій:

697. $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$.

698. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$.

699. $y_1 = \arccos \frac{x}{\pi}$, $y_2 = \arcsin \frac{x}{\pi}$.

700. $y_1 = x$, $y_2 = \ln x$.

Показати, що задані функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно незалежні, а їх визначник Вронського дорівнює нулю:

701. $y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in [-1,0], \\ 0, & \text{якщо } x \in (0,1]; \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-1,0], \\ x^2, & \text{якщо } x \in (0,1]. \end{cases}$

702. $y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [0,2], \\ (x-2)^2, & \text{якщо } x \in (2,4]; \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{якщо } x \in [0,2], \\ 0, & \text{якщо } x \in (2,4]. \end{cases}$

703. $y_1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x \in [-2,0], \\ 0, & \text{якщо } x \in (0,1]; \end{cases}$

$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-2,0], \\ x^2, & \text{якщо } x \in (0,1]. \end{cases}$

704. Відомо, що для функцій $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ вронскіан дорівнює нулю в точці x_0 і відмінний від нуля в точці x_1. Чи можна судити про лінійну залежність (незалежність) цих функцій на відрізку $[x_0, x_1]$?

705. Визначник Вронського для функцій $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ дорівнює нулю для всіх $x \in I$. Чи можуть ці функції бути лінійно незалежними? Лінійно залежними? Навести приклади.

706. Що можна сказати про вронскіан функцій $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, якщо відомо, що:

а) функції лінійно залежні?

б) функції лінійно незалежні?

707. Функції $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ задовольняють рівняння $x^2y''-5xy'+5y = 0$. Чи є ці функції лінійно залежними при $x \in (-1,1)$? Відповідь аргументовано пояснити.

708. Дано чотири розв'язки рівняння $y''' + xy = 0$. Відомо, що графіки цих розв'язків дотикаються один до одного в одній точці. Скільки лінійно незалежних може бути серед цих розв'язків?

709. Довести, що якщо два розв'язки рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

з неперервними коефіцієнтами мають максимум при одному й тому самому значенні x, то вони лінійно залежні.

710. Якого порядку ЛОР може мати чотири розв'язки на інтервалі $(-1,1)$:

$$y_1 = x^2 - 2x + 2; \quad y_2 = (x-2)^2; \quad y_3 = x^2 + x - 1; \quad y_4 = 1 - x?$$

Знайти загальні розв'язки рівнянь, застосовуючи формулу Абеля або її узагальнення [10, завдання 2.63]:

711. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

712. $y''(\cos x + \sin x) - 2\cos xy' + (\cos x - \sin x)y = 0$, $y_1 = \cos x$.

713. $y''' + \frac{4x-3}{x(2x-1)}y'' - \frac{2}{x(2x-1)}y' + \frac{2}{x^2(2x-1)}y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$.

Рівняння **714, 715** мають розв'язки у вигляді многочлена. Знайти ФСР для цих рівнянь:

714. $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$.

715. $x^2(2\ln x - 1)y'' - x(2\ln x + 1)y' + 4y = 0$.

Скласти ЛОР якомога нижчого порядку, яке має такі розв'язки:

716. $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$.

717. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

718. $y_1 = 3x$, $y_2 = x - 2$, $y_3 = e^x + 1$.

719. $y_1 = x$, $y_2 = x^3$, $y_3 = |x^3|$.

720. $y_1 = x^2 - 3x$, $y_2 = 2x^2 + 9$, $y_3 = 2x + 3$.

§ 13. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ *n*-ГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1. Для розв'язання ЛОР зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{13.1}$$

де $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$, необхідно скласти характеристичне рівняння

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{13.2}$$

і знайти n його коренів над полем $\mathbb{C}$.

Структура ФСР рівняння (13.1), а отже, і його загальний розв'язок залежать від типу коренів рівняння (13.2):

1.1. Усі корені рівняння (13.2) дійсні та різні (кратні корені відсутні). Тоді ФСР рівняння (13.1) є:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}; \tag{13.3}$$

а його загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}. \tag{13.4}$$

1.2. Усі корені рівняння (13.2) різні, але серед них є комплексні. Так, нехай $\lambda_1 = a + ib$ – комплексний корінь характеристичного рівняння, тоді $\lambda_2 = a - ib$ також буде коренем цього рівняння, оскільки його коефіцієнти дійсні.

Цим двом комплексним кореням відповідають два комплексні лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (13.1) $y_1^{\mathbb{C}} = e^{\lambda_1 x}$, $y_2^{\mathbb{C}} = e^{\lambda_2 x}$, або два лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1^{\mathbb{R}} = e^{ax}\cos bx$, $y_2^{\mathbb{R}} = e^{ax}\sin bx$, які отримуються з $y_1^{\mathbb{C}}$, $y_2^{\mathbb{C}}$ за допомогою формул Ейлера.

Виписавши лінійно незалежні частинні розв'язки, що відповідають іншим спряженим парам комплексних коренів характеристичного рівняння, отримаємо ФСР рівняння (13.1).

Лінійна комбінація функції з ФСР з дійсними коефіцієнтами C_i $(i = \overline{1,n})$ дає загальний розв'язок рівняння (13.1). При цьому, кореню $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ у формулі загального розв'язку відповідатимуть доданки вигляду $e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$, а парі суто уявних коренів $\lambda_{1,2} = \pm ib$ рівняння (13.2) – сума $C_1 \cos bx + C_2 \sin bx$.

1.3. Серед коренів характеристичного рівняння є кратні. Нехай λ_1 – дійсний корінь рівняння(13.2) кратності k. Йому відповідають k лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\lambda_k x}$, які увійдуть до ФСР, а отже, у формулі загального розв'язку рівняння (13.1) кореню λ_1 відповідатиме блок

$$e^{\lambda_1 x}\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right).$$

Якщо ж $\lambda_1 = a + ib$ – комплексний корінь, кратність якого дорівнює k, то коренем тієї ж кратності для рівняння (13.2) буде також $\lambda_2 = a - ib$.

Парі $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ відповідають $2k$ дійснозначних лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (13.1) вигляду

$$\begin{aligned} &e^{ax}\cos bx, \quad xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx; \\ &e^{ax}\sin bx, \quad xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{aligned}$$

У формулі загального розв'язку рівняння (13.1) цій парі відповідає блок

$$e^{ax}\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)\cos bx + \\ + e^{ax}\left(C_{k+1} + C_{k+2}x + \ldots + C_{2k}x^{k-1}\right)\sin bx.$$

Отже, виписавши лінійно незалежні частинні розв'язки, що відповідають простим і кратним кореням (як дійсним, так і комплексним) характеристичного рівняння, отримаємо ФСР рівняння (13.1) і його загальний розв'язок.

2. Для знаходження загального розв'язку ЛНР досить, крім загального розв'язку відповідного ЛОР, знайти й частинний розв'язок ЛНР (див. §11).

Найчастіше для знаходження частинного розв'язку ЛНР

$$L[y] = f(x) \tag{13.5}$$

застосовують такі методи.

2.1. *Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)* використовується для довільної неперервної функції $f(x)$ і полягає в тому, що частинний розв'язок ЛНР (13.5) шукають у формі

$$\widetilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n, \tag{13.6}$$

де $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ – ФСР відповідного лінійного однорідного рівняння (13.1); $C_i(x)$ – невідомі функції, які можна знайти, розв'язавши систему

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0; \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = a_0^{-1}f(x) \end{cases} \tag{13.7}$$

відносно $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ і проінтегрувавши отримані диференціальні рівняння вигляду $\frac{dC_i}{dx} = \varphi(x)$, $i = \overline{1, n}$.

2.2. *Метод невизначених коефіцієнтів* (МНК) використовується лише тоді, коли $f(x)$ є квазімногочленом, тобто

$$f(x) = e^{\sigma x} P_m(x),$$

де $\sigma \in \mathbb{C}$, $P_m(x)$ – многочлен m-го степеня. Рівняння (13.5) розв'язують за формулою

$$y = x^s Q_m(x) e^{\sigma x}, \tag{13.8}$$

де $Q_m(x)$ – многочлен того самого порядку, що й $P_m(x)$, тільки з невизначеними коефіцієнтами; число $s = 0$, якщо σ не є коренем характеристичного рівняння (13.2); якщо σ – корінь рівняння (13.2), то s дорівнює його кратності.

Щоб знайти коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$, потрібно розв'язок (13.8) підставити у рівняння (13.5) і прирівняти коефіцієнти при подібних доданках лівої і правої частин.

Якщо права частина рівняння (13.5) є функцією спеціального вигляду, тобто

$$f(x) = e^{\alpha x} \left(P_m(x) \sin \beta x + K_l(x) \cos \beta x \right),$$

де $P_m(x)$, $K_l(x)$ – многочлени m-го і l-го степеню відповідно, то частинний розв'язок рівняння (13.5) шукаємо у вигляді

$$y = x^s e^{\alpha x} \left(R_k(x) \sin \beta x + Q_k(x) \cos \beta x \right), \tag{13.9}$$

де s дорівнює кратності комплексного числа $\alpha + i\beta$, як кореня характеристичного рівняння (якщо це число не є коренем рівняння (13.2), то $s=0$), $k=\max\{m,l\}$, $R_k(x)$ і $Q_k(x)$ – многочлени k-го порядку з невизначеними коефіцієнтами.

2.3. *Методом Коші* знаходять частинний розв'язок ЛНР (13.5) з нульовими початковими умовами

$$y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)=0,\quad x_0\in I.$$

Якщо в (13.5) $a_0\equiv 1$, $f(x)$ – довільна неперервна на I функція, то розв'язок ЛНР (13.5) можна шукати у вигляді

$$\widetilde{y}=\int\limits_{x_0}^{x}\mathrm{K}(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi, \tag{13.10}$$

де $x_0\in I$, $\mathrm{K}(x,\xi)$ – *функція Коші.* При кожному фіксованому значенні параметра $\xi\in I$ вона є розв'язком ЛОР $L[y]=0$ і задовольняє умови

$$\begin{aligned}&\mathrm{K}(x,\xi)\big|_{x=\xi}=\mathrm{K}'_x(x,\xi)\big|_{x=\xi}=\ldots=\mathrm{K}_x^{(n-2)}(x,\xi)\Big|_{x=\xi}=0,\\&\mathrm{K}_x^{(n-1)}(x,\xi)\Big|_{x=\xi}=1.\end{aligned} \tag{13.11}$$

Якщо $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ є ФСР ЛОР (13.1), то $\mathrm{K}(x,\xi)$ можна знайти у вигляді

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\sum_{i=1}^{n}C_i(\xi)\,y_i(x), \tag{13.12}$$

де $C_i(\xi)$, $i=\overline{1,n}$, підбираються так, щоб задовольнити умови (13.11).

2.3. *Принцип суперпозиції розв'язків* полягає в тому, що частинний розв'язок ЛНР $L[y]=\sum\limits_{i=1}^{m}f_i$ є сумою частинних розв'язків рівнянь $L[y_i]$, $i=\overline{1,m}$. Тобто $y=y_1+y_2+\ldots+y_m$, де $L[y_i]=f_i$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y^{(5)}+2y=0$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $\lambda^5+2=0$ знайдемо за *формулою Муавра*, тобто

$$\lambda_k=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\,\frac{\pi+2k\pi}{5}\right),\quad k=0,1,\ldots,4.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{5} + i\,\tfrac{\pi}{5}\right) && (k=0);\\
&\lambda_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{5} + i\,\tfrac{3\pi}{5}\right) && (k=1);\\
&\lambda_3 = -\sqrt[5]{2} && (k=2);\\
&\lambda_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{5} - i\,\tfrac{3\pi}{5}\right) && (k=3);\\
&\lambda_5 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{5} - i\,\tfrac{\pi}{5}\right) && (k=4).
\end{aligned}$$

Дійснозначну ФСР утворюють функції

$y_1 = e^{-\sqrt[5]{2}}$;

$y_2 = e^{\sqrt[5]{2}\,x\cos\frac{\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{\pi}{5}\right)$; $\quad y_3 = e^{\sqrt[5]{2}\cos\frac{\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

$y_4 = e^{\sqrt[5]{2}\,x\cos\frac{3\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{3\pi}{5}\right)$; $\quad y_5 = e^{\sqrt[5]{2}\cos\frac{3\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

Тому загальним розв'язком вихідного рівняння є

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_5y_5, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ має корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\overline{y} = C_1e^{0\cdot x} + (C_2x + C_3)e^{3x} = C_1 + (C_2x + C_3)e^{3x}, \quad C_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, 3).$$

Оскільки права частина рівняння є квазімногочленом, а $\sigma = 3$ є коренем характеристичного рівняння кратності $k = 2$, то частинний розв'язок y_1 неоднорідного рівняння знайдемо у вигляді (13.8), де $s = 2$, $m = 1$, $\sigma = 3$, тобто $\widetilde{y} = x^2(Ax + B)e^{3x}$.

Підставивши $\widetilde{y}$ до вихідного рівняння і порівнюючи відповідні коефіцієнти, дістанемо:

0	$\widetilde{y} = \left(Ax^3 + Bx^2\right)e^{3x}$;
$+9$	$\widetilde{y}' = \left(3Ax^3 + (3A + 3B)\,x^2 + 2Bx\right)e^{3x}$;
-6	$\widetilde{y}'' = \left(9Ax^3 + (18A + 9B)\,x^2 + (6A + 12B)\,x + 2B\right)e^{3x}$;

1	$\widetilde{y}''' = \big(27Ax^3 + (81A+27B)\,x^2 + (54A+54B)\,x +$ $+ (6A+18B)\big)\,e^{3x};$

x^3	$0=0;$
x^2	$0=0;$
x^1	$18A=1 \Rightarrow \quad A=\frac{1}{18}$
x^0	$6A+6B=0 \Rightarrow \quad A=-B.$

Таким чином, маємо $A=\frac{1}{18}$, $B=-\frac{1}{18}$. Отже, $\widetilde{y}=\frac{1}{18}x^2(x-1)e^{3x}$ – частинний розв'язок вихідного рівняння, а $y=\overline{y}+\widetilde{y}$ – його загальний розв'язок.

Приклад 3. Розв'язати рівняння, ліва частина якого збігається з лівою частиною рівняння прикладу 2, а права частина є сумою

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x.$$

Розв'язання. Дане рівняння легко інтегрується, якщо скористатися принципом суперпозиції розв'язків. Маємо $f_1 = xe^{3x}$, отже $y_1 = \frac{1}{18}x^2(x-1)e^{3x}$ (див. приклад 2). Для визначення частинного розв'язку для $f_2 = e^{3x}\cos 2x$ використаємо формулу (13.9). Оскільки $\sigma = 3+2i$ не є коренем характеристичного рівняння, тому в (13.9) $s=0,\ \alpha=3,\ \beta=2,\ k=0$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною $f_2(x)$ відповідно до (13.9) шукаємо у вигляді

$$y_2 = e^{3x}\left(C\cos 2x + D\sin 2x\right).$$

Підставивши $y=y_2$ у рівняння $y'''-6y''+9y' = e^{3x}\cos 2x$, знайдемо $C_1 = -\frac{3}{52}$, $D=-\frac{1}{26}$. Таким чином, маємо шуканий частинний розв'язок:

$$y_2 = e^{3x}\left(-\frac{3}{52}\cos 2x - \frac{1}{26}\sin 2x\right).$$

Загальний розв'язок відповідного ЛОР нам відомий (приклад 2): $\overline{y} = C_1 + (C_2x + C_3)e^{3x}$, отже, остаточно маємо загальний розв'язок вихідного рівняння $y = \overline{y} + y_1 + y_2$.

Розв'язати ЛОР:

721. $y'' - 2y = 0.$

722. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

723. $y'' - y' - 2y = 0.$

724. $y^{(n)} - y = 0.$

725. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$

726. $y^{(n)} + y = 0.$

727. $y'' + 4y = 0.$

728. $y^{(4)} - y = 0.$

729. $y''' - y = 0.$

730. $y^{(n)} + 64y = 0.$

731. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0.$

732. $y'' = 0.$

733. $y''' + 8y = 0.$

734. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

735. $y^{(4)} - y = 0.$

736. $4y'' + 4y' + y = 0.$

737. $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$

738. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$

Вказівка. У разі необхідності користуватися формулою Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi \pm 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi \pm 2\pi k}{n}\right),$$

де $\varphi = \arg z$, $\rho = |z|$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа):

739. $y'' + y = \operatorname{tg} x.$

740. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}.$

741. $y'' - y = \frac{1}{x}.$

742. $y'' + y = 2\sec^3 x.$

743. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$

744. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$

745. $y'' - y' = \frac{2-x^3}{x^3}e^x.$

746. $y'' + y' + 2y = \frac{1}{\sin x}.$

Розв'язати рівняння, шукаючи частинні розв'язки МНК:

747. $y'' - y' - 2y = 2e^x - x^2.$

748. $y'' + y' = 3.$

749. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$

750. $y'' - y = 4e^x.$

751. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x.$

752. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x.$

753. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x.$

754. $y''' - y'' = 1 - 3x.$

755. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

756. $y'' + 5y' + 6y = 3$.

757. $y'' + y = 4\sin x$.

758. $y'' + y = 4e^x$.

759. $y^{(4)} - y = 4e^x$.

Вказівка. Скористатися формулою Лейбніца для n-ї похідної від добутку:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}.$$

760. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$.

761. $y'' + y = 6\sin 2x$.

762. $y'' + 4y = \sin 2x$.

763. $y'' + y = \sin x \cdot \cos 3x$.

Написати вигляд частинного розв'язку рівняння, користуючись МНК (числових значень коефіцієнтів не шукати):

764. $y'' - y = xe^x \sin x$.

765. $y'' + y = x\cos x$.

766. $y'' + y' = e^{-x} + 2x - 1$.

767. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$.

768. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.

769. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.

770. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^x + 2e^{4x}\sin x$.

771. $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2$.

772. $y'' + 4y = \cos x \cdot \cos 3x$.

773. $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3\cos 2x$.

774. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$.

775. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x$.

776. $y'' + 4y = x^2 \sin^2 x$.

777. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(\sin x + x\cos x)$.

778. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$.

779. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$.

780. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.

781. $y'' + y' + ky = x$.

782. $y'' + ky = e^{ax}$.

Знайти розв'язки рівнянь, які задовольняють вказані початкові умови:

783. $y'' - 5y' + 4y = 0,\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

784. $y'' + y = 0,\qquad y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

785. $y'' - 2y' = 2e^x,\qquad y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$

786. $y'' + 2y = 0,\qquad y(3) = 0,\ y'(3) = 0.$

787. $y'' + 4y = \sin 2x,\qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

788. $y^{(4)} - 3y' - 2y = 9e^{2x},\qquad y(0) = -2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = y'''(0) = 0.$

789. При яких a, b усі розв'язки рівняння $y'' + ay' + by = 0$ прямують до нуля при $x \to +\infty$?

790. При яких a, b рівняння $y'' + ay' + by = 0$ має хоча б один розв'язок $y(x) \not\equiv 0$, який прямує до нуля при $x \to +\infty$?

791. При яких a, b кожен розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$, крім розв'язку $y(x) \equiv 0$, монотонно зростає за абсолютним значенням, починаючи з деякого x?

792. При яких a, b кожен розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ перетворюється в нуль на нескінченній множині точок x?

793. При яких k і ω рівняння $y'' + k^2 y = \sin \omega t$ має хоча б один періодичний розв'язок?

794. Знайти періодичний розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = \sin \omega t$.

795. Частинка рухається в силовому полі прямолінійно вздовж осі Ox, відштовхуючись від точки $x = 0$ з силою $3mr_0$ і притягуючись до точки $x = 1$ з силою $4mr_1$, де r_0 та r_1 – відстані до цих точок. Описати закон зміни координати цієї точки в часі, якщо в початковий момент $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

796. Послідовно з'єднані індуктивність L, опір R і конденсатор ємності C, заряд якого в початковий момент часу $t = 0$ дорівнює q. Ланцюг замикається при $t = 0$. Знайти силу струму й частоту коливань у припущенні, що розряд має коливний характер.

797. Опір R та конденсатор ємністю C з'єднані послідовно. При $t = 0$ заряд конденсатора дорівнює q. Знайти силу струму при $t > 0$, якщо ланцюг замкнули при $t = 0$.

798. Джерело струму, напруга якого змінюється згідно із законом $E = V \sin \omega t$, а опір R та індуктивність L з'єднані послідовно. Знайти силу струму при усталеному режимі.

В завданнях **799–800** вважати, що при відхиленні вантажу від положення рівноваги на відстань x на нього діє пружина з силою kx, що спрямована до положення рівноваги.

799. Знайти період вільних коливань маси m, підвішеної на пружині, якщо рух відбувається за умови відсутності опору.

800. Один кінець пружини закріплений нерухомо, а до другого кінця прикріплений вантаж масою m. Під час руху вантажу зі швидкістю v сила опору дорівнює hv. В початковий момент часу $t = 0$ вантаж, що перебував у положенні рівноваги в стані спокою, штовхають зі швидкістю v_0. Дослідити рух вантажу при $h^2 < 4km$ і $h^2 > 4km$.

§ 14. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЗВІДНІ ДО ЛІНІЙНИХ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Згідно з твердженням § 11 для деяких лінійних рівнянь, які не мають сталих коефіцієнтів, можлива заміна незалежної змінної типу (11.5), яка зводить ці рівняння до лінійних зі сталими коефіцієнтами. Цю процедуру можна застосувати до багатьох лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, почасти й до рівнянь наступних типів:

I. *Рівняння Ейлера*

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \tag{14.1}$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n = \mathrm{const}$. Заміна типу (11.5) для рівняння Ейлера набуває вигляду

$$\begin{aligned} x &= e^t, && \text{якщо } x > 0; \\ x &= -e^t, && \text{якщо } x < 0. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Немає потреби застосовувати (14.2) безпосередньо. Досить виходити з того, що розв'язки рівняння Ейлера можна шукати у формі $y = x^\lambda$, де значення параметра λ шукають як розв'язок характеристичного рівняння (виписується за рівнянням (14.1)):

$$\begin{aligned} &a_0\lambda\underbrace{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)}_{n\text{ співмножників}}+\\ &+a_1\lambda\underbrace{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+2)}_{(n-1)\text{ співмножників}}+\ldots+a_n=0. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Записавши рівняння (14.3) у формі

$$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{14.3*}$$

легко можна отримати те лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, до якого зведеться рівняння (14.1) внаслідок застосування заміни (14.2):

$$b_0\,\frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n y = f(e^t). \tag{14.4}$$

II. *Рівняння Лежандра*

$$p_0(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(ax+b)y' + p_n y = 0 \tag{14.5}$$

заміною

$$ax + b = e^t \quad (\text{або } ax + b = -e^t) \tag{14.6}$$

зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

III. *Рівняння Чебишова*

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \tag{14.7}$$

де $n = \mathrm{const}$, заміною $x = \cos t$ при $|x| < 1$ зводиться до рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3} = \sqrt{x}.$$

Розв'язання. Рівняння визначене при $x > 0$. Домноживши його на x^3, дістанемо рівняння Ейлера

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x\sqrt[3]{x},$$

для якого легко виписується відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6 = 0 \quad \text{або} \quad (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6) = 0.$$

Розв'язками характеристичного рівняння є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Отже, заміною $x = e^t$ задане рівняння зводиться до ЛНР зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{\frac{7}{2t}}.$$

Частинний розв'язок цього рівняння знайдемо за МНК. Контрольне число $\sigma = \frac{7}{2}$ не є коренем характеристичного рівняння, тому $y = Ae^{\frac{7}{2t}}$. Після підставляння цього виразу до рівняння, отримаємо $A = \frac{8}{15}$.

За коренями характеристичного рівняння та частинним розв'язком можна записати загальний розв'язок перетвореного рівняння

$$y = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} + \frac{8}{15}\,e^{\frac{7}{2t}}.$$

З огляду на те, що $x = e^t$, дістанемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \frac{8}{15}\,x^{\frac{7}{2}}.$$

801. Знайти всі рівняння вигляду $y'' + q(x)y = 0$, які можна звести до ЛОР зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни незалежної змінної.

802. Знайти всі рівняння вигляду $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, які можна звести до ЛОР зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни незалежної змінної. Довести, що знайдена умова виконується для рівнянь Ейлера та Чебишова.

Розв'язати рівняння, звівши їх до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

803. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

804. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0.$

805. $x^2y'' + xy' - y = 0.$

806. $xy'' + y' = 0.$

807. $x^3y''' + xy' - y = 0.$

808. $x^2y''' - 2y' = 0.$

809. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$

810. $2(2x+1)^2y'' - (2x+1)y' + 2y = 0.$

811. $(x^2+1)^2y'' + 3(x+1)y' + y = 0.$

812. $(x^2+1)^3y''' - 3(x+1)^2y'' + 4(x+1)y' - 4y = 0.$

813. $(x+2)^2y'' - 4(x+2)y' + 6y = 0.$

814. $y'' + \frac{2xy'}{1+x^2} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0.$

815. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x.$

816. $(x+1)^3y''' + 9(x+1)^2y'' + 18(x+1)y' + 6y = \ln(1+x).$

817. $x^4y^{(4)} - 6x^3y''' - 5x^2y'' - xy' + y = x^2.$

818. $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^3.$

819. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4.$

820. $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4.$

821. $x^2y'' - xy' + y = 6x\ln x.$

822. $x^2y'' - xy' = -x + \frac{3}{x}.$

823. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x).$

824. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$

825. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x.$

826. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x.$

827. $x^2y'' - 6xy = 5x^3 + 8x^2.$

828. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$

829. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$

830. $x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}.$

831. $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln}{x} + \frac{x}{\ln x}.$

Глава 3
ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§ 15. СПЕЦІАЛЬНІ ФОРМИ ТА ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ

1. Канонічною формою рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{15.1}$$

є диференціальне рівняння

$$z'' + I(x)\,z = 0. \tag{15.2}$$

Перехід від (15.1) до (15.2) можна здійснити двома способами:

I. Заміною шуканої функції $y = \alpha(x)z$, підбираючи $\alpha(x)$ так, щоб знищити доданки з першою похідною, тобто поклавши

$$y = z\,\exp\left(-\int \frac{p(x)}{2}\,dx\right). \tag{15.3}$$

Тоді *інваріант* рівняння (15.1) є функцією $I(x)$ і має вигляд

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x). \tag{15.4}$$

Якщо $I(x) = \mathrm{const}$ або $I = C(x-a)^2$, де C, $a = \mathrm{const}$, то перетворене рівняння інтегрується в квадратурах.

II. Заміною незалежної змінної

$$t = \int e^{-\int p(x)\,dx} dx. \tag{15.5}$$

2. Самоспряженою формою ЛОР другого порядку є диференціальне рівняння

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x) = 0. \tag{15.6}$$

Будь-яке рівняння загального вигляду

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

після множення його на функцію $m(x)$

$$m(x) = \frac{1}{p_0(x)} \exp\left(\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, dx\right) \tag{15.7}$$

набуває вигляду (15.6).

Зауважимо, що перехід від (15.1) до (15.2) заміною незалежної змінної може відбуватися у два прийоми: спочатку (15.1) зводиться до самоспряженої форми, а вже потім здійснюється заміна (15.5), яка стає при цьому очевидною.

3. Порядок ЛОР (15.1) можна знизити до першого заміною

$$y' = zy, \tag{15.8}$$

де $z = z(x)$ – нова функція; але в цьому випадку втрачається лінійність. В результаті дістанемо рівняння Ейлера-Ріккаті

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x). \tag{15.9}$$

4. Перехід від рівняння (15.9) до ЛОР другого порядку здійснюється заміною

$$y = -\frac{1}{a(x)} \cdot \frac{u'}{u}, \tag{15.10}$$

де $u = u(x)$.

Якщо відомий частинний розв'язок y_1 рівняння (15.1), то загальний розв'язок можна знайти за допомогою формули Абеля (12.9).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' - 2xy + x^2y = 0$, звівши його до канонічної форми.

Розв'язання. Покладемо $y = z\exp\left(\int \frac{2x}{2}\, dx\right) = z\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$, тоді $I(x) = 1$.

Дістанемо $z'' + z = 0$. Отже, $z = C_1\cos x + C_2\sin x$ є загальним розв'язком отриманого рівняння, а $y = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)[C_1\cos x + C_2\sin x]$ – загальним розв'язком заданого рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$ $(x > 0)$, звівши його до самоспряженої форми.

Розв'язання. Домножимо задане рівняння на функцію (15.7) $m(x) = \frac{1}{x}\exp\left(\int \frac{dx}{2x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Дістанемо $\left(\sqrt{x}y'\right)' - \frac{1}{\sqrt{x}}\,y = 0$. Знищимо доданок з першою похідною, застосувавши заміну (15.5):

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x};$$
$$y''_{tt} - y = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння: $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Отже, $y = C_1e^{2\sqrt{x}} + C_2e^{-2\sqrt{x}}$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2\,(\ln x - 1)\,y'' - xy' + y = 0,$$

якщо $y_1 = x$ – його частинний розв'язок.

Розв'язання. Застосовуючи формулу Абеля, дістанемо

$$y = C_1x\int \frac{\exp\left(\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}\right)}{x^2}\,dx + C_2x = C_1\ln x + C_2x.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що задане рівняння має форму повних похідних:

$$\left(-\frac{2}{x}\right)' = \frac{2}{x^2}, \quad \text{а отже,} \quad \left(y' - \frac{2}{x}\,y\right)' = 2.$$

Тому $y' - \frac{2}{x}y = 2x + C_1$. Інтегруючи отримане рівняння, знайдемо $y = x^2\ln x^2 + C_1x + C_2x^2$ – загальний розв'язок рівняння вихідного рівняння.

Звести рівняння до самоспряженого вигляду:

832. $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0.$

833. $x^2y'' + 2x^2y' + (x^2 - 2)y = 0.$

834. $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ (*рівняння Бесселя*).

835. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0.$

836. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ (*рівняння Чебишова*).

837. $xy''+(1-x)y'+ny=0$ (*рівняння Лагерра*).

838. $y''-2xy'+2ny=0$ (*рівняння Чебишова–Ерміта*).

839. $x(x-1)y''+(-\gamma+(1+\alpha+\beta)\,x)\,y'+\alpha\beta\,y=0$
(*рівняння Гаусса*).

Звести рівняння до канонічного вигляду. Знайти їх інваріанти. Чи можна проінтегрувати задане рівняння в квадратурах?

840. $(x^2+1)y''+5xy'+4y=0.$

841. $(4x^2-x)y''+2(2x-1)y'-4y=0.$

842. $y''+\frac{2}{x}\,y'+y=0.$

843. $x(x-1)y''+(1+x)y'-y=0.$

844. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0.$

845. $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$

Знайти загальний розв'язок рівняння, користуючись частинним розв'язком:

846. $y''+\frac{2}{x}\,y'+y=0;\quad y_1=\frac{\sin x}{x}.$

847. $(\sin x-\cos x)y''-2\sin x\;y'+(\cos x+\sin x)y=0;\quad y_1=e^x.$

848. $(\cos x+\sin x)y''-2\cos x\;y'+(\cos x-\sin x)y=0;\quad y_1=\cos x.$

849. $(1-x^2)y''-xy'+\frac{1}{4}=0;\quad y_1=\sqrt{1+x}.$

850. $y''+2xy'-2y=0$ (частинний розв'язок підібрати).

Знайти частинний розв'язок у вигляді многочлена та розв'язати рівняння:

851. $(x-1)y''-(x+1)y'+2y=0.$

852. $(x^2-3x)y''+(6-x^2)y'+(3x-6)y=0.$

853. $(x^2-1)y''=6y.$

854. $x^2y''+4xy'+2y=0.$

855. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + (1-x)y' + y = 1$, якщо відомі два його частинні розв'язки $y_1 = 1$; $y_2 = x$.

§ 16. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ. РІВНЯННЯ БЕССЕЛЯ ТА ГАУССА (ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНЕ)

1. Якщо коефіцієнти рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{16.1}$$

є аналітичними функціями на інтервалі $I = \{x : \ |x - x_0| < a\}$, тобто розкладаються в степеневі ряди

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k,$$

збіжні на I, то рівняння (16.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1. \tag{16.2}$$

Цей розв'язок можна подати у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k. \tag{16.3}$$

Ряд (16.3) є збіжним на I.

Якщо y_0, y_0^1 задані, то коефіцієнти ряду (16.3) визначаються однозначно підставлянням (16.3) в (16.1) (*метод невизначених коефіцієнтів*).

Для побудови загального розв'язку рівняння (16.1) найчастіше будують ФСР $\{y_1, y_2\}$, нормовану в точці x_0, тобто $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$.

Якщо розв'язок y_1 виражений через елементарні функції, відомий, то другий розв'язок можна знайти за допомогою формули Абеля

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left[-\int p(x)\,dx\right]}{y_1^2}\,dx. \tag{16.4}$$

2. Якщо в рівнянні (16.1) функції $p(x)$ та $q(x)$ раціональні, тобто

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad q(x) = \frac{q_1(x)}{q_0(x)},$$

де $p_0(x)$, $p_1(x)$, $q_0(x)$, $q_1(x)$ – многочлени, то точки, в яких $p_0(x) = 0$ або $q_0(x) = 0$, називаються *особливими точками* для рівняння (16.1).

В околі особливої точки розв'язку у вигляді степеневого ряду може не існувати. У цьому разі розв'язок рівняння (16.1) знаходимо у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = (x - x_0)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k \quad (C_0 \neq 0)\,, \tag{16.5}$$

збіжного на інтервалі $|x - x_0| < R$, де R – деяке додатне число. Якщо коефіцієнти рівняння (16.1) в околі особливої точки x_0 можна подати як

$$p(x) = \frac{1}{x - x_0} \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \tag{16.6}$$

де $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ і ряди в чисельниках збігаються на інтервалі $|x - x_0| < R$, то рівняння (16.1) має принаймні один розв'язок вигляду (16.5), який є збіжним на вказаному інтервалі.

Точка x_0 з вказаною особливістю називається *регулярною особливою точкою*. Так, для рівняння

$$y'' + \frac{m(x)}{x} y' + \frac{n(x)}{x^2} y = 0, \tag{16.7}$$

де $m(x)$ і $n(x)$ – аналітичні функції при $|x| < a$, а точка $x_0 = 0$ є регулярною особливою точкою, якщо хоча б один з коефіцієнтів $m_0(x)$

чи $n_0(x)$ розкладання цих функцій у ряд за степенями x не тотожній нулю.

Для відшукання показника λ і коефіцієнтів C_k співвідношення (16.5) слід підставити в рівняння (16.1), скоротити на $(x-x_0)^\lambda$ і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях $(x-x_0)$. При цьому число λ знаходять з так званого *визначального рівняння*

$$\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0=0, \tag{16.8}$$

де

$$p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x), \quad q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x). \tag{16.9}$$

У разі, коли λ_1, λ_2 (корені визначального рівняння (16.8)) різні, то рівняння (16.1) завжди має розв'язок вигляду (16.5), де λ – корінь, який має більшу дійсну частину. Так, якщо λ_1 – такий корінь, то розв'язок має вигляд

$$y_1=(x-x_0)^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty}C_k^1(x-x_0)^k \quad \left(C_0^1\neq 0\right). \tag{16.10}$$

Якщо різниця $\lambda_1-\lambda_2$ не є цілим додатним числом, то існує також другий розв'язок рівняння (16.1), що задається узагальненим степеневим рядом

$$y_2=(x-x_0)^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty}C_k^2(x-x_0)^k \quad \left(C_0^2\neq 0\right). \tag{16.11}$$

Якщо ж $\lambda_1-\lambda_2$ – ціле додатне число, то частинний розв'язок має вигляд або (16.11), або є сумою узагальненого степеневого ряду й добутку деякого узагальненого степеневого ряду на $\ln(x-x_0)$:

$$y_2=(x-x_0)^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty}C_k^2(x-x_0)^k+Ay_1\ln(x-x_0), \tag{16.12}$$

де A – число, що може дорівнювати нулю.

Нарешті, якщо $\lambda_1 = \lambda_2$, то існує лише один розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду (16.10), а другий розв'язок обов'язково містить $\ln(x - x_0)$. Його слід шукати у вигляді

$$y_2 = (x - x_0)^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 (x - x_0)^k + B y_1 \ln(x - x_0), \tag{16.13}$$

де $B \neq 0$.

Використання формул (16.12) і (16.13) для рівняння (16.1) не завжди зручне. Тому у разі, якщо $\lambda_1 - \lambda_2$ – ціле число або 0, можна знайти один розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду (16.10); підсумувавши ряд, використати формулу Абеля (16.4), адже y_1 виражається через елементарні функції. Якщо суму ряду (16.10) не вдається знайти в елементарних функціях, застосовують формули (16.12) чи (16.13).

Приклад 1. Для рівняння $y'' + xy' + y = 0$ знайти ФСР $\{y_1, y_2\}$, нормовану в точці $x_0 = 0$, у вигляді рядів за степенями x.

Розв'язання. Коефіцієнти $p(x) = x$ та $q(x) = 1$ є аналітичними функціями для всіх x, отже, розв'язки цього рівняння можна знайти у вигляді степеневих рядів $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k x^k$. Отримані ряди будуть збіжними для всіх x. Для отримання ФСР, нормованої в нулі, для одного розв'язку будемо вимагати, щоб $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, а для другого навпаки, $C_0 = 0$, $C_1 = 1$. Матимемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1) x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} C_k k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0,$$

або

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_k x^k + \ldots;$$
$$y' = C_1 + 2C_2 x + \ldots + kC_k x^{k-1} + \ldots;$$
$$y'' = 2C_2 + \ldots + k(k-1) C_k x^{k-2} + \ldots.$$

Отже, якщо коефіцієнти при послідовних степенях x прирівняти до нуля, дістанемо

$$\begin{array}{c|l} x_0 & C_0 + 2C_2 = 0, \\ x^1 & 2C_1 + 6C_3 = 0, \\ .. & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^k & (k+1)(k+2)C_k + (k+1)C_k = 0. \end{array}$$

Для розв'язку y_1 маємо $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $C_{2m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2m)}$, $(m = = 1, 2, \dots)$. Коефіцієнти $C_{2m+1} = 0$. Тому

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m)} = \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

Для розв'язку y_2 маємо $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_{2m} = 0$ $(m = 1, 2, \dots)$;

$$C_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)},$$

тому

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)}.$$

Останній ряд через елементарні функції не виражається. Загальним розв'язком вихідного рівняння буде $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 – деякі довільні сталі.

Приклад 2. Знайти нормовану в точці x_0 ФСР для рівняння $(1 - x^2)y'' - xy' - y = 0$ у вигляді рядів за степенями x.

Розв'язання. Перш за все переконаємося, що рівняння має розв'язки у вигляді степеневих чи узагальнених степеневих рядів:

$$y'' - \frac{x}{1 - x^2}\, y' - \frac{1}{1 - x^2}\, y = 0.$$

Точки $x = \pm 1$ є особливими для цього рівняння. Але інтервал $(-1, 1)$ не містить більше особливих точок. На ньому коефіцієнти

$$p(x) = -\frac{x}{1 - x^2}, \quad q(x) = -\frac{1}{1 - x^2}$$

є аналітичними функціями. Тому вихідне рівняння має розв'язки, які задаються степеневими рядами. Крім того, ці ряди є збіжними при $|x| < 1$.

Знайдемо $y_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k y^k$. Підставляючи цей ряд у рівняння, отримаємо

$$y_1' = \sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^{k-1} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + kC_k x^{k-1} + \ldots\,;$$
$$y_1'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^{k-2} = 2C_2 + 6C_3 x + \ldots + k(k-1)C_k x^{k-2} + \ldots\,.$$

Прирівнюємо до нуля коефіцієнти при послідовних степенях x:

$$\begin{array}{c|l|l} x^0 & -1 + 2C_2 = 0, & C_2 = \frac{1}{2}, \\ x^1 & 3 \cdot 2C_2 = 0, & C_3 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x^k & -C_k - kC_k + (k+1)(k+2)C_{k+2} - k(k-1)C_k = 0; & \end{array}$$

$$C_{k+2} = \tfrac{1+k^2}{(k+1)(k+2)}\, C_k, \quad k \geq 2; \qquad C_5 = C_7 = \cdots = C_{2m+1} = 0,$$

$$C_4 = \tfrac{1+2^2}{3\cdot 4}, \quad C_6 = \tfrac{\left(1+2^2\right)\left(1+4^2\right)}{6!}, \ldots\,.$$

Таким чином,

$$y_1 = 1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1+2^2}{4!}x^4 + \ldots + \tfrac{\left(1+2^2\right)\left(1+4^2\right)\ldots\left(1+(2m-2)^2\right)}{(2m)!}x^{2m} + \ldots\,.$$

Оскільки для y_1: $C_1 = 0$, $C_0 = 1$, то для y_2 вимагатимемо, щоб $C_1 = 1$, $C_0 = 0$, тобто будемо шукати y_2 відразу у вигляді $y_2 = x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots$. Підставляючи y_2 у рівняння, аналогічно знаходимо C_k. Дістанемо

$$y_2 = x + \tfrac{2}{3!}\, x^3 + \tfrac{2\left(1+3^2\right)}{5!}\, x^5 + \ldots + \tfrac{2\left(1+3^2\right)\ldots\left(1+(2m-1)^2\right)}{(2m+1)!}\, x^{2m+1} + \ldots\,.$$

Знайдені ряди є збіжними (радіус збіжності $r < 1$), а функції y_1 і y_2 утворюють ФСР вихідного рівняння і, оскільки

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0;$$
$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1,$$

то знайдена ФСР є нормованою в нулі. Загальний розв'язок вихідного рівняння можна подати у вигляді $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

3. *Рівняння Бесселя* – це рівняння вигляду

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0. \tag{16.14}$$

Точка $x_0 = 0$ є регулярною особливою точкою рівняння (16.14), а визначальне рівняння має вигляд

$$\rho(\rho-1) + \rho - n^2 = 0 \quad \text{або} \quad \rho^2 - n^2 = 0,$$

розв'язками якого є $\rho_{1,2} = \pm n$, різниця яких дорівнює $\rho_1 - \rho_2 = 2n$. Отже:

1) якщо $2n$ не ціле додатне число, то рівняння (16.14) має два розв'язки, які задаються узагальненими степеневими рядами вигляду (16.10), (16.11);

2) якщо ж $2n$ – ціле додатне число, то можна гарантувати існування лише одного частинного розв'язку рівняння Бесселя, який задається узагальненим степеневим рядом. Цей розв'язок породжується більшим з коренів визначального рівняння. Існування другого частинного розв'язку у вигляді узагальненого степеневого ряду вимагає додаткового дослідження. У цьому разі шукають розв'язок у формі (16.12). Якщо в (16.12) A дорівнюватиме нулю, то другий розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду гарантовано існує, а якщо A не дорівнює нулю, то другий розв'язок обов'язково містить $\ln x$;

3) якщо $n = 0$, то існує лише один розв'язок, що виражається узагальненим степеневим рядом.

Таким чином, рівняння Бесселя завжди має принаймні один розв'язок, який виражається узагальненим степеневим рядом. Коефіцієнти ряду легко знайти, користуючись МНК. Дістанемо

$$y = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{C_0}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \, x^{2k}. \tag{16.15}$$

Ряд (16.15) є збіжним при всіх значеннях x, а отже, задає розв'язок рівняння Бесселя при довільному виборі коефіцієнта C_0. Тому зручно вибирати C_0 таким чином, щоб коефіцієнти ряду (16.15) набували якомога простішого вигляду. Цього можна досягти, якщо покласти

$$C_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}, \tag{16.16}$$

де $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ – *гамма-функція* $(\alpha > 0)$.

Використовуючи відому властивість гамма-функції

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \tag{16.17}$$

легко порахувати рекурентно коефіцієнти C_k, $k = 1, 2, \ldots$. Дістанемо перший розв'язок рівняння Бесселя:

$$y_1 = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k}. \tag{16.18}$$

Функція $J_n(x)$ *називається функцією Бесселя першого роду* n*-го порядку*. Так, перший розв'язок рівняння прикладу 3: $y_1 = J_n(x)$ дістанемо з (16.18) при $n = 0$, оскільки $\Gamma(k+1) = k!$. Якщо n не є цілим числом, то існує й другий частинний розв'язок рівняння Бесселя, що є сумою узагальненого степеневого ряду

$$y_2 = J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+k}. \tag{16.19}$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Бесселя у випадку $n \notin \mathbb{Z}$ можна подати у вигляді

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x). \tag{16.20}$$

Якщо ж n – ціле додатне число, то (16.19) є розв'язком рівняння (16.14), але співвідношення (16.20) вже не буде загальним розв'язком цього рівняння, оскільки функції $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$ в цьому випадку лінійно залежні: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Отже, другий розв'язок, лінійно незалежний з першим, обов'язково міститиме $\ln x$. Його слід шукати у вигляді (16.13), тобто

$$y_2 = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k + B J_n(x) \ln x. \tag{16.21}$$

Зручно покласти $B = 2$.

Зазначимо, що функції Бесселя $J_n(x)$, де n дорівнює половині непарного числа, можна виразити через елементарні функції, знайшовши коефіцієнти відповідних степеневих рядів та підсумувавши останні. При цьому користуються такими властивостями гамма-функції:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha);$$

звідки випливає

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+1\right) &= \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2};\\
\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+k\right) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k}\cdot\sqrt{\pi};\\
\Gamma\left(\tfrac{3}{2}+k\right) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2^{k+1}}\cdot\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{9x^2}\right)y = 0. \qquad (16.22)$$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бесселя. Справді, його можна подати у вигляді:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{9}\right)y = 0; \quad n^2 = \tfrac{1}{9} \Rightarrow n_{1,2} = \pm\tfrac{1}{3}.$$

Оскільки $n \notin \mathbb{Z}$, то рівняння (16.22) має два лінійно незалежних розв'язки, які виражаються узагальненими степеневими рядами $J_{\frac{1}{3}}(x)$ та $J_{-\frac{1}{3}}(x)$. Загальним розв'язком рівняння буде

$$y = C_1 J_{\frac{1}{3}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{3}}(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $xy'' + y' + xy = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння має розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду, оскільки воно є рівнянням Бесселя. Дійсно, доможивши на x, дістанемо

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Для даного рівняння Бесселя $n = 0$, тому ми одразу можемо сказати, що існує лише тільки один розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду. Останній, крім того, перетворюється на звичайний степеневий ряд

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k y^k \quad (C_0 \neq 0).$$

Користуючись методом невизначених коефіцієнтів, знайдемо C_k (покладемо $C_0 = 1$). Дістанемо

$$C_{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}, \quad C_{2k+1} = 0,\, k \geq 1.$$

Таким чином, вихідне рівняння має розв'язок

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = J_0(x),$$

де $J_0(x)$ – *функція Бесселя першого роду нульового порядку.*

Другий частинний розв'язок обов'язково містить $\ln x$ і його слід шукати у вигляді (16.13), тобто

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k + B J_0(x) \ln x, \quad B \neq 0.$$

Використовуючи МНК, поклавши при цьому $B = 1$ (для визначеності), дістанемо

$$y_2 = K_0(x) = J_0(x) \ln x + \tfrac{x^2}{2^2} - \tfrac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) - \ldots \ .$$

Отримана функція $K_0(x)$ називається *функцією Бесселя другого роду нульового порядку.*

Остаточно маємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. *Гіпергеометричним рівнянням (рівнянням Гаусса)* називається рівняння

$$x(x-1)y'' + (-\gamma + (1+\alpha+\beta)x)\,y' + \alpha\beta\,y = 0, \qquad (16.23)$$

де α, β, γ – дійсні сталі.

Це рівняння має дві особливі точки 0 і 1. Проте, якщо $\frac{1}{x-1} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ при $|x| < 1$, рівняння (16.23) в околі точки $x_0 = 0$ можна подати у вигляді

$$y'' + \frac{-\gamma+(1+\alpha+\beta)x}{x(x-1)}\,y' - \frac{\alpha\beta}{x(x-1)}\,y = 0,$$

або

$$y'' + \frac{(\gamma-(1+\alpha+\beta)x)\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k}{x}\,y' - \frac{\alpha\beta\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+1}}{x^2}\,y = 0. \qquad (16.24)$$

Рівняння (16.24) збігається з (16.7), якщо покласти

$$m(x) = (\gamma - (1+\alpha+\beta)x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad n(x) = -\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}.$$

Тому визначальне рівняння для (16.24) набуває вигляду

$$\lambda(\lambda-1) + \gamma\lambda = 0, \qquad (16.25)$$

корені якого $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1-\gamma$, а їх різниця $\lambda_1 - \lambda_2 = \gamma - 1$ (або $\lambda_2 - \lambda_1 = 1 - \gamma$). Отже, якщо γ не є цілим додатним числом або нулем, то в околі особливої точки $x_0 = 0$ можна побудувати два лінійно незалежних розв'язки у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^1 x^k, \quad y_2 = x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 x^k. \qquad (16.26)$$

Визначаючи коефіцієнти C_k^1, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ за МНК, знаходимо

$$\begin{aligned} &y_1 = F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots[\alpha+(k-1)]\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots[\beta+(k-1)]}{k!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots[\gamma+(k-1)]}\,x^k. \end{aligned} \qquad (16.27)$$

У (16.27) ряд, розташований поруч, називається *гіпергеометричним*, оскільки при $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ він перетворюється на суму геометричної прогресії

$$F(1, \beta, \beta; x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \frac{1}{1-x}. \qquad (16.28)$$

Із збіжності ряду (16.28) при $|x| < 1$ випливає збіжність ряду (16.27) на тому самому інтервалі.

Другий частинний розв'язок (16.26) знаходять, здійснюючи в рівнянні Гаусса (16.23) заміну шуканої функції

$$y = x^{1-\gamma} z, \qquad (16.29)$$

де $z = z(x)$. Дістанемо рівняння Гаусса, в якому роль параметрів α, β, γ відіграють відповідно $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$, $2 - \gamma$:

$$\begin{aligned} &x(x-1)z'' + \left[-(2-\gamma) + (1 + \alpha + 1 - \gamma + \beta + 1 - \gamma)\right] z' + \\ &+ (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma) z = 0. \end{aligned} \qquad (16.30)$$

Побудувавши z_1 – частинний розв'язок рівняння (16.30), який відповідає нульовому кореню визначального рівняння, та підставивши його в (16.29), отримаємо

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x). \qquad (16.31)$$

Знайдені функції (16.27), (16.31) утворюють ФСР гіпергеометричного рівняння у разі, коли γ не є цілим числом чи нулем. Якщо ж γ – ціле число або нуль, то перший частинний розв'язок (16.27) має сенс, а другий може містити $\ln x$ і його треба шукати у вигляді (16.12).

Рівняння Гаусса та Бесселя добре вивчені, і тому часто рівняння інших типів зводять до них. Наприклад, *рівняння Лежандра*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \qquad (16.32)$$

яке має дві регулярні особливі точки $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, заміною $x = 1 - 2t$ зводиться до рівняння Гаусса, при цьому особливі точки $\{1, -1\}$ переходять в особливі точки рівняння Гаусса $\{0, 1\}$, а

$\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$. Отже, визначальним є рівняння $\lambda(\lambda-1)+\lambda = 0$ з коренями $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і першим частинним розв'язком рівняння (16.32) в околі точки $x_0 = 1$ (оскільки саме вона переходить в точку 0)

$$y_1 = F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{16.33}$$

Якщо ж n – ціле додатне число, то ряд (16.33) обривається на n-му доданку. Тому розв'язок (16.33) є многочленом n-го порядку

$$p_n(x) = F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right), \tag{16.34}$$

де n – ціле додатне число. Поліном (16.34) називається *поліномом Лежандра n-го порядку.*

Можна інтегрувати рівняння (16.32) безпосередньо й не зводити його до гіпергеометричного. Наприклад, для регулярної особливої точки $x_0 = 1$ визначальним рівнянням є рівняння $\lambda(\lambda-1)+\lambda = 0$, його корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тому один розв'язок в околі цієї точки буде звичайним степеневим рядом за степенями різниці $(x-1)$, а другий розв'язок обов'язково містить $\ln(x-1)$. Аналогічні результати мають місце для особливої точки $x_0 = -1$.

Знайти ФСР у вигляді рядів за степенями x, нормовану в точці $x = 0$:

856. $y'' = xy$.

857. $y'' + xy' - (2x^2+1)y = 0$.

858. $y'' + x^2 y = 0$.

859. $y'' + \frac{1}{1-x}y = 0$.

Знайти два лінійно незалежних частинних розв'язки рівнянь в околі особливої точки $x_0 = 0$ у вигляді узагальнених степеневих рядів, або рядів що містять додатково $\ln x$:

860. $x(x-1)y'' + (3x-2)y' + y = 0$.

861. $x(x-1)y'' + (2x-2)y' - 2y = 0$.

862. $x(x-1)y'' + (x+1)y' - y = 0$.

863. $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$.

864. $x^2y'' - (3x + x^2)y' + 4y = 0.$

865. $x(x-1)^2y'' + x(x-1)y' - y = 0.$

866. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$

867. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$

Знайти у вигляді ряду за степенями x один частинний розв'язок, який задовольняє поставлені початкові умови. Знайти суму ряду та побудувати другий частинний розв'язок за формулою Абеля:

868. $y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 2.$

869. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1.$

870. $(1 - x)y'' + xy' - y; \quad y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 1.$

871. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0; \quad y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1.$

872. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0; \quad y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0.$

Знайти загальні розв'язки рівнянь Бесселя:

873. $y'' + \frac{5}{x}y' + y = 0.$

874. $y'' + \frac{3}{x}y' + 4y = 0.$

875. $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0.$

876. $x^2y'' - 2xy' + 4(x^4 - 1)y = 0.$

877. $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0.$

878. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{9}y = 0.$

879. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$

880. $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0.$

Знайти розв'язки, які виражаються степеневими або узагальненими степеневими рядами:

881. $xy'' + y' - xy = 0.$

882. $xy'' - xy' - y = 0.$

883. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$

884. $x^2y'' - x^2y' + (x - 2)y = 0.$

885. $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0.$

886. $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x + 1)y = 0.$

887. $xy'' + 2y' + xy = 0.$

Знайти у вигляді степеневих рядів розв'язки задач Коші. Обчислити коефіцієнти рядів (до третього включно):

888. $y' = y^2 - x;\quad y(0) = 1.$ **889.** $y' = x + \frac{1}{y};\quad y(0) = 1.$

890. $y' = y + xe^y;\quad y(0) = 0.$ **891.** $y' = 2x + \cos y;\quad y(0) = 0.$

892. $y' = x^2 + y^3;\quad y(1) = 1.$

893. $y'' = xy' - y^2;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

894. $y'' = y'^2 + xy;\quad y(0) = 4,\ y'(0) = -2.$

895. Знайти частинний розв'язок y_1 рівняння $xy'' + (1 + x)y' + y = 0$, який задовольняє початкову умову $y_1 \to 1$, $y_1' \to 1$ при $x \to 0$. Побудувати загальний розв'язок цього рівняння.

896. Показати, що рівняння Чебишова $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ підставлянням $x = 1 - 2t$ зводиться до гіпергеометричного. Довести, що при цілому додатному n один з частинних розв'язків рівняння Чебишова буде многочленом n-го порядку.

897. Відповідною заміною незалежної змінної звести рівняння $x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - n^2)y = 0$ $(k \neq 0)$ до рівняння Бесселя.

898. Звести $y'' - \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$ до рівняння Бесселя за допомогою відповідної однорідної лінійної заміни шуканої функції.

899. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' + y' + y = 0$.

900. Знайти частинний розв'язок y_1 рівняння $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - y = 0$, який задовольняє початкові умови $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 1$, $y_1''(0) = 1$.

901. Обчислити вронскіан для двох лінійно незалежних розв'язків рівняння Гаусса $x(x - 1)y'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)x)\, y' + \alpha\beta\, y = 0$.

902. Обчислити вронскіан для двох лінійно незалежних розв'язків рівняння Лежандра $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$.

903. Обчислити вронскіан для двох функцій Бесселя $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$, $\nu \notin \mathbb{Z}$.

§ 17. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

1. Крайова задача

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \quad x \in [a, b]; \tag{17.1}$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{17.2}$$

де $a(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, в умовах, коли відносно легко знайти загальний розв'язок рівняння (17.1), може бути розв'язана прямим підставлянням загального розв'язку в крайові умови (17.2). Але не завжди задача (17.1), (17.2) має розв'язки, а у разі їх наявності не гарантується єдиність.

2. Якщо коефіцієнти рівняння (17.1) або крайових умов (17.2) залежать від деякого параметра λ, то ті значення λ, для яких задача (17.1), (17.2) має нетривіальний розв'язок $(y(x) \not\equiv 0)$, називаються *власними значеннями*. Відповідні власним значенням розв'язки називають *власними функціями*. Наприклад, для крайової задачі $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, числа 1^1, 2^2, $3^3, \ldots$ і функції $\sin x$, $\sin 2x, \ldots$ є відповідно власними значеннями та власними функціями.

Важливим випадком задачі на власні значення є *задача Штурма-Ліувілля*:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)y'\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0; \tag{17.3}$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{17.4}$$

де функції $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $q'(x)$ – неперервні, якщо $x \in [a, b]$, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$; $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$.

3. Трапляються випадки, коли коефіцієнти рівняння, що задається в крайовій задачі, в скінченних точках основної області мають особливості. Наприклад, коефіцієнт $p(x)$ рівняння (17.3) обертається на нуль в деякій скінченній точці c. Для таких задач, в залежності від характеру особливостей, виникають умови, які відіграють роль крайових. Такими умовами можуть бути неперервність або обмеженість розв'язку, або прямування розв'язку до нескінченності і т.д. Наприклад, для рівняння Бесселя

$$(xy')' - n^2\frac{y}{x} + \lambda\, xy = 0, \tag{17.5}$$

яке записане у формі (17.3), коефіцієнт $p(x) = x$. Тому, якщо (17.5) розглядається на відрізку $0 \le x \le 1$, то $p(0) = 0$. Отже, вимога обмеженості розв'язку рівняння (17.5) при $x \to 0$ може розглядатися як одна з крайових умов. Друга умова є типовою, наприклад $y(1) = 0$. Здобуту крайову задачу можна сформулювати таким чином: знайти розв'язок рівняння (17.5), який залишається обмеженим при $x \to 0$ і дорівнює нулю при $x = 1$.

Існують також крайові задачі з нескінченною основною областю. Наприклад, задача знаходження розв'язку рівняння $y'' + \lambda y = 0$, який залишається обмеженим при $x \to \pm\infty$, є крайовою. Очевидно, що кожне невід'ємне число λ – є власним значенням цієї задачі, а функції $\sin\sqrt{\lambda x}$, $\cos\sqrt{\lambda x}$ – її власні функції.

4. *Функцією Гріна* крайової задачі (17.1), (17.2) називається функція двох змінних $G(x,s)$, визначена при $x \in [a,b]$, $s \in (a,b)$, яка має такі властивості:

1) $G(x,s)$ задовольняє відповідне однорідне рівняння

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{17.6}$$

при $x \ne s$;

2) $\alpha G(a,s) + \beta G'_x(a,s) = 0$; $\gamma G(b,s) + \delta G'_x(b,s) = 0$;

3) при $x = s$ функція $G(x,s)$ неперервна по x, а її похідна G'_x має розрив першого роду зі стрибком $\frac{1}{a(x)}$, тобто

$$G(s-0,s) = G(s+0,s); \tag{17.7}$$

$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \tfrac{1}{a(x)}. \tag{17.8}$$

Для побудови функції Гріна задачі (17.1), (17.2) знаходять розв'язок $y_1(x) \not\equiv 0$ рівняння (17.6), який задовольняє лише першу $(x = a)$ крайову умову, та розв'язок $y_2 \not\equiv 0$, який задовольняє другу $(x = b)$ крайову умову. Функцію Гріна шукають у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x), & x \in [a,s] \\ \psi(s)y_2(x), & x \in [s,b], \end{cases} \tag{17.9}$$

добираючи функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ так, щоб виконувалися умови (17.7), (17.8).

Знаючи функцію Гріна крайової задачі (17.1), (17.2), розв'язок цієї задачі можна подати в інтегральній формі

$$y = \int\limits_a^b G(x,s)f(s)\,ds, \tag{17.10}$$

причому цей розв'язок буде єдиним, якщо відповідна (17.1), (17.2) однорідна задача $(f(x) \equiv 0)$ має лише тривіальний розв'язок.

5. При розв'язуванні лінійних крайових задач наближеними методами зручно шуканий розв'язок подати у вигляді суми

$$y(x) = y_0(x) + \mu u(x) + \nu v(x), \tag{17.11}$$

де функції $y_0(x)$, $u(x)$, $v(x)$ є розв'язками трьох задач Коші:

$$\begin{aligned}
&a(x)y_0'' + b(x)y_0' + c(x)y_0 = f(x), \quad y_0'(a) = y_0(a);\\
&a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = 0, \quad u(a) = 1, u'(a) = 0;\\
&a(x)v'' + b(x)v' + c(x)v = 0, \quad v(a) = 0, v'(a) = 1,
\end{aligned}$$

а μ, ν визначаються з крайових умов (17.2).

904. Яка з крайових задач має розв'язки:

а) $y'' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1;$

б) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1?$

Знайти власні значення і власні функції:

905. $y'' = \lambda y; \quad y(0) = 0,\ y(b) = 0.$

906. $y'' = \lambda y; \quad y'(0) = y'(b) = 0.$

907. $y'' = \lambda y; \quad y(0) = y'(b) = 0.$

908. $y'' = \lambda y; \quad y(1) = 0,\ y(a) = 0,\ a > 0.$

Розв'язати крайові задачі:

909. $y'' + y = 1; \quad y(0) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

910. $y'' - 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

911. $y'' - 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 2.$

912. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y(x) = O(x)$ при $x \to 0$, $y(1) = 2.$

913. $y'' + y = 1; \quad y(1) = 1,\ y'(0) = 0.$

914. $y'' - y = 0; \quad y(0) = -1,\ y'(1) - y(1) = 2.$

915. $y'' + y = 1; \quad y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0.$

916. $y'' - y' - 2y = 0; \quad y(-\infty) = 0,\ y'(0) = 2.$

917. $y'' - y = 1; \quad y(0) = 0$, $y(x)$ обмежена при $x \to +\infty.$

918. $x^2y'' - 6y = 0; \quad y(0)$ обмежена, $y(1) = 2.$

919. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0; \quad y'(1) = 3,\ y(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to +\infty.$

920. При яких a крайова задача $y'' + ay = 1;\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$ не має розв'язків?

Побудувати функцію Гріна для крайових задач:

921. $y'' + y = f(x); \quad y(\pi) = 0,\ y'(0) = 0.$

922. $y'' + y' = f(x); \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

923. $y'' = f(x); \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

924. $x^2y'' + 2xy' = f(x); \quad y(1) = 0,\ y'(3) = 0.$

925. $xy'' - y' = f(x); \quad y(2) = 0,\ y'(1) = 0.$

926. $y'' = f(x); \quad y(0) = 0$, $y(x)$ обмежена при $x \to +\infty.$

927. $y'' - y = f(x); \quad y'(0) = 0,\ y'(2) + y(2) = 0.$

928. $y'' + y' = f(x); \quad y(+\infty) = 0,\ y'(0) = 0.$

929. $y'' + 4y' + 3y = f(x); \quad y(0) = 0,\ y(x) = O(e^{-2x})$ при $x \to +\infty.$

930. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x); \quad y(0)$ обмежена, $y(1) = 0.$

Записати в інтегральній формі розв'язки крайових задач:

931. $y'' = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0.$

932. $xy'' + y' = 2x; \quad y(1) = y'(1),\ y(x) = 0$ при $x \to 0.$

§ 18. КОЛИВНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ

1. Якщо ненульовий розв'язок рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{18.1}$$

де $p(x)$, $q(x)$ – визначені та неперервні при $x \in (a, b)$, перетворюється на нуль не менше, ніж в двох точках інтервалу (a, b), то він називається *коливним* на (a, b).

Рівняння (18.1) підстановкою

$$y = z \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx\right], \tag{18.2}$$

де $z = z(x)$, зводиться до рівняння в канонічній формі

$$z'' + I(x)z = 0, \tag{18.3}$$

де $I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)$ – *інваріант* (18.1).

Розв'язки рівнянь (18.1) і (18.3) мають однаковий характер коливності.

Якщо в рівнянні (18.3) коефіцієнт $I(x)$ такий, що

$$I(x) \leq 0 \quad x \in (a, b), \tag{18.4}$$

то всі розв'язки рівняння (18.3) (а, отже, й (18.1)) є неколивними.

2. Розв'язки ЛОР другого порядку з неперервними коефіцієнтами на інтервалі I мають однаковий характер коливності: коливні або неколивні одночасно. При цьому нулі двох лінійно незалежних розв'язків відокремлюють один одного, тобто між двома послідовними нулями одного розв'язку обов'язково є один нуль другого розв'язку (*теорема Штурма*).

Якщо коефіцієнти рівнянь типу (18.3)

$$y'' + q_i(x)y = 0, \quad i = 1, 2 \tag{18.5}$$

неперервні на (a,b) та пов'язані нерівністю

$$q_2(x) \geq q_1(x), \quad x \in (a,b), \tag{18.6}$$

то розв'язки другого рівняння (18.5) $(i = 2)$ більш коливні, ніж розв'язки першого рівняння (коливаються частіше).

Власне, між двома послідовними нулями будь-якого розв'язку першого рівняння є принаймні один нуль будь-якого розв'язку другого рівняння, якщо тільки в інтервалі між цими нулями є хоча б одна точка, в якій $q_2(x) > q_1(x)$ (*теорема порівняння*).

Відстань ρ між двома послідовними нулями довільного нетривіального розв'язку ЛОР (18.3) задовольняє оцінки

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < \rho < \frac{\pi}{\sqrt{m}}, \tag{18.7}$$

де M, m – найбільше та найменше значення функції $I(x)$ на $[\alpha,\beta] \subset \subset (a,b)$.

Приклад 1. Дослідити характер коливності розв'язків рівняння Ейлера $x^2y'' + a^2y = 0$ при малих a $(a \neq 0)$, $x \in (0,+\infty)$.

Розв'язання. Оскільки $q(x) = \frac{a^2}{x^2} > 0$, то ознака неколивності (18.4) не може бути використана. Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda(\lambda-1) + a^2 = 0$. Отже, заміною $y = e^t$ задане рівняння можна звести до ЛОР зі сталими коефіцієнтами вигляду $y'' - y' + a^2y = 0$.

Застосовуючи заміну (18.2), прийдемо до канонічної форми

$$z'' + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right) z = 0.$$

Таким чином, при $a^2 \leq \frac{1}{4}$ всі розв'язки заданого рівняння будуть неколивними. Приклад 1 показує, що умова (18.4) не є необхідною, а лише достатньою умовою неколивності розв'язків.

Приклад 2. Скільки разів довільний нетривіальний розв'язок рівняння Ейрі $y'' - xy = 0$ може перетинати піввісь $(0,+\infty)$?

Розв'язання. Рівняння Ейрі записане в канонічній формі, $q(x) = -x < 0$, якщо $x \in (0,+\infty)$. Тому, за властивістю (18.4), всі розв'язки цього рівняння неколивні; нетривіальний розв'язок може перетинати піввісь $(0,\infty)$ не більше ніж один раз.

933. Нехай $x_1, x_2, \ldots$ – послідовні нулі рівняння $y''+q(x)y=0$, розміщені в порядку зростання. Функція $q(x)$ неперервна, монотонно зростаюча при $x_1 \le x \le +\infty$, $(q(x) > 0)$. Довести, що відстань між сусідніми нулями спадає при $x \to +\infty$, тобто $x_{n+1}-x_n \le x_n - x_{n-1}$.

934. У попередній задачі позначимо через c скінченну чи нескінченну границю функції $q(x)$ при $x \to \infty$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = \frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

935. Знайти відстань між двома послідовними нулями довільного нетривіального розв'язку рівняння $y''+my=0$, де $m=\text{const}>0$. Скільки нулів міститься на відрізку $[a,b]$?

936. Довести, що всі нетривіальні розв'язки рівняння $y''-x^2y=0$ є неколивними на довільному інтервалі (a,b).

937. Довести, що відстань між двома послідовними нулями будь-якого розв'язку рівняння Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ $(n \ne \pm\frac{1}{2})$ прямує до π при $x \to +\infty$. Якою є ця відстань при $n=\pm\frac{1}{2}$?

938. Оцінити відстань між двома послідовними нулями довільного нетривіального розв'язку рівняння на заданому відрізку:

а) $y''-2xy=0,\ [20,45]$; **б)** $xy''+y=0,\ [25,100]$;

в) $y''-2xy'+(x+1)^2y=0,\ [4,19]$; **г)** $y''-2e^xy'+e^{2x}y=0,\ [2,6]$.

939. Вивчити характер коливності розв'язків рівняння Ейрі $y''-xy=0$ на інтервалі $(-\infty,0)$.

940. Довести, що при $x \to \pm\infty$ послідовні нулі довільного нетривіального розв'язку рівняння $x^3y''+xy'+\left(x^3-\frac{1}{4}\right)y=0$, $x\in(0,+\infty)$ необмежено зближуються.

941. Оцінити відстань між послідовними нулями нетривіальних розв'язків рівняння $y''+y\sin^2 x=0$ на інтервалі $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

942. Довести, що кожен ненульовий розв'язок рівняння $y''+q(x)y=0$, $x\in(0,+\infty)$, $q(x)>0$, $\inf\limits_{x\in(0,\infty)} q(x)>0$ має нескінченно багато нулів.

Чи матиме довільний нетривіальний розв'язок цього рівняння нескінченну кількість нулів на $(0,+\infty)$, якщо $q(x) > 0$ і $q(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

943. Використовуючи результати попередньої задачі, дослідити питання про кількість нулів рівняння Ейлера $y'' + \frac{a^2}{2}y = 0$ на інтервалі $(1,+\infty)$.

944. Довести, що всі розв'язки рівняння $y'' + q(x)y = 0$ з додатними початковими умовами $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ залишаються додатними при всіх $x > x_0$.

945. Довести, що розв'язком задачі Коші $y'' - x^2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ є парна додатна функція.

Дослідити асимптотичну поведінку при $x \to +\infty$ розв'язків даних рівнянь, застосовуючи перетворення Ліувілля [10, задача 2.28] для побудови асимптотичних розвинень:

946. $y'' + x^4y = 0$.

947. $y'' + x^2y = 0$.

948. $y'' - x^2y = 0$.

949. $y'' + e^{2x}y = 0$.

950. $y'' - xy = 0$.

951. $xy'' + 2xy' + y = 0$.

952. $y'' - 2(x-1)y' + x^2y = 0$.

Отримати більш точне асимптотичне розвинення для розв'язків даних рівнянь, застосовуючи перетворення Ліувілля двічі:

953*. $y'' - 4x^2y = 0$.

954. $xy'' + y = 0$.

955*. Довести, що крайова задача $y''+q(x)y = 0$, $y(x_1) = a$, $y(x_2) = b$ для будь-яких a, b, $x_1 \neq x_2$ і $q(x) \leq 0$ має єдиний розв'язок. Що можна сказати про цей розв'язок, якщо відомо, що $b = 0$?

Глава 4
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 19. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Найбільш загальними є такі форми запису систем диференціальних рівнянь:

нормальна

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, n}; \tag{19.1}$$

симетрична (відповідна (19.1))

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}; \tag{19.2}$$

канонічна

$$\frac{d^{m_i}y_i}{dx^{m_i}} = f_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right) \tag{19.3}$$

де (19.1), (19.2) – системи n-го порядку, а (19.3) – система $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$-го порядку.

Система (19.3) зводиться до вигляду (19.1), якщо ввести нові змінні, покладаючи їх рівними всім похідним, що містяться у правій частині рівності (19.3).

Функція $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq \text{const}$ є *інтегралом* системи (19.1) (або (19.2)), якщо повний її диференціал в силу системи дорівнює

$$d\psi|_{(19.1)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}f_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y_2}f_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}f_n\right)dx = 0. \tag{19.4}$$

Співвідношення $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$, де ψ – інтеграл системи, C – довільна стала, називають *першим інтегралом системи.*

Інтеграли $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ функціонально незалежні, якщо відповідна їм *матриця Якобі* невироджена, тобто

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_k}{\partial x} & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)}{D(x, y_1, \ldots, y_n)}\right) = k.$$

Сукупність n незалежних перших інтегралів системи (19.1) називається її *загальним інтегралом.*

2. Розглянемо основні методи інтегрування систем (19.1)–(19.3).

2.1. Суть *методу виключення* полягає у зведенні системи шляхом диференціювання одного з рівнянь та відповідних перетворень до одного диференціального рівняння.

2.2. *Метод інтегровних комбінацій* полягає у знаходженні таких диференціальних рівнянь, які є наслідками рівнянь системи і легко інтегруються.

При складанні інтегровних комбінацій для систем у формі (19.2) часто використовуються властивості рівних дробів: якщо $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, то для довільних k_i, $(i = \overline{1, n})$ справедлива рівність

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n}.$$

2.3. *Метод послідовного інтегрування*, за допомогою якого вдається розв'язати системи в нормальній формі

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2), \ldots, \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_n).$$

Для цього досить розв'язати кожне рівняння цієї системи. Метод використовується також для систем трикутного вигляду

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \ldots, \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Інтегрування виконується послідовно, знайдений розв'язок підставляється у наступне рівняння і т.д.

2.4. *Спеціальні аналітичні методи*, які застосовуються до лінійних систем (див. §20–22) та систем зі специфічними властивостями. Наприклад, систему другого порядку

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y), \tag{19.5}$$

праві частини якої неперервно диференційовні та задовольняють *умови Коші-Рімана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{19.6}$$

легко інтегрувати, якщо домножити друге рівняння (19.5) на уявну одиницю i $(i^2 = -1)$ та скласти отримані рівняння. Дістанемо

$$\frac{d(x+iy)}{dt} = u(x, y) + iv(x, y).$$

Покладаючи $z = x + iy$ і враховуючи (19.6), маємо $\frac{dz}{dt} = f(z)$. Останнє рівняння інтегруємо, а потім, відокремлюючи дійсну та уявну частини, отримаємо загальний розв'язок.

Приклад 1. Розв'язати систему $\frac{d^2y}{dx^2} + z = 0$, $\frac{dz}{dx} + y = 0$.

Розв'язання. Скористаємося методом виключення. Для цього, диференціюючи перше рівняння системи, знаходимо $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dz}{dx} = 0$, друге – $\frac{dz}{dx} = -y$. Отже, системі відповідає лінійне рівняння третього порядку $\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$, розв'язки якого легко знайти:

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + C_3 e^x.$$

Другу змінну $z = z(x)$ знаходимо після підставляння знайденого виразу для y у друге рівняння системи з наступним інтегруванням. Дістанемо

$$z = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{C_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x - C_3 e^x.$$

Приклад 2. Розв'язати систему $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}$.

Розв'язання. Скористаємося методом інтегровних комбінацій. Для знаходження інтегровних комбінацій поділимо перше рівняння на друге. Дістанемо $\frac{dy}{dz} = \frac{y}{z}$ – перша інтегровна комбінація, $y^2 - z^2 = C_1$ – перший інтеграл системи. Віднявши від першого рівняння друге, матимемо другу інтегровну комбінацію $\frac{d(y-z)}{dx} = \frac{1}{z-y}$, а отже, й ще один перший інтеграл системи $(y-z)^2 + 2x = C_2$. Легко переконатися, що інтеграли $\psi_1 = y^2 - z^2$ та $\psi_2 = (y-z)^2 + 2x$ незалежні. Справді,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 2y & -2z \\ -2z & 2y & 2z-2x \end{pmatrix} = 2, \text{ оскільки } y \neq 0,\ z \neq 0.$$

Таким чином, ми отримали загальний інтеграл системи

$$y^2 - z^2 = C_1, \quad (y-z)^2 + 2x = C_2.$$

Приклад 3. Перевірити, чи є функції $\psi_1 = tx$, $\psi_2 = ty + x^2$ інтегралами системи $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{2x^2 - ty}{t^2}$. Чи незалежні ці інтеграли?

Розв'язання. Для функції $\psi_1 = tx$ маємо:

$$d\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}dt + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}dy =$$
$$= x\,dt + t\,dx = x\,dt + t\left(-\frac{x}{t}\right)dt = x\,dt - x\,dt = 0.$$

Для $\psi_2 = ty + x^2$:

$$d\psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial t}dt + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}dy = y\,dt + 2x\,dx + t\,dy =$$
$$= y\,dt + 2x\left(-\frac{x}{t}\right)dt + t\,\frac{2x^2 - ty}{t^2}\,dt = \left(y - \frac{2x^2}{t} + \frac{2x^2}{t} - y\right)dt = 0.$$

Тому кожна з функцій ψ_1 та ψ_2 є інтегралом системи. Складемо матрицю Якобі

$$y = \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(t, x, y)} = \begin{pmatrix} x & t & 0 \\ y & 2x & t \end{pmatrix}.$$

Її rang $= 2$, оскільки $t \neq 0$. Звідки випливає, що ψ_1, ψ_2 – незалежні, тому $tx = C_1$, $ty + x^2 = C_2$ (C_1, C_2 – довільні сталі) є загальним інтегралом системи.

Звести подані рівняння чи системи до систем у нормальній формі:

956. $y''' - y = 0.$

957. $y^{(4)} + x^2 y = 0.$

958. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0.$

959. $y'' - z = 0,\ z'' + y = 0.$

960. $y'' - z = 0,\ x^3 z' - 2y = 0.$

961. $xy'' + y' + xy = 0.$

Перевірити, чи є задані функції інтегралами систем:

962. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = -x; \end{cases}$ $\varphi_1 = t^2 + 2xy;\ \varphi_2 = x^2 - ty.$

963. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2; \end{cases}$ $\varphi_1 = x \ln y - x^2 y;\ \varphi_2 = \frac{y^2}{x^2} - 2 \ln x.$

964. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z};$ $\varphi = yz - ux.$

965. Перевірити, чи є незалежними перші інтеграли $\frac{x+y}{z+x} = C_1$ та $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ системи $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

Знайти незалежні інтеграли систем:

966. $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$

967. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}.$

968. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$

969. $\frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y}.$

970. $\frac{dz}{z(x+z)} = -\frac{dy}{y(y+z)} = \frac{dz}{0}.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

971. $\begin{cases} y' = y^2 z, \\ z' = \frac{z}{x} - yz^2. \end{cases}$

972. $\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1, \\ z' = z + y. \end{cases}$

973. $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{z-x}, \\ z' = y + 1. \end{cases}$

974. $\begin{cases} y' = 2xy^2, \\ z' = \frac{z-x}{x}. \end{cases}$

975. $\begin{cases} y' = e^{x-y}, \\ z' = \frac{2z}{2x-z^2}. \end{cases}$

976. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - 1\right) y + \left(\frac{2}{x} - 1\right) z. \end{cases}$

977. $\begin{cases} y' = \frac{z+e^y}{z+e^x} \\ z' = \frac{z^2-e^{x+y}}{z+e^x}. \end{cases}$

978. $\begin{cases} y' = z, \\ z' = \frac{z^2}{y}. \end{cases}$

979. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$

980. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$

981. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2\,dz}{1}.$

982. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$

983. $\frac{dx}{mz-ny} = \frac{dy}{nx-lz} = \frac{dz}{ly-mx}.$

984. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}.$

985. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2+x^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}.$

986. $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2-xz}.$

987. $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$

988. $\frac{dx}{z^2-y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}.$

Розв'язати задачі Коші:

989. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2xy; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

990. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{-x} \cos y, \\ \frac{dy}{dt} = -e^{-x} \sin y; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Розв'язати системи, переконавшись, що виконуються умови Коші-Рімана:

991. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \alpha x^2 + 2\beta xy - \alpha y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x - \beta x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2. \end{cases}$

992. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}(x^3 - xy^2), \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(3x^2 y - y^3). \end{cases}$

993. Нехай $y = u(x) + iv(x)$ – комплексний розв'язок рівняння Ріккаті $y' = y^2 + q(x)$. Написати систему диференціальних рівнянь, яка визначає функції $u(x)$ та $v(x)$.

994. Довести, що в області, яка містить особливу точку типу «вузол» або «фокус», для системи

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y),$$

не може існувати першого інтеграла вигляду $\varphi(x,y) = C$ з неперервною функцією φ, $\varphi \neq \mathrm{const}$.

§ 20. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ

1. Множина розв'язків лінійної однорідної системи (ЛОС)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{20.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$, $A(t)$ – квадратна матриця n-го порядку з неперервними на I компонентами, утворює лінійний простір. Роль базису в ньому виконує ФСР.

Матрицю $X(t)$, стовпцями якої є розв'язки, що утворюють ФСР, називають *фундаментальною матрицею*. Загальний розв'язок системи (20.1) можна записати у вигляді

$$x(t) = X(t)C, \tag{20.2}$$

де $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – вектор, компонентами якого є довільні сталі.

Якщо $X(t, t_0)$ – фундаментальна матриця системи (20.1), нормована в точці t_0: $X(t_0, t_0) = E$, де E – одинична матриця, (таку матрицю називають матрицантом системи (20.1)), то тоді розв'язок задачі Коші з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ має вигляд

$$x(t) = X(t, t_0)x_0. \tag{20.3}$$

Якщо $X(t)$ – фундаментальна матриця, то $X(t)C$, де C – невироджена матриця, також є фундаментальною матрицею системи.

2. Розв'язки $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$, $\varphi_n(t)$ системи (20.1) утворюють ФСР тоді і тільки тоді, коли їх визначник Вронського $W(t)$ відмінний від нуля при $t \in I$, тобто

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \ldots & \varphi_{n1}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) & \ldots & \varphi_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{1n}(t) & \varphi_{2n}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \neq 0. \qquad (20.4)$$

Для визначника Вронського справедлива формула Ліувілля–Остроградського–Якобі

$$W(t) = W(t_0) \exp \left[\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau \right], \qquad (20.5)$$

де $\operatorname{tr} A(\tau)$ – слід матриці системи.

3. Будь-які $(n+1)$ розв'язків системи (20.1) лінійно залежні. Задача побудови ЛОС (20.1) із заданою ФСР $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ розв'язується за допомогою співвідношень

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{dx_k}{dt} & \dfrac{d\varphi_{1k}}{dt} & \dfrac{d\varphi_{2k}}{dt} & \ldots & \dfrac{d\varphi_{nk}}{dt} \\ x_1 & \varphi_{11} & \varphi_{21} & \ldots & \varphi_{n1} \\ x_2 & \varphi_{12} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \ldots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} = 0; \quad k = \overline{1,n}. \qquad (20.6)$$

Приклад 1. Побудувати фундаментальну матрицю системи $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2}x$. Знайти також нормовану в точці $t_0 = 1$ фундаментальну матрицю.

Розв'язання. Задану систему легко розв'язати, звівши її до лінійного рівняння другого порядку. Для цього диференціюємо перше рівняння системи та підставляємо значення $\frac{dy}{dt}$ з другого рівняння. Дістанемо рівняння Ейлера $t^2x'' - 2x = 0$, яке легко розв'язати. Маємо

$\lambda(\lambda-1)-2=0$, звідки $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$. А отже, $x=C_1t^2+\frac{C_2}{t}$, $y=\int\frac{2}{t^2}\left(C_1t^2+\frac{C_2}{t}\right)dt=2C_1t-\frac{C_2}{t^2}$.

Запишемо дану систему у вигляді (20.1)

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\\frac{2}{t^2}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що множину розв'язків цієї системи можна записати у формі

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2&\frac{1}{t}\\2t&-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix},$$

де $\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$ – вектор довільних сталих. При цьому $\begin{pmatrix}t^2&\frac{1}{t}\\2t&-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}$ – невироджена матриця, тобто

$$\det\begin{pmatrix}t^2&\frac{1}{t}\\2t&-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}=-3\neq0\quad(t\in\mathbb{R}).$$

Стовпці цієї матриці є розв'язками системи. Справді,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}t^2\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{2}{t^2}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t^2\\2t\end{pmatrix}\ \text{і}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{t^2}\\-\frac{2}{t^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{2}{t^2}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{t}\\-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\frac{1}{t}\\-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}.$$

Отже, $X(t)=\begin{pmatrix}t^2&\frac{1}{t}\\2t&-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}$ є фундаментальною матрицею заданої системи.

Для знаходження нормованої в точці $t_0=1$ фундаментальної матриці системи скористаємося тим, що $X_1(t)=X(t)C$, де C – стала невироджена матриця, також фундаментальна матриця системи. Маємо

$$X_1(t)=\begin{pmatrix}t^2&\frac{1}{t}\\2t&-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at^2+\frac{c}{t}&bt^2+\frac{d}{t}\\2at-\frac{c}{t^2}&2bt-\frac{d}{t^2}\end{pmatrix},$$

а при $t = 1$

$$X_1(1) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix}.$$

Вимагаючи, щоб $X_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, дістанемо систему $a + c = 1$, $b + d = 0$, $2a - c = 0$, $2b - d = 1$, з якої $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$. Отже,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3t} & \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3t} \\ \frac{2}{3}t - \frac{2}{3t^2} & \frac{2}{3}t + \frac{1}{3t^2} \end{pmatrix} —$$

нормована в точці $t_0 = 1$ фундаментальна матриця.

Приклад 2. Побудувати ЛОС, фундаментальна система розв'язків якої

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Вронскіан $W[\varphi_1, \varphi_2] = \det \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ x & x \end{pmatrix} = x + x^2 - 2x = $ $= x(x-1)$. Отже, шукана ЛОС вигляду (20.1) існує лише у випадку, коли I не містить точок $x_0 = 0$, $x_0 = 1$. Побудуємо, наприклад, ЛОС із заданою ФСР на $I = (0, 1)$. Для цього використаємо співвідношення (20.6). Позначивши змінні, які увійдуть до системи, відповідно $y(x)$ і $z(x)$, для першого рівняння системи дістанемо

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} & 1 & 0 \\ y & 1+x & 2 \\ z & x & x \end{pmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}\, y - \frac{2}{x(x-1)}\, z,$$

а для другого

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{dz}{dx} & 1 & 1 \\ y & 1+x & 2 \\ z & x & x \end{pmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\, z.$$

Таким чином, шукана система має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}\,y - \frac{2}{x(x-1)}\,z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\,z.$$

995. Знайти ФСР, нормовану в точці $t_0 = 0$, для системи

$$\frac{dx}{dt} = px - qt, \quad \frac{dy}{dt} = qx + py.$$

Побудувати ФСР, нормовані в точці $x_0 = 0$, для систем:

996. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z, \\ \frac{dz}{dx} = 2z - 2y. \end{cases}$ **997.** $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y, \\ \frac{dz}{dx} = 2z. \end{cases}$ **998.** $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$

999. Відомо, що $x_1(t) = -\sin t - \frac{\cos t}{t}$, $y_1(t) = \frac{\cos t}{t}$ – розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} - ty, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t}. \end{cases}$ Знайти всі розв'язки цієї системи. Записати фундаментальну матрицю системи.

Побудувати ЛОС, яка має задану ФСР $\{\varphi_1, \varphi_2\}$:

1000. $\varphi_1 = (e^{3x}; 0)$, $\varphi_2 = (0; e^{2x})$.

1001. $\varphi_1 = (e^{3x}; 0)$, $\varphi_2 = (xe^{3x}; e^{3x})$.

1002. $\varphi_1 = (1; -x)$, $\varphi_2 = (x; 1)$.

1003. $\varphi_1 = (e^{3x}; 0)$, $\varphi_2 = (0; e^{3x})$.

1004. $\varphi_1 = (\cos 2x; -\sin 2x)$, $\varphi_2 = (\sin 2x; \cos 2x)$.

1005. $\varphi_1 = (1; x)$, $\varphi_2 = (x; 1)$.

§ 21. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Загальними методами розв'язання ЛОС

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{21.1}$$

зі сталою матрицею A є методи виключення, Ейлера та матричний.

Метод виключення полягає у зведенні ЛОС (21.1) до ЛОР n-го порядку шляхом диференціювання одного з рівнянь системи (21.1) з наступним вилученням усіх змінних x_i, крім однієї.

За *методом Ейлера* розв'язки ЛОС (21.1) будуємо у вигляді

$$x = e^{\lambda t}\vec{h}, \tag{21.2}$$

де λ – власне число матриці A, тобто є розв'язком характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0; \tag{21.3}$$

$\vec{h}$ – власний вектор, що відповідає власному числу λ.

Розрізняють три випадки:

а) Всі розв'язки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рівняння (21.3) дійсні і різні ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$). Тоді система функцій $\left\{e^{\lambda_i t}\vec{h}_i\right\}_{i=1}^{n}$ утворює ФСР для ЛОС (21.1). Загальний розв'язок ЛОС (21.1) має вигляд

$$x = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\vec{h}_i, \tag{21.4}$$

де C_i – довільні сталі, $i = \overline{1, n}$.

б) Розв'язки рівняння (21.3) різні, але серед них є комплексні. Нехай $\lambda_{1,2} = a + ib$. Тоді до ФСР увійдуть дійснозначні розв'язки ЛОС (21.1)

$$x_1 = \operatorname{Re}\left(e^{(a+ib)t}\vec{h}_1\right), \quad x_2 = \operatorname{Im}\left(e^{(a+ib)t}\vec{h}_1\right) \tag{21.5}$$

де $\vec{h}_1$ – власний вектор матриці A, що відповідає її власному числу $\lambda_1 = a + ib$.

в) Серед розв'язків рівняння (21.3) є кратні. Якщо λ – корінь рівняння (21.3) кратності k, то слід визначити кількість лінійно незалежних власних векторів матриці A, що відповідають власному числу λ. Їх кількість визначається співвідношенням

$$l = n - r, \tag{21.6}$$

де n – порядок системи (21.1), $r = \operatorname{rang}(A - \lambda E)$.

Якщо $l = k$, то функції $\left\{e^{\lambda t}\vec{h}_i\right\}_{i=1}^{n}$ увійдуть до ФСР.

Якщо $l < k$, то в загальному розв'язку ЛОС кореню λ відповідає блок (який сам також дає розв'язок ЛОС (21.1)):

$$\begin{cases} x_1 = \left(a + bt + \ldots + gt^{k-l}\right) e^{\lambda t}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \left(p + qt + \ldots + st^{k-l}\right) e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{21.7}$$

Коефіцієнти $a, b, \ldots, g, p, q, \ldots, s$ знаходять підставлянням (21.7) в (21.1) з наступним прирівнюванням коефіцієнтів подібних доданків лівої і правої частини. При цьому дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a, b, \ldots, s$, які залежать від k довільних сталих, де k – кратність кореня λ.

Матричний метод інтегрування ЛОС (21.1) ґрунтується на безпосередньому знаходженні фундаментальної матриці $X(t)$ ЛОС (21.1) матричними методами.

Матрицю $X(t)$ шукають у вигляді

$$X(y) = e^{At}, \tag{21.8}$$

де

$$e^{At} = E + \tfrac{t}{1!}A + \tfrac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \tfrac{t^n}{n!}A^n + \ldots\ . \tag{21.9}$$

При цьому користуються властивостями матричної експоненти:

1. Якщо $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B = e^{B+A}$.

2. Якщо $A = T^{-1}JT$, то $e^A = T^{-1}e^J T$.

Матричну експоненту e^{At} зручно шукати, відштовхуючись від жорданової нормальної форми матриці A:

$$A_J = \operatorname{diag}\left\{J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \ldots, J_{k_s}(\lambda_s)\right\},$$

де $J_{k_i}(\lambda_i)$ – клітина Жордана k_i-го порядку, що відповідає власному числу λ_i матриці A, $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = n$.

Отже,

$$e^{A_J t} = \operatorname{diag}\left\{e^{J_{k_1}(\lambda_1)t}, e^{J_{k_2}(\lambda_2)t}, \ldots, e^{J_{k_s}(\lambda_s)t}\right\}, \tag{21.10}$$

де $e^{J_k(\lambda)t} = e^{(\lambda E + I)t} = e^{\lambda t} e^{It}$; E – одинична матриця;
$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ – нільпотентна матриця.

Тому

$$e^{J_k(\lambda)t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ldots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \ldots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{21.11}$$

Розглянемо послідовність дій при розв'язанні ЛОС (21.11) матричним способом:

1) розв'язуємо рівняння (21.3) над полем $\mathbb{C}$;

2) записуємо A_J згідно з тим, що $\operatorname{rang}(A - \lambda E) = \operatorname{rang}(A_J - \lambda E)$;

3) знаходимо матрицю переходу T згідно зі співвідношенням

$$TA = A_J T; \tag{21.12}$$

4) знаходимо T^{-1};

5) знаходимо $e^{A_J t}$, використовуючи для блоків (клітин Жордана) формулу (21.11);

6) знаходимо e^{At} як добуток трьох матриць

$$e^{At} = T^{-1} e^{A_J t} T. \tag{21.13}$$

Маючи фундаментальну матрицю ЛОС (21.1) у вигляді (21.8), загальний розв'язок цієї системи можна подати у вигляді

$$x = e^{At} C, \tag{21.14}$$

де $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – вектор довільних сталих.

Розв'язок задачі Коші з початковою умовою $x(0) = x_0$ набуває вигляду

$$x = e^{At} x_0. \tag{21.15}$$

Ланцюжок перетворень 1)–6) можна дещо скоротити, взявши до уваги той факт, що транспонована до матриці X матриця X^T є розв'язком матричного рівняння

$$\frac{dX^T}{dt} = X^T A^T. \tag{21.16}$$

Якщо при цьому A_J^T – жорданова нормальна форма матриці A така, що $A_J^T = SA^T S^{-1}$, де S – невироджена матриця переходу, то, здійснивши в (21.16) підставляння

$$X^T = ZS, \tag{21.17}$$

дістанемо

$$\frac{dZ}{dt} = Z(SA^T S^{-1}) = ZA_J^T. \tag{21.18}$$

Звідси спосіб розв'язання ЛОС (21.1) (побудови $X(t)$) має вигляд:

1) записуємо матричне рівняння (21.16);

2) знаходимо A_J^T і матрицю переходу S;

3) знаходимо матрицю Z у вигляді

$$Z = e^{tA_J^T}; \tag{21.19}$$

4) підставляємо матриці Z та S у співвідношення (21.17);

5) трансформуємо здобуту матрицю $X(t)$.

Розв'язування ЛОС методом Ейлера наведено в роботі [10, приклади 4.32–4.35], матричним методом – там же [10, приклади 4.39, 4.40].

Розглянемо останній із запропонованих матричний метод розв'язання ЛОС.

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матричне рівняння (21.16) відповідно до заданої системи:

$$\frac{dX^T}{dt} = X^T \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$, коренями якого є $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Тому $A_J^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. З рівності $A_J^T S = SA^T$ знаходимо матрицю S:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $Z(t)$, згідно з (21.19), має вигляд $Z(T) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$, то $X^T(t) = Z(t)S = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{3t} \\ e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix}$. Отже, $X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ 3e^{3t} & e^{5t} \end{pmatrix}$ і $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}$, $y = 3e^{3t} C_1 + e^{5t} C_2$ – загальний розв'язок заданої ЛОС.

Розв'язати системи методом виключення ($\dot{x}$ означає $\frac{dx}{dt}$ і т.д.):

1006. $\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$

1007. $\begin{cases} \dot{x} = 0; \\ \dot{t} = -y. \end{cases}$

1008. $\begin{cases} \dot{y} = z; \\ \dot{z} = y. \end{cases}$

1009. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

1010. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + z; \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -6z. \end{cases}$

1011. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = 2y + z; \\ \dot{z} = 2z. \end{cases}$

Розв'язати системи методом Ейлера:

1012. $\begin{cases} \dot{y} = y - z; \\ \dot{z} = 4z - 4y. \end{cases}$

1013. $\begin{cases} \dot{y} = 2y + z; \\ \dot{z} = -6y - 3z. \end{cases}$

1014. $\begin{cases} \dot{y} = 2y - 3z; \\ \dot{z} = 3y + 2z. \end{cases}$

1015. $\begin{cases} \dot{y} = y - 2z; \\ \dot{z} = 6y - 5z. \end{cases}$

1016. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 12y - 4z; \\ \dot{y} = -x - 3y + z; \\ \dot{z} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$

1017. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z; \\ \dot{y} = 12x - 4y - 12z \\ \dot{z} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

1018. $\begin{cases} \dot{x} = 21x - 8y - 19z; \\ \dot{y} = 18x - 7y - 15z; \\ \dot{z} = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$

1019. $\begin{cases} \dot{x} = x - z; \\ \dot{y} = 2y - 6x + 6z; \\ \dot{z} = 4x - y - 4z, \end{cases}$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1).$

1020. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z, \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1).$

1021. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z; \\ \dot{y} = 3x - 2y - z; \\ \dot{z} = 2z - x + y, \end{cases}$
$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1).$

1022. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x; \\ \dot{y} = 4x + y; \\ \dot{z} = 2x + y - z, \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1).$

Побудувати ФСР, нормовані в точці нуль:

1023. $\begin{cases} \dot{y} = 2y; \\ \dot{z} = 2z. \end{cases}$

1024. $\begin{cases} \dot{y} = y + z; \\ \dot{z} = -5y - 3z. \end{cases}$

1025. $\begin{cases} \dot{y} = y - z; \\ \dot{z} = z - y. \end{cases}$

1026. $\begin{cases} \dot{y} = 2y; \\ \dot{z} = y + 2z. \end{cases}$

Знайти матричну експоненту e^{At}:

1027. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1028. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

1029. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1030. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1031. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1032. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1033. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1034. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язати системи $\dot{x} = Ax$ матричним методом:

1035. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1036. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1037. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1038. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1039. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1040. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1041. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1042. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1043. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1044. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1045. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1046. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1047. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1048. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайти $\det e^A$, не обчислюючи матрицю e^A:

1049. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

1050. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1051. $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1052. $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язати системи, звівши їх до систем зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $t = \int \phi(x)\,dx$, де $\phi(x)$ – така функція, що коефіцієнти $a_{ij}(x)$ системи задовольняють співвідношення $a_{ij}(x) = b_{ij}\phi(x)$, b_{ij} – сталі:

1053. $\begin{cases} x\frac{dy}{dx} = z - y; \\ y\frac{dy}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$

1054. $\begin{cases} x^2\frac{dy}{dx} = -y - 2z; \\ x^2\frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$

1055. $\begin{cases} 2\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y - z; \\ 2\sqrt{x}\frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$

Розв'язати системи вигляду

$$\begin{cases} a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \ldots + a_{1n}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0; \\ a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n}x + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \ldots + b_{2n}y = 0, \end{cases}$$

записавши характеристичне рівняння у формі

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

і розв'язавши його. Застосувати метод Ейлера:

1056. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y; \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$

1057. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y; \\ \ddot{y} = -x - y. \end{cases}$

1058. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y; \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases}$

1059. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0; \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

1060. $\begin{cases} \ddot{x} - 2y + \ddot{y} + x - 3\dot{y} = 0; \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$ **1061.** $\begin{cases} \ddot{x} - 2y + 2\dot{x} = 0; \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$

Розв'язати задачі Коші:

1062. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 9y; & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 8y; & y(0) = 1. \end{cases}$

1063. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y; & x(0) = 1; \\ \dot{y} = x - y; & y(0) = 1. \end{cases}$

1064. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 8y; & x(0) = 6; \\ \dot{y} = -x - 3y; & y(0) = -2. \end{cases}$

1065. $\begin{cases} \dot{x} = y + z; & x(0) = -1; \\ \dot{y} = x + z; & y(0) = 1; \\ \dot{z} = x + y; & z(0) = 0. \end{cases}$

§ 22. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1. Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (ЛНС) зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{22.1}$$

можна подати у вигляді суми

$$x = \bar{x} + \tilde{x}, \tag{22.2}$$

де $\bar{x}$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\tilde{x}$ – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (22.1).

Для знаходження частинного розв'язку $\tilde{x}$ неоднорідної системи при будь-якій неперервній функції $f(t)$ можна користуватися методом варіації довільних сталих. Суть його полягає в тому, що частинний розв'язок $\tilde{x}$ неоднорідної системи шукають у формі, інваріантній до загального розв'язку $\bar{x}$ відповідної однорідної системи, замінюючи довільні сталі на невідомі функції, які знаходять підставлянням $\tilde{x}$ у неоднорідну систему.

2. Якщо функція $f(t)$ є векторним квазімногочленом, то частинний розв'язок $\tilde{x}$ неоднорідної системи можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Нехай

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)), \quad f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t},$$

де $P_{m_i}(t)$ – многочлен порядку m_i. Тоді частинний розв'язок $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ можна подати у вигляді

$$\tilde{x}_i = Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{22.3}$$

де $m = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{m_i\}$, s – кратність γ як кореня характеристичного рівняння.

Аналогічно визначаються степені многочленів у разі, коли $f_i(t)$ містять $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$, а число $\gamma = \alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x} = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ \bar{y} = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t}. \end{array} \right.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи знайдемо методом невизначених коефіцієнтів.

Маємо $f_1(t) = -5\cos t$, γ не є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Отже, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{x} = A\sin t + B\cos t, \quad \tilde{y} = C\sin t + D\cos t.$$

Підставляючи ці значення у вихідну систему, знайдемо $A = -2$, $B = -1$, $C = 1$, $D = 3$. Таким чином, ми можемо записати загальний розв'язок неоднорідної системи

$$\left[\begin{array}{l} x = \bar{x} + \tilde{x} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t; \\ y = \bar{y} + \tilde{y} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t. \end{array}\right.$$

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases}$$

Розв'язання. Проінтегруємо задану систему методом варіації довільних сталих. Маємо загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x} = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}; \\ \bar{y} = -C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t}. \end{array}\right.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи знайдемо у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{x} = C_1(t) e^{t} + 2C_2(t) e^{2t}; \\ \tilde{y} = -C_1(t) e^{t} - 3C_2(t) e^{2t}. \end{array}\right.$$

Функції $C_1(t)$ і $C_2(t)$ знаходимо з системи

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{t} + 2C_2'(t) e^{2t} = 2e^{-t}; \\ -C_1'(t) e^{t} - 3C_2'(t) e^{2t} = e^{-t}. \end{cases}$$

Дістанемо $C_1'(t) = 8e^{-2t}$, $C_2'(t) = -3e^{-3t}$. Звідки маємо, наприклад, $C_1(t) = -4e^{-2t}$, $C_2(t) = e^{-3t}$. Тому шуканий частинний розв'язок вихідної системи можна подати у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{x} = -2e^{-t}; \\ \tilde{y} = e^{-t}. \end{array}\right.$$

Таким чином, ми отримали загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} x = -2e^{-t} + C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}; \\ y = e^{-t} - C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t}. \end{array}\right.$$

Зазначимо, що частинний розв'язок цієї системи можна було б знайти також і методом невизначених коефіцієнтів.

Розв'язати системи методом варіації довільних сталих:

1066. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}; \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

1067. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - I; \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

1068. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - I}; \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - I}. \end{cases}$

1069. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - e^{2t}; \\ \dot{y} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$

Розв'язати ЛНС методом невизначених коефіцієнтів:

1070. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y; \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

1071. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8; \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$

1072. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t; \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

1073. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

1074. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t; \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

1075. $\begin{cases} \dot{x} = t^2 + 6t + 1 - y; \\ \dot{y} = x - 3t^2 + 3t + 1. \end{cases}$

1076. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2; \\ \dot{y} = 1 - x; \\ \dot{z} = x + y - z - t + I. \end{cases}$

1077. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + t^2; \\ \dot{y} = -y - z + 2t; \\ \dot{z} = -z + t. \end{cases}$

1078. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

1079. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}; \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

1080. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t; \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

1081. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t; \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

1082. $\begin{cases} \dot{x} = y - z; \\ \dot{y} = x + y + t; \\ \dot{z} = x + z + t. \end{cases}$

Розв'язати поставлені задачі Коші:

1083. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^{-t} - y; \\ 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \sin t - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -2,\ y(0) = 1.$

1084. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + t; \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2t, \end{cases}$ $x(0) = -\frac{7}{9},\ y(0) = \frac{3}{5}.$

1085. $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} = 6x - y - 6t^2 - t + 3; \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2t - I, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

§ 23. ФАЗОВИЙ ПРОСТІР АВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. *Векторним полем* в області $D \subset \mathbb{R}^2$ називається відповідність, яка кожній точці $z = (x, y) \in D$ зіставляє вектор $f(z) \subset \mathbb{R}^2$, прикладений до неї. Якщо $f(z) \neq 0$, $z \in D$, то векторне поле

$$f(z) = f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \tag{23.1}$$

одночасно визначає *поле напрямів*, яке можна задати диференціальним рівнянням

$$Q(x, y)\, dx - P(x, y)\, dy = 0. \tag{23.2}$$

Це векторне поле зручно інтерпретувати як поле миттєвих швидкостей рухомої (фазової) точки $z(t) = (x(t), y(t))$. Закон руху точки описується автономною системою диференціальних рівнянь

$$\dot{z} = f(z), \quad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}\right), \tag{23.3}$$

або

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y); \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \tag{23.4}$$

Для автономної системи (23.3), (23.4) область D називається *множиною станів* (фаз) *фазової точки* або *фазовим простором.* Якщо

$$z = \eta(t, z_0) - \tag{23.5}$$

розв'язок задачі Коші для (23.3) з початковою умовою $\eta(0, z_0) = z_0$, то орієнтована відповідно до векторного поля f крива, задана (23.5), називається *фазовою траєкторією* системи (23.3).

Для неперервного в D векторного поля $f(z)$, такого, що $f(z) \neq 0$, $z \in D$, будь-яка фазова траєкторія системи (23.3), (23.4) є інтегральною кривою рівняння (23.2). Кожна інтегральна крива рівняння (23.2), орієнтована відповідно до векторного поля $f(z)$, є фазовою траєкторією системи (23.4). Точка z, для якої $f(z) = 0$, називається *особливою точкою векторного поля* (вона ж є особливою точкою диференціального рівняння (23.2)).

Для системи (23.3), (23.4) така точка є *положенням рівноваги* (*стаціонарна точка*, *нерухома точка*), оскільки $\eta(t, z) = z$, $t \in \mathbb{R}$.

Усі положення рівноваги системи (23.4) знаходяться як розв'язки алгебраїчної системи $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

Основна задача якісного дослідження системи (23.4) полягає у побудові фазових траєкторій цієї системи.

Поведінка фазових траєкторій (*фазовий портрет*) системи (23.4) в околі будь-якої точки, що не є положенням рівноваги, абсолютно прогнозована, оскільки диференціальне рівняння (23.3), відповідне системі (23.4) в околі такої точки, не має ніяких особливостей [1, теорема 2.10].

Для дослідження фазових траєкторій системи (23.4) в околах положень рівноваги застосовують метод лінеаризації.

Лінеаризована для (23.4) система (система першого наближення) в околі точки $z_0 = (x_0, y_0)$ має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = P'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ \dot{y} = Q'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{cases} \tag{23.6}$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Залежно від характеру розв'язків (над полем $\mathbb{C}$) рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda A + \det A = 0, \tag{23.7}$$

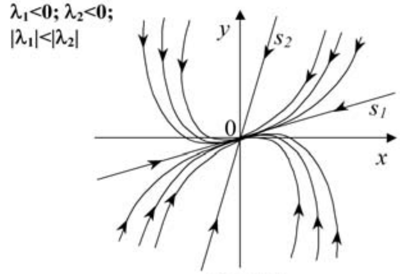

Рис.12

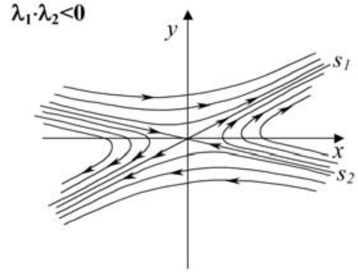

Рис.13

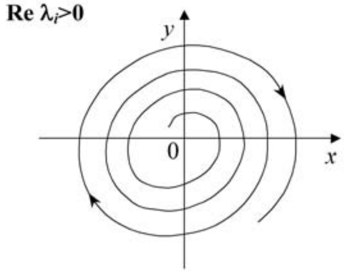

Рис.14

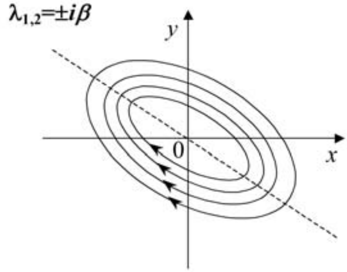

Рис.15

розрізняють такі типи положень рівноваги (фазові портрети):

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ – *вузол* (рис. 12);

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ – *сідло* (рис. 13);

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm\ i\beta,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ – *фокус* (рис. 14);

4) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta,\ \beta \neq 0$ – *центр* (рис. 15);

5) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, одне з власних чисел дорівнює нулю, наприклад, $\lambda_2 = 0$ – *пряма положень рівноваги* (рис. 16).

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$, причому A є діагональною матрицею – *дикритичний вузол* (рис. 17).

7) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,\ \lambda \neq 0$, жорданова нормальна форма матриці A має вигляд $A_J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ – *вироджений вузол* (рис. 18);

8) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ A_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – *пряма положень рівноваги* (рис. 19).

При побудові фазових траєкторій для вузла, сідла та виродженого вузла потрібно знайти спочатку ті фазові траєкторії, які є півпрямими,

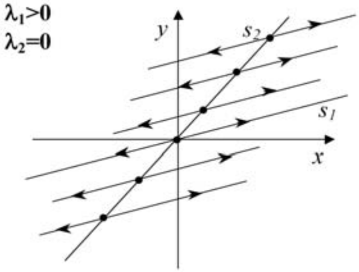

Рис.16

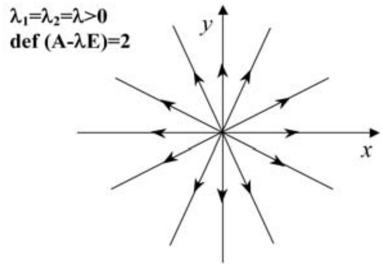

Рис.17

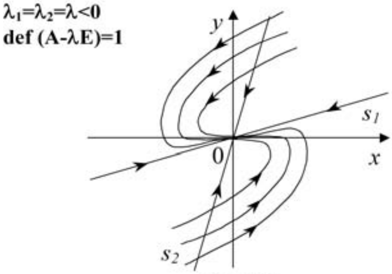

Рис.18

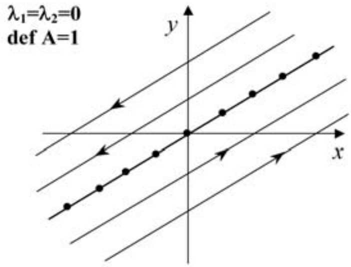

Рис.19

що спрямовані вздовж власних векторів матриці A. У випадку вузла фазові криві дотикаються до прямої, яка спрямована вздовж власного вектора, що відповідає меншому за модулем власному числу.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, то положення рівноваги нелінійної системи (23.4) буде тотожним положенню рівноваги лінеаризованої системи (23.6).

У випадку центра для (23.6) матимемо також центр для (23.4), якщо тільки для фазових кривих (23.4) вісь симетрії проходить через досліджувану стаціонарну точку. Так, якщо рівняння (23.1) інваріантне відносно заміни $x \to -x$ (або $y \to -y$), то така вісь симетрії, очевидно, існує.

Для визначення напряму руху вздовж фазової траєкторії досить підставити довільну точку $(x, y) \in D$ до правої частини системи (23.4), тим самим буде визначений $\vec{v} = (v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y})$ – вектор швидкості у фіксованій точці.

У випадку вузлів та фокусів при $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ фазова точка віддаляється від положення рівноваги, а при $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ – спрямована до положення рівноваги (при $t \to +\infty$).

2. Для диференціального рівняння Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \tag{23.8}$$

де $f \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, фазовий портрет відповідної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \tag{23.9}$$

побудувати неважко, оскільки повна енергія $E(x, y) = \Pi(x) + \mathrm{K}(y)$ є інтегралом системи, де

$$\Pi(x) = -\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \text{ – потенціальна енергія;}$$

$$\mathrm{K}(y) = \frac{y^2}{2} \text{ – кінетична енергія.}$$

Фазові траєкторії лежать на лініях рівняння $E(x, y) = C$ [10, § 5.5].

Накреслити інтегральні криві в околах особливих точок:

1086. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{3x + 4y}$. **1087.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 4y}{2x + 3y}$. **1088.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 4y}{2y - 3x}$.

1089. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 2x}{y}$. **1090.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2y}{3x - 4y}$. **1091.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 2x}{2y - 3x}$.

1092. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x - y}$. **1093.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 2x}{x}$. **1094.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

1095. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - y}{3x - 2y}$. **1096*.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x + y}$. **1097*.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{y - x^2}$.

Накреслити фазові портрети лінійних систем:

1098. $\begin{cases} \dot{x} = 3x; \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ **1099.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y; \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$

1100. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y; \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$ **1101.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y; \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$

1102. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

1103. $\begin{cases} \dot{x} = x; \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

1104. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y; \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

1105. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x; \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$

Знайти та дослідити особливі точки рівнянь і положення рівноваги систем:

1106. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{x - 2y - 5}.$

1107. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$

1108. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$

1109. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$

1110. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$

1111. $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y; \\ \dot{y} = 2xy - 4x - 8. \end{cases}$

1112. $\begin{cases} \dot{x} = -2t(x - y); \\ \dot{y} = 2 + x - y^2. \end{cases}$

1113. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2); \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$

1114. $\begin{cases} \dot{x} = (y - 1)(3x + y - 5); \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 5. \end{cases}$

1115. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2; \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$

1116. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y; \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$

1117. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2); \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

1118. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2; \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$

1119. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2); \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$

1120. $\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1; \\ \dot{y} = y^2 - x + 1. \end{cases}$

1121. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9; \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9. \end{cases}$

1122. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y; \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$

Побудувати лінії рівня енергії та фазові криві систем Ньютона:

1123. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = x - x^2. \end{cases}$

1124. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = \sin 2x. \end{cases}$

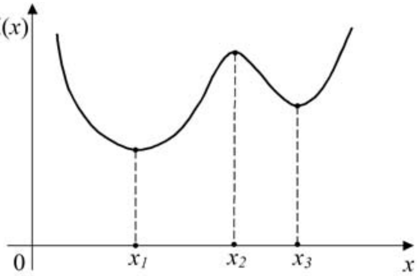

Рис.20

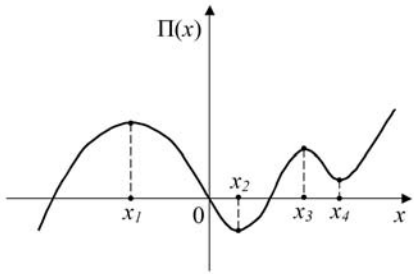

Рис.21

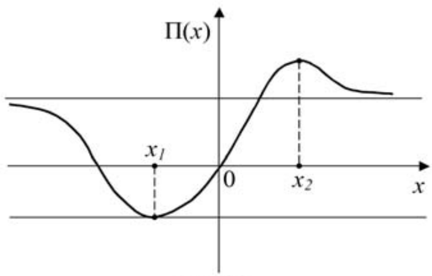

Рис.22

Зобразити графічно фазові криві консервативних систем із заданою потенціальною енергією:

1125. $\Pi(x) = \pm\dfrac{2x}{1+x^2}.$ **1126.** $\Pi(x) = \pm x \sin x.$

1127. Накреслити лінії рівня енергії та фазової траєкторії систем Ньютона, потенціали яких зображено на рис. 20–22.

1128. Довести, що кожна із заданих систем

а) $\begin{cases} \dot{x} = y + x\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right); \\ \dot{y} = -x + y\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right). \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}; \\ \dot{y} = x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

має граничні цикли. Скільки їх?

Вказівка. Див. [10, § 5.5].

Накреслити на фазовій площині траєкторії систем, заданих в полярних координатах:

1130. $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \rho(1-\rho^2); \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases}$

1131. $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \rho(\rho-1)(\rho-2); \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases}$

1132. $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = (1-\rho)^2; \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases}$

1133. $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \sin\rho; \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases}$

1134. $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \rho\sin\frac{1}{\rho}; \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases}$

1135. Довести, що якщо особлива точка рівняння $(ax+by)\,dx+$ $+(mx+ny)\,dy=0$ $(an \neq bm)$ є центром, то це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Чи вірне обернене твердження?

1136. Довести, що якщо рівняння попередньої задачі не є рівнянням у повних диференціалах, але має неперервний в околі особливої точки інтегрувальний множник, то особлива точка – сідло.

§ 24. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ

1. Розв'язок $x=\varphi(t)$ системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{24.1}$$

де $f=(f_1,\ldots,f_n)$, $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, f_i – неперервно диференційовні по x_i $(i=\overline{1,n})$, $t \geq t_0$, називається *стійким в сенсі Ляпунова*, якщо $\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta=\delta(\epsilon): \quad \forall x(t)$ – розв'язку системи (24.1) такого, що $||x(t_0)-\varphi(t_0)||<\delta \Rightarrow ||x(t)-\varphi(t)||<\epsilon,\ t\geq t_0$.

Розв'язок називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий у сенсі Ляпунова і, крім того, для всіх розв'язків $x(t)$ таких, що $||x(t_0)-\varphi(t_0)||<\delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}||x(t)-\varphi(t)||=0$. Якщо ж $\delta=+\infty$, то тоді розв'язок називають *стійким всюди.*

2. Розглянемо теорему Ляпунова про стійкість за першим наближенням.

Теорема Ляпунова (про стійкість за першим наближенням). *Якщо лінеаризована для (24.1) в околі досліджуваного розв'язку система є асимптотично стійкою (всі її розв'язки асимптотично стійкі), то досліджуваний розв'язок вихідної системи асимптотично стійкий.*

Зауважимо, що питання стійкості нетривіального розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (24.1) заміною $x(t) - \varphi(t) = y(t)$ завжди можна звести до аналогічного питання, але вже для тривіального розв'язку $y \equiv 0$ отриманої системи.

3. Для ЛОС зі сталою матрицею

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{24.2}$$

дослідження стійкості тривіального розв'язку залежить від характеру власних чисел матриці A. Так, якщо всі власні числа матриці A мають від'ємні дійсні частини $(\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = \overline{1,n})$, то всі розв'язки системи (24.2) є асимптотично стійкими. Якщо ж є хоча б одне власне число λ_s таке, що $\operatorname{Re}\lambda_s > 0$, то всі розв'язки (24.2) є нестійкими.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda_i \geq 0$ і, крім того, кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідає одновимірна клітина Жордана, то всі розв'язки системи (24.2) стійкі в сенсі Ляпунова.

4. Для вивчення $\operatorname{Re}\lambda_i$ не обов'язково знаходити всі λ_i з характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{24.3}$$

Можна скористатися однією з наступних умов.

Умова Рауса–Гурвіца: для того, щоб усі розв'язки рівняння (24.3) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб головні мінори матриці Гурвіца

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \tag{24.4}$$

були додатними: $\Delta_1 = a_1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} > 0$ і т.д.

Умова Льєнара–Шипара: для того щоб дійсні частини власних чисел матриці A були від'ємними, необхідно і достатньо, щоб усі $a_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$ і $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$ і т.д.

5. *Метод функцій Ляпунова* [10, § 5.4] полягає у визначенні характеру стійкості розв'язку системи (24.1) за властивостями деякої скалярної функції (*функції Ляпунова*) $V(t, x)$ та її похідної відповідно до системи (24.1)

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(24.1)} = (\operatorname{grad} V, f) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n.$$

Теорема Ляпунова. *Якщо для автономної системи* $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $f(0) = 0$, *існує функція Ляпунова* $V(x)$ *така, що:*

а) $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ *при* $||x|| < h$;

б) $\frac{dV}{dt} = (\operatorname{grad} V, f) \le 0$ *при* $||x|| < h$,

то тривіальний розв'язок цієї системи буде стійким. Якщо ж $\frac{dV}{dt} \le -W(x) < 0$ *в силу системи (*$W(x)$ *– неперервна скалярна функція), то тривіальний розв'язок є асимптотично стійким.*

Єдиного методу побудови функції Ляпунова не існує. Часто її будують у вигляді квадратичної форми або застосовують метод відокремлених змінних, тобто шукають функцію Ляпунова у вигляді

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + \ldots + V_n(x).$$

Теорема Четаєва. *Якщо для системи* $x = f(t, x)$ $(f(t, 0) = 0)$ *в деякій області* D *простору* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(0 \in \partial D)$ *існує функція Ляпунова* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *така, що:*

а) $V = 0$, $\forall x \in \partial D$;

б) $V > 0$, $\forall x \in D$; $\frac{dV}{dt} = (\operatorname{grad} V, f) \ge W(x) > 0$, $W(x)$ *– неперервна функція, то нульовий розв'язок буде нестійким.*

1137. Дослідити стійкість нульового розв'язку рівняння

$$y'' + py' + qy = 0; \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

1138. Дослідити стійкість нульового розв'язку системи, якщо відомий її загальний розв'язок:

а) $x = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2;$

б) $x = \frac{C_1 - C_2 t}{1+t}, \quad y = (C_1 t^3 + C_2)e^{-t}.$

Користуючись означенням стійкості, дослідити стійкість розв'язків задач Коші:

1139. $\frac{dx}{dt} = t(x-1):$ **а)** $x(1) = 2$, **б)** $x(1) = 0$.

1140. $\frac{dx}{dt} = (2 - t^3)x:$ **а)** $x(0) = 0$, **б)** $x(0) = 1$.

1141. $\frac{dx}{dt} = x(x^2 - 1):$ **а)** $x(0) = 0$, **б)** $x(0) = -1$.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи:

1142. $\begin{cases} \dot{x} = 2x; \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$

1143. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x); \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

1144. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y; \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

1145. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x; \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$

1146. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y; \\ \dot{y} = x - 7y \end{cases}$

1147. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x); \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases}$

1148. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y; \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$

1149. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x; \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

1150. $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + 1 - \cos y; \\ \dot{y} = \sin^2 x + 1 - e^y. \end{cases}$

1151. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y; \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$

Дослідити стійкість положень рівноваги систем:

1152. $\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$

1153. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x - y + xy; \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

1154. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 1; \\ \dot{y} = \ln(x^2 + y). \end{cases}$

1155. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x}; \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$

1156. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y - \sin x); \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$ **1157.** $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x; \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

1158. $\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$ **1159.** $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x; \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$

1160. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x; \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y}. \end{cases}$

Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок буде асимптотично стійким:

1161. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2; \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$ **1162.** $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2; \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$

1163. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x; \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$ **1164.** $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2; \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases}$

1165. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e - ax) - e^y; \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$ **1166.** $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}; \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$

1167. Дослідити, чи є стійким розв'язок $x = -t^2$, $y = t$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x; \\ \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y}. \end{cases}$$

1168. Дослідити, чи є стійким розв'язок $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(x + 2\sin^2 \frac{t}{2}\right) - \frac{y}{2}; \\ \dot{y} = (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t. \end{cases}$$

Побудувати функції Ляпунова та дослідити стійкість нульових розв'язків, застосувавши теореми Ляпунова або Четаєва:

1169. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy; \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$ **1170.** $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y; \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

1171. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3; \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$ **1172.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5; \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$

1173. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3; \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$ **1174.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3; \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$

1175. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2; \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$ **1176.** $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy; \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$

Записати матрицю Гурвіца та застосувати критерій Рауса-Гурвіца для дослідження асимптотичної стійкості нульового розв'язку:

1177. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y^{(3)} + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$

1178. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 10y^{(3)} + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$

1179. $y^{(5)} + 5y^{(4)} + 15y^{(3)} + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$

1180. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 14y^{(3)} + 36y'' + 23y' + 68y = 0.$

1181. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y^{(3)} + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$

1182. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y^{(3)} + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$

Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок буде асимптотично стійким:

1183. $y^{(3)} + ay'' + by' + 2y = 0.$

1184. $y^{(3)} + 3y'' + ay' + by = 0.$

1185. $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y'' + 2y' + ay = 0.$

1186. $y^{(4)} + ay^{(3)} + y'' + 2y' + y = 0.$

1187. $ay^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + by = 0.$

1188. $y^{(4)} + y^{(3)} + ay'' + y' + by = 0.$

1189. $y^{(4)} + ay^{(3)} + 4y'' + 2y' + by = 0.$

1190. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + ay'' + by' + y = 0.$

1191. При яких значеннях параметрів a і b система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay; \\ \dot{y} = bx - y + az; \\ \dot{z} = by - z. \end{cases}$$

є асимптотично стійкою?

1192. Побудувавши матрицю монодромії й обчисливши її власні числа (мультиплікатори системи), дослідити стійкість нульового розв'язку рівняння

$$x'' + p(t)x = 0, \quad p(t) = \begin{cases} a^2, & \text{якщо } 0 \le t < \pi; \\ b^2, & \text{якщо } \pi \le t < 2\pi, \end{cases} \quad p(t+2\pi) = p(t),$$

та розглянути такі варіанти:

а) $a = 0,5;\ b = 0$; **б)** $a = 0,5;\ b = 1$; **в)** $a = 0,5;\ b = 1,5$; **г)** $a = 0,75;$ $b = 0$; **д)** $a = 1;\ b = 0$; **е)** $a = 1;\ b = 1,5$.

1193. Дослідити, при яких a і b буде стійким нульовий розв'язок системи з періодичними коефіцієнтами: $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, якщо $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, при $t \in (0,\,1)$; $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, при $t \in (1,\,2)$; $A(t+2) = A(t)$.

1194. Довести, що всі розв'язки системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A(t)$ – квадратна матрична функція з неперервними компонентами, є стійкими, нестійкими, асимптотично стійкими *одночасно.*

1195. Довести, що для стійкості нульового розв'язку (а, отже, й усіх розв'язків) системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ необхідно й достатньо, щоб інтегральна матриця цієї системи була обмеженою, для асимптотичної стійкості – норма цієї матриці прямувала до нуля при $t \to +\infty$, а для нестійкості – інтегральна матриця системи була необмеженою.

1196. Довести, що якщо кожен розв'язок лінійної однорідної системи залишається обмеженим при $t \to \infty$, то нульовий розв'язок стійкий.

1197. Довести, що якщо лінійна однорідна система має хоча б один необмежений при $t \to \infty$ розв'язок, то нульовий розв'язок нестійкий.

1198. Чи стійкий нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t)y; \\ \dot{y} = m(t)x + n(t)y, \end{cases}$$

якщо відомо, що $a(t) + n(t) \to A > 0$ при $t \to +\infty$?

1199. Довести, що для стійкості нульового розв'язку рівняння $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ з неперервною функцією $a(t)$ необхідно та достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_0^t a(\xi)\, d\xi < +\infty.$$

1200. Для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by; \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases}$$

побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми відповідно до умови $\dot{V} = -2(a+d)(bc-ad)x^2$. Застосовуючи критерій Рауса-Гурвіца записати умови додатної сталості цієї функції та від'ємної визначеності її похідної.

1201*. Використовуючи результати попередньої задачі та застосовуючи рівність $ax^2 = \int\limits_0^x a\xi\, d\xi$, знайти функцію Ляпунова для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + by; \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases}$$

Записати умови знаковизначеності функції Ляпунова та її похідної в силу системи.

1202. Методом відокремлення змінних побудувати функцію Ляпунова для рівняння

$$x'' + \varphi(x') + g(x')f(x) = 0.$$

1203. Для рівняння Ньютона $x'' = f(x)$ побудувати функцію Ляпунова як повну енергію відповідної динамічної системи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання №1.

Дослідити поле напрямів, породжене диференціальним рівнянням, вказати особливі точки, лінії екстремуму, області єдиності та монотонності.

Побудувати інтегральні криві. Подати їх аналітично, розв'язавши рівняння. Вивчити поведінку інтегральних кривих в околах особливих точок, особливих ліній, на межі області визначення та на нескінченності:

1. $y' = |x|$;
2. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.
3. $y' = \frac{|y|}{y}$;
4. $y' = 2\sqrt{|x|}$.
5. $y' = 2\frac{y}{x}$;
6. $y' = y \ln |y|$.
7. $y'y = -x^3$;
8. $y' + 2xy = 1$.
9. $y' = -y \cos x$;
10. $y' = \frac{y^2}{2}$.

Завдання №2.

Довести, використовуючи теорему Пікара, існування та єдиність розв'язку поставленої задачі Коші. Оцінити інтервал існування єдиного розв'язку та побудувати друге наближення Пікара:

1. $y' = x^2 + y^2$, $|x| \le 1$, $|y| \le 1$; $y = 0$ при $x = 0$.
2. $y' = x^2 - y^2$, $|x| \le 1$, $|y| \le 1$; $y = 0$ при $x = 0$.
3. $y' = \sin(xy)$, $|x| \le 1$, $|y| \le \infty$; $y = 1$ при $x = 0$.
4. $y' = \frac{1}{1-x} y$; $y = 1$ при $x = 0$.
5. $y' = |y|$; $y = 1$ при $x = 0$.

При яких початкових даних (x_0, y_0) задача Коші $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок? Оцінити область його існування:

6. $x^2y' + xy = 1.$

7. $y' + y\ln y = 0.$

8. $y' + e^x y = 0.$

9. $y' + y\sqrt{1+x} = 0.$

10. $y' = 1 + 2xy.$

Завдання №3.

Визначити тип кожного з рівнянь та вказати методи його інтегрування:

1. $\left(x + x^2\right) y' - (1+2x)y = 1 + 2x.$

2. $\left(y + x^3\right)\, dy + \left(3x^5 - 3x^2y\right)\, dx = 0.$

3. $y\, dx + \left(x - 2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\, dy = 0.$

4. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$

5. $y\, dx + \left(2x - y^2\right)\, dy = 0.$

6. $(x + 2y + 1)\, dx - (x - 3)\, dy = 0.$

7. $xyy' - y^2 = \frac{(x^2+y^2)x}{y-x}.$

8. $2\left(y - 2xy - x^2\sqrt{y}\right) + x^2y' = 0.$

9. $y' = y^2 - x^2 + 1.$

10. $(3x + 3y - 1)\, dx + (x + y + 1)\, dy = 0.$

Завдання №4.

Проінтегрувати рівняння. Розв'язати задачі Коші, дослідивши попередньо питання про існування та єдиність розв'язків:

1. $xy' - y = -y^2;\quad x_0 = 0,\ y_0 = 1.$

2. $y' = \frac{4y}{x^2} - x\sqrt{y};\quad x_0 = 0,\ y_0 = 1.$

3. $y' = y\cos x;\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0.$

4. $y' = 2\sqrt{|y|};\quad x_0 = 1,\ y_0 = 0.$

5. $y' = 1 - y^2;\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0.$

6. $y' = \frac{1}{y};\quad x_0 = 2,\ y_0 = 2.$

7. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x};\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1.$

8. $y' = 3x^2$; $x_0 = 0,\ y_0 = 0.$

9. $y' = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$; $x_0 = 1,\ y_0 = 1$

10. $y' = \operatorname{sh} x$; $x_0 = 0,\ y_0 = 1.$

Завдання №5.

Знайти особливі розв'язки рівнянь або довести, що їх немає ($a \in \mathbb{R}$):

1. $y' = (y-1)^{\frac{2}{3}}.$

2. $y' = \sqrt{y} + a.$

3. $y' = ax + \sqrt{x^2 - y}.$

4. $y' = \sqrt{y-x} + a.$

5. $y' = \sqrt{y-x} + ax.$

6. $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}.$

7. $y' = x^2 + y^4.$

8. $y' = \frac{y-x}{y+x}.$

9. $\left(x^2 - xy + y^3\right)\, dx + \left(y^3 - x^2\right)\, dy = 0.$

10. $y' = x + \sqrt{x^2 + y^2}.$

Завдання №6.

Визначити типи рівнянь та вказати можливі методи їх інтегрування:

1. $y = xy' - \sin y'.$

2. $x = e^{y'} - 2y'.$

3. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0.$

4. $y'^2 - 2xy' = 0.$

5. $y = 2xy' + y'^2.$

6. $y'^3 - 4yy' = 0.$

7. $y = y' + \sin y' + \cos y'.$

8. $y = xy'^2 + y'^2.$

9. $x^3 + y'^2 - 3xy = 0.$

10. $y = -x + y'^2 + y'^3.$

Завдання №7.

Проінтегрувати рівняння. Там, де вказано початкову точку, знайти інтегральні криві, що проходять через неї:

1. $y = -xy' + y'^{\frac{5}{2}}.$

2. $x^2(1 - y') = y'^2.$

3. $e^{y'} - y'^2 = x.$

4. $y'^3 - y'^2 + \cos y' - 1 = 0.$

5. $y = xy' - 2y'^2,\ M(2;0).$

6. $y'^2 + 4y = 0,\ M(0;-1).$

7. $y'^2 + 4x = 0$, $M(0;0)$.

8. $y'^2 - \left(x + y + \frac{y}{x}\right) y' + y + \frac{y^2}{x} = 0$, $M(0;0)$.

9. $y = -xy' - y'^2$.

10. $y = y'^3 - y'^2 + 1$.

Завдання №8.

Методом p–дискримінантної кривої знайти особливі розв'язки:

1. $x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3$.

2. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

3. $\left((x-y)^2 - 1\right) y'^2 - 2y' + (x-y)^2 - 1 = 0$.

4. $y'^2 - y^3 = 0$.

5. $y'^3 - 4yy' = 0$.

6. $y'^2 - 2yy' + 2x^2 - y = 0$.

7. $y'^2 - 4xy' + 3x^2 - y^2 = 0$.

8. $y = xy' + 4y'^2$.

9. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$.

10. $y'^2 + y^2 - 1 = 0$.

Завдання №9.

Методом c–дискримінантної кривої знайти особливі розв'язки:

1. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$, $\quad y = a \operatorname{sh}\left(\frac{x+C}{a}\right)$.

2. $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$, $\quad y = \frac{x^2}{2}Cx + C^2$.

3. $4x^2y'^2 - 4xyy' + y^2 - 4x^3 = 0$, $\quad y^2 = x(x-C)^2$.

4. $y' - 4xyy' + 8y^2 = 0$, $\quad y = C(x-C)^2$.

5. $y'^2 - y^3 = 0$, $\quad y = \frac{4}{(x+C)^2}$.

6. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$, $\quad C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0$.

7. $y'^2 = 1 - y^2$, $\quad y = \sin(x + C)$.

8. $\left((x-y)^2 - 1\right) y'^2 - 2y' + (x-y)^2 - 1 = 0$, $(x-C)^2 + (y-C)^2 = 1$.

9. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$, $\quad y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$.

10. $y^2(1 + y'^2) - ayy' - ax = 0$, $\quad (x_C)^2 + y^2 - aC = 0$.

Завдання №10.

I. Застосовуючи метод послідовних наближень Пікара, знайти точний розв'язок задачі Коші $\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$; $y(\alpha) = \beta$. Ці ж задачі розв'язати методом Лагранжа або Бернуллі. Порівняти отримані результати (для всіх варіантів $\alpha = 0$).

Варіант	$a(x)$	$b(x)$	β
1	1	$2x - x^2$	1
2	1	$x - 1$	1
3	$-x$	x^3	-1
4	$2x$	$2x^3$	0
5	-1	$2e^x$	2

II. У прямокутнику $\Pi = \{(x, y) : \quad |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ задана задача Коші $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:

а) перевірити виконання умов Пікара. Знайти сталу Ліпшица та відрізок I, на якому послідовні наближення Пікара збігаються до точного розв'язку;

б) оцінити $\max\limits_{x \le I} |y(x) - y_3(x)|$. Для якого n буде справедлива нерівність $|y - y_n| \le 0,1$?

Варіант	$f(x, y)$	x_0	y_0	a	b
6	$x^2 + y^2$	0	0	2	1
7	$x^2 - y^2$	0	0	1	2
8	$x^2 - y^2$	2	0	1	1
9	$x^2 + y^2$	3	0	3	1
10	$x^2 - y^2$	4	2	2	2

Завдання №11.

I. В області $K \subset \mathbb{R}^2$ задано задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = g(y), \quad y(x_0) = y_0 :$$

а) перевірити виконання умов теореми Пеано. На якому інтервалі ця теорема гарантує існування розв'язку?

б) чи виконуються для цієї задачі умови теореми Пікара?
в) знайдіть усі розв'язки поставленої задачі Коші та накресліть їх графіки:

Варіант	$g(y)$	$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$	x_0	y_0
1	$3y^{\frac{2}{3}}$	$x^2 + y^2 \leq 1$	0	0
2	$-3y^{\frac{2}{3}}$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leq 1$	0	0
3	$4(y-1)^{\frac{3}{4}}$	$x^2 + y^2 - 2y - 3 \leq 0$	0	1
4	$2\sqrt{y}$	$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$	0	0
5	$\sqrt{-y}$	$x^2 + y^2 \leq 4$	1	0

II. Задано диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt} = f(y)$:
а) чи має воно розв'язки, визначені на всій осі?
б) накреслити інтегральні криві;
в) нехай $y(t, y_0)$, $t \in I_{y_0}$ – повний (непродовжуваний) розв'язок рівняння, такий, що $y(0, y_0) = y_0$; знайти явний вигляд I_{y_0} залежно від y_0;
г) при фіксованому $t \geq 0$ розглянемо відображення $g^t : H \to \mathbb{R}$, $y_0 \to y(t, y_0)$, $H \subset \mathbb{R}$. Чи визначене це відображення на всій осі? Знайти множину $H \subset \mathbb{R}$ таку, що g^t існує для всіх $t \geq 0$. Чи існують такі точки y_0: $g^t(y_0) = y_0$, $\forall t \geq 0$?

6. $f(y) = y^2 + 3y + 2$.

7. $f(y) = y - y^2$.

8. $f(y) = 3y - y^2 - 2$.

9. $f(y) = y^2 + y - 6$.

10. $f(y) = y^2 + y - 2$.

Завдання №12.

I. Знайти ізогональні траєкторії сімей кривих (C – параметр сім'ї, α – кут перетину):

1. $x^2 + y^2 = C^2$, $\alpha = 60°$.

2. $y = 2x + C$, $\alpha = 45°$.

3. $x^2 + (y - C)^2 = 1$, $\alpha = 30°$.

4. $x^2 + y^2 = Cy$, $\alpha = 60°$.

5. $x^2 = Cy$, $\alpha = 60°$.

II. Знайти ортогональні траєкторії сімей кривих (C – параметр сім'ї):

6. $2x^2 - 3y = C$.

7. $y = e^{Cx}$.

8. $y = \frac{1+Cx}{1-Cx}$.

9. $r = C\varphi$ (r, φ – полярні координати).

10. $r = C(1-\cos\varphi)$ (r, φ – полярні координати).

Завдання №13.

Визначити тип рівняння та знизити його порядок до першого:

1. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 2$.

2. $y''' = x^2$.

3. $y' + y''^2 = xy''$.

4. $e^{y''} + y'' - x = 0$.

5. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

6. $xy'' - y' = x\sin x$.

7. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

8. $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$.

9. $y'y''' = y''^2 + y'^2y''$.

10. $yy'' = y'^2 + 2xy^2$.

Завдання №14.

Проінтегрувати методом варіації довільних сталих (Лагранжа):

1. $y'' + 4y = \cos 2x + \sin 2x \operatorname{tg} 2x$.

2. $y'' - 2y' + y = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$.

3. $y''' + y' = \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}$.

4. $y'' - y' = \frac{(2-x)e^x}{x^2}$.

5. $y'' + y = -\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

6. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

7. $y'' + 3y + 2y = \frac{1}{e^x+2}$.

8. $y'' - y = \frac{1}{x^2}$.

9. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

10. $y'' + y = 2\sec^3 x$.

Завдання №15.

Написати частинний розв'язок рівняння з невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів не шукати):

1. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x} + e^x \cos 3x$.

2. $y'' - 9y = e^{-3x}\left(x^2 + \sin 3x + \cos 3x\right)$.

3. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 3e^{4x} \cos x$.

4. $y''' + y' = \sin x + x \cos x + e^x \sin x$.

5. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}\left(x^2 - 3x \cos x\right)$.

6. $y'' - 2y' + 5y = 2x^2 e^x + e^x \cos 2x$.

7. $y^{(4)} + y'' = 7x - 3 \sin x + e^x \cos 2x$.

8. $y''' - 2y'' + y = xe^x + x \cos 3x$.

9. $y''' - 2y'' = x^2 + \cos 3x$.

10. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \sin 5x + e^{2x} \cos 5x$.

Завдання №16.

Побудувати лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (якомога нижчого порядку), які мають такі частинні розв'язки:

1. $y_1 = x^3 e^{2x}$.

2. $y_1 = xe^x \cos 3x$.

3. $y_1 = \cos x,\ y_2 = x$.

4. $y_1 = e^{2x} \cos 3x$.

5. $y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^x$.

6. $y_1 = x \sin 2x$.

7. $y_1 = xe^x \sin 2x$.

8. $y_1 = e^{3x} \sin x$.

9. $y_1 = 1,\ y_2 = \cos x$.

10. $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-2x}$.

11*. $y_1 = x,\ y_2 = x^3,\ y_3 = x^3$.

Завдання №17.

Побудувати ЛОР, які мають задані ФСР:

1. $y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x$.

2. $y_1 = e^{-x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{-x} \sin 2x$.

3. $y_1 = xe^x, \quad y_2 = e^x(1-x).$

4. $y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = 3x^3.$

5. $y_1 = xe^{2x}, \quad y_2 = x^2e^x.$

6. $y_1 = \sin x^2, \quad y_2 = \cos x^2.$

7. $y_1 = x, \quad y_2 = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$

8. $y_1 = \exp\left(x^2\right), \quad y_2 = \exp\left(-x^2\right).$

9. $y_1 = \operatorname{sh} x, \quad y_2 = \operatorname{ch} x.$

10. $y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = e^{2x}.$

Завдання №18.

Проаналізувати поведінку розв'язків лінійних рівнянь:

1. При яких a і b всі розв'язки рівняння $y''+ay'+by=0$ залишаються обмеженими при $x \to +\infty$?

2. При яких a і b всі розв'язки рівняння $y''+ay'+by=0$ прямують до нуля при $x \to +\infty$?

3. При яких a і b всі розв'язки рівняння $y''+ay'+by=0$ монотонно зростають за модулем, починаючи з деякого x?

4. При яких a і b кожний розв'язок рівняння $y''+ay'+by=0$ перетворюється на нуль на нескінченній множині точок x?

5. При яких k і ω рівняння $y''+k^2y'=\sin\omega t$ має хоча б один періодичний розв'язок?

6. Знайти періодичні розв'язки рівняння $y''+y'+4y=\sin\omega t$.

7. При яких значеннях m рівняння $y''+my=0$ має нетривіальні розв'язки, які прямують до нуля при $x \to +\infty$?

8. При яких p і q всі розв'язки рівняння $y''+py'+qy=0$ є періодичними функціями?

9. При яких значеннях параметра λ рівняння $y''+\lambda y=0$ має ненульові розв'язки, які задовольняють крайові умови $y=0$ при $x=0$, $y=0$ при $x=\pi$? Знайти ці розв'язки.

10. При яких ω загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \cos\omega t$ не містить секулярних доданків (тобто добутків періодичної функції та степеня незалежної змінної)?

Завдання №19.

Звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни незалежної змінної та проінтегрувати отримане рівняння:

1. $x^2y'' - xy' + y = 0.$

2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$

3. $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + 4y = 0.$

4. $x^2y'' - 3y' + 13y = 0.$

5. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$

6. $x^2yy'' + xy' + y = 0.$

7. $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + y = 0.$

8. $(2x + 1)^2y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0.$

9. $(x + 2)^2y'' + 3(x + 2)y' - 3y = 0.$

10. $x^2y''' = 2y'.$

11*. $y'' - 2y' + y = xe^x \sin^2 ix.$

Завдання №20.

I. Знайти частинний розв'язок рівняння у вигляді ряду за степенями x. Суму ряду виразити через елементарні функції.

Знайти другий частинний розв'язок, використовуючи формулу Ліувілля-Остроградського. Записати загальний розв'язок рівняння:

1. $y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 2.$

2. $\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1.$

3. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \qquad y_1(0) = y_1'(0) = 1.$

4. $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + y = 0, \qquad y_1(0) = y_1'(0) = 1.$

5. $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' = 0, \qquad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0.$

II. Знайти загальні розв'язки рівнянь Бесселя:

6. $xy'' + 0,5y' + 0,25y = 0.$

7. $y'' + \frac{3}{x}y' + 4y = 0.$

8. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{25}y = 0.$

9. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0.$

10. $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{16}\right)y = 0.$

Завдання №21.

Для заданих систем записати відповідні матричні рівняння та методом Ейлера знайти їх інтегральні матриці:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x; \\ \dot{y} = 3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 0; \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x; \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 3y; \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y; \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x; \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 3y; \\ \dot{y} = 5x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 3x; \\ \dot{y} = 5y + x. \end{cases}$

Завдання №22.

Обчислити матрицю e^{At}, якщо матриця A має вигляд:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання №23.

Проінтегрувати матричним способом лінійну однорідну систему $\frac{dx}{dt} = Ax$. Знайти $\det(e^A)$, не обчислюючи e^A:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання №24.

Знайти розв'язки, які задовольняють поставлені початкові умови:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad z = y,\ x = 0.$

2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y; \quad x = a,\ z = y^2 + a^2.$

3. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2; \quad y = a,\ z = x^2 - a^2.$

4. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2; \quad x = a,\ z = 1 + 2y + 3y^2.$

5. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad z = y^2,\ x = 0.$

6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = z; \quad z = \sin y,\ x = 1.$

7. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad z = (R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}},\ x = 0.$

8. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \dfrac{x^2}{4} + z^2 = 1,\ y = 0.$

9. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = z; \quad x + y = 2z,\ xy = 1.$

10. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0; \quad x - y = 0,\ x - yz = 1.$

11*. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy; \quad y = x,\ z = x^2.$

ДОДАТКИ

Додаток 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1. *Лінійним однорідним рівнянням першого порядку з частинними похідними* називається рівняння

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots \\ \ldots + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

де $a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – задані функції від n змінних, визначені та неперервні в деякій області $D \subset \mathbb{R}^n$; $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – шукана функція.

Система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

або в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2*}$$

називається *системою характеристик* для (1).

Функція $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є розв’язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вона є інтегралом (характеристикою) системи (2) або (2*).

Задача Коші для рівняння (1) полягає у знаходженні такого розв’язку $U = U(x)$ цього рівняння, який задовольняє умову

$$U(x)|_{x\in\gamma} = \varphi(x), \tag{3}$$

де γ – деяка задана гіперповерхня в D (*початкова гіперповерхня*); φ – задана на γ гладка функція (*початкова функція*).

Якщо $D \in \mathbb{R}^2$, то задача Коші для рівняння (1) – це задача знаходження такої інтегральної поверхні $z = z(x, y)$, яка перетинає задану площину вздовж заданої кривої.

Точка $x_0 \in \gamma$ називається *нехарактеристичною*, якщо характеристика, яка проходить через цю точку, не дотична (трасверсальна) до γ.

Якщо x_0 – нехарактеристична точка, то існує такий її окіл, в якому задача Коші (3) для рівняння (1) має єдиний розв'язок.

Нехай $\{\Psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}_{i=1}^{n-1}$ – незалежні інтеграли системи характеристик (зауважимо, що (2^*) – система $(n-1)$–го порядку), тоді співвідношення

$$U = \Phi\left(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n-1}\right), \tag{4}$$

де Φ – довільна диференційовна функція, задає множину всіх розв'язків рівняння (1).

Щоб розв'язати задачу Коші для рівняння (1) з початковою умовою (3), де гіперповерхня γ задана, наприклад, рівнянням $x_n = x_n^0$, досить виконати такий ланцюг перетворень:

а) знайдемо $\{\Psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}_{i=1}^{n-1}$ – незалежні інтеграли системи характеристик;

б) покладемо

$$\Psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_n^0) = \overline{\Psi}_i \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{5}$$

в) розв'язавши систему (5) відносно x_i, $i = \overline{1, n-1}$, матимемо

$$x_i = \overline{\omega}_i\left(\overline{\Psi}_1, \dots, \overline{\Psi}_{n-1}\right), \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{6}$$

г) підставимо (6) у початкову умову (3)

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{x_n = x_n^0} = \varphi(\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{n-1}); \tag{7}$$

д) замінивши в (7) $\overline{\Psi}_i$ на Ψ_i, дістанемо розв'язок поставленої задачі Коші.

2. *Лінійним неоднорідним рівняння першого порядку з частинними похідними* називається рівняння

$$\begin{gathered} a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_n} = b(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{gathered} \tag{8}$$

Задача Коші для рівняння (8) ставиться так само, як і для однорідного рівняння. У досить малому околі кожної нехарактеристичної точки початкової поверхні вона має єдиний розв'язок, який можна подати у вигляді

$$U(g(x,t)) = \varphi(x) + \int\limits_0^t b(g(x,\tau))\,d\tau, \tag{9}$$

де $g(x,t)$ – значення розв'язку системи рівнянь характеристик з початковою умовою $g(x,0)=x$ у момент часу t.

Формальна процедура розв'язування рівняння (8) полягає в знаходженні незалежних інтегралів (характеристик) системи

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \ldots \\ \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{dU}{b(x_1,x_2,\ldots,x_n)}.\end{gathered} \tag{10}$$

Якщо $\Psi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,U),\ldots,\Psi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,U)$ – характеристики системи (10), то співвідношення

$$\Phi(\Psi_1,\ldots,\Psi_n) = 0, \tag{11}$$

де Φ – довільна диференційовна функція, задає всі розв'язки рівняння (8).

3. *Квазілінійним рівнянням першого порядку з частинними похідними* називається рівняння

$$\begin{gathered}a_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,U)\frac{\partial U}{\partial x_1} + a_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,U)\frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots \\ \ldots + a_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,U)\frac{\partial U}{\partial x_n} = b(x_1,x_2,\ldots,x_n,U).\end{gathered} \tag{12}$$

Суттєвою є залежність коефіцієнтів a_i, $i=\overline{1,n}$ та b не лише від $x_1,x_2,\ldots,x_n$, але й від U. Система рівнянь характеристик для (12) аналогічна (10).

Щоб знайти розв'язок $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рівняння (12), який задовольняє початкову умову (3), де гіперповерхня γ задана, наприклад, рівнянням $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, треба з системи

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ \Psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, U) = C_i; \\ U = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{13}$$

вилучити $x_1, x_2, \ldots, x_n, U$, діставши тим самим співвідношення вигляду

$$F(C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{14}$$

Підставивши в (14) замість C_i, $i = \overline{1, n}$ значення характеристик (n незалежних інтегралів системи рівнянь характеристик) $\Psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, дістанемо розв'язок поставленої задачі Коші.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\left(1 + x^2\right) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

та виділити інтегральну поверхню, яка проходить через криву $z = y^2$ на площині $x = 0$.

Розв'язання. Складемо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{xy}.$$

Функція $\Psi_1 = \frac{y^2}{1+x^2}$ є характеристикою, а отже, $z = \Phi\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)$, де Φ – довільна диференційовна функція, задає множину всіх розв'язків заданого рівняння.

Щоб розв'язати поставлену задачу Коші, покладемо $x = x_0 = 0$ у співвідношенні $\Psi_1 = \frac{y^2}{1+x^2}$, дістанемо $\overline{\Psi}_1 = y^2$, звідки $y = \sqrt{\overline{\Psi}_1}$. Тому $z = y^2 = \left(\sqrt{\Psi_1}\right)^2 = \frac{y^2}{1+x^2}$ і є шуканим розв'язком задачі Коші.

Приклад 2. Знайти множину розв'язків рівняння

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$$

та виділити такі розв'язки, що задовольняють умову $z = x^2$ при $y = x$.

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2xy}$$

та знаходимо її два незалежних інтеграли (характеристики) $\Psi_1 = \frac{y}{x}$, $\Psi_2 = xy - z$. Отже, множину всіх розв'язків рівняння можна подати у вигляді

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, xy - z\right) = 0. \tag{15}$$

Зауважимо, що (15) можна розв'язати відносно z, дістанемо:

$$z = xy + f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{15*}$$

де f – довільна неперервно диференційовна функція.

Поставлена задача Коші розв'язується неоднозначно. Справді, система рівнянь $\begin{cases} \overline{\Psi}_1 = 1; \\ \overline{\Psi}_2 = x^2 - z \end{cases}$ не може бути однозначно розв'язана відносно x, z. Проте, вимагаючи, щоб в (15^*) $z = x^2$ при $y = x$, матимемо $f(1) = 0$. Отже, задача Коші має безліч розв'язків, які задаються формулою (15^*), де f – довільна неперервно диференційовна функція така, що $f(1) = 0$.

Розв'язати рівняння:

1204. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1205. $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1206. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1207. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y.$

1208. $\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$

1209. $\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y^2 - z^2 = 0.$

1210. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy\sqrt{a^2-z^2}.$

1211. $\left(z^2+y^2-x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+2xz=0.$

1212. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=au.$

1213. $(x-a)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-b)\dfrac{\partial u}{\partial y=u-c}.$

1214. $(cy-bz)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\dfrac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$

1215. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=u.$

1216. $\left(x^3+3xy^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y^3\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y^2z.$

1217. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2.$

1218. $(y+z+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y+z.$

1219. $e^x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=ye^x.$

Розв'язати задачі Коші:

1220. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=x, \quad x=0,\ z=y^2.$

1221. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy, \quad x=2,\ z=y^2+1.$

1222. $\operatorname{tg}x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, \quad y=x,\ z=x^3.$

1223. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=x, \quad x=0, z=y^2.$

1224. $2\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad z=y^2,\ x=1.$

1225. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \quad u=yz,\ x=1.$

1226. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \quad u=x^2+y^2,\ z=0.$

1227. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2, \quad y=1,\ z=x^2.$

1228. $\operatorname{tg}x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, \quad y=x,\ z=x^3.$

1229. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x^2, \quad y=-2,\ z=x-x^2.$

1230. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz, \quad x+y=2,\ zy=1.$

1231. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(z^2-x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x=0, \quad y=x^2,\ z=2x.$

1232. $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y, \quad y=-x=z.$

1233. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0, \quad y=x,\ x-yz=1.$

1234. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \quad u(x,1,z)=xz.$

1235. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+x^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=y, \quad u(x,0)=x^2.$

1236. $(x-2e^y)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad u(x,0)=x.$

1237. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y, \quad u(1,y)=y+e^y.$

1238. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2, \quad u(x,x)=y+\dfrac{x}{3}.$

1239. Знайти поверхню, яка проходить через пряму $x=y$, $z=1$ і ортогональна до поверхонь $x^2+y^2+z^2=Cy$.

1240. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї площин $y=Cx$.

1241. Знайти поверхні, ортогональні сім'ї поверхонь $z^2=Cxy$.

1242. Скласти рівняння з частинними похідними, які задовольняють усі конічні поверхні з вершиною у даній точці (x_0,y_0,z_0) і розв'язати його.

1243. Скласти рівняння з частинними похідними, які задовольняють циліндричні поверхні, твірні яких паралельні вектору (a,b,c). Розв'язати це рівняння.

1244. Використовуючи результат попередньої задачі, знайти рівняння циліндричної поверхні з твірними, паралельними вектору $(1,-1,1)$, та напрямною $x+y+z=0,\ x^2+xy+y^2=1$.

1245. Знайти поверхні, будь-яка дотична площина до яких перетинає вісь Ox у точці з абсцисою, вдвоє меншою від абсциси точки дотику.

Розв'язати системи:

1246. $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x}; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2z}{y}. \end{cases}$$

1247. $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - z; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$$

1248. $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2yz - z^2; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$$

Знайти поверхні, які задовольняють рівняння Пфаффа [10, додаток 1]:

1249. $3yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0.$

1250. $(z+xy)dx - \left(z+y^2\right)dy + y\,dz = 0.$

1251. $(2yz+3x)\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$

1252. $dz = \frac{z}{x}\,dx + \frac{2z}{y}\,dy.$

1253. $dz = \left(2yz - z^2\right)dz + xz\,dy.$

Знайти повні інтеграли рівнянь [10, додаток 1]:

1254. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + \varphi\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = z.$

1255. $\dfrac{1}{y^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Знайти повні інтеграли рівнянь методом Лагранжа–Шарпі [10, додаток 1]:

1256. $z^2 + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1257. $z^2 + 1 + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1258. $z\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1259. $\dfrac{1}{y}\sqrt{\dfrac{\partial z}{\partial x}} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Додаток 2

ОСНОВНІ ПЕРВІСНІ
(a, b, n – сталі)[1]

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1).$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}\,dx = \ln|x|.$
3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1).$
4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x.$
5. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x.$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x.$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|.$
10. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|.$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$
13. $\displaystyle\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}.$
14. $\displaystyle\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}.$

[1] Стала інтегрування в правих частинах формул випущена заради скорочення; наприклад, замість $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ пишемо $\int \sin x\,dx = -\cos x$

15. $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1).$

16. $\displaystyle\int x^n e^a x\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^a x\,dx.$

17. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$

18. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$

19. $\displaystyle\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x)+$
$\displaystyle+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx.$

20. $\displaystyle\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x)+$
$\displaystyle+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^a x\cos^{n-2}x\,dx.$

21. $\displaystyle\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)-$
$\displaystyle-\frac{e^a x}{(a^2+b^2)^2}\left(\left(a^2-b^2\right)\sin bx - 2ab\cos bx\right).$

22. $\displaystyle\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)-$
$\displaystyle-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}\left(\left(a^2-b^2\right)\cos bx + 2ab\sin bx\right).$

23. $\displaystyle\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}ax\,dx.$

24. $\displaystyle\int \cos^n ax\,dx = -\frac{\cos^{n-1}ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}ax\,dx.$

25. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots \quad (x>0).$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}.$

28. $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x \quad (x>0).$

29. $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}.$

30. $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}.$

31. $\displaystyle\int \mathrm{tg}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)|.$

32. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax)|.$

33. $\displaystyle\int \mathrm{sh}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{ch}(ax).$

34. $\displaystyle\int \mathrm{ch}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}(ax).$

35. $\displaystyle\int x\,\mathrm{sh}(ax)\,dx = \frac{1}{a}x\,\mathrm{ch}(ax) - \frac{1}{a^2}\,\mathrm{sh}(ax).$

36. $\displaystyle\int x\,\mathrm{ch}(ax)\,dx = \frac{1}{a}x\,\mathrm{sh}(ax) - \frac{1}{a^2}\,\mathrm{ch}(ax).$

37. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$

38. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}.$

39. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right).$

40. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right).$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}.$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \mathrm{arcsh}\,\frac{x}{a} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|.$

Додаток 3

ОСНОВНІ РЯДИ ТА СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

1. $(1+x)^p = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \cdot x^k$
$[|x| < 1 \text{ при } p < 0,\ |x| \le 1 \text{ при } p > 0]$.

2. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad [x \in \mathbb{R}]$.

3. $\ln(1-x) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad [-1 \le x < 1]$.

4. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad [|x| < 1]$.

5. $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad [|x| < 1]$.

6. $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \ln 2x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k)} \frac{x^{-2k}}{2k} \quad [x > 1]$.

7. $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad [x \in \mathbb{R}]$.

8. $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad [x \in \mathbb{R}]$.

9. $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}-1}{(2k)!} x^{2k} \left|B_{2k}\right| x^{2k-1} \quad [|x| < \pi]$.[2]

10. $\frac{1}{\cos x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!} x^{2k} \quad [|x| < \frac{\pi}{2}]$.

11. $\operatorname{tg} x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)}{(2k)!} \left|B_{2k}\right| x^{2k-1} \quad [|x| < \frac{\pi}{2}]$.

12. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left|B_{2k}\right| x^{2k-1} \quad [|x| < \pi]$.

13. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad [x \in \mathbb{R}]$.

14. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad [x \in \mathbb{R}]$.

15. $\operatorname{th} x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}. \quad [|x| < \frac{\pi}{2}]$.

[2]Тут і в подальшому: B_n – числа Бернуллі, E_n – числа Ейлера

16. $\operatorname{cth} x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} \qquad [|x| < \pi].$

17. $\arcsin x = 2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \qquad [|x| \le 1].$

18. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - 2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2(2k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \qquad [|x| \le 1].$

19. $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s}\, ds$ – гамма-функція $(x > 0)$;

$\Gamma(n) = (n-1)!\ (n \in \mathbb{N})$; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$;
$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \cdot \sqrt{\pi}\, \Gamma(2x).$

20. Функція Бесселя 1-го роду порядку n:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k}.$$

21. Функції Ейрі:

$\operatorname{Ai}(x) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot 3k(3k-1)} + \ldots;$
$\operatorname{Bi}(x) = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot 3k(3k+1)} + \ldots.$

22. $S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ – синус-інтеграл Френеля;

$C(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ – косинус-інтеграл Френеля.

23. $\operatorname{si}(x) = -\int\limits_x^{\infty} \dfrac{\sin t}{t}\, dt$ – інтегральний синус;

$\operatorname{ci}(x) = -\int\limits_x^{\infty} \dfrac{\cos t}{t}\, dt$ – інтегральний косинус.

ВІДПОВІДІ

53. $y = \frac{1}{x} + C$. **54.** $y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **55.** $y = 0$. **56.** $y = \pm\frac{\pi}{2}$. **57.** $y = \pm 1$; $y = \frac{1}{x^2-1}$, $(|x| < 1)$. **58.** $y = x$; $y = \sqrt{x^2-1}$. **59.** $y = \pm\frac{\pi}{2}$. **60.** $x = \pm\frac{\pi}{2}$. **61.** $x = \pm\frac{\pi}{2}$. **62.** $y = 0$. **63.** $x = -1$; $y = 0$. **65.** $y = \pm 1$. **107.** $y = x^2$, $x \geq 0$; $y = 0$. **108.** $y = 0$. **109.** $y = \ln x$. **110.** $y = e^x$. **111.** $y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$. **112.** $y = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$. **113.** $y = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$. **114.** $y = 2\left(\sqrt{x} - \ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right) + C$. **115.** $y = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) + C$. **116.** $y = \ln\left(x^2+1\right) + C$. **117.** $y = x\sin x + \cos x + C$. **118.** $y = \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$. **119.** $y = \int \frac{x}{\ln x}\,dx + C$. **120.** $y = \int \frac{e^x}{x}\,dx + C$. **121.** $y = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **122.** $y = \int \frac{dx}{\ln x} + C$. **123.** $y = \ln\left|2\sqrt{x^2+x} + 2x + 1\right| + C$. **124.** $y = x\ln x + C$. **125.** $e^{-y} = -x + C$. **126.** $y = ce^x - 1$. **127.** $\int \frac{dy}{\ln y} = x + C$. **128.** $y = \operatorname{arctg} y + x + C$. **130.** $y - \ln|y+1| = x + C$. **131.** $y = (x+C)^2$; $x \geq -C$ **при** $y \geq 0$; $x \leq -C$ **при** $y \geq 0$; $y = 0$. **132.** $tgy = x + C$. **133.** $\sqrt{y-x} + \ln|\sqrt{y-x} - 1| = \frac{1}{2}x + C$. **134.** $\ln|x+y| - y = C$. **135.** $y = x + \frac{(x+C)^2}{4}$, $x \geq -C$, $y = x$. **136.** $y = x^2 - \frac{(x-C)^2}{4}$, $x \leq C$; $y = x^2$. **137.** $\operatorname{arctg} y + C = \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + y - x}{1+xy}$. **138.** $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{b}{a}\rho$, $\rho = C\exp\left(-\frac{b}{a}\varphi\right)$, $\sqrt{x^2+y^2} = C\exp\left(-\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$. **139.** $y = C(x+1)e^{-x}$; $x = -1$. **140.** $y = 2 + C\cos x$. **140.** $(x+y)(x-y-2) + 2\ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right| = C$. **142.** $1 + e^y = C\left(1+x^2\right)$. **143.** $1 + y^2 = C\left(1-x^2\right)$. **144.** $2\sqrt{(x+1)^3} + 6\sqrt{x+1} - 3e^{-y}(y+1) = C$. **145.** $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(1+y^2\right) = C$. **146.** $2\arcsin(\sin x - \cos x) + \operatorname{arctg} y^2 = C$; $\operatorname{arctg} y^2 + 2\arcsin(\sin x - \cos x) = \pi$. **147.** $y = a + \frac{Cx}{ax+1}$. **148.** $\arcsin x + \arcsin y = e$. **149.** $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$, $x > 0$, $x > 0$; $y = 0$ $(x > 0)$, $x = 0$ $(y > 0)$. **150.** $2e^y - e^{2x} + 2\operatorname{arctg} y + \ln\left(1+y^2\right) = C$. **151.** $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 2\pi$. **152.** $y = 2$. **153.** $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2-y^2}{2ay}$; $y^2 = a^2 + Ce^{-\frac{x}{a}}$. **154.** $y' = \frac{2kx}{k^2x^2-1}$. **156.** $\frac{d\rho}{d\theta}$; $\rho = Ce^{\frac{\theta}{a}}$.

157. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{y}$; $y^2 = 2p(x_C)$. **158.** $\dfrac{dT}{dt} = k(T-20)$; $T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}$; 60 *хв.* **159.** $x(t) = x(0) \cdot 2^{\frac{t}{20}}$; $x(t) = 0,01 \cdot x(0)$ при $t = \dfrac{60}{\lg 2} \approx 200$ *дн.* **160.** $v(t) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{4}{t}}$ *м/с*; $v(t) = 0,01$ при $t = 4\left(\dfrac{2}{\lg 1,5} + 1\right) \approx 50$ *с*, шлях $s = \dfrac{6}{\lg 1,5} \approx 15$ *м.* **161.** $y(x) = y(0) \cdot 2^{-\frac{t}{35}}$; $y(200) = y(0) \cdot 2^{-\frac{40}{7}} \approx 0,02 \cdot y(0)$; поглинається 98%. **162.** Після згоряння маси x палива швидкість ракети $v(x) = C \ln \dfrac{M}{M-x}$; $v(M-m) = C \ln \dfrac{M}{m}$.

163. $h(t)$ – висота рівня води; $\sqrt{H} - \sqrt{h} = 0,3\sqrt{2g}\dfrac{r^2}{R^2}t$; $h(t) = 0$ при $t = \dfrac{R^2}{0,3r^2}\sqrt{\dfrac{H}{2g}} \approx 1050\,c \approx 17,5$ *хв.* **164.** $(2R - h(t))^{\frac{3}{2}} = 0,45\pi r^2\sqrt{2g}\dfrac{t}{H}$; $h(t) = 0$ при $t = -\dfrac{2RH}{0,45\pi r^2}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$. **165.** $H^{\dfrac{5}{2}} - (H(t))^{\frac{5}{2}} = \dfrac{3d^2H^2t}{8R^2}\sqrt{2g}$; $h(t) = 0$ при $t = \dfrac{4R^2}{3d^2}\sqrt{2Hg}$. **166.** $x = Cr^4$. **167.** $y' = \dfrac{2y}{x}$. **168.** $-\dfrac{y}{x}$. **169.** $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. **170.** $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. **171.** $x\,dx + \left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$. **172.** $y' = \dfrac{x+y}{x}$. **181.** $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$. **183.** $x^2 - 2xy + 2y^2 = C$. **184.** $\left[\begin{array}{ll} y = C|x|^b + \dfrac{a}{1-b}x,\ (x \neq 0) & \text{при } b \neq 1; \\ y = Cx + ax \cdot \ln|x|,\ (x \neq 0) & \text{при } b = 1. \end{array}\right.$ **185.** $x = y(C + \ln|y|)$, $y \neq 0$. **186.** $x = y(C - \ln|y|)$, $y \neq 0$. **187.** $\sqrt{x^2+y^2} = C\exp\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$. **188.** $x^2 - y^2 = C$. **189.** $2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C$. **190.** $\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right) = Cx$. **191.** $\ln Cx = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}\right)$; $y = xe^{2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. **192.** $x\ln Cx = 2\sqrt{xy}$; $y = 0$; $x = 0$. **193.** $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$; $y = x+1$. **194.** $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$. **195.** $y + 2 = C\exp\left(-2\operatorname{arctg}\dfrac{y+2}{x-3}\right)$. **196.** $\ln\dfrac{x+y}{x+3} = 1 + \dfrac{C}{x+y}$. **197.** $x^2y^4\ln Cx^2 = 1$; $y = 0$, $x = 0$. **198.** $x^2 = \left(x^2 - y\right)\ln Cx$; $y = x^2$. **199.** $y^2e^{-\frac{1}{xy}} = C$; $y = 0$, $x = 0$. **200.** $\left(2\sqrt{y} - x\right)\ln\left(C\left(2\sqrt{y} - x\right)\right) = x$, $2\sqrt{y} = x$. **201.** $2\sqrt{\dfrac{1}{x^2y^2} - 1} = -\ln Cx$, $xy^2 = 1$; $y = 0$. **202.** $\arcsin\dfrac{y^2}{|x|^b} = \ln Cx^2$. **204.** $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, $x^2 + y^2 - Cx = 0$; $y' = -\dfrac{y}{x}$, $y = Cx$ $(C \neq 0)$; $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$, $y = \dfrac{Cx}{2} - \dfrac{1}{2C}$ $(C > 0)$; $xy' = y - \sqrt{x^2+y^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2C} + \dfrac{C}{2}$ $(C > 0)$. **205.** $\dfrac{y}{y'} = \dfrac{x+y}{2}$; $(x-y)^2 - Cy = 0$. **206.** $\dfrac{y - xy'}{yy' + x} = k$; $\sqrt{x^2+y^2} = C\exp\left(-\dfrac{1}{k}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$ або $r = C\exp\left(-\dfrac{\theta}{k}\right)$. **207.** $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} = 1$. **209.** $y = \sin x + C\cos x$. **210.** $y = (2x+1)(C + \ln|2x+1|) + 1$. **211.** $xy = C - \ln|x|$. **212.** $y = x(C + \sin x)$. **213.** $y^2 = x^2 - 1 + C\left|x^2 - 1\right|^{\frac{1}{2}}$. **214.** $x^2(C - \cos y) = y$; $y = 0$. **215.**

$y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$. **216.** $x^2(C-\cos y) = y$; $y=0$. **217.** $y = x^4 \ln^2 Cx$; $y=0$. **218.** $xy\left(C-\ln^2 y\right) = 1$. **222.** $\ln y = e^{\frac{x^2}{2}-2x}\left[C+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]$. **223.** $\operatorname{tg} y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. **224.** $2e^{-y} = Ce - x - e^x$. **225.** $2(1+y)^{\frac{1}{2}} = 2x(x+5\ln x)+Cx$. **226.** $\left(y^2+1\right)^{\frac{1}{2}} = Ce^{-x}+x^2-2x+3$. **227.** $y^{\frac{1}{2}} = C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)$. **228.** $y^{-3y} = xe^x + Ce^x$. **229.** $e^y = \sin x\left(C+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **230.** $y^3\left(Ce^{\cos x}+3\right) = 1$. **231.** $\sin y = Ce^{\cos x}+1$. **232.** $y^{-3} = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x$. **233.** $xy\left(C+\ln^2 x\right)+2=0$. **234.** $y^{-3} = x^3(9\ln x + C) + \frac{3}{2}x$; $C = -\frac{1}{2}$. **235.** $y(x+C) = \sec x$. **236.** $y^{-1} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + \cos x$, $y = \sec x$. **237.** $Cy^2e^x - x^3 = y^2$. **238.** $x^2+y^2-2y = Ce^{-x}$. **239.** $y^2+Cxy = 1$. **240.** $x+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C$. **241.** $y = Ce^{\frac{2x}{y}} - \frac{2x+3y}{4y}$. **242.** $x^2+y^2 = Cy^2e^{2x}$. **243.** $2y = \left(y^2-x^2\right)\ln C\frac{x+y}{x-y}$. **244.** $x^4 - y^2 = Cx^2y$. **245.** $y = e^x - 1$. **246.** $y = -2e^x$. **247.** $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{2a^2}{y^2}$; $x = Cy + \frac{a^2}{y}$. **249.** $\frac{e^{kx}}{e^{-k\omega}-1}\int\limits_x^{x+\omega} f(t)e^{-kt}dt$. **250.** $y = y_1 + C(y_1 - y_2)$. **251.** $y' - \frac{y_1'}{y_1}y = 0$. **253.** $t = \int p(x)\,dx$; $\frac{dy}{dt}+y = 0$; $y = C\exp\left[-\int p(x)\,dx\right]$. **254.** $\alpha(x) = \exp\left[-\int p(x)\,dx\right]$; $z' = q(x)\exp\left[\int p(x)\,dx\right]$; $y = \exp\left[-\int p(x)\,dx\right]\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx\right)$. **258.** $y - xy' = y^2$; $y = \frac{x}{x+C}$. **259.** $y_1 = x$; $y = x + \frac{1}{1+Cx}$. **260.** $y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(C+\ln|x|)}$. **261.** $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(C-\ln|x|)}$. **262.** $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3+C}$. **263.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2xy+1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C$. **264.** $y_1 = x$; $y\left(Ce^{\frac{2}{x}}-1\right) = x\left(Ce^{\frac{2}{x}}+1\right)$. **265.** $y = \frac{u}{x}$; $x^{\frac{2}{3}} = t$; $u = \frac{t}{v^{-\frac{1}{3}}}$; $v = wt^{\frac{1}{2}}$; $w = \operatorname{tg}\left(C-3t^{\frac{1}{2}}\right)$. **266.** $y = \frac{u}{x}$; $x^{-\frac{2}{3}} = t$; $u = 1+\frac{t}{v}$; $v = \frac{1}{3}+\frac{t}{w}$, $w = zt^{\frac{1}{2}}$; $z = \frac{1+C\exp\left(6t^{\frac{1}{2}}\right)}{1-C\exp\left(6t^{\frac{1}{2}}\right)}$. **269.** а) $y = \frac{x+C-1}{x(x+C)}$; б) $xy = \operatorname{tg}(x+C)$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+C, \frac{\pi}{2}+C\right)$. **270.** а) $y = \operatorname{tg}(ux+C)+\frac{x^2}{2}$; б) $y = 2\operatorname{tg}(2x+C)+x^2$. **272.** а) $C(y-x)^2+x^2-1=0$; б) $\left(x^2-y\right)^2 = C\left(x^2+y^2\right)$; в) $x^3+xy^2+2y = C$. **275.** $y(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x-\sin s\cos(x+2s)}\sin(x+s)\,ds$. **276.** $2,5$ *кг*. **282.** $2xy^2+e^{xy}+y^2 = C$. **283.** $xy+e^x = C$. **284.** Не має форми повних диференціалів. **286.** $y+xy+\ln|x| = C$. **287.** $y\ln|x| = C$. **288.** $x^2 = Cy^2$. **289.** $x^3 - y\sin^2 x = C$. **290.** Не має форми повних диференціалів. **291.** $x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}} = C$. **292.** $(x+y)\left(x^2-4xy+y^2\right) = C$. **293.** $x^3+x^3\ln y - y^2 = C$. **294.** $\sin\frac{x}{y} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$. **295.** $x^2+1 = 2(C-2x)\sin y$.

296. $x^2\cos y + y\cos^2 x = C$. **297.** $\sqrt{x^2+y^2+1} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$. **298.** $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$. **299.** $xe^{-y} - y^2 = C$. **301.** $e^x\left(x^2+y^2\right) = C$. **302.** $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{y} - 3xy = C$. **303.** $y + \dfrac{a}{2} = Ce^{-x^2}$. **304.** $y = Ce^{-ax} + \dfrac{e^{mx}}{m+a}$. **305.** $y^4 = 4xy + C$. **306.** $x^2+y^2 = Cx^3$. **307.** $x^2y^2 + xy^3 + y^4 = C$. **308.** $3xe^y + y^3 = C$. **309.** $x^2 - \dfrac{x}{y} + y + \ln y = C$. **310.** $x + y\cos x - y\operatorname{tg} y = Cy$. **311.** $m = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{y}{x} - \ln x = C$. **312.** $m = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **313.** $m = (xy)^{-\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\dfrac{y}{x}} - \ln|x| = C$, $y = 0$ $(x \neq 0)$. **314.** $m = \dfrac{1}{x^2}$; $m = \dfrac{1}{\left(x^2y^2-1\right)^2}$. **315.** $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$. **316.** $x^2 + 2xy - y^2 = C$. **317.** $xy + x + y = C(x+y)(x+y+2)$. **318.** $x + a\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right) = C$. **319.** $\left(x^3+y^2\right)\sqrt[3]{x+y} = C$. **320.** $x\sin(x+y) = C$. **321.** $x + 2y + ax(x+y) = C(x+y)^2$. **322.** $\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{\operatorname{ctg}\alpha} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$. **323.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C$. **324.** $x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + C$. **326.** $xy = \ln\dfrac{Cy^2}{x^2}$, $C > 0$. **327.** $x = C - \sin\dfrac{y}{x}$. **328.** $x^6 - 3x^2y^4 - 2y^6 = C$. **329.** $\left(x+y^2\right)\sqrt{2x-y^2} = C$. **331.** $m = e^x$; $\left(3x^2y + \dfrac{y^2}{2}\right)e^x = C$. **332.** $\left(x-y^2\right)^2(2x-y) = C$. **333.** $m = xy$; $x^2y^3 - 3x^3y^2 = C$. **334.** $\sqrt{1+y^2} = xy + C$. **335.** $e^{\frac{x}{y}}\left(y^2 - x + y\right) = Cy$. **336.** $x^2 + \ln y = Cx^3$; $x = 0$. **337.** $x + 2\ln|x| + \dfrac{3}{2}y^2 - \dfrac{y}{x} = C$; $x = 0$. **338.** $4y\sqrt{x+1} + \ln\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} = C$. **339.** $\ln|y| - ye^{-x} = C$; $y = 0$. **340.** $4xy + 2x^2y^2\ln x + 1 = Cx^2y^2$. **341.** $x^2y\ln Cxy = -1$. **342.** $2xy + \dfrac{1}{xy} = C$, $x = 0$, $y = 0$. **343.** $\sin^2 y = Cx - x^2$, $x = 0$. **344.** $3y^2 + x\ln xy = Cx$. **345.** $xy\left(C - x^2 - y^2\right) = 1$, $x = 0$, $y = 0$. **346.** $x = 0$, $x\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}} + \ln\left(\dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\right) = C$. **347.** $x^3 - 4y^2 = Cy\sqrt[3]{xy}$, $x = 0$, $y = 0$. **348.** $m = xe^{6x}$, $\dfrac{x^2}{2}ye^{6x} + \dfrac{e^{6x}}{9}(6x-1) = C$. **349.** $\dfrac{1}{(xy)^2} + \dfrac{4}{xy} + 2\ln x = C$. **350.** $m = e^{-x}e^{2y}$; $\left(x^2 - 2yx\right)e^{-x+2y} = C$. **352.** $m = y^{-4}e^{-3x}$, $-\dfrac{1}{3}e^{-3} + \dfrac{1}{3}e^{-3x} = C$. **353.** $m = x^{-5}y^{-3}$, $\dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{2x^4y^2} + C$. **354.** Бернуллі відносно $x = x(y)$; $m = x^{-4}y^{-8}$; $\dfrac{1}{7y^7} - \dfrac{1}{3x^3y^6} = C$. **355.** $m = \sqrt{xy^3}$, $\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = C$. **356.** $\dfrac{y^4x^8}{4} - \dfrac{x^6}{6} = C$. **357.** $-\dfrac{3}{2}x^2y^{\frac{2}{3}} - 2x = C$. **358.** $y = e^{-x^2}dx$. **359.** $\dfrac{y}{y+x} = \dfrac{6x}{7}$. **360.** $y = \dfrac{2x^4}{3} + \dfrac{x}{3}$. **361.** $y = -\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{7}{2}e^{4x}$. **362.** $y = -\dfrac{52}{17}e^{4\pi}e^{4x} + \dfrac{4}{17}\sin x - \dfrac{1}{17}\cos x$. **363.**

$y_1=4x$; $y_2=4\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$; $y_3=4\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{4}\right)$; $y_4=4\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{24}\right)$; $y_5=4\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}\right)$. **364.** $y_1=1+\dfrac{x^2}{2}$; $y_2=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}$; $y_3=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^6}{48}$; $y_4=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^6}{48}+\dfrac{x^8}{384}$; $y_5=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^6}{48}+\dfrac{x^8}{384}+\dfrac{x^{10}}{3840}$. **365.** $y_1=-4+2x-\dfrac{x^2}{2}=y_2=y_3=y_4=y_5$. **366.** $y_1=-\dfrac{1}{2}+4x+\dfrac{x^2}{2}$; $y_2=\dfrac{11}{6}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$; $y_3=\dfrac{25}{24}+\dfrac{11x}{6}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^2}{6}+\dfrac{x^2}{24}$; $y_4=\dfrac{149}{120}+\dfrac{25x}{24}+\dfrac{17x^2}{12}+\dfrac{5x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}$; $y_5=\dfrac{149}{120}+\dfrac{149}{120}x+\dfrac{49}{48}x^2+\dfrac{17}{36}x^3+\dfrac{x^4}{48}+\dfrac{x^5}{24}+\dfrac{x^6}{120}$. **366.** $y_1=1-\cos x$; $y_2=1-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$; $y_3=1-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\ -\dfrac{1}{6}\cos^3 x$; $y_4=1-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\dfrac{1}{6}\cos^3 x+\dfrac{1}{24}\cos^4 x$; $y_5=1-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\dfrac{1}{6}\cos^3 x+$ $+\dfrac{1}{24}\cos^4 x-\dfrac{1}{120}\cos^5 x$. **368.** Уся площина. **369.** $y\neq\dfrac{3}{2}x$. **370.** $x\neq 1$, $y>0$. **371.** $y\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **372.** $x>0$, $y\neq x$. **373.** $x\neq 0$, $|y|>|x|$. **374.** $[0,8;\,1,2]$. **376.** $[-0,5;\,0,5]$. **378.** $[0,87;\,1,13]$. **380.** $\left(-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$. **382.** $x>0$, $x<0$, $y=Cx$. **383.** Ні, розв'язки визначені у верхній та нижній півплощинах. **384.** Має 1. **385.** $y=0$. **386.** Ні, ні. **388.** а) $x=0$; б) $y=0$; в) особливих розв'язків немає. **389.** $m\in(0,1)$, $y=0$. **390.** Жодного при $\operatorname{tg}\alpha\neq f(x_0,y_0)$, один при $\operatorname{tg}\alpha=f(x_0,y_0)$. **392.** $\left(y-\dfrac{x^2}{2}-C\right)\cdot\left(\dfrac{y^2}{2}-x-C\right)=0$; $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{y^2}{2}=x-\dfrac{1}{2}$. **393.** $\left(\sqrt{|y|}-x-C\right)\cdot\left(\sqrt{|y|}+x+C\right)=0$, $y=0$. **394.** $\left(y-\sqrt{|x|}-C\right)\cdot\left(y+\sqrt{|x|}-C\right)=0$ при $x\neq 0$, $x=0$. **396.** $\left(y-\dfrac{x^2}{2}+C\right)\cdot\left(\sqrt{|y|}-x-C\right)\cdot\left(\sqrt{|y|}+x-C\right)=0$. **397.** $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$ при $x>1$; $y=-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$ при $x<1$. **398.** $\left(y-\dfrac{C}{x}\right)\cdot\left(y-\dfrac{C}{x^2}\right)=0$. **399.** 2) $y=\pm a$. **400.** 2) $y=0$. **404.** $y=0$. **405.** $4y=x^4$. **406.** $y=0$, $27y=4x^3$. **407.** $y=0$, $y=-4x$. **408.** $y=4x$. **409.** $y=\dfrac{C}{2}x^2+C^2$; $y=-\dfrac{x^4}{16}$. **410.** $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{Cx^2}{2}+C^2$; $y=-\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^3}{3}$. **411.** $x=\ln p+\dfrac{1}{p}$; $y=p\ln p+C$. **412.** $x=\pm\left(2\sqrt{p^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{|p|}\right)+C$; $y=\pm p\sqrt{p^2-1}$; $y=0$. **413.** $Cx=\ln Cy$. **414.** $y^2=2C^3x+C^2$; $27x^2y^2=1$. **415.** $x=-\dfrac{1}{2}p^2+Cp$, $y=-\dfrac{p^3}{3}+\dfrac{Cp^2}{2}+C^2$; $x=\dfrac{p^3}{4}-\dfrac{p^2}{2}$, $y=\dfrac{3}{16}p^4-\dfrac{p^3}{3}$. **416.** $x=\dfrac{1}{C}\ln y-C^2$, $x=-3\left(\dfrac{\ln y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. **417.** $pxy=y^2+p^3$, $y^2(2p+C)=p^4$, $y=0$. **418.** $x=p\sqrt{p^2+1}$, $3y=\left(2p^2-1\right)\sqrt{p^2+1}+C$. **419.**

$x=\dfrac{2p}{p^2-1},\ y=\dfrac{2}{p^2-1}-\ln\left|p^2-1\right|+C.$ **420.** $y^2=2Cx-C\ln C,\ 2x=1+2\ln|y|.$ **421.** $x=\pm\sqrt{p^2+1}-\ln\left(\sqrt{p^2+1}\pm1\right)+C,\ y=-p\pm p\sqrt{p^2+1};\ y=0.$ **422.** $y=Cx^2+\dfrac{1}{C},$ $y=\pm2x.$ **423.** $y=Cx-C^2,\ y=\dfrac{x^2}{4}.$ **424.** $y=Cx-\sqrt{1-C^2};\ y^2-x^2=1\ \ (y>0).$ **425.** $x=Ce^{-p}-2p+2,\ y=x(1+p)+p^2.$ **426.** $y=\dfrac{1}{C}(x-C)^2,\ C\neq0,\ y=0,$ $y=-4x.$ **427.** $x\sqrt{p}=\ln p+C,\ y=\sqrt{p}\,(4-\ln p-C)\,;\ y=0.$ **428.** $C^3=3(Cx-y);$ $9y^2=4x^3.$ **429.** $x=Cy+C^2;\ x=-\dfrac{y^2}{4}.$ **441.** $x^2-y^2=C.$ **443.** $xy=C.$ **445.** $x^2+y^2=8\ln y+C.$ **446.** $2y^2-1=C\left(2x^2+1\right).$ **447.** $\left(x^2+y^2\right)^2=Cxy.$ **448.** $y^2+2x^2=C\left(x^2+y^2\right)^2.$ **449.** $y^2=C(C-2x).$ **450.** $\rho=C(1-\cos\varphi).$ **451.** $\rho=Ce^{\theta}.$ **452.** $y^2+2xy-x^2=C.$ **453.** $p=Ce^{-k\varphi},\ k=\operatorname{tg}\alpha.$ **454.** $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$ **455.** $\rho=\dfrac{C}{\cos(\theta-\alpha)}.$ **456.** б) $\dfrac{\theta^2}{2}=-2\ln|\rho|+C.$ **485.** Ріккаті, $y_1=x.$ **486.** Ріккаті, $y_1=\dfrac{a}{x}.$ **487.** Однорідне, $x=x(y).$ **488.** Бернуллі, $x=x(y)$, заміна $x^2=z(y).$ **489.** Лінійне. **490.** Звідне до однорідного. **491.** У повних диференціалах. **492.** Звідне до однорідного; $x=t+1,\ y=u,$ де $u=u(t).$ **493.** Звідне до однорідного; $x+y=z,\ z=z(x).$ **494.** Звідне до однорідного; $x=t+3,\ y=z-2,\ z=z(t).$ **495.** Бернуллі; $z=\sqrt{y},\ z=z(x).$ **496.** Лінійне. **506.** $\left(x^2+y+\ln Cy\right)y=x,$ $y=0.$ **507.** $y=C\ln x^2+2\ln x^2.$ **508.** $x=p\left(\ln\left(1+\sqrt{p^2-1}\right)-\ln Cp\right);$ $2y=xp-\sqrt{p^2+1},\ 2y=-1.$ **509.** $\left(y-2x\sqrt{y-x^2}\right)\cdot\left(2\sqrt{y-x^2}+x\right)=C.$ **510.** $y=C^2(x-C)^2;\ 16y=x^4.$ **511.** $e^y=x^2\ln Cx.$ **512.** $xy^2=\ln x^2-\ln Cy;$ $x=0;\ y=0.$ **513.** $x\left(y^2+x^2\right)^3=\dfrac{2}{5}y^5+\dfrac{4}{3}x^2y^3+2x^4y+Cx^5,\ x=0.$ **514.** $(u-1)\cdot\ln Cx^6(u-1)^5(u+2)^4=3,$ де $u^3=\dfrac{y^2}{x^2}-2;\ y^2=3x^2.$ **515.** $\sqrt{y}=\left(x^2-1\right)\cdot\left(2\ln\left|x^2-1\right|+C\right);\ y=0.$ **516.** $x^2-(x-1)\ln(y+1)-y=C.$ **517.** $x^3=Ce^y-y-2.$ **518.** $y+1=x\ln C(y+1);\ y=-1.$ **519.** $\left(C-x^2\right)\sqrt{y^2+1}=2x.$ **520.** $\sqrt{y^2+1}=x\left(Ce^x-1\right).$ **521.** $(y-x)\ln\left(C\dfrac{x-1}{x+1}\right)=2;\ y=x.$ **528.** $y\sin x\,\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^2}{2}=C.$ **529.** $x\left(e^y+xy\right)=C.$ **530.** $x(p-1)^3 2=\ln Cp-p.$ **531.** $y=x\operatorname{tg}\ln Cx;\ x=0.$ **532.** $Ce^{\sin y}-2(1+\sin y).$ **533.** $(x+1)y=x^2+x\ln Cx.$ **534.** $Cy=C^2e^x+1;\ y=\pm2\exp\left(\dfrac{x}{2}\right).$ **535.** $y^2=\left(x^2+C\right)x^{2x}.$ **536.** $x=2p-\ln p,$ $y=p^2-p+C.$ **537.** $xy\cos x-y^2=C.$ **538.** $2\sqrt{y-x^2}=x\ln Cx;\ x=y^2.$ **539.** $2x^3-x^2y^2+y^3+x=C.$ **540.** $(y-4x+2)^4(2x+2y-1)=C.$ **541.** $y^3=\left(C-x^3\right)\sin^3x.$ **542.** $|x|=\ln\left(\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\right)+C;\ C=0.$ **543.** $x^2y^2-1=xy\ln Cy^2;\ y=0.$ **544.** $(y-x)^2=2C(x+1)-C^2;\ y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}=C;\ y=0.$ **545.** $27(y-2x)^2=(C-2x)^3;$

$y = 2x$. **546.** $3\sqrt{y} = x^2 - 1 + C\sqrt[4]{|x^2-1|}$; $y = 0$. **547.** $\dfrac{\sin y}{x} = -\ln Cx$. **548.** $x = \dfrac{C}{p^2}p - \dfrac{3}{2}$, $y = C\left(\dfrac{p}{2} - 1\right)\dfrac{p}{2}$; $y = x + 2$, $y = 0$. **549.** $\left(Ce^{x^2} + 2x^2 + 2\right)\cos y = 1$. **550.** $e^y\left(C^2x^2 + 1\right) = 2C$, $x^2 = e^{-2y}$. **551.** $y = xz$, $f(x)z' = z^2 - 1$. **552.** $xy = z$. **553.** $y^2 = xz$. **554.** $y = xz$, $z' = x^{\lambda-1}f(z)$. **555.** $xy = z$, $z' = \dfrac{z}{x}\left(1 + xf(z)\right)$. **556.** $xy = z$, $z' = x\varphi(x)f(z)$. **557.** $y = \begin{cases} Ce^{2x} + \dfrac{2}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\cos x, & \text{при } y < \sin x, \\ Ce^{-x}, & \text{при } y \geq \sin x. \end{cases}$ **564.** $y_1 = \sin x - 1$, $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$. **565.** $y_1 = \varphi(x)$, $y = \varphi(x) - 1 + Ce^{-\varphi(x)}$. **566.** $y^m = z$, $z' + maz = mb$. **567.** $y = \varphi(x) + z$. **568.** Ні. **569.** Ні. **574.** а) $\ln|x| + C = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\ln\left|1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right|$; б) $\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1-y}{x} - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + (y-1)^2\right) + C$; в) $\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x+1} - \dfrac{1}{2}\ln\left((x+1)^2 + y^2\right) = C$; г) $-y + 2\ln|y+1| = x + C$; д) $y = Cx^2$; е) $y^2 = \ln|x|\dfrac{x^2}{2} + C$; є) $r = Ce^{\theta}$; ж) $\dfrac{\theta^2}{2} = -2\ln|r| + C$. **591.** $C_2x\exp\left(-\dfrac{C_1}{x}\right)$. **592.** $\ln|y| = C_1\left(x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x\sqrt{1+x^2}\right)\right) + C_2$. **593.** $y = C_2\exp\left(\dfrac{x}{2C_1} + \dfrac{C_1}{2x}\right)$. **594.** $2C_1C_2y = C_2^2|x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$. **595.** $\ln C_2y = 4x^{\frac{5}{2}} + C_1x$; $y = 0$. **596.** $y = C_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. **597.** $y = C_2\left|\dfrac{x}{x+C_1}\right|^{\frac{1}{C_1}}$; $y = C$, $y = Ce^{-\frac{1}{x}}$. **598.** $y = C_2x\left(\ln(C_1x)\right)^2$; $y = Cx$. **599.** $\dfrac{y}{x} = C_2 - 3\ln\left|\dfrac{1}{x} - C_1\right|$, $y = Cx$. **600.** $y = -2x^{\frac{3}{2}}\ln Cx$, $C_1y = x^{\frac{3}{2}}\left(C_2x^{C_1} + 2\right)$, $y = Cx^{\frac{3}{2}}$. **601.** $2C_2x^2y = (C_2x - C_1)^2 - 1$; $xy = \pm 1$. **602.** $y = x^2\left(C_1\ln x - \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C_2\right)$. **603.** $y\ln y + \ln x + C_1y + C_2 = 0$. **604.** $y = \sqrt{C_1}\operatorname{tg}\left(\sqrt{C_1}x + C_2\right)$. **605.** $x = C_3 = \dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + C_2}\right|$ або $y = ae^{Cx} + be^{-Cx}$. **606.** $\int\dfrac{dy}{\ln(C_1y)} = x + C_2$. **607.** $\int e^{-y^{\frac{2}{2}}}dy = C_1x + C_2$. **608.** $C_1y - 1 = C_2ye^{C_1}x$. **609.** $y = C_1x + C_2 + x^2$. **610.** $y = C_1\operatorname{tg}\left(C_1\ln C_2x\right)$. **611.** $y = e^{x^{\frac{2}{2}}}\left(C_1\int e^{-x^{\frac{2}{2}}}dx + C_2\right) - 1$. **612.** $y = 4C_1\operatorname{tg}\left(C_1x^2 + C_2\right)$, $2\ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = C_1x^2 + C_2$; $y\left(C - x^2\right) = 4$. **613.** $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2} + C_3x + C_4$; $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$. **614.** $6y = x^3\ln|x| = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **615.** $y = \int\limits_0^x\dfrac{\sin t}{t}\,dt + \cos x + C_1x + C_2$. **616.** $y = C_1\left(x\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt - \dfrac{e^{x^2}}{2}\right) + C_2x + C_3$. **617.** $y = \int\limits_0^x(x-t)\sin t^2\,dt + C_1x + C_2$. **618.** $y = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x\dfrac{\sin t}{t}(x-t)^2\,dt + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **619.**

$y = e^x + \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + C_1x + C_2$. **622.** $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = -\dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin 2t}{4} + C_1 \sin t + C_2, \end{cases}$ якщо $\cos t > 0$; $\begin{cases} x = -\sin t; \\ y = -\dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin 2t}{4} - C_1 \sin t + C_2, \end{cases}$ якщо $\cos t < 0$. **623.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 1} + C_1x + C_2$. **624.** $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$. **625.** $y = \pm\arcsin\left(C_1 e^{\frac{x}{a}}\right) + C_2$. **626.** $y = C_1(x\ln x - x) + C_2$. **627.** $y = \dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x - \dfrac{1}{C_1}\right)$. **628.** $y\ln|y| + x + C_1y + C_2 = 0$, $y = C$. **629.** $2C_1y = (\pm C_1x + C_2)^2 + 1$. **630.** $\left(\pm4\sqrt{y} + C_1\right)^{\frac{3}{2}} - 3C_1\left(\pm4\sqrt{y} + C_1\right)^{\frac{1}{2}} = \pm12x + C_2$. **631.** $(C_1y - 1)^{\frac{3}{2}} = \pm\dfrac{3C_1}{2}x + C_2$. **632.** $12(C_1y - x) = C_1^2(x + C_2)^3 + C_3$. **633.** $x = \ln|p| + 2C_1p - C_2$, $y = p + C_1p^2 + C_3$; $y = C_1x + C_2$. **634.** $y = C_1(1 \pm \operatorname{ch}(x + C_2))$; $y = Ce^{\pm x}$. **635.** $x = C_1p + 3p^2$; $y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5}{4}C_1p^4 + C_1^2\dfrac{p^3}{6} + C_2$; $y = C$. **636.** $3C_1y = (x - C_1)^3 + C_2$; $y = C$; $y = C - 2x^2$. **637.** $\ln\left|y^2 + C_1 \pm \sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 1}\right| = 2x + C_2$, $y = \pm1$. **638.** $x = u - \ln|1 + u| + C_2$, де $u = \pm\sqrt{1 + 4C_1y}$; $y = C$; $y = Ce^{-x}$. **639.** $y + C_1\ln|y| = x + C_2$; $y - C$. **640.** $y = e^{-\sin x}\left(C_2 + C_1\int e^{\sin x}\,dx\right)$. **641.** $y = x(C_2 + x + C_1\ln|x|)$. **642.** $y = 1 - e^x$, $y = -1 + e^{-x}$. **643.** $y = \dfrac{p}{2T}x^2 + C_1x + C_2$, p – навантаження на одиницю довжини горизонтальної проекції, T – горизонтальна складова сили натягу нитки. **644.** $ay = \operatorname{ch}(ax + C_1) + C_2$; $a = \dfrac{q}{T}$, q – вага одиниці довжини нитки, T – горизонтальна складова сили натягу нитки. **646.** $(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = 1$. **647.** $y'' = \dfrac{1}{ky^3}$; $kC_1y^2 = C_1^2(x + C_2)^2 + k$. **648.** $y'' = \dfrac{P}{2EI}\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$; $H = y|_{x=\frac{l}{2}} = \dfrac{Pt^3}{48EI}$. За початок координат взято середину балки. **649.** $v \approx 11{,}08$ *км/с*; $v = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{2gx}{R(R-r)}}$. **650.** ≈ 117 *год.* **651.** $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2$. **652.** $y = C_1(x\ln|x| - x) + \dfrac{x^4}{12} + C_2x + C_3$. **653.** $y = C_1x^2 + C_2\ln|x| + \dfrac{x^3}{3} + C_3$. **654.** $y = C_1\int\dfrac{dx}{\ln x} + C_2$. **655.** $y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C_2 + C_1\int e^{\int p(x)\,dx}dx\right)$. **656.** $y = C_1\sin 2x + C_2\cos^2 x$. **657.** $y = C_1x + C_2x^2 + 2x^2\ln|x|$. **658.** $y = e^{-x^2}\left(C_2 + \int\left(C_1 + x^2\right)e^{x^2}\,dx\right)$. **659.** $y = C_1x\ln|x| + C_2x + x^2$. **660.** $y = e^{x^2}\left(C_2 + C_1\int e^{-x^2}\,dx\right)$. **661.** $y = C_1\sin 2x + C_2\cos^2 x$. **662.** $y'' - bx^my = 0$. **663.** $y_1 = e^{\frac{x^2}{2}}$. **679.** а) $L(x) = Ce^{-\frac{1}{3}\int h_1(x)\,dx}$; $(C \neq 0)$; $L[\beta(x)] = f(x)$; б) $L[\alpha(x)] = 0$. **680.** $y = C_1x + C_2x^2 + C_3e^x$. **681.** $x^2u'' - xu' + u = 0$. **682.** $xu'' - 6u' + xu = 0$. **683.** $u'' = x^{-\frac{4}{3}}u = 0$. **684.** Лінійно залежні. **685.** Лінійно незалежні. **686.** Лінійно незалежні. **687.** Лінійно залежні. **688.** Лінійно залежні. **689.** Лінійно залежні. **690.** Лінійно залежні. **691.** Лінійно залежні. **692.** Лінійно залежні. **693.** Лінійно залежні. **697.** $-\dfrac{2}{x}$ $(x \neq 0)$. **698.** e^{-2x}. **699.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{\pi^2 - x^2}}$, $(|x| < \pi)$. **700.** $1 - \ln x$ $(x > 0)$. **704.** Лінійно незалежні. **705.** Можуть бути як лінійно незалежними, так і лінійно залежними. **706.** а) $W = 0$; б) нічого не можна сказати. **707.** Лінійно незалежні. **708.** Два. **710.** $(n \geq 2)$. **711.** $y = C_1\dfrac{\sin x}{x} + C_2\dfrac{\cos x}{x}$. **712.** $y_1 = C_1 \cos x + C_2 e^x$. **714.** $y_1 = x^2$, $y_2 = \ln x$. **715.** $y_1 = x^2$, $y_2 = \ln x$. **716.** $y'' - y' \operatorname{ctg} x = 0$. **717.** $(x-1)y'' - xy' + y = 0$. **718.** $y''' - y'' = 0$. **719.** $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. **720.** $\left(2x^2 + 6x - 9\right) y'' - (4x+6)y' + 4y = 0$. **789.** $a > 0$, $b > 0$. **790.** $b < 0$ або $b \geq 0$, $a > 0$. **791.** $b > 0$, $a \leq -2\sqrt{b}$. **792.** $a^2 < 4b$. **793.** $\omega \neq \pm k$. **794.** $y = \dfrac{\left(b - \omega^2\right)\sin \omega t - a\omega \cos \omega t}{(b-\omega) + a^2\omega^2}$. **795.** $x = 4 - 2\cos t$. **796.** $I = \dfrac{q}{\omega CL}\sin \omega t$; $CR^2 < 4L$, $\omega = \dfrac{\sqrt{4CL - R^2C^2}}{2LC}$. **797.** $I = \dfrac{q}{RS}e^{-\frac{t}{RS}}$. **798.** $I = A\sin(\omega t - \varphi)$, де $A = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$, $\max A = \dfrac{V}{R}$ при $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$. **799.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. **800.** а) Якщо $h^2 > 4km$, то $x = \dfrac{v_0}{2\gamma}\left(e^{(-\alpha+\gamma)t} - e^{(-\alpha-\gamma)t}\right)$, $\alpha = \dfrac{h}{2m}$, $\gamma = \dfrac{\sqrt{h^2 - 4km}}{2m}$; б) Якщо $h^2 < 4km$, то $x = \dfrac{v_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sin \beta t$, $\alpha = \dfrac{h}{2m}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{4km - h^2}}{2m}$. **803.** $y = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x}$. **804.** $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^3}$. **805.** $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x}$. **806.** $y = C_1 + C_2 \ln x$. **807.** $y = x\left(C_1 + C_2\ln x + C_3 \ln^2 x\right)$. **808.** $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3x^3$. **809.** $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. **810.** $y = C_1(2x+1) + C_2\sqrt[4]{2x+1}$. **811.** $y = \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2\ln(x+1)}{x+1}$. **812.** $y = (x+1)\left(C_1 + C_2\ln(x+1) + C_3(x+1)^3\right)$. **813.** $y = C_1(x+2)^2 + C_2(x+2)^3$. **814.** Заміна $x = \operatorname{tg} t$; $t\sqrt{1+x^2} = C_1 + C_2x$. **815.** $y = C_1x^2 + C_2x + C_3x\ln x + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{3}{2}x\ln x$. **816.** $y = \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2}{(x+1)^2} + \dfrac{C_3}{(x+1)^3} + \dfrac{\ln(x+1)}{6} + \dfrac{11}{36}$. **817.** $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + C_3x\ln x + {}$ ${} + \dfrac{C_4 \ln x}{x} + \dfrac{x^2}{9}$. **818.** $y = C_1\dfrac{\cos(\ln x)}{x} + C_2\dfrac{\sin(\ln x)}{x} + \dfrac{x^3}{17}$. **819.** $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2x^3 + {}$ ${} + x^4$. **820.** $y = (2x+1)\ln|2x+1| + C_1(2x+1) + C_2(2x+1)^2$. **821.** $y = x\ln^3 x + x(C_1 + C_2\ln x)$. **822.** $y = x + C_1 + C_2x^2$. **823.** $y = -\ln x\cos(\ln x) + C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)$. **824.** $y = 2x^3 + C_1x + C_2x\ln|x|$. **825.** $y = C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|) + 2x$. **826.** $y = C_1x^2 + \dfrac{1}{x}\left(C_2 - \dfrac{2}{3}\ln x - \ln^2 x\right)$. **827.** $y = C_1x^3 + C_2x^{-2} + x^3\ln|x| - 2x^2$. **828.** $y = (x-2)^2(C_1 + C_2\ln|x-2|) + x - 1,5$.

829. $y=C_1\left(x+\frac{3}{2}\right)+C_2\left|x+\frac{3}{2}\right|^{\frac{3}{2}}+C_3\left|x+\frac{3}{2}\right|^{\frac{1}{2}}$. **830.** $y=x^2\ln\frac{C_1x}{x+1}-\frac{x}{2}+1-$ $-\frac{1}{x}\ln x(C_2(x+1))$. **831.** $y=x(C_1+(C_2+\ln|\ln x|)\ln x)+\frac{1+\ln x}{4x}$. **832.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-2x}}{x}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{2e^{-2x}}{x^2}y=0$. **833.** $\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{e^{2x}}{x^2}\left(x^2-2\right)y=0$. **834.** $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(x-\frac{n^2}{x}\right)y=0$. **835.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x^2\left(x^2+6\right)}\right)+\frac{6y}{x^2\left(x^2+6\right)^2}=0$. **836.** $\left(\sqrt{1-x^2}y'\right)'+\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0$. **837.** $\left(xe^{-x}y'\right)'+ne^{-x}y=0$. **838.** $\left(xe^{-x^2}y'\right)'+2ne^{-x^2}y=0$. **839.** $\left(x^{\gamma}(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma}y'\right)'+\alpha\beta x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}y=0$. **840.** $z''+\frac{x^2+6}{4\left(x^2+1\right)}z=0$. **841.** $z''-\frac{12x^2}{\left(4x^2-x\right)^2}z=0$. **842.** $z''+z=0$. **843.** $z''-\frac{3}{4}\frac{(x+1)^2}{\left(x^2-x\right)^2}z=0$. **844.** $z''+z=0$. **845.** $z''+\frac{n(n+1)\left(1-x^2\right)+1}{\left(1-x^2\right)^2}z=0$. **846.** $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. **847.** $y=C_1e^x+C_2\sin x$. **848.** $y=C_1\cos x+C_2e^x$. **849.** $y=C_1\sqrt{1+x}+C_2\sqrt{1-x}$. **850.** $y=x\left(C_1+C_2\int\frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx\right)$. **851.** $y_1=x^2+1$; $y=C_1\left(x^2+1\right)+C_2e^x$. **852.** $y_1=x^3$; $y=C_1x^3+C_2e^x$. **853.** $y_1=x^3-x$; $y=C_1\left(x^3-x\right)+C_2\left(6x^2-4-3\left(x^2-x\right)\ln\frac{x+1}{x-1}\right)$. **854.** Частинного розв'язку у вигляді многочлена не існує. $y=C_1\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$. **855.**

$$y=(x-1)\left(C_1+C_2\int\frac{e^{\frac{(x-1)^2}{2}}}{(x-1)^2}\,dx\right).$$

856. $y_1=\mathrm{Ai}(x)=1+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(3k-1)3k}+\ldots$; $y_2=\mathrm{Bi}(x)=x+\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot3k(3k+1)}+\ldots$; $\mathrm{Ai}(x)$, $\mathrm{Bi}(x)$ – функції Ейрі. **857.** $y_1=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^4}{4!}+\ldots$; $y_2=x+\frac{12}{5!}x^5+\ldots$. **858.** $y_1=1-\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{x^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\ldots$; $y_2=x-\frac{x^5}{4\cdot5}+\frac{x^9}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{x^{13}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\ldots$. **859.** $y_1=1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-\frac{2}{5!}x^5-\ldots$; $y_2=x-\frac{x^3}{3!}-\frac{2}{4!}x^4-\frac{5}{5!}x^5+\ldots$. **860.** $y_1=\frac{1}{x}\ln(1-x)$; $y_2=\frac{1}{x}$. **861.** $y_1=1-x$; $y_2=\frac{1-2x}{x}$. **862.** $y_1=\frac{x^2}{1-x}$; $y_2=\frac{1}{1-x}$. **863.** $y_1=\frac{1}{1-x}$; $y_2=\frac{1}{1-x}\ln|x|$. **865.** $y_1=\frac{x}{1-x}$;

$y_2 = \dfrac{1}{1-x}\ln|x|$. **866.** $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$; $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$. **867.** $y_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$; $y_2 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$. **868.** $y_1 = 2x$; $y_2 = x\int \dfrac{e^{x^2}}{x^2}\,dx$. **869.** $y_1 = x$; $y_2 = 1 + \dfrac{1}{2},\ln\dfrac{x-1}{x+1}$. **870.** $y_1 = e^x$; $y_2 = x$. **871.** $y_1 = 1$; $y_2 = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$. **872.** $y_1 = 1$; $y_2 = \arcsin x$. **873.** $y = \dfrac{1}{x^2}\left(C_1J_2(x) + C_2Y_2(x)\right)$; $J_p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+p}$; $Y_p(x) = \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$. **874.** $y_1(x) = \dfrac{1}{x}(C_1J_2(2x) + C_2Y_2(2x))$. **875.** $y_1 = x^{\frac{1}{4}}\left(C_1J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}\right) + C_2J_{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}\right)\right)$. **876.** $y = x^{\frac{3}{2}}\left(C_1J_{\frac{5}{4}}\left(x^2\right) + C_2J_{-\frac{5}{4}}\left(x^2\right)\right)$. **877.** $C_1J_0(2x) + C_2Y_0(2x)$. **878.** $y = C_1J_0\left(\dfrac{x}{3}\right) + C_2Y_0\left(\dfrac{x}{3}\right)$. **879.** $y = C_1J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$. **880.** $C_1J_{\frac{1}{3}}(2x) + C_2J_{-\frac{1}{3}}(2x)$. **881.** $y_1 = 1 + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \dfrac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$. **882.** $y_1 = x^2 + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x}{3!} + \ldots = xe^x$. **883.** $y_1 = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{40} + \dfrac{7x^4}{720} + \ldots$; $y_2 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{x^4}{20} + \ldots$. **884.** $y_1(x) = \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{x}{2}$; $y_2(x) = x^2 + \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{4\cdot 5} + \dfrac{x^5}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots = 6\left(\dfrac{e_1^x}{x} - 1 - \dfrac{x}{2}\right)$. **885.** $y_1 = x^{\frac{1}{3}}\left[1 + \dfrac{x}{5\cdot 6} + \dfrac{x}{6\cdot 6\cdot 11\cdot 12} + \ldots\right]$; $y_2 = x^{\frac{2}{3}}\left[1 + \dfrac{x^2}{6\cdot 7} + \dfrac{x^4}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13} + \ldots\right]$. **886.** $y_1 = \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^2}{3!} + \ldots = \dfrac{e^x}{x}$; $y_2 = |x|^{\frac{1}{2}}\left[1 + \dfrac{2x}{5} + \dfrac{(2x)^2}{5\cdot 7} + \dfrac{(2x)^3}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots\right]$. **887.** $y_1 = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \ldots = \dfrac{\sin x}{x}$; $y_2 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^3}{4!} + \ldots = \dfrac{\cos x}{x}$. **888.** $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{7x^4}{4} + \ldots$. **889.** $y = 1 + x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$. **890.** $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4} + \ldots$. **891.** $y = x + x^2 - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots$. **892.** $y = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2 + \dfrac{25}{3}(x-1)^3 + \dfrac{81}{4}(x-1)^4 + \ldots$. **893.** $y = 1 + 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\ldots$. **894.** $y = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \dfrac{19}{6}x^4 + \ldots$. **895.** $y_1 = e^{-x}$; $y_2 = e^{-x}\int\dfrac{e^x}{x}\,dx$. **897.** $t = kx$; $t^2y'' + ty' + \left(t^2 - n^2\right)y = 0$. **898.** $y = xz$; $x^2z'' + xz' + \left[x^2 - \left(m^2+1\right)\right]z = 0$. **899.** $y_1 = 1 - x + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\dfrac{x^k}{(k!)^2}$; $y_2 = \dfrac{1}{2}y_1\ln x + x + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1 + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{k}{(k!)^2}}{k^2}x^k$. **900.** $y_1 = e^x$. **901.** $W = C|x|^{-\gamma}|1-x|^{\gamma-\alpha-\beta-1}$. **902.** $W = \dfrac{C}{1-x^2}$, $C \neq 0$. **903.** $W = -\dfrac{2\sin\nu\pi}{\pi x}$. **905.** $\lambda_k = -\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$; $y_k = \sin\dfrac{\pi xk}{l}$. **906.** $\lambda_k = -\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$; $y_k = \cos\dfrac{\pi xk}{l}$. **907.**

$\lambda_k = -\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{\pi^2}{l^2}$; $y_k = \sin\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{l}$. **908.** $\lambda_k = -\left(\dfrac{\pi k}{\ln a}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$; $y_k = \sqrt{x}\sin\dfrac{\pi k\ln x}{\ln a}$. **909.** $1-\sin x-\cos x$. **910.** $y=e^{-3x}$. **911.** Нема розв'язків. **912.** $y=2x^2$. **913.** $y=x+e^{-x}-\dfrac{1}{e}$. **914.** $y=e^x-2$. **915.** Нема розв'язків. **916.** $y=-2e^{-x}$. **917.** $y=e^{-x}-1$. **918.** $y=2x^3$. **921.** $G=\begin{cases}\sin s\cdot\cos x, & x\in[0,s];\\ \cos s\cdot\sin x, & x\in[s,\pi].\end{cases}$

922. $G=\begin{cases}e^5\left(e^{-x}-1\right), & x\in[0,s];\\ 1-e^5, & x\in[s,1].\end{cases}$ **923.** $G=\begin{cases}(s-1)x, & x\in[0,s];\\ s(x-1), & x\in[s,1].\end{cases}$

924. $G=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\in[1,s];\\ \dfrac{1}{s-1}, & x\in[s,3].\end{cases}$ **925.** $G=\begin{cases}\dfrac{s^2-4}{2s^2}, & x\in[1,s];\\ \dfrac{x^2-4}{2s^2}, & x\in[s,2].\end{cases}$

926. $G=\begin{cases}-x, & x\in[0,s];\\ -s, & x\ge s.\end{cases}$ **927.** $G=\begin{cases}-e^{-2}\operatorname{ch}x, & x\in[0,s]\\ -e^{-x}\operatorname{ch}s, & x\in[s,2].\end{cases}$

928. $G=\begin{cases}-1, & x\in[0,s];\\ -e^{2-x}, & x\ge s.\end{cases}$ **929.** $G=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^5\left(e^{-3x}-e^{-x}\right), & x\in[0,s];\\ \dfrac{1}{2}e^{-3x}\left(e^s-e^{3s}\right), & x\ge s.\end{cases}$

930. $G=\begin{cases}\dfrac{x\left(s^3-1\right)}{3s^2}, & x\in[0,s];\\ \dfrac{s\left(x^3-1\right)}{3x^2}, & x\in[s,1].\end{cases}$

931. $y=\dfrac{1}{a-b}\left((b-x)\int\limits_a^x(s-a)f(s)\,ds+(x-a)\int\limits_x^b(b-s)f(s)\,ds\right)$.

932. $G=\begin{cases}1+\ln s, & x\in(0,s);\\ 1+\ln x, & x\in[s,1),\end{cases}$ $y=\dfrac{x^2+1}{2}$. **935.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$, $\left[(b-a)\dfrac{\sqrt{m}}{\pi}\right]+1$. **938.** а) $0,33<\rho<0,5$; б) $15,7<\rho<32$; в) $0,49<\rho<1$; г) $0,15<\rho<1,2$. **946.** $y_1=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{x^3}{2}+o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$; $y_2=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x^3}{3}+o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$. **947.** $y_1=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)$; $y_2=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)$. **948.** $y_{1,2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{\pm\frac{x^2}{2}}\left(1+o\left(x^{-2}\right)\right)$. **949.** $y_1=e^{-\frac{x}{2}}\cos e^x+o\left(e^{-\frac{3x}{2}}\right)$; $y_2=e^{-\frac{x}{2}}\sin e^x+o\left(e^{-\frac{3x}{2}}\right)$. **950.** $y_{1,2}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{4}}\exp\left[\pm2x^{\frac{3}{2}}\right]$. **951.** $y_1=x^{-\frac{3}{4}}\cos2\sqrt{x}+o\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)$; $y_2=x^{-\frac{3}{4}}\sin2\sqrt{x}+o\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)$. **952.**

$$y_1=\exp\left((x-1)^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left[(2x)^{-\frac{1}{4}}\cos\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{3}+o\left(x^{-\frac{7}{4}}\right)\right];$$

$$y_2=\exp\left((x-1)^{\frac{2}{2}}\right)\cdot\left[(2x)^{-\frac{1}{4}}\sin\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{3}+o\left(x^{-\frac{7}{4}}\right)\right];$$

953. $y_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\exp\left(\pm\dfrac{x^2}{2}\right)\cdot\left(1\pm\dfrac{3}{32x^2}+\dfrac{105}{2048x^4}+o\left(x^{-6}\right)\right)$. **954.** $y = x^{\frac14}\left(1+\dfrac{3}{64x}\right)\cos\left(2\sqrt{x}+\dfrac{3}{16\sqrt{x}}\right)+o\left(x^{-\frac54}\right)$. **955.** Розв'язок є монотонною функцією. **956.** $y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = y_4,\ y_4' = -x^2y_1$, де $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'',\ y_4 = y'''$. **958.** $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2,\ \dfrac{dx_2}{dt} = -k^2x_1$ де $x_1 = x,\ x_2 = \dfrac{dx}{dt}$. **959.** $y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = y_4,\ y_4' = -y_1$, де $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = z,\ y_4 = z'$. **960.** $y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = \dfrac{2}{x^3}y_1$, де $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = z$. **961.** $y_1' = y_2,\ y_2' = -\dfrac{y_2}{x} - y_1$, де $y_1 = y,\ y_2 = y'$. **962.** φ_1 – інтеграл, φ_2 – ні. **963.** φ_2 – інтеграл, φ_1 – ні. **964.** φ – інтеграл. **965.** Залежні. **966.** $\psi_1 = xy,\ \psi_2 = \dfrac{z}{x}$. **967.** $\psi_1 = \dfrac{y}{x},\ \psi_2 = z - x - y$. **968.** $\psi_1 = \dfrac{y}{x},\ \psi_2 = z$. **969.** $\psi_1 = \sin x - \sin y,\ \psi_2 = \sin x - z$. **970.** $\psi_1 = z,\ \psi_2 = \dfrac{(x+z)y}{y+z}$. **971.** $y = C_2e^{C_1x^2},\ z = \dfrac{2C_1}{C_2}xe^{-C_1x^2},\ y = 0$. **972.** $y = -\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{C_2}{2}(x+C_2)-\dfrac{C_1}{4}(x+C_2)^2,\ z = \dfrac{C_1}{4}(x+C_2)^2+\dfrac{1}{C_1}$. **973.** $y = C_2e^{C_1x},\ z = x+\dfrac{C_2}{C_1}e^{C_1x},\ y = 0,\ z = x + C$. **974.** $y = -\dfrac{1}{x^2+C_1},\ z = x\left(C_2 - \ln|x|\right)$. **975.** $e^y - e^x = C_1,\ x = z\left(C_2 - \dfrac12 z\right)$. **976.** $y = C_1x + C_2x^2,\ z = C_1(1-x) + C_2\left(2x - x^2\right)$. **977.** $ze^{-x} + y = C_1,\ ze^{-y} + x = C_2$. **978.** $y = C_2e^{C_1x},\ z = C_1C_2e^{C_1x}$. **979.** $\dfrac{y}{x} = C_1,\ \dfrac{z}{x} = C_2$. **980.** $y = C_1,\ \dfrac{z}{x} = C_2$. **981.** $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1,\ z - \sqrt{x} = C_2$. **982.** $y = C_1,\ ze^{\frac{x}{y}} = C_2$. **983.** $x^2+y^2+z^2 = C_1^2,\ lx + my + nz = C_2$. **984.** $x = C_1y,\ xy - 2\sqrt{z^2} + 1 = C_2$. **985.** $x^2+y^2+z^2 = C_1,\ yz = C_2x$. **986.** $x + z - y = C_1,\ \ln|x| + \dfrac{z}{y} = C_2$. **987.** $y = C_1z,\ x - y^2 - z^2 = C_2z$. **988.** $y^2 + z^2 = C_1,\ x - yz = C_2$. **989.** $x = \dfrac{1}{1+t^2},\ y = \dfrac{1}{1+t^2}$. **990.** $x = \ln(t+e),\ y = 0$. **991.** $x = \dfrac{C_2\cos t - C_1\sin t - \beta\left(C_1^2+C_2^2\right)}{(\cos t - \alpha C_1 - \beta C_2)^2 + (\sin t - \alpha C_2 + \beta C_1)^2}$; $y = \dfrac{-C_2\sin t - C_1\cos t + \alpha\left(C_1^2+C_2^2\right)}{(\cos t - \alpha C_1 - \beta C_2)^2 + (\sin t - \alpha C_2 + \beta C_1)^2}$. **992.** $x = \dfrac{1}{\sqrt{t}},\ y = 0$. **993.** $u' = u^2 - v^2 - q(x),\ v' = 2uv$. **996.** $y_1 = 2 - e^{-x},\ z_1 = 2 - 2e^{-x},\ y_2 = -1 + e^{-x},\ z_2 = -1 + 2e^{-x}$. **997.** $y_1 = e^{2x},\ z_1 = 0,\ y_2 = 0,\ z_2 = e^{2x}$. **998.** $y_1 = \cos x,\ z_1 = -\sin x,\ y_2 = \sin x,\ z_2 = \cos x$. **999.** $x = C_1\left(\cos t - \dfrac{\sin t}{t}\right) - C_2\left(\sin t + \dfrac{\cos t}{t}\right)$; $y = \dfrac{1}{t}(C_1\sin t + C_2\cos t)$; $X(t) = \begin{pmatrix}\cos t - \dfrac{\sin t}{t} & -\sin t - \dfrac{\cos t}{t}\\ \dfrac{\sin t}{t} & \dfrac{\cos t}{t}\end{pmatrix}$. **1000.** $y_1' = 3y_1,\ y_2' = 2y_2$. **1001.** $y_1' = 3y_1 + y_2,\ y_2' = 3y_2$. **1002.** $y_1' = \dfrac{x}{1+x^2}y_1 + \dfrac{1}{1+x^2}y_2,\ y_2' = -\dfrac{1}{1+x^2}y_1 + \dfrac{x}{1+x^2}y_2$. **1003.** $y_1' = 3y_1,\ y_2' = 3y_2$. **1004.** $y_1' = 2y_2,\ y_2' = -2y_1$.

1005. $y_1' = \dfrac{x}{x^2-1}y_1 - \dfrac{1}{x^2-1}y_2,\ \ y_2' = -\dfrac{1}{x^2-1}y_1 + \dfrac{x}{x^2-1}y_2.$

1006. $\begin{cases} y = C_1e^{2t}; \\ x = \dfrac{C_1}{2}e^{2t} + C_2. \end{cases}$ **1007.** $\begin{cases} x = C_1; \\ y = C_2e^{-t}. \end{cases}$ **1008.** $\begin{cases} y = C_1e^{x} + C_2e^{-x}; \\ z = C_1e^{x} - C_2e^{-x}. \end{cases}$

1009. $\begin{cases} x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t); \\ y = e^{2t}(C_1\sin t - C_2\cos t). \end{cases}$ **1010.** $\begin{cases} x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t}; \\ y = \dfrac{C_1}{6}e^{-6t} + \dfrac{C_2}{2}e^{2t} + \dfrac{C_3}{3}e^{3t}; \\ z = C_1e^{-6t}. \end{cases}$

1011. $\begin{cases} z = C_1e^2t; \\ y = e^{2t}(C_2 + C_1t); \\ x = e^{2t}\left(C_3 + C_2t + \dfrac{C_1}{2}t^2\right). \end{cases}$ **1012.** $\begin{cases} y = C_1 + C_2e^{5x}; \\ z = C_1 - 4C_2e^{5x}. \end{cases}$

1013. $\begin{cases} y = C_1 + C_2e^{-3x}; \\ z = -2C_1 - 3C_2e^{-x}. \end{cases}$ **1014.** $\begin{cases} y = e^{2x}(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)); \\ z = e^{2t}(C_1\sin(3x) - C_2\cos(3x)). \end{cases}$

1015. $\begin{cases} y = 2e^{-2x}\left(C_1\cos\left(\sqrt{3}^6x\right) + C_2\sin\left(\sqrt{3}^6x\right)\right); \\ z = e^{-2x}\left(\left(3C_1 - \sqrt{3}x\right)\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \left(\sqrt{3}C_1 + \sqrt{3}C_2\right)\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right). \end{cases}$

1016. $\begin{cases} x = -2C_1e^{t} - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}; \\ y = C_1e^{t} + 2C_2e^{2t} + C_3e^{3t}; \\ z = 2C_1e^{t} + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}. \end{cases}$ **1017.** $\begin{cases} x = 2C_1 + C_2e^{t} + C_3e^{3t}; \\ y = 3C_1 - 2C_2e^{2t}; \\ z = C_1 + C_2e^{t} + 2C_3e^{2t}. \end{cases}$

1018. $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)\sin t; \\ y = -2C_1e^{-t} + (15C_2 + 9C_3)\cos t + (15C_3 - 9C_2)\sin t; \\ z = 2C_2e^{-t} + (8C_3 - 2C_2)\cos t + (-8C_2 - 2C_2)\sin t. \end{cases}$

1019. $\begin{cases} x = C_1 + C_2(t+1) + C_3e^{-t}; \\ y = 3C_2 - 2C_3e^{-t}; \\ z = C_1 + C_2t + 2C_3e^{-t}. \end{cases}$ **1020.** $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_3e^{-t}; \\ y = C_1e^{t} + C_2e^{2t}; \\ z = 2C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}. \end{cases}$

1021. $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{t}; \\ y = 3C_1 + C_3e^{t}; \\ z = -C_1 + (C_2 - C_3)e^{t}. \end{cases}$ **1022.** $\begin{cases} x = (C_2 + C_3t)e^{t}; \\ y = 2C_1e^{t} - (2C_2 + C_3 + 2C_3t)e^{-t}; \\ z = C_1e^{t} - (C_2 + C_3 + C_3t)e^{-t}. \end{cases}$

1023. $\begin{cases} y_1 = e^{2x}, \quad z_1 = 0; \\ y_2 = 0, \quad z_2 = e^{2x}. \end{cases}$ **1024.** $\begin{cases} y_1 = e^{-x}(\cos x + 2\sin x),\ z_1 = -5\sin x; \\ y_2 = e^{-x}\sin x,\ z_2 = e^{-x}(\cos x - 2\sin x). \end{cases}$

1025. $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}(1+e), \quad z_1 = \dfrac{1}{2}(1-e); \\ y_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{2x}\right), \quad z_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + e^{2x}\right). \end{cases}$ **1026.** $\begin{cases} y_1 = e^2x, \quad z_1 = xe^{2x}; \\ y_2 = 0, \quad z_2 = e^{2x}. \end{cases}$

1027. $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & cht \end{pmatrix}.$ **1028.** $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$ **1029.** $\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$ **1030.** $\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$ **1031.** $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$ **1032.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$ **1033.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

1034. $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & \dfrac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$. **1035.** $x = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}2t\\2t-1\end{pmatrix}$.
1036. $x = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t + \sin 2t\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t - \cos 2t\end{pmatrix}$. **1037.** $x = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} +$ $+C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. **1038.** $x = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. **1039.** $x = C_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
1040. $x = C_1 = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. **1041.** $x = C_1 e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
1042. $x = C_1 e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\cos t\\2\cos t\\3\cos t - \sin t\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}2\sin t\\2\sin t\\3\sin t + \cos t\end{pmatrix}$.
1043. $C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}\cos t - \sin t\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + C_3 e^{t}\begin{pmatrix}\cos t + \sin t\\ \sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}$. **1044.** $x = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\t+1\\-t\end{pmatrix}$. **1045.** $x = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} +$ $+C_3 e^{t}\begin{pmatrix}2t\\2t\\2t+1\end{pmatrix}$. **1046.** $x = C_1 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix}t+1\\t\\2t\end{pmatrix}$. **1047.** $x = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{2t}\begin{pmatrix}2t+1\\t\\3t\end{pmatrix}$.
1048. $x = C_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}t\\t-1\\2t+1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}t^2\\t^2-2t+2\\2t^2-2t\end{pmatrix}$. **1049.** *е*. **1050.** 1. **1051.** *е*. **1052.** *е*. **1053.** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2}(C_1 + C_2(\ln x + 1)); \\ z = -\dfrac{1}{x^2}(C_1 + C_2 \ln x). \end{cases}$ **1054.** $\begin{cases} y = C_1 e^{-\frac{1}{x}} + 2C_2 e^{-\frac{2}{x}}; \\ z = -\left(C_1 e^{-\frac{1}{x}} + C_2 e^{-\frac{2}{x}}\right). \end{cases}$ **1055.** $\begin{cases} y = e^{2\sqrt{x}}\left(C_1\cos(\sqrt{x}) + C_2\sin(\sqrt{x})\right); \\ z = e^{2\sqrt{x}}\left(C_1\sin(\sqrt{x}) - C_2\cos(\sqrt{x})\right). \end{cases}$
1056. $\begin{cases} x = 3C_1 e^{t} + 3C_2 e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t; \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t. \end{cases}$
1057. $\begin{cases} x = -2e^{t}(C_1 + C_2 + C_2 t) - 2e^{-t}(C_3 - C_4 + C_4 t); \\ y = e^{t}(C_1 + C_2 t) + e^{-t}(C_3 + C_4 t). \end{cases}$

1058. $\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e\left(C_3^{-t} \cos t + C_4 \sin t\right); \\ y = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t) + e\left(C_4^{-t} \cos t - C_3 \sin t\right). \end{cases}$

1059. $\begin{cases} x = C_1e^t + 4C_2e^{-2t} + 3C_3e^{-t}; \\ y = 2C_1e^t + 2C_2e^{-2t}. \end{cases}$ **1060.** $\begin{cases} x = 3Ce^{-t}; \\ y = Ce^{-t}. \end{cases}$

1061. $\begin{cases} x = 2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t} + C_3\cos(2t) + 2C_4\sin(2t); \\ y = 3C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} - 2C_3\sin(2t) + C_4\cos(2t). \end{cases}$

1062. $\begin{cases} x = (2 - 15t)e^{5t}; \\ y = (5t + 1)e^{5t}. \end{cases}$ **1063.** $\begin{cases} x = Ce^{-2t}(1 - 2t); \\ y = e^{-2t}(1 + 2t). \end{cases}$

1064. $\begin{cases} x = 4e^t + 2e^{-t}; \\ y = -e^t - e^{-t}. \end{cases}$ **1065.** $\begin{cases} x = -e^{-t}; \\ y = e^{-t}; \\ z = 0. \end{cases}$

1066. $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|; \\ y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2\cos t\ln|\cos t| + 2t\sin t. \end{cases}$ **1067.**
$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + \operatorname{tg} t; \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2. \end{cases}$ **1068.** $\begin{cases} x = C_1 + 2C_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|; \\ y = -2C_1 - 3C_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln\left|e^t - 1\right|. \end{cases}$

1069. $\begin{cases} y = 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}; \\ z = 9e^{2x} + 3C_1e^x + C_2e^{-x}. \end{cases}$ **1070.** $\begin{cases} x = 3C_1e^t + C_2e^{-t} + 3\sin t; \\ y = C_1t + C_2e^{-t} - \cos t + 2\sin t. \end{cases}$

1071. $\begin{cases} x = 2C_1e^{8t} - 2C_2 - 6t + 1; \\ y = 3C_1e^{8t} + C_2 + 3t. \end{cases}$ **1072.** $\begin{cases} x = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t; \\ y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$

1073. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t); \\ y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^{3t}(3\cos t + \sin t). \end{cases}$

1074. $\begin{cases} x = C_1e^t\cos t + C_2e^t\sin t + e^t + t + 1; \\ y = C_1e^t(-\cos t - \sin t) + C_2e^t(\cos t - \sin t) - 2e^t - 2t - 1. \end{cases}$

1075. $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + 3t^2 - t - 1; \\ y = C_1\sin t - C_2\cos t + t^2 + 2. \end{cases}$

1076. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2\sin t + C_3\sin t; \\ y = t - C_1e^t + C_2\cos t - C_3\sin t; \\ z = 1 + C_2\sin t + C_3\cos t. \end{cases}$

1077. $\begin{cases} x = e^{-t}\left(C_1t^2 + C_2t + C_3\right) + t^2 - 3t + 3; \\ y = e^{-t}(-2C_1t - C_2) + t; \\ z = 2C_1e^{-t} + t - 1. \end{cases}$

1078. $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2; \\ y = -C_1e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2. \end{cases}$

1079. $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}; \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}. \end{cases}$

1080. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2; \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t. \end{cases}$

1081. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}; \\ y = -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}. \end{cases}$

1082. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2; \\ y = (C_1t + C_3)e^t - t - 1 - C_2; \\ z = y - C_1e^t. \end{cases}$ **1083.** $\begin{cases} x = -\left(2t + \sin t + \cos t - e^{-t}\right); \\ y = \cos t - 2e^{-t} + 2. \end{cases}$

1084. $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}t - \dfrac{7}{9}; \\ y = \dfrac{1}{3}t - \dfrac{5}{9}. \end{cases}$ **1085.** $\begin{cases} x = e^{2t} + e^{3t} + t^2 + t; \\ y = 2e^{2t} + t + 1. \end{cases}$ **1086.** Сідло. **1087.** Вузол. **1088.** Вузол. **1089.** Фокус. **1090.** Сідло. **1091.** Вироджений вузол. **1092.** Центр. **1093.** Вузол. **1094.** Дикритичний вузол. **1095.** Фокус. **1096.** Якщо $y > 0$ – аналог сідла, $y < 0$ – вузла. *Вказівка:* побудувати кілька ізоклін та дослідити, як саме інтегральні криві поводять себе в околі особливої точки. **1097.** Дві інтегральні криві проходять через особливу точку, торкаючись одна одної; решта – гіперболи. **1098.** Вузол. **1099.** Фокус. **1100.** Центр. **1101.** Пряма особливих точок. **1102.** Вироджений вузол. **1103.** Сідло. **1104.** Вироджений вузол. **1105.** Пряма особливих точок. **1106.** $(1,-2)$ – фокус. **1107.** $(1,0)$ – дикритичний вузол, $(-1,0)$ – сідло. **1108.** $(0,-1)$ – вироджений вузол, $(2,-3)$ – сідло. **1109.** $(4,2)$ – вузол, $(-2,-1)$ – фокус. **1110.** $(1,1)$ – фокус, $(-1,-1)$ – сідло. **1111.** $(2,4)$ – вузол, $(-1,-2)$ – фокус. **1112.** $(2,2)$ – вузол, $(-2,0)$ – сідло, $(-1,-1)$ – фокус. **1113.** $(3,0)$ – фокус, $(1,1)$ – вузол, $(-1,1)$ і $(-3,0)$ – сідла. **1114.** $(1,2)$ – вузол, $(2,-1)$ – фокус, $(2,1)$ і $(-2,1)$ – сідла. **1115.** $(0,1)$ і $(0,-1)$ – сідла, $(-1,0)$ – фокус, $(3,2)$ – вузол. **1116.** $(-2,4)$ – вузол, $(1,1)$ – фокус, $(2,4)$ і $(-1,1)$ – сідла. **1117.** $(2,1)$ – вузол, $(1,2)$ – сідло, $(-1,-2)$ – фокус. **1118.** $(1,-1)$ – фокус, $(0,-2)$ – сідло, $(-2,2)$ – вузол. **1119.** $(1,1)$ – фокус, $(-1,-1)$ – сідло. **1120.** $(0,1)$ і $0,-1)$ – сідла, $(1,0)$ – фокус, $(-3,2)$ – вузол. **1121.** $(1,-1)$ і $(-1,1)$ – сідла, $(3,3)$ і $(-3,-3)$ – вузли. **1122.** $(0,0)$ – фокус, $(7,1)$ – вузол, $(0,8)$ і $(3,-1)$ – сідла. **1139.** а) Нестійкі; б) Нестійкі. **1140.** а) Асимптотично стійкі; б) Асимптотично стійкі. **1141.** а) Асимптотично стійкі; б) Нестійкі. **1142.** Нестійкий. **1143.** Стійкий. **1144.** Стійкий. **1145.** Нестійкий. **1146.** Асимптотично стійкий. **1147.** Нестійкий. **1148.** Нестійкий. **1149.** Нестійкий. **1150.** Асимптотично стійкий. **1151.** Стійкий. **1152.** $(2\pi k, 0)$ – стійкі, $((2k+1)\pi, 0)$ – нестійкі. **1153.** $(1,2)$ і $(2,1)$ – нестійкі. **1154.** $(2,3)$ – нестійкий, $(-1,0)$ – стійкий. **1155.** $(2\pi k, -1)$ – стійкий, $((2k+1)\pi, -1)$ – нестійкий. **1156.** $(2\pi k, 0)$ – нестійкий, $((2k+1)\pi, 0)$ – стійкий. **1157.** $(1,1)$ – нестійкий, $(-4,-4)$ – стійкий. **1158.** $(2\pi k, 0)$ – стійкий, $(2\pi k + \pi, 0)$ – стійкий. **1159.** $(0,0)$ – нестійкий, $(1,2)$ – стійкий. **1160.** $(-1, 2\pi k)$ – стійкий, $(-1,(2k+1)\pi)$ – нестійкий. **1161.** $a < -1$. **1162.** $-2 < a < -1$. **1163.** $a < b < -1$. **1164.** $ab < -3$. **1165.** $-be < a < -e$. **1166.** $0 < a < 2$. **1167.** Стійкий. **1168.** Нестійкий. **1169.** Стійкий. **1170.** Нестійкий. **1171.** Нестійкий. **1172.** Стійкий. **1173.** Стійкий. **1174.** Стійкий. **1175.** Стійкий. **1176.** Нестійкий. **1177.** Стійкий. **1178.** Нестійкий.

1179. Стійкий. **1180.** Нестійкий. **1181.** Нестійкий. **1182.** Нестійкий. **1183.** $a>0,\ b>0,\ ab>2$. **1184.** $3a>b>0$. **1185.** $0<a<2$. **1186.** Нестійкий при всіх a. **1187.** $a>0,\ b>0,\ a+b<1$. **1188.** $b>0,\ a>b+1$. **1189.** $a>0,\ b>0,\ 8a-a^2b>4$. **1190.** $a>2,\ b>0,\ 2ab-b^2>4$. **1191.** $2ab<1$. **1192.** а) Нестійкий; б) Стійкий; в) Нестійкий; г) Нестійкий; д) Нестійкий; е) Стійкий. **1193.** $a=b=0,\ -4<ab<0$. **1198.** Ні. **1200.** $a+d<0,\ ad-bc>0$. **1201.** $u=(dx-by)^2+2d\int\limits_0^x f(x)\,dx-bcx^2=(dx-by)^2+2\int\limits_0^x(df(x)-bcx)\,dx$; $\dot u=-2\left(\dfrac{f(x)}{x}+d\right)\left(bc-\dfrac{f(x)}{x}d\right)x^2$; $d\dfrac{f(x)}{x}-bc>0$ при $x\neq0$; $\dfrac{f(x)}{x}+d<0$ при $x\neq0$. **1202.** $v_0=\int\limits_0^x f(x)\,dx+\int\limits_0^y\dfrac{y}{g(y)}\,dy$; $\dot v=-y\dfrac{\varphi(y)}{g(y)}$. **1203.** $v=u(x)-u(0)+\dfrac{p^2}{2}$, де $\dot x=p,\ \dot p=-u'(x)$. **1204.** $z=f\left(x^2+y^2\right)$. **1205.** $u=f\left(\dfrac{x-y}{z},\dfrac{(x+y+2z)^2}{z}\right)$. **1206.** $z=f\left(xy+y^2\right)$. **1207.** $F\left(x^2-y^2,x-y+z\right)=0$. **1208.** $F\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac1z,\dfrac{1}{x-y}+\dfrac1z\right)=0$. **1209.** $zy=\left(xz+y^2\right)F(y)+xy$. **1210.** $z=a\sin\left(xy+F\left(\dfrac yx\right)\right)$. **1211.** $z^2=yF\left(\dfrac yx\right)-x^2-y^2$. **1212.** $u=e^{ay}F(x-y)$. **1213.** $\Phi\left(\dfrac{x-a}{u-c},\dfrac{y-b}{u-c}\right)=0$. **1214.** $ax+by+cz=F\left(x^2+y^2+z^2\right)$. **1215.** $u=e^{-\frac1x}F\left(\dfrac1y-\dfrac1x,\dfrac1z-\dfrac1x\right)$. **1216.** $z=yF\left(\dfrac{y^3}{x^2}+y\right)$. **1217.** $z=\dfrac{x^2}{3y}+\dfrac{F(xy)}{xy}$. **1218.** $\Phi\left((x-y)\sqrt[3]{x+y+z+u},(y-u)\sqrt[3]{x+y+z+u},(z-u)\sqrt[3]{x+y+z+u}\right)=0$. **1219.** $F\left(e^{-x}-\dfrac1y,z+\dfrac{x-\ln y}{e^{-x}-\frac1y}\right)=0$. **1220.** $y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}=z-\ln y$. **1221.** $(x+2y)^2=2x(z+xy)z-xy$. **1222.** $\sqrt{\dfrac{z}{y^3}}\sin x=\sin\sqrt{\dfrac zy}$. **1223.** $z=ye^x-e^{2x}+1$. **1224.** $z=y^2e^{2\sqrt{x-2}}$. **1225.** $u=(1-x+y)(2-2x+z)$. **1226.** $u=(xy-2z)\left(\dfrac xy+\dfrac yx\right)$. **1227.** $2x^2(y+1)=y^2+4z-1$. **1228.** $\sqrt{\dfrac{z}{y^3}}\sin x=\sin\sqrt{\dfrac zy}$. **1229.** $x-2y=z+x^2+y^2$. **1230.** $\left(\left(y^2z-2\right)^2-x^2+z\right)y^2z=1$. **1231.** $z^2+x^2=5(xz-y)$. **1232.** $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$. **1233.** $(1+yz)^3=3yz(1+yz-x)$. **1234.** $u=(1+x-y)(2-2y+z)$. **1235.** $x^2-y^2-\dfrac12\ln\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)$. **1236.** $u=xe^y-e^{2y}+1$. **1237.** $u=x+y-1+e^{xy}$. **1238.** $u=1+\dfrac{y^2}{3x}$. **1239.** $2x^2+z^2=z\left(x^2+y^2+z^2\right)$. **1240.** Кола, які лежать в площинах, паралельних площині $z=0$, з центром на Oz. **1241.** $f\left(x^2-y^2,2x^2+z^2\right)=0$. **1242.** $(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-z_0\dfrac{z-z_0}{x-x_0}=f\left(\dfrac{y-y_0}{x-x_0}\right)$. **1243.** $F(bx-ay,\ cx-az)=0$.

1244. $x^2+3y^2+z^2+3xy+xz+3yz=1$. **1245.** $F\left(\dfrac{x^2}{y},\dfrac{z}{y}\right)=0$. **1246.** $z=Cxy^2$. **1247.** Розв'язків немає. **1248.** $z=0$. **1249.** $x^3y^2z=C$. **1250.** $z=y^2-xy$. **1251.** $x^2yz+x^3=C,\ x=0$. **1252.** $z=Cxy^2$. **1253.** $z=0$. **1254.** $z=ax+by+\varphi(a,b)$. **1255.** $z=2\sqrt{xa}-\dfrac{a}{y}+b$. **1256.** $-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{ax+y}{a+1}+b$. **1257.** $\operatorname{arctg} z=-\dfrac{ax+y}{a+1}+b$. **1258.** $\dfrac{1}{2a}(az+1)^2=ax+y+b$. **1259.** $z=-\dfrac{a^2}{3x^2}+a\ln y+b$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000. — 368 с.

2. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. — 303 с.

3. *Векуа Н.П.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложения в механике. М.: Наука, 1991. — 265 с.

4. *Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. К.: Вища шк., 1972. — 154 с.

5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. 1967. — 472 с.

6. *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Т.С.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. — 326 с.

7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. — 576 с.

8. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. — 236 с.

9. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. — 331 с.

10. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння в задачах. К.: Либідь., 2003. — 504 с.

11. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. К.: Либідь, 2003. — 600 с.

12. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1952. — 416 с.

13. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.

14. *Филлипов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: РХД, 2000. — 176 с.

Підп. до друку 22.06.2004. Формат $60 \times 84/16$. Друк офс. Папір офс. №1.
Гарнітура Computer Modern LH. Друк. арк. 25. Тираж 150 прим. Зам. 161
МП «ТВіМС» м. Київ, вул. Глушкова, 2.