Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Т. П. Гой, О. В. Махней

ПРАКТИКУМ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник
для студентів галузей знань
«Фізико-математичні науки»,
«Системні науки та кібернетика»
вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2013

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів галузей знань «Фізико-математичні науки», «Системні науки та кібернетика» (протокол № ? від ?? ????? 201? р.).

Рецензенти:

Г 59 Гой Т. П. Практикум з диференціальних рівнянь : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2013. – ??? с.

???

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN

Зміст

Передмова

???

Тема 1. Звичайні диференціальні рівняння та їхні розв'язки

Короткі теоретичні відомості

1.1. Основні означення й поняття. *Звичайним диференціальним рівнянням* називають співвідношення

$$F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1.1}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = y(x)$ цієї змінної та похідними $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Порядок старшої похідної у рівнянні (1.1) називають *порядком* цього рівняння.

Диференціальне рівняння першого порядку у загальному випадку записують у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.2}$$

а рівняння, розв'язане відносно похідної, як

$$y' = f(x, y). \tag{1.3}$$

Часто застосовують симетричну форму звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{1.4}$$

де $M(x, y)$, $N(x, y)$ — задані функції.

Розв'язком диференціального рівняння (1.2) на інтервалі (a, b) називають неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = y(x)$, яка перетворює рівняння (1.2) у тотожність, тобто $F\left(x, y(x), y'(x)\right) \equiv 0$. Аналогічно означують розв'язки диференціальних рівнянь (1.3) і (1.4).

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ називають *інтегралом* рівняння (1.3) або (1.4), якщо воно неявно задає розв'язок $y = y(x)$ рівняння. Розв'язок звичайного диференціального рівняння може бути заданий також у параметричній формі, тобто як $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $\alpha < t < \beta$.

Графік розв'язку $y = y(x)$ звичайного диференціального рівняння на площині (x, y) називають *інтегральною кривою* цього рівняння.

Задачу відшукання розв'язку $y = y(x)$ рівняння (1.3), який задовольняє задану початкову умову $y(x_0) = y_0$, називають *задачею Коші.*

1.2. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Кожне диференціальне рівняння n-го порядку має, взагалі кажучи, сім'ю розв'язків, яка задається формулою з n довільними сталими.

Розв'язується й обернена задача: побудувати диференціальне рівняння за відомим розв'язком $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, який заданий співвідношенням

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{1.5}$$

Для цього потрібно здиференціювати (1.5) n разів за змінною x, вважаючи y функцією аргументу x, а потім з отриманих рівнянь і рівняння (1.5) вилучити довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 1.1. Довести, що функція $y = (1 + Cx + \ln x)^{-1}$ для кожного дійсного C є розв'язком диференціального рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.

Розв'язання. Знайдемо похідну заданої функції:

$$y' = \frac{-1}{(1 + Cx + \ln x)^2} \cdot \left(C + \frac{1}{x}\right).$$

Підставляючи в рівняння замість y та y' відповідні вирази, одержуємо, що

$$xy' + y = \frac{-(Cx + 1)}{(1 + Cx + \ln x)^2} + \frac{1}{1 + Cx + \ln x} =$$
$$= \frac{-Cx - 1 + 1 + Cx + \ln x}{(1 + Cx + \ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1 + Cx + \ln x)^2} = y^2 \ln x.$$

Функція $y(x)$ перетворює задане диференціальне рівняння у тотожність і, отже, є його розв'язком. ■

Приклад 1.2. Перевірити, чи параметрично задана функція $x = te^t$, $y = e^{-t}$ є розв'язком диференціального рівняння $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.
Розв'язання. Оскільки

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-e^{-t}}{e^t + te^t},$$

то після підстановки y' у задане рівняння одержуємо тотожність

$$(1 + t) \cdot \frac{-e^{-t}}{e^t(1 + t)} + e^{-2t} \equiv 0. \; ■$$

Приклад 1.3. Показати, що для кожного дійсного C співвідношення $y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$ є інтегралом диференціального рівняння $\left(x + x^2 + y^2\right) y' - y = 0$.
Розв'язання. Застосовуючи правило диференціювання неявної функції, знаходимо похідну $y'(x)$:

$$y' + \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + x}.$$

Підставляючи отриманий вираз для y' у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$(x + x^2 + y^2)\frac{y}{x + x^2 + y^2} - y \equiv 0. \; ■$$

Приклад 1.4. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл $x^2 + y^2 = Cx$.
Розв'язання. Здиференціювавши задане співвідношення за змінною x, одержуємо $2x + 2yy' = C$. Підставляючи тепер отриманий вираз для C у рівняння сім'ї кривих, одержуємо рівняння $x^2 + y^2 = 2(x + yy')x$ або $2xyy' = y^2 - x^2$. ■

Приклад 1.5. Побудувати інтегральні криві диференціального рівняння $y' = \frac{x+y}{|x+y|}$.

Розв'язання. Рівняння визначене на всій площині (x, y), крім прямої $y = -x$. В області визначення задане рівняння можемо записати у вигляді

$$y' = \begin{cases} 1, & y > -x, \\ -1, & y < -x. \end{cases}$$

Отже, маємо прямі $y = x + C$ у півплощині $y > -x$ і прямі $y = -x + C$ у півплощині $y < -x$. Інтегральні криві зображено на рис. 1.1.

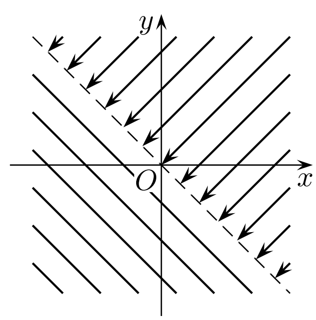

Рис. 1.1

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Довести, що задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь (C — довільна стала):

А1. $y = x + C\sqrt{1 + x^2}$; $(xy + 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$.

А2. $y = \frac{xe^x}{x+1}$; $(x^2 + x)y' = (x^2 + x + 1)y$.

А3. $y = e^{C \operatorname{ctg} x}$; $y' \sin x = y \ln y$.

А4. $y = \sqrt{2\sqrt{x^3} - x^2}$; $4xyy' = 3y^2 - x^2$.

А5. $y = x \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt + 2x$; $xdy - (y + x \sin x)dx = 0$.

А6. $y = (x-1)\int\limits_0^x \frac{e^t}{t^2}\,dt$; $\quad y' = \frac{y}{x-1} + \frac{x-1}{x^2}e^x$.

Перевірити, чи функції $y = y(x)$, задані неявно, є інтегралами відповідних диференціальних рівнянь:

А7. $\ln(xy) + x - y = C$; $\quad (1+x)y + (1-y)xy' = 0$.

А8. $\frac{1}{2}\arcsin(x^2) = \ln(1+e^y) - y$; $\quad \sqrt{1-x^4}\,y' + x(1+e^y) = 0$.

А9. $Cy(xy+1) = y+1$; $\quad (y^2+y)dx + \left(xy + x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$.

А10. $e^y = y\ln(\ln x)$; $\quad (1-y)e^y y' - \frac{y^2}{x\ln x} = 0$.

А11. $y^2 + x^2 - xy = C$; $\quad (x-2y)dy - (2x-y)dx = 0$.

А12. $y\ln y = x\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}$; $\quad xy' + x\ln y = x\sin x + y\ln y$.

Перевірити, чи параметрично задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь:

А13. $\begin{cases} x = \ln t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \ln t; \end{cases}$ $\quad y'(x - \ln y') = 1$.

А14. $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{3t^2}, \\ y = \frac{1}{t} - \sqrt{t} - \frac{1}{3t}; \end{cases}$ $\quad xy'^2 + yy' = 1$.

А15. $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = \frac{1}{4}e^{-2t}(1+\sin 2t); \end{cases}$ $\quad 4y = (y'+x)^2$.

А16. $\begin{cases} x = 3(\operatorname{ctg} t + t) + C, \\ y = \cos^3 t; \end{cases}$ $\quad y'^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

А17. $y^2 = 2Cx + C^2$.

А18. $Cy = \operatorname{tg}(Cx)$.

А19. $y = x\left(\int\limits_2^x \frac{sds}{\ln s} + C\right) + \sin x$.

А20. $\rho^2 = a\cos 2\varphi$ (a — параметр).

А21. $y = C_1x^2 + C_2e^x$.

А22. $y = C_1\cos x^2 + C_2\sin x^2$.

А23. Скласти диференціальне рівняння сім'ї прямих, які проходять через точку $(3,4)$.

А24. Скласти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і симетричні відносно осі абсцис.

А25. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл, які дотикаються до прямих $y = 0$, $x = 0$ та розташовані у першій і третій координатних чвертях.

А26. Скласти диференціальне рівняння сім'ї строфоїд $x(x^2 + y^2) = C(x^2 - y^2)$.

Побудувати інтегральні криві диференціальних рівнянь:

А27. $y' = \frac{xy}{|xy|}$.

А28. $y' = \frac{x+|x|}{y+|y|}$.

А29. $y' = \frac{\sin x}{|\sin x|}$.

А30. Довести, що функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком інтегрального рівняння $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Перевірити, чи задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь:

С1. $x = \sqrt{Ce^y - y - 2}$; $(x^3 + y + 1)y' = 3x^2$.

С2. $y = x\sqrt{1 - x^2}$; $yy' = x - 2x^3$.

С3. $y = x \operatorname{tg}(\ln x)$; $x^2(dy - dx) = (x + y)y dx$.

С4. $x = y^2(C - 3\ln|y|)$; $2(x - y^2)dy + ydx = 0$.

С5. $y = e^{Cx}$; $xy' = y \operatorname{tg}(\ln y)$.

С6. $y = \frac{(x+C)^2}{4x^2}$; $y = (xy' + 2y)^2$.

С7. $x = e^{-y}(100 + \operatorname{tg} y)$; $(e^{-y} \sec^2 y - x)dy = dx$.

С8. $y = \ln(x^2 + C)$; $xy' = x^2 e^y + 2$.

С9. $x = (C - \cos y)\sin y$; $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

С10. $x = C(e^{-y} - 1)$; $xy' + 1 = e^y$.

C11. $\begin{cases} x = 2\operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(t^2+1); \end{cases}$ $y = \ln(1+y'^2)$.

C12. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = t^2(2\ln t+1); \end{cases}$ $y'\ln\frac{y'}{4} = 4x$.

C13. $\begin{cases} x = C\cos t, \\ y = C\sin t; \end{cases}$ $x + yy' = 0$.

C14. $\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = t^3 - t + C; \end{cases}$ $2y' = x + \ln y'$.

Перевірити, чи є дані співвідношення інтегралами вказаних диференціальних рівнянь:

C15. $25(y-C)^2 = 4x^5$; $y'^2 = x^3$.

C16. $y^2 + \sqrt{x^4+y^4} = C$; $y(y-xy') = \sqrt{x^4+y^4}$.

C17. $x(e^y+xy) = C$; $(e^y+2xy)dx + (e^y+x)xdy = 0$.

C18. $\sqrt{y-x} + \sqrt{x} = C$; $y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + 3\sqrt{x}$.

C19. $\ln x \ln y = 1$; $y\ln y dx + x\ln x dy = 0$.

C20. $xe^y + ye^x = C$; $(xe^y+e^x)dy + (e^y+ye^x)dx = 0$.

C21. $x^3\ln y + x + y^3 = 0$; $(1+3x^2\ln y)dx + \left(3y^2 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$.

C22. $xy^2 - x^2 + \cos y = \pi$; $(y^2-2x)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$.

Скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

C23. $y^3 = Cx^3 + 1$.

C24. $Cy^3 + 2x - y^2 = 0$.

C25. $y = Ce^{\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x$.

C26. $y = Cx^2e^{-3/x}$.

C27. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.

C28. $y = \sqrt[3]{Cx^3 - 3x^2}$.

C29. $x^2 - y^2 = Cy^3$.

C30. $y = C_1e^x + C_2x$.

C31. $\sin y = C\sin x$.

C32. $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Скласти диференціальні рівняння ...

C33. ... кіл довільного радіуса з центром у точці $(1,3)$.

C34. ... логарифмічних спіралей $x^2 + y^2 = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

C35. ... кіл на площині, які дотикаються до осі ординат.

C36. ... кіл на площині, які проходять через початок координат.

C37. … кіл радіуса 1, центри яких лежать на прямій, що з'єднує точки $(2,5)$ і $(-1,-4)$.

C38. … еліпсів, центри яких збігаються з початком координат, а осі симетрії — з осями координат.

C39. … еліпсів із заданою фокусною відстанню $2C$.

C40. … цисоїд $(2C-x)y^2 = x^3$.

C41. … парабол з вершиною у точці $(2,-2)$ та віссю симетрії, паралельною осі ординат.

Побудувати інтегральні криві диференціальних рівнянь:

C42. $y' = \frac{|x^2-y^2|}{x^2-y^2}$.

C43. $y' = \frac{|2x-y|}{2x-y}$.

C44. $y' = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

C45. $y' = \begin{cases} 0, & y \neq x, \\ 1, & y = x. \end{cases}$

Відповіді

A7. Так. **A8.** Так. **A9.** Ні. **A10.** Ні. **A11.** Так. **A12.** Ні. **A13.** Так. **A14.** Так. **A15.** Так. **A16.** Ні. **A17.** $yy'^2 + 2xy' = y$. **A18.** $xy' - (1+y^2)\operatorname{arctg} y = 0$. **A19.** $y = xy' - x\cos x + \sin x - \frac{x^3}{\ln x}$. **A20.** $\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi$. **A21.** $(2x-x^2)y'' + (x^2-2)y' + (2-2x)y = 0$. **A22.** $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$. **A23.** $y'(x-3) = y-4$. **A24.** $2xy' = y$. **A25.** $2xy(1+y'^2) = (y-xy')^2$. **A26.** $4x^3yy' = 4x^2y^2 - x^4 + y^4$. **C1.** Ні. **C2.** Так. **C3.** Так. **C4.** Ні. **C5.** Ні. **C6.** Так. **C7.** Так. **C8.** Ні. **C9.** Так. **C10.** Так. **C11.** Так. **C12.** Так. **C13.** Так. **C14.** Ні. **C15.** Так. **C16.** Так. **C17.** Так. **C18.** Ні. **C19.** Так. **C20.** Так. **C21.** Так. **C22.** Так. **C23.** $xy^2y' = y^3 - 1$. **C24.** $(y^2-6x)y' = -2y$. **C25.** $(1+x^2)y' = y - \operatorname{arctg} x + 1$. **C26.** $x^2y' = y(2x+3)$. **C27.** $y'' = 4y$. **C28.** $xy^2y' = y^3 + x^2$. **C29.** $2xy = (3x^2-y^2)y'$. **C30.** $(1-x)y'' + xy' - y = 0$. **C31.** $y' = \operatorname{tg} y \operatorname{ctg} x$. **C32.** $y'' + y = 0$. **C33.** $(y-3)y' + x - 1 = 0$. **C34.** $y'(2y-x) + 2x + y = 0$. **C35.** $\left(xy'' - (1+y'^2)y'\right)^2 = \left(1+y'^2\right)^3$. **C36.** $(x^2+y^2)y'' - 2(1+y'^2)(xy'-y) = 0$. **C37.** $(y'^2+1)(y-3x+1)^2 = (1+3y')^2$. **C38.** $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y'^2}{y} = 0$. **C39.** $xyy' + (x^2-y^2-C^2)y' - xy = 0$. **C40.** $2x^3y' = y^3 + 3x^2y$. **C41.** $4y'(x-2) = 2y$.

Тема 2. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Короткі теоретичні відомості

2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціальне рівняння першого порядку називають *рівнянням з відокремлюваними змінними*, якщо його можна записати у вигляді

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{2.1}$$

або

$$y' = f(x)g(y). \tag{2.2}$$

Для інтегрування рівняння (2.1) потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x, а коефіцієнт біля dy — тільки від y. Для цього потрібно обидві частини рівняння поділити на добуток $M_2(x)N_1(y)$ (якщо $M_2(x) \neq 0$ і $N_1(y) \neq 0$). Тоді, інтегруючи, одержуємо загальний інтеграл

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Серед розв'язків алгебричних рівнянь $M_2(x)N_1(y) = 0$ і $g(y) = 0$ можуть бути розв'язки диференціальних рівнянь (2.1) і (2.2) відповідно. Ці розв'язки можуть бути особливими.

2.2. Рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними. До рівнянь з відокремлюваними змінними зводяться диференціальні рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \tag{2.3}$$

де a, b, c — деякі сталі, причому $b \neq 0$. Якщо в (2.3) виконати заміну

$$z = ax + by + c, \tag{2.4}$$

то для знаходження функції $z(x)$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = bf(z) + a$.

З допомогою заміни (2.4) до рівняння з відокремлюваними змінними можна звести й більш загальні рівняння, як-от

$$\big(by' + a\big)\, g(x) = f(ax + by + c). \tag{2.5}$$

2.3. Геометричні задачі, які приводять до рівнянь з відокремлюваними змінними. У геометричних задачах на складання рівнянь зазвичай необхідно знайти криву, яка задовольняє певні умови. На основі умов задачі складають диференціальне рівняння для невідомої кривої (функції) $y = y(x)$ і, зінтегрувавши його, знаходять саму криву.

Складаючи диференціальне рівняння, часто використовують геометричний зміст похідної: значення похідної y' у точці $x = x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої $y = y(x)$ у точці $(x_0, y(x_0))$.

У деяких задачах доцільно скористатися геометричним змістом визначеного інтеграла $\int_a^b y(x)dx$ як площі криволінійної трапеції, виразом для кривини дуги кривої $k = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ та іншими геометричними поняттями.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 2.1. Зінтегрувати диференціальне рівняння $(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + x^3 y dy = 0$.

Розв'язання. Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $x^3(y^2 - 1)$. Тоді

$$\frac{x^2+1}{x^3}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0 \quad (x \neq 0,\ y \neq \pm 1) \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^3} + \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2-1)}{y^2-1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = C \quad \Rightarrow$$

$$|y^2 - 1| = e^C e^{x^{-2}} e^{-2\ln|x|} \quad \Rightarrow \quad y^2 = Cx^{-2}e^{x^{-2}} + 1,$$

де, враховуючи довільність сталої C, позначено $C := \pm\, e^C$.

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2 = 1 + Cx^{-2}e^{-x^2}. \tag{2.6}$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x = 0$, $y = -1$ і $y = 1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі містяться лише два останніх (їх можна отримати з формули (2.6) при $C = 0$). Функція $x = 0$ є особливим розв'язком.
Відповідь: $y = \pm\sqrt{1 + Cx^{-2}e^{-x^2}}$, $x = 0$.

Приклад 2.2. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $xy' - 1 = e^{-y}$, яка проходить через точку $(1, 0)$.
Розв'язання. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (2.2). Відокремлюючи змінні, одержуємо:

$$xdy = (e^{-y} + 1)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{e^{-y} + 1} = \frac{dx}{x} \quad (x \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{e^y dy}{1 + e^y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$
$$\ln(1 + e^y) = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad 1 + e^y = Cx \quad \Rightarrow$$
$$y = \ln(Cx - 1). \tag{2.7}$$

Для відшукання інтегральної кривої, яка проходить через точку $(1, 0)$, підставимо $x = 1$ і $y = 0$ у формулу загального розв'язку (2.7). Тоді $\ln(C - 1) = 0$, а отже, $C = 2$. Таким чином, шуканою інтегральною кривою є $y = \ln(2x - 1)$. ■

Приклад 2.3. Зінтегрувати рівняння $y' = (9x + y + 2)^2$.
Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння вигляду (2.3). Зробимо заміну $z = 9x + y$. Тоді $y' = z' - 9$ і, підставляючи у

задане рівняння, одержуємо:

$$z' = (z+2)^2 + 9 \quad \Rightarrow \frac{dz}{(z+2)^2+9} = dx \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{d(z+2)}{(z+2)^2+9} = x + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{z+2}{3} = x + C \quad \Rightarrow$$
$$\operatorname{arctg}\frac{9x+y+2}{3} = 3x + 3C \quad \Rightarrow$$
$$9x + y + 2 = 3\operatorname{tg}(3x + C) \qquad (C := 3C).$$

Отже, загальним розв'язком є $y = 3\operatorname{tg}(3x + C) - 9x - 2$.

Оскільки $(z+2)^2 + 9 \neq 0$ в множині дійсних чисел, то особливих розв'язків задане рівняння не має.
Відповідь: $y = 3\operatorname{tg}(3x + C) - 9x - 2$.

Приклад 2.4. Знайти загальний розв'язок рівняння $2x^2y' = \operatorname{tg}(y - x) + 2x^2$.
Розв'язання. Маємо рівняння вигляду (2.5). Після заміни $z = y - x$ одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $2x^2z' = \operatorname{tg} z$. Звідси

$$\int \operatorname{ctg} z dz = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2} + C \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin z| = -\frac{1}{2x} + C \quad \Rightarrow$$
$$\ln|\sin(y - x)| = -\frac{1}{2x} + C \quad \Rightarrow$$
$$y = x + (-1)^n \arcsin\bigl(Ce^{-\frac{1}{2x}}\bigr) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Розв'язками рівняння $\operatorname{tg} z = 0$ є функції $z = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, звідки отримуємо частинні розв'язки диференціального рівняння $y = x + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Функція $x = 0$ не є розв'язком диференціального рівняння.
Відповідь: $y = x + (-1)^n \arcsin\bigl(Ce^{-\frac{1}{2x}}\bigr) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Приклад 2.5. Знайти криві, в яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

Розв'язання. Нехай $M(x,y)$ — довільна точка на шуканій кривій, AM — дотична, проведена через точку M, α — кут між згаданою дотичною та віссю Ox, MB — перпендикуляр до осі абсцис у точці дотику (рис. 2.1).

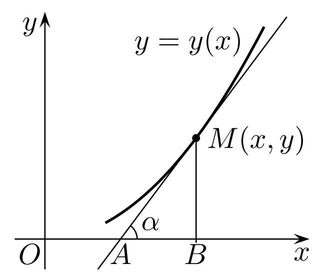

Рис. 2.1

Згідно з умовою $OB = 2OA = x$, $MB = y$.

Розглянемо ΔAMB. У ньому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{x/2} = \frac{2y}{x}.$$

Звідси, враховуючи геометричний зміст похідної, отримуємо рівнянням з відокремлюваними змінними $y' = \frac{2y}{x}$. Звідси

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \quad (xy \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx^2.$$

Отже, шуканими кривими є параболи $y = Cx^2$. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати рівняння з відокремлюваними змінними:

A1. $(1-y^2)xdx - y(x^4+4)dy = 0.$
A2. $y' = 10^{x+y}.$
A3. $2x^2yy' + y^2 = 3.$
A4. $(xy^2+x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$
A5. $(y+1)x + (x^4+16)(y-3)y' = 0.$
A6. $y^{-3}\ln(\ln x)dx + xe^{y^2}dy = 0.$
A7. $\frac{\sin y}{\sqrt{3}\cos x + \sin x} + y'\sqrt{1+\cos y} = 0.$
A8. $(y^2-1)(x+2)dx - x^2ydy = 0.$
A9. $\operatorname{tg} y \cdot y' = \sin(x+y) + \sin(x-y).$
A10. $xyy' + \sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2} = 0.$

Знайти інтегральну криву рівняння, яка проходить через задану точку:

A11. $(1+2y)x + (1+x^2)y' = 0, \quad (1,2).$

A12. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0, \quad (0,0).$

A13. $y'\cos x = y\ln y, \quad (\pi, e).$

A14. $e^{-y}(y'+1) = 1, \quad (-1,1).$

Знайти розв'язки, які задовольняють вказані умови:

A15. $x^2y' - \cos 2y = 1, \ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{9\pi}{4}.$

A16. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$, $y(x)$ — обмежена при $x \to +\infty$.

A17. $2(x^2+1)y' - \cos^2 2y = 0$, $y \to \frac{7\pi}{2}$ при $x \to -\infty$.

Зінтегрувати рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними:

A18. $y' = \sin(x-y).$

A19. $y' = \sqrt{4x+2y-1}.$

A20. $(x+y)^2y' = a^2.$

A21. $(y-3x+3)dx + (3x-y-1)dy = 0.$

A22. $y'\sqrt{x+y} = 1.$

A23. $y' = \sin(x+y) + \cos(x+y).$

Розв'язати інтегральні рівняння, звівши їх до диференціальних:

A24. $y = \int\limits_0^x y dx + 1.$

A25. $y = \int\limits_1^x e^{-y} dx \ (x > 0).$

A26. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала і дорівнює a.

A27. Знайти криві, в яких тангенс кута між дотичною і додатним напрямом осі Ox обернено дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

А28. Знайти криві, кожна дотична до яких перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

А29. Знайти криві, в яких величина піднормалі[1)] в усіх її точках однакова і дорівнює a.

А30. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис, є величина стала і дорівнює b.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння з відокремлюваними змінними:

С1. $x^2dx + y^3e^{x+y}dy = 0.$

С2. $y' - xy^2 = 2xy.$

С3. $\big(1+x^2\big)y^3dx = \big(1+y^2\big)x^3dy.$

С4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0.$

С5. $y' = \frac{x(2\ln x+1)}{\sin y + y\cos y}.$

С6. $x\sqrt{a^2-y^2}dx = (x^4+1)(y+1)dy.$

С7. $xydx = (a-x)(y+b)dy.$

С8. $\frac{\cos x^2}{\sqrt[3]{y}}dx = \frac{\sqrt[5]{2-3\sqrt[3]{y^4}}}{x}dy.$

С9. $y' = \sqrt{\frac{9y^2-6y+2}{x^2-2x+5}}.$

С10. $(x+1)y - \sqrt{x^2+1}(y^3-1)y' = 0.$

С11. $e^x - 1e^{-y} = e^{e^y}(1+e^x)y'.$

С12. $(x^2-3)y^2dx = x(y+8)dy.$

С13. $(x^2y - x^2)dy = (xy^2+y^2)dx.$

С14. $(x+2)e^y dx + y\sqrt{x+1}dy = 0.$

С15. $\ln(1+x)\sqrt{1-y^2}dx + dy = 0.$

[1)] Піднормаллю кривої $y = y(x)$ у точці (x, y) називають проекцію на вісь абсцис відрізка нормалі від точки (x, y) до точки перетину нормалі з віссю абсцис.

C16. $y' = xy + x + y + 1.$

Розв'язати задачі Коші:

C17. $(x^2+3)y' - 2x(y+4) = 0,\ \ y(4) = 91.$

C18. $2xy^2dx + (x^2-1)(y^2+1)dy = 0,\ \ y(0) = 1.$

C19. $x\sin y dx + (x^2-5)\cos y dy = 0,\ \ y(2) = \frac{\pi}{2}.$

C20. $(x^3+1)ydx - x(y+7)dy = 0,\ \ y(1) = 1.$

C21. $x^2\sin y + \sqrt[3]{x^3+1}y' = 0,\ \ y(0) = \frac{\pi}{2}.$

C22. $(x^2+1)(y+1)y' = y^2,\ \ y(1) = 1.$

C23. $x(x+2)y' = (x+1)y,\ \ y(1) = \sqrt{3}.$

C24. $x\cos y dy = e^x(x\ln x + 1)dx,\quad y(1) = \frac{3\pi}{2}.$

Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє вказану умову:

C25. $x^3\sin y\cdot y' = 2,\ \ y \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to \infty.$

C26. $e^y = e^{4y}y' + 1,\ \ y$ обмежена при $x \to +\infty.$

C27. $y' = 2x(\pi + y),\ \ y$ обмежена при $x \to \infty.$

C28. $x^3y' - \sin y = 1,\ \ y \to 5\pi$ при $x \to \infty.$

C29. $(x+1)y' = y - 1,\ \ y(x)$ — обмежена при $x \to +\infty.$

Зінтегрувати рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними:

C30. $y' = \cos(y - 2x + 1).$

C31. $y' = y + 2x - 3.$

C32. $y' + \frac{2x+2y-1}{x+y-2} = 0.$

C33. $y' = \mathrm{tg}(5x + y + 1).$

C34. $x + 2y + 1 = (2x + 4y + 3)y'.$

C35. $y' = \sqrt[3]{x+y+1}.$

C36. $(2x + y + 1)dx = (4x + 2y - 3)dy.$

C37. $(3 - x - 2y)dx - 2(1 + x + 2y)dy = 0.$

Розв'язати інтегральні рівняння, звівши їх до диференціальних:

C38. $y = \int\limits_0^x \sqrt{y}dx.$

C39. $\sqrt{y}=\int\limits_0^x y dx.$

C40. Знайти криві, нормаль у кожній точці яких проходить через задану точку (a,b).

C41. Знайти сім'ю кривих, які мають таку властивість: відрізок дотичної, розміщений між осями координат, у точці дотику до кожної з кривих цієї сім'ї ділиться навпіл.

C42. Знайти криві, в яких тангенс кута між дотичною та додатним напрямом осі Ox обернено пропорційний абсцисі точки дотику (k — коефіцієнт пропорційності).

C43. Знайти криві, дотична до яких у точці (x,y) проходить через точку (x^2,y^2).

C44. Знайти криві, в яких піддотична[2)] для всіх точок дотику має сталу довжину a.

C45. Знайти сім'ю кривих, для якої трикутник, утворений дотичною до кривої, віссю абсцис та радіусом-вектором точки дотику, є рівнобедреним.

Відповіді

A1. $\ln(1+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}=C$; $y=\pm1$. **A2.** $y=-\lg(C-10^x)$. **A3.** $y^2-3=Ce^{\frac{1}{x}}$. **A4.** $y^2+1=C(x^2-1)$; $x=\pm1$. **A5.** $\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}+8y-32\ln|y+1|+C=0$; $y=-1$. **A6.** $2\ln x(\ln\ln x-1)+e^{y^2}(y^2-1)=C$. **A7.** $\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos y}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos y}+\sqrt{2}}\right|+C=0$; $y=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **A8.** $y^2-1=Cx^2e^{-\frac{4}{x}}$; $x=0$. **A9.** $\sec y=-2\cos x+C$. **A10.** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **A11.** $y=\frac{5}{1+x^2}-\frac{1}{2}$. **A12.** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=2$. **A13.** $\ln^2 y=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$. **A14.** $e^{-y}=1-(e-1)e^x$. **A15.** $y=\operatorname{arctg}(1-2/x)+2\pi$. **A16.** $y=2$. **A17.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)+\frac{7\pi}{2}$ **A18.** $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=1-\frac{2}{x+C}$; $y=x-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **A19.** $x-\sqrt{4x+2y-1}+2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=C$. **A20.** $y=a\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}+C$. **A21.** $y-3x=Ce^{x-y}$.

[2)] Піддотичною кривої $y=y(x)$ у точці (x,y) називають проекцію на вісь абсцис відрізка дотичної, розміщеного між точкою дотику і точкою перетину з віссю абсцис.

A22. $2\sqrt{x+y}-2\ln(\sqrt{x+y}+1)=x+C$. **A23.** $\ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\right)=x+C$. **A24.** $y=e^x$. **A25.** $y=\ln x$. **A26.** $y=\frac{2a}{C\pm x}$. **A27.** $y=-\frac{1}{x}+C$. **A28.** $y=1+\frac{C}{x}$. **A29.** $y^2=\pm 2ax+C$. **A30.** $b\ln y-y=\pm x+C$, $0<y<b$. **C1.** $e^y(y^3-3y^2+6y-6)-e^{-x}(x^2+2x+2)+C=0$. **C2.** $y(Ce^{-x^2}-1)=2$; $y=0$. **C3.** $\frac{1}{x^2}-2\ln|x|=\frac{1}{y^2}-2\ln|y|+C$; $x=0$; $y=0$. **C4.** $\frac{\cos 2y-1}{\cos 2y+1}=C\frac{\cos 2x+1}{\cos 2x-1}$; $x=\pi n$, $y=\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **C5.** $y\sin y=x^2\ln x+C$. **C6.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+\sqrt{a^2-y^2}-\arcsin\frac{y}{a}+C=$ $=0$; $y=\pm a$. **C7.** $y+x+\ln|y|+a\ln|x-a|+C=0$; $x=a$; $y=0$. **C8.** $\sin x^2+\frac{5}{12}\left(\sqrt[5]{2-3\sqrt[3]{y^4}}\right)^6+C=0$. **C9.** $y-\frac{1}{3}+\sqrt{y^2-\frac{2}{3}y+\frac{2}{9}}=$ $=C\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)^3$. **C10.** $\sqrt{x^2+1}+\ln|x+\sqrt{x^2+1}|=\frac{y^3}{3}-$ $-\ln|y|+C$; $y=0$. **C11.** $x+2\ln(1+e^{-x})=e^{e^y}+C$. **C12.** $\frac{x^2}{2}-$ $-3\ln|x|=\ln|y|-\frac{8}{y}+C$; $x=0$; $y=0$. **C13.** $\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+C=0$; $x=0$; $y=0$. **C14.** $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+2\sqrt{x+1}=(y+1)e^{-y}+C$; $x=-1$. **C15.** $y=\sin(x-(x+1)\ln(x+1)+C)$; $y=\pm 1$. **C16.** $y=Ce^{x^2/2+x}-1$. **C17.** $y=5(x^2+3)-4$. **C18.** $\ln|x^2-1|+y-\frac{1}{y}=0$. **C19.** $(x^2-5)\sin^2 y=$ $=-1$. **C20.** $\frac{x^3+2}{3}+\ln|x|=y+7\ln|y|$. **C21.** $\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+$ $+\ln\left|\frac{\cos y-1}{\cos y+1}\right|=1$. **C22.** $\ln|y|-\frac{1}{y}+1+\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}x$. **C23.** $y=$ $=\sqrt{x(x+2)}$. **C24.** $y=\arcsin(e^x\ln x-1)$. **C25.** $y=\arccos(x^{-2})$. **C26.** $y=0$. **C27.** $y=-\pi$. **C28.** $y=2\operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{9\pi}{2}\right)$. **C29.** $y=1$. **C30.** $y=2x-1-2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{(x+C)\sqrt{3}}{2}\right)$. **C31.** $y=$ $=Ce^x-2x+1$. **C32.** $y+2x=3\ln|y+x+1|+C$; $y=-x-1$. **C33.** $2x-10y-2\ln|5+\operatorname{tg}(5x+y+1)|+\ln(1+\operatorname{tg}^2(5x+y+1))=$ $=C$; $y=-\operatorname{arctg}5+\pi n-5x-1$, $n\in\mathbb{Z}$. **C34.** $8y-4x+$ $+\ln|4x+8y+5|=C$; $4x+8y+5=0$. **C35.** $3(\sqrt[3]{(x+y+1)^2}-$ $-2\sqrt[3]{x+y+1}+2\ln|\sqrt[3]{x+y+1}+1|)=2x+C$; $y=-x-2$. **C36.** $2y-$ $-x-\ln|y+2x-1|=C$; $y=1-2x$. **C37.** $(x+2y)^2-2x+4y=C$. **C38.** $y=x^2\ (x\geqslant 0)$; $y=0$. **C39.** $y=0$. **C40.** $2by-y^2=x^2-2ax+C$. **C41.** $y=\frac{C}{x}$. **C42.** $y=k\ln|x|+C$. **C43.** $y=\frac{x}{x-C(x-1)}$, $y=0$. **C44.** $y=Ce^{\pm\frac{x}{a}}$. **C45.** $y=\frac{C}{x}$.

Тема 3. Однорідні рівняння першого порядку та звідні до них

Короткі теоретичні відомості

3.1. Однорідні рівняння. Диференціальне рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.1}$$

називають *однорідним*, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями однакового виміру m, $m \in \mathbf{R}$, тобто для довільного t (або довільного $t > 0$) справджуються рівності $M(tx,ty) = t^m M(x,y)$, $N(tx,ty) = t^m N(x,y)$.

Однорідне рівняння (3.1) завжди можна звести до вигляду $y' = \varphi\left(y/x\right)$. Після заміни $z = y/x$, де $z = z(x)$ — нова функція, однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Однорідне рівняння також можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними з допомогою переходу до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

3.2. Найпростіші рівняння, звідні до однорідних. Диференціальне рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{3.2}$$

або його окремий випадок

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0, \tag{3.3}$$

де $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ і $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, можна звести до однорідного рівняння з допомогою замін $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, де ξ, $\eta(\xi)$ — нові змінні, а α, β — розв'язок сумісної неоднорідної системи алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta = -c_1, \\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2. \end{cases}$$

Якщо у рівняннях (3.2), (3.3) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$ і обидва рівняння зводяться до рівняння вигляду $y' = f(a_2x + b_2y)$ (див. п. 2.2).

3.3. Узагальнено однорідні рівняння. Рівняння (3.1) називають *узагальнено однорідним* (*квазіоднорідним*), якщо для довільного t (або довільного $t > 0$) справджуються рівності $M(tx, t^k y) = t^m M(x, y)$, $N(tx, t^k y) = t^{m-k+1} N(x, y)$. Інакше кажучи, якщо існує таке число k, що при підстановці в рівняння (3.1) замість x, y і dy відповідно tx, $t^k y$, $t^{k-1}dy$ одержимо те саме рівняння, то воно буде узагальнено однорідним.

Після заміни $y = z^k$ узагальнено однорідне рівняння зводиться до однорідного рівняння, а з допомогою заміни $y = zx^k$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 3.1. Зінтегрувати рівняння $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Оскільки $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то задане рівняння однорідне. Зробимо заміну $y = zx$. Тоді

$$x(xz' + z) = zx + |x|\sqrt{1 - z^2} \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{1 - z^2}\ (x \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pm\frac{dx}{x} \quad (z \neq \pm 1) \quad \Rightarrow \quad \arcsin z = \pm \ln|x| + C.$$

Замінюючи тепер z на y/x, одержуємо

$$\arcsin\frac{y}{x} = \pm\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = x\sin(C \pm \ln|x|).$$

Якщо $z = \pm 1$, то $y = \pm x$. Обидві ці функції є особливими розв'язками. Функція $x = 0$ не є розв'язком рівняння.
Відповідь: $y = x\sin(C \pm \ln|x|)$, $y = x$, $y = -x$.

Приклад 3.2. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $xydy - y^2dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx$, яка проходить через точку $(e, 0)$.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнти рівняння є однорідними функціями однакового виміру, то маємо однорідне рівняння. Зробимо заміну $y = zx$. Тоді $dy = zdx + xdz$ і

$$x^2z(zdx + xdz) = \big((x + zx)^2e^{-z} + z^2x^2\big)\,dx \quad \Rightarrow$$
$$z^2dx + xzdz = \big((1 + z)^2e^{-z} + z^2\big)\,dx \quad (x \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$zxdz = (1 + z)^2e^{-z}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{ze^zdz}{(1 + z)^2} = \frac{dx}{x} \quad (z \neq -1).$$

Інтегруючи частинами ($u = ze^z$, $dv = (z + 1)^{-2}dz$), знаходимо первісну $\int \frac{ze^zdz}{(1+z)^2} = \frac{e^z}{z+1}$, а отже,

$$\frac{e^z}{z + 1} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{y/x}}{y/x + 1} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow$$
$$(x + y)\ln(Cx) = xe^{y/x} \quad (C := \pm e^C).$$

Підставляючи тепер у знайдений загальний інтеграл $x = e$ і $y = 0$, одержуємо $(e{+}0)\ln(Ce) = e$, звідки $C = 1$. Отже, через точку $(e, 0)$ проходить інтегральна крива $(x + y)\ln x = xe^{y/x}$.

Якщо $z = -1$, то $y = -x$. Ця функція є особливим розв'язком, але вона не задовольняє початкову умову $y(e) = 0$.

Відповідь: $(x + y)\ln x = xe^{y/x}$.

Приклад 3.3. Зінтегрувати рівняння $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тоді $dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$, $dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi$, і підставляючи ці вирази у задане рівняння, одержуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\varphi dr + r\sin\varphi d\varphi}{\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dr}{d\varphi} = r \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = d\varphi \quad \Rightarrow \quad r = Ce^{\varphi}.$$

Отримали сім'ю логарифмічних спіралей. Повертаючись до декартових координат, одержуємо загальний інтеграл

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \;\blacksquare$$

Приклад 3.4. Зінтегрувати рівняння $(x + y - 7)y' = = 3x - y + 3$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння вигляду (3.2), в якому $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Зробимо заміну $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$. Тоді $(\xi + \eta + \alpha + \beta - 7)d\eta = (3\xi - \eta + 3\alpha - \beta + 3)d\xi$. Сталі α і β виберемо такими, щоб

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 7 = 0, \\ 3\alpha - \beta + 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1,\ \beta = 6.$$

Отже, після замін $x = \xi + 1$, $y = \eta + 6$ одержуємо однорідне рівняння $(\xi + \eta)d\eta = (3\xi - \eta)d\xi$.

Нехай $\eta = z\xi$, де $z = z(\xi)$ — нова функція. Тоді

$$\begin{gathered} (\xi + z\xi)\left(\xi dz + z d\xi\right) = (3\xi - z\xi)d\xi \quad \Rightarrow \\ (1 + z)\xi dz + (z^2 + 2z - 3)d\xi = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad \Rightarrow \\ \int \frac{(z+1)dz}{z^2 + 2z - 3} + \int \frac{d\xi}{\xi} = C \quad (z \neq 1,\ z \neq -3) \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \ln|z^2 + 2z - 3| + \ln|\xi| = \ln|C_1| \quad \Rightarrow \\ (z^2 + 2z - 3)\xi^2 = C \quad \left(C := \pm C_1^2\right) \quad \Rightarrow \\ \left(\eta^2/\xi^2 + 2\eta/\xi - 3\right)\xi^2 = C \quad \Rightarrow \quad (\eta + 3\xi)(\eta - \xi) = C. \end{gathered}$$

Повертаючись до змінних x, y за формулами $\xi = x - 1$, $\eta = y - 6$, знаходимо загальний інтеграл заданого рівняння $(y + 3x - 9)(y - x - 5) = C$.

Якщо $\xi = 0$, то $x = 1$. Ця функція не є розв'язком заданого рівняння. Якщо $z = 1$, то $\eta = \xi = x - 1$, тобто $y = x + 5$, а якщо $z = -3$, то $\eta = -3\xi = -3x + 3$, тобто $y = -3x + 9$. Функції $y = x + 5$, $y = -3x + 9$ — частинні розв'язки, бо їх можна отримати з формули загального інтеграла при $C = 0$.

Відповідь: $(y + 3x - 9)(y - x - 5) = C$.

Приклад 3.5. Довести, що рівняння $3y^2(x - 2y^3)dy = = (x + y^3)dx$ є узагальнено однорідним та зінтегрувати його.

Розв'язання. Покажемо, що задане рівняння є узагальнено однорідним. Для цього замість x, y і dy підставимо tx, $t^k y$ і $t^{k-1}dy$ відповідно (див. п. 3.3):

$$(tx + t^{3k}y^3)dx + (6t^{5k}y^5 - 3t^{2k}y^2tx)\,t^{k-1}dy = 0, \quad \Rightarrow$$
$$(tx + t^{3k}y^3)dx + (6t^{6k-1}y^5 - 3t^{3k}y^2x)dy = 0.$$

Щоб задане рівняння не змінилось, число k потрібно вибрати так, щоб $1 = 3k = 6k - 1 = 3k$, тобто $k = \frac{1}{3}$.

Виконаємо заміну $y = zx^{\frac{1}{3}}$. Тоді

$$(x + z^3x)dx + \left(6z^5x^{\frac{5}{3}} - 3z^2x^{\frac{5}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\,dz + \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}zdx\right) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\big(1 + z^3 + 2z^6 - z^3\big)dx + x(6z^5 - 3z^2)\,dz = 0 \;\; (x \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{6z^5 - 3z^2}{2z^6 + 1}\,dz = 0.$$

Далі, інтегруючи та враховуючи, що $z = yx^{-\frac{1}{3}}$, маємо:

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(2z^6 + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}z^3) = C \quad \Rightarrow$$
$$\ln(2y^6 + x^2) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}y^3}{x} = C.$$

Функція $x = 0$ не є розв'язком рівняння.
Відповідь: $\ln(2y^6 + x^2) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}y^3/x\big) = C$.

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Довести, що рівняння є однорідними та зінтегрувати їх (або знайти частинні розв'язки, які задовольняють задані початкові умови):

А1. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.
А2. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0,\;\; y(1) = 2$.
А3. $2x(y^2 + x^2)y' = y(y^2 + 2x^2)$.
А4. $\left(x\operatorname{ctg}\frac{y}{x} - y\right)dx + xdy = 0,\;\; y(1) = \pi$.

A5. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$

A6. $(2x + y)dx + ydy = 0.$

A7. $(3x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0, \;\; y(1) = \sqrt{3}.$

A8. $xy' = y(\ln y - \ln x + 1).$

A9. $x\sin\frac{y}{x}dy = \left(y\sin\frac{y}{x} - x\right)dx.$

A10. $\left(xye^{x/y} + y^2\right)dx - x^2e^{x/y}dy = 0$. Рекомендована заміна $z = x/y$.

A11. $(2x^3 + 3xy^2)dx + y^3dy = 0.$

A12. $(2\sqrt{xy} - y)dx = xdy.$

Зінтегрувати рівняння, звідні до однорідних:

A13. $y' = \frac{y-x+1}{y+x-5}.$

A14. $(x + y - 1)dx + (5x - 7y + 1)dy = 0.$

A15. $y' = \frac{7x-3y-7}{7y-3x+3}.$

A16. $(6x + y - 1)dx + (4x + y - 2)dy.$

A17. $(x + y)^2y' = 4.$

A18. $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1}.$

A19. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$

Довести, що задані рівняння є узагальнено однорідними та зінтегрувати їх:

A20. $ydx + (y^2 - 2x)dy = 0.$

A21. $4xy^2dx + (3x^2y - 1)dy = 0.$

A22. $y(x^2y^2 + 1)dx + x(x^2y^2 - 1)dy = 0.$

A23. $y' = y^2 - 2x^{-2}.$

A24. $2\left(\sqrt{x^4y^2 + 1} - x^2y\right) - x^3y' = 0.$

A25. $(x^2y^3 - y)dx - (x^4y^3 - 2x^3y^2 + 3x)dy = 0.$

A26. Довести, що інтегральні криві диференціального рівняння $(ax+by+c_1)dx+(ay - bx + c_2)dy = 0$ є логарифмічними спіралями.

A27. Знайти криву, що має таку властивість: відстань будь-якої дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

А28. Визначити криву, всі дотичні до якої проходять через початок координат.

А29. Знайти криві, якщо відомо, що їхні нормалі збігаються з радіусом-вектором точки дотику.

А30. Знайти криву, знаючи, що трикутник, утворений дотичною до неї, віссю Oy та радіусом-вектором точки дотику, є рівнобедрений.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати однорідні рівняння або знайти розв'язки задач Коші:

С1. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

С2. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$.

С3. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x} \cos^2 \frac{y}{x}$.

С4. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

С5. $(x^3 - 3x^2 y)dx + (y^3 - x^3)dy = 0$.

С6. $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0, \quad y(1) = 4$.

С7. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$.

С8. $x(x^2 + 3y^2)dx + y(2y^2 + 3x^2)dy = 0$.

С9. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

С10. $x\sqrt{y}dy = \left(4x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}\right) dx, \quad y(1) = 1$.

С11. $y' = \frac{4x^2 + xy - 3y^2}{5x^2 - 2xy - y^2}$.

С12. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$.

С13. $xy' + 2\sqrt{xy - x^2} = 3y - 2x, \quad y(1) = 2$.

С14. $(x^2 + xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$.

С15. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0, \quad y(0) = 1$.

Зінтегрувати рівняння, звідні до однорідних:

С16. $(x - 2)dx + (y - 2x + 1)dy = 0$.

С17. $y' = \frac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}$.

С18. $(5x - 7y + 1)dy = (1 - x - y)dx$.

C19. $(x-1)y' + 3x + 2y + 3 = 0.$
C20. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}.$
C21. $(x+y+1)dx + (x-y+3)dy = 0.$
C22. $(x+4y)y' = 2x + 3y - 5.$
C23. $4(x+2)^2 dy = (x+2y)^2 dx.$
C24. $(x-5y+7)dx = 2(5-2x+y)dy.$
C25. $(y'+1)\ln\frac{x+y}{x+3} = \ln\frac{x+y}{x+3}.$
C26. $\frac{dx}{2x-y+4} = \frac{dy}{2y-x-5}.$
C27. $4y' = \frac{(x+y-1)^2}{(x-2)^2}.$
C28. $\frac{x+y-1}{x+y-2}y' = \frac{x+y+1}{x+y+2}.$

Зінтегрувати узагальнено однорідні рівняння:

C29. $2xyy' = 3\sqrt{x^6 - y^4} + 3y^2.$
C30. $(2y^2 - x\sqrt{x^2y^2 - x^6})dx = xydy.$
C31. $2xy^3 + (x^2y^2+1)y' = 0.$
C32. $y' = 2\sqrt{y} - \frac{x}{2}.$
C33. $ydx + x(2xy+1)dy = 0.$
C34. $(y^4 - x^6)y' + 3x^5y = 0.$
C35. $(x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0.$
C36. $y' = \frac{y^2}{x^3} + x.$
C37. $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}.$
C38. $2(x^2 - xy^2)y' + y^3 = 0.$

C39. Якими мають бути числа m і n, щоб диференціальне рівняння $y' = ax^m + by^n$ було узагальнено однорідним.

C40. Визначити криву, знаючи, що піднормаль будь-якої точки є середнім арифметичним координат точки.

C41. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

C42. Визначити криву, знаючи, що трикутник, утворений нормаллю в кожній її точці з осями координат, є рівновеликий трикутнику, утвореному віссю Ox, дотичною та нормаллю.

C43. Знайти заміну, з допомогою якої диференціальне рівняння $y' = f\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)\varphi'(x)$ можна звести до однорідного. Зінтегрувати цим способом рівняння $y' = \frac{(y+\sin x)^2 \cos x}{\sin^2 x}$.

C44. Показати, що рівняння $(a_1y^3 + b_1xy^2 + c_1xy^3)dx + (a_2x^2y + b_2x^3 + c_2x^3y)dy = 0$ з допомогою замін $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{1}{\eta}$ зводиться до рівняння $(a_1\xi + b_1\eta + c_1)d\eta + (a_2\xi + b_2\eta + c_1)d\xi = 0$. Зінтегрувати у такий спосіб рівняння $(7y^3 - 3xy^2 - 7xy^3)dx + (3x^2y - 7x^3 - 3x^3y)dy = 0$.

C45. Показати, що рівняння (3.2) можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними з допомогою заміни $z = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$, причому навіть у випадку, коли $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Відповіді

A1. $y = xe^{Cx+1}$. **A2.** $y = \frac{2x^2}{2x-1}$. **A3.** $y^2e^{-\frac{x^2}{y^2}} = Cx$. **A4.** $\cos\frac{y}{x} = -x$. **A5.** $Cx = e^{-\sin\frac{y}{x}}$. **A6.** $\sqrt{7}\ln(2x^2 + xy + y^2) - 2\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{\sqrt{7}x} = C$. **A7.** $xy^2 - x^3 = 2$. **A8.** $\ln\frac{y}{x} = Cx$. **A9.** $\cos\frac{y}{x} = \ln|x| + C$. **A10.** $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C$; $x = 0$. **A11.** $2x^2 + y^2 = C\sqrt{x^2 + y^2}$. **A12.** $x - \sqrt{xy} = C$; $y = 0$. **A13.** $2\operatorname{arctg}\frac{y-2}{x-3} + \ln(x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13) = C$. **A14.** $(x - y)(x + 7y - 4)^3 = C$. **A15.** $(y - x - 1)^2(y + x - 1)^5 = C$. **A16.** $(2x + y - 3)^2 = C(6x + y - 5)$. **A17.** $x + y - 2\operatorname{arctg}\frac{x+y}{2} = x + C$. **A18.** $\sin\frac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$. **A19.** $x + 2y + 3\ln(x + y - 2) = C$. **A20.** $y^2e^{\frac{2x}{y^2}} = C$. **A21.** $\sqrt{y} - x^2\sqrt{y^3} = C$. **A22.** $x^2e^{x^2y^2} = Cy^2$. **A23.** $1 - xy = Cx^3(xy+2)$, $xy = -2$. **A24.** $x^2(\sqrt{x^4y^2+1} - x^2y) = C$. **A25.** $\sqrt{2 - 2xy + x^2y^2} = Cxy^3e^{\operatorname{arctg}\frac{2-xy}{xy}}$; $xy + 1 = 0$. **A27.** $x^2 + y^2 = Cx$. **A28.** $y = Cx$. **A29.** $x^2 + y^2 = C$. **A30.** $x^2 + y^2 = Cx$. **C1.** $\sin\frac{y}{x} = Cx$. **C2.** $y = x\ln|\ln|ex||$. **C3.** $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = Cx$. **C4.** $x = \pm y\sqrt{\ln Cx}$; $y = 0$. **C5.** $x^4 + y^4 - 4x^3y = C$. **C6.** $\sqrt{xy} - x = 1$. **C7.** $Cx^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = 0$. **C8.** $x^4 + 6x^2y^2 + 2y^4 = C$. **C9.** $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. **C10.** $4x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 5x^3$. **C11.** $(y-x)^8(y-2x)^9 = C(y+2x)^5$; $y = -2x$. **C12.** $\ln Cx = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; $y = xe^{2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$. **C13.** $y = 2x$. **C14.** $x = Ce^{-\operatorname{arctg}(y/x)}$. **C15.** $x + ye^{x/y} = 1$. **C16.** $\ln(y - x - 1) = \frac{x-2}{x-y+1} + C$. **C17.** $(x - y + 1)^2(x + y - 1)^5 = C$. **C18.** $(x - y)\times(x + 7y - 4)^3 = C$. **C19.** $x + y + 2 = C(x-1)e^{\frac{3}{x-1}}$. **C20.** $(x - y) =$

$= e^{\frac{7(x-1)}{x-y}}$. **C21.** $x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$. **C22.** $(y - x + 5)^5 \times$ $\times (x + 2y - 2) = C$. **C23.** $(x+2)e^{2 \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2y-2}} = C$. **C24.** $(x+y+1)^2 =$ $= C(x - 2y + 4)$. **C25.** $\ln \frac{x+y}{x+3} - 1 = \frac{C}{x+y}$. **C26.** $(x + y - 1)^3 =$ $= C(x - y + 3)$. **C27.** $\frac{4(x-2)}{x-y-3} = \ln(x-2) + C$. **C28.** $\ln |(x+y)^2 - 2| =$ $= 2(x-y) + C$. **C29.** $\arcsin \frac{y^2}{x^3} = \pm \ln(Cx^3); y^2 = \pm x^3$. **C30.** $x^2 \ln x +$ $+ \sqrt{y^2 - x^4} = Cx^2$. **C31.** $x^2y^2 = Cy + 1$. **C32.** $(2\sqrt{y} - x) \times$ $\times (C + \ln(2\sqrt{y} - x)) = x; \sqrt{y} = x/2$. **C33.** $y^2 = Ce^{\frac{1}{xy}}; \ y = 0; x = 0$. **C34.** $x^6 + y^4 = Cy^2$. **C35.** $x^2y^2 + 1 = Cy$. **C36.** $x^2 = (x^2 - y)\ln(Cx)$; $y = x^2$. **C37.** $2\sqrt{x^{-1}y^{-2} - 1} = -\ln(Cx); \ xy^2 = 1; y = 0$. **C38.** $y^2 =$ $= x \ln(Cy^2)$. **C39.** $m - n = mn$. **C40.** $(x-y)^2(x+2y) = C$. **C41.** $y =$ $= Ce^x y$. **C42.** $(x - C)^2 + y^2 = C^2$. **C43.** $\xi = \sin x; \ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y + \sin x}{\sqrt{3} \sin x} -$ $- \ln|\sin x| = C$. **C44.** $(x + y - xy)^5(x - y + xy)^2 = Cx^7y^7$.

Тема 4. Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них

Короткі теоретичні відомості

4.1. Лінійні рівняння. Диференціальне рівняння

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ — неперервні на деякому інтервалі (a, b) функції, називають *лінійним.* Якщо в рівнянні (4.1) $q(x) \equiv 0$, то його називають *лінійним однорідним*, інакше — *лінійним неоднорідним.*

Розглянемо методи розв'язування рівняння (4.1).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Загальним розв'язком y_0 відповідного лінійного однорідного рівняння є $y_0 = Ce^{-\int p(x)dx}$, де C — довільна стала. Розв'язок рівняння (4.1) шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{4.2}$$

Підставляючи (4.2) у (4.1), одержуємо $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$, звідки $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$, де C — довільна стала. Таким чином, загальним розв'язком рівняння (4.1) є

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \tag{4.3}$$

Метод підстановки (метод Й. Бернуллі). Розв'язок рівняння (4.1) шукаємо у вигляді добутку $y = uv$. Підставляючи в (4.1), для відшукання функцій $u(x)$ і $v(x)$ після нескладних перетворень одержуємо систему

$$v' + p(x)v = 0, \quad u'v = q(x).$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$, а потім з другого — функцію $u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. Помноживши знайдені вирази для u і v, знову одержуємо формулу загального розв'язку (4.3).

***Метод інтегрувального множника* (*метод Ейлера*).** Помножимо обидві частини (4.1) на $e^{\int p(x)dx}$. Тоді

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x) y e^{\int p(x)dx} = q(x) e^{\int p(x)dx} \quad \Rightarrow$$
$$\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = q(x) e^{\int p(x)dx} \quad \Rightarrow$$
$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Наведені методи можна застосовувати також до рівнянь

$$\big(a(y)x + b(y)\big)y' = c(y),$$

якщо вважати y змінною, а x — функцією змінної y. Справді, позначивши $p(y) = -\frac{a(y)}{c(y)}$, $q(y) = \frac{b(y)}{c(y)}$, одержуємо лінійне рівняння $x' + p(y)x = q(y)$ відносно $x = x(y)$.

4.2. Рівняння, звідні до лінійних. До лінійних рівнянь можна звести декілька типів інших диференціальних рівнянь. Наприклад, рівняння

$$f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x) \tag{4.4}$$

після заміни $z = f(y)$ (тоді $z' = f'(y)y'$) зводимо до лінійного рівняння $z' + p(x)z = q(x)$ відносно функції $z = z(x)$.

Якщо у рівнянні

$$y' + p(x) = q(x)e^{ny} \tag{4.5}$$

запровадити заміну $z = e^{-ny}$ (тоді $z' = -ne^{-ny}y'$), то одержимо лінійне рівняння $z' - np(x)z = -nq(x)$ відносно нової функції $z = z(x)$.

Рівняння

$$(f_1(x) + f_2(x)y^m)dx + f_3(x)y^{m-1}dy = 0,$$
$$(f_1(y) + f_2(y)x^m)dy + f_3(y)x^{m-1}dx = 0,$$

де $m \neq 0$, зводяться до лінійного рівняння з допомогою замін $z = y^m$ і $z = x^m$ відповідно.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 4.1. Зінтегрувати рівняння $y' - 2xy = xe^{x^2+x}$ методом варіації довільної сталої.

Розв'язання. Загальним розв'язком y_0 відповідного лінійного однорідного рівняння $y' - 2xy = 0$ є $y_0 = Ce^{x^2}$. Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{x^2}$. Тоді

$$C'(x)e^{x^2} + C(x) \cdot 2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = xe^{x^2+x} \quad \Rightarrow$$

$$C'(x) = xe^x \;\Rightarrow\; C(x) = xe^x - e^x + C \;\Rightarrow\; y = (xe^x - e^x + C)e^{x^2}.$$

Відповідь: $y = (xe^x - e^x + C)e^{x^2}$.

Приклад 4.2. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $(x + 2y^3)y' = y$, яка проходить через початок координат.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y^2 \quad (y \neq 0),$$

розглядаючи в ньому x як функцію змінної y. Зінтегруємо це рівняння методом підстановки. Нехай $x = uv$, де функції u і v знаходимо із системи (4.2):

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{y} = 0, \\ u'v = 2y^2. \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо $v(y) = y$. З урахуванням цього, з другого рівняння знаходимо функцію $u(y) = y^2 + C$.

Отже, загальним інтегралом є $x = y(y^2 + C)$. Очевидно, що через початок координат проходять всі інтегральні криві

$x = y(y^2+C)$, а також пряма $y = 0$ (функція $y = 0$ є особливим розв'язком рівняння).
Відповідь: $x = y(y^2 + C)$, де C — довільна стала; $y = 0$.

Приклад 4.3. Зінтегрувати рівняння $\sin 2y \cdot y' + x \sin^2 y = 10^x$.
Розв'язання. Маємо рівняння вигляду (4.4). Зробимо заміну $z = \sin^2 y$. Тоді $z' = 2 \sin y \cos y \cdot y' = \sin 2y \cdot y'$, а отже,

$$z' + xz = 10^x \quad \Rightarrow \quad (zx)' = 10^x \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{x}(\lg e \cdot 10^x + C).$$

Залишається повернутися до функції $y(x)$ за формулою $z = \sin^2 y$:

$$\sin^2 y = \frac{1}{x}(\lg e \cdot 10^x + C).$$

Відповідь: $x \sin^2 y = \lg e \cdot 10^x + C$.

Приклад 4.4. Зінтегрувати рівняння $y' = x(x^2 e^{2y} + 1)$.
Розв'язання. Маємо рівняння вигляду (4.5):

$$y' - x = x^3 e^{2y}.$$

Зробимо заміну $z = e^{-2y}$. Тоді $z' = -2e^{-2y} y' = -2zy'$, а отже,

$$-\frac{z'}{2z} - x = \frac{x^3}{z} \quad \Rightarrow \quad z' + 2xz = -2x^3.$$

Отримане лінійне рівняння зінтегруємо методом інтегрувального множника. Помножимо обидві частини останнього рівняння на функцію $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$. Тоді

$$z' e^{x^2} + 2xze^{x^2} = -2x^3 e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(ze^{x^2}\right)' = -2x^3 e^{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$ze^{x^2} = \left(-\int x^2 e^{x^2} d(x^2) + C\right) \quad \Rightarrow$$

$$z = e^{-x^2}\left(e^{x^2}(1 - x^2) + C\right) \quad \Rightarrow \quad z = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}.$$

Повертаючись до функції $y(x)$ за формулою $y = -\frac{1}{2}\ln z$, одержуємо загальний розв'язок $y = -\frac{1}{2}\ln\bigl(1 - x^2 + Ce^{-x^2}\bigr)$.
Відповідь: $y = -\frac{1}{2}\ln\bigl(1 - x^2 + Ce^{-x^2}\bigr)$.

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати лінійні рівняння методом варіації довільної сталої і методом підстановки:

A1. $y' + 2y = x^2 + 2x$.
A2. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$.
A3. $y'(x^2 + 1) - xy = (x^2 - x + 1)e^x$.
A4. $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$.
A5. $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$.
A6. $y' + y\operatorname{tg} x = x\cos^2 x$.
A7. $x^4y' + 2x^3y = 1$.
A8. $(y - y^3)dx + (2xy^2 - x - 4y^2)dy = 0$.

Знайти частинні розв'язки, які задовольняють задані початкові умови (рівняння зінтегрувати методом інтегрувального множника):

A9. $y'x\ln x - y = x(\ln x - 1), \quad y(e) = 2e$.
A10. $y'\sin x - y = 2\sin^2\frac{x}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.
A11. $x^2y' + y = 4, \quad y(-1) = 5$.
A12. $(2x - 6y^4)dy + ydx = 0, \quad y(3) = 1$.
A13. $(2xy^2 - x - y^2)y' = y^3 - y, \quad y(0) = 0$.
A14. $(2x + 1)y' = 2(2x + y), \quad y(0) = 0$.
A15. $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 1$.
A16. $\frac{dx}{x\ln x} = \frac{dy}{y + x^2\ln^2 x}, \quad y(1) = 1$.

Звести рівняння до лінійних рівнянь та зінтегрувати їх:

A17. $\sec^2 y \cdot y' + x\operatorname{tg} y = x$.
A18. $\frac{y'}{\sqrt{y+1}} - 2\frac{\sqrt{y+1}}{x} = 2(x + 5)$.
A19. $y' = x + xe^{-x^2}e^{2y}$.
A20. $e^{-x}y' - e^{-x} = e^y$.

A21. $x^2y^4y' = xy^5 - 1$.

A22. $\cos y \cdot y' + \sin y = x + 1$.

A23. Знайти криву, яка має таку властивість: відрізок осі Ox від початку координат до перетину з дотичною до кривої в будь-якій точці пропорційний ординаті цієї точки (k — коефіцієнт пропорційності).

A24. Знайти криву, дотична до якої утворює на осі Oy відрізок, довжина якого в n разів менша від суми координат точки дотику.

A25. Знайти криву, для якої величина $\frac{1}{x}\int_0^x y dx$ (середня ордината на відрізку $[0, x]$) пропорційна останній ординаті, яка відповідає правому кінцю відрізка $[0, x]$.

Знайти розв'язки $y(x)$ інтегральних рівнянь:

A26. $y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1$.

A27. $\int_a^x ty(t)dt + x^2 + y$.

A28. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо відомі два його частинні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$.

A29. Довести, що рівняння $y' + ky = e^{mx}$ має частинний розв'язок вигляду $y_1 = be^{mx}$, якщо $m \neq -k$, і $y_1 = bxe^{mx}$, якщо $m = -k$.

A30. Довести, що рівняння $y' - ky = f(x)$, де $k > 0$, $f(x)$ — неперервна і періодична функція, має тільки один періодичний розв'язок. Знайти його.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати лінійні рівняння або знайти розв'язки задач Коші:

C1. $xy' + y = x\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

C2. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy$.

C3. $x\cos x \cdot dy + y\,(x\sin x + \cos x)\,dx = 1$.

C4. $e^{x^2}y' = x\sin x - 2xye^{x^2}, \quad y(0) = 0$.

C5. $2(x^4 + y)dx - xdy = 0, \quad y(0) = 0.$

C6. $\sec y dx - (x + \sin y)dy = 0.$

C7. $y' - 2xy = \cos x - 2x \sin x, \quad y(0) = 1.$

C8. $y' + \frac{y}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}.$

C9. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

C10. $(x + 1)y' = 5(x + 1)^3 - 2y, \quad y(0) = 1.$

C11. $(2x - 4y^2)dy + ydx = 0.$

C12. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}.$

C13. $y' + y \cos x = e^{-\sin x}.$

C14. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$

C15. $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y(e) = e^{-1}.$

C16. $ydx + 2(x - 5y^3)dy = 0.$

C17. $y' = \frac{y}{3x-y^2}.$

C18. $y' + 2xy = e^{-x^2}.$

C19. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$

C20. $dx + (x - e^{-y} \sec^2 y)dy = 0, \quad y(2) = 0.$

C21. $y' = \frac{y+1}{2x+e^y(y+1)^3}.$

C22. $x \ln x \cdot y' + y = 2 \ln x, \quad y(e) = 0.$

C23. $y' + f'(x)y = f(x)f'(x)$, де $f(x)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

C24. Знайти обмежений при $x \to \frac{\pi}{2}$ розв'язок лінійного рівняння $\sin 2x \cdot y' - 2y = 2 \cos x$.

Зінтегрувати рівняння, звідні до лінійних:

C25. $y^{-1}y' + (2 - x) \ln y = x\bigl(e^{2x} - e^{-x^2/2}\bigr).$

C26. $\frac{yy'}{\sqrt{y^2+1}} + \sqrt{y^2 + 1} = x^2 + 1.$

C27. $y' + x \sin 2y = xe^{-x^2} \cos^2 y.$

C28. $y' + \frac{x \ln y}{(1-x^2) \ln(ey)} y = \frac{1}{(1-x^2) \ln(ey)}.$

C29. $\frac{\sqrt{\ln y}}{y} y' + \frac{2\sqrt{\ln^3 y}}{3(x+1)} = 1.$

C30. $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}.$

С31. $4xyy' - 3y^2 + x^2 = 0$.

С32. Знайти функцію $y(x)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння $\int_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt$.

С33. Знайти криві, в яких площа трапеції, обмежена осями координат, дотичною й ординатою точки дотику, є сталою величиною і дорівнює $3k^2$.

С34. Довести, що кожна інтегральна крива лінійного рівняння ділить у сталому відношенні відрізок ординати між довільними двома інтегральними кривими цього рівняння.

С35. Довести, що дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені у точках перетину цих кривих з прямою, яка паралельна до осі Oy, або перетинаються, або паралельні.

С36. Загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд $y = Ca(x) + b(x)$ (див. (4.3)). Довести обернене твердження: диференціальне рівняння кожної сім'ї кривих такого виду є лінійним рівнянням.

С37. Довести, що лінійне неоднорідне рівняння, яке має частинний розв'язок $y_1 = const$, є рівнянням з відокремлюваними змінними.

С38. Довести, що лінійне рівняння залишиться лінійним після довільної заміни незалежної змінної $x = \varphi(t)$ і після довільного перетворення шуканої функції $y = \alpha(x)z + \beta(x)$.

С39. Довести, що підстановка $z = \frac{y}{x}$, де $z = z(x)$ — нова функція, перетворює лінійне рівняння у лінійне.

С40. Довести, що рівняння $xy' + ky = f(x)$, де $x > 0$, $k \neq 0$, $f(x)$ — неперервна обмежена функція, має тільки один розв'язок, обмежений при $x > 0$.

С41. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, звівши його до рівняння, що не містить доданка з шуканою функцією, з допомогою заміни $y = \alpha(x)z$, де $z = z(x)$ — нова функція, $\alpha(x)$ — деяка неперервно диференційовна функція.

C42. Довести, що рівняння $(1 + xyF_1(xy) - xF_2(xy))\, y' + y^2F_1(xy) - yF_2(xy) = 0$, зводиться до лінійного рівняння з допомогою заміни $z = xy$, де z — нова незалежна змінна.

C43. Довести, що рівняння $y' + ky = P(x)$, де k — відмінна від нуля стала, а $P(x)$ — многочлен степеня m, має частинний розв'язок вигляду $y_1 = Q(x)$, де $Q(x)$ — многочлен степеня m.

C44. Довести, що розв'язком рівняння $y' + ky = kq(x)$, де $0 \leqslant x \leqslant +\infty$, k — стала, є функція $y = k\int_0^\infty q(x-t)e^{-kt}dt$.

C45. Знайти періодичний розв'язок лінійного рівняння $y' - 2y\cos^2 x = \sin x$.

Відповіді

A1. $y = Ce^{-2x} + (2x^2 + 2x - 1)/4$. **A2.** $(y-1)^2x = y - \ln(Cy)$; $y = 0$; $y = 1$. **A3.** $y = C\sqrt{x^2+1} + e^x$. **A4.** $y = C\operatorname{tg} x + \sin x$. **A5.** $y^2 - Cy^3 = 2x$. **A6.** $y = \cos x(C + x\sin x + \cos x)$. **A7.** $y = Cx^{-2} + x/3$. **A8.** $x = 4y^2 + Cy\sqrt{1-y^2}$; $y = 0$. **A9.** $y = e\ln x + x$. **A10.** $y = \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **A11.** $y = e^{-(x+1)/x} + 4$. **A12.** $x = 2y^{-2} + y^4$. **A13.** $x = Cy\sqrt{1-y^2} + y^2$. **A14.** $y = (2x+1)\ln|2x+1|$. **A15.** $y = x^4$. **A16.** Такого розв'язку не існує. **A17.** $\operatorname{tg} y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$. **A18.** $2\sqrt{y+1} = 2x(5\ln x + x) + Cx$. **A19.** $y = -\frac{1}{2}\ln\left(Ce^{-x^2} + x^2e^{-x^2}\right)$. **A20.** $y = -\ln\frac{Ce^{-x} - e^x}{2}$. **A21.** $y^5 = \frac{5}{6x} + Cx^5$. **A22.** $\cos y \cdot y' + \sin y = x + 1$. **A23.** $x = y(C - ky\ln y)$. **A24.** $y = Cx^{\frac{n-1}{n}} - x$. **A25.** $\int_0^x y\,d\xi = kxy$; $y = Cx^{\frac{1-k}{k}}$. **A26.** $y = 2e^x - 1$. **A27.** $y = -(a^2+2)e^{-(x^2-a^2)/2} + 2$. **A28.** $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$. **C1.** $y = \sin x + \frac{\cos x}{x}$. **C2.** $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2$. **C3.** $y = (C\cos x + \sin x)/x$. **C4.** $y = (\sin x - x\cos x)e^{-x^2}$. **C5.** $y = Cx^2 + x^4$. **C6.** $x = Ce^{\sin y} - \sin y - 1$. **C7.** $y = e^{x^2} + \sin x$. **C8.** $y = Ce^{-x/\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **C9.** $y = 2x^{-2} - x^{-3}$. **C10.** $y = (x+1)^3$. **C11.** $x = Cy^{-2} + y^2$. **C12.** $y = (x^3 + C)e^{-x}/x$. **C13.** $y = e^{-\sin x}(x + C)$. **C14.** $x = y^2\left(Ce^{1/y} + 1\right)$. **C15.** $y = (1 - \ln|x|)/x$. **C16.** $x = Cy^{-2} + 2y^3$. **C17.** $x = Cy^3 + y^2$; $y = 0$. **C18.** $y = (x + C)e^{-x^2}$. **C19.** $y = e^x(\ln|x| + C)$. **C20.** $x = e^{-y}(2 + \operatorname{tg} y)$. **C21.** $x = (e^y + C)(y+1)^2$. **C22.** $y = \ln x - \frac{1}{\ln x}$. **C23.** $y = f(x) - 1 + Ce^{-f(x)}$. **C24.** $y = \operatorname{tg} x - \sec x$. **C25.** $\ln y = e^{x^2/2 - 2x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-x^2}}{2} + C\right)$. **C26.** $\sqrt{y^2+1} = x^2 - 2x + 3 +$

$+ Ce^{-x}$. **C27.** $\operatorname{tg} y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2}$. **C28.** $y \ln y = x + C\sqrt{1 - x^2}$. **C29.** $\ln^{\frac{3}{2}} y = \frac{1}{x+1}\left(\frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + C\right)$. **C30.** $y = \arcsin(Ce^{-x} + x - 1)$. **C31.** $y^2 = Cx^{\frac{3}{2}} - x^2$. **C32.** $y = -2e^x$. **C33.** $y = Cx^2 + \frac{2k^2}{x}$. **C45.** $y(x) = \int_0^\infty e^{-s-\sin s \cos(s+2x)} \sin(x+s) ds$.

Тема 5. Рівняння Бернуллі та звідні до нього

Короткі теоретичні відомості

5.1. Рівняння Бернуллі. *Рівнянням Бернуллі* називають диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m. \tag{5.1}$$

У рівнянні (5.1) вважаємо, що $m \neq 0$ і $m \neq 1$, бо інакше відразу маємо лінійне рівняння (п. 4.1).

Якщо у рівнянні Бернуллі $m > 1$, то його особливим розв'язком є функція $y = 0$.

Розглянемо методи розв'язування рівняння Бернуллі.

Метод зведення до лінійного рівняння. Якщо рівняння (5.1) помножити на $(1-m)y^{-m}$, то одержимо рівняння вигляду (4.1), а тому після заміни $z = y^{1-m}$ (тоді $z' = (1-m)y^{-m}y'$) маємо лінійне рівняння з невідомою функцією $z(x)$:

$$(1-m)y^{-m}y' + (1-m)p(x)y^{1-m} = (1-m)q(x) \quad \Rightarrow$$
$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x).$$

Метод варіації довільної сталої. За аналогією з методом варіації довільної сталої для лінійного рівняння розв'язок рівняння (5.1) можна шукати у вигляді $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Тоді для відшукання функції $C(x)$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними $C'(x) = q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}C^m(x)$.

Метод підстановки. Загальний розв'язок рівняння (5.1) можна шукати у вигляді добутку $y = uv$. Тоді функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ будуть розв'язком системи

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x)u^m v^m. \end{cases} \tag{5.2}$$

З першого рівняння системи (5.2) знаходимо функцію $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$, а для відшукання $u(x)$ одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $v' = q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}v^m$.

Наведені методи розв'язування рівняння Бернуллі можна застосовувати також до диференціальних рівнянь вигляду

$$(a(y)x + b(y)x^m)\ y' = c(y),$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x — за функцію цієї змінної.

5.2. Рівняння Ріккаті. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{5.3}$$

називають *рівнянням Ріккаті.*

У загальному випадку рівняння Ріккаті не інтегрується. Проте, якщо відомий частинний розв'язок $y = y_1(x)$ рівняння (5.3), то з допомогою заміни $y = y_1 + z$ воно зводиться до рівняння Бернуллі відносно нової функції $z = z(x)$. На практиці можна використовувати заміну $y = y_1 + \frac{1}{z}$, з допомогою якої рівняння Ріккаті зводиться відразу до лінійного рівняння.

5.3. Рівняння Дарбу. *Рівнянням Дарбу* називають рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + R(x,y)(xdy - ydx) = 0, \tag{5.4}$$

де $M(x,y)$, $N(x,y)$ — однорідні функції виміру m, а $R(x,y)$ — однорідна функція виміру n $(m \neq n-1)$. Одна з функцій M і N може бути тотожним нулем.

Рівняння Дарбу легко подати у вигляді

$$y' = \frac{yR(x,y) - M(x,y)}{xR(x,y) + N(x,y)}. \tag{5.5}$$

Рівняння (5.4) і (5.5) після заміни $y = zx$, де z — нова функція, зводяться до рівняння Бернуллі відносно функції $x = x(z)$ (якщо $n - m = -2$, то одержимо лінійне рівняння, а якщо $n - m = -1$, то — рівняння з відокремлюваними змінними).

Зазначимо, що півпрямі $y = a_j x$, $x \neq 0$, де a_j — корені рівняння $M(1,z) + N(1,z)z = 0$, можуть бути особливими розв'язками рівняння Дарбу.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 5.1. Зінтегрувати рівняння $y' + \frac{2y}{x} = xy^3$. ***Розв'язання.*** *Метод зведення до лінійного рівняння.* Маємо рівняння Бернуллі вигляду (5.1) з $m = 3$. Помножимо рівняння на $-2y^{-3}$ ($y \neq 0$) і зробимо заміну $z = y^{-2}$. Тоді $z' = -2y^{-3}y'$ і

$$-2y^{-3}y' - \frac{4}{x}y^{-2} = -2x \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{4}{x}z = -2x.$$

Отримане лінійне рівняння зінтегруємо методом Ейлера. Для цього помножимо його на $e^{\int p(x)dx} = e^{-4\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^4}$. Тоді

$$x^{-4}z' - 4x^{-5}z = -2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad \left(zx^{-4}\right)' = -2x^{-3} \quad \Rightarrow$$
$$z = x^4(x^{-2} + C) \quad \Rightarrow \quad z = x^2 + Cx^4.$$

Оскільки $z = y^{-2}$, то $y^{-2} = x^2 + Cx^4$, звідки $y = \frac{\pm 1}{x\sqrt{1+Cx^2}}$.
Функція $y = 0$ є особливим розв'язком рівняння.

Метод варіації довільної сталої. Оскільки загальним розв'язком рівняння $y' + \frac{2}{x}y = 0$ є $y = \frac{C}{x^2}$, то розв'язок заданого рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x^2}$. Для відшукання функції $C(x)$ одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = x\left(\frac{C(x)}{x^2}\right)^3 \quad \Rightarrow$$

$$x^3C'(x) = C^3(x) \ \Rightarrow \ \int \frac{dC(x)}{C^3(x)} = \int \frac{dx}{x^3} + C \ \ (C(x) \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2C^2(x)} = -\frac{1}{2x^2} + C \ \Rightarrow \ C(x) = \frac{\pm\, x}{\sqrt{1+Cx^2}} \quad (C \equiv -2C).$$

Оскільки $y = \frac{C(x)}{x^2}$, то $y = \frac{\pm 1}{x\sqrt{1+Cx^2}}$.

Якщо $C(x) = 0$, то $y = 0$ — особливий розв'язок.

Метод підстановки. Нехай $y = uv$. Функції u і v знаходимо із системи (5.2):

$$\begin{cases} v' + \frac{2}{x}v = 0, \\ u'v = xu^3v^3. \end{cases}$$

Розв'язком першого рівняння системи є, зокрема, функція $v(x) = x^{-2}$, розв'язком другого – функція $v(x) = 0$. Також з другого рівняння знаходимо функцію $u(x)$:

$$u' = \frac{u^3}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x^3} \;\; (u \neq 0) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2x^2} + C \quad \Rightarrow$$
$$u(x) = \frac{\pm\, x}{\sqrt{1+Cx^2}} \qquad (C \equiv -2C).$$

Оскільки $y = uv$, то $y = \frac{\pm 1}{x\sqrt{1+Cx^2}}$.

Якщо $u = 0$ $(v = 0)$, то маємо особливий розв'язок $y = 0$.

Відповідь: $y = \frac{\pm 1}{x\sqrt{1+Cx^2}}$, $y = 0$.

Приклад 5.2. Знайти інтегральну криву рівняння $ydx = x(x^2y^2 - 2)dy$, яка проходить через точку $(1, 1)$.

Розв'язання. Очевидно, що інтегральною кривою є пряма $y = 0$, але вона не проходить через точку $(1, 1)$. Для $y \neq 0$ перетворимо рівняння до вигляду $\frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} = yx^3$, тобто маємо рівняння Бернуллі відносно функції $x(y)$. Воно зінтегроване у прикладі 5.1: $x = \frac{\pm 1}{y\sqrt{1+Cy^2}}$, $x = 0$.

Підставляючи у формулу загального розв'язку $x = 1$ та $y = 1$, знаходимо, що $C = 0$ і через точку $(1, 1)$ проходить одна інтегральна крива — гіпербола $x = 1/y$ (або $y = 1/x$).

Відповідь: $y = 1/x$.

Приклад 5.3. Зінтегрувати рівняння $2x^2y' = (xy)^2 + 1$.

Розв'язання. Маємо рівняння Ріккаті, у чому легко переконатися, записавши його у вигляді $y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}$. Частинний розв'язок заданого рівняння спробуємо віднайти у вигляді $y_1 = \frac{a}{x}$. Підставляючи у рівняння, одержуємо тотожність $-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}$, звідки $a^2 + 2a + 1 = 0$, тобто $a = -1$.

Отже, $y_1 = -\frac{1}{x}$, а тому виконаємо заміну $y = z - \frac{1}{x}$. Тоді

$$z' + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{z}{x} = \frac{z^2}{2}.$$

Інтегруючи отримане рівняння Бернуллі, знаходимо

$$z = \frac{-2}{(\ln|x| + C)x} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x\,(\ln|x| + C)}.$$

Крім того, розв'язком початкового рівняння є функція $y = -\frac{1}{x}$.

Відповідь: $y = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x(\ln|x|+C)}$, $y = -\frac{1}{x}$.

Приклад 5.4. Зінтегрувати рівняння $(x^3 - xy^2 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0$.

Розв'язання. Маємо рівняння Дарбу:

$$(x^3 - xy^2)dx + 2x^2ydy - (xdy - ydx) = 0.$$

Зробимо заміну $y = zx$. Тоді $dy = zdx + xdz$, $xdy - ydx = x^2d(y/x) = x^2dz$,

$$\left(x^3 - z^2x^3\right)dx + 2x^3z(zdx + xdz) - x^2dz = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x(1 + z^2)dx + (2x^2z - 1)dz = 0 \quad (x \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{dz} + \frac{2z}{z^2+1}x = \frac{x^{-1}}{z^2+1}.$$

Отримане рівняння є рівнянням Бернуллі з невідомою функцією $x = x(z)$. Його загальним інтегралом (пропонуємо довести це самостійно) є $3x^2(z^2 + 1)^2 - 6z - 2z^3 = C$.

Замінюючи z на y/x, одержуємо загальний інтеграл заданого рівняння: $3x(x^2 + y^2)^2 - 6x^2y - 2y^3 = Cx^3$.

Функція $x = 0$ є особливим розв'язком початкового рівняння.

Відповідь: $3x(x^2+y^2)^2 - 6x^2y - 2y^3 = Cx^3$, $x = 0$.

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати рівняння Бернуллі методом варіації довільної сталої та методом підстановки:

A1. $y' - y\cos x = y^2\cos x$.

A2. $y' - 2xy = 2x^3y^2$.

A3. $xdy = (y^2\ln x - y)dx$.

A4. $(x+1)(y'+y^2) = -y$.

A5. $y^3dx + (x^3\ln y - xy^2)dy = 0$.

A6. $2y^2y' + y^3 + x = 0$.

A7. $y'(x^3+y+1) = 3x^2$.

A8. $(xy + x^2y^3)y' = 1$.

Знайти інтегральні криві рівнянь Бернуллі, які проходять через задані точки (рівняння зінтегрувати методом зведення до лінійного рівняння):

A9. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}, \quad (1,1)$.

A10. $(2x^2y\ln y - x)y' = y, \quad (1,1)$.

A11. $xdy + ydx = y^2dx, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

A12. $xy' - 4y - 2x^2\sqrt{y} = 0, \quad (0,0)$.

A13. $2y'\sin x + y\cos x = y^3\sin^2 x, \quad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

A14. $x^2y^2y' + xy^3 = 2, \quad (1,0)$.

A15. $2y' - y = \frac{e^x}{y}, \quad (0,1)$.

A16. $4xyy' - 3y^2 + x^2 = 0, \quad (1,1)$.

Зінтегрувати рівняння Ріккаті (у прикладах, де частинний розв'язок $y_1(x)$ не вказано, знайти його шляхом підбору):

A17. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

A18. $y' = y^2 - 2xy - 3$.

A19. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$.

A20. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

A21. $(x^2+1)y' + \frac{2(1-x^2)}{x}y = y^2 - 3, \quad y_1(x) = \frac{1}{x}$.

A22. $y' + y^2\sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}, \quad y_1(x) = \frac{a}{\cos x}$.

Зінтегрувати рівняння Дарбу:

A23. $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$.

A24. $(y^3 + 2xy^2)dy - 2y^3dx + (x + y)(xdy - ydx) = 0$.

A25. $(2xy + x^2y - y^3)dx - (x^2 + y^2 + x^3 - xy^2)dy = 0$.

A26. Знайти криві, в яких відрізок, що відтинає дотична на осі ординат, пропорційний з коефіцієнтом k квадрату ординати точки дотику.

A27. Знайти криві, в яких відрізок, що відтинає дотична на осі абсцис, пропорційний кубу абсциси точки дотику.

A28. Знайти криву, у кожній точці якої піднормаль є середнім арифметичним квадратів координат цієї точки.

A29. Знайти загальний розв'язок рівняння Ріккаті, якщо відомі три його частинні розв'язки.

A30. Довести, що рівняння Ріккаті (5.3) не змінює свого виду після довільної заміни незалежної змінної $x = \varphi(t)$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння Бернуллі або знайти розв'язки задач Коші:

C1. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

C2. $xy^2y' = x^2 + y^3, \quad y(1) = 0$.

C3. $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$.

C4. $y' + xy = y^2(\sin x + x \cos x), \quad y(0) = 1$.

C5. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

C6. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

C7. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

C8. $xy^3dx = (x^2y + 2)dy$.

C9. $(x^3 + e^y)dy = 3x^2dx, \quad y(1) = 0$.

C10. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$.

C11. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.

C12. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 0$.

C13. $y' + y = y^2 x e^x \sin x^2, \quad y(0) = 2.$

C14. $(y+1)dx + x(1 + x + xy)dy = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

C15. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$

C16. $y' + 2y = y^2 e^x.$

C17. $5xy^4 y' = y^5 + 4, \quad y(1) = 1.$

C18. $y' \cos x - y \sin x = y^4.$

Зінтегрувати рівняння Ріккаті (у прикладах, де частинний розв'язок $y_1(x)$ не вказано, знайти його шляхом підбору):

C19. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$

C20. $(1 - x^3)y' = y^2 - x^2 y - 2x, \quad y_1(x) = ax^2.$

C21. $(x^2y^2 + xy + 1)dx - x^2 dy = 0, \quad y_1(x) = \frac{a}{x}.$

C22. $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x} + x, \quad y_1(x) = ax + b.$

C23. $xy' - (2x+1)y + y^2 + x^2 = 0.$

C24. $x^2 y' - x^2 y^2 + 5xy - 3 = 0.$

C25. $y' + y^2 = -\frac{1}{4x^2}.$

C26. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$

Зінтегрувати рівняння Дарбу:

C27. $(3x^4y^2 + y^5)dx - (xy^4 + 2x^5 y)dy = 0.$

C28. $(x^3 - xy^2)dx + 2x^2 y dy - (xdy - ydx) = 0.$

C29. $x^2y^3 dx + x^3y^2 dy + ydx - xdy = 0.$

C30. $(x^2 y + y^3 - xy)dx + x^2 dy = 0.$

C31. $y\,dx + xdy + y^2(xdy - ydx) = 0.$

C32. $y^2(x+5)dx + x(x^2 - 5y)dy = 0.$

C33. Знайти криві, в яких відрізок, що відтинає дотична на осі абсцис, пропорційний з коефіцієнтом k квадрату абсциси точки дотику.

C34. Знайти криві, в яких відрізок, що відтинає дотична на осі ординат, пропорційний з коефіцієнтом k кубу ординати точки дотику.

C35. Знайти криві, у яких відрізок, що відтинає нормаль, проведена через точку (x, y) кривої, на осі абсцис, дорівнює y^2/x.

C36. Звести рівняння Ріккаті $xy' = f(x)(x^2 - y^2) + y$ до лінійного рівняння, якщо його частинний розв'язок має вигляд $y_1 = ax + b$.

C37. Довести, що рівняння Бернуллі (5.1) не змінює свого вигляду після перетворення $y = f(x)u$, де $f(x)$ — довільна задана диференційовна функція.

C38. Довести, що рівняння Ріккаті не змінює свого вигляду після довільного дробово-лінійного перетворення шуканої функції $y = \frac{a(x)u+b(x)}{c(x)u+d(x)}$, де $a(x)d(x) \neq c(x)b(x)$.

C39. Довести, що диференціальне рівняння сім'ї кривих $y = \frac{C\varphi_1(x)+\varphi_2(x)}{C\psi_1(x)+\psi_2(x)}$ є рівнянням Ріккаті.

C40. Скласти рівняння Ріккаті вигляду (5.3) за двома його неперервними розв'язками y_1 і y_2.

C41. Довести, що довільні чотири різні частинні розв'язки y_1, y_2, y_3, y_4 рівняння Ріккаті пов'язані співвідношенням

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \equiv \text{const}.$$

C42. Довести, що рівняння Якобі

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy + \\ + (a_3x + b_3y + c_3)(xdy - ydx) = 0$$

після замін $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, де ξ, $\eta = \eta(\xi)$ — нові змінні, а α, β — сталі, які підлягають визначенню, зводиться до рівняння Дарбу.

Зінтегрувати рівняння Якобі (див. задачу C42):

C43. $(y - x - 1)(dx + dy) + (x + y + 1)(xdy - ydx) = 0$.

Зінтегрувати рівняння Дарбу:

C44. $(x^2 + y^2)dx - 2xydx - xdy + ydx = 0$.

C45. $(x^3 - y)dx + (x^2y + x)dy = 0$.

Відповіді

A1. $y(Ce^{-\sin x} - 1) = 1$; $y = 0$. **A2.** $y(Ce^{-x^2} - x^2 + 1) = 1$; $y = 0$. **A3.** $y(Cx + \ln x + 1) = 1$; $y = 0$. **A4.** $y(x + 1)(\ln|x + 1| + C) = 1$;

$y = 0$. **A5.** $y^2 = x^2(\ln^2 y + C)$; $x = 0$. **A6.** $y = \sqrt[3]{Ce^{-x} - x + 1}$. **A7.** $x = \sqrt[3]{Ce^{y} - y - 2}$. **A8.** $x\big(Ce^{y^2/2} - y^2 + 2\big) = 1$. **A9.** $y^2 = 3x^2/(2x^6 + 1)$. **A10.** $xy(1 - \ln^2 y) = 1$. **A11.** $y = 1/(x + 1)$. **A12.** $y = 0$. **A13.** $y^2(\pi/2 - x)\sin x = 1$. **A14.** $3x^2 - x^3y^3 = 3$. **A15.** $y^2 = (x + 1)e^x$. **A16.** $y^2 = 2x^{\frac{3}{2}} - x^2$. **A17.** $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$; $y = \frac{2}{x}$. **A18.** $y = x - 2 + \frac{4}{1 + Ce^{4x}}$; $y = x - 2$. **A19.** $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + C}$; $y = \frac{1}{x}$. **A20.** $y = e^x - \frac{1}{x + C}$; $y = e^x$. **A21.** $y = \frac{x^2+1}{C-x} + \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x}$. **A22.** $y = \frac{3\cos^2 x}{C - \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x}$; $y = \frac{1}{\cos x}$. **A23.** $x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$; $x = 0$. **A24.** $y = Ce^{2x/y} - \frac{2x+3y}{4y}$; $y = 0$. **A25.** $y = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)\ln\frac{C(x+y)}{x-y}$; $y = \pm x$; $y = 0$. **A26.** $y = \frac{x}{kx + C}$. **A27.** $y^2 = \frac{Cx^2}{kx^2+1}$. **A28.** $y^2 = Ce^x - x^2 - 2x - 2$. **A29.** $\frac{y-y_2}{y-y_1} \cdot \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} = C$. **C1.** $y = (C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x)^{-\frac{1}{3}}$; $y = 0$. **C2.** $y = \sqrt[3]{4x^3 - 3x^2}$. **C3.** $x^2 = Ce^{\sin x} - 2(\sin y + 1)$. **C4.** $y = \sec x$. **C5.** $xy(C - \ln^2 y) = 1$. **C6.** $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$; $y = 0$. **C7.** $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$. **C8.** $x^2 = 1 - \frac{2}{y} + Ce^{-\frac{2}{y}}$. **C9.** $x^3 = (y + 1)e^y$. **C10.** $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$. **C11.** $x^2(C - \cos y) = y$; $y = 0$. **C12.** $y = 0$. **C13.** $y = 2e^{-x}\operatorname{ch} x^2$. **C14.** $x(y + 1)\ln|e^2(y + 1)| = 1$. **C15.** $y = \frac{\sec x}{x + C}$; $y = 0$. **C16.** $y^3\big(Ce^{\cos x} + 3\big) = 1$; $y = 0$. **C17.** $y = \sqrt[5]{5x - 4}$. **C18.** $y^{-3} = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x$; $y = 0$. **C19.** $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{2/3} + x}$; $y = \frac{1}{x}$. **C20.** $y = \frac{1 - Cx^2}{C - x}$; $y = -x^2$. **C21.** $y = \frac{1}{x(C - \ln x)} - \frac{1}{x}$; $y = -\frac{1}{x}$. **C22.** $y = x + \frac{2x}{Ce^{2x} - 1}$; $y = x$. **C23.** $y = x + \frac{x}{x + C}$; $y = x$. **C24.** $y = \frac{3 + Cx^2}{x + Cx^3}$; $y = \frac{1}{x}$. **C25.** $y = \frac{1}{x(C + \ln|x|)} + \frac{1}{2x}$; $y = \frac{1}{2x}$. **C26.** $y = \frac{4}{Ce^{4x} - 1} + x + 2$; $y = x + 2$. **C27.** $x^4 - y^3 = Cxy^2$; $x = 0$; $y = 0$. **C28.** $3x(x^2 + y^2)^2 = 6x^2y + 2y^3 + Cx^3$; $x = 0$. **C29.** $x^2y^2 + 2\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$; $x = 0$; $y = 0$. **C30.** $x^2 + y^2 = Cy^2e^{2x}$; $x = 0$; $y = 0$. **C31.** $y^2 + Cxy = 1$; $x = 0$; $y = 0$. **C32.** $C(x + y)e^{\frac{x(5-y)}{5(x+y)}} = x$; $y = 0$. **C33.** $y = (C + ky)x$. **C34.** $x^{-2} = Cy^{-2} - k$. **C35.** $y^2 = 2x^2(C - \ln|x|)$. **C36.** $u' + u(1 - 2f(x)) = f(x)$. **C43.** $(x + y + 1)^2 = C^2(x + y)(x + 1)$. **C44.** $x = (x + C)(x - y)$; $x = 0$. **C45.** $x^3 + xy^2 + 2y = Cx$; $x = 0$.

Тема 6. Рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник

Короткі теоретичні відомості

6.1. Рівняння у повних диференціалах. Рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{6.1}$$

називають *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто $dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Для того, щоб (6.1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$M'_y = N'_x. \tag{6.2}$$

Для відшукання функції $U(x,y)$ можна скористатись співвідношеннями (системою) $U'_x = M(x,y)$, $U'_y = N(x,y)$, виконавши при цьому одне з перетворень:

а) $U'_x = M(x,y)$, тому $U(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ — розв'язок рівняння $\left(\int M(x,y)dx\right)'_y + \varphi'(y) = N(x,y)$;

б) $U'_y = N(x,y)$, тому $U(x,y) = \int N(x,y)dy + \psi(x)$, де $\psi(x)$ — розв'язок рівняння $\left(\int N(x,y)dy\right)'_x + \psi'(x) = M(x,y)$.

Функцію $U(x,y)$ можна знайти також за однією з формул:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy, \tag{6.3}$$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy, \tag{6.4}$$

де (x_0, y_0) — довільна точка.

Загальним інтегралом рівняння у повних диференціалах є співвідношення $U(x,y) = C$, де C — довільна стала.

6.2. Інтегрувальний множник. *Інтегрувальним множником* рівняння (6.1) називають таку функцію $\mu(x,y) \neq 0$, після множення на яку рівняння (6.1) стає рівнянням у повних диференціалах.

Загального методу відшукання інтегрувального множника немає, однак у окремих випадках його можна знайти явно. Наприклад, якщо $\mu = \mu(\omega(x, y))$ і $\frac{M'_y - N'_x}{N\omega'_x - M\omega'_y} \equiv \varphi(\omega)$, то

$$\mu(\omega) = e^{\int \varphi(\omega)d\omega}. \tag{6.5}$$

Ще один метод відшукання інтегрувальних множників ґрунтується на використанні такої теореми:

Теорема 6.1. *Нехай* $\mu_0(x, y)$ *— інтегрувальний множник рівняння* (6.1) *і* $U_0(x, y)$ *— відповідний йому інтеграл рівняння* ($U_0(x, y) = C$ *— загальний інтеграл*). *Тоді всі інтегрувальні множники рівняння* (6.1) *виражаються формулою*

$$\mu(x, y) = \mu_0(x, y)\varphi\big(U_0(x, y)\big), \tag{6.6}$$

де $\varphi(z)$ *— довільна неперервно диференційовна функція.*

Запишемо рівняння (6.1) у вигляді

$$M_1dx + N_1dy + M_2dx + N_2dy = 0$$

і припустимо, що маємо інтегрувальні множники μ_1, μ_2 та загальні інтеграли $U_1 = C$, $U_2 = C$ рівнянь $M_1dx + N_1dy = 0$ і $M_2dx + N_2dy = 0$ відповідно. Тоді, згідно з (6.6), всі інтегрувальні множники першого рівняння задаються формулою $\mu = \mu_1\varphi_1(U_1)$, а другого — формулою $\mu = \mu_2\varphi_2(U_2)$, де $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ — довільні диференційовні функції. Якщо $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ можна підібрати так, що $\mu_1\varphi_1(U_1) = \mu_2\varphi_2(U_2)$, то інтегрувальним множником рівняння (6.1) буде функція $\mu = \mu_1\varphi_1(U_1)$.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 6.1. Зінтегрувати рівняння $(x + y + \sin x)dx + (x + \cos y)dy = 0$.

Розв'язання. Маємо $M(x, y) = x + y + \sin x$, $N(x, y) = x + \cos y$, $M'_y = N'_x = 1$. Функцію $U(x, y)$ знайдемо із системи

$$\begin{cases} U'_x = x + y + \sin x, \\ U'_y = x + \cos y. \end{cases}$$

З першого рівняння $U(x,y) = x^2/2 + xy - \cos x + \varphi(y)$, а підставляючи в друге, маємо $U'_y = x + \varphi'(y) = x + \cos y$, звідки знаходимо $\varphi'(y) = \cos y$ і $\varphi(y) = \sin y$.

Отже, $U(x,y) = x^2/2 + xy - \cos x + \sin y$, а тому загальним інтегралом заданого рівняння є $x^2/2 + xy - \cos x + \sin y = C$.

До цього ж результату приходимо, безпосередньо використовуючи формулу (6.3) або (6.4). Скористаємося, наприклад, формулою (6.3):

$$\int_{x_0}^{x}(x + y + \sin x)dx + \int_{y_0}^{y}(x_0 + \cos y)dy = C \quad \Rightarrow$$
$$x^2/2 + xy - \cos x - x_0^2/2 - x_0 y \; +$$
$$+ \cos x_0 + yx_0 + \sin y - y_0 x_0 - \sin y_0 = C.$$

Оскільки x_0 і y_0 — сталі величини, то перепозначивши довільну сталу, одержуємо загальний інтеграл заданого рівняння: $x^2/2 + xy - \cos x + \sin y = C$.

Відповідь: $x^2/2 + xy - \cos x + \sin y = C$.

Приклад 6.2. Знайти інтегрувальний множник $\mu = \mu(y)$ рівняння $(y - 2xy^2)dx = (y^2 + x + y)dy$ та зінтегрувати рівняння.

Розв'язання. Маємо $M'_y = 1 - 4xy$, $N'_x = -1$, $M'_y \neq N'_x$. Оскільки $\omega = y$, то $\omega'_x = 0$, $\omega'_y = 1$,

$$\frac{M'_y - N'_x}{N\omega'_x - M\omega'_y} = \frac{1 - 4xy + 1}{2xy^2 - y} = -\frac{2}{y} \equiv \varphi(\omega),$$

і з (6.5) одержуємо $\mu(\omega) = e^{-2\int \frac{d\omega}{\omega}} = e^{-2\ln|\omega|} = \omega^{-2} = y^{-2}$.

Після множення заданого рівняння на $\mu(y)$, одержуємо рівняння у повних диференціалах

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0,$$

бо $M'_y = N'_x = y^{-2}$.

Загальний інтеграл отриманого рівняння знаходимо за формулою (6.3):

$$\int_0^x \left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + \int_1^y \left(1 + \frac{0}{y^2} + \frac{1}{y}\right) dy = C \quad \Rightarrow$$
$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| - 1 = C.$$

Відповідь: $x^2 - x/y + y + \ln|y| = C$.

Приклад 6.3. Зінтегрувати рівняння $y(2x^3y - 1)dx + x(2xy^3 - 1)dy = 0$ з допомогою інтегрувального множника $\mu = \mu(xy)$.

Розв'язання. Оскільки $\omega = xy$,

$$\varphi(\omega) = \frac{4x^3y - 1 - 4xy^3 + 1}{(2x^2y^3 - x)y - (2x^3y^2 - y)x} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{\omega},$$

то з (6.5) маємо $\mu = e^{-2\int \frac{d\omega}{\omega}} = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{(xy)^2}$.

Після множення заданого рівняння на інтегрувальний множник одержуємо рівняння у повних диференціалах

$$\left(2x - \frac{1}{x^2y}\right) dx + \left(2y - \frac{1}{xy^2}\right) dy = 0,$$

загальний інтеграл якого знаходимо за формулою (6.4):

$$\int_1^x \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) dx + \int_1^y \left(2y - \frac{1}{xy^2}\right) dy = C \quad \Rightarrow$$
$$xy(x^2 + y^2) + 1 = Cxy \quad (C := C + 3).$$

Відповідь: $xy(x^2 + y^2) + 1 = Cxy$.

Приклад 6.4. Знайти інтегрувальний множник рівняння $(x^3 + xy^2 - y)dx + (y^3 + x^2y + x)dy = 0$, використовуючи метод, який ґрунтується на формулі (6.6).

Розв'язання. Розіб'ємо ліву частину рівняння на дві групи так, щоб інтегрувальний множник кожної з них було б легко знайти:

$$\underbrace{x(x^2+y^2)\,dx + y(x^2+y^2)\,dy} + \underbrace{x\,dy - y\,dx} = 0.$$

Розглянемо два рівняння $x(x^2+y^2)dx + y(x^2+y^2)dy = 0$ і $xdy - ydx = 0$. Для першого з них інтегрувальним множником є функція $\mu_1 = \frac{1}{x^2+y^2}$, а інтегралом — функція $U_1 = x^2+y^2$. Для другого рівняння інтегрувальним множником є, наприклад, $\mu_2 = \frac{1}{xy}$, а інтегралом — $U_2 = \frac{y}{x}$. Отже, згідно з формулою (6.6), всі інтегрувальні множники заданого рівняння задовольняють співвідношення

$$\mu = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\varphi_1(x^2+y^2) = \frac{1}{xy}\cdot\varphi_2\Big(\frac{y}{x}\Big),$$

звідки, наприклад, $\varphi_1(x^2+y^2) = 1$, $\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^{-1}$.

Отже, інтегрувальним множником заданого рівняння є $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Переконатися, що наведені рівняння є рівняннями у повних диференціалах, та зінтегрувати їх:

А1. $(y\cos x + 2xy^2)dx + (\sin x - \sin y + 2x^2y)dy = 0.$

А2. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$

А3. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = 0.$

А4. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$

А5. $(2x\sin y - y^2\sin x)dx + (x^2\cos y + 2y\cos x + 1)dy = 0.$

А6. $2\left(\frac{1}{x^3y} + \frac{y\ln x}{x}\right) + \left(\frac{1}{x^2y^2} + \ln^2 x\right) = 0.$

А7. $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0.$

А8. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0.$

A9. $\left(1+e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1-x/y\right)dy = 0.$

A10. $\sqrt{y^2+4}\,dx + \frac{2y^2+xy+4}{\sqrt{y^2+4}}dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння з допомогою інтегрувального множника $\mu = \mu(\omega)$:

A11. $(2xy+y^2)dx + (2x^2+3xy+4y^2)dy = 0, \quad \omega = y.$

A12. $\left(\frac{x}{y}+y\right)dy - (1+x)dx = 0, \quad \omega = x^2 - y^2.$

A13. $\frac{dx}{x} + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad \omega = \frac{y}{x}.$

A14. $(1+x^2y)dx + x^2(x+y)dy = 0, \quad \omega = x.$

A15. $(2x-y)dx + (x+2y)dy = 0, \quad \omega = x^2+y^2.$

A16. $(2xy^2-y)dx + (y^2+x+y)dy = 0, \quad \omega = y.$

A17. $\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}\right)dy = 0, \quad \omega = x.$

A18. $(10x^3+y^2+9x^2y)dx + (7y^2+6xy+x^3)dy = 0, \quad \omega = x+y.$

A19. $\left(\sqrt{x^2-y}+2x\right)dx - dy = 0, \quad \omega = x^2 - y.$

A20. $\left(2x^3y^4 - \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y}\right)dx + \left(2x^4y^3 - \frac{2}{x} - \frac{3x^3}{y^2}\right)dy = 0, \omega = xy.$

Знайти інтегрувальні множники рівнянь з допомогою їхнього розбиття на дві частини, та зінтегрувати рівняння:

A21. $ydx + (x - x^2y\ln y)dy = 0.$

A22. $y(1+xy)dx + \left(\frac{x^2y}{2}+y+1\right)dy = 0.$

A23. $\left(\frac{2}{y}+\frac{y}{x^3}\right)dx + \left(\frac{1}{xy}-\frac{2}{x^2}\right)dy = 0.$

A24. $y(x+y^2)dx + x^2(y-1)dy = 0.$

A25. $(x^2-y)dx + x(y+1)dy = 0.$

A26. $(x^3+xy^2-y)dx + (y^3+x^2y+x)dy = 0.$

A27. Довести, що інтегрувальним множником однорідного рівняння (3.1) є функція $\mu(x,y) = \frac{1}{M'_x+N'_y}$.

A28. Довести, що інтегрувальним множником рівняння Бернуллі (5.1) є функція $\mu(x,y) = \frac{1}{y^m}e^{(1-m)\int p(x)dx}$.

А29. Довести, що якщо інтегрувальними множниками рівняння (6.1) є функції μ_1 і μ_2, причому $\mu_1/\mu_2 \neq \text{const}$, то $\mu_1/\mu_2 = C$ є загальним інтегралом цього рівняння.

А30. Довести, що якщо рівняння (6.1) є рівнянням у повних диференціалах і має інтегрувальний множник $\mu \neq \text{const}$, то загальним інтегралом цього рівняння є $\mu = C$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння у повних диференціалах:

С1. $\sin(x+y)dx + x\cos(x+y)(dx+dy) = 0.$

С2. $2x\sin y - y\cos x + \ln x + (x^2\cos y - \ln y - \sin x)y' = 0.$

С3. $\left(2\sqrt{x}y\sin y^2 + \frac{x}{y^2}\right)dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos y^2 + \frac{1}{y} + \frac{6}{x^4}\right)dx.$

С4. $(x\ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y\ln y - y - 2xy)dx = 0.$

С5. $(y + 2\sin x)dx + (x + 9\cos y)dy = 0$

С6. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - y\right)dy = 0.$

С7. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx = \frac{2x^3+5y}{y^3}dy.$

С8. $(6xy + x^2 + 3)\,y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0.$

С9. $\frac{2x(1-e^y)}{(x^2+1)^2}dx + \frac{e^y}{x^2+1}dy = 0.$

С10. $\left(2x - \frac{y^2}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{tg} y}{2\sqrt{x}}\right)dx - \left(\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 y} - 2y\operatorname{ctg} x\right)dy = 0.$

С11. $\left(1 + \frac{2x}{y^3}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0.$

С12. $3x^2(1+\ln y)dx + \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$

С13. $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

С14. $x(x^2 - 3y^2)dx + y(y^2 - 3x^2)dy = 0.$

С15. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння з допомогою інтегрувального множника $\mu = \mu(x)$ або $\mu = \mu(y)$:

С16. $y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0.$

С17. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0.$

C18. $y(1 - y\sin x)\cos^2 y dx = (y^2 + x\cos^2 y)dy$.

C19. $(3x^2 - 1)dx + \left(3 - \frac{2x}{y} + \frac{2x^3}{y}\right) dy = 0$.

C20. $\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dy = \frac{y}{x^3}dx$.

Зінтегрувати рівняння з допомогою інтегрувального множника $\mu = \mu(x - y)$ або $\mu = \mu(x + y)$:

C21. $(2x^2 - xy + 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$.

C22. $(x^2 + x^2y + 2xy)dx + x\operatorname{ctg}(x + y)(dx + dy) = 0$.

C23. $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)dy = 0$.

C24. $(x^2 + 2xy + y)dx - x(x + 1)dy = 0$.

C25. $(3y - 3)dx - (4y + x - 3)dy = 0$.

Зінтегрувати рівняння з допомогою інтегрувального множника $\mu = \mu(x^2 - y^2)$ або $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ або $\mu = \mu(xy)$:

C26. $\left(3x^3 - 3xy^2 + \frac{y}{x}\right) dx + (1 + 3yx^2 - 3y^3)dy = 0$.

C27. $\left(3xy + \frac{1}{xy} - 6\right) dx + \left(2x^2 - \frac{3x}{y}\right) dy = 0$.

C28. $(y^2\sqrt{xy} - y)dx + (2xy\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

C29.$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$.

C30. $\left(x - \frac{y}{x}\right) dx + \cos\frac{y}{x}dy = 0$.

Знайти інтегрувальні множники рівнянь з допомогою їхнього розбиття на дві частини, та зінтегрувати рівняння:

C31. $(6x - 2y - 2y^2)dx + (5y^2 - 8xy - x)dy = 0$.

C32. $\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right) dx + (1 + \frac{x^3}{y})dy = 0$.

C33. $(6xy^2 + x^2)dx + y(x - 3y^2)dy = 0$.

C34. $y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx)$.

C35. $y(xy + 1)dx + \left(\frac{x^2y}{2} + y + 1\right) dy$.

C36. Знаючи, що рівняння $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$ має інтегрувальні множники $\mu_1 = \mu_1(x)$, $\mu_2 = \mu_2(x^2 - y^2)$, знайти без квадратур його загальний інтеграл (див. приклад **A29**).

C37. Довести, що рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ має інтегрувальний множник $\mu(x, y) = \frac{1}{M^2+N^2}$, якщо справджується умова $MN(N'_x - M'_y) = (M^2 - N^2)(M'_y + N'_x)$.

C38. Довести, що рівняння $yF_1(xy)dx+xF_2(xy)dy=0$ має інтегрувальний множник $\mu(x,y)=\frac{1}{xy(F_1(xy)-F_2(xy))}$. Зінтегрувати цим способом рівняння

$$(x^2y^3+xy^2+y)dx-(x^3y^2-x^2y+x)dy=0.$$

C39. Довести, що загальний інтеграл однорідного рівняння, ліва частина якого є повним диференціалом, можна записати без квадратур за формулою $M'_x+N'_y=C$.

Зінтегрувати однорідні рівняння з допомогою інтегрувального множника (див. приклад **A27**):

C40. $(5y-3x)dx-(5x+3y)dy=0$.

C41. $y'=2\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{y}{x}$.

Зінтегрувати однорідні рівняння без квадратур (див. приклад **A29**):

C42. $(x^4+y^4)dx+xy^3dy=0$.

C43. $(x^3+15x^2y+y^3)dx+(5x^3+3xy^2+2y^3)dy=0$.

Зінтегрувати рівняння Бернуллі з допомогою інтегрувального множника (див. приклад **A28**):

C44. $y^2dx+(2xy-x^4)dy=0$.

C45. $x^2y'-3xy=-2\sqrt[3]{y^5}$.

Відповіді

A1. $y\sin x+x^2y^2+\cos x=C$. **A2.** $3x^2y-y^3=C$. **A3.** $\sqrt{x^2+y^2+1}-\operatorname{arcctg}\frac{y}{x}=C$. **A4.** $4y\ln x+y^4=C$. **A5.** $x^2\sin y+y^2\cos x+y=C$. **A6.** $\frac{1}{x^2y}-y\ln^2 x=C$. **A7.** $(x^2+y^2)^2=C$. **A8.** $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$. **A9.** $x+ye^{x/y}=C$. **A10.** $(x+y)\sqrt{y^2+4}=C$. **A11.** $x^2y^2+xy^3+y^4=C$. **A12.** $\sqrt{y^2-x^2}+\arccos(x/y)=C$; $y=\pm x$. **A13.** $y^2/2-x/y=C$. **A14.** $xy^2+2x^2y-2=Cx$; $x=0$. **A15.** $\operatorname{arctg}(y/x)+\ln(x^2+y^2)=C$. **A16.** $x^2-x/y+y+\ln y=C$; $y=0$. **A17.** $x^3+3xy+3y^2=C$. **A18.** $(x^3+y^2)\sqrt[3]{x+y}=C$. **A19.** $x+2\sqrt{x^2-y}=C$; $y=x^2$. **A20.** $\frac{x}{y^3}+x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}=C$. **A21.** $xy\left(\frac{\ln^2 y}{2}+C\right)=-1$; $x=0$. **A22.** $x+\frac{x^2y}{2}+y+\ln y=C$; $y=0$. **A23.** $x^2+y-\frac{y^2}{x}=C$.

A24. $\frac{x(y-1)}{x+y} + \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| = C$; $y = 0$; $x = 0$. **A25.** $xe^{-\sqrt{x^2+y^2}} = C(y + \sqrt{x^2+y^2})$. **A26.** $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C$. **C1.** $x\sin(x+y) = C$. **C2.** $x^2\sin y - y\sin x + x\ln x - x - y\ln y + y = C$. **C3.** $x/y - 2/x^3 + \sqrt{x}\cos y^2 = C$. **C4.** $x^4/4 + xy(\ln y - x - 1) + \sin y = C$. **C5.** $4x + \frac{x^2+1}{\sin y} = C$. **C6.** $\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2} = C$. **C7.** $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C$. **C8.** $3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C$. **C9.** $e^y - 1 = C(x^2+1)$. **C10.** $\sqrt{x}\operatorname{tg} y - y^2\operatorname{ctg} x - x^2 = C$. **C11.** $x + \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$. **C12.** $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$. **C13.** $\frac{xy}{x-y} + \ln\frac{x}{y} = C$. **C14.** $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$. **C15.** $(x+y)\times(x^2 - 7xy + y^2) = C$. **C16.** $x^2 - 2/y - 6xy = C$; $y = 0$. **C17.** $y^2 - 2x = Cy^3$; $y = 0$. **C18.** $x + y\cos x - y\operatorname{tg} y = Cy$; $y = 0$. **C19.** $y^2x^3 - y^2x + y^3 = C$. **C20.** $y^4 - 4xy = C$. **C21.** $x^4 - 2yx^3 + y^2x^2 + x^2 - 2xy + y^2 = C$; $y = x$. **C22.** $x\sin(x+y) = C$. **C23.** $x^3 + xy + y^3 = C(x+y)$; $y = -x$. **C24.** $(x^2 - y) = C(x+y)$; $y = -x$. **C25.** $x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^4 - y^3 = C$. **C26.** $\sqrt{(x^2-y^2)^3} - \arcsin\frac{y}{x} = C$. **C27.** $y^2x^3 - 3x^2y + x = C$. **C28.** $y^2x - 2\sqrt{xy} = C$. **C29.** $x^2y^2 - 2\ln\frac{y}{x} = C$; $x = 0$; $y = 0$. **C30.** $x + \sin\frac{y}{x} = C$. **C31.** $(2x-y)(x-y^2)^2 = C$. **C32.** $2x^3y^3 + 3x^6y^2 = C$. **C33.** $e^{3y^2/x}xy = C$. **C34.** $\sqrt[3]{xy^4} = C(x^3 - 4y^2)$. **C35.** $x + \frac{1}{2}x^2y + y + \ln y = C$; $y = 0$. **C36.** $x^2 - y^2 - 1 = Cx$. **C38.** $\operatorname{arctg} xy + \ln x - \ln y = C$; $x = 0$; $y = 0$. **C40.** $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{-\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **C41.** $\sqrt{y/x} - \ln|x| = C$; $y = 0\,(x \neq 0)$. **C42.** $4x^3 + 3xy^2 = C$. **C43.** $x^2 + 12xy + 2y^2 = C$. **C44.** $\frac{3}{y^7} - \frac{7}{x^3y^6} = C$; $x = 0$; $y = 0$. **C45.** $3x^2y^{2/3} + 4x = C$; $y = 0$.

Тема 7. Неявні диференціальні рівняння першого порядку

Короткі теоретичні відомості

7.1. Рівняння першого порядку степеня n. *Неявним диференціальним рівнянням першого порядку* називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{7.1}$$

де функція $F(x, y, z)$ неперервна в деякій області $D \subset \mathbf{R}^3$.

Якщо в рівнянні (7.1) F є многочленом степеня n відносно похідної y', тобто

$$\begin{aligned} a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots \\ \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \end{aligned} \tag{7.2}$$

і $a_0(x, y) \neq 0$, то таке рівняння називають *рівнянням першого порядку степеня n*.

Рівняння (7.2) визначає n значень для y'. Обмежуючись тільки дійсними коренями, з (7.2) матимемо m ($m \leqslant n$) диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної, основні типи яких вивчались на заняттях 2–6:

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.3}$$

Сукупність загальних розв'язків $y = \varphi_k(x, C)$ або загальних інтегралів $\Phi_k(x, y, C) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, рівнянь (7.3) є загальним інтегралом рівняння (7.2). Його можна записати також у вигляді $(y - \varphi_1(x, C)) \cdot \ldots \cdot (y - \varphi_m(x, C)) = 0$ або $\Phi_1(x, y, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_m(x, y, C) = 0$.

7.2. Неповні рівняння. Якщо ліва частина рівняння (7.1) не містить незалежної змінної і/або шуканої функції, то його називають *неповним*.

Загальним інтегралом неповного рівняння

$$F(y') = 0 \tag{7.4}$$

є $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$. Якщо корені рівняння $F(z) = 0$ повністю заповнюють деякий інтервал, то рівняння (7.4) може мати розв'язки, які не містяться у наведеному загальному інтегралі.

Якщо неповні рівняння

$$F(x, y') = 0, \quad F(y, y') = 0 \tag{7.5}$$

можна розв'язати відносно похідної, то одержимо рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо рівняння (7.5) неможливо розв'язати відносно y', але можна розв'язати відносно x чи y відповідно, то ці рівняння зводяться до квадратур. Наприклад, для рівняння $x = f(y')$ маємо: $y' = \varphi(t)$, $x = f(\varphi(t))$,

$$dy = \varphi(t) f'(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad y = \int \varphi(t) f'(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt + C.$$

Якщо рівняння (7.5) неможливо розв'язати відносно y' чи відносно іншого аргумента (або зробити це складно), то у багатьох випадках можна знайти параметричне представлення обох аргументів через параметр t. Наприклад, якщо для рівняння $F(x, y') = 0$ вдалось знайти такі функції $x = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$, що $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, то $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$, звідки $y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$. Таким чином, одержимо загальний розв'язок у параметричній формі:

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\, dt + C.$$

Рівняння (7.5) можуть мати особливі розв'язки $x = a$ або $y = b$, де числа a, b визначаються з рівностей $\lim\limits_{y' \to \pm\infty} F(a, y') = 0$ і $F(b, 0) = 0$ відповідно.

Наведемо деякі вказівки щодо введення параметра t:

1) Для диференціальних рівнянь

$$ax^{\frac{2k_1}{m_1}} \pm b(y')^{\frac{2k_2}{m_2}} = 1, \quad ay^{\frac{2k_1}{m_1}} \pm b(y')^{\frac{2k_2}{m_2}} = 1,$$

де $a, b > 0$, параметр t можна ввести, виходячи з тотожностей $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ і $\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$ відповідно.

2) Для рівнянь, які містять радикали $\sqrt{y'^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - y'^2}$, $\sqrt{y'^2 - a^2}$, зручно зробити параметризацію з допомогою підстановок $y' = a \operatorname{tg} t$, $y' = a \sin t$ (або $y' = a \cos t$), $y' = \sec t$ відповідно (навіть якщо ці рівняння можна розв'язати відносно x або y).

3) Рівняння

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0, \tag{7.6}$$

де $P(x, y')$ і $Q(x, y')$ — однорідні функції змінних x, y' вимірів k і m ($k \geqslant m$) відповідно, інтегрується у параметричній формі, якщо параметр t ввести за формулою $t = \frac{y'}{x}$. У результаті такої параметризації знаходимо $x = \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1,t)}{P(1,t)}}$ і $y' = t \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1,t)}{P(1,t)}}$. Використовуючи співвідношення $dy = y' dx$, можна знайти загальний розв'язок рівняння (7.6) у параметричній формі.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 7.1. Зінтегрувати рівняння $y'^2 + (1 - y^2)y' = y^2$.
Розв'язання. Рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь $y' = -1$ та $y' = y^2$, праві частини яких визначені на всій площині і в жодній точці їхні значення не збігаються. Тому поле, визначене заданим рівнянням, утворюється накладанням полів, визначеними рівняннями $y' = -1$ та $y' = y^2$. Загальними розв'язками цих рівнянь є $y = -x + C$ і $y = (C - x)^{-1}$ відповідно, тому загальний інтеграл заданого рівняння можемо записати у вигляді $(y + x - C)\left(y - \frac{1}{C-x}\right) = 0$. ■

Приклад 7.2. Зінтегрувати рівняння

$$y'^3 - \left(x^2 + xy + y^2\right) y'^2 + xy \left(x^2 + xy + y^2\right) y' - x^3 y^3 = 0.$$

Розв'язання. Ліву частину рівняння можна розкласти на множники:

$$\left(y'-xy\right)\left(y'^2+xyy'+x^2y^2\right)-y'\left(x^2+xy+y^2\right)\left(y'-xy\right)=$$
$$=\left(y'-xy\right)\left(y'-x^2\right)\left(y'-y^2\right).$$

Отже, $(y'-xy)\left(y'-x^2\right)\left(y'-y^2\right)=0$, тобто одержали три диференціальні рівняння $y'=xy$, $y'=x^2$ і $y'=y^2$, загальними інтегралами яких є $y=Ce^{x^2/2}$, $y=x^3/3+C$, $y=(C-x)^{-1}$ відповідно. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння можна записати як $\left(y-Ce^{x^2/2}\right)\left(y-\frac{x^3}{3}-C\right)\left(y+\frac{1}{C-x}\right)=0$. ■

Приклад 7.3. Зінтегрувати рівняння $x=e^{y'}-y'$.
Розв'язання. Маємо неповне рівняння вигляду $F(x,y')=0$. Представимо рівняння у параметричній формі: $x=e^t-t$, $y'=t$. Тоді $dy=y'dx=t(e^t-1)dt$, а тому

$$y=\int t(e^t-1)dt+C=(t-1)e^t-\frac{t^2}{2}+C.$$

Відповідь: $x=e^t-t$, $y=(t-1)e^t-t^2/2+C$.

Приклад 7.4. Зінтегрувати рівняння $y^{\frac{2}{3}}+y'^{\frac{2}{3}}=1$.
Розв'язання. Маємо неповне рівняння вигляду $F(y,y')=0$ і очевидне параметричне представлення: $y=\cos^3 t$, $y'=\sin^3 t$. Тоді

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{-3\cos^2 t\sin t}{\sin^3 t}\,dt=-3\operatorname{ctg}^2 t\,dt\quad\Rightarrow$$
$$x=-3\int\operatorname{ctg}^2 t\,dt+\quad\Rightarrow\quad x=3\int\left(1-\frac{1}{\sin^2 t}\right)dt+C\quad\Rightarrow$$
$$x=3t+3\operatorname{ctg} t+C.$$

Відповідь: $x=3t+3\operatorname{ctg}2t+C$, $y=\cos^3 t$.

Приклад 7.5. Зінтегрувати рівняння $x^3+y'^3-3xy'=0$.
Розв'язання. Це рівняння вигляду (7.6). Якщо $y'=tx$, то

$$x^3+t^3x^3-3tx^2=0\quad\Rightarrow\quad x=3t(t^3+1)^{-1}.$$

Тоді, враховуючи співвідношення $dy = y'dx$, одержуємо:

$$y' = \frac{3t^2}{t^3+1} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{9(1-2t^3)t^2}{(t^3+1)^3}dt \quad \Rightarrow$$
$$y = 9\int \frac{(1-2t^3)t^2}{(t^3+1)^3}dt + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3(4t^3+1)}{2(t^3+1)^2} + C.$$

Відповідь: $x = \frac{3t}{t^3+1}$, $y = \frac{3(4t^3+1)}{2(t^3+1)^2} + C$.

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати неявні рівняння степеня n:

A1. $xy'^2 = y(2y'-1)$.
A2. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.
A3. $(xy' + 3y)^2 = 7x$.
A4. $xy'(xy' + y) = 2y^2$.
A5. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.
A6. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.
A7. $2yy'^3 - (4xy + 2y + 1)y'^2 + (4xy + 2y + 1)y' - 2x = 0$.
A8. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)y' + xy(x + y) = 0$.
A9. $y'^3 - (x + y + 2)y'^2 + (2x + 2y + xy)y' - 2y = 0$.
A10. $(x^2 - 2xy)y'^2 + 2xyy' + y^2 - 2xy = 0$.

Зінтегрувати неповні рівняння методом введення параметра:

A11. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.
A12. $x(y'^2 - 1) = 2y'$.
A13. $x = y' \ln y'$.
A14. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$.
A15. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$.
A16. $y = \ln\left(1 + y'^2\right)$.
A17. $y'^4 = 2yy' + y^2$.
A18. $x = \ln y' + \sin y'$.
A19. $y = y'^2 e^{y'}$.

A20. $y' = \operatorname{arctg} \frac{y}{y'^2}$.

Зінтегрувати рівняння з допомогою тригонометричних підстановок:

A21. $y = \frac{y'}{4-y'^2}$.

A22. $y = y' + \sqrt{y'^2+1}$.

A23. $x(1+y'^2)^{3/2} = 6$.

A24. $y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$.

Зінтегрувати рівняння вигляду (7.6):

A25. $5x^3 + y'^3 - 21xy' = 0$.

A26. $4y'^4 + x^4 - 20xy' = 0$.

A27. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих $(\sqrt{y-x^2} - C)^2 - x^2/4 = 0$.

A28. Знайти криві, для яких відрізок, що відтинає дотична на осі абсцис, дорівнює радіус-вектору точки дотику.

A29. Знайти криві, для яких довжина відрізка нормалі дорівнює радіус-вектору точки дотику.

A30. Якими є інтегральні криві рівняння степеня n зі сталими коефіцієнтами $y'^n + a_1 y'^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n = 0$? Як знайти загальний інтеграл цього рівняння, не знаходячи його коренів? Зінтегруйте рівняння $y'^3 + 4y' + 2 = 0$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати неявні рівняння степеня n:

C1. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.

C2. $yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0$.

C3. $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$.

C4. $y'^2 - (2x+y)y' + x^2 + xy = 0$.

C5. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.

C6. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

C7. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.

C8. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

C9. $y'^2 - (3x - 2y)y' + 2x^2 - xy - 3y^2 = 0$.

C10. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.

C11. $y'^3 \sin x - (y \sin x - \cos^2 x)y'^2 - (y \cos^2 x + \sin x)y' + y \sin x = 0$.

C12. $y'^4 - 2y^2y'^2 + y^4 = 0$.

C13. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

C14. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)(y'^2 - xyy') - x^3y^3 = 0$.

Знайти інтегральні криві, що проходять через задану точку:

C15. $y^2y'^2 = 4, \quad (0, 0)$.

C16. $y'^2 + \frac{3yy'}{x} + \frac{2y^2}{x^2} = 0, \quad (1, 1)$.

C17. $yy'^2 + 2xy' - y = 0, \quad (0, 0)$.

C18. $(1 - x^2)(y'^2 + 4xy'^2) = y' + 4x, \quad (1, 0)$.

Зінтегрувати неповні рівняння методом введення параметра:

C19. $y' (x - \ln y') = 1$.

C20. $x = y'^3 + y'$.

C21. $y'^4 - y'^2 = y^2$.

C22. $y = y'^2 e^{y'}$.

C23. $y' \ln y' - y = 0$.

C24. $x = y' \sin y' + \cos y'$.

C25. $3y'^5 - yy' + 1 = 0$.

C26. $2y - y'^2 - 2 \ln y' = 0$.

C27. $xy'^3 = y' + 1$.

C28. $y = (y' - 1)e^{y'}$.

C29. $y = y'^2 + 2y'^3$.

C30. $\arcsin \frac{x}{y'} = y'$.

C31. $y = y' \operatorname{tg} y' + \ln \cos y'$.

Зінтегрувати рівняння з допомогою тригонометричних підстановок:

C32. $x = 3y' \sqrt{1 + y'^2}$.

C33. $y \sqrt{1 + y'^2} = 10$.

C34. $y'^2 + y^2 = \pi$.

C35. $y = 2\sqrt{y'^2 + 1}$.

C36. $y(1 + y'^2) = a$.

C37. $y - y' = \sqrt{1 + y'^2}$.

Зінтегруйте рівняння вигляду (7.6):

C38. $xy'^2 - 2y' - x + x^3 = 0$.

C39. $x^4 + 7y'^4 - 24x^2y' = 0$.

Використовуючи результат прикладу **A30**, знайдіть загальний інтеграл рівнянь:

C40. $y'^3 - 4y' + 2 = 0$.

C41. $y'^2 - 5y' + 3 = 0$.

Зінтегрувати рівняння вигляду (7.4):

C42. $y' = 10 \sin y'$.

C43. $e^{x^2y' + 2xy} + x^2y' + 2xy = 0$

C44. $y' + |y'| = 0$.

C45. Зінтегрувати рівняння $x^{y'} = (y')^x$.

Відповіді

A1. $(x +)^2 = 4Cy$; $y = 0$; $y = x$. **A2.** $x^2 + C^2 = 2Cy$; $y = \pm x$. **A3.** $y = Cx^{-3} \pm 2\sqrt{x/7}$. **A4.** $x^2y = C$; $y = Cx$. **A5.** $y = 2x^2 + C$; $y = -x^2 + C$. **A6.** $y = Ce^x$; $y = e^{-x} + x + 1$. **A7.** $y = x + C$; $y = x^2 + C$; $y^2 = x + C$. **A8.** $y = x^2/2 + C$; $y = Ce^x$; $y = 1 - x + Ce^{-x}$. **A9.** $y = 2x + C$; $y = Ce^x$; $y = x^2/2 + C$. **A10.** $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{y} + \sqrt{x})^{\sqrt{2}+1} = C$; $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^{\sqrt{2}+1}(\sqrt{y} + \sqrt{x})^{\sqrt{2}-1} = C$; **A11.** $y = \frac{1}{4}(C^2 - 2(x - C)^2)$; $y = x^2/2$. **A12.** $x = \frac{2t}{t^2-1}$, $y = \frac{2}{t^2-1} - \ln|t^2 - 1| + C$. **A13.** $x = t \ln t$, $y = \frac{t^2}{2} \ln t + \frac{t^2}{4} + C$. **A14.** $x = t\sqrt{t^2 + 1}$, $y = \frac{1}{3}(2t^2 - 1)\sqrt{t^2 + 1} + C$. **A15.** $x = \ln|t| + \frac{3}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right| \pm 3\sqrt{t + 1} + C$, $y = t \pm (t + 1)^{\frac{3}{2}}$; $y = \pm 1$. **A16.** $x = \operatorname{arctg} t + C, y = \ln(t^2 + 1)$; $y = 0$. **A17.** $x = \pm 2\sqrt{t^2 + 1} - \ln(\sqrt{t^2 + 1} \pm 1) + C$, $y = -t \pm t\sqrt{t^2 + 1}$; $y = 0$. **A18.** $x = \ln t + \sin t$, $y = t(\sin t + 1) + \cos t + C$. **A19.** $x = e^t(t + 1) + C$, $y = t^2e^t$. **A20.** $x = t \operatorname{tg} t - \ln\cos t + C$, $y = t^2 \operatorname{tg} t$. **A21.** $x = \frac{1}{2}(\sec t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}) + C$, $y = \operatorname{tg} t$. **A22.** $x = \ln\left(C \operatorname{tg} \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $y = \operatorname{tg} t + \sec t$. **A23.** $x = 6\cos^3 t$, $y = C - 6\sin^3 t$. **A24.** $x = 5\left(\frac{\operatorname{tg}^3 t}{3} - \operatorname{tg} t + t\right) + C$,

$y = a\sin^5 t$. **A25.** $x = \frac{21t}{t^3+5}$, $y = \frac{147(4t^3+5)}{2(t^3+5)^2} + C$. **A26.** $x = \frac{\pm 2\sqrt{5}\sqrt{t}}{4t^4+1}$, $y = \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(2t+1) - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(2t-1) + \frac{5t}{2(2t^2-2t+1)} - \frac{5t}{2(2t^2+2t+1)} + C$. **A27.** $(y'-2x)^2 = y - x^2$. **A28.** $y^2 = 2C(x + C/2)$. **A29.** $y^2 - x^2 = C$, $x^2 + y^2 = C^2$. **A30.** Інтегральними кривими є прямі. Загальний інтеграл: $(y-C)^n + a_1 x(y-C)^{n-1} + a_2 x^2 (y-C)^{n-1} + \ldots + a_n x^n = 0$. **C1.** $\ln(Cy) = x \pm \sin x$; $y = 0$. **C2.** $y = \frac{x^2}{2} + C$; $y^2 = 2x + C$. **C3.** $y = \pm\frac{x^2}{2}$; $y = Ce^x$. **C4.** $y = \frac{x^2}{+}C$; $y = Ce^x - x - 1$. **C5.** $x^2 + (Cy+1)^2 = 1$; $y = 0$. **C6.** $(Cx+1)^2 = 1 - y^2$; $y = \pm 1$. **C7.** $y = Ce^{\pm x} - x^2$. **C8.** $y^2 = C^2 x - C$; $4xy^2 = -1$. **C9.** $y = Ce^x - x - 1$; $y = Ce^{-3x} + \frac{2}{9}(3x-1)$. **C10.** $(\sqrt{x+y} \pm \sqrt{x})^2 = C$. **C11.** $y = Ce^x$; $y = C - \cos x$; $y = \ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$. **C12.** $y = Ce^x$; $y = Ce^{-x}$. **C13.** $y = \frac{C}{x}$; $y = \frac{C}{x^2}$. **C14.** $y = \frac{x^3}{3} + C$; $y = Ce^{x^2/2}$; $y = \frac{-1}{x+C}$. **C15.** $y^2 = \pm 4x$. **C16.** $xy = 1$; $x^2 y = 1$. **C17.** $y = 0$. **C18.** $y + 2x^2 = 1$; $y = 1 \pm \arcsin x$. **C19.** $x = \ln t + \frac{1}{t}$, $y = t - \ln t + C$. **C20.** $x = t^3 + t$, $y = \frac{3}{4}t^4 + 2t^2 + C$. **C21.** $x = \pm\left(2\sqrt{t^2-1} + \arcsin\frac{1}{|t|}\right) + C$, $y = \pm\sqrt{t^2-1}$; $y = 0$. **C22.** $x = e^t(t+1) + C$, $y = t^2 e^t$. **C23.** $x = \frac{1}{2}(\ln t + 1)^2$, $y = y\ln t$. **C24.** $x = t\sin t + \cos t$, $y = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t + C$. **C25.** $3y'^5 - yy' + 1 = 0$. **C26.** $x = t - \frac{1}{t} + C$, $y = \frac{t^2}{2} + \ln t$. **C27.** $x = \frac{t+1}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t} + C$. **C28.** $x = e^t + C$, $y = (t-1)e^t$; $y = -1$. **C29.** $x = 2t + 3t^2 + C$, $y = \frac{t^2}{2} + \ln t$. **C30.** $x = t\sin t$, $y = (t^2-1)\sin t + t\cos t + C$. **C31.** $x = \operatorname{tg} t + C$, $y = t\operatorname{tg} t + \ln\cos t$. **C32.** $x^2 + (y-C)^2 = 9$; $x = \pm 3$. **C33.** $x = \pm 10\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right| + C$, $y = \pm\frac{10}{\cos t}$. **C34.** $y = \sqrt{\pi}\sin(x - C)$. **C35.** $y = 2\operatorname{ch}\frac{x+C}{2}$; $y = 2$. **C36.** $x = -at - \frac{a\sin 2t}{2} + C$, $y = a\cos^2 t$. **C37.** $x = \ln\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$, $y = \operatorname{tg} t + \sec t$. **C38.** $x = \pm\sqrt{\frac{2t+1}{t^2+1}}$, $y = \frac{t-2}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$. **C39.** $x = \frac{24t}{7t^3+1}$, $y = \frac{96}{7(7t^3+1)} + \frac{288t^3}{(7t^3+1)^2}$. **C40.** $(y-C)^3 - 4x^2(y-C) + 2x^3 = 0$. **C41.** $(y-C)^2 - 5x(y-C) + 3x^2 = 0$. **C42.** $y - C = 10x\sin\frac{y-C}{x}$. **C43.** $e^{\frac{x^2 y - C}{x}} + \frac{x^2 y - C}{x} = 0$. **C44.** $y = \frac{1}{2}\int(\varphi(x) - |\varphi(x)|)dx + C$, де $\varphi(x)$ — довільна функція. **C45.** $y = \frac{x^2}{2} + C$; $x = t^{\frac{1}{t-1}}$, $y = \int t^{\frac{t+1}{t-1}}\frac{t - \ln t - 1}{t(t-1)^2}dt + C$.

Тема 8. Неявні диференціальні рівняння першого порядку (продовження)

Короткі теоретичні відомості

8.1. Рівняння, розв'язані відносно незалежної змінної або відносно шуканої функції. Нехай неявне рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно незалежної змінної, тобто

$$x = f(y, y').$$

Позначимо $y' = p$. Тоді $x = f(y, p)$, а отже,

$$dx = f'_y(y, p)dy + f'_p(y, p)dp \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = f'_y(y, p) + f'_p(y, p)\frac{dp}{dy} \quad (dy \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dy} = \left(\frac{1}{p} - f'_y(y, p)\right) / f'_p(y, p). \tag{8.1}$$

Якщо розглядати p як функцію змінної y, то рівняння (8.1) розв'язане відносно похідної.

Аналогічно інтегрується рівняння $y = F(x, y')$, тобто неявне рівняння, розв'язане відносно шуканої функції.

8.2. Рівняння Лагранжа, рівняння Клеро. Окремим випадком рівняння $y = F(x, y')$ є *рівняння Лагранжа*:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{8.2}$$

де φ і ψ — диференційовні функції змінної y'. Рівняння Лагранжа завжди інтегрується в квадратурах. Для цього потрібно зробити заміну $y' = p(x)$ і здиференціювати обидві частини співвідношення $y = x\varphi(p)+\psi(p)$ за змінною x. У результаті одержимо лінійне рівняння відносно функції $x(p)$.

Якщо у рівнянні Лагранжа (8.2) $\varphi(y') \equiv y'$, то одержуємо *рівняння Клеро*:

$$y = xy' + \psi(y').$$

Рівняння Клеро теж інтегрується з допомогою заміни $y' = p$.

8.3. Випадки, пов'язані з однорідністю функцій.

1) Якщо $f(x, y')$ або $f(y, y')$ є сумою двох однорідних функцій вимірів m і $m+1$, то підстановка $p = tx$ для рівняння $f(x, y') = 0$ і $p = ty$ для рівняння $f(y, y') = 0$ приводить до раціональної параметричної форми.

2) Якщо $f(x, y')$ або $f(y, y')$ є сумою двох однорідних функцій вимірів m і $m+2$, то підстановка $p = tx$ для рівняння $f(x, y') = 0$ і $p = ty$ для рівняння $f(y, y') = 0$ дозволяє виразити y, y' або x, y' через квадратичну ірраціональність від t. Аналогічно, якщо $f(x, y')$ або $f(y, y')$ є сумою трьох однорідних функцій вимірів m, $m+1$, $m+2$.

3) Рівняння $F(x, y, y') = 0$ називають *однорідним*, якщо його ліва частина — однорідна функція відносно змінних x, y, тобто $F\left(tx, ty, y'\right) = t^m F\left(x, y, y'\right)$. У цьому випадку рівняння можна записати у вигляді $f(y/x, y') = 0$ і, якщо його можна розв'язати відносно частки y/x, то одержимо сукупність рівнянь Лагранжа, у яких $\psi(y') \equiv 0$:

$$\frac{y}{x} = \varphi_k(y'), \quad k = 1, 2, \ldots$$

4) Рівняння $F(x, y, y') = 0$ називають *узагальнено однорідним*, якщо $F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y'\right) = t^m F\left(x, y, y'\right)$. Після заміни незалежної змінної та шуканої функції за формулами $x = e^t$, $y = ze^{kt}$ одержуємо неявне диференціальне рівняння без незалежної змінної (див. п. 7.2).

5) Якщо права частина рівняння $y = f(x, y')$ є однорідною функцією виміру 2, то підстановка $y' = tx$ приводить до відокремлення змінних t і x.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 8.1. Зінтегрувати рівняння

$$xy'^2 + yy' - y^4 = 0.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно x і позначимо $y' = p$. Тоді $x = (y^4 - yp)/p^2$. Здиференціюємо обидві частини останнього співвідношення, враховуючи, що $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$:

$$dx = \frac{4y^3 - p}{p^2}dy + \frac{py - 2y^4}{p^3}dp \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4y^3 - p}{p^2} + \frac{py - 2y^4}{p^3} \cdot \frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} = \frac{4y^3}{p^2} - \frac{1}{p} + \left(\frac{y}{p^2} - 2\frac{y^4}{p^3}\right) \cdot \frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p - 2y^3}{p^2}\left(2dy - \frac{y}{p}dp\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 2y^3 \text{ або } 2\frac{dy}{y} - \frac{dp}{p} = 0.$$

Якщо $p = 2y^3$, то одержуємо особливий розв'язок

$$x = \frac{y^4 - 2y^4}{4y^6} = -\frac{1}{4y^2} \quad \Rightarrow \quad 4xy^2 + 1 = 0.$$

З рівняння $2dy/y = dp/p$ знаходимо $y^2 = Cp$.

Отже, загальним розв'язком у параметричній формі є

$$x = (y^4 - yp)/p^2, \quad y^2 = Cp.$$

Параметр p можна легко виключити:

$$x = \frac{y^4 - y \cdot y^2/C}{(y^2/C)^2} \quad \Rightarrow \quad y(x - C^2) = C. \ \blacksquare$$

Приклад 8.2. Зінтегрувати рівняння

$$x^3y'^2 + x^2yy' = 1.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно y і позначимо $y' = p$:

$$y = \frac{1 - x^3p^2}{x^2p}. \tag{8.3}$$

Здиференціюємо обидві частини останнього співвідношення і виконаємо нескладні перетворення:

$$dy = d\left(\frac{1}{x^2p}\right) - d(xp) \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{2dx}{x^3p} - \frac{dp}{x^2p^2} - pdx - xdp \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3p} - \frac{1}{x^2p^2}\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} \quad (dx \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x^2p} + xp\right)\left(\frac{dp}{p} + \frac{2}{x}dx\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1 + x^3p^2 = 0 \text{ або } \ln|p| + 2\ln|x| = C.$$

З одержаних рівнянь знаходимо $x = -p^{-2/3}$ і $x = Cp^{-1/2}$ відповідно. Підставляючи їх у (8.3), одержуємо $y = 2p^{1/3}$ і $y = C^{-2} - Cp^{1/2}$. Всі розв'язки отримано у параметричній формі.

Виключаючи параметр p, одержуємо розв'язки у явному вигляді: $xy^2 + 4 = 0$ (особливий розв'язок), $xy = x/C - C$ (загальний розв'язок). ■

Приклад 8.3. Зінтегрувати рівняння

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Розв'язання. Маємо рівняння Лагранжа. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = xp^2 + p^2. \tag{8.4}$$

Диференціюючи (8.4), послідовно одержуємо

$$dy = p^2dx + 2xpdp + 2pdp \quad \Rightarrow \quad pdx = p^2dx + (2xp + 2p)dp \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} = \frac{2}{1-p} \quad \left(p^2 - p \neq 0\right).$$

Отримали лінійне рівняння. Його загальним розв'язком є $x = C(p-1)^{-2} - 1$. Тоді з (8.4) маємо вираз для y:

$$y = \left(\frac{C}{(p-1)^2} - 1\right) \cdot p^2 + p^2 = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Отже,

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Виключаючи параметр p, одержуємо загальний розв'язок у явному вигляді: $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$.

Кореням $p_1 = 0$ та $p_2 = 1$ рівняння $p^2 - p = 0$ відповідають розв'язки $y = 0$ та $y = x + 1$ відповідно. Перший з них є особливим, а другий — частинним. ■

Приклад 8.4. Зінтегрувати рівняння

$$y = xy' - y'^2/2.$$

Розв'язання. Маємо рівняння Клеро. Позначимо $y' = p$. Тоді $y = xp - p^2/2$. Диференціюючи цю рівність, одержуємо

$$y' = p + xp' - pp' \quad \Rightarrow \quad p = p + (x-p)p' \quad \Rightarrow \quad (x-p)p' = 0.$$

Якщо $p' = 0$, то $p = C$, а тому загальним розв'язком є

$$y = Cx - C^2/2.$$

Зі співвідношення $x - p = 0$ знаходимо розв'язок $x = p$, $y = px - p^2/2$ у параметричній формі, який є особливим. Виключаючи параметр p, цей розв'язок можна записати у вигляді $y = x^2/2$. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати рівняння методом введення параметра:

A1. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.
A2. $y'^3 + y^2 = xyy'$.
A3. $5y + y'^2 = x(y' + x)$.
A4. $x^2y'^2 = xyy' + 1$.
A5. $y' = e^{xy'/y}$.
A6. $y = xy' - x^2y'^3$.

A7. $y = 2xy' + y^2y'^3$.

A8. $2xy' - y = y' \ln(yy')$.

Зінтегрувати рівняння Лагранжа:

A9. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

A10. $xy'(y' + 2) = y$.

A11. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

A12. $2xy' - y = \ln y'$.

A13. $y = 2xy' - 4y'^3$.

A14. $y = -xy' + y'^2$.

Зінтегрувати рівняння Клеро:

A15. $y = xy' - y'^2$.

A16. $y = xy' - 4\sqrt{1 + y'^2}$.

A17. $y = xy' + \dfrac{aby'}{ay' - b}$.

A18. $y = xy' + \dfrac{y'}{y' - 1}$.

A19. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

A20. Знайти криву, якщо дотична у будь-якій її точці утворює з осями координат трикутник, площа якого дорівнює S.

A21. Знайти криві, дотичні до яких відтинають на осях координат відрізки, які в сумі дорівнюють a.

A22. Довести, що рівняння $x^2y' = f(y + xy')$ з допомогою заміни $z = xy$ можна звести до рівняння Клеро.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння методом введення параметра:

C1. $y = x^2 + xy'$.

C2. $y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0$.

C3. $16y^2y'^3 + 2xy' - y = 0$.

C4. $8xy'^3 - 12yy'^2 + 9y = 0$.

C5. $y(y-2xy')^3 = y'^2$.
C6. $x^3y'^2 + x^2yy' + a = 0$.
C7. $y = x + y' - \ln y'$.
C8. $9yy'^2 + 4x^3y' - 4x^2y = 0$.
C9. $(xy'+a)^2 - 2ay + x^2 = 0$.
Зінтегрувати рівняння Лагранжа або Клеро:
C10. $xy' - y = \ln y'$.
C11. $12y' = (3y'-4)(y-xy')$.
C12. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.
C13. $2y(y'+2) = xy'^2$.
C14. $2y'^2(y-xy') = 1$.
C15. $xy'^2 - 2y' - y = 0$.
C16. $y = xy' + a\sqrt[3]{1-y'^3}$.
C17. $y'^3 = 3(xy'-y)$.
C18. $y = xy' + \dfrac{2y'}{2y'-1}$.
C19. $xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0$.
C20. $2xy' - \ln y' - y = 0$.
C21. $y = 5xy' - y'^5$.

C22. Знайти криву, якщо відрізок дотичної, який міститься між осями координат, є сталою величиною і дорівнює l.

C23. Знайти криві, у яких добуток відстаней дотичних від двох заданих точок $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$ є сталою величиною, рівною $\pm b^2$.

C24. Використовуючи результати вправи *, зінтегруйте рівняння
$$x^2y' + \frac{xy'+y}{\sqrt{1+(xy'+y)^2}} = 0.$$

Зінтегрувати неявні рівняння, використовуючи однорідність функцій:
C25. $y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0$.

C26. $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0.$
C27. $y^2 - (y'^3 + y'^2)xy + x^2y'^5 = 0.$
C28. $y^2(1 - y'^2) + 2xyy'(y'^2 - 2) + 4x^2y'^2 = 0.$
C29. $y = 2y'^2 - \dfrac{xy'}{2} - x^2.$
C30. $2y'^2y^2 - 2y'y + 2y'^2x - 1 = 0.$

Відповіді

A1. $4y = C^2 - 2(x-C)^2$; $2y = x^2$. **A2.** $pxy = y^2 + p^3$, $y^2(2p+C) = p^4$; $y = 0$. **A3.** $x = -\frac{p}{2} + C$, $y = \frac{C^2}{5} - \frac{p^2}{4}$; $x^2 = 4y$. **A4.** $x = \pm\frac{1}{p\sqrt{2\ln Cp}}$, $y = \mp\left(\sqrt{2\ln Cp} - \frac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right)$. **A5.** $x = \frac{1}{C}\ln Cy$; $y = ex$. **A6.** $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1$, $y = xp - x^2p^3$; $y = 0$. **A7.** $2p^2x = C - C^2p^2$, $py = C$; $32x^3 = -27y^4$; $y = 0$. **A8.** $y^2 = 2Cx - C\ln C$; $2x = 1 + 2\ln|y|$. **A9.** $x\sqrt{p} = \ln p + C$, $y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)$; $y = 0$. **A10.** $y = \pm 2\sqrt{Cx} + C$; $y = -x$. **A11.** $x = C(p-1)^{-2} + 2p + 1$, $y = Cp^2(p-1)^{-2} + p^2$; $y = 0$; $y = x - 2$. **A12.** $x = p^{-1} + Cp^{-2}$, $y = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p$. **A13.** $x = 3p^2 + Cp^{-2}$, $y = 2p^3 + 2Cp^{-1}$; $y = 0$. **A14.** $x = \frac{2}{3}p + Cp^{-\frac{1}{2}}$, $y = \frac{1}{3}p^2 - Cp^{\frac{1}{2}}$; $y = 0$. **A15.** $y = Cx - C^2$; $4y = x^2$. **A16.** $y = Cx - 4\sqrt{1+C^2}$; $x\sqrt{1+p^2} = 4p$, $y\sqrt{1+p^2} = -4$. **A17.** $y = Cx + \frac{abC}{aC-b}$; $x = \frac{ab^2}{(ap-b)^2}$, $y = \frac{a^2bp^2}{(ap-b)^2}$. **A18.** $y = Cx + \frac{C}{C-1}$; $y = \pm 2\sqrt{x} + x + 1$. **A19.** $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$; $y = \sqrt{1-x^2}$. **A20.** $2xy = \pm S$. **A21.** $y = x \pm \sqrt{ax} + a$. **C1.** $y = Cx - x^2$. **C2.** $y = Cx^2 + C^2$; $4y = -x^4$. **C3.** $2Cx = y^2 - 16C^3$; $x = -\frac{3}{128p^4}$, $y = -\frac{1}{32p^3}$. **C4.** $y^2 = C\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4C}\right)^3$; $y = 0$; $y = \pm\frac{3}{2}x$. **C5.** $2Cx = y^2 - \sqrt[3]{C^2}$; $2(\sqrt{27} - \sqrt[6]{27})xy = \pm 1$. **C6.** $y = \frac{C}{x} + \frac{a}{C}$; $y = \pm 2\sqrt{\frac{a}{x}}$. **C7.** $y = e^{x+C} - C$; $y = x + 1$. **C8.** $y = \pm\frac{2}{C}\sqrt{9 - Cx^2}$; $y = 0$. **C9.** $x\sqrt{p^2+1} = C - a\ln(\sqrt{p^2+1} + p)$, $2ay = (xp+a)^2 + x^2$. **C10.** $y = Cx - \ln C$; $y = 1 + \ln x$. **C11.** $y = Cx + \frac{12C}{3C-4}$; $x = \frac{48}{(3p-4)^2}$, $y = \frac{36p^2}{(3p-4)^2}$. **C12.** $y = Cx - \frac{1}{C}$; $y^2 = -4x$. **C13.** $2Cy = (Cx-2)^2$; $y = 0$; $y = -4x$. **C14.** $2C^2(y - Cx) = 1$; $8y^3 = 27x^2$. **C15.** $x = (2p - \ln|p| + C)(p-1)^{-2}$, $y = (2p - 2\ln|p| + C)p^2(p-1)^{-2} - 2p$; $y = 0$; $y = x - 2$. **C16.** $y = Cx + a\sqrt[3]{1-C^3}$; $x = ap^2(1-p^3)^{-\frac{2}{3}}$, $y = a(1-p^3)^{-\frac{2}{3}}$. **C17.** $y = Cx - \frac{C^3}{3}$; $9y^2 = 4x^3$. **C18.** $y = Cx + \frac{2C}{2C-1}$; $y = \pm\sqrt{2x} + \frac{x}{2} + 1$. **C19.** $y = Cx + \frac{1}{C^2}$; $y = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}$. **C20.** $x =$

$= \frac{p+C}{p^2}$, $y = 2\frac{p+C}{p} - \ln p$. **C21.** $x = \frac{5}{21}p^4 + Cp^{-\frac{5}{4}}$, $y = \frac{4}{21}p^5 + 5Cp^{-\frac{1}{4}}$; $y = 0$. **C22.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. **C23.** $\frac{x^2}{b^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{c^2-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **C24.** $y = C + \frac{C}{x\sqrt{1+C^2}}$; $x = -(p^2+1)^{-\frac{3}{2}}$, $y = -p^3$.

Тема 9. Геометричні аспекти теорії диференціальних рівнянь першого порядку

Короткі теоретичні відомості

9.1. Метод ізоклін. Якщо в диференціальному рівнянні

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \tag{9.1}$$

розглядати x і y як декартові координати точок площини, то (9.1) ставить у відповідність кожній точці області G певне значення y', тобто надає певного значення кутовому коефіцієнту дотичної. Інакше кажучи, рівняння (9.1) для кожної точки $M \in G$ вказує напрям кривої $y = \varphi(x)$. Накресливши в точках області G вектори, що утворюють з віссю Ox кути, тангенси яких дорівнюють значенню $f(x, y)$ у цих точках, одержимо зображення *поля напрямів*.

Геометричні місця точок з однаковим напрямом поля називаються *ізоклінами*. Рівняння ізоклін диференціального рівняння (9.1) має вигляд

$$f(x, y) = k, \tag{9.2}$$

де k – довільна стала. Для побудови інтегральних кривих потрібно враховувати області зростання (при $k > 0$), спадання ($k < 0$) інтегральних кривих та лінії їх екстремумів ($k = 0$). Якщо функція $f(x, y)$ у рівнянні (9.1) диференційовна, то з допомогою другої похідної $y'' = f'_x + y' \cdot f'_y = f'_x + f \cdot f'_y$ можна визначити області опуклості та лінії точок перегину інтегральних кривих.

9.2. Ізогональні траєкторії. Лінії, які перетинають криві даної сім'ї плоских кривих під сталим кутом φ, називаються *ізогональними траєкторіями* цієї сім'ї. Якщо кут перетину $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то траєкторії називають *ортогональними*. Ізогональні (ортогональні) траєкторії задовольняють деяке диференціальне рівняння.

Маючи рівняння однопараметричної сім'ї кривих у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, знаходимо диференціальне рівняння цієї сім'ї (див. тему 1): $F(x, y, y') = 0$. Тоді рівняння ізогональних траєкторій задається формулою

$$F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0, \tag{9.3}$$

де $k = \operatorname{tg}\varphi$, а ортогональних –

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0. \tag{9.4}$$

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 9.1. З допомогою методу ізоклін наближено побудувати інтегральні криві диференціального рівняння $xy' = y - x$.

Розв'язання. Згідно з (9.2) рівняння ізоклін має вигляд

$$xk = y - x \quad \Rightarrow \quad y = x(k + 1), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Якщо $k = 0$, то ізокліною є пряма $y = x$, на яку наносимо горизонтальні штрихи, відповідні напряму дотичних для точок цієї ізокліни. Саме у точках ізокліни $y = x$ інтегральні криві можуть мати екстремуми. Побудуємо також ізокліни для $k = 1$, $k = 3$, $k = -1$, $k = -2$, $k = -3$ і нанесемо на ці прямі штрихи, які утворюватимуть кут $\operatorname{arctg} k$ з додатним напрямом осі абсцис (рис. 9.1). Для прямої $x = 0$ штрихи є вертикальними, що вказує на те, що вісь ординат є вертикальною асимптотою для інтегральних кривих. Нанесені штрихи утворюють поле напрямів.

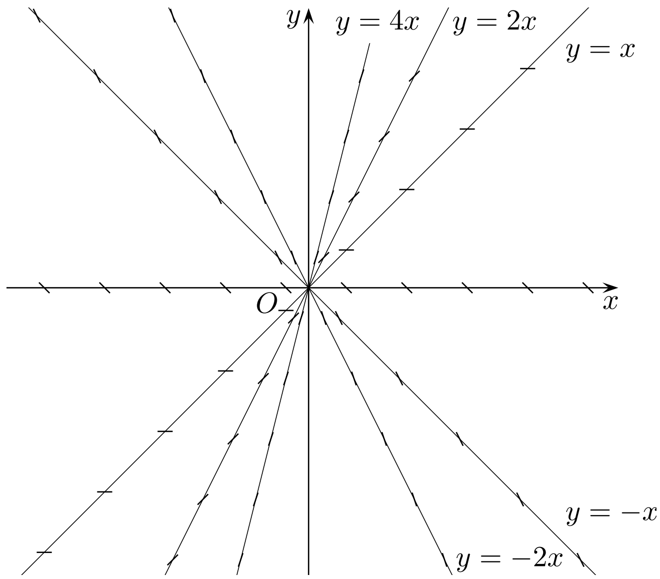

Рис. 9.1

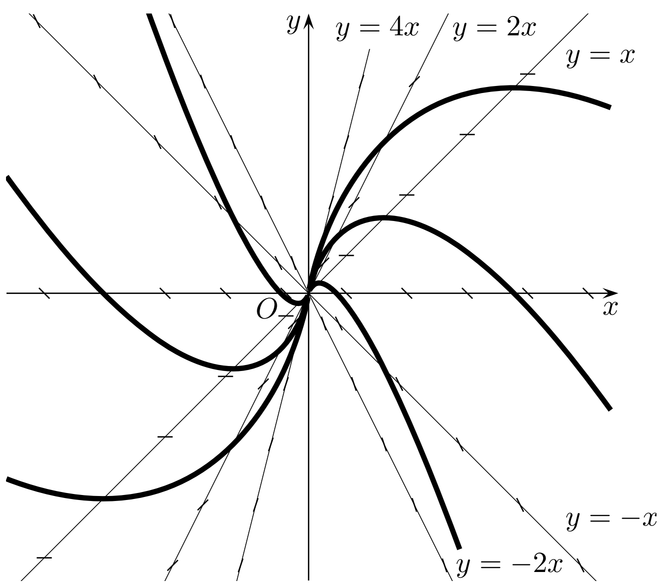

Рис. 9.2

Тепер проведемо інтегральні криві так, щоб вони перетинали ізокліни під кутами, вказаними штрихами (рис. 9.2). ■

Приклад 9.2. Скласти диференціальне рівняння ізогональних траєкторій сім'ї кривих $x^2 - y^2 = C$, що перетинають їх під кутом $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих. Позначимо $\Phi(x, y, C) \equiv x^2 - y^2 - C$, тоді $\Phi'_x + \Phi'_y y' \equiv 2x - 2yy'$. Виключаючи параметр C з системи

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C, \\ 2x - 2yy' = 0, \end{cases}$$

одержуємо диференціальне рівняння $x - yy' = 0$.

З формули (9.3) випливає, що шуканим диференціальним диференціальним рівнянням ізогональних траєкторій є

$$x - y\frac{y' - 1}{1 + y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + xy' - yy' + y = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(x - y)y' + x + y = 0. \ \blacksquare$$

Приклад 9.3. Скласти диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сім'ї кривих $x^2 - y^2 = C$.

Розв'язання. Диференціальне рівняння $x - yy' = 0$ заданої сім'ї кривих було одержане у попередньому прикладі. З формули (9.4) випливає, що шуканим диференціальним рівнянням ортогональних траєкторій є

$$x - y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad xy' + y = 0. \ \blacksquare$$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

З допомогою методу ізоклін наближено побудувати інтегральні криві диференціальних рівнянь:

A1. $y' = x^2 + y^2$.
A2. $y' = x + y$.
A3. $yy' + x = 0$.
A4. $y' = y + x^2$.

Скласти диференціальні рівняння траєкторій, що перетинають задані сім'ї кривих під кутом φ:

A5. $y = Cx^4$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
A6. $y = kx$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
A7. $y^2 = x + C$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
A8. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

З допомогою методу ізоклін наближено побудувати інтегральні криві диференціальних рівнянь:

C1. $yy' = 2x$.
C2. $y' = y^2 - 2x^2$.
C3. $y' = e^y + x$.
C4. $y' = y - 2x$.
C5. $y'(x + y) = y - x$.
C7. $y' = (y - 1)^2$.
C8. $y' = 2y^2 + 3x^2 + 4$.
C9. $y' = (y - 1)x$.
C10. $y' = \cos(x - y)$.
C11. $yy' = x - 1$.
C12. $y' = y^2 + 5$.
C13. $3xy' = y$.
C14. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
C15. $e^{2y'} = x + y^2$.

Скласти диференціальні рівняння траєкторій, що перетинають задані сім'ї кривих під кутом φ:

C16. $x^2 + y^2 = C$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
C17. $(x - a)^2 + y^2 = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
C18. $x^2 + y^2 = 2ax$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
C19. $(x^2 + y^2)^2 = axy$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
C20. $3x^2 + y^2 = C$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
C21. $y = x \ln x + Cx$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.
C22. $y = Cx + x^3$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
C23. $y \ln(Cx) + x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
C24. $x^2 + C^2 = 2Cy$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
C25. $x^2 = y + C$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
C26. $y = Cx^2 + 1$, $\varphi = \operatorname{arctg} 5$.
C27. $e^{Cy} = x^2 + y^2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

C28. $y = Cx + C^2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
C29. $x - y = x^2 + a^2$, $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.
C30. $xy = C$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Відповіді

A5. $(\sqrt{3}x - 4y)y' = 4\sqrt{3}y + x$. **A6.** $yy' + x = 0$. **A7.** $(2y-1)y' = 2y+1$. **A8.** $(4-y^2-2x)y' = xy$. **C16.** $(x+y)y' + x - y = 0$. **C17.** ${y'}^2(y^2-4) = y^2$. **C18.** $(\sqrt{3}y^2-\sqrt{3}x^2-2xy)y' = x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2$. **C19.** $(4xy^2 - x^3 - y^2 - y^3 + 3x^2y)y' = 4xy^2 - x^3 - y^2 + y^3 - 3x^2y$. **C20.** $3xy' = y$. **C21.** $(2x+3y)y' + 4x + y = 0$. **C22.** $(2x^3 + y - \sqrt{3}x)y' + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}x^3 + x = 0$. **C23.** $(xy + y^2)y' + x^2 = 0$. **C24.** $(x - y){y'}^2 + x + y = 0$. **C25.** $(2\sqrt{3}x - 1)y' + 2x + \sqrt{3} = 0$. **C26.** $(x - 10y + 10)y' = 2y + 5x - 2$. **C27.** $2xyy' - 2y^2 + (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2) = 0$. **C28.** $(y-x-1){y'}^2 + (2y+2)y' + y + x - 1 = 0$. **C29.** $(4x-1)y' + 2x = 3$. **C30.** $(y + \sqrt{3}x)y' + \sqrt{3}y - x = 0$.

Тема 10. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку

Короткі теоретичні відомості

10.1. Умови існування розв'язку задачі Коші. Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{10.1}$$

Теорема 1 (Пеано). *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області (прямокутнику)*

$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\},\ a > 0,\ b > 0,$$

причому $M = \max\limits_{(x,y)\in Q} |f(x, y)|$. Тоді на відрізку $|x - x_0| \leqslant h$, де $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, *існує розв'язок задачі Коші* (10.1).

Теорема Пеано не гарантує єдиності розв'язку задачі Коші (10.1).

10.2. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Функція $f(x, y)$ задовольняє *умову Ліпшиця* за змінною y (рівномірно за змінною x) в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^2$, якщо існує таке число L (стала Ліпшиця), що для довільних точок $(x, y_1) \in Q$ і $(x, y_2) \in Q$ виконується нерівність

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant L|y_2 - y_1|.$$

Якщо функції $f(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ неперервні в області Q, то $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною y на кожному компакті $K \subset Q$.

Теорема 2 (Пікара). *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області Q і задовольняє в цій області умову Ліпшиця за змінною y. Тоді принаймні на відрізку $|x - x_0| \leqslant h$ існує єдиний розв'язок задачі Коші* (10.1).

Розв'язок задачі Коші (10.1) за виконання умов теореми Пікара можна знайти як границю при $n \to +\infty$ рівномірно збіжної послідовності функцій $\{y_n(x)\}$, які визначаються формулами

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt, \; n = 1, 2, \ldots \quad (10.2)$$

Оцінка похибки, яку отримуємо після заміни точного розв'язку $y(x)$ його n-наближенням $y_n(x)$ виражається нерівністю

$$|y(x) - y_n| \leqslant \frac{ML^{n-1}}{n!} h^n. \quad (10.3)$$

3. Продовження розв'язку задачі Коші. У багатьох випадках розв'язок задачі Коші (10.1) існує на більшому відрізку, ніж відрізок $|x - x_0| \leqslant h$, вказаний у теоремах 1 і 2.

Якщо функція $f(x, y)$ задовольняє умови теореми Пеано в замкненій обмеженій області, то розв'язок задачі Коші (10.1) можна продовжити до виходу на межу цієї області.

Якщо функція $f(x, y)$ у смузі $\alpha < x < \beta$, $|y| < +\infty$ (числа α і β можуть бути й невласними) неперервна і задовольняє нерівність $|f(x, y)| \leqslant p(x)|y| + q(x)$, де функції $p(x)$, $q(x)$ неперервні, то кожний розв'язок задачі Коші (10.1) можна продовжити на весь інтервал $\alpha < x < \beta$.

4. Коректність задачі Коші. Окрім питань, пов'язаних з існуванням та єдиністю розв'язку задачі Коші (10.1), важливо знати, як змінюється цей розв'язок на скінченному проміжку за малих змін (збурень) початкових значень, параметрів і самої функції $f(x, y)$. Вимоги існування та єдиності розв'язку, його неперервної залежності від початкових умов, параметрів і функції $f(x, y)$ на скінченному проміжку становлять зміст поняття *коректності задачі Коші.*

Теорема 3 (про неперервну залежність від параметра). *Якщо права частина рівняння $y' = f(x, y, \mu)$ неперервна за змінною μ при $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ і для кожного фіксованого μ задовольняє умови теореми 2 з тими самими сталими a, b,*

L, M, то розв'язок $y = y(x, \mu)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від параметра μ.

Теорема 4 (про неперервну залежність від початкових умов). *Якщо справджуються умови теореми 2, то розв'язок $y = y(x, x_0, y_0)$ задачі Коші (10.1) неперервно залежать від початкових умов.*

Теорема 5 (про диференційовність розв'язків). *Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні похідні до k-го порядку включно, то розв'язок $y(x)$ задачі Коші (10.1) в деякому околі точки (x_0, y_0) має неперервні похідні до $(k{+}1)$-го порядку включно.*

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 10.1. Чи виконується умова Ліпшиця за змінною y у півкрузі $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$ для функцій:

а) $f(x, y) = y^3 + x^2 \cos x^2$; б) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

Розв'язання. а) Для будь-яких двох точок (x, y_1), (x, y_2) заданого півкруга маємо:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left|y_2^3 - y_1^3\right| = |y_2 - y_1| \cdot \left|y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right| \leqslant$$
$$\leqslant |y_2 - y_1| \cdot \left|y_2^2 + \tfrac{1}{2}(y_2^2 + y_1^2) + y_1^2\right| = \tfrac{3}{2}\,|y_2 - y_1| \cdot \left(y_2^2 + y_1^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant 3R^2\,|y_2 - y_1|\,.$$

Отже, умова Ліпшиця виконується зі сталою $L = 3R^2$.

б) Міркуємо від супротивного. Припустимо, що для заданої функції виконується умова Ліпшиця з деякою сталою $L > 0$. Тоді для точок (0, 1) і (0, y), де y — достатньо мале число, маємо

$$|f(0, y) - f(0, 1)| = |\sqrt{y} - 1| \leqslant L\,|y - 1|\,.$$

Звідси $L \geqslant \frac{1}{\sqrt{y}+1}$, що є неможливим для досить малих значень y. З отриманого протиріччя випливає, що умова Ліпшиця не виконується. ■

Приклад 10.2. Вказати будь-який відрізок, на якому існує розв'язок задачі Коші $y' = y^3 + x^2 \cos x^2$, $y(0) = 0$ у квадраті $Q = \{|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$.

Розв'язання. У квадраті Q функція $f(x, y) = y^3 + x^2 \cos x^2$ неперервна ($M = \max\limits_{(x,y)\in Q} |f(x, y)| = 2$) і задовольняє умову Ліпшиця (див. приклад 10.1 а). Отже, згідно з теоремою Пікара існує єдиний розв'язок заданої задачі Коші принаймні на відрізку $|x| \leqslant h$, де $h = \min\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$. ■

Приклад 10.3. Знайти методом послідовних наближень розв'язок задачі Коші $y' + y = x + 1$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. Згідно з (10.2) маємо $y_0(x) \equiv 0$,

$$y_1(x) = \int_0^x \big(t + 1 - 0\big) dt = x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t + 1 - \left(t + \tfrac{t^2}{2}\right)\right) dt = x - \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(t + 1 - \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right)\right) dt = x + \frac{x^4}{24}.$$

З допомогою методу математичної індукції можна показати, що

$$y_n(x) = x + \frac{(-1)^n}{n!} x^n,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Звідси випливає, що для $|x| \leqslant a$ послідовність наближень $\{y_n(x)\}$ при $n \to \infty$ рівномірно прямує до x. Отже, функція $y = x$ є розв'язком заданої задачі Коші. ■

Приклад 10.4. Знайти три послідовні наближення розв'язку задачі Коші $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$. Оцінити похибку останнього наближення.

Розв'язання. За початкове наближення візьмемо $y_0(x) \equiv 0$.

Наступні наближення знаходимо за формулами (10.2):

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + 0)dt = \tfrac{x^3}{3},$$
$$y_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + \tfrac{t^6}{9}\right) dt = \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^7}{63},$$
$$y_3(x) = \int_0^x \left(t^2 + \tfrac{t^6}{9} + \tfrac{2t^{10}}{189} + \tfrac{t^{14}}{3969}\right) dt =$$
$$= \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^7}{63} + \tfrac{2x^{11}}{2079} + \tfrac{x^{15}}{59535}.$$

Оцінимо похибку останнього наближення за формулою (10.3). Оскільки функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в усій площині, то за параметри a, b можна взяти довільні числа.

Нехай, наприклад, $a = 1$, $b = 0{,}5$. Тоді в прямокутнику $Q = \{|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 0{,}5\}$ знаходимо

$$M = \max_{(x,y)\in Q} |f(x,y)| = \max_{(x,y)\in Q} |x^2 + y^2| = 1{,}25,$$
$$L = \max_{(x,y)\in Q} |f'_y(x,y)| = \max_{0\leqslant y\leqslant 0{,}5} |2y| = 1.$$

Тепер вибираємо $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{1, \frac{0{,}5}{1{,}25}\right\} = 0{,}4$. Таким чином, на відрізку $[0;\ 0{,}4]$ одержуємо

$$|y(x) - y_3(x)| \leqslant 1{,}25 \cdot 1^3 \cdot \frac{x^4}{4!} = \frac{5}{96}x^4,$$

і

$$\max_{x\in[0;0{,}4]} |y(x) - y_3(x)| \leqslant \frac{5\cdot(0{,}4)^4}{96} \approx 0{,}00133.$$

Отже, теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень на відрізку $x \in [0; 0{,}4]$. Абсолютна похибка третього наближення не перевищує 0,002. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Чи виконується умова Ліпшиця для функцій f у заданих областях?

A1. $f(y) = y^2, \ \ |y| \leqslant \alpha, \ \alpha > 0.$

A2. $f(y) = \sqrt{|y|}, \ \ |y| \leqslant \alpha, \ \alpha > 0.$

A3. $f(x, y) = x^2 + y^2, \ \ x^2 + y^2 \leqslant R^2, \ R > 0.$

A4. Довести, що з виконання умови Ліпшиця для функції $f(y)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ випливає неперервність $f(y)$ на цьому відрізку.

A5. Показати, що функція $f(x, y) = p(x)y + q(x)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною y у смузі $|y| \leqslant \beta, \ \beta > 0$. Знайти найменшу сталу Ліпшиця.

A6. Показати, що функція $f(x, y) = (1+p^2(x))y^2$, де $p(x)$ — неперервна функція у смузі $|x| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$, не задовольняє умову Ліпшиця за змінною y у цій смузі.

A7. Показати, що функція $f(x, y) = P(x) + Q(\sin x, \cos x)$, де $P(x)$ і $Q(u, v)$ — многочлени, задовольняє умову Ліпшиця за змінною y в усій площині.

Знайти методом послідовних наближень розв'язки задач Коші для лінійних рівнянь:

A8. $y' + y = x + 1, \ \ y(0) = 1.$

A9. $y' + y = 2e^x, \ \ y(0) = 1.$

Знайти методом послідовних наближень наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ до розв'язків задач Коші для нелінійних рівнянь:

A10. $y' = y^2 - x, \ y(0) = 1.$

A11. $y' = y^2 + x^3, \ y(0) = 0.$

A12. $y' = y^2 + e^x, \ y(0) = 0.$

A13. Оцінити похибку, отриману після заміни розв'язку $y(x)$ задачі Коші $y' = y^2 + 2x$, $y(0) = 0$, $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, послідовним наближенням $y_3(x)$.

Користуючись теоремою Пікара, вказати області, через кожну точку яких проходить єдина інтегральна крива:

A14. $y' = y^2 + x^4.$

A15. $y' = y^3 + \sqrt{y + x}.$

A16. $xy' = e^x + \operatorname{ctg} y.$

А17. $y' = (y+1)\sqrt[3]{(y-1)^2}$.

А18. Знайти значення дійсних параметрів α, β і лінії на площині, в кожній точці якої порушується єдність розв'язку рівняння $y' = y^\alpha(1-y)^\beta$.

А19. Чи можуть дві інтегральні криві рівняння $y' = x^2+y^4$ в деякій точці (x_0, y_0):

а) дотикатися одна до одної;

б) перетинатися?

А20. Для яких значень параметра α кожний розв'язок рівняння $y' = |y|^\alpha$ можна продовжити на інтервал $x \in (-\infty; +\infty)$?

А21. Скільки похідних має розв'язок рівняння $y' = x+y^{\frac{7}{3}}$ в околі початку координат?

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Чи виконується умова Ліпшиця для функцій f у заданих областях?

С1. $f(y) = |y|,\ \ |y| \leqslant \alpha,\ \alpha > 0$.

С2. $f(x,y) = x|y|,\ \ x^2+y^2 \leqslant R^2,\ R > 0$.

С3. $f(x,y) = x\sqrt{|y|},\ \ x^2+y^2 \leqslant R^2,\ R > 0$.

С4. Показати, що недиференційовні за змінною y при $y = 0$ функції $f_1(x,y) = |y|(1+\sin x)$ і $f_2(x,y) = |y|(1+\cos x)$ задовольняють умову Ліпшиця за y на всій числовій площині.

С5. Показати, що функція $f(x,y) = y^2\sin x + e^x$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною y смузі $|x| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$, якщо у цій смузі функції $p(x)$ і $q(x)$ неперервні.

С6. Довести, що функція $f(x,y) = xy$ не задовольняє умову Ліпшиця за змінною y в усій площині.

Знайти методом послідовних наближень розв'язки задач Коші для лінійних рівнянь:

С7. $y' - y = 1 - x,\ y(0) = 1$.

С8. $y' - y = e^{2x},\ y(0) = 1$.

C9. $y' - y = x,\ y(0) = 1.$

Знайти методом послідовних наближень наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ до розв'язків задач Коші для нелінійних рівнянь:

C10. $y' = 2y^2 + x, \quad y(0) = 1.$

C11. $y' = x^2 - 2y^2, \quad y(0) = 0.$

C12. $y' = y + e^{y-1}, \quad y(0) = 1.$

C13. Для розв'язку задачі Коші $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$, побудувати третє наближення до розв'язку і оцінити його похибку.

Користуючись теоремою Пікара, вказати області, через кожну точку яких проходить єдина інтегральна крива:

C14. $y' = x + \sqrt[3]{y - x}.$

C15. $(x + y)y' = x \ln y.$

C16. $y' = y + \sqrt{y - x^2}.$

C17. $(x - 2)y' = \sqrt{y} - x.$

C18. $y' = 1 + \operatorname{tg} y.$

Знайти значення дійсних параметрів α, β і ліній на площині, в кожній точці яких порушується єдність розв'язку рівнянь:

C19. $y' = y^\alpha \ln^\beta \frac{1}{y}.$

C20. $y' \ln y = y^\alpha (1 - y)^\beta.$

C21. Для яких значень параметра α кожний розв'язок рівняння $y' = (y^2 + e^x)^\alpha$ можна продовжити на інтервал $x \in (-\infty; +\infty)$?

C22. Скільки неперервних похідних має розв'язок рівняння $y' = x|x| - y^2$ в околі початку координат?

Відповіді

A1. Так. **A2.** Ні. **A3.** Так. **A5.** $L = 2\beta$. **A8.** $y = x + e^{-x}$. **A9.** $y = e^x$. **A10.** $y_0(x) \equiv 1, y_1(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}, y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - - \frac{x^5}{20}$. **A11.** $y_0(x) \equiv 0, y_1(x) = \frac{x^4}{4}, y_2(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^9}{114}$. **A12.** $y_0(x) \equiv 0,$

$y_1(x) = e^x - 1$, $y_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + \frac{1}{2}$. **A13.** $|y(x) - y_3(x)| \leqslant \leqslant \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{3}\right)^4 e^{\frac{2}{3}}$. **A14.** Вся площина (x, y). **A15.** $y > -x$. **A16.** $x \neq 0$, $y \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **A17.** $y \neq 1$. **A18.** $\alpha < 1$, $y = 0$ і $\beta < 1$, $y = 1$. **A19.** а) Так. б) Ні. **A20.** $\alpha \in (0; 1]$. **A21.** Три. **C1.** Так. **C2.** Так. **C3.** Ні. **C7.** $y = x + e^x$. **C8.** $y = e^{2x}$. **C9.** $y = 2e^x - x - 1$. **C10.** $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2}$, $y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + x^4 + \frac{x^5}{10}$. **C11.** $y_0(x) \equiv 0$, $y_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^7}{63}$. **C12.** $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x) = = 1 + 2x$, $y_2(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$. **C13.** $y_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}$, $|y(x) - y_3(x)| \leqslant 6 \cdot 10^{-6}$. **C14.** $y \neq x$. **C15.** $x \neq y$, $y > 0$. **C16.** $y > x^2$. **C17.** $x \neq 2$, $y > 0$. **C18.** $y \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **C19.** $\alpha < 1$, $y = 0$ і $\beta < 1$, $y = 1$. **C20.** $\alpha < 1$, $y = 0$ і $\beta < 2$, $y = 1$. **C21.** $\alpha \leqslant 0{,}5$. **C22.** Дві.

Тема 11. Диференціальні моделі

Короткі теоретичні відомості

11.1. Задачі природничих та соціальних наук. Під час вивчення багатьох явищ природи, розв'язування конкретних задач фізики, хімії, біології та інших наук не завжди вдається безпосередньо знайти закони або формули, які описують той чи інший процес, але часто можна виявити певну функціональну залежність між невідомими характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять похідні невідомих характеристик процесу.

При цьому рекомендуємо дотримуватись такої послідовності дій:

1) встановити величини, які змінюються у заданому явищі чи процесі, і виявити закони (формули) відповідної науки, які ці величини пов'язують;

2) вибрати незалежну змінну і функцію цієї змінної, яку потрібно знайти;

3) виходячи з умов задачі, визначити початкові або інші умови, які накладаються на шукану функцію;

4) виразити усі величини з умови задачі через незалежну змінну, шукану функцію та її похідні;

5) виходячи з умови задачі та закону, який описує задане явище, скласти диференціальне рівняння;

6) зінтегрувати одержане диференціальне рівняння;

7) якщо задані початкові чи інші умови, знайти частинний розв'язок;

8) провести дослідження одержаного розв'язку.

11.2. Геометричні задачі. Про розв'язування геометричних задач див. на стор. 15.

У деяких випадках розв'язування задач приводить до рівнянь, які містять шукану функцію під знаком інтеграла, тобто *інтегральних рівнянь.* Інтегральні рівняння виникають, зокрема, коли використовується геометричний зміст визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції та інші інтегральні формули (довжини дуги, площі поверхні, об'єму тіла тощо). У простіших випадках після диференціювання інтегральні рівняння вдається звести до диференціальних.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 11.1. У дні вертикальної циліндричної посудини висоти H і радіуса основи R, заповненої водою, утворився невеликий отвір площі S (рис. 11.1). Через який час через отвір витече вся вода, якщо третина води витікає через t_1 с.

Розв'язання. Якщо б витікання води відбувалось рівномірно, то вся вода витекла б з посудини за $3t_1$ с. Однак досліди показують, що зі зменшенням рівня води у посудині швидкість витікання води зменшується. Тому потрібно врахувати залежність між швидкістю витікання v і висотою h стовпа води над отвором. Згідно із законом Торрічеллі

$$v = k\sqrt{2gh},$$

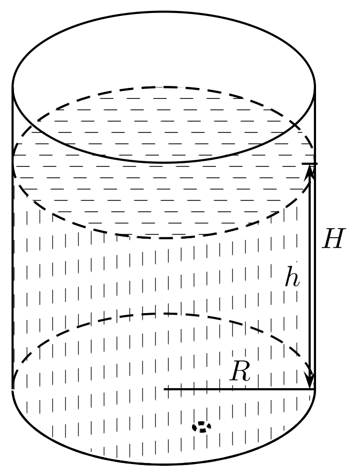

Рис. 11.1

де g – прискорення вільного падіння, k – коефіцієнт, який залежить від в'язкості рідини та форми отвору (для води у випадку круглого отвору $k = 0{,}6$).

Розглянемо досліджуваний процес на відрізку $[t; t + \Delta t]$. Нехай у момент часу t висота води на отвором складала h, а через Δt с вона зменшилась і стала $h + \Delta h$, де Δh – приріст висоти (очевидно, $\Delta h < 0$). Тоді об'єм води, який витік з посудини, дорівнює об'єму відповідного циліндра, тобто

$$\Delta V = -\pi R^2 \Delta h.$$

Припустимо, що вода з посудини виливається у вигляді циліндричного струменя, площа основи якого S, а висота дорівнює шляху, який пройшла вода за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$. На початку і наприкінці цього відрізку швидкість витікання води згідно із законом Торрічеллі дорівнювала $k\sqrt{2gh}$ і $k\sqrt{2g(h+\Delta h)}$ відповідно. Якщо Δt досить мале, то $\Delta h(t)$ також мале і отримані вирази для швидкості майже однакові. Тому шлях, пройдений водою за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, виражається формулою $\big(k\sqrt{2gh}+\alpha(\Delta t)\big)\Delta t$, де $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t) = 0$. Отже, об'єм рідини, яка виллється за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, можна знайти за формулою

$$\Delta V = \Big(k\sqrt{2gh}+\alpha(\Delta t)\Big)S\Delta t.$$

Прирівнюючи два вирази для об'єму рідини, яка вилилась з посудини за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, одержуємо рівняння

$$-\pi R^2\Delta h = \Big(k\sqrt{2gh}+\alpha(\Delta t)\Big)S\Delta t. \tag{11.1}$$

Поділимо обидві частини (11.1) на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t) = 0$, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h(t)}{\Delta t} = h'(t)$, то одержуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$-\pi R^2 h'(t) = k\sqrt{2gh}\,S. \tag{11.2}$$

Отримати рівняння (11.2) можна й інакше. Досліджуючи процес протягом нескінченно малого проміжку часу dt, припустимо, що за цей проміжок швидкість витікання води є незмінною. Тому замість наближеного рівняння (11.1) відразу одержуємо рівняння

$$-\pi R^2 dh = k\sqrt{2gh}\,Sdt, \tag{11.3}$$

яке, очевидно, є просто іншою формою запису рівняння (11.2).

Рівняння (11.3) – рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$dt = \frac{-\pi R^2}{\sqrt{2g}kS}\frac{dh}{\sqrt{h}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g}kS}\sqrt{h} + C \quad \Rightarrow$$
$$t = C - A\sqrt{h}, \tag{11.4}$$

де стала $A = \frac{\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g}kS}$ залежить від розмірів і форми отвору, в'язкості рідини та деяких інших фізичних параметрів, а стала C є довільною (це стала інтегрування). Знайдемо ці сталі.

За умовою задачі $h(0) = H$ (на початку відліку висота стовпа води дорівнювала H). Підставляючи у (11.4) $t = 0$ і $h = H$, знаходимо сталу $C = A\sqrt{H}$.

Сталу A знайдемо з умови задачі $h(t_1) = \frac{2}{3}H$. Звідси

$$t_1 = A\sqrt{H} - A\sqrt{\frac{2H}{3}} \quad \Rightarrow \quad A = (3 + \sqrt{6})\frac{t_1}{\sqrt{H}}.$$

Підставляючи знайдені значення сталих A і C у формулу (11.4), одержуємо закон зміни часу витікання від висоти стовпа води:

$$t = (3 + \sqrt{6})\frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{H}}t_1. \tag{11.5}$$

З (11.5) легко знаходимо час T повного витікання рідини з посудини:

$$h(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = (3 + \sqrt{6})\, t_1.$$

Зауважимо, що знайдене значення T приблизно у 1,82 рази більше значення $3t_1$, яке одержали у припущенні, що рідина з посудини витікає рівномірно. ■

Приклад 11.2. У лекційній аудиторії кубатурою 200 м^3 повітря після лекції містить 0,1% вуглекислоти. Вентилятор подає свіже повітря, що містить 0,04% вуглекислого газу, в кількості a м^3/хв. Припустивши, що змішування чистого повітря з забрудненим відбувається миттєво, обчислити, якою має бути потужність вентилятора, щоб через 10 хв. перерви вміст вуглекислого газу в аудиторії не перевищував 0,06%.

Розв'язання. Позначимо вміст вуглекислого газу (в %) у повітрі в момент часу t через $y(t)$. Розглянемо деякий проміжок часу Δt і знайдемо зміну концентрації вуглекислого газу в аудиторії за цей проміжок, вважаючи, що процес рівномірний. За цей час вентилятор подає $0{,}0004a\Delta t$ м^3 вуглекислого газу, а виходить його з приміщення назовні через шпарини $0{,}01y(t+\alpha)a\Delta t$ м^3. Отже, за Δt хв. кількість вуглекислоти в повітрі змінюється на $0{,}0004a\Delta t - 0{,}01y(t+\alpha)a\Delta t$ м^3. З іншого боку, $(y(t+\Delta t)-y(t))0{,}01\cdot 200$ – це приріст вуглекислоти в приміщенні. Отже,

$$(y(t+\Delta t)-y(t))0{,}01\cdot 200 = (0{,}0004 - 0{,}01y(t+\alpha))a\Delta t \quad \Rightarrow$$
$$200dy = (0{,}04 - y)a\,dt.$$

Таким чином, одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$200\frac{dy}{0{,}04-y} = a\,dt \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}04 + Ce^{-\frac{at}{200}}.$$

Оскільки $y(0)=0{,}1$, то $C=0{,}06$ і

$$y = 0{,}04 + 0{,}06e^{-\frac{at}{200}}.$$

Оскільки $y(10)=0{,}06$, то

$$0{,}06 = 0{,}04 + 0{,}06e^{-\frac{10a}{200}} \quad \Rightarrow \quad a = 20\ln 3 \approx 22 \text{ м}^3/\text{хв.} \ \blacksquare$$

Приклад 11.3. Знайти закон зміни загальної кількості живих організмів у колонії, яка розвивається в умовах конкурентної боротьби, недостатньої кількості місця і їжі, передачі інфекцій.

Розв'язання. Нехай $x(t)$ – чисельність організмів у колонії в момент часу t, Δx – приріст чисельності за час Δt. Будемо вважати, що $x(t)$ може набувати не лише цілих значень, а є неперервно диференційовною функцією змінної t. Приріст чисельності організмів залежить від їх розмноження і смертності. Розмноження організмів є пропорційним їх чисельності з коефіцієнтом пропорційності k_1. Оскільки конкуренція і передача інфекцій посилюється з ростом кількості зустрічей між членами колонії, яка пропорційна добутку $x \cdot x$, то природно вважати, що смертність також є пропорційною x^2 з деяким коефіцієнтом пропорційності k_2. Отже,

$$\Delta x = (k_1 x - k_2 x^2)\Delta t.$$

Поділимо обидві частини на Δt і перейдемо до границі, коли $\Delta t \to 0$. Отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 x^2,$$

звідки

$$\frac{dx}{x(k_1 - k_2 x)} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_1}\left(\int \frac{dx}{x} + \int \frac{k_2 dx}{k_1 - k_2 x}\right) = \int dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x| - \ln\left|x - \frac{k_1}{k_2}\right| = k_1 t + \ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x - \frac{k_1}{k2}} = Ce^{k_1 t} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{k_1}{k_2}\frac{Ce^{k_1 t}}{Ce^{k_1 t} - 1}.$$

Частинний розв'язок $x = 0$ відповідає відсутності організмів у колонії, а особливий розв'язок $x = k_1/k_2$ – їх максимально можливій кількості.

Якщо $x(0) = x_0$ – початкова кількість організмів, то

$$x_0 = \frac{k_1}{k_2}\frac{C}{C-1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{k_2 x_0}{k_2 x_0 - k_1}.$$

Тоді

$$x = \frac{k_1 x_0 e^{k_1 t}}{k_2 x_0 e^{k_1 t} - k_2 x_0 + k_1}. \blacksquare$$

Приклад 11.4. Знайти криву, для якої точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

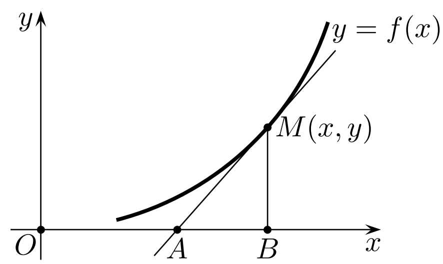

Рис. 11.2

Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка кривої $y = f(x)$. Проведемо у цій точці дотичну MA (рис. 11.2). За умовою $OA = AM$, позначимо AM через t. Знайдемо величину t з прямокутного трикутника ABM, скориставшись теоремою Піфагора і тим, що $OB = x$, $MB = y$. Тоді

$$(x - t)^2 + y^2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

Враховуючи, що $y' = \operatorname{tg} \angle MAB = \frac{MB}{AB}$ (геометричний зміст похідної), отримуємо однорідне диференціальне рівняння

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Інтегруємо його з допомогою заміни $y = zx$:

$$z'x + z = \frac{2z}{1-z^2} \quad \Rightarrow \quad z'x = \frac{z^3+z}{1-z^2} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{(1-z^2)dz}{z^3+z} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z} - \int \frac{2zdz}{z^2+1} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|z| - \ln|z^2+1| = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{(z^2+1)x} = C \quad \Rightarrow$$

$$y = C(x^2+y^2).$$

Розв'язок $y = 0$ є частинним.
Відповідь: $y = C(x^2+y^2)$.

Приклад 11.5. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(3,3)$ і має таку властивість: якщо через будь-яку точку кривої провести дві прямі, паралельні до координатних осей, до перетину з ними, то отриманий при цьому прямокутник ділиться кривою на дві частини, з яких одна (що примикає до осі абсцис) за площею втричі більша, ніж інша.

Розв'язання. Через будь-яку точку $M(x,y)$ шуканої кривої проводимо дві прямі: MA паралельно до осі ординат і MB паралельно до осі абсцис (рис. 11.3). Згідно з умовою задачі $S_{OCMA} = 3S_{CBM}$. Оскільки

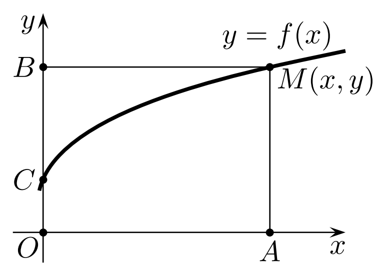

Рис. 11.3

$$S_{OCMA} = \int\limits_0^x y dx,$$

$$S_{CBM} = S_{OBMA} - S_{OCMA} = xy - \int\limits_0^x y dx,$$

отримуємо рівняння

$$\int\limits_0^x y dx = 3\left(xy - \int\limits_0^x y dx\right) \quad \Rightarrow \quad 4\int\limits_0^x y dx = 3xy.$$

Здиференціювавши обидві частини цього інтегрального рівняння, отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними $3xy' = y$, загальний розв'язок якого $y^3 = Cx$. Таким чином, вказану властивість мають кубічні параболи з вершинами у початку координат і осями симетрії, які збігаються з віссю абсцис. Використовуючи початкову умову, знаходимо, що шуканою кривою є лінія $y^3 = 9x$. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

А1. За 30 років розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. За який час залишиться 1% від початкової кількості?

А2. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла та температурою повітря. Температура повітря 20°C, тіло протягом 20 хв охолоджується від 100°C до 60°C. Знайти залежність температури від часу та через який час температура тіла знизиться до 30°C.

А3. На деяку кількість нерозчинної речовини, що містить у своїх порах 2 кг солі, діємо 30 л води. Через 5 хв розчиняється 1 кг солі. Через який час розчиниться 99% початкової кількості солі?

Вказівка. Швидкість розчинення пропорційна кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією розчину у даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3 л). Концентрацією c даної речовини називають її кількість, що міститься в одиниці об'єму.

А4. Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю $v = 10$ км/год. Через 1 хв після того, як вимкнули двигун, швидкість човна зменшилась до 6 км/год. Якою стала швидкість човна через 2 хв? Який шлях пройшов човен за 2 хв після зупинки двигуна? Вважати, що сила опору води рухові човна пропорційна його швидкості.

А5. В культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється протягом години, то в скільки разів вона збільшиться протягом 4 годин?

А6. При русі через ліс вітер зазнає опору дерев і втрачає частину своєї швидкості. На безмежно малій ділянці шляху ця втрата пропорційна швидкості на початку шляху і його довжині. Знайти швидкість вітру, що пройшов по лісу 200 м, знаючи, що перед лісом початкова швидкість вітру була 12 м/с, а після проходження по лісу 10 м вона зменшилась до 10,5 м/с.

А7. Посудина об'ємом в 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину закачується 0,1 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і витікає така сама кількість суміші. Через скільки часу в посудині буде 99% азоту?

А8. У басейн глибиною 3 м, який має у поперечному перерізі форму прямокутника зі сторонами 5 м і 4 м, стікає вода зі швидкістю 600 л/хв, а через квадратний отвір зі стороною 2 см у дні басейну вона з нього витікає. Знайти час наповнення басейну та кількість води, яка з нього за цей час витече. Яким був би час наповнення басейну, якби отвір у дні був би закритим? Прискорення вільного падіння вважати рівним 10 м/с^2.

А9. Населення Землі у березні 2013 року становило $7{,}07 \cdot 10^9$ людей, а річний приріст – 1%. У припущенні, що приріст пропорційний кількості людей, знайти чисельність населення Землі у березні 2020 року.

А10. Знайти криві, для яких площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величина стала і рівна a.

А11. Крива проходить через точку (1,1), а відрізок нормалі у довільній точці, розміщений між осями координат, ділиться точкою дотику у відношенні 2:3, рахуючи від осі абсцис. Знайти цю криву.

А12. Знайти криву, для кожної точки M якої абсциса центра ваги криволінійної трапеції, обмеженої осями координат, дугою цієї кривої і відрізком, що з'єднує точку M з її проекцією на вісь абсцис, дорівнює третині абсциси цієї точки.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

C1. У чан налито 100 л ропи, що містить 10 кг розчинної солі. Зі швидкістю 3 л за хвилину в чан вливається вода, і суміш з такою самою швидкістю витікає з чана. Перемішуючи воду, у чані підтримують рівномірну концентрацію. Скільки солі залишиться у чані через годину?

C2. Рух пароплава уповільнюється силою опору води, пропорційною швидкості пароплава v. Початкова швидкість пароплава $v_0 = 10$ м/с, через 5 с швидкість пароплава падає до $v_1 = 8$ м/с. Через який час швидкість зменшиться до 2 м/с? до 1 м/с?

C3. Посудину, що має форму півкулі радіуса 2 м, наповнено водою. За який час витече вода крізь круглий отвір радіуса 0,1 м, вирізаний у дні посудини?

Вказівка. Згідно із законом Торрічеллі швидкість витікання рідини з посудини дорівнює $v = 0,6\sqrt{2gh}$, де g – прискорення вільного падіння, h – висота рівня рідини над отвором.

C4. Швидкість розпаду радію пропорційна наявній його кількості. З досвіду відомо, що протягом року вага одного грама радію меншає на 0,435 мг. Визначити період піврозпаду (час, протягом якого початкова кількість зменшиться вдвоє).

C5. Кількість світла, що поглинається під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщі шару й кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження крізь шар завтовшки 3 м поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дійде до глибини 30 м?

C6. Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна кількості бактерій в розглядуваний момент часу. Кількість бактерій подвоюється протягом трьох годин. Знайти: а) залежність кількості бактерій від часу; б) в скільки разів збільшиться кількість бактерій протягом 9 годин.

С7. Припустимо, що у вертикальному повітряному стовпі тиск на кожному рівні обумовлений тиском шарів повітря, що лежать вище. Знайти залежність тиску від висоти, якщо відомо, що на рівні моря тиск дорівнює 1 кг на 1 кв. см та 0,92 кг на 1 кв. см на висоті 500 м.

С8. Сповільнююча дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Диск, почавши обертання зі швидкістю 100 обертів за хвилину, після однієї хвилини обертається зі швидкістю 60 обертів за хвилину. Знайти залежність кутової швидкості від часу.

С9. Деяка кількість нерозчинної речовини містить у своїх порах 10 кг солі. Піддаючи її дії 90 л води, довідалися, що протягом години розчинилася половина наявної кількості солі. Скільки солі розчинилося б протягом того самого часу, коли б кількість води подвоїти?

Вказівка. Швидкість розчинення пропорційна кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією розчину у даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3 л). Концентрацією c даної речовини називають її кількість, що міститься в одиниці об'єму.

С10. Деяка речовина перетворюється в іншу речовину зі швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Кількість неперетвореної речовини через годину була 31,4 г, через 3 години – 9,7 г. Знайти залежність між кількістю неперетвореної речовини x та часом t; встановити, скільки було речовини на початку процесу.

С11. Знайти залежність швидкості v від часу t та максимальну швидкість падіння парашутиста, якщо його маса разом з парашутом дорівнює 80 кг, а сила опору повітря при падінні пропорційна квадрату швидкості його руху (вважати, що коефіцієнт пропорційності $k = 300$ г/см).

С12. Ізольованому провіднику надали заряд $Q_0 = 100$ Кл. Внаслідок недосконалості ізоляції провідник поступово втрачає свій заряд. Швидкість втрати заряду у даний момент пропорційна наявному заряду. Який заряд залишиться на провіднику через 10 хв, якщо за першу хвилину втрачено 10 Кл.

С13. У шматку гірської породи міститься 124 мг урану і 10 мг уранового свинцю. Визначити вік гірської породи, якщо відомо, що уран розпадається наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ років і при повному розпаді 238 г урану утворюється 206 г уранового свинцю. Вважати, що в момент утворення гірська порода не містила свинцю, і знехтувати наявністю проміжних радіоактивних продуктів між ураном і свинцем у зв'язку з їх значно швидшим розпадом, ніж урану.

С14. У посудину, яка містить 1 кг води при температурі 20°С, опустили алюмінієвий предмет з масою 0,5 кг, питомою теплоємністю 840 Дж/(кг·°С) і температурою 75°С. Через хвилину вода нагрілась на 2°С. Коли температура води і предмета будуть відрізнятись на 1°С? Втратами тепла на нагрівання посудини та іншими знехтувати. Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·°С).

С15. Матеріальна точка масою $m = 2$ повільно занурюється у рідину без початкової швидкості. Виведіть закон руху від поверхні рідини, якщо опір рідини пропорційний до швидкості (коефіцієнт пропорційності $k = 2$). Прискорення вільного падіння вважати рівним 10 м/с^2.

С16. Футбольний м'яч масою 0,04 кг кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,00048 Н при швидкості 1 м/с. Знайти час підняття м'яча і найбільшу висоту піднімання. Як зміняться ці результати, якщо знехтувати опором повітря?

Вказівка. За невідому функцію в цій задачі зручніше взяти швидкість.

С17. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. В початковий момент руху точка перебувала на відстані 4 м від початку відліку шляху й мала швидкість 15 м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 16 с після початку руху.

C18. Під впливом постійного випромінювання у газовому середовищі відбувається процес іонізації, при якому за 1 с утворюється q позитивних і q негативних іонів у даному об'ємі газу. Оскільки позитивні і негативні іони знову об'єднуються між собою, їх кількість зменшується. З загальної кількості y позитивних іонів кожну секунду об'єднується частина, пропорційна квадрату їх кількості. Коефіцієнт пропорційності k залежить від природи і складу газу. Знайти залежність кількості іонів y від часу t. У початковий момент іонів не було.

C19. Циліндричний резервуар висотою 6 м і діаметром основи 2 м заповнений водою. За який час з нього витече вода через щілину площею 1 см^2 у дні резервуара? Вісь циліндра вертикальна.

C20. У корівнику, об'єм якого 1500 м^3, працюють два вентилятори, кожний з яких за 1 хв подає 60 м^3 чистого повітря, що містить 0,03% вуглекислоти. Вважаючи, що у приміщенні знаходиться 120 корів, кожна з яких видихає за хвилину 0,1 м^3 повітря з 5%-м вмістом вуглекислоти, визначити наявність вуглекислоти у повітрі після трьох годин їхнього перебування у корівнику, якщо початковий вміст вуглекислоти в ньому становив 0,1%.

C21. Знайти закон зростання інформаційних потоків у науці (зростання кількості наукових публікацій), якщо відомо, що швидкість зростання прямо пропорційна досягнутому рівню кількості публікацій. Визначити, за який час кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю, якщо відносна швидкість зростання складає 3%.

C22. Знайти криві, в яких площа трапеції, яка обмежена осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є величина стала і дорівнює $3a^2$.

C23. Визначити криву, знаючи, що трикутник, утворений нормаллю в довільній її точці з осями координат, є рівновеликим трикутнику, утвореному віссю Ox, дотичною та нормаллю.

С24. Знайти криву, у якої відстань від довільної дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

С25. Знайти криві, які проходять через початок координат і ділять прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них з будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

С26. Площа фігури, обмеженої кривою, віссю Ox та довільною ординатою, дорівнює кубові цієї ординати. Знайти ту з інтегральних кривих, яка проходить через початок координат.

С27. Визначте криву, кожна дотична до якої утворює з осями координат трикутник площі a^2.

С28. Знайти криву, кожна дотична до якої відсікає на осях координат такі відрізки, що сума величин, обернених квадратам довжин цих відрізків, дорівнює 1.

С29. Знайти криві, для яких піддотична є середнє арифметичне координат точки дотику.

С30. Визначити форму дзеркала, яке спрямований на нього потік паралельних променів збирає в одну точку.

С31. Знайти криві, які мають таку властивість: відрізок осі абсцис, який відтинають дотична і нормаль, проведені з довільної точки кривої, дорівнює $2a$.

С32. Знайти криві, які проходять через початок координат так, що відрізок нормалі до кривої, який відтинають сторони першого координатного кута, має сталу довжину, яка дорівнює 2.

С33. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

С34. Визначити криві, у яких піднормаль дорівнює різниці між радіусом-вектором та абсцисою точки дотику.

C35. Знайти криві, у яких довжина відрізку, який відтинає дотична на осі Oy, дорівнює квадрату ординати точки дотику.

C36. Знайти криву, в кожній точці якої довжина піднормалі є середнім арифметичним квадратів координат цієї точки.

Відповіді

A1. 200 років. **A2.** $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$; 60 хв. **A3.** 37 хв. **A4.** 3,6 км/год; 330 м. **A5.** 16. **A6.** 0,83 м/с. **A7.** 10 хв. **A8.** 2 год 28 хв; 29 м^3; 1 год 40 хв. **A9.** $7{,}58 \cdot 10^9$. **A10.** $xy = a + Cy^2$. **A11.** $3y^2 - 2x^2 = 1$. **A12.** $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$. **C1.** 1,65 кг. **C2.** 36 с; 52 с. **C3.** 200 с. **C4.** 1593 роки. **C5.** $\frac{1}{1024} \approx 0,001$. **C6.** $y = y_0 2^{\frac{t}{3}}$; 8. **C7.** $P = 0,92^{\frac{x}{500}}$. **C8.** $\omega = 100\left(\frac{3}{5}\right)^t$. **C9.** 5,17 кг. **C10.** $x = 31,4\left(\frac{9{,}7}{31{,}4}\right)^{\frac{t-1}{2}}$; 56,5 г. **C11.** $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{1-e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1+e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}$, де $m = 80$ кг, $g = 9,8$ м/с^2, $k = 30$ кг/м; $v_{\max} \approx 5,1$ м/с. **C12.** 35 Кл. **C13.** $578 \cdot 10^6$ років. **C14.** 7,8 хв. **C15.** $s = 10t + 10e^{-t} - 10$. **C16.** 17,8 с; 16,6 м; 2 с; 20 м. **C17.** 44 м; 15/11 м/с. **C18.** $y = \sqrt{\frac{q}{k}}\operatorname{th}(\sqrt{kq}t)$. **C19.** 16 год 6 хв. **C20.** 0,5%. **C21.** 23,1 років. **C22.** $y = \pm\frac{2a^2}{x} + Cx^2$. **C23.** $x^2 + y^2 = Cx$. **C24.** $(x \pm C)^2 + y^2 = C^2$. **C25.** $y = Cx^2$. **C26.** $2x = 3y^2$. **C27.** $y = Cx \pm a\sqrt{\pm 2C}$, $y = \pm\frac{a^2}{2x}$. **C28.** $y = Cx \pm \sqrt{C^2+1}$, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. **C29.** $y = C(y-x)^2$, $y = x$, $y(y+3x)^2 = C$. **C30.** $y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$. **C31.** $\sqrt{a^2-y^2} - a\ln(a+\sqrt{a^2-y^2}) = -x + C$, $\sqrt{a^2-y^2} + a\ln(a-\sqrt{a^2-y^2}) = x + C$. **C32.** $x = \pm\frac{3p+2p^3}{(p^2+1)^{3/2}} - \frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}$, $y = \mp\frac{1}{(p^2+1)^{3/2}} + \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}$. **C33.** $\ln|y| - \frac{x}{y} = C$, $y^2 + 2yx = C$. **C34.** $y^2 = C^2 + 2Cx$, $(\sqrt{x^2+y^2}-x)(\sqrt{x^2+y^2}+2x)^2 = C$. **C35.** $y = \frac{x}{x+C}$. **C36.** $y^2 = Ce^x - x^2 - 2x - 2$, $y^2 = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2$.

Тема 12. Диференціальні рівняння вищих порядків, які інтегруються у квадратурах або допускають зниження порядку (I)

Короткі теоретичні відомості

12.1. Відновлення функції за її n-ю похідною. Диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x) \tag{12.1}$$

з неперервною функцією $f(x)$ завжди інтегрується у квадратурах. Його загальний розв'язок можна знайти за формулою

$$y = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n \text{ разів}} f(x)\,dx\,dx\ldots dx + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

12.2. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних. Порядок диференціального рівняння n-го порядку

$$F\Big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\Big) = 0, \quad 1 \leqslant k < n, \tag{12.2}$$

заміною $y^{(k)} = z$, $z = z(x)$, знижується на k одиниць. Якщо отримане рівняння

$$F\Big(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\Big) = 0$$

має загальний розв'язок $z = \omega\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ або загальний інтеграл $\Phi(x, z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0$, то для знаходження функції y одержуємо диференціальне рівняння k-го порядку $y^{(k)} = \omega\,(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$ або $\Phi\big(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\big) = 0$.

12.3. Рівняння, яке не містить незалежної змінної. Порядок диференціального рівняння

$$F\Big(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0 \tag{12.3}$$

заміною $y' = z$, $z = z(y)$, знижується на одиницю. У цьому випадку $y'' = z'z$, $y''' = (z''z + z'^2)z$, $\ldots$, $y^{(n)} = \omega\big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\big)$ і для знаходження функції z отримується диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку

$$F\Big(y, z, z'z\,, \ldots, \omega\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0. \tag{12.4}$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (12.4):

$$z = \varphi\,(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

то загальний інтеграл рівняння (12.3) зможемо записати у вигляді

$$\int \frac{dy}{\varphi\,(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

Зауважимо, що приймаючи y за незалежну змінну, можна втратити розв'язки рівняння (12.3) вигляду $y = C$. Безпосередньою підстановкою у рівняння (12.3) легко з'ясувати, чи має воно такі розв'язки.

12.4. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n, але не є розв'язаним відносно похідної. Рівняння $F(x, y^{(n)}) = 0$ можна розв'язувати методом введення параметра. Припустимо, що у цьому випадку існують такі функції $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, де t – деякий параметр, що $F\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \equiv 0$. Знаходимо

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1),$$

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)\,dt + C_2 \equiv \psi_2(t, C_1, C_2),\ \ldots,$$

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Загальним розв'язком у параметричній формі рівняння $F(x, y^{(n)}) = 0$ є $x = \varphi(t)$, $y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 12.1. Зінтегрувати рівняння $y'''\sqrt{x^3} = 3$.
Розв'язання. Діленням на $\sqrt{x^3}$ зводимо наше рівняння до вигляду (12.1) і тричі послідовно його інтегруємо:

$$y'' = 3\int x^{-\frac{3}{2}}dx = -6x^{-\frac{1}{2}} + C_1,$$

$$y' = \int(-6x^{-\frac{1}{2}} + C_1)dx = -12x^{\frac{1}{2}} + C_1x + C_2,$$

$$y = \int(-12x^{\frac{1}{2}} + C_1x + C_2)dx = -8x^{\frac{3}{2}} + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі, $C_1 := C_1/2$.
Відповідь: $y = -8x^{\frac{3}{2}} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

Приклад 12.2. Зінтегрувати рівняння $xy''' = y'' + 2xy''$.
Розв'язання. Зробимо заміну $y'' = z$. Тоді для знаходження функції $z = z(x)$ маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$xz' = z(1 + 2x).$$

Зінтегруємо це рівняння:

$$\frac{dz}{z} = \frac{1+2x}{x}dx \ \ (z \neq 0,\ x \neq 0) \ \ \Rightarrow \ \ \ln|z| = \ln|x| + 2x + C_1 \ \ \Rightarrow$$
$$z = C_1xe^{2x} \ \left(C_1 := e^{C_1}\right) \quad \Rightarrow \quad y'' = C_1xe^{2x}.$$

Одержали диференціальне рівняння вигляду $y'' = f(x)$. Двічі інтегруючи частинами, знаходимо

$$y' = C_1\int xe^{2x}dx + C_2 = \frac{1}{2}C_1\left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right) + C_2 \quad \Rightarrow$$
$$y = \frac{1}{2}C_1\int xe^{2x}dx - \frac{1}{8}C_1e^{2x} + C_2x + C_3 \quad \Rightarrow$$
$$y = \frac{1}{4}C_1(x-1)e^{2x} + C_2x + C_3 \quad \Rightarrow$$
$$y = C_1(x-1)e^{2x} + C_2x + C_3 \quad (C_1 := C_1/4).$$

Якщо $z = 0$, то $y'' = 0$, тобто $y = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$. Кожна з цих функцій (прямих) є частинним розв'язком заданого рівняння. Функція $x = 0$ не є розв'язком рівняння.
Відповідь: $y = C_1(x-1)e^{2x} + C_2 x + C_3$.

Приклад 12.3. Зінтегрувати рівняння $yy'' = y'^2 + y'^3$.
Розв'язання. Оскільки рівняння явно не містить x, то зробимо заміну $y' = z(y)$. Тоді $y'' = z'z$ і, підставляючи в рівняння, маємо:

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2 + z^3 \quad \Rightarrow \quad z\left(y\frac{dz}{dy} - z - z^2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z = 0 \quad \text{або} \quad y\frac{dz}{dy} = z + z^2.$$

З першого рівняння випливає, що $y' = 0$, а отже, $y = C$, а з другого:

$$y\frac{dz}{dy} = z^2 + z \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dz}{z^2+z} = \int\frac{dy}{y} \quad \left(z^2 + z \neq 0,\;\; y \neq 0\right) \quad \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \int\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|z| - \ln|z+1| = \ln|y| + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{z+1} = C_1 y \quad \Rightarrow$$

$$z = \frac{C_1 y}{1 - C_1 y}.$$

Оскільки $z = y'$, то

$$y' = \frac{C_1 y}{1 - C_1 y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 y}{1 - C_1 y} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1 - C_1 y}{y}dy = C_1 dx \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{y} - C_1\right)dy = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| - C_1 y = C_1 x + C_2.$$

Якщо $z^2 + z = 0$, то $z = 0$ або $z = -1$. Випадок $z = 0$ вже розглянуто, а якщо $z = -1$, то $y' = -1$, $y = -x + C$. Усі ці прямі є особливими розв'язками.
Відповідь: $\ln|y| - C_1(y + x) = C_2$, $y = -x + C$, $y = C$.

При інтегруванні початкових задач доцільно використовувати початкові умови в самому процесі інтегрування рівняння.

Приклад 12.4. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' \sin^3 x - (y' \sin^2 x + {y'}^2) \cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
Розв'язання. Оскільки рівняння явно не містить функції y, а лише її похідні, можна запровадити заміну $y' = z$, $z = z(x)$, тоді $y'' = z'$. Отримуємо рівняння Бернуллі

$$z' \sin^3 x - (z \sin^2 x + z^2) \cos x = 0 \quad \Rightarrow$$
$$z^{-2} z' \sin^3 x - z^{-1} \sin^2 x \cos x - \cos x = 0 \quad (z \neq 0).$$

Заміною $u = z^{-1}$ останнє рівняння зводиться до лінійного рівняння

$$u' \sin^3 x + u \sin^2 x \cos x + \cos x = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$u = \frac{1 + C_1 \sin x}{\sin^2 x}.$$

Тоді

$$z = \frac{\sin^2 x}{1 + C_1 \sin x}, \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\sin^2 x}{1 + C_1 \sin x}, \quad y' = 0.$$

З другої початкової умови знаходимо, що $C_1 = 0$. Отже,

$$y' = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C_2.$$

З першої початкової умови $C_2 = \frac{\pi}{4}$.
Відповідь: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{\pi}{4}$.

Приклад 12.5. Зінтегрувати рівняння $e^{y''} - 3y''^2 = x$.
Розв'язання. Застосуємо метод введення параметра. Оскільки рівняння розв'язано відносно x, можемо в якості y'' взяти довільну функцію $\psi(t)$. Нехай $y'' = t$, тоді $x = e^t - 3t^2$, $dx = (e^t - 6t)dt$. Виразимо y через параметр t:

$$d(y') = y''dx = t(e^t - 6t)dt,$$

$$y' = \int (te^t - 6t^2)dt = te^t - e^t - 2t^3 + C_1,$$

$$dy = y'dx = (te^t - e^t - 2t^3 + C_1)(e^t - 6t)dt,$$

$$y = \int (te^t - e^t - 2t^3 + C_1)(e^t - 6t)dt =$$

$$= e^{2t}\left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) + e^t(6t - 6 - 2t^3) + \frac{12}{5}t^5 + C_1e^t - 3C_1t^2 + C_2.$$

Відповідь: $x = e^t - 3t^2$, $y = e^{2t}\left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) + e^t(6t - 6 - 2t^3) + \frac{12}{5}t^5 + C_1(e^t - 3t^2) + C_2$.

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати рівняння:

А1. $y''' = 4x \sin 2x$.

А2. $y'' = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

А3. $y' = xy'' + y''^2$.

А4. $xy'' + y' = x^2 - 1$.

А5. $(y^2 + 1)y'' + 2yy'^2 = 0$.

А6. $y^3 y'' = 1$.

А7. $y'' = y'^2 + 1$.

А8. $2yy'' - y'^2 = 1$.

А9. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

А10. $ay'' = y'(1 + y'^2)$.

А11. $x = 2\sin y'' + 6y''$.

Знайти розв'язок задачі Коші

А12. $y'' = 7y^2\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння:

C1. $y^{\mathrm{IV}} = \sqrt[3]{x} + 2.$

C2. $y''' = e^{3x-5}.$

C3. $\cos^2 x y'' = 1.$

C4. $y''' = \frac{1}{(3x-1)^3}.$

C5. $xy''' = 1.$

C6. $y''' = \sin\frac{x}{3}.$

C7. $y'' = \frac{1}{1+x^2}.$

C8. $y''' = \sqrt{2x+1}.$

C9. $y'' = \sin^2 x - 1.$

C10. $y'' = \ln x.$

C11. $x^2 y'' = y'^2.$

C12. $xy'' = y'(\ln y' - \ln x).$

C13. $xy'' = y' + x^2 \cos x.$

C14. $y''' y'^2 = y''^3.$

C15. $y''' = 2(y'' - 2) \operatorname{ctg} x.$

C16. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$

C17. $2xy'y'' = y'^2 - 1.$

C18. $yy'' - y'^2 = y'y^2.$

C19. $4xy'' - y''^2 = 4(y'+2).$

C20. $y'' = 2yy'.$

C21. $3yy'y'' = y'^3 + 8.$

C22. $y''(e^x + 1) + y' = 0.$

C23. $y''' = y''^2.$

C24. $4\sqrt{y} y'' = 1.$

C25. $(y^3 + y)y'' - (3y^2 + 1)y'^2 = 0.$

C26. $y''^3 + 4y'^5 = (y'' + 4y')y''y'^2.$

C27. $yy'' = 2y'^2 - 5y^3 y'^3.$

C28. $x \ln x\, y'' - y' = 0.$

C29. $(4+x^2)y'' + y'^2 + 4 = 0.$

C30. $2(2-y)y'' = y'^2 + 1.$

C31. $x = y''^4 + y''^3.$

C32. $x = 4e^{y''} + 6y''.$

Розв'язати задачі Коші:

C33. $y'' = y'^2 + (1-y)y',\ y(1) = y'(1) = e.$

C34. $y'' = (1 + y'^2)^{3/2},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

C35. $2y^2 y'' + y'^2 = 9,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3.$

C36. $y'' + y'^2 = 2y'e^y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

C37. $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x} + \frac{y'}{x},\ y(1) = 5,\ y'(1) = e.$

C38. $yy'' = 6y'^2 + 4y^2 y',\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1.$

C39. $y'' \cos^3 x + (y' \cos^2 x + y'^2) \sin x = 0,\ y(0) = 10,\ y'(0) = 1.$

C40. $y^3 y'' + y'^4 \ln y - y^2 y'^2 = 0,\ y(1) = y'(1) = e.$

C41. $4y' + y''^2 = 4xy'',\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$

C42. $3y'y'' = e^y,\ y(-2) = 0,\ y'(-2) = 1.$

Відповіді

A1. $y = -x \sin 2x - \cos 2x + C_1 x + C_2.$ **A2.** $y = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C_1 x + C_2.$ **A3.** $y = \frac{C_1}{2} x^2 + C_1^2 x + C_2;$

$y = -\frac{x^3}{12} + C$. **A4.** $y = \frac{x^3}{9} - x + C_1 \ln|x| + C_2$. **A5.** $y^3 + 3y = C_1x + C_2$; $y = C$. **A6.** $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$. **A7.** $y = -\ln(C_2\cos(x + C_1))$. **A8.** $4(C_1y - 1) = C_1^2(C_2 + x)^2$. **A9.** $y^3 = C_1(x + C_2)^2$; $y = C$. **A10.** $\sin\frac{y+C_1}{a} = e^{\frac{x+C_2}{a}}$; $y = C$. **A11.** $x = 2\sin t + 6t$, $y = 3\sin t\cos t + 3t + 12\sin t - 2t\cos^2 t + 6t^2\sin t + 6t^3 + 2C_1\sin t + 6C_1t + C_2$. **A12.** $y^3 = \frac{16}{(3x+2)^4}$. **C1.** $y = \frac{81}{3640}x^{\frac{13}{3}} + \frac{1}{12}x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **C2.** $y = \frac{1}{27}e^{3x-5} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **C3.** $y = -\ln|\cos x| + C_1x + C_2$. **C4.** $y = \frac{1}{54}\ln|3x - 1| + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **C5.** $y = \frac{1}{2}x^2\ln|x| - \frac{3x^2}{4} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **C6.** $y = 27\cos\frac{x}{3} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **C7.** $y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C_1x + C_2$. **C8.** $y = \frac{1}{105}(2x + 1)^{\frac{7}{2}} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **C9.** $y = \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{x^2}{4} + C_1x + C_2$. **C10.** $y = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1x + C_2$. **C11.** $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$. **C12.** $C_1^2y = (C_1x - 1)e^{C_1x+1} + C_2$; $y = \frac{e}{2}x^2 + C$. **C13.** $y = -x\cos x + \sin x + C_1x^2 + C_2$. **C14.** $x = \ln|p| + 2C_1p - C_2$, $y = p + C_1p^2 + C_3$; $y = C_1x + C_2$. **C15.** $y = C_1\cos 2x + x^2 + 2C_1x^2 + C_2x + C_3$. **C16.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C_1y-4}}{2} = \pm x + C_2$; $y = 0$. **C17.** $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$; $y = \pm x + C$. **C18.** $y(1 - C_2e^{C_1x}) = C_1C_2e^{C_1x}$; $y(C - x) = 1$; $y = C$. **C19.** $y = C_1x^2 - (C_1^2 + 2)x + C_2$; $y = \frac{x^3}{3} + C$. **C20.** $y = C_1\operatorname{tg}(C_1x + C_2)$; $\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right| = 2C_1x + C_2$; $y(C - x) = 1$; $y = C$. **C21.** $C_1y = 8 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}C_1x + C_2\right)^3}$; $y = C - 2x$. **C22.** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$. **C23.** $y = C_3 - (x + C_1)\ln C_2(x + C_1)$; $y = C_1x + C_2$. $y = C_1x + C_2$. **C24.** $x = \frac{4}{3}p^3 + 4C_1p + C_2$, $y = (p^2 + C_1)^2$. **C25.** $y^2(1 - C_2e^{C_1x}) = C_2e^{C_1x}$. **C26.** $y = -\ln|x + C_1| + C_2$, $y = -\frac{1}{x+C_1} + C_2$, $y = C$. **C27.** $y^5 + C_1 = y(4x + C_2)$, $y = C$. **C28.** $y = C_1(x\ln x - x) + C_2$. **C29.** $y = (4 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$, $y = -\frac{x^2}{2} + C$. **C30.** $x = -C_1\left(\frac{p}{p^2+1} + \operatorname{arctg} p\right) + C_2$, $y = \frac{C_1}{p^2+1} + 2$. **C31.** $x = t^4 + t^3$, $y = \frac{16}{45}t^9 + \frac{27}{40}t^8 + \frac{9}{28}t^7 + C_1(t^4 + t^3) + C_2$. **C32.** $x = 4e^t + 6t$, $y = e^{2t}(2t - 3) + e^t(3t^2 - 2t - 2 + C_1) + t^3 + C_1t + C_2$. **C33.** $y = e^x$.

C34. $x^2 + y^2 = 1$. **C35.** $y = -3x + 1$. **C36.** $y = -\ln(1 - x)$.
C37. $y = (x-1)e^x + 5$. **C38.** $y = \frac{1}{x}$. **C39.** $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + 10$.
C40. $y = e^{\sqrt{2x-1}}$. **C41.** $y = \pm x^2 - x + 3$. **C42.** $y = -3\ln\left(\frac{1-x}{3}\right)$.

Тема 13. Диференціальні рівняння вищих порядків, які інтегруються у квадратурах або допускають зниження порядку (II)

Короткі теоретичні відомості

13.1. Рівняння вищих порядків, однорідні відносно шуканої функції та її похідних. Диференціальне рівняння

$$F\Big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\Big) = 0 \tag{13.1}$$

називають *однорідним* відносно шуканої функції та її похідних, якщо його ліва частина для довільного $t \neq 0$ справджує умову

$$F\Big(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}\Big) = t^m \cdot F\Big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\Big),$$

де число m – вимір однорідності функції F. З допомогою підстановки $y' = yz$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція, порядок рівняння (13.1) можна знизити на одиницю. При цьому

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y \cdot (z'' + 3zz' + z^3), \ \dots, \ y^{(n)} = y \cdot \psi\Big(z, z', \dots, z^{(n-1)}\Big).$$

Тоді після скорочення на y^m $(y \neq 0)$ одержуємо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$F\Big(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \psi\Big(z, z', \dots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0. \tag{13.2}$$

Якщо $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ – загальний розв'язок рівняння (13.2), то, беручи до уваги $z = y'/y$, знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння (13.1):

$$y = C_n \cdot e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})\, dx},$$

де C_1, C_2, …, C_n – довільні сталі.

13.2. Узагальнено однорідні рівняння. Диференціальне рівняння (13.1) називають *узагальнено однорідним*, якщо існують такі числа k і m, що

$$F\Big(e^t x, e^{kt}y, e^{(k-1)t}y', \ldots, e^{(k-n)t}y^{(n)}\Big) = e^{mt}F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big).$$

Тоді заміною $x = e^t$, $y = ze^t$ (при $x < 0$ можна покласти $x = -e^t$), де $z = z(t)$ – нова невідома функція незалежної змінної t, рівняння (13.1) зводиться до диференціального рівняння, яке не містить незалежної змінної t і, отже, допускає зниження порядку на одиницю. При виконанні згаданої заміни похідні будуть такими:

$$y' = (z' + kz)e^{(k-1)t}, \quad y'' = (z'' + (2k-1)z' + k(k-1)z)e^{(k-2)t},$$
$$\ldots, \quad y^{(n)} = g(z, z', \ldots, z^{(n)})e^{(k-n)t}.$$

13.3. Рівняння з точними похідними. Так називають рівняння (13.1), ліва частина якого є точною (повною) похідною деякої функції, тобто

$$F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big) = \frac{d}{dx}\Phi\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big).$$

При цьому одержуємо рівняння

$$\Phi\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big) = C_1, \tag{13.3}$$

де C_1 – довільна стала, тобто порядок рівняння (13.1) вдалося знизити на одиницю.

Рівність (13.3) називають *першим інтегралом* рівняння (13.1).

Якщо (13.1) не є рівнянням з точними похідними, то у багатьох випадках вдається знайти таку функцію $\mu = \mu\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, після множення на яку отримуємо рівняння з точними похідними. Функцію μ називають *інтегрувальним множником* рівняння (13.1). Потрібно пам'ятати, що виконуючи множення на інтегрувальний множник, можна отримати зайві розв'язки (розв'язки рівняння $\mu = 0$), а також втратити деякі розв'язки (розв'язки, вздовж яких функція μ перетворюється у нескінченність).

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 13.1. Зінтегрувати рівняння $xyy'' - xy'^2 = 2yy'$.
Розв'язання. Легко переконатися, що обидві частини рівняння є однорідними функціями виміру 2, а тому рівняння є однорідним. Нехай $y' = yz$. Тоді $y'' = (z' + z^2)\,y$ і, підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$xy^2(z' + z^2) - xy^2z^2 = 2y^2z \quad \Rightarrow \quad xz' = 2z \;\; (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$z = C_1x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = C_1x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = C_1x^3/3 + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$y = C_2e^{C_1x^3} \quad (C_1 := C_1/3,\; C_2 := \pm e^{C_2}).$$

Функція $y = 0$ є частинним розв'язком.
Відповідь: $y = C_2e^{C_1x^3}$.

Приклад 13.2. Зінтегрувати рівняння $y'' = \big(2xy - \frac{5}{x}\big)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$.
Розв'язання. Підставимо замість x, y, y', y'' у рівняння e^tx, $e^{kt}y$, $e^{(k-1)t}y'$, $e^{(k-2)t}y''$ відповідно і прирівняємо показники експонент у всіх доданках. Отримаємо: $k - 2 = 2k = k - 2 = 2k = k - 2$. Отже, $k = -2$, а задане рівняння справді є узагальнено однорідним. Виконаємо заміну: $x = e^t$, $y = ze^{-2t}$, $z = z(t)$. Тоді

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = (z' - 2z)e^{-3t},$$

$$y'' = \frac{d(z' - 2z)e^{-3t}}{dt}e^{-t} = (z'' - 5z' + 6z)e^{-4t}.$$

Після підстановки виразів для x, y, y', y'' у рівняння і скорочення на e^{-4t} отримуємо рівняння

$$z'' - 5z' + 6z = (2z - 5)(z' - 2z) + 4z^2 - 4z \quad \Rightarrow \quad z'' = 2zz',$$

яке не містить незалежну змінну t. Поклавши $z' = u$, $u = u(z)$, $z'' = u'u$, отримуємо:

$$u'u = 2zu \quad \Rightarrow \quad u' = 2z \quad (u \neq 0) \quad \Rightarrow \quad u = z^2 + C_1 \quad \Rightarrow$$
$$z' = z^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z^2 + C_1} = dt.$$

Якщо $C_1 > 0$, то після перепозначення сталої ($C_1 := \sqrt{C_1}$), інтегрування і врахування того, що $z = x^2 y$, $t = \ln x$, отримуємо:

$$\frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{z}{C_1} = t + \ln C_2 \quad \Rightarrow \quad x^2 y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln C_2 x).$$

Якщо $C_1 < 0$, то

$$\frac{1}{2C_1} \ln \left| \frac{z - C_1}{z + C_1} \right| = t + \ln C_2 \quad (C_1 := \sqrt{-C_1}) \quad \Rightarrow$$
$$x^2 y - C_1 = C_2 (x^2 y + C_1) |x|^{2C_1} \quad (C_2 := \pm C_2^{2C_1}).$$

Якщо $C_1 = 0$, то маємо сім'ю особливих розв'язків

$$-\frac{1}{z} = t + \ln C \quad \Rightarrow \quad x^2 y \ln Cx = -1.$$

Якщо $u = 0$, то $z' = 0$, звідки $z = C$, тобто $y = \frac{C}{x^2}$. Легко переконатись, що ця функція є частинним розв'язком рівняння.

Відповідь: $x^2 y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln C_2 x)$, $x^2 y \ln Cx = -1$, $x^2 y - C_1 = C_2 (x^2 y + C_1) |x|^{2C_1}$.

Приклад 13.3. Зінтегрувати рівняння $\frac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0$.

Розв'язання. Ліву частину рівняння можемо записати як

$$\left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{2} y^2 \right)' = 0,$$

звідки знаходимо перший інтеграл рівняння:

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{2} y^2 = C_1. \tag{13.4}$$

Співвідношення (13.4) – це рівняння з відокремлюваними змінними, тому

$$\frac{dy}{y^2+C_1}=\frac{x}{2}dx \quad (C_1:=2C_1) \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y^2+C_1}=\frac{x^2}{4}+C_2,$$

причому інтеграл залежить від сталої C_1, яка може набувати значення різних знаків.

Якщо $C_1=0$, то одержуємо особливі розв'язки

$$-\frac{1}{y}=\frac{x^2}{4}+C_2 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{4}{x^2+C} \quad (C:=4C_2).$$

Якщо $C_1>0$, то

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{C_1}}=\frac{x^2}{4}+C_2 \quad \Rightarrow$$

$$y=4C_1\operatorname{tg}(C_1x^2+C_2) \quad \left(C_1:=\sqrt{C_1}/4,\ C_2:=C_2\sqrt{C_1}\right).$$

Якщо $C_1<0$, то

$$\frac{1}{2\sqrt{|C_1|}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{|C_1|}}{y+\sqrt{|C_1|}}\right|=\frac{x^2}{4}+C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{C_1}\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right|=x^2+C_2 \quad \left(C_1:=\sqrt{|C_1|},\ C_2:=4C_2\right).$$

Відповідь: $y=4C_1\operatorname{tg}(C_1x^2+C_2)$, $\frac{2}{C_1}\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right|=x^2+C_2$, $y=-\frac{4}{x^2+C}$.

Приклад 13.4. Зінтегрувати рівняння $yy''-y'^2=y'$.
Розв'язання. Інтегрувальним множником цього рівняння є функція y^{-2}. Справді, поділивши обидві частини рівняння на y^2 $(y\neq 0)$, одержуємо:

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}-\frac{y'}{y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{y}+\frac{1}{y}\right)'=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{C_1 y - 1} = dx.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Якщо $C_1 \neq 0$, то маємо загальний розв'язок:

$$y = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}.$$

Якщо $C_1 = 0$, то одержуємо особливі розв'язки $y = -x + C$. Крім того, особливим розв'язком є функція $y = 0$.
Відповідь: $y = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1},\ y = -x + C,\ y = 0.$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати рівняння:
A1. $xyy'' - (x+1)yy' = xy'^2$.
A2. $x^2 yy'' - 4xyy' - x^2 y'^2 = 5y^2$.
A3. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.
Знайти розв'язок задачі Коші
A4. $yy'' = (1-2x)y'^2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.
Зінтегрувати рівняння:
A5. $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0$.
A6. $x^3 y'' = (y - xy')(3y - 3xy' - x)$.
Зінтегрувати рівняння, перетворивши їх до такого вигляду, щоб обидві частини рівняння були точними похідними:
A7. $yy'' + y'^2 = 3x$. **A8.** $yy''' + 3y'y'' = 0$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння:
C1. $yy'' - y'^2 + 4y^2 \sin 2x = 0$.
C2. $xyy'' + yy' = xy'^2 + 2y^2$.
C3. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.
C4. $xyy'' + xy'^2 = 5yy'$.

C5. $x^2(yy'' - y'^2) = y^2$.
C6. $yy'' + yy' \operatorname{tg} x + 3y'^2 = 0$.
C7. $x^2yy'' = (xy' + y)^2$.
C8. $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.
C9. $y^2y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + y^3 \cos x = 0$.
C10. $yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{x^2+1}}$.
C11. $yy'' - \frac{yy'}{x+1} = 3y'^2$.
C12. $xyy'' - yy' = 2xy'^2$.
C13. $yy'' + yy' \operatorname{tg} x = 2y'^2$.
C14. $xyy'' + 2xy'^2 = 2yy'$.
C15. $xyy'' - xy'^2 - yy' = \frac{bxy'^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
C16. $xyy'' + yy' - 5x^2y'^3 = 0$.
C17. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.
C18. $x^2y^3y'' = 3xy^3y' - 4y^4 - x^8$.
C19. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 4$.
C20. $y^2 + x^2y'^2 = 5x^3y'' + 2xyy'$.
C21. $x^2y'' - 3xy' + 4y - 2x^2 = 0$.
C22. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$.
C23. $yy' + xyy'' = xy'^2 + 2x^3$.
C24. $x^3y'' - x^2y'^2 + 2xyy' = y^2$.
C25. $x^2(2yy'' - y'^2) = 5 - 2xyy'$.

Зінтегрувати рівняння, перетворивши їх до такого вигляду, щоб обидві частини рівняння були точними похідними:

C26. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 4x$.
C27. $y'^2 + 4yy'' = 0$.
C28. $y'''y' - 2y''^2 = 0$.
C29. $xy'' - 2yy' + y' = 0$.
C30. $5y'''^2 - 2y''y^{\mathrm{IV}} = 0$.
C31. $2xy'y'' = y'^2 - 4$.
C32. $y'' - 2xy' - 2y = 2$.
C33. $y'y''' = y''^2 + y'^2y''$.
C34. $yy'' + 2y^2y'^2 + y'^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)yy'$.
C35. $y'' - y' \cos x + y \sin x = 0$.

Розв'язати задачі Коші:

C36. $yy'' - 5\frac{yy'}{x} - y'^2 = 0$, $y(1) = e^2$, $y'(1) = 12e^2$.

C37. $xyy'' + (1+x^2)yy' + xy^2 = xy'^2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -2$.
C38. $2xy^2y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2$, $y(1) = y'(1) = -1$.
C39. $y^2(y'' - y') = y'^2(y - 2xy')$, $y(1) = y'(1) = e$.
C40. $(1 - \sin x)yy'' + yy'\cos x = y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Відповіді

A1. $\ln C_2 y = C_1 e^x(x-1)$, $y = C$. **A2.** $xy = C_2 e^{C_1 x^5}$. **A3.** $y = C_2(x + \sqrt{x^2+1})^{C_1}$. **A4.** $y = 2e^{\operatorname{arctg} x - \pi/4}$. **A5.** $\frac{C_2}{x} = \sin(C_1 - \frac{y}{x})$, $y = Cx$. **A6.** $3y = -x\ln\ln(C_1 x) + C_2 x$, $y = Cx$. **A7.** $y^2 = x^3 + C_1 x + C_2$. **A8.** $y^2 = C_1 + (C_2 x + C_3)^2$, $y = C_1 x + C_2$, $y^2 = C_1 x + C_2$. **C1.** $y = C_2 e^{\sin 2x + C_1 x}$. **C2.** $y = C_2|x|^{C_1}e^{2x}$. **C3.** $y = C_2 x e^{-C_1/x}$. **C4.** $y^2 = C_2 x^6 + C_1$. **C5.** $xy = C_2 e^{C_1 x}$. **C6.** $y^4 = C_2 \sin x + C_1$. **C7.** $y\sqrt[3]{x} = C_2 e^{C_1 x^3}$. **C8.** $y = C_2 e^{C_1 x^2}$. **C9.** $y = C_3 e^{C_1 x^2 + C_2 x + \sin x}$. **C10.** $\ln C_2 y = C_1(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x^2)$, $y = C$. **C11.** $y^2(x^2 + 2x + C_1) = C_2$, $y = C$. **C12.** $y(x^2 - C_1) = C_2$, $y = C$. **C13.** $y(\sin x + C_1) = C_2$, $y = C$. **C14.** $y^3 = C_1 x^3 + C_2$. **C15.** $b^2\ln(C_2 y) = C_1 \ln|C_1 + b\sqrt{a^2 - x^2}| - b\sqrt{a^2-x^2}$, $y = C$. **C16.** $C_1 y + 5y\ln|y| + \ln(C_2 x) = 0$, $y = C$. **C17.** $4C_1 y^2 = 4x + C_1^2 x \ln^2(C_2 x)$. **C18.** $C_1 y^2 = C_1^2 x^4 \ln^2(C_2 x) - x^4$, $y^2 = \pm 2x^4\ln(Cx)$. **C19.** $2C_2x^2y = (C_1 x - C_2)^2 - 4x^2$, $2C_2 x^2 y = (C_2 x - C_1)^2 - 4$, $xy = \pm 2$. **C20.** $y = -5x\ln\left|\frac{1}{x} + C_1\right| + C_2 x$, $y = Cx$. **C21.** $y = x^2\ln^2|x| + C_1 x^2 \ln(C_2 x)$. **C22.** $C_1 y = x^{3/2}(C_2 x^{C_1} + 2)$, $y = Cx^{3/2}$, $y = -2x^{3/2}\ln Cx$. **C23.** $2C_1C_2 y = C_2^2|x|^{C_1+2} + 2|x|^{2-C_1}$. **C24.** $y = -x\ln\left|\frac{1}{x} - C_1\right| + C_2 x$, $y = Cx$. **C25.** $4C_1 y = 20 + C_1^2\ln^2(C_2 x)$. **C26.** $y = x^3 + C_1 x\ln(C_2 x)$. **C27.** $y = (C_1 x + C_2)^{4/5}$. **C28.** $y = C_1\ln(C_2 x + C_3)$, $y = C_1 x + C_2$. **C29.** $y = C_1 \operatorname{tg}(C_1\ln(C_2 x))$, $y - C_1 = C_2|x|^{2C_1}(y + C_1)$, $y\ln(C_2 x) = -1$. **C30.** $4C_1^2 y = 9(C_1 x + C_2)^{4/3} + C_3 x + C_4$, $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. **C31.** $3C_1 y = \pm 2(C_1 x + 4)^{3/2} + C_2$, $y = \pm 2x + C$. **C32.** $y = \left(C_1\int e^{-x^2}dx + C_2\right)e^{x^2} - 1$. **C33.** $C_1 + C_2 e^{-y} = C_3 e^{-C_2 x}$, $y = C_1 x + C_2$, $y = -\ln(C_1 x + C_2)$. **C34.** $y^2 = \ln(C_1 e^{x^2} + C_2)$.

C35. $y = \bigl(C_1 \int e^{-\sin x} dx + C_2\bigr) e^{\sin x}$. **C36.** $y = e^{2x^6}$. **C37.** $xy = 2$. **C38.** $y = -e^{2\sqrt{x}-2}$. **C39.** $y = e^{\sqrt{2x-1}}$. **C40.** $y = (\cos x + 1) e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

Тема 14. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Короткі теоретичні відомості

14.1. Лінійно залежні і лінійно незалежні функції. Функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$, визначені на інтервалі (a, b), називають *лінійно незалежними* на цьому інтервалі, якщо співвідношення

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \tag{14.1}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – сталі, виконується для всіх $x \in (a, b)$ тільки тоді, коли всі $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Якщо у співвідношенні (14.1) хоча б одна із сталих α_1, α_2, $\ldots$, α_n відмінна від нуля, то функції y_1, y_2, $\ldots$, y_n називають *лінійно залежними* на інтервалі (a, b).

Визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

називають *визначником Вронського* або *вронскіаном* функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n.

Якщо $W(x) \neq 0$ хоча б в одній точці інтервалу (a, b), то y_1, y_2, $\ldots$, y_n – лінійно незалежні на цьому інтервалі функції.

14.2. Побудова лінійного однорідного рівняння, яке має задану фундаментальну систему розв'язків. *Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку* називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0. \tag{14.2}$$

Будь-яку сукупність n розв'язків лінійного однорідного рівняння (14.2), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a, b), називають *фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння на інтервалі (a, b).

Для побудови лінійного однорідного диференціального рівняння, якщо відомою є його фундаментальна система розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, використовують формулу

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{14.3}$$

14.3. Зниження порядку лінійного однорідного диференціального рівняння з допомогою лінійно незалежних частинних розв'язків. Якщо відомий частинний розв'язок $y_1(x) \neq 0$ лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{14.4}$$

то загальний розв'язок цього рівняння можна знайти за формулою

$$y = y_1\left(C_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx + C_2\right). \tag{14.5}$$

У загальному випадку, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1(x) \neq 0$ лінійного однорідного диференціального рівняння (14.2), то для зниження на одиницю порядку цього рівняння спочатку використовують заміну $y = y_1 z$, $z = z(x)$, а потім заміну $u = z'$, $u = u(x)$. В результаті знову отримують лінійне однорідне рівняння. Якщо відомо m лінійно незалежних розв'язків рівняння (14.2), то послідовними замінами вдається знизити його порядок на m одиниць. Зокрема, якщо відомо $n-1$ лінійно незалежних розв'язків рівняння (14.2), то послідовні заміни дають рівняння з відокремлюваними змінними, інтегровне у квадратурах.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 14.1. Дослідити на лінійну залежність функції $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 2x + 5$, $y_3 = x^3$.
Розв'язання. Складемо визначник Вронського для цих функцій:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 3x-2 & 2x+5 & x^3 \\ 3 & 2 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} = -114x.$$

Оскільки визначник Вронського не дорівнює нулю, якщо $x \neq 0$, то задані функції є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі числової осі. ■

Приклад 14.2. Дослідити на лінійну залежність функції $y_1 = x + 3$, $y_2 = 2x - 5$, $y_3 = 4x - 1$.
Розв'язання. Складемо рівність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$:

$$\alpha_1(x+3) + \alpha_2(2x-5) + \alpha_3(4x-1) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)x + 3\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Остання система є невизначеною, а тому має не лише тривіальний розв'язок. Отже, задані функції є лінійно залежними на будь-якому інтервалі числової осі. ■

Приклад 14.3. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння якомога нижчого порядку, яке має розв'язки $y_1 = x^3$, $y_2 = x + 3$.
Розв'язання. Переконуємось (так, як це було зроблено у прикладі 14.1) у лінійній незалежності функцій $y_1 = x^3$, $y_2 = x + 3$. Скористаємось формулою (14.3):

$$\begin{vmatrix} x^3 & x+3 & y \\ 3x^2 & 1 & y' \\ 6x & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за елементами третього стовпця:

$$y\begin{vmatrix} 3x^2 & 1 \\ 6x & 0 \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x^3 & x+3 \\ 6x & 0 \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} x^3 & x+3 \\ 3x^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(2x^3+9x^2)y'' - 6x(x+3)y' + 6xy = 0. \ \blacksquare$$

Приклад 14.4. Зінтегрувати рівняння

$$(x^3+x^2)y'' - (x^3+4x^2+2x)y' + (x^2+4x+2)y = 0. \qquad (14.6)$$

Розв'язання. Загального способу відшукання частинного розв'язку лінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами не існує. Деколи його вдається знайти у вигляді многочлена чи експоненти. Припустимо, що розв'язок диференціального рівняння існує у вигляді многочлена. Спробуємо знайти його степінь. Нехай $y_1 = x^n + \ldots$, тоді $y_1' = nx^{n-1} + \ldots$, $y_1'' = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$ Після підстановки у рівняння (14.6) матимемо:

$$n(n-1)(x^3+x^2)x^{n-2} - n(x^3+4x^2+2x)x^{n-1} +$$
$$+ (x^2+4x+2)x^n + \ldots = 0 \quad \Rightarrow$$
$$n(n-1)x^{n+1} + n(n-1)x^n - nx^{n+2} - 4nx^{n+1} - 2nx^n +$$
$$+ x^{n+2} + 4x^{n+1} + 2x^n + \ldots = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнт біля найвищого степеня x до нуля, отримуємо $n = 1$. Таким чином, $y_1 = x + a$. Підставляючи цю функцію в рівняння (14.6), знаходимо $a = 0$. Отже, функція $y_1 = x$ є частинним розв'язком рівняння (14.6).

Зведемо рівняння (14.6) до вигляду (14.4) діленням на $x^3 + x^2$:

$$y'' - \frac{x^3+4x^2+2x}{x^3+x^2}y' + \frac{x^2+4x+2}{x^3+x^2}y = 0.$$

Скористаємось тепер формулою (14.5):

$$y = x\left(C_1\int\frac{e^{\int\frac{x^3+4x^2+2x}{x^3+x^2}dx}}{x^2}dx + C_2\right) =$$
$$= x\left(C_1\int\frac{e^{\int dx+\int\frac{d(x^3+x^2)}{x^3+x^2}dx}}{x^2}dx + C_2\right) =$$
$$= x\left(C_1\int e^x(x+1)dx + C_2\right) = C_1x^2e^x + C_2x.$$

Функції $x = 0$ і $x = -1$ не є розв'язками рівняння (14.6).
Відповідь: $y = C_1x^2e^x + C_2x$.

Приклад 14.5. Зінтегрувати рівняння

$$x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, \tag{14.7}$$

якщо відомі його два частинних розв'язки $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$.
Розв'язання. Запроваджуємо заміну $y = zx$, де $z = z(x)$, тоді $y' = z'x + z$, $y'' = z''x + 2z'$, $y''' = z'''x + 3z''$, а рівняння (14.7) набуває вигляду:

$$x^2(2x-1)(z'''x + 3z'') + (4x-3)x(z''x + 2z') - 2x(z'x + z) +$$
$$+ 2zx = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x^2(2x-1)z''' + (10x^2 - 6x)z'' + (6x-6)z' = 0. \tag{14.8}$$

Порядок отриманого рівняння легко знижується заміною $u = z'$, $u = u(x)$:

$$x^2(2x-1)u'' + (10x^2 - 6x)u' + (6x-6)u = 0. \tag{14.9}$$

Оскільки рівняння (14.7) має розв'язок $y_2 = 1/x$, то рівняння (14.8) має розв'язок $z_1 = 1/x^2$, а рівняння (14.9) – розв'язок $u_1 = 1/x^3$. Заміна $u = \frac{v}{x^3}$, $v = v(x)$, $u' = \frac{v'}{x^3} - \frac{3v}{x^4}$,

$u'' = \frac{v''}{x^3} - \frac{6v}{x^4} + \frac{12v}{x^5}$ дає рівняння

$$x^2(2x-1)\left(\frac{v''}{x^3} - \frac{6v}{x^4} + \frac{12v}{x^5}\right) + (10x^2 - 6x)\left(\frac{v'}{x^3} - \frac{3v}{x^4}\right) +$$
$$+ (6x-6)\frac{v}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-1)v'' - 2v' = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(2x-1)w' - 2w = 0 \quad (v' = w, \;\; w = w(x)).$$

Тоді

$$w = C_1(2x-1) \quad \Rightarrow \quad v' = C_1(2x-1) \quad \Rightarrow$$
$$v = C_1(x^2 - x) + C_2 \quad \Rightarrow \quad u = C_1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{C_2}{x^3} \quad \Rightarrow$$
$$z = C_1\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + \frac{C_2}{x^2} + C_3 \quad (C_2 := -\frac{C_2}{2}) \quad \Rightarrow$$
$$y = C_1(x\ln|x| + 1) + \frac{C_2}{x} + C_3x. \;\blacksquare$$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Визначити, чи є задані функції лінійно незалежними:

А1. $y_1 = x + 5$, $y_2 = x - 3$.

А2. $y_1 = 8x + 10$, $y_2 = 12x + 15$.

А3. $y_1 = x + 4$, $y_2 = 3x + 5$, $y_3 = 1 - 4x$.

Скласти диференціальні рівняння якомога нижчого порядку, які мають задані частинні розв'язки:

А4. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{3x}$.

А5. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^3$.

Знайти загальні розв'язки заданих рівнянь, знаючи їхні частинні розв'язки. У тих вправах, де частинний розв'язок не заданий, знайти частинний розв'язок у вигляді показникової функції $y_1 = e^{ax}$ або многочлена $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$

А6. $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 0$.

А7. $x^2y'' - (x^2 + 2x)y' + (x+2)y = 0$.

A8. $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' = 0$.

A9. $(2x^2+x)y'' + (8x^2-1)y' - (16x+4)y = 0, \quad y_1 = e^{-4x}$.

A10. $y'' \cos^2 x - 2y = 0, \quad y_1 = \operatorname{tg} x$.

A11. $x^2y'' - 2xy' - (x^2-2)y = 0, \quad y_1 = xe^x$.

A12. $(2x+3)y''' - (12x+20)y'' + (22x+39)y' - (12x+22)y = 0$, $y_1 = e^x, \ \ y_2 = e^{2x}$.

A13. $x^3y''' - 3x^2y'' + (x^3+6x)y' - (x^2+6)y = 0, \quad y_1 = x$, $y_2 = x \sin x$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Визначити, чи є задані функції лінійно незалежними (в кожній вправі функції розглядаються в тій області, в якій вони всі визначені):

C1. $y_1 = x+2$, $y_2 = 1$.

C2. $y_1 = 26x+6$, $y_2 = 65x+15$.

C3. $y_1 = e^x$, $y_2 = \ln x$.

C4. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$.

C5. $y_1 = 2^x$, $y_2 = 3^x$, $y_3 = 4^x$.

C6. $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = 1$.

C7. $y_1 = x^2+3x$, $y_2 = x-5$, $y_3 = 2x^2+1$.

C8. $y_1 = x^2$, $y_2 = 0$, $y_3 = e^{2x}$.

C9. $y_1 = \ln 5x$, $y_2 = \ln x^2$, $y_3 = 4$.

C10. $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x+5}$, $y_3 = \sqrt{x+10}$.

C11. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin(x+3)$, $y_3 = \cos(x-2)$.

C12. $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = e^{3x}$, $y_4 = 13x$.

C13. $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \cos 2x$.

C14. $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$.

C15. Довести, що якщо серед функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є дві однакові, то вони лінійно залежні.

C16. Довести, що вронскіан функцій

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-1,0], \\ x^2, & \text{якщо } x \in [0,1], \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in [-1,0], \\ 0, & \text{якщо } x \in [0,1] \end{cases}$$

тотожно дорівнює нулю, але вони лінійно незалежні на відрізку $[-1,1]$.

Скласти диференціальні рівняння якомога нижчого порядку, які мають задані частинні розв'язки:

C17. $y_1 = 1$, $y_2 = \sin x$.

C18. $y_1 = x^3$, $y_2 = e^x$.

C19. $y_1 = x^3$, $y_2 = \ln x$.

C20. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin 2x$.

C21. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{5x}$.

C22. $y_1 = 1$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = \cos x$.

C23. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{4x}$, $y_3 = e^{6x}$.

C24. $y_1 = x^2$, $y_2 = \frac{1}{x^2}$, $y_3 = x^2 \ln x$.

C25. $y_1 = x^3 + 3x$, $y_2 = 3x^2 - 5$, $y_3 = x - 2$.

C26. $y_1 = 2x$, $y_2 = e^x + 2$, $y_3 = 3 - x$.

C27. $y_1 = \ln x$, $y_2 = 5$, $y_3 = e^x$.

C28. $y_1 = 10$, $y_2 = \operatorname{tg} x$, $y_3 = x$.

C29. $y_1 = x$, $y_2 = x^3$, $y_3 = e^{-x}$.

C30. $y_1 = x$, $y_2 = x^3$, $y_3 = x^5$.

C31. $y_1 = e^x$, $y_2 = \sin 3x$, $y_3 = \cos 3x$.

Знайти загальні розв'язки заданих рівнянь, знаючи їхні частинні розв'язки. У тих вправах, де частинний розв'язок не заданий, знайти частинний розв'язок у вигляді показникової функції $y_1 = e^{ax}$ або многочлена $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$

C32. $2xy'' - (x+2)y' + y = 0$.

C33. $(2x+3)y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}y = 0$.

C34. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

C35. $(x+1)y'' + (x-1)y' - 2y = 0$.

C36. $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

C37. $x^2y'' - (3x^2 + 2x)y' + (3x + 2)y = 0.$

C38. $xy'' + (3 - 2x)y' + (x - 3)y = 0.$

C39. $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0.$

C40. $(5x^3 - x^2)y'' + (25x^3 - 20x^2 + 2x)y' - (25x^2 - 20x + 2)y = 0.$

C41. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$

C42. $y'' \cos^2 x + y' \sin 2x + y(2 - \cos^2 x) = 0, \quad y_1 = \cos x.$

C43. $(x \ln x)y'' + (\ln x + 1)y' - \frac{y}{x \ln x} = 0, \quad y_1 = \ln x.$

C44. $x^2(x^2 + 1)^2y'' + (6x^2 - 2)y = 0, \quad y_1 = \frac{x^2}{x^2+1}.$

C45. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad y_1 = \frac{1}{x}.$

C46. $y'' \cos x \sin^2 x + y' \sin x(1 - 3\cos^2 x) + 2y \cos^3 x = 0,$ $y_1 = \sin x.$

C47. $x^2y'' - (2x^2 - x)y' + (x^2 - x - 1)y = 0, \quad y_1 = xe^x.$

C48. $(x^3 + 2x^2 + x)y'' + (2x^3 + 4x^2 + 4x + 2)y' + 2xy = 0,$ $y_1 = 1 + \frac{1}{x}.$

C49. $x(x + 6)y'' - (2x + 6)y' + 2y = 0, \quad y_1 = x^2.$

C50. $xy'' - (6x - 2)y' - 6y = 0, \quad y_1 = \frac{1}{x}.$

C51. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0, \quad y_1 = x \sin x.$

C52. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0, \quad y_1 = x.$

C53. $(4x+5)y''' - (16x+24)y'' + (4x+9)y' + (24x+38)y = 0,$ $y_1 = e^{-x}, \; y_2 = e^{2x}.$

C54. $x^3y''' - (4x^3 + 3x^2)y'' + (3x^3 + 8x^2 + 6x)y' - (3x^2 + 8x + 6)y = 0, \quad y_1 = x, \; y_2 = xe^x.$

C55. $x^3y''' - (x^3 + 3x^2)y'' + (2x^2 + 6x)y' - (2x + 6)y = 0,$ $y_1 = x.$

C56. $(2x-3)y''' + (16-12x)y'' + (22x-23)y' + (5-12x)y = 0,$ $y_1 = e^{2x}, \; y_2 = e^{3x}.$

C57. $x^3y''' - (6x^3 + 3x^2)y'' + (9x^3 + 12x^2 + 6x)y' - (9x^2 + 12x + 6)y = 0, \quad y_1 = x, \; y_2 = xe^{3x}.$

C58. $(2x+1)y''' - (14x+9)y'' + (22x+15)y' - (10x+7)y = 0,$ $y_1 = e^x, \; y_2 = xe^x.$

C59. $x^3y''' - (2x^3 + 6x^2)y'' + (18x - 3x^3 + 8x^2)y' + (6x^2 - 12x - 24)y = 0, \quad y_1 = x^2, \; y_2 = x^2e^{3x}.$

C60. $x^2y'''-(3x^2+2x)y''+(3x^2+4x+2)y'-(x^2+2x+2)y=0$, $y_1=e^x$, $y_2=x^2e^x$.

Відповіді

A1. Лінійно незалежні. **A2.** Лінійно залежні. **A3.** Лінійно залежні. **A4.** $y''-4y'+3y=0$. **A5.** $xy'''-y''=0$. **A6.** $y = C_1\frac{e^x}{x}+C_2e^x$. **A7.** $y=C_1xe^x+C_2x$. **A8.** $y=C_1+C_2xe^{2x}$. **A9.** $y=C_1x^2+C_2e^{-4x}$. **A10.** $y=C_1\operatorname{tg}x+C_2(1+x\operatorname{tg}x)$. **A11.** $y=C_1xe^x+C_2xe^{-x}$. **A12.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3xe^{3x}$. **A13.** $y=C_1x+C_2x\sin x+C_3x\cos x$. **C1.** Лінійно незалежні. **C2.** Лінійно залежні. **C3.** Лінійно незалежні. **C4.** Лінійно незалежні. **C5.** Лінійно незалежні. **C6.** Лінійно залежні. **C7.** Лінійно незалежні. **C8.** Лінійно залежні. **C9.** Лінійно залежні. **C10.** Лінійно незалежні. **C11.** Лінійно залежні. **C12.** Лінійно залежні. **C13.** Лінійно незалежні. **C14.** Лінійно незалежні. **C17.** $y''\cos x+y'\sin x=0$. **C18.** $(x^3-3x)y''+(6-x^2)y'+(3x-6)y=0$. **C19.** $(x^3-3x^2\ln x)y''+(x+6x\ln x)y'-9y=0$. **C20.** $2y''\cos^2x+3y'\sin 2x+(4\sin^2x+2)y=0$. **C21.** $(5x-6)y'''+(31-30x)y''+25xy'-25y=0$. **C22.** $y'''+y'=0$. **C23.** $y'''-11y''+34y'-24y=0$. **C24.** $x^3y'''+x^2y''-5xy'+8y=0$. **C25.** $y'''=0$. **C26.** $y'''-y''=0$. **C27.** $(x^2+x)y'''-(x^2-2)y''-(x+2)y'=0$. **C28.** $y'''\sin x\cos x+(2\cos^2x-3)y''=0$. **C29.** $(x^3+3x^2+3x)y'''+(x^3-3x-3)y''-(3x^2+3x)y'+(3x+3)y=0$. **C30.** $x^3y'''-6x^2y''+15xy'-15y=0$. **C31.** $y'''-y''+9y'-9y=0$. **C32.** $y=C_1(x+2)+C_2e^{\frac{x}{2}}$. **C33.** $y=C_1\frac{x+1}{x}+C_2x^2$. **C34.** $y = e^x(C_1x^2+C_2)$. **C35.** $y=C_1(x^2+1)+C_2e^{-x}$. **C36.** $y = C_1x+C_2e^x$. **C37.** $y=C_1x+C_2xe^{3x}$. **C38.** $y=C_1\frac{e^x}{x^2}+C_2e^x$. **C39.** $y=C_1(4x^2+1)+C_2e^{-2x}$. **C40.** $y=C_1x^2e^{-5x}+C_2x$. **C41.** $y=C_1x^2\ln x+C_2x^2$. **C42.** $y=C_1x\cos x+C_2\cos x$. **C43.** $y=\frac{C_1}{\ln x}+C_2\ln x$. **C44.** $y=C_1\frac{3x^4-6x^2-1}{x^3+x}+C_2\frac{x^2}{x^2+1}$. **C45.** $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$. **C46.** $y=C_1\sin^2x+C_2\sin x$. **C47.** $y = C_1\frac{e^x}{x}+C_2xe^x$. **C48.** $xy=(x+1)(C_1e^{-2x}+C_2)$. **C49.** $y = C_1x^2+C_2(x+3)$. **C50.** $xy=C_1e^{6x}+C_2$. **C51.** $y =$

$= C_1 x \sin x + C_2 x \cos x$. **C52.** $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. **C53.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{3x}$. **C54.** $y = C_1 x + C_2 x e^x + C_3 x e^{3x}$. **C55.** $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x e^x$. **C56.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 x e^x$. **C57.** $y = C_1 x + C_2 x e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x}$. **C58.** $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x e^{5x}$. **C59.** $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 e^{3x} + C_3 x^2 e^{-x}$. **C60.** $y = (C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^3) e^x$.

Тема 15. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та звідні до них

Короткі теоретичні відомості

15.1. Лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Для лінійного однорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (15.1)$$

будуємо характеристичне рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (15.2)$$

Кожному простому дійсному кореню k_j рівняння (15.2) ставимо у відповідність функцію $e^{k_j x}$, кожному дійсному кореню k_j кратності s_j – функції $e^{k_j x}$, $xe^{k_j x}$, $\ldots$, $x^{s_j - 1} e^{k_j x}$, кожній парі простих комплексно-спряжених коренів $k_j = \alpha_j + i\beta_j$ і $k_{j+1} = \alpha_j - i\beta_j$ – функції $e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$ і $e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x$, кожній парі комплексно-спряжених коренів $k_j = \alpha_j + i\beta_j$ і $k_{j+1} = \alpha_j - i\beta_j$ кратності s_j – функції $e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$, $e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x$, $xe^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$, $xe^{\alpha_j x} \sin \beta_j x$, $\ldots$, $x^{s_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$, $x^{s_j - 1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x$. Загальний розв'язок рівняння (15.1) будуємо як лінійну комбінацію отриманих n функцій з довільними сталими C_1, C_2, $\ldots$, C_n.

15.2. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Рівнянням Ейлера називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad (15.3)$$

де a_1, a_2, $\ldots$, a_n – сталі дійсні числа. Для $x > 0$ виконуємо заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$. Тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t},$$
$$y''_{x^2} = \bigl(y''_{t^2} \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}\bigr)e^{-t} = \bigl(y''_{t^2} - y'_t\bigr)e^{-2t},$$
$$y'''_{x^3} = \bigl(y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t\bigr)e^{-3t}, \quad \ldots,$$
$$y^{(n)}_{x^n} = \Bigl(y^{(n)}_{t^n} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!y'_t\Bigr)e^{-nt}.$$

Підставляючи $x = e^t$ і знайдені вирази для y'_x, y''_{x^2}, $\ldots$, $y^{(n)}_{x^n}$ у (15.3), одержимо лінійне однорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння і підставивши у нього $t = \ln x$, матимемо загальний розв'язок рівняння Ейлера.

Рівняння Лагранжа

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} p_1 y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + (ax+b)p_{n-1}y' + p_n y = 0,$$

де a, b, p_1, p_2, $\ldots, p_n$ – сталі, заміною незалежної змінної за формулою $ax + b = e^t$ зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння Чебишова

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

заміною незалежної змінної за формулою $x = \cos t$ ($t = \arccos x$) зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Лінійне однорідне рівняння (14.2) зводиться перетворенням незалежної змінної до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами з допомогою підстановки

$$t = \alpha \int \sqrt[n]{p_n(x)}\,dx, \tag{15.4}$$

де α — деяка стала.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 15.1. Зінтегрувати рівняння $y'' + y' - 2y = 0$.
Розв'язання. Характеристичним рівнянням є $k^2 + k - 2 = 0$, а його коренями – числа $k_1 = 1$ і $k_2 = -2$. Отже, загальним розв'язком рівняння є $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, де C_1, C_2 – довільні сталі. ■

Приклад 15.2. Зінтегрувати рівняння $y''' + 6y' + 20y = 0$.
Розв'язання. Розв'язками характеристичного рівняння $k^3 + 6k + 20 = 0$ є один дійсний і два комплексно-спряжені корені: $k_1 = -2$, $k_2 = 1 + 3i$, $k_3 = 1 - 3i$, а тому загальний розв'язок заданого рівняння можемо записати у вигляді $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \cos 3x + C_3 e^x \sin 3x$. ■

Приклад 15.3. Зінтегрувати рівняння $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - k^2 - 5k - 3 = 0$ має один простий корінь $k_1 = 3$ і один кратний корінь $k_2 = k_3 = -1$. Цим кореням відповідають розв'язки e^{3x}, e^{-x}, xe^{-x}, а $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$ є загальним розв'язком. ■

Приклад 15.4. Зінтегрувати рівняння $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$ має кратний дійсний корінь $k_1 = k_2 = k_3 = -2$. Отже, задане рівняння має три лінійно незалежні розв'язки e^{2x}, xe^{2x}, $x^2 e^{2x}$, а його загальним розв'язком є $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$. ■

Приклад 15.5. Зінтегрувати рівняння $y^{\mathrm{IV}} + 8y'' + 16y = 0$.
Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має два кратні комплексно-спряжені корені $k_1 = k_2 = 2i$, $k_3 = k_4 = -2i$. Отже, загальним розв'язком є $y = C_1 \cos 2x + C_2 x \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \sin 2x$. ■

Приклад 15.6. Зінтегрувати рівняння Ейлера $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$.
Розв'язання. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$ $(t = \ln x)$. Тоді $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = \big(y''_{t^2} - y'_t\big) e^{-2t}$.

Підставляючи ці вирази у вихідне рівняння, для знаходження функції $y = y(t)$ одержуємо рівняння:

$$e^{2t}\big(y'' - y'\big)e^{-2t} - 2e^t y' e^{-t} - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - 3y' - 4y = 0.$$

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 3k - 4 = 0$ має два дійсних різних корені $k_1 = -1$, $k_2 = 4$, то

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} \quad \Rightarrow \quad y(x) = C_1 e^{-\ln x} + C_2 e^{4\ln x} \quad \Rightarrow$$
$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^4. \ \blacksquare$$

Приклад 15.7. Зінтегрувати рівняння Лагранжа

$$(4x-1)^2 y'' - 4(4x-1)y' + 32y = 0.$$

Розв'язання. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $4x - 1 = e^t$ $(t = \ln(4x-1))$. Тоді $y'_x = 4y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = 16\big(y''_{t^2} - y'_t\big)e^{-2t}$. Підставляючи ці вирази у вихідне рівняння, для знаходження функції $y = y(t)$ одержуємо рівняння:

$$16e^{2t}\big(y'' - y'\big)e^{-2t} - 16e^t y' e^{-t} + 32y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 2 = 0$ має комплексно спряжені корені $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$, то

$$y(t) = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t \quad \Rightarrow$$
$$y(x) = C_1 e^{\ln(4x-1)} \cos\ln(4x-1) + C_2 e^{\ln(4x-1)} \sin\ln(4x-1) \quad \Rightarrow$$
$$y = C_1(4x-1)\cos\ln(4x-1) + C_2(4x-1)\sin\ln(4x-1). \ \blacksquare$$

Приклад 15.8. Зінтегрувати рівняння Чебишова

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0. \tag{15.5}$$

Точки $x = \pm 1$ є особливими точками цього рівняння. На кожному з інтервалів $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ виконуються умови теореми Коші. Побудуємо загальний розв'язок рівняння на інтервалі $(-1, 1)$. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $x = \cos t$ $(t = \arccos x)$. Тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -y'_t \frac{1}{\sin t},$$

$$y''_{x^2} = -\left(y''_{t^2} \frac{1}{\sin t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right) = y''_{t^2} \frac{1}{\sin^2 t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^3 t}.$$

Підставляючи знайдені вирази для y'_x і y''_{x^2}, а також $x = \cos t$, у рівняння (15.5), для знаходження функції $y = y(t)$ маємо диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y = 0. \tag{15.6}$$

Загальним розв'язком рівняння (15.6) є $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$, а після повернення до змінної x одержуємо

$$y = C_1 \cos(2 \arccos x) + C_2 \sin(2 \arccos x).$$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати рівняння:

A1. $y'' - 8y' + 15y = 0.$

A2. $y'' + 2y' + 2y = 0.$

A3. $y'' - 2y' = 0.$

A4. $y'' + 9y = 0.$

A5. $y''' - 2y'' = 0.$

A6. $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0.$

A7. $y^{\mathrm{IV}} - y = 0.$

A8. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0.$

A9. $x^3y''' - 2x^2y'' - xy' + 9y = 0.$

A10. $(2x-3)^2y'' + 4(2x-3)y' - 24y = 0.$

A11. $(x+1)^3y''' - 2(x+1)^2y'' + 4(x+1)y' - 6y = 0.$

A12. $(1-x^2)y'' - xy' + 16y = 0.$

Знайти розв'язок задачі Коші:

A13. $y'' + y' - 2y = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння:

C1. $y'' + y' - 2y = 0.$
C2. $y'' + 4y = 0.$
C3. $y'' + 2y' + 2y = 0.$
C4. $y'' - 10y' + 25y = 0.$
C5. $y'' + 2y' + 5y = 0.$
C6. $y'' - 2y' - 3y = 0.$
C7. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
C8. $y'' + 4y' + 4y = 0.$
C9. $y'' + y' - 6y = 0.$
C10. $y'' - 2y' + y = 0.$
C11. $y'' - 2y' + 2y = 0.$
C12. $y'' + 14y' + 49y = 0.$
C13. $2y'' - 5y' - 7y = 0.$
C14. $y'' - 6y' + 5y = 0.$
C15. $4y'' - 4y' + 5y = 0.$
C16. $y''' - 19y' + 30y = 0.$
C17. $y''' + y'' - 9y' - 9y = 0.$
C18. $y''' - 5y'' + 24y' - 20y = 0.$
C19. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0.$
C20. $y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 0.$
C21. $y^{\mathrm{IV}} + 5y''' - 7y'' - 29y' + 30y = 0.$
C22. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 0.$
C23. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' - 19y'' + 70y' - 50y = 0.$
C24. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$
C25. $y^{\mathrm{IV}} - 24y'' + 64y' - 48y = 0.$
C26. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0.$
C27. $2x^2y'' - xy' + y = 0.$
C28. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$
C29. $x^2y'' - xy' + y = 0.$
C30. $x^2y'' - xy' + 10y = 0.$
C31. $4x^2y'' - 4xy' - 5y = 0.$
C32. $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0.$
C33. $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0.$
C34. $3x^2y'' + 7xy' - 4y = 0.$
C35. $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 0.$
C36. $x^3y''' - 3x^2y'' + 11xy' - 16y = 0.$
C37. $x^3y''' - 2x^2y'' - xy' + 9y = 0.$
C38. $x^3y''' + 15x^2y'' + 61xy' + 64y = 0.$
C39. $(x+2)^2y'' - 5(x+2)y' + 8y = 0.$
C40. $(x+3)^2y'' + 2(x+3)y' - 6y = 0.$
C41. $2(2x+1)^2y'' - (2x+1)y' + 2y = 0.$
C42. $(x-1)^2y'' + 5(x-1)y' + 8y = 0.$
C43. $(2x+3)^2y'' - 2(2x+3)y' + 4y = 0.$
C44. $2(x+5)^2y'' + (x+5)y' - y = 0.$

C45. $(3x+1)^2y'' + 8(3x+1)y' - 6y = 0.$
C46. $(5x+7)^2y'' - 25(5x+7)y' + 225y = 0.$
C47. $(x+3)^3y''' + 5(x+3)^2y'' - 2(x+3)y' - 6y = 0.$
C48. $(2x+5)^3y''' + 9(2x+5)^2y'' + 4(2x+5)y' - 8y = 0.$
C49. $(x+2)^3y''' + 3(x+2)^2y'' - (x+2)y' - 4y = 0.$
C50. $(1-x^2)y'' - xy' + 3y = 0.$
Знайти розв'язки задач Коші:
C51. $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
C52. $y^{(4)} + y'' = 0; \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = y'''(0) = 0.$
C53. $y'' + y' - 6y = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$
C54. $y'' - 6y' + 5y = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$
C55. $y'' + y' - 12y = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 7.$

Відповіді

A1. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$. **A2.** $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$. **A3.** $y = C_1 + C_2e^{2x}$. **A4.** $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$. **A5.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$. **A6.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$. **A7.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$. **A8.** $y = C_1x^2 + C_2x^4$. **A9.** $y = C_1x^{-1} + C_2x^3 + C_3x^3\ln x$. **A10.** $y = C_1(2x-3)^{-3} + C_2(2x-3)^2$. **A11.** $y = C_1(x+1)^3 + C_2(x+1)\sin\ln(x+1) + C_3(x+1)\cos\ln(x+1)$. **A12.** $y = C_1\cos(4\arccos x) + C_2\sin(4\arccos x)$. **A13.** $y = e^{x} - e^{-2x}$. **C1.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$. **C2.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. **C3.** $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$. **C4.** $y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}$. **C5.** $y = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x$. **C6.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. **C7.** $y = C_1e^{4x}\cos 2x + C_2e^{4x}\sin 2x$. **C8.** $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$. **C9.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$. **C10.** $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$. **C11.** $y = C_1e^{x}\cos x + C_2e^{x}\sin x$. **C12.** $y = C_1e^{-7x} + C_2xe^{-7x}$. **C13.** $y = C_1e^{\frac{7}{2}x} + C_2e^{-x}$. **C14.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{5x}$. **C15.** $y = C_1e^{\frac{x}{2}}\cos x + C_2e^{\frac{x}{2}}\sin x$. **C16.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{-5x}$. **C17.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-3x}$. **C18.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}\cos 4x + C_3e^{2x}\sin 4x$. **C19.** $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_3e^{-x}$. **C20.** $y = C_1e^{-3x} + C_1xe^{-3x} + C_1x^2e^{-3x}$. **C21.** $y =$

$= C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x}+C_4e^{-5x}$. **C22.** $y = C_1+C_2x+C_3\cos x+ + C_4\sin x$. **C23.** $y = C_1e^x + C_2e^{-5x} + C_3e^{3x}\cos x + C_4e^{3x}\sin x$. **C24.** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$. **C25.** $y = = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4e^{-6x}$. **C26.** $y = C_1x + C_2/x$. **C27.** $y = C_1x + C_2\sqrt{x}$. **C28.** $y = C_1x + C_2/x^2$. **C29.** $y = = C_1x\ln x + C_2x$. **C30.** $y = C_1x\cos(3\ln x) + C_2x\sin(3\ln x)$. **C31.** $y = C_1x^2\sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}}$. **C32.** $y = C_1x^3 + C_2x^5$. **C33.** $y = = (C_1 + C_2\ln x)/x^3$. **C34.** $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2\sqrt[3]{x^2}$. **C35.** $y = = C_1x + C_2x^2 + C_3x^4$. **C36.** $y = C_1x^2 + C_2x^2\cos(2\ln x) + + C_3x^2\sin(2\ln x)$. **C37.** $y = C_1/x+C_2x^3+C_3x^3\ln x$. **C38.** $y = = (C_1 + C_2\ln x + C_3\ln^2 x)/x^4$. **C39.** $y = C_1(x + 2)^2 + + C_2(x + 2)^4$. **C40.** $y = \frac{C_1}{(x+3)^3} + C_2(x + 3)^2$. **C41.** $y = = C_1(2x+1)+C_2\sqrt[4]{2x + 1}$. **C42.** $y = \frac{1}{(x-1)^2}(C_1\cos(2\ln(x-1))+ + C_2\sin(2\ln(x - 1)))$. **C43.** $y = (2x + 3)(C_1\ln(2x + 3) + C_2)$. **C44.** $y = \frac{C_1}{\sqrt{x+5}} + C_2(x + 5)$. **C45.** $y = C_1\sqrt[3]{3x + 1} + \frac{C_2}{(3x+1)^2}$. **C46.** $y = (C_1 + C_2\ln(5x + 7))(5x + 7)^3$. **C47.** $y = C_1(x + 3)^2 + + \frac{C_2}{x+3} + \frac{C_3}{(x+3)^2}$. **C48.** $y = \frac{C_1}{(2x+5)^2} + \frac{C_2}{\sqrt{2x+5}} + C_3(2x + 5)$. **C49.** $y = C_1(x + 2)^2 + \frac{1}{x+2}(C_2\cos\ln(x + 2) + C_3\sin\ln(x + 2))$. **C50.** $y = C_1\cos(\sqrt{3}\arccos x) + C_2\sin(\sqrt{3}\arccos x)$. **C51.** $y = = e^{-x}\sin 2x$. **C52.** $y = x - 2$. **C53.** $y = e^{2x} - e^{-3x}$. **C54.** $y = = e^{5x} - e^x$. **C55.** $y = e^{3x} - e^{-4x}$.

Тема 16. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Короткі теоретичні відомості

16.1. Заміна шуканої функції. Зведення до канонічної форми. Лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{16.1}$$

де $p(x)$, $q(x)$ — неперервні на деякому інтервалі (a, b) функції, з допомогою заміни

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} \cdot z(x) \tag{16.2}$$

можна звести до рівняння без першої похідної

$$z'' + I(x)\,z = 0, \tag{16.3}$$

де

$$I(x) = q(x) - \frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4}. \tag{16.4}$$

Рівняння (16.3) називають ***канонічною формою*** рівняння (16.1), а функцію $I(x)$ — ***інваріантом*** цього рівняння. Якщо рівняння (16.3) інтегрується у квадратурах, то у квадратурах інтегруватиметься також рівняння (16.1). Так, наприклад, буде, коли $I(x) = C$, $I(x) = Cx^{-2}$ або $I(x) = C(ax+b)^{-2}$. У першому випадку (16.3) — рівняння зі сталими коефіцієнтами, у другому, третьому — рівняння Ейлера та рівняння Лагранжа відповідно (с. 142–143).

При інтегруванні рівняння (16.1) інколи корисною є комбінація підстановок (15.4) і (16.2). Перша з них зводить рівняння (16.1) до рівняння зі сталим коефіцієнтом біля шуканої функції, а друга — знищує доданок з першою похідною від шуканої функції. У результаті можемо одержати рівняння зі сталими коефіцієнтами.

16.2. Заміна незалежної змінної. Звести рівняння (16.1) до рівняння без першої похідної можна також з допомогою заміни незалежної змінної $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — деяка функція. Тоді функція $y(t)$ є розв'язком рівняння

$$y'' + \left(p_1\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t) - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)y' + p_2\bigl(\varphi(t)\bigr)\bigl(\varphi'(t)\bigr)^2 y = 0.$$

Добираючи тепер функцію $\varphi(t)$ так, щоб вираз біля y' дорівнював нулю, одержуємо:

$$\frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} = p_1\bigl(\varphi(t)\bigr) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(t) = e^{-\int p_1\,dx},$$

звідки

$$t = \int e^{-\int p_1(x)dx}dx. \tag{16.5}$$

16.3. Зведення до самоспряженого вигляду. Лінійне однорідне рівняння другого порядку вигляду

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{16.6}$$

де $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ — неперервні функції на деякому інтервалі (a,b), після множення на

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)}e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} \tag{16.7}$$

можна звести до самоспряженого вигляду, тобто до рівняння, в якому коефіцієнт біля y' дорівнює похідній від коефіцієнта біля y'':

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0 \;\; \Rightarrow$$
$$\bigl(p(x)y'\bigr)' + q(x)y = 0. \tag{16.8}$$

Якщо в рівнянні (16.8) зробити заміну $\xi = \int \frac{dx}{p(x)}$, то одержимо рівняння вигляду (16.3).

16.4. Зведення до рівняння Ріккаті. Порядок рівняння (16.1) завжди можна знизити на одиницю, якщо скористатися загальним правилом зниження порядку рівнянь, однорідних відносно шуканої функції та її похідних (с. 122). Якщо в рівнянні (16.1) зробити заміну

$$y' = yz(x), \tag{16.9}$$

то одержимо рівняння Ріккаті $z' = -z^2 - p(x)z - q(x)$. Якщо $z_1(x)$ — частинний розв'язок цього рівняння, то функція

$$y_1 = e^{\int z_1(x)} dx \tag{16.10}$$

буде частинним розв'язком рівняння (16.1).

Навпаки, будь-яке рівняння Ріккаті

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

з допомогою заміни $y = -\frac{u'}{ur(x)}$ можна звести до лінійного рівняння другого порядку.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 16.1. Звести рівняння $x^2y''+xy'+(x^2-1/4)y = 0$ до канонічної форми та зінтегрувати його.
Розв'язання. Оскільки $p(x) = x^{-1}$, $q(x) = 1 - x^{-2}/4$, то за формулою (16.4) знаходимо інваріант

$$I(x) = 1 + (-1/4 + 1/2 - 1/4)x^{-2} = 1.$$

Отже, заміна $y = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}} z = zx^{-1/2}$ зводить задане рівняння до рівняння $z'' + z = 0$, загальний розв'язок якого $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Оскільки $y = zx^{-1/2}$, то

$$y = x^{-1/2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x). \ \blacksquare$$

Приклад 16.2. Зінтегрувати рівняння $x^4y''+4y = 0$, комбінуючи заміну незалежної змінної та шуканої функції.

Розв'язання. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою (15.4):

$$t = C\int\sqrt{\frac{4}{x^4}}\,dx = 2C\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{2C}{x}$$

і візьмемо сталу $C = 1/2$. Тоді $t = -1/x$ або $x = -1/t$. Підставляючи у рівняння $x = -1/t$, а також похідні

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}t^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}t^2\right)t^2 = \frac{d^2y}{dt^2}t^4 + 2\frac{dy}{dt}t^3,$$

відносно функції $y = y(t)$ одержуємо рівняння

$$\frac{1}{t^4}\left(y''\,t^4 + 2t^3y'\right) + 4y = 0 \quad\Rightarrow\quad y'' + \frac{2}{t}y' + 4y = 0.$$

Останнє рівняння зведемо до канонічної форми, виконуючи заміну (16.2): $y = e^{-\int\frac{dt}{t}}z(t) = \frac{z(t)}{t}$. Оскільки за формулою (16.4) інваріант $I(t) = 4$, то для знаходження функції $z = z(t)$ одержуємо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$z'' + 4z = 0 \quad\Rightarrow\quad z = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t.$$

Після повернення до змінних x і y одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = x\left(C_1\cos\frac{2}{x} + C_2\sin\frac{2}{x}\right). \ \blacksquare$$

Приклад 16.3. Звести рівняння $xy'' + y'/2 - y = 0$, де $x > 0$, до самоспряженого вигляду та зінтегрувати його.

Розв'язання. Використовуючи формулу (16.7), знаходимо функцію $\mu(x)$: $\mu(x) = e^{\int\frac{dx}{2x}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$. Помноживши задане рівняння на цю функцію, одержуємо рівняння у самоспряженому вигляді:

$$\sqrt{x}y'' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y' - \frac{1}{\sqrt{x}}y = 0 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{x}y'\right)' - \frac{1}{\sqrt{x}}y = 0.$$

Зробимо заміну $\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$. Тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{x}\frac{dy}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2y}{d\xi^2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ і, підставляючи у задане рівняння, після нескладних перетворень, для знаходження функції $y = y(\xi)$ одержуємо рівняння $y'' - y = 0$. Звідси

$$y(\xi) = C_1 e^{\xi} + C_2 e^{-\xi} \;\;\Rightarrow\;\; y(x) = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}. \;\blacksquare$$

Приклад 16.4. З допомогою заміни незалежної змінної звести рівняння $(1-x^2)y'' - xy' + k^2 y = 0$ до рівняння без першої похідної та зінтегрувати його.

Розв'язання. Користуючись формулою (16.5), одержуємо:

$$t = \int e^{\int \frac{x}{1-x^2}dx} dx = \int e^{-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C} dx =$$

$$= C\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C\arcsin x.$$

Візьмемо $C = 1$. Тоді $x = \sin t = \varphi(t)$ і для знаходження функції $y(t)$ маємо рівняння

$$y'' + \frac{k^2}{1-\sin^2 t}\cos^2 t \cdot y = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y'' + k^2 y = 0,$$

загальним розв'язком якого є функція

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Повертаючись до змінної x, знаходимо загальний розв'язок початкового рівняння

$$y = C_1 \cos(k \arcsin x) + C_2 \sin(k \arcsin x). \;\blacksquare$$

Приклад 16.5. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + xy' - (2x^2+1)y = 0,$$

попередньо звівши його до рівняння Ріккаті.

Розв'язання. Виконуючи підстановку (16.9), одержуємо рівняння $z' = -z^2 - xz + 2x^2 + 1$, частинним розв'язком якого, як легко переконатись, є функція $z_1 = x$. Отже, згідно з формулою (16.10) початкове рівняння має частинний розв'язок $y_1 = e^{x^2/2}$. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати рівняння, звівши їх до канонічної форми:

A1. $y'' - 2xy' + x^2 y = 0$.

A2. $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$.

A3. $(x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = 0$.

A4. $y'' + \frac{2}{x}y' - a^2 y = 2$.

A5. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4) = 2x^{5/2}e^x$.

A6. $x^2 y'' + 2x^4 y' + (x^6 + 2x^3 + 1)y = 0$.

Зінтегрувати рівняння, звівши їх з допомогою заміни незалежної змінної до рівнянь без першої похідної:

A7. $y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0$.

A8. $y'' + \frac{2xy'}{x^2+1} + \frac{y}{(x^2+1)^2} = 0$.

A9. $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$.

A10. $x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$.

A11. $2xy'' + y' - 2y = 0$.

A12. $xy'' - 2y' + 9x^5 y = 0$.

Звести рівняння до самоспряженого вигляду:

A13. $xy'' + 2y' + 5xy = 0$.

A14. $xy'' + (1-2x)y' + ny = 0$.

A15. $x^2 y'' + 2x^2 y' + y = 0$.

A16. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

Комбінуючи заміну незалежної змінної і шуканої функції, зінтегрувати рівняння:

A17. $x^4 y'' - k^2 y = 0$.

A18. $y'' + 2xy' + (x^2 + x^{-2} + 1)y = 0$.

Звести лінійні рівняння другого порядку до рівнянь Ріккаті:

A19. $xy'' - 7y' + xy = 0$.

A20. $x^2y'' - 2xy' + y = 0$.

A21. $x^{4/3}y'' - y = 0$.

A22. Рівняння Ріккаті $y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$ звести до лінійного диференціального рівняння другого порядку.

A23. Нехай

$$\big(p(x)u'\big)' + q(x)u = f(x), \quad \big(p(x)v'\big)' + q(x)v = g(x).$$

Довести тотожність Лагранжа

$$\big(p(t)(u(t)v'(t) - u'(t)v(t))\big)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \int_{x_0}^{x} \big(g(p)u(p) - f(p)v(p)\big)\big)dp.$$

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати рівняння, звівши їх до канонічної форми:

C1. $x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 0$.

C2. $2xy'' - (x+4)y' + (1+4/x)y = 0$.

C3. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 1 + x^2$.

C4. $xy'' + 2y' - xy = 2e^x$.

C5. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$.

C6. $xy'' - (4x+2)y' + (4x+4)y = 0$.

Зінтегрувати рівняння, звівши їх з допомогою заміни незалежної змінної до рівнянь без першої похідної:

C7. $x^4y'' + 2x^3y' + k^2y = 0$.

C8. $y'' - y' + e^{2x}y = 0$.

C9. $(x^2+1)y'' + xy' + y = 0$.

C10. $y''\sin x - y'\cos x - y\sin^3 x = 0$.

C11. $xy'' + y'/2 + y = 0$.

C12. $xy'' - (1+2x^2)y' - 24x^3y = 0$.

Звести рівняння до самоспряженого вигляду:

C13. $y'' - 2xy' + 3y = 0$.

C14. $xy'' - (2x^2 + 1)y' + 4y = 0$.

C15. $x(x-1)y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)y' + 2\alpha\beta y = 0$.

C16. $x(x+3)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 6xy = 0$.

Комбінуючи заміну незалежної змінної і шуканої функції, зінтегрувати рівняння:

C17. $y'' - 2xy' + (x^2 - x^{-2} - 1)y = 0$.

Звести лінійні однорідні рівняння другого порядку до рівнянь Ріккаті:

C18. $x^2y'' + xy' - y = 0$.

C19. $x^4y'' + 2x^3y' + 9y = 0$.

C20. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$.

Рівняння Ріккаті звести до лінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

C21. $y' = 5y + y^2 + x^2$.

C22. $y' = y^2 - x^{-4/3}$.

C23. Довести, що якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (16.8), то існує така стала C, що $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \frac{C}{p(x)}$.

C24. Використовуючи результат попередньої задачі, довести, що два розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння (16.8) ($p(x)$ і $q(x)$ — неперервні функції), які мають спільну точку екстремуму $x = x_0$, є лінійно незалежними.

Відповіді

A1. $y = e^{\frac{x^2}{2}}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **A2.** $y = C_1e^x + C_2e^x x^3$. **A3.** $y(x-1) = C_1 + C_2x^2$. **A4.** $y = \frac{C_1e^{ax}}{x} + \frac{C_2e^{-ax}}{x} - \frac{2}{a^2}$. **A5.** $y\sqrt{x} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x-1)e^x$. **A6.** $y = \sqrt{x}e^{-\frac{x^3}{3}}\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$. **A7.** $y = C_1 \sin(\sin x) + C_2 \cos(\sin x)$. **A8.** $y = C_1 \sin(\operatorname{arctg} x) + C_2 \cos(\operatorname{arctg} x)$. **A9.** $y = C_1e^{x^2} + C_2e^{-x^2}$. **A10.** $y = C_1e^{\frac{1}{x}} + C_2e^{-\frac{1}{x}}$. **A11.** $y = C_1e^{2\sqrt{x}} + C_2e^{-2\sqrt{x}}$. **A12.** $y = C_1 \cos x^3 + C_2 \sin x^3$.

A13. $(x^2y')'+5xy=0$. **A14.** $(xe^{-2x}y')'+ne^{-2x}y=0$. **A15.** $(e^{2x}y')'+$ $+\frac{e^{2x}}{x^2}y=0$. **A16.** $\left(\sqrt{1-x^2}y'\right)'+\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0$. **A17.** $y=C_1xe^{\frac{k}{x}}+$ $+C_2xe^{-\frac{k}{x}}$. **A18.** $y=e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$. **A19.** $xz'+xz^2-7z+x=0$. **A20.** $x^2z'+x^2z^2-2xz+1=0$. **A21.** $z'+z^2-x^{-4/3}=0$. **A22.** $xz''-z'+z=0$. **C1.** $x(x+1)y=$ $=C_1x+C_2$. **C2.** $y=C_1x+C_2xe^{\frac{x}{2}}$. **C3.** $y=\frac{C_1x+C_2+x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}-1$. **C4.** $y=\frac{C_1e^x+C_2e^{-x}}{x}+e^x$. **C5.** $y=C_1x\cos x+C_2x\sin x$. **C6.** $y=$ $=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}x^3$. **C7.** $y=C_1\sin\frac{k}{x}+C_2\cos\frac{k}{x}$. **C8.** $y=C_1\sin(e^x)+$ $+C_2\cos(e^x)$. **C9.** $y=C_1\sin(x+\sqrt{x^2+1})+C_2\cos(x+\sqrt{x^2+1})$. **C10.** $y=C_1e^{\cos x}+C_2e^{-\cos x}$. **C11.** $y=C_1\cos(2\sqrt{x})+C_2\sin(2\sqrt{x})$. **C12.** $y=C_1e^{3x^2}+C_2e^{-2x^2}$. **C13.** $(e^{-x^2}y')'+3e^{-x^2}y=0$. **C14.** $\left(\frac{e^{-x^2}}{x}y'\right)'+\frac{4e^{-x^2}}{x^2}y=0$. **C15.** $\left(x^\gamma(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+1}y'\right)'+$ $+2\alpha\beta x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}y=0$. **C16.** $\left(\frac{(x+3)^{16}}{x^4e^{4x}}y'\right)'+6\frac{(x+3)^{15}}{x^4e^{4x}}y=0$. **C17.** $y=e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{x}\left(C_1x^{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C_2x^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)$. **C18.** $x^2z'+x^2z^2+xz-1=0$. **C19.** $x^4z'+x^4z^2+2x^3z+9=0$. **C20.** $x^2z'+x^2z^2-2xz+x^2+2=0$. **C21.** $z''-5z'+x^2z=0$. **C22.** $x^{4/3}z''-z=0$.

Тема 17. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку (I)

Короткі теоретичні відомості

17.1. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (17.1)$$

де коефіцієнти $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_n(x)$ і права частина $f(x)$ є неперервними на деякому інтервалі (a, b), а також відповідне однорідне рівняння

$$L(y) = 0. \qquad (17.2)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (17.1) дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку цього рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (17.2). Тобто, якщо $Y = Y(x)$ — деякий частинний розв'язок рівняння (17.1), а

$$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \qquad (17.3)$$

є загальним розв'язком рівняння (17.2), то загальним розв'язком рівняння (17.1) є

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + Y. \qquad (17.4)$$

Якщо права частина лінійного неоднорідного рівняння (17.1) є сумою декількох доданків, тобто

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

то частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (17.1) буде функція $Y = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$, де y_j — частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_j(x)$.

17.2. Метод варіації довільних сталих. Для знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння (17.1) часто застосовують *метод варіації довільних сталих* (*метод Лагранжа*), який завжди дозволяє знайти загальний розв'язок рівняння (17.1) у квадратурах, якщо відома фундаментальна система розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ відповідного однорідного рівняння (17.2). Цей метод полягає у тому, що розв'язок рівняння (17.1) шукається у вигляді

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n, \tag{17.5}$$

де $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ — деякі неперервно диференційовні функції, які потрібно знайти. Ці функції знаходять з системи

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Оскільки визначником цієї системи є вронскіан $W(x)$, який відмінний від нуля для всіх $x \in (a, b)$, то система має єдиний розв'язок

$$C_j'(x) = \frac{W_{nj}(x)f(x)}{W(x)} \quad \Rightarrow \quad C_j(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{nj}(x)f(x)}{W(x)}dx + C_j,$$

де $j = 1, 2, \ldots, n$, $W_{nj}(x)$ — алгебричне доповнення елементів n-го рядка вронскіана $W(x)$, C_j — довільні сталі, а $x_0 \in (a, b)$.

Підставляючи знайдені вирази для функцій $C_j(x)$ у формулу (17.5), одержуємо

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{nj}(x)f(x)}{W(x)}dx + \sum_{j=1}^{n} C_j y_j. \tag{17.6}$$

17.3. Метод Коші. Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (17.2).

Використовуючи формулу (17.3), побудуємо розв'язок рівняння (17.2), який задовольняє початкові умови

$$z(s) = 0,\ z'(s) = 0,\ \ldots,\ z^{(n-2)}(s) = 0,\ z^{(n-1)}(s) = 1, \quad (17.7)$$

де $x = s$ — довільна точка з інтервалу (a, b). Цей розв'язок позначимо через $z = \varphi(x, s)$ (він залежить від s як від параметра). Функція $z = \varphi(x, s)$ як функція змінної x є розв'язком однорідного рівняння (17.2) для кожного $s \in (a, b)$ і, крім того, як функція змінної x задовольняє умови

$$\begin{gathered} \varphi(s, s) = 0,\quad \varphi'(s, s) = 0,\ \ldots, \\ \varphi^{(n-2)}(s, s) = 0,\quad \varphi^{(n-1)}(s, s) = 1, \end{gathered} \quad (17.8)$$

де $\varphi^{(j)}(s, s) = \left.\frac{d^j \varphi(x,s)}{dx^j}\right|_{x=s}$. Тоді функція

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, s) f(s) ds, \quad (17.9)$$

де $x_0 \in (a, b)$ – довільна точка, є частинним розв'язком рівняння (17.1), який задовольняє нульові початкові умови, тобто

$$Y(x_0) = 0,\ \ldots,\ Y'(x_0) = 0,\ \ldots,\ Y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Формулу (17.9) називають ***формулою Коші***. Використовуючи цю формулу, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (17.1) можемо записати у вигляді

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, s) f(s) ds,$$

де y_0 — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (17.2).

Функцією Коші оператора $L(y)$ називають розв'язок задачі Коші

$$\begin{gathered} L(y) = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ \ldots, y^{(n-2)}(0) = 0,\ y^{(n-1)}(0) = 1. \end{gathered} \quad (17.10)$$

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 17.1. Зінтегрувати рівняння $y'' - \frac{y'}{x} = x$.
Розв'язання. Зінтегруємо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \bigl(\ln y' - \ln x\bigr)' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{x} = C_1 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 x^2 + C_2.$$

Отже, $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$ – фундаментальна система розв'язків. Нехай $C_1 = C_1(x)$ і $C_2 = C_2(x)$. Складемо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ 2C_1'(x)x + C_2'(x) \cdot 0 = x. \end{cases}$$

Звідси $C_1'(x) = 1/2$, $C_2'(x) = -x^2/2$, а отже,

$$C_1(x) = x/2 + C_1, \quad C_2(x) = -x^3/6,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, одержуємо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:

$$y = C_1 x^2 + C_2 - \frac{x^3}{3}. \quad \blacksquare$$

Приклад 17.2. Знаючи фундаментальну систему розв'язків $y_1 = \ln x$, $y_2 = x$ відповідного однорідного рівняння, знайти частинний розв'язок рівняння

$$x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x},$$

який прямує до нуля при $x \to +\infty$.
Розв'язання. Застосовуючи метод варіації довільних сталих, знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = C_1(x) \ln x + C_2(x)x \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2'(x)x = 0, \\ C_1'(x)\frac{1}{x} + C_2'(x) = \frac{1-\ln x}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \; C_1'(x) = \frac{1}{x^2},\; C_2'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}.$$

Інтегруючи, знаходимо функції

$$C_1(x) = \frac{1}{x} + C_1, \quad C_2(x) = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C_2,$$

і, після нескладних перетворень, одержуємо загальний розв'язок

$$y = C_1 \ln x + C_2 x + \frac{1 - 2\ln x}{4x}. \tag{17.11}$$

Якщо $x \to \infty$, то функції y_1, y_2 прямують до нескінченності. Третій доданок у (17.11) є нескінченно малою функцією при $x \to \infty$, у чому легко переконатися з допомогою правила Лопіталя.

Отже, умову $x \to +\infty$ задовольняє тільки частинний розв'язок $Y(x) = \frac{1-2\ln x}{4x}$. ■

Приклад 17.3. Зінтегрувати рівняння $y'' + 4y = f(x)$ методом Коші.

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідного рівняння є $y_0 = {}_1\cos 2x + {}_2\sin 2x$.

Використовуючи умови (17.7), одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1\cos 2s + C_2\sin 2s = 0, \\ -2C_1\sin 2s + 2C_2\cos 2s = 1. \end{cases}$$

Звідси $C_1(x) = -\frac{\sin 2s}{2}$, $C_2(x) = \frac{\cos 2s}{2}$, а тому розв'язок $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s) = \frac{1}{2}\sin 2(x-s).$$

Тепер згідно з (17.9) можемо записати розв'язок заданого рівняння з нульовими початковими умовами:

$$Y(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \sin 2(x-s) f(s)ds.$$

Таким чином, загальним розв'язком заданого рівняння є

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \sin 2(x-s) f(s) ds. \quad \blacksquare$$

Приклад 17.4. Побудувати функція Коші диференціального оператора $L(y) = y'' + 2y' + y$.
Розв'язання. Згідно з (17.10) потрібно знайти розв'язок рівняння $y'' + 2y' + y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Підставляючи його у початкові умови, знаходимо сталі $C_1 = 0, C_2 = 1$. Отже, шуканою функцією Коші є функція $K(x) = xe^{-x}$. $\blacksquare$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

1. Зінтегрувати рівняння методом варіації довільних сталих.

A1. $y'' + 4y = \sec 2x$.

A2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

A3. $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3} e^x$.

A4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.

A5. $x^2 y'' + xy' - y = \sin x$.

A6. $y'' + y = 2\sec^3 x$.

A7. $y'' - y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

A8. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

2. Знайти розв'язок задачі Коші.

A9. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

A10. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$, $y(\pi/6) = 1$, $y'(\pi/6) = \pi/6$.

A11. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{\sin^3 \frac{x}{2}}$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

A12. $y'' + 9y = \operatorname{ctg}^2 3x$, $y(\pi/2) = -2/9$, $y'(\pi/2) = 3$.

A13. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -e^{-2}$.

3. Знайти частинний розв'язок рівняння із заданими умовами на нескінченності (y_1, y_2 — фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння).

A14. $(1+x^2)y''+2xy' = \dfrac{1}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \dfrac{\pi^2}{8}$, $y'(0) = 0$.

A15. $4xy'' + 2y' + y = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1$; $y_1 = \sin\sqrt{x}$, $y_2 = \cos\sqrt{x}$.

A16. $2x^2(2 - \ln x)y'' + x(4 - \ln x)y' - y = (2 - \ln x)^2 x^{-1/2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$; $y_1 = \ln x$, $y_2 = \sqrt{x}$.

A17. $x^3(\ln x - 1)y'' - x^2y' + xy = 2\ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = \ln x$.

4. Зінтегрувати рівняння методом Коші або знайти розв'язок задачі Коші.

A18. $x^2y'' + xy' - y = \sin x$.

A19. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{e^{-3x} + 3}$.

A20. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

A21. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

A22. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5. Побудувати функцію Коші диференціального оператора.

A23. $L(y) = y'' - 2y' + 2y$.

A24. $L(y) = y''' - 6y'' + 11y' - 6y$.

A25. $L(y) = y^{(4)} + 4y'' + 3y$.

A26. $L(y) = y^{(4)} - 4y''$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

1. Зінтегрувати рівняння методом варіації довільних сталих.

C1. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

C2. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

C3. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$.

C4. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$.

C5. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x + 1}$.

C6. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^7 x \cos^8 x}}$.

C7. $y'' + 2y = 2 - 4x^2 \sin x^2$.

C8. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x$.

2. Знайти розв'язок задачі Коші.

C9. $y'' + 16y = \dfrac{1}{\cos^3 4x}$, $y(0) = -1/32$, $y'(0) = -4$.

C10. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

C11. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x} \sin x}{\cos^3 x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5/2$.

C12. $y'' + 3y' = \dfrac{3x - 1}{x^2}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

C13. $y'' - 4y = (15 - 16x^2)\sqrt{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

3. Знайти частинний розв'язок рівняння із заданими умовами на нескінченності (y_1, y_2 — фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння).

C14. $4xy'' + 2y' + y = \dfrac{x + 6}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$; $y_1 = \sin\sqrt{x}$, $y_2 = \cos\sqrt{x}$.

C15. $(1-x)y''+xy'-y = (x-1)^2 e^x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)=0$, $y(0)=1$; $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

C16. $y'' + \dfrac{2}{x}y' - y = 4e^x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0$, $y'(-1) = -e^{-1}$; $y_1 = \frac{e^x}{x}$, $y_2 = \frac{e^{-x}}{x}$.

C17. $x(x-2)y''-(x^2-2)y'-2(1-x)y = 2x-2,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=1;$ $y_1 = x^2,\ y_2 = e^x.$

4. Зінтегрувати рівняння методом Коші або знайти розв'язок задачі Коші.

C18. $y'' + \dfrac{3}{4}y' = \dfrac{1}{2+e^{-\frac{3}{4}}}.$

C19. $y'' + 9y = 36e^{3x}.$

C20. $y'' + y = \cos x + \dfrac{1}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$

C21. $y'' + xy' + y = 2e^x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

C22. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin x},\ \ y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = -2.$

5. Побудувати функцію Коші диференціального оператора.

C23. $L(y) = y'' - y' + y.$

C24. $L(y) = y''' + 4y'' - y' - 4y.$

C25. $L(y) = y^{(4)} - 5y'' + 4y.$

C26. $L(y) = y^{(5)} - 10y''' + 9y.$

Тема 18. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку (II)

Короткі теоретичні відомості

18.1. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод невизначених коефіцієнтів використовують для відшукання частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{18.1}$$

якщо його права частина $f(x)$ має спеціальний вигляд.

Якщо функція $f(x)$ є добутком многочлена степеня m на експоненціальну функцію, тобто

$$f(x) = R_m(x) e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{m} r_k x^{m-k} e^{\alpha x},$$

і число α не є коренем характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (18.1) шукають у вигляді добутку многочлена степеня m з невідомими коефіцієнтами на експоненціальну функцію:

$$Y = Q_m(x) e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{m} q_k x^{m-k} e^{\alpha x}.$$

Якщо функція $f(x)$ є добутком многочлена степеня m на експоненціальну функцію і число α є коренем кратності s характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (18.1) шукають у вигляді

$$Y = Q_m(x) x^s e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{m} q_k x^{m+s-k} e^{\alpha x}.$$

Якщо функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{ax} \Big(R^{(1)}_{m_1}(x) \cos bx + R^{(2)}_{m_2}(x) \sin bx \Big), \tag{18.2}$$

де $R_{m_1}^{(1)}(x)$ і $R_{m_2}^{(2)}(x)$ — многочлени степенів m_1 і m_2 відповідно, а число $a + bi$ не є коренем характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (18.1) шукають у вигляді

$$f(x) = e^{ax}\Big(Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\Big),$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ — многочлени степеня $m = \max\{m_1, m_2\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Якщо функція $f(x)$ має вигляд (18.2), а число $a+bi$ є коренем кратності s характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (18.1) шукають у вигляді

$$f(x) = e^{ax}x^s\Big(Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\Big),$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ — многочлени степеня $m = \max\{m_1, m_2\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 18.1. Зінтегрувати рівняння $y''-3y'-4y = 4e^{3x}$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 3k - 4 = 0$ має корені $k_1 = 4$, $k_2 = -1$, а тому загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є функція $y_0 = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$.

Оскільки число $\alpha = 3$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$Y = Ae^{3x}.$$

Підставляючи Y у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} \equiv 4e^{3x},$$

з якої визначаємо, що $A = -1$. Отже, $Y = -e^{3x}$, а загальним розв'язком є

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - e^{3x}. \ \blacksquare$$

Приклад 18.2. Зінтегрувати рівняння $y''' - 2y'' = x^2 - e^x$.
Розв'язання. Коренями характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння є числа $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 2$, а тому загальним розв'язком цього рівняння є функція $y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}$.

Праву частину неоднорідного рівняння запишемо у вигляді $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -e^x$.

Оскільки число $\alpha = 0$ є коренем характеристичного рівняння кратності 2, а число $\alpha = 1$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді

$$Y = x^2(Ax^2 + Bx + C) + De^x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^x.$$

Підставляючи Y у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$-24Ax^2 + (24A - 12B)x + (6B - 4C) - De^x \equiv x^2 - e^x,$$

з якої, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, знаходимо невизначені коефіцієнти A, B, C, D:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -24A = 1, \\ x^1 & 24A - 12B = 0, \\ x^0 & 6B - 4C = 0, \\ e^x & -D = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{24},\ B = -\frac{1}{12},\ C = -\frac{1}{8},\ D = 1.$$

Отже, $Y = -\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + e^x$, а загальним розв'язком є

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + e^x. \ \blacksquare$$

Приклад 18.3. Зінтегрувати рівняння $y'' + 4y = \cos 2x$. Знайти також частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Розв'язання. Коренями характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння є числа $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$, а тому загальним розв'язком цього рівняння є функція $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Оскільки число $a + bi = 2i$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1, то частинний розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді

$$Y = Ax \cos 2x + Bx \sin 2x.$$

Підставляючи Y у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$-4A \sin 2x - 4Ax \cos 2x + 4B \cos 2x - 4Bx \sin 2x + \\ + 4Ax \cos 2x + 4Bx \sin 2x \equiv \cos 2x,$$

з якої, прирівнюючи коефіцієнти біля $\sin 2x$ і $\cos 2x$, знаходимо невизначені коефіцієнти A, B:

$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & -4A = 0, \\ \cos 2x & 4B = 1, \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 0,\ B = \frac{1}{4}.$$

Отже, $Y = \frac{1}{4} x \sin 2x$, а загальним розв'язком є

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Враховуючи, що

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x,$$

з початкових умов отримуємо:

$$C_1 = 1, \quad 2C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y = \cos 2x + \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x. \ \blacksquare$$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів:

A1. $y'' + y' = 2x + 10\cos 2x$.

A2. $y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x} + \sin 2x$.

A3. $y''' - y'' = -3x + 1$.

A4. $y'' + y = 4e^{x}$.

A5. $y'' - 4y' + 4y = xe^{x}$.

A6. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} + 2x^2$.

A7. $y'' - 3y' = 4e^{4x} - 18$.

Для заданих рівнянь записати їхній частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів можна не знаходити):

A8. $y'' + 6y' + 13y = x^2e^{2x} - \cos 2x$.

A9. $y'' - 2y' + 2y = xe^{x}\sin x$.

A10. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - e^{3x}\sin x$.

A11. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 8x - 3\cos x$.

A12. $y'' - 8y' + 20y = 6xe^{4x}\cos 2x$.

A13. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\sin 4x$.

A14. $y'' - y = \operatorname{ch} x$.

Знайти розв'язок задачі Коші:

A15. $y'' - y = 2x; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -4$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів:

C1. $y'' - 3y' + 2y = \sin 2x$.

C2. $y'' - 2y' - 3y = -4e^{x} + 3$.

C3. $y'' + 2y' + y = 16e^{3x}$.

C4. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^{2x}$.

C5. $y'' - 5y' = 3e^{x} + \sin 5x$.

C6. $y'' + 2y' + 2y = xe^{5x}$.
C7. $y'' + 2y' - 3y = 25xe^{2x}$.
C8. $y'' - 9y = 18 - 9x$.
C9. $y'' + y = 4x\cos x$.
C10. $y'' - 5y' + 4y = \cos x$.
C11. $y'' + y' - 2y = 18xe^{x}$.
C12. $y'' - 4y' - 21y = 25x^2e^{2x}$.
C13. $y'' - y = 2e^{x} - x^2$.
C14. $y''' - 3y'' = e^{2x} - e^{x}$.
C15. $y'' + 3y' - 4y = 5e^{-4x} + xe^{-x}$.

Для заданих рівнянь записати їхній частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів можна не знаходити):

C16. $y'' - 6y' + 10y = 2xe^{3x} + 3e^{-3x}\sin x$.
C17. $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x} + 3e^{-x}\sin 2x$.
C18. $y'' - 2y' + 2y = (x - e^{x})\cos x$.
C19. $y''' + y' = 2\sin x + x\cos x - 1$.
C20. $y'' - 2y' + 2y = e^{x} + x\sin x$.
C21. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\sin^2 x$.
C22. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + e^{4x}\cos x$.
C23. $y'' + 2y' + y = x\,(e^{-x} - \sin x)$.
C24. $y''' - y'' - y' + y = 3e^{x} + 5x\cos x$.
C25. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 4x\sin x)$.
C26. $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + 3\sin 9x)$.
C27. $y'' + 4y = \cos x\cos 3x$.
C28. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + e^{2x}\sin 4x$.
C29. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\cos 2x + 2x^2$.
C30. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{4x}$.

Знайти розв'язки задач Коші:

C31. $y'' + 4y = e^{x}; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
C32. $y'' - 2y' - 15y = 15; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5$.
C33. $y'' + 3y' - 10y = 8e^{3x}; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

C34. $y'' + 2y' + 2y = 2x; \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 5.$

C35. $y'' + 9y = 9; \quad y(\pi/3) = 3, \ y'(\pi/3) = 6.$

C36. $y'' - 10y' + 2y = 2e^{5x}; \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 10.$

C37. $y'' - 6y' + 8y = 3e^{x}; \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1.$

C38. $y''' - y' = 3x^2; \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 2, \ y''(0) = 4.$

C39. $y''' - 9y'' + 18y' = 18; \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 2, \ y''(0) = 9.$

C40. $y''' + 8y'' + 5y' - 14y = 36e^{2x}; \quad y(0) = -1, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = -4.$

Відповіді

A1. $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 + \sin 2x - 2\cos 2x$. **A2.** $y = C_1e^{2x}\sin 2x + C_2e^{2x}\cos 2x + e^{2x} + \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x$. **A3.** $y = C_1e^{x} + C_2x + C_3 + \frac{1}{2}x^3 + x^2$. **A4.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2e^{x}$. **A5.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 2e^{x} + xe^{x}$. **A6.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$. **A7.** $y = C_1e^{3x} + C_2 + e^{4x} + 6x$. **A15.** $y = e^{-x} - e^{x} - 2x$. **C1.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$. **C2.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + e^{x} - 1$. **C3.** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + e^{3x}$. **C4.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} - (x^2+2)e^{2x}$. **C5.** $y = C_1e^{5x} + C_2 - \frac{3}{4}e^{x} - \frac{1}{50}\sin 5x + \frac{1}{50}\cos 5x$. **C6.** $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + \frac{1}{10}xe^{2x} - \frac{3}{50}e^{2x}$. **C7.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} - 6e^{2x} + 5xe^{2x}$. **C8.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x} - 2 + x$. **C9.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cos x + x^2\sin x$. **C10.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{4x} + \frac{3}{34}\cos x - \frac{5}{34}\sin x$. **C11.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} + 3x^2e^{x} - 2xe^{x}$. **C12.** $y = C_1e^{7x} + C_2e^{-3x} - \frac{2}{25}e^{2x} - x^2e^{2x}$. **C13.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + xe^{x} + x^2 + 2$. **C14.** $y = C_1e^{3x} + C_2 - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{x}$. **C15.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{36}(6x+1)e^{-x} - xe^{-4x}$. **C31.** $y = \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}e^{x}$. **C32.** $y = e^{5x} - 1$. **C33.** $y = e^{3x} - e^{2x}$. **C34.** $y = 8e^{-x}\sin x + 4e^{-x}\cos x - 1 + x$. **C35.** $y = 1 - 2\sin 3x - 2\cos 3x$. **C36.** $y = e^{5x} + 5xe^{5x} + x^2e^{5x}$. **C37.** $y = e^{x} - e^{4x} + e^{2x}$. **C38.** $y = 6e^{x} - 2e^{-x} - x^3 - 6x - 4$. **C39.** $y = \frac{1}{3}e^{6x} - \frac{1}{3}e^{3x} + x$. **C40.** $y = e^{2x} - \frac{15}{8}e^{x} - \frac{1}{8}e^{-7x}$.

Тема 19. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку

Короткі теоретичні відомості

19.1. Основні означення й поняття. Для рівняння

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{19.1}$$

де $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ — неперервні на відрізку $[a, b]$ функції, крайові умови задаються таким чином:

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = y_0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = y_1, \end{cases} \tag{19.2}$$

де α_1, α_2, β_1, β_2, y_0, y_1 — деякі числа, причому α_1, β_1 і α_2, β_2 одночасно не дорівнюють нулю. Числа a, b можуть бути й невласними.

Якщо $y_0 = y_1 = 0$, то крайові умови задачі (19.2) називають ***однорідними***, інакше — ***неоднорідними***. Якщо $f(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то крайову задачу (19.1), (19.2) називають ***неоднорідною***, а якщо $f(x) \equiv 0$ і $y_0 = y_1 = 0$, — то ***однорідною крайовою задачею***.

Крайові умови можуть мати також граничний вигляд, а числа a і b можуть бути невласними. Наприклад, можна розглядати крайові умови $\alpha_1 \lim\limits_{x\to a} y'(x) + \beta_1 \lim\limits_{x\to a} y(x) = 0$ або $\alpha_2 \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) + \beta_2 \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Неоднорідні крайові умови завжди можна звести до однорідних крайових умов. Це робиться з допомогою заміни шуканої функції $y(x) = z(x) + w(x)$, де $w(x)$ — довільна двічі неперервно диференційовна на $[a, b]$ функція, яка задовольняє неоднорідні крайові умови задачі (19.1) (часто — це лінійна функція). Тоді для функції $z(x)$ одержимо крайову задачу з однорідними крайовими умовами.

Розв'язком крайової задачі (19.1), (19.2) називають функцію $y(x)$, яка двічі неперервно диференційовна на (a, b), неперервно диференційовна на $[a, b]$ і задовольняє рівняння (19.1) на (a, b) та крайові умови (19.2).

19.2. Функція Ґріна крайової задачі. ***Функцією Ґріна*** однорідної крайової задачі (19.1), (19.2) називають функцію $G(x, s)$, яка визначена для довільних $x, s \in [a, b]$ і задовольняє такі умови:

1) для кожного фіксованого $s \in [a, b]$ $G(x, s)$ як функція змінної x на проміжках $[a, s)$ і $(s, b]$ є розв'язком однорідного рівняння

$$p_0(x)G''_{xx}(x, s) + p_1(x)G'_x(x, s) + p_2(x)G(x, s) = 0;$$

2) $G(x, s)$ за змінною x задовольняє однорідні крайові умови задачі (19.2);

3) $G(x, s)$ — неперервна для всіх $x, s \in [a, b]$, а її частинна похідна $G'_x(x, s)$ при $x = s$ має розрив першого роду зі стрибком $\frac{1}{p_0(s)}$, тобто

$$\begin{aligned} &G(s+0, s) - G(s-0, s) = 0, \\ &G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \tfrac{1}{p_0(s)}. \end{aligned} \tag{19.3}$$

Якщо однорідна крайова задача (19.1), (19.2) має лише тривіальний розв'язок, то розв'язок неоднорідної крайової задачі (19.1), (19.2) існує, єдиний та задається формулою

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \tag{19.4}$$

де $G(x, s)$ — функція Ґріна однорідної крайової задачі (19.1), (19.2).

Функцію Ґріна (якщо вона існує) можна шукати у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1(s)\varphi_1(x), & a \leqslant x < s \\ c_2(s)\varphi_2(x), & s < x \leqslant b, \end{cases} \tag{19.5}$$

де $\varphi_1(x)$ — довільний нетривіальний розв'язок однорідного рівняння (19.1), який задовольняє умову $\alpha_1\varphi_1'(a) + \beta_1\varphi_1(a) = 0$, $\varphi_2(x)$ — довільний нетривіальний розв'язок того самого рівняння, який задовольняє крайову умову $\alpha_2\varphi_2'(b)+\beta_2\varphi_2(b) = 0$, а функції $c_1(s)$, $c_2(s)$ добираються так, щоб виконувались умови (19.3).

У випадку лінійних однорідних крайових умов інших типів функцію Ґріна шукають у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\psi_1(x) + c_2(s)\psi_2(x), & a \leqslant x < s \\ c_3(s)\psi_1(x) + c_4(s)\psi_2(x), & s < x \leqslant b, \end{cases} \tag{19.6}$$

де $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (19.1), а коефіцієнти $c_1(s)$, $c_2(s)$, $c_3(s)$, $c_4(s)$ добираються так, щоб функція $G(x,s)$ задовольняла умови 1–3 означення.

19.3. Крайові задачі на власні значення. У багатьох задачах виникає необхідність знаходження розв'язків крайової задачі

$$\begin{gathered} y'' + p(x)y' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (a,b), \\ \begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases} \end{gathered} \tag{19.7}$$

де λ — дійсний або комплексний параметр, а функції $p(x)$ і $q(x)$ — неперервні на відрізку $[a,b]$.

Задачу відшукання значень параметра λ, для яких крайова задача (19.7) має нетривіальні розв'язки, називають ***крайовою задачею на власні значення***. Значення параметра λ, для яких задача (19.7) має нетривіальні розв'язки, називають ***власними значеннями***, а відповідні їм нетривіальні розв'язки – ***власними функціями*** крайової задачі (19.7) на власні значення.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 19.1. Знайти розв'язок рівняння $y'' + y = 0$, який задовольняє умови $y(0) = 0$, $y(b) = y_1$, де $b > 0$, y_1 — деякі числа.

Розв'язання. Підставляючи загальний розв'язок рівняння $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ у першу крайову умову, знаходимо сталу $C_1 = 0$. З урахуванням цього, з другої крайової умови одержуємо, що $C_2 \sin b = y_1$.

Якщо $\sin b \neq 0$, тобто $b \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $C_2 = \frac{y_1}{\sin b}$, а отже, у цьому випадку розв'язок $y = \frac{y_1}{\sin b} \sin x$ заданої крайової задачі є єдиним.

Якщо $b = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $C_2 \cdot 0 = y_1$ і тепер все залежить від y_1: якщо $y_1 = 0$, то стала C_2 може бути довільною, і розв'язком є $y = {}_2 \sin x$; якщо $y_1 \neq 0$, то крайова задача розв'язків не має.

Відповідь: якщо $b \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $y = \frac{y_1}{\sin b} \sin x$; якщо $b = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, і $y_1 = 0$, то $y = {}_2 \sin x$; якщо $b = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, і $y_1 \neq 0$, то крайова задача розв'язків не має.

Приклад 19.2. Побудувати функцію Ґріна крайової задачі

$$y'' - y' = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. Розв'язок $\varphi_1(x) = 1 - e^x$ задовольняє крайову умову $y(0) = 0$, а розв'язок $\varphi_2(x) = e^x$ — крайову умову $y(1) - y'(1) = 0$. Згідно з (19.5), функцію Ґріна шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1(s)(1 - e^x), & 0 \leqslant x < s, \\ c_2(s) e^x, & s < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функції $c_1(s)$, $c_2(s)$ знаходимо з умов (19.3):

$$c_1(s)(1 - e^s) = c_2(s) e^s, \quad c_2(s) e^s + c_1(s) e^s = 1.$$

Звідси $c_1(s) = 1$, $c_2(s) = e^{-s} - 1$, а тому

$$G(x, s) = \begin{cases} 1 - e^x, & 0 \leqslant x < s \\ e^x(e^{-s} - 1), & s < x \leqslant 1. \end{cases} \blacksquare$$

Приклад 19.3. Знайти розв'язок крайової задачі

$$x^2y'' + xy' - y = f(x), \quad y(1) = 2,\ y'(\infty) = 0.$$

Розв'язання. Спочатку зведемо крайові умови до однорідних. Для цього шукаємо розв'язок у вигляді $y(x) = z(x) + 2$. Тоді для функції $z(x)$ маємо крайову задачу

$$x^2z'' + xz' - z = f(x) - 2, \quad z(1) = 0,\ z'(\infty) = 0.$$

Загальним розв'язком однорідного рівняння (воно є рівнянням Ейлера) є $z_0 = C_1x + C_2x^{-1}$. Функція $\varphi_1(x) = x - \frac{1}{x}$ задовольняє крайову умову $z(1) = 0$, а функція $\varphi_2(x) = \frac{1}{x}$ — крайову умову $z'(\infty) = 0$. Отже, функцію Ґріна шукаємо у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\left(x - \frac{1}{x}\right), & 1 \leqslant x < s, \\ c_2(s)\frac{1}{x}, & s < x \leqslant \infty. \end{cases}$$

Функції $c_1(s)$, $c_2(s)$ знаходимо з умов (19.3):

$$c_1(s)(s - s^{-1}) = c_2(s)s^{-1}, \quad c_2(s)(-s^{-2}) - c_1(s)(1 + s^{-2}) = 1.$$

Звідси $c_1(s) = -\frac{1}{2s^2}$, $c_2(s) = \frac{1}{2s}\left(\frac{1}{s} - s\right)$, а тому

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2s^2}\left(\frac{1}{x} - x\right), & 1 \leqslant x < s \\ \frac{1}{2sx}\left(\frac{1}{s} - s\right), & s < x \leqslant \infty. \end{cases}$$

Розв'язок задачі записуємо згідно з (19.4):

$$y(x) = 2 + \frac{1 - x^2}{2x}\int\limits_1^x \frac{f(s)}{s^2}\,ds + \frac{1}{2x}\int\limits_1^\infty \frac{1 - s^2}{s^2} f(s)\,ds.$$

Розв'язок крайової задачі існує лише для такої функції $f(x)$, що невласний інтеграл у розв'язку є збіжним. ■

Приклад 19.4. Побудувати функцію Ґріна крайової задачі

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi).$$

Розв'язання. Оскільки функція Ґріна є розв'язком однорідного рівняння $y'' + y = 0$, то шукаємо її згідно з (19.6) у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\sin x + c_2(s)\cos x, & 0 \leqslant x < s, \\ c_3(s)\sin x + c_4(s)\cos x, & s < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Тут $c_1(s)$, $c_2(s)$ і $c_3(s)$, $c_4(s)$ різні, бо за означенням функції Ґріна похідна $G'_x(x,s)$ має розрив при $x = s$.

З крайових умов для для функції $G(x,s)$ одержуємо, що $c_2 = -c_4$, $c_1 = -c_3$.

З неперервності $G(x,s)$ при $x = s$ і стрибка похідної $G'_x(x,s)$ при $x = s$ маємо два рівняння

$$\begin{gathered} c_1 \sin s + c_2 \cos s = c_3 \sin s + c_4 \cos s, \\ c_3 \cos s - c_4 \sin s - c_1 \cos s + c_2 \sin s = 1, \end{gathered}$$

звідки, з урахуванням попередніх співвідношення, знаходимо

$$c_1 = -\frac{1}{2}\cos s,\ c_2 = \frac{1}{2}\sin s,\ c_3 = \frac{1}{2}\cos s,\ c_4 = -\frac{1}{2}\sin s.$$

Згідно з формулою (19.6) маємо

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos s \sin x + \frac{1}{2}\sin s \cos x, & 0 \leqslant x < s, \\ \frac{1}{2}\cos s \sin x - \frac{1}{2}\sin s \cos x, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

або

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(s-x), & 0 \leqslant x < s, \\ \frac{1}{2}\sin(x-s), & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Приклад 19.5. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0,\ y(b) = 0.$$

Розв'язання. Нехай $\lambda > 0$ або $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді задача не має нетривіальних розв'язків, бо, підставляючи загальний розв'язок

$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ рівняння $y'' - \lambda y = 0$ у крайові умови, одержуємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}b} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0.$$

Нехай $\lambda = 0$. Підставляючи тепер загальний розв'язок $y = C_1 x + C_2$ у крайові умови, маємо

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 b + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0.$$

Нехай $\lambda < 0$. Тоді $y = C_1 \cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{-\lambda}\right)$, а з врахуванням крайових умов, маємо

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos\left(b\sqrt{-\lambda}\right) + C_2 \sin\left(b\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0, \;\; C_2 \sin\left(b\sqrt{-\lambda}\right) = 0.$$

Якщо y тотожно не дорівнює нулю, то $\sin\left(b\sqrt{-\lambda}\right) = 0$ і $C_2 \neq 0$. Звідси маємо формулу для всіх власних значень задачі:

$$\lambda_k = -\left(\pi k/b\right)^2, \;\; k = 1, 2, \ldots .$$

Їм відповідають власні функції

$$y_k = c_k \sin\frac{\pi k x}{b}, \;\; k = 1, 2, \ldots,$$

де c_k — довільні сталі, відмінні від нуля. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

1. Знайти розв'язок крайової задачі.

А1. $y'' - y = 2x, \quad y(0) = 0, \; y'(1) = -1.$

А2. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0.$

A3. $y'' - y' = 2e^{2x}, \quad y'(0) = 2,\ y(1) = e^2.$

A4. $y'' + y = 0, \quad y(0) = y'(0),\ y(\pi/2) - y'(\pi/2) = 2.$

A5. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y'(0) = 2,\ y(+\infty) = 0.$

A6. $x^2y'' - 6y = 0, \quad y(0)$ — обмежене, $y(1) = 2.$

A7. $y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0.$

2. Побудувати функцію Ґріна крайової задачі.

A8. $y'' + y = f(x), \quad y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$

A9. $y'' - 4y = f(x), \quad y'(0) = 0,\ 2y(1) = y'(1).$

A10. $x^2y'' + xy' - y = f(x), \quad y(1) = 0,\ y'(2) = 0.$

A11. $x^2y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0,\ 2y'(2) + y(2) = 0.$

A12. $y'' + 4y' + 3y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(x) = O(e^{-2x})$ при $x \to +\infty.$

A13. $y'' - y = f(x), \quad y(x)$ обмежена при $x \to \pm\infty.$

3. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі.

A14. $y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(1) = 0.$

A15. $y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$

A16. $y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0,\ y(x) = O(1)$ при $x \in +\infty$

A17. $x^2y'' = \lambda y, \quad y(1) = 0,\ y(a) = 0(a > 1)$

A18. $x^2y'' - xy' + y = \lambda y, \quad y(1) = y(2) = 0.$

A19. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y'(1) = 0,\ y(\pi) = 0.$

A20. Довести, що кожне дійсне число λ є власним значенням крайової задачі $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) + y'(1) = 0.$

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

1. Знайти розв'язок крайової задачі.

C1. $y'' + y' = 2, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2.$

C2. $y'' - y' = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(1) - y(1) = 2.$

C3. $y'' + y = 0, \quad y(0) = y'(0),\ y(\pi/2) + y'(\pi/2) = 0.$

C4. $y'' + y = 2x - \pi, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$

C5. $y'' + \pi^2 y = 3\pi^2 \sin 2\pi x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

C6. $y'' - y = 1, \quad y(0) = 0,\ y(x)$ обмежена при $x \to +\infty$.

C7. $x^2y'' - 2xy + 2y = 0, \quad y(x) = o(x)$ при $x \to 0,\ y(1) = 3$.

C8. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0, \quad y'(1) = 3,\ y(x) = O(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

2. Побудувати функцію Ґріна крайової задачі.

C9. $y'' - y' = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(1) = y'(1)$.

C10. $xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0,\ y(2) = 0$.

C11. $(x^2+1)y'' + 2xy' = f(x), \quad y(0) = 0,\ y'(1) = 0$.

C12. $y'' + y' = f(x), \quad y'(0) = 0,\ y(+\infty) = 0$.

C13. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x), \quad y(0)$ обмежено, $y(1) = 0$.

C14. $x^2y'' - 2y = f(x), \quad y(x)$ обмежена при $x \to 0$ і при $x \to +\infty$.

3. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі.

C15. $y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) = 0$.

C16. $y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$.

C17. $y'' = \lambda y, \quad y(x) = O(1)$ при $x \to \pm\infty$.

C18. $x^2y'' - xy' + y = \lambda y, \quad y(x) \to 0$ при $x \to 0,\ y(1) = 0$.

C19. $x^2y'' + 3xy' + y = \lambda y, \quad y(1) = 0,\ y(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

C20. Для яких значень дійсного параметра λ крайова задача $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = \lambda y(1)$ має нетривіальний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

Відповіді

A1. $y = (\operatorname{sh} 1)^{-1} \operatorname{sh} x - 2x$. **A2.** Розв'язків немає. **A3.** $y = e^{2x}$. **A4.** $y = \sin x + \cos x$. **A5.** $y = -2e^{-x}$. **A6.** $y = 2x^3$. **A7.** $y = C \sin nx$, $n = 0, 1, \ldots$, C — довільна стала. **A8.** $G = \sin x \cos s\ 0 \leqslant x \leqslant s$; $G = \sin s \cos x\, s \leqslant x \leqslant \pi$. **A9.** $G = e^{2s} \operatorname{ch} 2x$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G = e^{2x} \operatorname{ch} 2s$, $s \leqslant x \leqslant 1$. **A10.** $G = -(10s^2)^{-1}(x - 1/x)(s^2 + 4)$, $1 \leqslant x \leqslant s$; $G = -(10s^2)^{-1}(x + 4/x)(s^2 + 1)$, $s \leqslant x \leqslant 2$. **A11.** $G = (1 - x^3)(3s^3x)^{-1}$, $1 \leqslant x \leqslant s$; $G = (1 - s^3)(3s^3x)^{-1}$, $s \leqslant x \leqslant 2$. **A12.** $G = 0{,}5e^s(e^{-3x} - e^{-x})$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G = 0{,}5e^{-3x}(e^s -$

$e^{3s})$, $s \leqslant x < \infty$. **A13.** $G = -0,5e^{-|x-s|}$. **A14.** $\lambda_n = -(n + 1/2)^2\pi^2$, $y_n(x) = C_n \sin(n + 1/2), n = 0, 1, 2, \ldots$. **A15.** $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $y_n(x) = C_n \cos n\pi x, n = 0, 1, 2, \ldots$. **A16.** λ — довільне від'ємне число, $y(x, \lambda) = C \sin x\sqrt{-\lambda}$. **A17.** $\lambda_n = -(n\pi/\ln a)^2 - 1/4$, $y_n(x) = \sqrt{x} \sin(n\pi \ln x/\ln a), k = 1, 2, \ldots$. **A18.** $\lambda_n = -(n\pi/\ln 2)^2$, $y_n(x) = x \sin(n\pi \ln x/\ln 2), n = 1, 2, \ldots$. **A19.** $\lambda_n = (2n + 1)/2$, $y_n(x) = \cos((2n + 1)x/2), n = 0, 1, \ldots$.

C1. $y = 2x$. **C2.** $y = e^x - 1$. **C3.** $y = C(\cos x + \sin x)$, де C — довільна стала. **C4.** $y = 2x - \pi + \pi \cos x + C \sin x$, де C — довільна стала. **C5.** $y = C \sin \pi x - \sin 2\pi x$, де C — довільна стала. **C6.** $y = e^{-x} - 1$. **C7.** $y = 3x^2$. **C8.** $y = -x^{-3}$. **C9.** $G = 1 - e^x$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G = e^x(e^{-s} - 1)$, $s \leqslant x \leqslant 1$. **C10.** $G = (s^2 - 4)(2s^2)^{-1}$, $1 \leqslant x \leqslant s$; $G = (x^2 - 4)(2s^2)^{-1}$, $s \leqslant x \leqslant 2$. **C11.** $G = -\operatorname{arctg} x$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G = -\operatorname{arctg} s$, $s \leqslant x \leqslant 1$. **C12.** $G = -1$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G = -e^{s-x}$, $s \leqslant x < +\infty$. **C13.** $G = x(s^3 - 1)(3s^2)^{-1}$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G = s(x^3 - 1)(3x^2)^{-1}$, $s \leqslant x \leqslant 1$. **C14.** $G = -x^2(3s^3)^{-1}$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G = -x/3$, $s \leqslant x < \infty$. **C15.** $\lambda_n = -(n + 1/2)^2\pi^2$, $y_n(x) = \sin(n + 1/2)\pi x, n = 0, 1, \ldots$. **C16.** $\lambda_n = -4n^2\pi^2$, $y_n(x) = A_n \cos 2n\pi x + B_n \sin 2n\pi x, n = 0, 1, \ldots$. **C17.** λ — довільне недодатне число, $y(x, \lambda) = C_1 \cos x\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{-\lambda}, n = 0, 1, \ldots$. **C18.** λ — довільне число з інтервалу $(-\infty, 1)$. Якщо $\lambda \in (-\infty, 0)$, то $y(x, \lambda) = x \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$; якщо $\lambda = 0$, то $y(x, \lambda) = x \ln x$; якщо $\lambda \in (0, 1)$, то $y(x, \lambda) = x(x^{\sqrt{\lambda}} - x^{\sqrt{-\lambda}})$. **C19.** λ — довільне число з інтервалу $(-\infty, 1)$. Якщо $\lambda \in (-\infty, 0)$, то $y(x, \lambda) = x^{-1} \sin(\sqrt{-\lambda} \ln x)$; якщо $\lambda = 0$, то $y(x, \lambda) = x^{-1} \ln x$; якщо $\lambda \in (0, 1)$, то $y(x, \lambda) = x^{-1}(x^{\sqrt{\lambda}} - x^{\sqrt{-\lambda}})$. **C20.** $\lambda_n = \pi/2 + 2\pi n$, $y_n(x) = \sin \lambda_n x, n \in \mathbb{Z}$.

Тема 20. Лінійні системи диференціальних рівнянь: метод виключення

Короткі теоретичні відомості

20.1. Метод виключення. Розглянемо задачу про зведення нормальної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{20.1}$$

в якій f_j — $(n-1)$ разів диференційовні функції, $y_j' = \frac{dy_j}{dx}$, $j = 1, 2, \dots, n$, до одного диференціального рівняння. Для цього послідовно здиференціюємо $(n-1)$ разів одне з рівнянь системи (20.1) (наприклад, перше), замінюючи після кожного диференціювання похідні $y_1', y_2', \dots, y_n'$ виразами для них із системи (20.1), і виключимо з першого рівняння цієї системи і отриманих $(n-1)$-го рівняння функції $y_2, y_3, \dots, y_n$. При цьому для знаходження функції y_1 одержимо рівняння n-го порядку вигляду

$$y_1^{(n)} = f\Big(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\Big),$$

і якщо вдасться знайти його загальний розв'язок, то функції $y_2, y_3, \dots, y_n$ знайдуться без квадратур.

Метод розв'язування нормальної системи рівнянь зведенням її до одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної, називають *методом виключення.*

У деяких випадках зведення нормальної системи до одного рівняння можна здійснювати з відхиленням від описаної загальної схеми.

20.2. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до нормальної системи. Диференціальне рівняння

n-го порядку

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{20.2}$$

завжди можна звести до системи n диференціальних рівнянь. Для цього позначимо

$$y = y_1, \;\; y' = y_2, \;\; y'' = y_3, \;\; \dots, \;\; y^{(n-1)} = y_n.$$

Тоді

$$y_1' = y' = y_2, \quad y_2' = y'' = y_3, \;\; \dots, \;\; y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n,$$
$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

тобто функції y_1, y_2, …, y_n задовольняють нормальну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \quad \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{20.3}$$

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 20.1. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = 6z - 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Здиференціюємо перше рівняння системи і підставимо замість z' відповідний вираз із другого рівняння:

$$y'' = y' + 2z' \quad \Rightarrow \quad y'' = y' + 2(6z - 2y) \quad \Rightarrow \quad y'' = y' + 12z - 4y.$$

З першого рівняння виразимо z через y і підставимо в останнє отримане рівняння:

$$z = \frac{y' - y}{2} \quad \Rightarrow \quad y'' = y' + 6(y' - y) - 4y \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y'' - 7y' + 10y = 0. \tag{20.4}$$

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 10 = 0$ має корені $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, то загальним розв'язком рівняння (20.4) є

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Тепер, враховуючи, що $z = \frac{y'-y}{2}$, знаходимо функцію z:

$$z = \frac{\left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}\right)' - \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}\right)}{2} = \frac{C_1}{2} e^{2x} + 2C_2 e^{5x}.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x},\ z = \frac{C_1}{2} e^{2x} + 2C_2 e^{5x}$.

Потрібно мати на увазі, що при розв'язуванні систем (як і рівнянь) відповідь може бути записана у різній формі, причому її можна звести від одного до іншого вигляду перепозначенням сталих. Наприклад, відповідь до останнього прикладу можна записати у вигляді: $y = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$, $z = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{5x}$.

Приклад 20.2. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = -y_2 - 2y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Здиференціюємо перше рівняння системи і підставимо замість y_1', y_2', y_3' відповідні вирази із заданої системи:

$$y_1'' = y_1' + 2y_2' + 2y_3' = y_1 + 2y_2 + 2y_3 +$$
$$+ 2(-y_2 - 2y_3) + 2(y_2 + y_3) = y_1 + 2y_2.$$

Диференціюючи отримане співвідношення і знову використовуючи рівняння системи, одержуємо співвідношення

$$y_1''' = y_1' + 2y_2' = y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2(-y_2 - 2y_3) = y_1 - 2y_3.$$

Тепер із системи

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = y_1 - 2y_3 \end{cases}$$

виключимо y_2 і y_3. З другого і третього рівнянь знаходимо $y_2 = (y_1'' - y_1)/2$, $y_3 = (y_1 - y_1''')/2$. Підставляючи обидва вирази у перше рівняння системи, одержуємо диференціальне рівняння

$$y_1''' - y_1'' + y_1' - y_1 = 0,$$

загальним розв'язком якого є $y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. Тоді $y_2 = -C_2 \cos x - C_3 \sin x$, $y_3 = \frac{1}{2}\big(C_2(\cos x - \sin x) + C_3(\cos x + \sin x)\big)$.

Відповідь: $y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, $y_2 = -C_2 \cos x - C_3 \sin x$, $y_3 = \frac{1}{2}\big(C_2(\cos x - \sin x) + C_3(\cos x + \sin x)\big)$.

Приклад 20.3. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 3y + 2z + 4e^{5x}, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

Розв'язання. Здиференціюємо перше рівняння системи і підставимо замість z' відповідний вираз із другого рівняння:

$$y'' = 3y' + 2z' + 20e^{5x} \quad \Rightarrow \quad y'' = 3y' + 2(y + 2z) + 20e^{5x} \quad \Rightarrow$$
$$y'' = 3y' + 2y + 4z + 20e^{5x}. \tag{20.5}$$

З першого рівняння виразимо z через y і підставимо в рівняння (20.5):

$$z = \frac{y' - 3y - 4e^{5x}}{2} \quad \Rightarrow \tag{20.6}$$

$$y'' = 3y' + 2y + 2(y' - 3y - 4e^{5x}) + 20e^{5x} \quad \Rightarrow$$

$$y'' - 5y' + 4y = 12e^{5x}. \tag{20.7}$$

Загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$ є функція

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{4x}.$$

Частинний розв'язок рівняння (20.7) шукаємо у вигляді $Y = Ae^{5x}$. Підставляючи частинний розв'язок у рівняння (20.7), отримуємо:

$$25Ae^{5x} - 25Ae^{5x} + 4Ae^{5x} = 12e^{5x} \quad \Rightarrow \quad A = 3.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння (20.7) є функція

$$y = C_1e^x + C_2e^{4x} + 3e^{5x}.$$

Тепер, враховуючи формулу (20.6), знаходимо функцію z:

$$z = \frac{\left(C_1e^x + C_2e^{4x} + 3e^{5x}\right)' - 3\left(C_1e^x + C_2e^{4x} + 3e^{5x}\right) - 4e^{5x}}{2} =$$

$$= -C_1e^x + \frac{C_2}{2}e^{4x} + e^{5x}.$$

Відповідь: $y = C_1e^x + 2C_2e^{4x} + 3e^{5x}$, $z = -C_1e^x + C_2e^{4x} + e^{5x}$.

Приклад 20.4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = 3y + 2z + 4e^{5x}, \\ z' = y + 2z, \end{cases} \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 2.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок системи було знайдено у попередньому прикладі:

$$y = C_1 e^x + 2C_2 e^{4x} + 3e^{5x}, \quad z = -C_1 e^x + C_2 e^{4x} + e^{5x}.$$

Підстановка його в початкові умови дає:

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 + 3 = -1, \\ -C_1 + C_2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = -2, \quad C_2 = -1.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = -2e^x - 2e^{4x} + 3e^{5x}, \quad z = 2e^x - e^{4x} + e^{5x}. \ \blacksquare$$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати системи методом виключення (для полегшення роботи для деяких систем вказані корені характеристичного рівняння):

A1. $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = -5y - z. \end{cases}$

A2. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

A3. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4z - y. \end{cases}$

A4. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$
$(k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1)$.

A5. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = 3y_3 - y_1 - 2y_2, \\ y_3' = 3y_2 + y_3 \end{cases}$
$(k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = -4)$.

A6. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_3' = 3y_1 + y_3 \end{cases}$
$(k_1 = 1,\ k_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

A7. $\begin{cases} y'' = 2y - 3z, \\ z'' = y - 2z. \end{cases}$

A8. $\begin{cases} y' = y + 3z + 7e^{3x}, \\ z' = -2y - 4z - 3e^{3x}. \end{cases}$

A9. $\begin{cases} y' = z + 4e^x, \\ z' = y + x^2. \end{cases}$

A10. $\begin{cases} y' = 5y - 8z + 2\cos x, \\ z' = 2y - 3z - 4\sin x. \end{cases}$

A11. $\begin{cases} y' = 2y - z + 17x, \\ z' = 5y + 6z. \end{cases}$

Знайти розв'язок задачі Коші:

A12. $\begin{cases} y' = 2y - 2z, \\ z' = -2y + 5z, \end{cases} \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 1.$

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати системи методом виключення (для полегшення роботи для деяких систем вказані корені характеристичного рівняння):

C1. $\begin{cases} y' = 9y + z, \\ z' = 7y + 3z. \end{cases}$

C2. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 15y - 7z. \end{cases}$

C3. $\begin{cases} y' = 6y + 4z, \\ z' = -9y - 6z. \end{cases}$

C4. $\begin{cases} y' = 11y - 6z, \\ z' = 18y - 10z. \end{cases}$

C5. $\begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = 3z - y. \end{cases}$

C6. $\begin{cases} y' = 4y + 4z, \\ z' = -y. \end{cases}$

C7. $\begin{cases} y' = 3y + z, \\ z' = 2y + 4z. \end{cases}$

C8. $\begin{cases} y' + y - 2z = 0, \\ z' + y + 3z = 0. \end{cases}$

C9. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y + 7z. \end{cases}$

C10. $\begin{cases} y' = 2y + 6z, \\ z' = y - 3z. \end{cases}$

C11. $\begin{cases} y' = 3y - 4z, \\ z' = 2y + 7z. \end{cases}$

C12. $\begin{cases} y' = -2y + 3z, \\ z' = 4z - 3y. \end{cases}$

C13. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = 2y_3 - y_1 - 2y_2, \\ y_3' = 2y_2 + 2y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ k_3 = -3)$.

C14. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 3y_2 - 2y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 + 3y_2 + y_3 \end{cases}$

$(k_1 = -1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 4)$.

C15. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 6y_2, \\ y_2' = 2y_3 - 6y_1 - 3y_2, \\ y_3' = 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 3,\ k_2 = -7,\ k_3 = 7)$.

C16. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 6y_1 + 6y_2 + 5y_3, \\ y_3' = -y_1 - 3y_2 - 2y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = -2)$.

C17. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2 + 3y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 5)$.

C18. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = 3y_3 - y_1 - 2y_2, \\ y_3' = 3y_2 + y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = -4)$.

C19. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_2 - 2y_1 + y_3, \\ y_3' = y_2 - y_1 + 5y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 6)$.

C20. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 - 2y_3, \\ y_3' = -y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 1,\ k_2 = -2,\ k_3 = -1)$.

C21. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 3y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_3 - 2y_1 - 3y_2, \\ y_3' = 3y_1 + 2y_2 - y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 2,\ k_2 = -2,\ k_3 = -1)$.

C22. $\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 5y_2 + 6y_3, \\ y_2' = -3y_1 - 2y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_1 - y_2 - 3y_3 \end{cases}$

$(k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = -2)$.

C23. $\begin{cases} y_1' = 2y_3 - y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_3 - 2y_1 - y_2, \\ y_3' = 3y_3 - 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$

$(k_1 = 1,\ k_{2,3} = \pm i)$.

C24. $\begin{cases} y_1' = 2y_2 - 3y_1 - y_3, \\ y_2' = 8y_1 + 4y_2 + 4y_3, \\ y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 2y_3 \end{cases}$

$(k_1 = -1,\ k_{2,3} = 2 \pm 2i)$.

C25. $\begin{cases} y'' = 3y + 4z, \\ z'' = -y - z. \end{cases}$

C26. $\begin{cases} y' = 3y - 3z + e^{-x}, \\ z' = y - z - 3e^{-x}. \end{cases}$

C27. $\begin{cases} y' = 3y + 3z + 3e^{3x}, \\ z' = 7z - y. \end{cases}$

C28. $\begin{cases} y' = 3y + z - 10\sin 2x, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

C29. $\begin{cases} y' = y - z + 2, \\ z' = 6y + 6z. \end{cases}$

C30. $\begin{cases} y' = 3y + 2z + 4e^{5x}, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

C31. $\begin{cases} y' = z - 5\cos x, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

C32. $\begin{cases} y' = 2y + 3z, \\ z' = 2y + z + 4. \end{cases}$

C33. $\begin{cases} y' = 8y - 2z, \\ z' = y + 5z - e^{2x}. \end{cases}$

C34. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 4y + z - 5. \end{cases}$

C35. $\begin{cases} y' = 2y + 4z + 5e^{x}, \\ z' = 2y + 4z. \end{cases}$

C36. $\begin{cases} y' = 3y - 3z, \\ z' = z - y + 17\cos x. \end{cases}$

C37. $\begin{cases} y' = 2y + 3z, \\ z' = 2y + z - 34\sin x. \end{cases}$

C38. $\begin{cases} y' = 4y - z - e^{2x}, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

C39. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = y + 18te^{-x}. \end{cases}$

C40. $\begin{cases} y' = 2y + 2z, \\ z' = y + 3z - 34\cos x. \end{cases}$

Знайти розв'язки задач Коші:

C41. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y, \end{cases} \quad y(0) = 6, \quad z(0) = 4.$

C42. $\begin{cases} y' = 5y - 10z, \\ z' = 5y - 5z, \end{cases} \quad y(\pi) = 2, \quad z(\pi) = 3.$

C43. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_2 + y_3, \end{cases} \; y_1(0) = 1, \; y_2(0) = 7, \; y_3(0) = 3$

$(k_1 = 1,\, k_2 = 3.\, k_3 = -4).$

C44. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = -y_2, \\ y_3' = 2y_2 + y_3, \end{cases} \quad y_1(0) = 3, \; y_2(0) = -1, \; y_3(0) = 2$

$(k_1 = 2,\, k_2 = -1,\, k_3 = 1).$

C45. $\begin{cases} y' = y + 2z + 29\cos 2x, \\ z' = 6z - 2y - 58\sin 2x, \end{cases} \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 3.$

C46. $\begin{cases} y' = 2y - 3z - 2e^{3x}, \\ z' = y + 6z, \end{cases} \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 5.$

Звести диференціальні рівняння до нормальних систем диференціальних рівнянь першого порядку:

C47. $y'' + x^2y' - 2y = 0.$

C48. $y^{(4)} - xy''' + 3y'' - x^2y' + 4y = e^x.$

Відповіді

A1. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x}$, $z = 5C_1e^{-2x} - C_2e^{4x}$. **A2.** $y = (C_1 - C_2)e^{2x}\sin x + (C_1 + C_2)e^{2x}\cos x$, $z = C_1e^{2x}\sin x + C_2e^{2x}\cos x$. **A3.** $y = (C_1 - C_2 + C_2x)e^{3x}$, $z = (C_1 + C_2x)e^{3x}$. **A4.** $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^x - C_3e^{-x}$, $y_2 = C_2e^x + 3C_3e^{-x}$, $y_3 = C_1e^{2x} + C_2e^x + 5C_3e^{-x}$. **A5.** $y_1 = 3C_1e^x - C_2e^{3x} + C_3e^{-4x}$, $y_2 = 2C_2e^{3x} + 5C_3e^{-4x}$, $y_3 = C_1e^x + 3C_2e^{3x} - 3C_3e^{-4x}$.

A6. $y_1 = 2C_2e^x \sin 2x + 2C_3e^x \cos 2x$, $y_2 = C_1e^x - C_2e^x \cos 2x + C_3e^x \sin 2x$, $y_3 = -C_1e^x - 3C_2e^x \cos 2x + 3C_3e^x \sin 2x$. **A7.** $y = 3C_1e^x + 3C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$, $z = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **A8.** $y = -C_1e^{-2x} + 3C_2e^{-x} + 2e^{3x}$, $z = C_1e^{-2x} - 2C_2e^{-x} - e^{3x}$. **A9.** $y = C_1e^x - C_2e^{-x} + (1+2x)e^x - 2 - x^2$, $z = C_1e^x + C_2e^{-x} + (2x-1)e^x - 2x$. **A10.** $y = (C_1 - C_2)e^{2x} \sin x + (C_1 + C_2)e^{2x} \cos x$, $z = C_1e^{2x} \sin x + C_2e^{2x} \cos x$. **A11.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{10x}$, $z = -7C_1e^{2x} + C_2e^{10x}$. **A12.** $y = 2e^x$, $z = e^x$. **C1.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{10x}$, $z = -7C_1e^{2x} + C_2e^{10x}$. **C2.** $y = C_1e^{-x} \sin 3x + C_2e^{-x} \cos 3x$, $z = (C_2 + 2C_1)e^{-x} \sin 3x + (2C_2 - C_1)e^{-x} \cos 3x$. **C3.** $y = 4C_1x + 2C_2$, $z = C_1 - 3C_2 - 6C_1x$. **C4.** $y = C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x}$, $z = 2C_1e^{-x} + 3C_2e^{2x}$. **C5.** $y = 2C_1e^{2x} \sin x + 2C_2e^{2x} \cos x$, $z = (C_1 - C_2)e^{2x} \sin x + (C_1 + C_2)e^{2x} \cos x$. **C6.** $y = -e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2x)$, $z = e^{2x}(C_1 + C_2x)$. **C7.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^{2x}$, $z = 2C_1e^{5x} - C_2e^{2x}$. **C8.** $y = 2C_1e^{-2x} \sin x + 2C_2e^{-2x} \cos x$, $z = -(C_1 + C_2)e^{-2x} \sin x + (C_1 - C_2)e^{-2x} \cos x$. **C9.** $y = (2C_1 + 2C_2x)e^{5x}$, $z = -(2C_1 + C_2 + 2C_2x)e^{5x}$. **C10.** $y = -C_1e^{-4x} + 6C_2e^{3x}$, $z = C_1e^{-4x} + C_2e^{3x}$. **C11.** $y = -(C_1 + C_2)e^{5x} \sin 2x + (C_1 - C_2)e^{5x} \cos 2x$, $z = C_1e^{5x} \sin 2x + C_2e^{5x} \cos 2x$. **C12.** $y = (3C_1 - C_2 + 3C_2x)e^x$, $z = (3C_1 + 3C_2x)e^x$. **C13.** $y_1 = 2C_1e^{2x} - C_2e^{3x} + C_3e^{-3x}$, $y_2 = C_2e^{3x} + 5C_3e^{-3x}$, $y_3 = C_1e^{2x} + 2C_2e^{3x} - 2C_3e^{-3x}$. **C14.** $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + 3C_3e^{4x}$, $y_2 = -C_1e^{-x} + 3C_2e^{3x} + 2C_3e^{4x}$, $y_3 = C_1e^{-x} + 5C_2e^{3x} + 3C_3e^{4x}$. **C15.** $y_1 = C_1e^{3x} + 3C_2e^{-7x} - 3C_3e^{7x}$, $y_2 = 5C_2e^{-7x} + 2C_3e^{7x}$, $y_3 = 3C_1e^{3x} - C_2e^{-7x} + C_3e^{7x}$. **C16.** $y_1 = -C_2e^{2x} - 3C_3e^{-2x}$, $y_2 = C_1e^x + 19C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$, $y_3 = -C_1e^x - 14C_2e^{2x} + 2C_3e^{-2x}$. **C17.** $y_1 = -3C_1e^x - C_2e^{2x} + C_3e^{5x}$, $y_2 = C_1e^x - C_2e^{2x} + C_3e^{5x}$, $y_3 = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + C_3e^{5x}$. **C18.** $y_1 = 3C_1e^x - C_2e^{3x} + C_3e^{-4x}$, $y_2 = 2C_2e^{3x} + 5C_3e^{-4x}$, $y_3 = C_1e^x + 3C_2e^{3x} - 3C_3e^{-4x}$. **C19.** $y_1 = 3C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}$, $y_2 = 7C_1e^x - C_2e^{3x} - C_3e^{6x}$, $y_3 = -C_1e^x + C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x}$. **C20.** $y_1 = C_1e^x + C_2e^{-2x} - C_3e^{-x}$, $y_2 = C_1e^x + 4C_2e^{-2x} - 3C_3e^{-x}$, $y_3 = C_3e^{-x}$. **C21.** $y_1 = C_1e^{2x} - 5C_2e^{-2x} - 2C_3e^{-x}$, $y_2 =$

$= 8C_2e^{-2x} + 3C_3e^{-x}$, $y_3 = C_1e^x - C_2e^{-2x} + C_3e^{-x}$. **C22.** $y_1 = -C_1e^x - 19C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$, $y_2 = C_1e^x + 14C_2e^{2x} + 2C_3e^{-2x}$, $y_3 = C_2e^{2x} - 3C_3e^{-2x}$. **C23.** $y_1 = 2C_2\cos x + 2C_3\sin x$, $y_2 = C_1e^x + 2C_2\cos x + 2C_3\sin x$, $y_3 = C_1e^x + (3C_2 + C_3)\cos x + (3C_3 - C_2)\sin x$. **C24.** $y_1 = -C_1e^{-x} + C_2e^{2x}\cos 2x + C_3e^{2x}\sin 2x$, $y_2 = (C_3 + C_2)e^{2x}\cos 2x + (C_3 - C_2)e^{2x}\sin 2x$, $y_3 = 2C_1e^{-x} - 3C_2e^{2x}\cos 2x - 3C_3e^{2x}\sin 2x$. **C25.** $y = -2e^x(C_1 + C_2 + C_2x) - 2e^{-x}(C_3 - C_4 + C_4x)$, $z = e^x(C_1 + C_2x) + e^{-x}(C_3 + C_4x)$. **C26.** $y = 3C_1e^{2x} + C_2 + 3e^{-x}$, $z = C_1e^{2x} + C_2 + \frac{13}{3}e^{-x}$. **C27.** $y = 3C_1e^{4x} + C_2e^{6x} - 4e^{3x}$, $z = C_1e^{4x} + C_2e^{6x} - e^{3x}$. **C28.** $y = C_1e^{4x} - C_2e^{2x} + \frac{9}{4}\sin 2x + \frac{7}{4}\cos 2x$, $z = C_1e^{4x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{4}\cos 2x$. **C29.** $y = -C_1e^{3x} - C_2e^{4x} - 1$, $z = 2C_1e^{3x} + 3C_2e^{4x} + 1$. **C30.** $y = -C_1e^x + 2C_2e^{4x} + 3e^{5x}$, $z = C_1e^x + C_2e^{4x} + e^{5x}$. **C31.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \cos x - 2\sin x$, $z = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x} + \sin x + 3\cos x$. **C32.** $y = C_1e^{-x} + 3C_2e^{4x} - 3$, $z = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{4x} + 2$. **C33.** $y = C_1e^{6x} + 2C_2e^{7x} + \frac{1}{10}e^{2x}$, $z = C_1e^{6x} + C_2e^{7x} + \frac{3}{10}e^{2x}$. **C34.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-x} + 2$, $z = C_1e^{5x} - 2C_2e^{-x} - 3$. **C35.** $y = C_1e^{6x} - 2C_2 + 3e^x$, $z = C_1e^{6x} + C_2 - 2e^x$. **C36.** $y = 3C_1e^{4x} + C_2 + 12\sin x + 3\cos x$, $z = -C_1e^{4x} + C_2 + 13\sin x - \cos x$. **C37.** $y = C_1e^{-x} + 3C_2e^{4x} - 9\cos x + 15\sin x$, $z = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{4x} + 11\cos x - 7\sin x$. **C38.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + (1 + x)e^{2x}$, $z = 2C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + 2xe^{2x}$. **C39.** $y = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - (5 + 6x)e^{-x}$, $z = C_1e^x + C_2e^{2x} - (7 + 12x)e^{-x}$. **C40.** $y = 2C_1e^x + C_2e^{4x} - 6\cos x + 10\sin x$, $z = -C_1e^x + C_2e^{4x} + 11\cos x - 7\sin x$. **C41.** $y = 4e^{-x} + 2e^{3x}$, $z = 8e^{-x} - 4e^{3x}$. **C42.** $y = 4\sin 5x - 2\cos 5x$, $z = \sin 5x - 3\cos 5x$. **C43.** $y_1 = e^x + 3e^{3x} - 3e^{-4x}$, $y_2 = 2e^{3x} + 5e^{-4x}$, $y_3 = 3e^x - e^{3x} + e^{-4x}$. **C44.** $y_1 = e^x + 2e^{2x}$, $y_2 = -e^{-x}$, $y_3 = e^{-x} + e^x$. **C45.** $y = 16e^{2x} - 2e^{5x} - 15\cos 2x + 6\sin 2x$, $z = 8e^{2x} - 4e^{5x} + 12\sin 2x - \cos 2x$. **C46.** $y = 10e^{3x} - 8e^{5x} - 3xe^{3x}$, $z = 8e^{5x} - 3e^{3x} + xe^{3x}$. **C47.** $y_1' = y_2$, $y_2' = 2y_1 - x^2y_2$. **C48.** $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = y_4$, $y_4' = -4y_1 + x^2y_2 - 3y_3 + xy_4 + e^x$.

Тема 21. Метод Ейлера розв'язування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами

Короткі теоретичні відомості

21.1. Випадок простих дійсних характеристичних чисел. Лінійна однорідна система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{21.1}$$

де $a_{lk}, l, k = 1, 2, \ldots, n,$ — дійсні сталі, має фундаментальну систему розв'язків, яка складається з елементарних функцій.

Одним з методів побудови цієї фундаментальної системи розв'язків є метод Ейлера. Розв'язок системи (21.1) при цьому шукається у вигляді

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \; y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \; \ldots, \; y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \tag{21.2}$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ і λ — деякі сталі (дійсні або комплексні), причому $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ одночасно не дорівнюють нулю.

Підставляючи розв'язок (21.2) в (21.1) і скорочуючи на $e^{\lambda x}$, одержуємо систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0, \end{cases} \tag{21.3}$$

нетривіальний розв'язок якої існує лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{21.4}$$

Рівняння (21.4) називають *характеристичним рівнянням* системи (21.1), а його корені — *характеристичними числами.*

Нехай усі характеристичні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ системи (21.1) дійсні та прості. Тоді, підставляючи в систему (21.1) $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, одержимо систему з ненульовим розв'язком $\gamma_1 = \gamma_{j1}, \gamma_2 = \gamma_{j2}, \ldots, \gamma_n = \gamma_{jn}$ (ранг отриманої системи дорівнюватиме $n-1$, а тому числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ визначатимуться з точністю до сталого множника).

Підставляючи значення $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ і $\lambda = \lambda_j$ у формулу (21.2), одержимо розв'язок однорідної системи (21.1), який відповідатиме характеристичному числу λ_j:

$$y_{j1} = \gamma_{j1} e^{\lambda_1 x}, \ y_{j2} = \gamma_{j2} e^{\lambda_2 x}, \ \ldots, \ y_{jn} = \gamma_{jn} e^{\lambda_n x}. \tag{21.5}$$

Побудувавши розв'язки, які відповідають характеристичним числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, отримаємо фундаментальну систему розв'язків

$$\left.\begin{array}{c} y_{11} = \gamma_{11} e^{\lambda_1 x}, \ y_{12} = \gamma_{12} e^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ y_{1n} = \gamma_{1n} e^{\lambda_1 x}, \\ y_{21} = \gamma_{21} e^{\lambda_2 x}, \ y_{22} = \gamma_{22} e^{\lambda_2 x}, \ \ldots, \ y_{2n} = \gamma_{2n} e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_{n1} = \gamma_{n1} e^{\lambda_n x}, \ y_{n2} = \gamma_{n2} e^{\lambda_n x}, \ \ldots, \ y_{nn} = \gamma_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{array}\right\} \tag{21.6}$$

Згідно з основною теоремою (лекція *) загальним розв'язком системи (21.1) буде

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j \gamma_{jk} e^{\lambda_j x}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{21.7}$$

21.2. Випадок простих комплексних характеристичних чисел. Припустимо, що всі характеристичні числа системи (21.1) різні, але серед них є комплексні. Нехай $a \pm ib$ — пара комплексно-спряжених характеристичних чисел системи (21.1). Побудувавши розв'язок вигляду (21.2), який відповідає числу $a + ib$, і відокремивши в ньому дійсні та уявні частини, одержимо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки системи (21.1). Розв'язки, які відповідають характеристичному числу $a-ib$, будуть лінійно залежними з розв'язками, які відповідають числу $a+ib$.

21.3. Випадок кратних характеристичних чисел. Нехай серед характеристичних чисел є кратні. Тоді числу λ_1 кратності s відповідає розв'язок вигляду

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x},\ \ y_2 = P_2(x)e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x}, \quad (21.8)$$

де $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ — многочлени степеня не вищого, ніж $s-1$ (вони можуть вироджуватись у сталі числа), причому серед коефіцієнтів цих многочленів s коефіцієнтів є довільними, а інші виражаються через них.

З практичної точки зору для знаходження розв'язку, що відповідає характеристичному числу λ_1, потрібно шукати розв'язок у вигляді (21.8), вважаючи $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ многочленами $(s-1)$-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, і підставляючи їх в (21.1), виразити усі коефіцієнти через s з них, які залишаються довільними.

Нехай характеристичними числами системи (21.1) є $a \pm bi$ кратності s кожне. Тоді, побудувавши s лінійно незалежних комплексних розв'язків, які відповідають числу $a+bi$ і відділивши в них дійсні та уявні частини, одержимо $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Розв'язки, які відповідають числу $a-bi$, будуть лінійно залежними з розв'язками, що відповідають числу $a+bi$.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 21.1. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо характеристичні числа:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 9.$$

Складемо систему для знаходження чисел γ_1 і γ_2, які відповідають λ_1. Згідно з (21.3),

$$\begin{cases} 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = -\,\gamma_2.$$

Одне з чисел γ_1, γ_2 можна вибрати довільно. Нехай $\gamma_1 = 1$, тоді $\gamma_2 = -1$. Таким чином, характеристичному числу $\lambda_1 = 1$ відповідає розв'язок системи $y_1 = e^x$, $z_1 = -e^x$.

Аналогічно, розв'язуючи систему, яка відповідає характеристичному числу $\lambda_2 = 9$:

$$\begin{cases} -4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

знаходимо, що $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, а тому числу $\lambda = 9$ відповідає частинний розв'язок $y_2 = e^{9x}$, $z_2 = e^{9x}$.

Згідно з (**??**) записуємо загальний розв'язок

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \quad z = -\,C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \quad \blacksquare$$

Приклад 21.2. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z, \end{cases}$$

який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

має комплексно-спряжені корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Розв'язок, який відповідає числу λ_1, має вигляд $y = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$, де γ_1, γ_2 знаходимо з системи

$$-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \ \ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0.$$

Покладаючи $\gamma_1 = 1$, знаходимо $\gamma_2 = -i$, а тому комплексним розв'язком є $y = e^{(2+i)x}$, $z = -i\, e^{(2+i)x}$. Відокремлюючи дійсні та уявні частини, одержуємо два дійсні розв'язки:

$$y_1 = e^{2x} \cos x, \ z_1 = e^{2x} \sin x; \quad y_2 = e^{2x} \sin x, \ z_2 = -e^{2x} \cos x.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними (їхній вроскіан відмінний від нуля), а тому загальним розв'язком є

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \ \ z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x).$$

Враховуючи початкові умови, одержуємо значення $C_1 = 0$, $C_2 = -1$. Таким чином, розв'язком заданої задачі Коші є

$$y = -\, e^{2x} \sin x, \ \ z = e^{2x} \cos x. \quad \blacksquare$$

Приклад 21.3. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо характеристичні числа:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \, \lambda_{2,3} = -1.$$

Кореню $\lambda_1 = 2$ відповідає система двох рівнянь (третє є наслідком двох перших):

$$-2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \ \ \gamma_1 - 2\,\gamma_2 + \gamma_3 = 0.$$

Один з її розв'язків: $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$. Тому

$$y_1^{(1)} = e^{2x}, \quad y_2^{(1)} = e^{2x}, \quad y_3^{(1)} = e^{2x}$$

є розв'язком системи.

Характеристичним числам $\lambda_{2,3} = -1$ відповідає одне рівняння (друге і третє збігаються з ним) $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Виберемо два лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, наприклад, $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1$ і $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 1$. Кожному з них відповідає один розв'язок:

$$y_1^{(2)} = e^{-x},\ y_2^{(2)} = 0,\ y_3^{(2)} = -e^{-x};$$
$$y_1^{(3)} = 0,\ y_2^{(3)} = -e^{-x},\ y_3^{(3)} = e^{-x}$$

відповідно. Оскільки, як легко показати, вронскіан знайдених розв'язків відмінний від нуля, то
то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, а тому загальним розв'язком системи є

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \quad y_2 = C_1 e^{2x} - C_3 e^{-x},$$
$$y_3 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}.$$

Приклад 21.4. Знайти фундаментальну систему розв'язків і побудувати інтегральну матрицю системи диференціальних рівнянь (матричного рівняння) $\dfrac{d\overline{Y}}{dx} = A\overline{Y}$, де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Характеристичними числами, як легко перевірити, є $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3$.

Для простого кореня $\lambda_1 = 2$ маємо частинннний розв'язок $\overline{Y}_1(x)$:

$$\overline{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overline{Y}_1(x)}{dx} = 2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Підставляючи у вихідне матричне рівняння, одержуємо систему рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_1 = 4a_1 - a_2 - a_3, \\ 2a_2 = a_1 + 2a_2 - a_3, \\ 2a_3 = a_1 - a_2 + 2a_3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2a_1 - a_2 - a_3 = 0, \\ a_1 - a_3 = 0, \\ a_1 - a_2 = 0 \end{array}\right.$$

Очевидно, що $a_1 = a_2 = a_3$. Нехай $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Тоді

$$\overline{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Для двократного кореня $\lambda_{2,3} = 3$ маємо:

$$\overline{Y}_{2,3}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 x \\ \alpha_2 + \beta_2 x \\ \alpha_3 + \beta_3 x \end{pmatrix} e^{3x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\overline{Y}_{2,3}(x)}{dx} = \begin{pmatrix} \beta_1 + 3\alpha_1 + 3\beta_1 x \\ \beta_2 + 3\alpha_2 + 3\beta_2 x \\ \beta_3 + 3\alpha_3 + 3\beta_3 x \end{pmatrix} e^{3x}$$

і для відшукання сталих β_1, β_2, β_3, α_1, α_2, α_3 одержуємо систему

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 + 3\alpha_1 + 3\beta_1 x = 4\alpha_1 + 4\beta_1 x - \alpha_2 - \beta_2 x - \alpha_3 - \beta_3 x, \\ \beta_2 + 3\alpha_2 + 3\beta_2 x = \alpha_1 + \beta_1 x + 2\alpha_2 + 2\beta_2 x - \alpha_3 - \beta_3 x, \\ \beta_3 + 3\alpha_3 + 3\beta_3 x = \alpha_1 + \beta_1 x - \alpha_2 - \beta_2 x + 2\alpha_3 + 2\beta_3 x \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_1 = 0, \\ \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 = 0, \\ \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_3 = 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{array}\right.$$

Виберемо один раз $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$, а другий раз — $\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \alpha_2 = 0$. Тоді

$$\overline{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x}, \quad \overline{Y}_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Для перевірки того, що вектори $\overline{Y}_1(x)$, $\overline{Y}_2(x)$, $\overline{Y}_3(x)$ є лінійно незалежними, обчислимо їх вроскіан:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} & e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & e^{3x} \end{vmatrix} = e^{8x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким чином, вектори $\overline{Y}_1(x)$, $\overline{Y}_2(x)$, $\overline{Y}_3(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої системи, а

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} & e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

— шукана інтегральна матриця. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Знайти методом Ейлера загальний розв'язок системи другого порядку.

A1. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = 4z - 4y. \end{cases}$

A2. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = -6y - 3z. \end{cases}$

A3. $\begin{cases} y' = 4y + 5z, \\ z' = -4y - 4z. \end{cases}$

A4. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 6y - 5z. \end{cases}$

A5. $\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = -9y - 7z. \end{cases}$

A6. $\begin{cases} y' = z - 2y, \\ z' = 2z - 4y. \end{cases}$

Знайти методом Ейлера загальний розв'язок системи третього порядку ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — характеристичні числа).

A7. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 12y_2 - 4y_3, \\ y_2' = y_3 - y_1 - 3y_2, \\ y_3' = 6y_3 - y_1 - 12y_2, \end{cases} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$

A8. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 12y_1 - 4y_2 - 12y_3, \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$

A9. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3, \end{cases} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5.$

A10. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_3, \\ y_3' = y_2 - 2y_1 - y_3, \end{cases} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i.$

A11. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_3' = 3y_1 - y_3, \end{cases} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$

A12. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3, \\ y_3' = 2y_2 - y_1 + 3y_3, \end{cases} \quad \lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i.$

A13. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = 2y_1 - y_2 + 4y_3, \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 3.$

A14. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ y_3' = 2y_3 - y_1 + y_2, \end{cases} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1.$

A15. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_3, \\ y_2' = -4y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ y_3' = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 0.$

A16. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_3' = 2y_3 + y_2 - y_1, \end{cases}$ $\lambda_{1,2,3} = 1.$

A17. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2, \\ y_3' = 3y_1 - y_2 - y_3, \end{cases}$ $\lambda_{1,2,3} = 0.$

Знайти розв'язок задачі Коші.

A18. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = 4z - 2y; \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = -1.$

A19. $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 10y - 4z; \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 5.$

A20. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 3y - 2z; \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 1.$

A21. $\begin{cases} y_1' = 8y_2, \\ y_2' = -2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 8y_2 - 2y_3; \end{cases}$ $y_1(0) = -4,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 1.$

A22. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_2 - 2y_3 - 3y_1; \end{cases}$ $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 1.$

Побудувати інтегральну матрицю системи $\frac{d\overline{Y}}{dx} = A\overline{Y}$, де $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, а A — задана матриця.

A23. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

A24. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

A25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати систему методом Ейлера.

C1. $\begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 6y + 7z. \end{cases}$

C2. $\begin{cases} y' = 10y - 6z, \\ z' = 18y - 11z. \end{cases}$

C3. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -10y - z. \end{cases}$

C4. $\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$

C5. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

C6. $\begin{cases} y' = 6y + z, \\ z' = -16y - 2z. \end{cases}$

C7. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 - 3y_2 + 3y_3. \end{cases}$

C8. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$

C9. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

C10. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 4y_2 - 2y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3. \end{cases}$

C11. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 + 4y_3, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3, \\ y_3' = -3y_1 + 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$

C12. $\begin{cases} y_1' = 21y_1 - 8y_2 - 19y_3, \\ y_2' = 18y_1 - 7y_2 - 15y_3, \\ y_3' = 16y_1 - 6y_2 - 15y_3. \end{cases}$

C13. $\begin{cases} y_1' = y_3 - 3y_1, \\ y_2' = 2y_3 - 3y_2, \\ y_3' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3. \end{cases}$

C14. $\begin{cases} y_1' = -y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_3' = 4y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$

C15. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 7y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 - y_3, \\ y_3' = -2y_1 + 2y_2 + 3y_3. \end{cases}$

C16. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$

C17. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 - 3y_3, \\ y_2' = 4y_1 + 10y_2 - 12y_3, \\ y_3' = 3y_1 + 6y_2 - 7y_3. \end{cases}$

C18. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_2' = 3y_3 - 3y_1 - 3y_2, \\ y_3' = 2y_3 - 2y_1 - 2y_2. \end{cases}$

C19. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 - y_3, \\ y_3' = 3y_1 + 2y_2 - 5y_3. \end{cases}$

Знайти розв'язок задачі Коші.

C20. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = y + 2z; \end{cases}$ $\quad y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

C21. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 2z - y; \end{cases}$ $\quad y(0) = -1,\ z(0) = 3.$

C22. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = y - 3z; \end{cases}$ $\quad y(0) = 0,\ z(0) = 0.$

C23. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y - z; \end{cases}$ $\quad y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

C24. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_2 - y_1 + y_3, \\ y_3' = 3y_3 - y_1 - y_2; \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 1.$

C25. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_3, \\ y_2' = y_2 + y_3, \\ y_3' = -y_1 - y_2 - y_3; \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = -1.$

C26. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2, \\ y_2' = -y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3; \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = -1,\ y_3(0) = 1.$

C27. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_3; \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 1.$

Побудувати інтегральну матрицю системи $\frac{d\overline{Y}}{dx} = A\overline{Y}$, де $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, а A — задана матриця.

C28. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

C29. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

C30. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

C31. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

C32. Знайти всі нескінченно малі розв'язки при $x \to +\infty$ розв'язки системи

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 - 3y_3, \\ y_2' = 9y_3 - 7y_1 - 2y_2, \\ y_3' = 4y_3 - 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

Тема 22. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь

Короткі теоретичні відомості

22.1. Метод варіації довільних сталих. Для інтегрування лінійної неоднорідної системи

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{22.1}$$

у випадку, коли вдається зінтегрувати відповідну однорідну систему, можна використовувати метод варіації довільних сталих (метод Лаґранжа).

Розв'язок лінійної неоднорідної системи (22.1) шукаємо у вигляді

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{22.2}$$

де $z_{jk} = z_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, — деяка фундаментальна система розв'язків однорідної системи

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) z_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{22.3}$$

а $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — деякі неперервно диференційовні функції.

Функції $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, знаходять з системи

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{22.4}$$

22.2. Метод невизначених коефіцієнтів. Якщо функції $f_k(x)$ у системі лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{22.5}$$

складаються з сум і добутків багаточленів $P_m(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m$ та функцій $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, то її частинний розв'язок можна шукати методом невизначених коефіцієнтів. Зокрема, якщо

$$f_k(x) = P_{m_k}(x) e^{\alpha x},$$

де $P_{m_k}(x)$ — багаточлен степеня m_k, то частинний розв'язок системи (22.5) потрібно шукати у вигляді

$$y_i = Q_{m+s}^{(i)}(x) e^{\alpha x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{22.6}$$

де $Q_{m+s}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — багаточлени степеня $m + s$ з невідомими коефіцієнтами, $m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_k)$; $s = 0$, якщо α не є характеристичним числом, і s дорівнює кратності цього числа, якщо α є характеристичним числом (якщо точніше, число $m+s$ на m одиниць більше від найвищого зі степенів багаточленів, на які множаться експоненти $e^{\alpha x}$ у загальному розв'язку відповідної однорідної системи).

Невідомі коефіцієнти багаточленів $Q_{m+s}^{(i)}(x)$ визначають прирівнюванням коефіцієнтів біля відповідних доданків після підставляння (22.6) у систему (22.5).

Аналогічно визначаються степені багаточленів у випадках, коли функції $f_k(x)$ у системі (22.5) містять функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а число $\alpha + \beta i$ є або не є характеристичним.

Загальний розв'язок неоднорідної системи (22.1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної системи і довільного частинного розв'язку неоднорідної системи (22.1).

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 22.1. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = -3y - 4z + \frac{e^x}{e^x+1}, \\ z' = 5y + 6z. \end{cases} \tag{22.7}$$

Розв'язання. Знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y' = -3y - 4z, \\ z' = 5y + 6z \end{cases} \tag{22.8}$$

методом Ейлера. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Характеристичному числу $\lambda_1 = 1$ відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} -4\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \\ 5\gamma_1 + 5\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки маємо, наприклад, що $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Характеристичному числу $\lambda_2 = 2$ відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} -5\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \\ 5\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

яку задовольняють, наприклад, числа $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = -5$. Тому розв'язок однорідної системи (22.8) подається у вигляді

$$y_0 = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}, \quad z_0 = -C_1 e^x - 5C_2 e^{2x}.$$

Розв'язок неоднорідної системи (22.7) будемо шукати методом варіації довільних сталих у вигляді

$$y = C_1(x)e^x + 4C_2(x)e^{2x}, \quad z = -C_1(x)e^x - 5C_2(x)e^{2x}.$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знайдемо з системи (22.4):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + 4C_2'(x)e^{2x} = \frac{e^x}{e^x+1}, \\ -C_1'(x)e^x - 5C_2'(x)e^{2x} = 0. \end{cases}$$

Оскільки

$$C_1'(x) = \frac{5}{e^x+1}, \quad C_2'(x) = -\frac{e^{-x}}{e^x+1},$$

то

$$C_1(x) = 5\int \frac{dx}{e^x+1} = 5\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -5\ln(e^{-x}+1) + C_1,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{-x}dx}{e^x+1} = -\int \frac{e^{-2x}dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{e^{-x}d(e^{-x})}{e^{-x}+1} = \\ = e^{-x} - \ln(e^{-x}+1) + C_2.$$

Отже, розв'язок системи (22.7) подається у вигляді:

$$y = \big(-5\ln(e^{-x}+1) + C_1\big)e^x + 4\big(e^{-x} - \ln(e^{-x}+1) + C_2\big)e^{2x},$$

$$z = -\big(-5\ln(e^{-x}+1) + C_1\big)e^x - 5\big(e^{-x} - \ln(e^{-x}+1) + C_2\big)e^{2x}.$$

Після розкриття дужок будемо мати:

$$y = -5e^x\ln(e^{-x}+1) + C_1e^x + 4e^x - 4e^{2x}\ln(e^{-x}+1) + 4C_2e^{2x},$$

$$z = 5e^x\ln(e^{-x}+1) - C_1e^x - 5e^x + 5e^{2x}\ln(e^{-x}+1) - 5C_2e^{2x}. \blacksquare$$

Приклад 22.2. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 2y + 4z + 5e^x, \\ z' = 2y + 4z + 3. \end{cases} \tag{22.9}$$

Розв'язання. Знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y' = 2y + 4z, \\ z' = 2y + 4z \end{cases} \tag{22.10}$$

методом виключення. Здиференціюємо перше рівняння системи (22.10) і підставимо замість z' відповідний вираз із другого рівняння:

$$y'' = 2y' + 4z' \quad \Rightarrow \quad y'' = 2y' + 8y + 16z.$$

З першого рівняння виразимо z через y і підставимо в останнє отримане рівняння:

$$z = \frac{y' - 2y}{4} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2y' + 8y + 4y' - 8y \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y'' - 6y' = 0. \qquad (22.11)$$

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 6k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 6$, то загальним розв'язком рівняння (22.11) є

$$y = C_1 + C_2 e^{6x}.$$

Тепер, враховуючи, що $z = \frac{y'-2y}{4}$, знаходимо функцію z:

$$z = -\frac{C_1}{2} + C_2 e^{6x}.$$

Після перепозначення сталої C_1 розв'язок однорідної системи (22.10) записуємо у вигляді:

$$y_0 = 2C_1 + C_2 e^{6x}, \quad z_0 = -C_1 + C_2 e^{6x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи (22.9) знайдемо методом невизначених коефіцієнтів. Враховуючи вигляд функцій $f_1(x) = 5e^x$ і $f_2(x) = 3$, частинний розв'язок y_1, z_1 неоднорідної системи через невизначені коефіцієнти запишемо у вигляді

$$y_1 = Ae^x + Bx + C, \quad z_1 = De^x + Ex + F. \qquad (22.12)$$

Підставляючи (22.12) у задану систему, одержуємо:

$$Ae^x + B = 2Ae^x + 2Bx + 2C + 4De^x + 4Ex + 4F + 5e^x,$$
$$De^x + E = 2Ae^x + 2Bx + 2C + 4De^x + 4Ex + 4F + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля e^x, x і x^0 в обох частинах цих тотожностей, одержуємо відповідно:

$$\begin{array}{r|l} e^x & A = 2A + 4D + 5, \\ x & 0 = 2B + 4E, \\ x^0 & B = 2C + 4F, \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} e^x & D = 2A + 4D, \\ x & 0 = 2B + 4E, \\ x^0 & E = 2C + 4F + 3. \end{array}$$

Отримана система має лише п'ять лінійно незалежних рівнянь. Розв'язуючи її, отримуємо:

$$A = 3, \quad B = -2, \quad C + 2F = -1, \quad D = -2, \quad E = 1.$$

Покладемо, наприклад, $F = 0$, тоді $C = -1$, а тому частинним розв'язком неоднорідної системи є

$$y_1 = 3e^x - 2x - 1, \quad z_1 = -2e^x + x,$$

а загальним розв'язком —

$$y = 2C_1 + C_2 e^{6x} + 3e^x - 2x - 1, \quad z = -C_1 + C_2 e^{6x} - 2e^x + x. \ \blacksquare$$

Приклад 22.3. Записати частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (не шукаючи їх) системи

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x} + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x. \end{cases} \tag{22.13}$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичні числа відповідної однорідної системи:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 3.$$

У системі (22.13) для функцій xe^{3x}, $e^{3x}\sin x$, $xe^{3x}\cos x$ числа $\alpha + \beta i$ відповідно дорівнюють 3, $3 + i$, $3 + i$. Тому окремо знайдемо частинні розв'язки систем

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x}, \\ z' = y + 2z \end{cases} \tag{22.14}$$

і
$$\begin{cases} y' = 4y - z + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x. \end{cases} \tag{22.15}$$

Для системи (22.14) $\alpha + \beta i = k_1 = k_2 = 3$, $s = 2$, $m = 1$. Згідно з (22.6) її частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{3x},$$
$$z_1 = (fx^3 + gx^2 + hx + p)e^{3x}.$$

Для системи (22.15) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq k_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$, а тому її частинний розв'язок має вигляд

$$y_2 = (Ax + B)e^{3x}\sin x + (Cx + D)e^{3x}\cos x,$$
$$z_2 = (Ex + F)e^{3x}\sin x + (Gx + H)e^{3x}\cos x.$$

Тоді частинний розв'язок системи (22.13) запишеться у вигляді:
$$y = y_1 + y_2, \qquad z = z_1 + z_2. \ \blacksquare$$

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Зінтегрувати системи методом варіації довільних сталих:

A1. $\begin{cases} y' = 3y - 6z + \frac{3}{\cos 3x}, \\ z' = 3y - 3z. \end{cases}$

A2. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = y + \frac{2}{e^x - 1}. \end{cases}$

A3. $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = 8y - 4z + 15\sqrt{x}. \end{cases}$

A4. $\begin{cases} y' = z + 1, \\ z' = -y + \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$

Зінтегрувати системи методом невизначених коефіцієнтів:

A5. $\begin{cases} y' = 2y + 3z + 4e^{3x}, \\ z' = y + 4z - e^{2x}. \end{cases}$

A6. $\begin{cases} y' = -5y + 5z, \\ z' = y - z + 37\cos x. \end{cases}$

A7. $\begin{cases} y' = 2y - 3z - 2e^{3x}, \\ z' = y + 6z. \end{cases}$

A8. $\begin{cases} y' = 7y + 2z, \\ z' = 2z - 2y + 36x. \end{cases}$

Знайти розв'язки задач Коші:

A9. $\begin{cases} y' = z + 32\sin^3 x, \\ z' = -y. \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 2.$

A10. $\begin{cases} y' = z - 7y, \\ z' = -3y - 3z + 80e^{4x}. \end{cases} \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 5.$

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Зінтегрувати системи методом варіації довільних сталих:

C1. $\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z + \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}. \end{cases}$

C2. $\begin{cases} y' = -z, \\ z' = 16y + \frac{16}{\sin 4x}. \end{cases}$

C3. $\begin{cases} y' = z - 2y + x\ln x, \\ z' = 2z - 4y + 2x\ln x. \end{cases}$

C4. $\begin{cases} y' = 2z - 2y + \frac{1}{e^x+1}, \\ z' = 4z - 4y + \frac{1}{e^x+1}. \end{cases}$

C5. $\begin{cases} y' = 2y + 2z + \frac{e^x}{e^x+1}, \\ z' = -y - z. \end{cases}$

C6. $\begin{cases} y' = -2y - z, \\ z' = y + \frac{3e^{-x}}{x}. \end{cases}$

C7. $\begin{cases} y' = 2z - y + 15e^x\sqrt{x}, \\ z' = 3z - 2y. \end{cases}$

C8. $\begin{cases} y' = 5y - 6z + \frac{3e^{2x}}{\cos 3x}, \\ z' = 3y - z. \end{cases}$

C9. $\begin{cases} y' = z + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ z' = -y + \operatorname{tg} x. \end{cases}$

C10. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = -2y - z + \frac{3e^x}{2\sqrt{x}}. \end{cases}$

C11. $\begin{cases} y' = 2y + z - \ln x, \\ z' = -4y - 2z + 2\ln x. \end{cases}$

C12. $\begin{cases} y' = z + \frac{1}{\sin x}, \\ z' = -y. \end{cases}$

Зінтегрувати системи методом невизначених коефіцієнтів:

C13. $\begin{cases} y' = 5y - z + 12e^{7x}, \\ z' = 2y + 2z. \end{cases}$

C14. $\begin{cases} y' = y + 2z + 29\cos 2x, \\ z' = 6z - 2y - 58\sin 2x. \end{cases}$

C15. $\begin{cases} y' = 2y + 4z + 4e^{-x}, \\ z' = z - 12xe^{-x}. \end{cases}$

C16. $\begin{cases} y' = 3y - z + 4e^x, \\ z' = -5y - z - e^x. \end{cases}$

C17. $\begin{cases} y' = 3y + 5z, \\ z' = 2y - 82\sin 4x. \end{cases}$

C18. $\begin{cases} y' = 5y + 5z - 6, \\ z' = y + z. \end{cases}$

C19. $\begin{cases} y' = 4y + 3z + 5x, \\ z' = y + 2z + 4. \end{cases}$

C20. $\begin{cases} y' = 2z - 2y, \\ z' = 2y - 2z + 10\cos 2x. \end{cases}$

C21. $\begin{cases} y' = 2y - 3z + 17\cos x, \\ z' = z - 2y. \end{cases}$

C22. $\begin{cases} y' = 3y + 9e^{3x}, \\ z' = 6z - 2y. \end{cases}$

C23. $\begin{cases} y' = y - z + 3e^{2x}, \\ z' = z - 4y - 5e^{4x}. \end{cases}$

C24. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4z - y + 2e^{3x}. \end{cases}$

Знайти розв'язки задач Коші:

C25. $\begin{cases} y' = z + 15\sqrt{x+2}e^{-x}, \\ z' = -y - 2z, \end{cases} \quad y(0) = -2, \quad z(0) = 2.$

C26. $\begin{cases} y' = z + \frac{e^{3x}}{x}, \\ z' = -9y + 6z, \end{cases} \quad y(1) = 0, \quad z(1) = 0.$

C27. $\begin{cases} y' = z + 28\sqrt[3]{x+1}e^{x}, \\ z' = -y + 2z, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3.$

C28. $\begin{cases} y' = y + 2z + 4e^{x}, \\ z' = 6z - 2y, \end{cases} \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 2.$

C29. $\begin{cases} y' = z - 7y - 10e^{4x}, \\ z' = -3y - 3z - 10e^{4x}, \end{cases} \quad y(0) = 4, \quad z(0) = 2.$

C30. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y + 7z + 2e^{3x}, \end{cases} \quad y(0) = 5, \quad z(0) = -6.$

Відповіді

A1. $y = C_1(\cos 3x - \sin 3x) + C_2(\cos 3x + \sin 3x) + 3x\cos 3x + 3x\sin 3x + \ln|\cos 3x|\cdot(\cos 3x - \sin 3x)$, $z = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + 3x\sin 3x + \ln|\cos 3x|\cdot\cos 3x$. **A2.** $y = 2C_1e^{2x} + (C_2 - 2)e^{x} + (4e^{x} - 4e^{2x})\cdot\ln|1 - e^{-x}| + 2$, $z = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + 3 + (4e^{x} - 2e^{2x})\times\ln|1 - e^{-x}|$. **A3.** $y = 2C_1x + C_2 - 8x^2\sqrt{x}$, $z = 4C_1x + 2C_2 - C_1 + 10x\sqrt{x} - 16x^2\sqrt{x}$. **A4.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\sin x|\cdot\sin x - x\cos x$, $z = -C_1\sin x + C_2\cos x + \ln|\sin x|\cdot\cos x + x\sin x - 1$. **A5.** $y = C_1e^{5x} - 3C_2e^{x} + e^{3x} + e^{2x}$, $z = C_1e^{5x} + C_2e^{x} - e^{3x}$. **A6.** $y = -5C_1e^{-6x} + C_2 + 30\sin x - 5\cos x$, $z = C_1e^{-6x} + C_2 + 31\sin x + \cos x$. **A7.** $y = -3C_1e^{3x} - C_2e^{5x} + (1 - 3x)e^{3x}$, $z = C_1e^{3x} + C_2e^{5x} + xe^{3x}$. **A8.** $y = -2C_1e^{6x} - C_2e^{3x} + 4x + 2$, $z = C_1e^{6x} + 2C_2e^{3x} - 14x - 5$. **A9.** $y = -2\cos x + 2\sin x + 3\cos 3x + 12x\sin x$, $z = 2\cos x - 10\sin x - \sin 3x + 12x\cos x$. **A10.** $y = e^{4x} - 2e^{-4x}$, $z = 11e^{4x} - 6e^{-4x}$. **C1.** $y = 2C_1e^{2x} + C_2e^{x} - 2e^{2x}\operatorname{arctg} e^{x} + e^{x}\ln(e^{2x} + 1)$, $z = -3C_1e^{2x} - C_2e^{x} + 3e^{2x}\operatorname{arctg} e^{x} - e^{x}\ln(e^{2x} + 1)$. **C2.** $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x -$

$-\ln|\sin 4x|\cdot\sin 4x+4x\cos 4x$, $z=4C_1\sin 4x-4C_2\cos 4x+4\ln|\sin 4x|\cdot\cos 4x+16x\sin 4x$. **C3.** $y=C_1x+C_2+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$, $z=2C_1x+C_1+2C_2-\frac{1}{2}x^2+x^2\ln x$. **C4.** $y=C_1e^{2x}+C_2-\ln(e^{-x}+1)$, $z=2C_1e^{2x}+C_2-\ln(e^{-x}+1)$. **C5.** $y=-2C_1e^x-C_2-2e^x\ln(e^{-x}+1)-\ln(e^x+1)+1$, $z=C_1e^x+C_2+e^x\ln(e^{-x}+1)+\ln(e^x+1)-1$. **C6.** $y=e^{-x}\big(C_1x+C_2+3x-3x\ln|x|\big)$, $z=e^{-x}\big(-C_1x-C_1-C_2-3x+3(x+1)\ln|x|\big)$. **C7.** $y=e^x\big(2C_1x+C_2-C_1+10x\sqrt{x}-8x^2\sqrt{x}\big)$, $z=e^x\big(2C_1x+C_2-8x^2\sqrt{x}\big)$. **C8.** $y=e^{2x}\big(C_1(\cos 3x-\sin 3x)+C_2(\cos 3x+\sin 3x)+3x(\sin 3x+\cos 3x)+\ln|\cos 3x|\cdot(\cos 3x-\sin 3x)\big)$, $z=e^{2x}\big(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+3x\sin 3x+\ln|\cos 3x|\cdot\cos 3x\big)$. **C9.** $y=C_1\sin x-C_2\cos x+\operatorname{tg}x$, $z=C_1\cos x+C_2\sin x+2$. **C10.** $y=e^x\big(2C_1x+C_2+4x\sqrt{x}\big)$, $z=e^x\big(-2C_1x+C_1-C_2+3\sqrt{x}-4x\sqrt{x}\big)$. **C11.** $y=C_1x+C_2-x\ln x+x$, $z=-2C_1x+C_1-2C_2+2x\ln x-2x$. **C12.** $y=C_1\sin x-C_2\cos x+\ln|\sin x|\times\cos x+x\sin x$, $z=C_1\cos x+C_2\sin x-\ln|\sin x|\cdot\sin x+x\cos x$. **C13.** $y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}+5e^{7x}$, $z=C_1e^{4x}+2C_2e^{3x}+2e^{7x}$. **C14.** $y=2C_1e^{2x}+C_2e^{5x}-15\cos 2x+6\sin 2x$, $z=C_1e^{2x}+2C_2e^{5x}-\cos 2x+12\sin 2x$. **C15.** $y=-4C_1e^x+C_2e^{2x}-8(x+1)e^{-x}$, $z=C_1e^x+(6x+3)e^{-x}$. **C16.** $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}-e^x$, $z=-C_1e^{4x}+5C_2e^{-2x}+2e^x$. **C17.** $y=C_1e^{-2x}+5C_2e^{5x}-6\cos 4x+13\sin 4x$, $z=-C_1e^{-2x}+2C_2e^{5x}+14\cos 4x-3\sin 4x$. **C18.** $y=5C_1e^{6x}+C_2-x$, $z=C_1e^{6x}-C_2+x+1$. **C19.** $y=C_1e^x+3C_2e^{5x}+1-2x$, $z=-C_1e^x+C_2e^{5x}-2+x$. **C20.** $y=-C_1e^{-4x}+C_2+2\sin 2x-\cos 2x$, $z=C_1e^{-4x}+C_2+3\sin 2x+\cos 2x$. **C21.** $y=-3C_1e^{4x}+C_2e^{-x}+4\sin x+\cos x$, $z=2C_1e^{4x}+C_2e^{-x}+3\sin x+5\cos x$. **C22.** $y=3C_2e^{3x}+9xe^{3x}$, $z=C_1e^{6x}+2C_2e^{3x}+(6x+2)e^{3x}$. **C23.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+e^{4x}-e^{2x}$, $z=2C_1e^{-x}-2C_2e^{3x}-3e^{4x}+4e^{2x}$. **C24.** $y=e^{3x}\big(C_1x+C_2+x^2\big)$, $z=e^{3x}\big(C_1x+C_1+C_2+2x+x^2\big)$. **C25.** $y=e^{-x}\big(10(x+2)^{\frac{3}{2}}+4(x+2)^{\frac{5}{2}}-36\sqrt{2}-2-20x\sqrt{2}\big)$, $z=e^{-x}\big(20x\sqrt{2}+16\sqrt{2}+2-4(x+2)^{\frac{5}{2}}\big)$. **C26.** $y=e^{3x}\big(\ln|x|+3x-3-3x\ln|x|\big)$, $z=9e^{3x}\big(x-1-x\ln|x|\big)$. **C27.** $y=e^x\big(23x-11+21(x+1)^{\frac{4}{3}}-9(x+1)^{\frac{7}{3}}\big)$,

$z = e^x\big(23x+12-9(x+1)^{\frac{7}{3}}\big)$. **C28.** $y = 8e^{2x} - 5e^x$, $z = 4e^{2x} - 2e^x$. **C29.** $y = 6e^{-6x} - e^{-4x} - e^{4x}$, $z = 6e^{-6x} - 3e^{-4x} - e^{4x}$. **C30.** $y = 6e^{5x} - e^{3x}$, $z = -6e^{5x}$.

Тема 23. Системи лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами

Короткі теоретичні відомості

Лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь першого порядку з початковими умовами можна подати у векторному вигляді:

$$\frac{d\overline{Y}}{dx} = A(x)\overline{Y}, \tag{23.1}$$

$$\overline{Y}(a) = \overline{Y}_0, \tag{23.2}$$

де $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$, $\overline{Y}_0 = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$, $x \in [a, b)$, $A(x)$ — квадратна матриця порядку n.

Нехай задано точки $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, такі, що $a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_m < x_{m+1} = b$ і на кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, m$, матриця $A(x)$ набуває сталого значення A_k (x_k — точки розриву першого роду). Позначимо через Θ_k *характеристичну функцію* проміжку $[x_k, x_{k+1})$:

$$\Theta_k = \begin{cases} 1, & x \in [x_k, x_{k+1}), \\ 0, & x \notin [x_k, x_{k+1}). \end{cases}$$

Тоді матрицю $A(x)$ можна подати так:

$$A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2 + \ldots + A_m\Theta_m \equiv \sum_{k=1}^{m} A_k\Theta_k. \tag{23.3}$$

Під розв'язком системи (23.1) розумітимемо неперервну вектор-функцію $\overline{Y}(x)$, що задовольняє цю систему скрізь на $[a, b)$, крім, можливо, точок x_2, x_3, $\ldots$, x_m.

Розглянемо систему (23.1) на кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1})$:

$$\frac{d\overline{Y}}{dx} = A_k\overline{Y}, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{23.4}$$

Побудуємо для систем (23.4) *матриці Коші* $\tilde{B}_k(x,t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, які визначаються формулами:

$$\tilde{B}_k(x,t) = Y_k(x) Y_k^{-1}(t),$$

де $Y_k(x)$ — інтегральні матриці систем (23.4).

Позначимо через $B_k(x,a)$ матриці, які визначаються так:

$$B_1(x,a) \equiv \tilde{B}_1(x,a), \quad x \in [a, x_2), \tag{23.5}$$

$$B_k(x,a) \equiv \tilde{B}_k(x, x_k) B_{k-1}(x_k, a), \ x \in [x_k, x_{k+1}), \ k = 2, 3, \ldots, m. \tag{23.6}$$

Матриця $B_k(x,a)$ є неперервним продовженням матриці $B_{k-1}(x,a)$ на проміжок $[x_k, x_{k+1})$, а рекурентні формули (23.5), (23.6) забезпечують «склеювання» розв'язків систем (23.4) у точках x_k.

Матрицю Коші $B(x,a)$ на всьому проміжку $[a,b)$ можна подати єдиним аналітичним виразом:

$$B(x,a) = B_1(x,a)\Theta_1 + B_2(x,a)\Theta_2 + \ldots + B_m(x,a)\Theta_m \equiv \equiv \sum_{k=1}^{m} B_k(x,a)\Theta_k.$$

Слід відзначити, що матриця-функція $B(x,a)$ є неперервною у точках x_k.

Розв'язок задачі Коші (23.1), (23.2) подається формулою

$$\overline{Y} = \sum_{k=1}^{m} B_k(x,a)\overline{Y}_0\Theta_k. \tag{23.7}$$

Загальний розв'язок системи (23.1) визначається формулою

$$\overline{Y} = \sum_{k=1}^{m} B_k(x,a)\overline{C}\Theta_k, \tag{23.8}$$

де вектор $\overline{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^{\mathrm{T}}$ складається з довільних сталих C_1, C_2, ..., C_n.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 23.1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\overline{Y}}{dx} = A(x)\overline{Y}, \tag{23.9}$$

$$\overline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{23.10}$$

де

$$A(x) = \begin{cases} A_1, & x \in [0, \pi), \\ A_2, & x \in [\pi, \infty), \end{cases}$$

тобто $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$ (Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно), причому

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку для $x \in [0, \pi)$ систему

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 3y_2, \\ y_2' = -6y_1 + 4y_2. \end{cases} \tag{23.11}$$

Знайдемо її розв'язок методом виключення. Для цього здиференціюємо перше рівняння системи і підставимо замість y_2' відповідний вираз із другого рівняння:

$$y_1'' = -2y_1' + 3y_2' \quad \Rightarrow \quad y_1'' = -2y_1' - 18y_1 + 12y_2.$$

Враховуючи, що з першого рівняння системи

$$y_2 = \frac{y_1' + 2y_1}{3}, \tag{23.12}$$

отримуємо рівняння

$$y_1'' - 2y_1' + 10y_1 = 0,$$

загальним розв'язком якого є функція

$$y_1 = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x.$$

Тепер, використовуючи (23.12), знаходимо

$$y_2 = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x - C_1 e^x \sin 3x + C_2 e^x \cos 3x.$$

Отже, інтегральна матриця $Y(x)$ системи (23.11) має вигляд

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos 3x & e^x \sin 3x \\ e^x(\cos 3x - \sin 3x) & e^x(\cos 3x + \sin 3x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0, \pi).$$

Оскільки $\det Y(x) = e^{2x}$, то

$$Y^{-1}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} e^t(\cos 3t + \sin 3t) & -e^t \sin 3t \\ e^t(\sin 3t - \cos 3t) & e^t \cos 3t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t) & -e^{-t} \sin 3t \\ e^{-t}(\sin 3t - \cos 3t) & e^{-t} \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\tilde{B}_1(x,t) = Y(x) Y^{-1}(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} e^x \cos 3x & e^x \sin 3x \\ e^x(\cos 3x - \sin 3x) & e^x(\cos 3x + \sin 3x) \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t) & -e^{-t} \sin 3t \\ e^{-t}(\sin 3t - \cos 3t) & e^{-t} \cos 3t \end{pmatrix} =$$
$$= e^{x-t} \begin{pmatrix} \cos(3t - 3x) + \sin(3t - 3x) & \sin(3x - 3t) \\ 2\sin(3t - 3x) & \cos(3t - 3x) - \sin(3t - 3x) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно для системи

$$\begin{cases} y_1' = 9y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 10y_1 - 5y_2 \end{cases} \tag{23.13}$$

на проміжку $[\pi, \infty)$ знаходимо загальний розв'язок

$$y_1 = 5C_1 e^{2x} \cos x + 5C_2 e^{2x} \sin x,$$

$$y_2 = C_1 e^{2x}(7\cos x + \sin x) + C_2 e^{2x}(7\sin x - \cos x).$$

Тоді інтегральна матриця $Y(x)$ системи (23.13) має вигляд

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 5e^{2x}\cos x & 5e^{2x}\sin x \\ e^{2x}(7\cos x + \sin x) & e^{2x}(7\sin x - \cos x) \end{pmatrix},$$

а обернена до неї подається формулою

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-2t}(\cos t - 7\sin t) & e^{-2t}\sin t \\ \frac{1}{5}e^{-2t}(7\cos t + \sin t) & -e^{-2t}\cos t \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\tilde{B}_2(x,t) = Y(x)Y^{-1}(t) =$$
$$= e^{2x-2t}\begin{pmatrix} \cos(t-x) - 7\sin(t-x) & 5\sin(t-x) \\ 10\sin(x-t) & 7\sin(t-x) + \cos(t-x) \end{pmatrix}.$$

На основі формул (23.5), (23.6) отримуємо:

$$B_1(x,0) \equiv \tilde{B}_1(x,0) = \begin{pmatrix} e^x(\cos 3x - \sin 3x) & e^x \sin 3x \\ -2e^x \sin 3x & e^x(\cos 3x + \sin 3x) \end{pmatrix},$$

$$B_2(x,0) \equiv \tilde{B}_2(x,\pi)B_1(\pi,0) =$$
$$= e^{2x-2\pi}\begin{pmatrix} \cos(\pi-x) - 7\sin(\pi-x) & 5\sin(\pi-x) \\ 10\sin(x-\pi) & 7\sin(\pi-x) + \cos(\pi-x) \end{pmatrix}\times$$
$$\times \begin{pmatrix} -e^{\pi} & 0 \\ 0 & -e^{\pi} \end{pmatrix} =$$
$$= e^{2x-\pi}\begin{pmatrix} \cos x + 7\sin x & -5\sin x \\ 10\sin x & \cos x - 7\sin x \end{pmatrix}.$$

На основі формули (23.7) отримуємо розв'язок задачі Коші (23.9), (23.10):

$$\overline{Y} = B_1(x,0)\overline{Y}(0)\Theta_1 + B_2(x,0)\overline{Y}(0)\Theta_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} e^x(\cos 3x - \sin 3x) & e^x \sin 3x \\ -2e^x \sin 3x & e^x(\cos 3x + \sin 3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_1 +$$
$$+ e^{2x-\pi} \begin{pmatrix} \cos x + 7\sin x & -5\sin x \\ 10\sin x & \cos x - 7\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} e^x \cos 3x \\ e^x(\cos 3x - \sin 3x) \end{pmatrix} \Theta_1 + \begin{pmatrix} e^{2x-\pi}(\cos x + 2\sin x) \\ e^{2x-\pi}(3\sin x + \cos x) \end{pmatrix} \Theta_2.$$

Відповідь: $y_1 = \Theta_1 e^x \cos 3x + \Theta_2 e^{2x-\pi}(\cos x + 2\sin x)$, $y_2 = \Theta_1 e^x(\cos 3x - \sin 3x) + \Theta_2 e^{2x-\pi}(3\sin x + \cos x)$.

Приклад 23.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + b(x)y = 0, \tag{23.14}$$

де $b(x) = 4\Theta_1 + 5\Theta_2$, а Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно.

Розв'язання. Зведемо диференціальне рівняння (23.14) до системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \tag{23.15}$$

На проміжку $[0, \pi)$ система (23.15) і відповідне рівняння мають вигляд

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \tag{23.16}$$

$$y'' + 4y = 0.$$

Оскільки загальним розв'язком останнього рівняння є функція $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, то інтегральна матриця системи

(23.16) має вигляд

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix},$$

а матриця Коші $\tilde{B}_1(x,t)$ подається формулою

$$\tilde{B}_1(x,t) = Y(x)Y^{-1}(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t \\ \sin 2t & \frac{1}{2}\cos 2t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2x-2t) & \frac{1}{2}\sin(2x-2t) \\ -2\sin(2x-2t) & \cos(2x-2t) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно (перевірте!) на проміжку $[\pi,\infty)$ матриця Коші $\tilde{B}_2(x,t)$ подається формулою

$$\tilde{B}_2(x,t) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{5}(x-t) & \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}(x-t) \\ -\sqrt{5}\sin\sqrt{5}(x-t) & \cos\sqrt{5}(x-t) \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$B_1(x,0) \equiv \tilde{B}_1(x,0) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \frac{1}{2}\sin 2x \\ -2\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix},$$

$$B_2(x,0) \equiv \tilde{B}_2(x,\pi)B_1(\pi,0) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\sqrt{5}(x-\pi) & \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}(x-\pi) \\ -\sqrt{5}\sin\sqrt{5}(x-\pi) & \cos\sqrt{5}(x-\pi) \end{pmatrix}.$$

На основі формули (23.8) отримуємо загальний розв'язок системи (23.15):

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = B_1(x,0)\overline{C}\Theta_1 + B_2(x,0)\overline{C}\Theta_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2x & \frac{1}{2}\sin 2x \\ -2\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}\Theta_1 +$$
$$+ \begin{pmatrix} \cos\sqrt{5}(x-\pi) & \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}(x-\pi) \\ -\sqrt{5}\sin\sqrt{5}(x-\pi) & \cos\sqrt{5}(x-\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}\Theta_2.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (23.14) записується у вигляді

$$y = \Theta_1(C_1 \cos 2x + \frac{C_2}{2} \sin 2x) +$$
$$+ \Theta_2(C_1 \cos \sqrt{5}(x-\pi) + \frac{C_2}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}(x-\pi)). \ \blacksquare$$

На перший погляд, для $m > 2$ відшукання розв'язку є надто громіздким, проте основні обчислення зводяться до арифметичних операцій для матриць і тому побудову розв'язку можна запрограмувати в математичному пакеті Maple або Mathematica. З іншого боку, диференціальні рівняння і системи зі змінними коефіцієнтами можна апроксимувати з допомогою диференціальних рівнянь і систем з кусково-сталими коефіцієнтами, тому розглянутий метод можна трактувати як спосіб наближеного інтегрування диференціальних рівнянь і систем зі змінними коефіцієнтами.

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

А1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$ і $[1, \infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

А2. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,1)$ і $[1,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

А3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \frac{\pi}{2})$ і $[\frac{\pi}{2}, \infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

А4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2,$$

де $b(x) = 4\Theta_1 - \Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,\pi)$ і $[\pi,\infty)$ відповідно.

А5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

де $a(x) = -3\Theta_1 - 10\Theta_2$, $b(x) = 2\Theta_1 + 25\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,1)$ і $[1,\infty)$ відповідно.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

С1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,2)$ і $[2,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

C2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,1)$ і $[1,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

C3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 2,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,1)$ і $[1,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

C4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,2)$ і $[2,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

C5. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$ і $[1, \infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

C6. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$ і $[1, \infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

C7. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

C8. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 3,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,\pi)$ і $[\pi,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти загальні розв'язки систем

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2,$$

де:

C9. Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,1)$ і $[1,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

C10. Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,\pi)$ і $[\pi,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

C11. Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0,\pi)$ і $[\pi,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

C12. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad y(0) = 6, \quad z(0) = 6,$$

де $A(x) = A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2 + A_3\Theta_3$, Θ_1, Θ_2 і Θ_3 — характеристичні функції проміжків $[0,1)$, $[1,2)$ і $[2,\infty)$ відповідно,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

С13. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 4,$$

де $b(x) = -\Theta_1 - 4\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$ і $[1, \infty)$ відповідно.

С14. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 12,$$

де $b(x) = 9\Theta_1 + 16\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно.

С15. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 6,$$

де $a(x) = \Theta_1 - 2\Theta_2$, $b(x) = -2\Theta_1 - 3\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$ і $[1, \infty)$ відповідно.

С16. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' - 4y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

де $b(x) = 5\Theta_1 + 4\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно.

С17. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 5,$$

де $a(x) = \Theta_1 - 2\Theta_2$, $b(x) = -6\Theta_1 + \Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$ і $[1, \infty)$ відповідно.

С18. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

де $a(x) = -2\Theta_1 + 14\Theta_2$, $b(x) = 2\Theta_1 + 49\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно.

C19. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

де $a(x) = -2\Theta_1$, $b(x) = 5\Theta_1 + 4\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно.

C20. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

де $a(x) = -2\Theta_1 + \Theta_2$, $b(x) = 10\Theta_1 - 2\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно.

C21. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 7,$$

де $a(x) = -\Theta_1 + 2\Theta_2 + 4\Theta_3$, $b(x) = -12\Theta_1 - 3\Theta_2 - 5\Theta_3$, Θ_1, Θ_2 і Θ_3 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$, $[1, 2)$ і $[2, \infty)$ відповідно.

C22. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(a(x)y')' + b(x)y = 0, \tag{23.17}$$

де $a(x) = 4\Theta_1 + \Theta_2$, $b(x) = \Theta_1 + 4\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, \pi)$ і $[\pi, \infty)$ відповідно.

Вказівка. При зведенні рівняння (23.17) до системи першого порядку $\overline{Y}' = A\overline{Y}$ вектор $\overline{Y}$ треба брати у вигляді $\overline{Y} = (y, y^{[1]})^{\mathrm{T}}$, де $y^{[1]} = a(x)y'$ — квазіпохідна.

C23. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(a(x)y')' + b(x)y = 0,$$

де $a(x) = 2\Theta_1 + 3\Theta_2$, $b(x) = -18\Theta_1 - 12\Theta_2$, Θ_1 і Θ_2 — характеристичні функції проміжків $[0, 1)$ і $[1, \infty)$ відповідно.

Відповіді

A1. $y = \Theta_1 e^{4x} + \Theta_2(3e^{3x+1} - 2e^{4x})$, $z = \Theta_1 e^{4x} + \Theta_2(4e^{4x} - 3e^{3x+1})$. **A2.** $y = \Theta_1(3(C_1 - C_2)e^{-3x} + (3C_2 - C_1)e^{-5x}) + \Theta_2(3(C_1 - C_2)e^{4x-7} + (3C_2 - C_1)e^{2x-7})$, $z = \Theta_1((C_1 - C_2)e^{-3x} + (3C_2 - C_1)e^{-5x}) + \Theta_2((C_1 - C_2)e^{4x-7} + (3C_2 - C_1)e^{2x-7})$. **A3.** $y = \Theta_1 e^{-6x} + \Theta_2 e^{2x-4\pi}(\cos x + \sin x)$, $z = \Theta_1 e^{-6x} + \Theta_2 e^{2x-4\pi}\sin x$. **A4.** $y = \Theta_1(2\cos 2x + \sin 2x) + 2\Theta_2 e^{x-\pi}$. **A5.** $y = \Theta_1((2C_1 - C_2)e^{x} + (C_2 - C_1)e^{2x}) + \Theta_2((3C_1 x - 4C_1 + 4C_2 - 3C_2 x)e^{5x-3} + (10C_1 - 8C_1 x - 5C_2 + 4C_2 x)e^{5x-4})$. **C1.** $y = \Theta_1 e^{-3x} + \Theta_2(3e^{-3x} - 2e^{2-4x})$, $z = \Theta_1 e^{-3x} + \Theta_2(4e^{2-4x} - 3e^{-3x})$. **C2.** $y = \Theta_1 e^{4x} + \Theta_2(5e^{7-3x} - 4e^{8-4x})$, $z = \Theta_1 e^{4x} + \Theta_2(6e^{8-4x} - 5e^{7-3x})$. **C3.** $y = \Theta_1(4e^{4x} - 3e^{3x}) + \Theta_2(8e^{4x} - 7e^{4x-1} - 4e^{3x+1} + 4e^{3x})$, $z = \Theta_1(4e^{4x} - 2e^{3x}) + \Theta_2(16e^{4x} - 14e^{4x-1} - 12e^{3x+1} + 12e^{3x})$. **C4.** $y = \Theta_1(2e^{x} - e^{3x}) + \Theta_2(2e^{5x-8} - e^{3x})$, $z = \Theta_1(e^{3x} + 2e^{x}) + \Theta_2(2e^{5x-8} + e^{3x})$. **C5.** $y = \Theta_1 e^{5x} + \Theta_2(2e^{5x} - e^{3x+2})$, $z = -\Theta_1 e^{5x} + \Theta_2(2e^{5x} - 3e^{3x+2})$. **C6.** $y = \Theta_1(2e^{4x} - e^{6x}) + \Theta_2((4x - 5)e^{3x+3} + (6 - 4x)e^{3x+1})$, $z = \Theta_1(3e^{6x} - 2e^{4x}) + \Theta_2((4x - 1)e^{3x+3} + (2 - 4x)e^{3x+1})$. **C7.** $y = \Theta_1 e^{x} - \Theta_2 e^{2x-\pi}(\sin x + \cos x)$, $z = \Theta_1 e^{x} - \Theta_2 e^{2x-\pi}\cos x$. **C8.** $y = \Theta_1(18x + 3)e^{2x} + \Theta_2 e^{3x-\pi}((21\pi - 4)\sin 3x - (3 + 18\pi)\cos 3x)$, $z = \Theta_1(3 - 9x)e^{2x} + \Theta_2 e^{3x-\pi}((15\pi + 1)\sin 3x + (9\pi - 3)\cos 3x)$. **C9.** $y = \Theta_1((C_2 - C_1)e^{5x} + (3C_1 - C_2)e^{3x}) + \Theta_2((4C_2 - 4C_1)e^{4x+1} + (3C_1 - C_2)e^{4x-1} + (3C_1 - 3C_2)e^{2x+3})$, $z = \Theta_1((3C_2 - 3C_1)e^{5x} + (3C_1 - C_2)e^{3x}) + \Theta_2((4C_2 - 4C_1)e^{4x+1} + (3C_1 - C_2)e^{4x-1} + (C_1 - C_2)e^{2x+3})$. **C10.** $y = \Theta_1((C_1 - C_2)e^{3x} + (C_1 + C_2)e^{-x}) + \Theta_2((3C_1 - 3C_2)e^{5\pi-2x}\sin x + (C_2 - C_1)e^{5\pi-2x}\cos x - (5C_1 + 5C_2)e^{\pi-2x}\sin x - (C_1 + C_2)e^{\pi-2x}\cos x)$, $z = \Theta_1((2C_2 - 2C_1)e^{3x} + (2C_1 + 2C_2)e^{-x}) + \Theta_2((C_2 - C_1)e^{5\pi-2x}\sin x + (2C_1 - 2C_2)e^{5\pi-2x}\cos x + (3C_1 + 3C_2)e^{\pi-2x}\sin x - (2C_1 + 2C_2)e^{\pi-2x}\cos x)$. **C11.** $y = \Theta_1 e^{-2x}((C_1 + 2C_2)\sin x + C_1\cos x) + \Theta_2 e^{2x-4\pi}((\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{2}C_2)\sin 2x - C_1\cos 2x)$, $z = \Theta_1 e^{-2x}(C_2\cos x - (C_1 + C_2)\sin x) - \Theta_2 e^{2x-4\pi}((\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2)\sin 2x + C_2\cos 2x)$. **C12.** $y = \Theta_1(3e^{5x} + 3e^{x}) + \Theta_2(6e^{5x-4} -$

$- 2e^{5x} + 5e^{2x+3} - 3e^{2x-1}) + \Theta_3(5e^{5x-3} - 3e^{5x-7} - 2e^{2x+6} + 6e^{2x+2})$, $z = \Theta_1(9e^{5x} - 3e^x) + \Theta_2(3e^{5x-4} - e^{5x} + 10e^{2x+3} - 6e^{2x-1}) + \Theta_3(10e^{5x-3} - 6e^{5x-7} - e^{2x+6} + 3e^{2x+2})$. **C13.** $y = 4\Theta_1 e^x + \Theta_2(3e^{2x-1} + e^{3-2x})$. **C14.** $y = \Theta_1(\cos 3x + 4\sin 3x) - \Theta_2(\cos 4x + 3\sin 4x)$. **C15.** $y = 6\Theta_1 e^x + \Theta_2(3e^{3x-2} + 3e^{2-x})$. **C16.** $y = \Theta_1 e^{2x}(\cos x - \sin x) + \Theta_2 e^{2x}(x - \pi - 1)$. **C17.** $y = \Theta_1(4e^{2x} + e^{-3x}) + \Theta_2((5-4x)e^{x-4} + 4xe^{x+1})$. **C18.** $y = \Theta_1 e^x \cos x + \Theta_2 e^{8\pi - 7x}(8\pi - 1 - 8x)$. **C19.** $y = \Theta_1 e^x(2C_1\cos 2x + (C_2 - C_1)\sin 2x) + \Theta_2 e^{\pi}(2C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **C20.** $y = \Theta_1 e^x(3C_1\cos 3x + (C_2 - C_1)\sin 3x) + \Theta_2((C_2 - C_1)e^{3\pi-2x} - (2C_1 + C_2)e^x)$. **C21.** $y = \Theta_1(4e^{4x} + 3e^{-3x}) + \Theta_2(7e^{x+3} - 3e^{7-3x} + 3e^{-3x}) + \Theta_3(7e^{x+3} - e^{x-1} + e^{x-8} - 2e^{11-5x} + 2e^{4-5x})$. **C22.** $y = \Theta_1(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}) + \Theta_2(C_2\cos 2x - C_1\sin 2x)$. **C23.** $y = \Theta_1((6C_1 + C_2)e^{3x} + (6C_1 - C_2)e^{-3x}) + \Theta_2((6C_1 + C_2)e^{2x+1} + (6C_1 - C_2)e^{-2x-1})$.

Тема 24. Стійкість лінійних систем

Короткі теоретичні відомості

24.1. Основні означення. Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{24.1}$$

називають *стійким*, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geqslant T$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що довільний інший розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, цієї ж системи, початкові значення $y_j(t_0)$ якого задовольняють нерівності

$$|y_j(t_0) - \varphi_j(t_0)| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{24.2}$$

визначений для всіх $t \geqslant t_0$ і справджуються нерівності

$$|y_j(t) - \varphi_j(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad t \geqslant t_0.$$

Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, називають *асимптотично стійким*, якщо: 1) він стійкий; 2) усі розв'язки $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (24.1) з достатньо близькими початковими умовами при $t \to +\infty$ необмежено наближаються до $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тобто з нерівностей (24.2) випливає, що

$$\lim_{t \to +\infty} |y_j(t) - \varphi_j(t)| = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{24.3}$$

Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (24.1) називають *нестійким*, якщо він не є стійким.

Дослідження на стійкість довільного розв'язку системи (24.1) заміною $x_j(t) = y_j(t) - \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, можна звести до дослідження на стійкість нульового розв'язку системи

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(t, x_1 + \varphi_1, \ldots, x_n + \varphi_n) - f_j(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{24.4}$$

де $j = 1, 2, \ldots, n$. Розв'язок $y_j(t)$ системи (24.1) і нульовий розв'язок системи (24.4) є одночасно стійкими, асимптотично стійкими або нестійкими. Нульовий розв'язок системи (24.4) називають *тривіальним розв'язком* системи (24.4), її *точкою спокою* або *положенням рівноваги*.

24.2. Стійкість лінійної системи зі сталими коефіцієнтами. Якщо всі характеристичні числа системи

$$\frac{dy_j}{dt} = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{24.5}$$

мають від'ємні дійсні частини (тобто або вони дійсні від'ємні числа, або комплексні числа, дійсні частини яких від'ємні), то нульовий розв'язок системи (25.3) асимптотично стійкий.

Якщо хоча б одне характеристичне число системи (25.3) має додатну дійсну частину (тобто або це число додатне, або комплексне з додатною дійсною частиною), то нульовий розв'язок системи (25.3) нестійкий.

Якщо серед характеристичних чисел системи (25.3) немає чисел з додатними дійсними частинами, але є прості числа з нульовою дійсною частиною, то нульовий розв'язок системи (25.3) є стійким, але не є асимптотично стійким.

Якщо серед характеристичних чисел системи (25.3) немає чисел з додатними дійсними частинами, але є кратні числа з нульовими дійсними частинами, то можливі як стійкі, так і нестійкі нульові розв'язки.

24.3. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара. Необхідною умовою того, що всі дійсні частини коренів рівняння

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0 \quad (a_0 > 0) \tag{24.6}$$

від'ємні, є нерівності $a_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Достатньою умовою додатності дійсної частини хоча б одного кореня рівняння (24.6) є виконання хоча б однієї з нерівностей $a_j < 0$,

$j = 1, \ldots, n$. Позначимо

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix},$$

де $a_j = 0$, якщо $j > n$.

Критерій Рауса–Гурвіца. Дійсні частини коренів рівняння (24.6) від'ємні тоді і тільки тоді, коли $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Зауваження. Дійсні частини коренів рівняння (24.6) недодатні тоді і тільки тоді, коли $\Delta_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Критерій Л'єнара–Шипара. Дійсні частини коренів рівняння (24.6) від'ємні тоді і тільки тоді, коли

$$a_j > 0,\ j = 0, 1, \ldots, n; \quad \Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0,\ \ldots$$

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 24.1. Використовуючи означення стійкості, дослідити на стійкість розв'язки задачі Коші $y' = ky,\ y(t_0) = y_0$.
Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння є $y(t) = Ce^{kt}$, а розв'язком заданої задачі —

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{24.7}$$

Задамо іншу початкову умову $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$. Тоді розв'язком цієї задачі (збуреним розв'язком) є

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{24.8}$$

Оцінимо різницю розв'язків (24.7) і (24.8):

$$|y(t)-\tilde{y}(t)| \;=\; \left|y_0e^{k(t-t_0)}-\tilde{y}_0e^{k(t-t_0)}\right| = e^{k(t-t_0)}\,|y_0-\tilde{y}_0|. \tag{24.9}$$

Якщо $k<0$, то $e^{k(t-t_0)}<1$ для всіх $t\geqslant t_0$. Отже, якщо $|y_0-\tilde{y}_0|<\delta=\varepsilon$, то з (24.9) маємо, що

$$|y(t)-\tilde{y}(t)|<|y_0-\tilde{y}_0|<\varepsilon,$$

тобто розв'язок стійкий. У цьому випадку розв'язок також асимптотично стійкий, оскільки

$$\lim_{t\to+\infty}|y(t)-\tilde{y}(t)| \;=\lim_{t\to+\infty}|y_0-\tilde{y}_0|e^{k(t-t_0)}=0.$$

Якщо $k>0$, то розв'язок (24.7) нестійкий, бо яким би не було число t_0, для $t\geqslant t_0$, $y_0\neq\tilde{y}_0$, різниця розв'язків (24.7) і (24.8) при зростанні t стає нескінченно великою, оскільки $\lim\limits_{t\to+\infty}|y_0-\tilde{y}_0|e^{k(t-t_0)}=+\infty$.

Якщо $k=0$, то розв'язок $y=y_0$ стійкий, але не асимптотично стійкий, бо вираз $|y_0-\tilde{y}_0|$ не прямує до нуля, коли $t\to+\infty$.

Відповідь: розв'язок стійкий, якщо $k\leqslant 0$, у тому числі асимптотично стійкий, якщо $k<0$, і нестійкий, якщо $k>0$.

Приклад 24.2. Використовуючи означення стійкості, дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = -\,y,\\ y'=x.\end{cases} \tag{24.10}$$

Розв'язання. Розв'язуючи систему і враховуючи початкові умови $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, знаходимо $x=x_0\cos t-y_0\sin t$, $y=x_0\sin t+y_0\cos t$, звідки

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2. \tag{24.11}$$

Для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ досить узяти $\delta \leqslant \varepsilon$, адже як тільки $x_0^2 + y_0^2 < \delta^2$, то $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ для всіх $t > 0$. Отже, розв'язок $x = y = 0$ є стійким. З (24.11) видно, що інтегральні криві системи (24.10) утворюють сім'ю концентричних кіл з центром у початку координат. При $t \to \infty$ ці кола не будуть зближатись, вони весь час залишатимуться на одній відстані. Тому нульовий розв'язок не є асимптотично стійким.
Відповідь: розв'язок $x = y = 0$ є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад 24.3. Використовуючи означення стійкості, дослідити на стійкість точку спокою системи $x' = 3y - 5x$, $y' = 4y - 6x$.
Розв'язання. Розв'язуючи систему, знаходимо $x = C_1e^{-2t} + C_2e^t$, $y = C_1e^{-2t} + 2C_2e^t$. Враховуючи початкові умови $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, одержуємо, що $C_1 = 2x_0 - y_0$, $C_2 = y_0 - x_0$, а тому

$$x = (2x_0 - y_0)e^{-2t} + (y_0 - x_0)e^t, \quad y = (2x_0 - y_0)e^{-2t} + 2(y_0 - x_0)e^t.$$

Покладемо $y_0 = 2x_0$. Тоді, яким би малим не було число x_0, функції $|x|$ та $|y|$ необмежено зростатимуть при $t \to +\infty$, а тому розв'язок $x = y = 0$ є нестійким. ■

Приклад 24.4. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичні числа цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ 4 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - k - 14 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{2}.$$

Оскільки одне з характеристичних чисел є додатним, то тривіальний розв'язок заданої системи є нестійким. ■

Приклад 24.5. Дослідити на стійкість точку спокою рівняння $y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0$.
Розв'язання. Скористаємося критерієм Рауса–Гурвіца. Складемо характеристичне рівняння: $k^4+4k^3+7k^2+6k+2 = 0$. Оскільки

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 22 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 100 > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_3 > 0,$$

то точка спокою — асимптотично стійка. ■

Приклад 24.6. Дослідити на стійкість точку спокою рівняння $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 6y''' + 8y'' + 5y' + 3y = 0$.
Розв'язання. Оскільки всі коефіцієнти характеристичного рівняння $k^5 + 4k^4 + 6k^3 + 8k^2 + 5k + 3 = 0$ додатні й

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 16 > 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 63 > 0,$$

то згідно з критерієм Л'єнара–Шипара точка спокою заданого рівняння — асимптотично стійка. ■

Приклад 24.7. Дослідити на стійкість точку спокою рівняння $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 3y''' - y'' + 7y' + 9y = 0$.
Розв'язання. Оскільки коефіцієнти характеристичного рівняння $k^5+4k^4+3k^3-k^2+7k+9 = 0$ мають різний знак, точка спокою є нестійкою. ■

Приклад 24.8. Дослідити на стійкість точку спокою рівняння $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 2y''' + y'' + 2y' + 7y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^5 + 3k^4 + 2k^3 + k^2 + 2k + 7 = 0$. Оскільки

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -61 < 0,$$

то згідно із зауваженням до критерію Рауса–Гурвіца точка спокою заданого рівняння — нестійка. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Використовуючи означення стійкості, дослідити на стійкість розв'язки задач Коші:

А1. $y' + x = 0$, $y(0) = 2$.

А2. $y' = 2x(y+1)$, $y(0) = 0$.

А3. Використовуючи означення стійкості, дослідити на стійкість точку спокою системи $\begin{cases} x' = -x - 9y, \\ y' = x - y. \end{cases}$

Дослідити на стійкість точку спокою систем:

А4. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x - 6y. \end{cases}$

А5. $\begin{cases} x' = y - 4x, \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$

А6. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = -5x - 2y. \end{cases}$

А7. $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y, \\ z' = x + 3y - z. \end{cases}$

А8. $\begin{cases} x' = 3x + 2y + z, \\ y' = -2x + 5y, \\ z' = 3x + y + 4z. \end{cases}$

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівнянь:

А9. $y^{(4)} + 3y''' + 5y'' + 7y' + 5y = 0$.

А10. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 5y' + 6y = 0$.

А11. $y^{(5)} + 7y^{(4)} + 20y''' + 30y'' + 24y' + 8y = 0$.

А12. $y^{(5)} + 5y^{(4)} + 9y''' - 8y'' + 10y' + 4y = 0$.

А13. Визначити, при яких значеннях параметра a нульовий розв'язок рівняння $y^{(4)} + 2y''' + ay'' + 4y' + 4y = 0$ є асимптотично стійким.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Використовуючи означення стійкості, дослідити на стійкість розв'язки задач Коші:

C1. $y' = -xy$, $y(0) = 1$.

C2. $y' = y + x$, $y(0) = 1$.

C3. $xy' = y$, $y(1) = 0$.

C4. $e^x y' = x$, $y(0) = 3$.

Використовуючи означення стійкості, дослідити на стійкість точку спокою систем:

C5. $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$

C6. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

C7. $\begin{cases} x' = 6y - 7x, \\ y' = 3y - 4x. \end{cases}$

C8. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 6x - 3y. \end{cases}$

C9. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = -2x + 2y. \end{cases}$

C10. $\begin{cases} x' = 2y - 3x, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

Дослідити на стійкість точку спокою систем:

C11. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 3x + 5y. \end{cases}$

C12. $\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 2x - 4y. \end{cases}$

C13. $\begin{cases} x' = 3y - 5x, \\ y' = -x - 7y. \end{cases}$

C14. $\begin{cases} x' = 3x + 5y, \\ y' = 2y. \end{cases}$

C15. $\begin{cases} x' = 2x - 6y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$

C16. $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

C17. $\begin{cases} x' = 3x - 5y, \\ y' = 4x + y. \end{cases}$

C18. $\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = -5x. \end{cases}$

C19. $\begin{cases} x' = 2x - 6y, \\ y' = x + 8y. \end{cases}$

C20. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 8x - 7y. \end{cases}$

C21. $\begin{cases} x' = -x + y + 5z, \\ y' = -2x + z, \\ z' = -3z. \end{cases}$

C22. $\begin{cases} x' = x + y - z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x - 3y + 3z. \end{cases}$

C23. $\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z, \\ y' = x + z, \\ z' = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

C24. $\begin{cases} x' = 3x + 2y - 3z, \\ y' = 4x + 10y - 12z, \\ z' = 3x + 6y - 7z. \end{cases}$

C25. $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = z - y, \\ z' = x - z. \end{cases}$

C26. $\begin{cases} x' = 2x + 6y - z, \\ y' = 4x + 3y + 2z, \\ z' = x + 3y + 7z. \end{cases}$

C27. $\begin{cases} x' = -6x + 2y + 6z, \\ y' = -4x + 2y + 3z, \\ z' = -x + 3y - 2z. \end{cases}$

C28. $\begin{cases} x' = 2x - 4y - z, \\ y' = 2x + 2y - 3z, \\ z' = x + y - 4z. \end{cases}$

C29. $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -3x - y - 3z, \\ z' = -2x - 2y - 3z. \end{cases}$

C30. $\begin{cases} x' = -6x + 2y + z, \\ y' = -4x + y + z, \\ z' = x + 3y - 4z. \end{cases}$

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівнянь:

C31. $y^{(4)} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0.$

C32. $y^{(4)} + 6y''' + 9y'' + 5y' + 2y = 0.$

C33. $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + y' + 3y = 0.$

C34. $y^{(4)} + 3y''' + 6y'' - 5y' + 6y = 0.$

C35. $y^{(4)} + 5y''' + 10y'' + 10y' + 4y = 0.$

C36. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 4y' + 5y = 0.$

C37. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + 2y = 0.$

C38. $y^{(4)} + 6y''' + 13y'' + 14y' + 6y = 0.$

C39. $y^{(5)} + y^{(4)} + 5y''' + 10y'' + 25y' - 10y = 0.$
C40. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + 2y = 0.$
C41. $y^{(5)} + 6y^{(4)} + 15y''' + 20y'' + 14y' + 4y = 0.$
C42. $y^{(5)} + 7y^{(4)} + 20y''' + 30y'' + 40y' + 20y = 0.$
C43. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 12y'' + 10y' + y = 0.$
C44. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 5y''' + 10y'' + 7y' + 9y = 0.$
C45. $y^{(5)} + 5y^{(4)} + 3y''' + 7y'' + 2y' + 8y = 0.$

Визначити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок рівнянь є асимптотично стійким:

C46. $y''' + ay'' + by' + 3y = 0.$
C47. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 4y' + ay = 0.$
C48. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + ay' + 2y = 0.$
C49. $y^{(4)} + 2y''' + ay'' + 2y' + by = 0.$
C50. $y^{(4)} + ay''' + 3y'' + 2y' + by = 0.$

Відповіді

A1. Стійкий, але не є асимптотично стійким. **A2.** Нестійкий. **A3.** Асимптотично стійка. **A4.** Нестійка. **A5.** Асимптотично стійка. **A6.** Стійка, але не асимптотично стійка. **A7.** Асимптотично стійка. **A8.** Нестійка. **A9.** Асимптотично стійкий. **A10.** Нестійкий. **A11.** Асимптотично стійкий. **A12.** Нестійкий. **A13.** $a > 4$.

C1. Асимптотично стійкий. **C2.** Нестійкий. **C3.** Нестійкий. **C4.** Стійкий, але не є асимптотично стійким. **C5.** Нестійка. **C6.** Нестійка. **C7.** Асимптотично стійка. **C8.** Стійка, але не асимптотично стійка. **C9.** Нестійка. **C10.** Асимптотично стійка. **C11.** Нестійка. **C12.** Нестійка. **C13.** Асимптотично стійка. **C14.** Нестійка. **C15.** Стійка, але не асимптотично стійка. **C16.** Нестійка. **C17.** Нестійка. **C18.** Стійка, але не асимптотично стійка. **C19.** Нестійка. **C20.** Асимптотично стійка. **C21.** Асимптотично стійка. **C22.** Нестійка. **C23.** Нестійка. **C24.** Нестійка. **C25.** Стійка, але не асимптотично стійка. **C26.** Нестійка. **C27.** Асимптотично стійка. **C28.** Нестійка. **C29.** Асимптотично стійка. **C30.** Асимптотично стійка. **C31.** Асимптотично стійкий. **C32.** Асимптотично стійкий. **C33.** Нестійкий. **C34.** Нестійкий. **C35.** Асимптотично стійкий. **C36.** Нестійкий. **C37.** Нестійкий. **C38.** Асимптотично стійкий. **C39.** Нестійкий. **C40.** Нестійкий. **C41.** Асимптотично стійкий. **C42.** Асимптотично стійкий. **C43.** Асимптотично стійкий. **C44.** Нестійкий. **C45.** Нестійкий. **C46.** $a > 0$, $b > 0$, $ab > 3$. **C47.** $0 < a < 2$. **C48.** $2 < a < 4$. **C49.** $b > 0$, $a > b + 1$. **C50.** $a > 0$, $b > 0$, $6a - a^2 b > 4$.

Тема 25. Стійкість нелінійних систем

Короткі теоретичні відомості

25.1. Стійкість за першим наближенням. Нехай $y_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — точка спокою системи

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{25.1}$$

Для того щоб дослідити її на стійкість, треба виділити з функцій f_j лінійну частину поблизу точки $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, користуючись формулою Тейлора. Систему рівнянь

$$\frac{dy_j}{dt} = a_{j1}(t)y_1 + a_{j2}(t)y_2 + \ldots + a_{jn}(t)y_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{25.2}$$

де $a_{jk}(t) = \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\Big|_{(t,0,\ldots,0)}$, називають *системою першого наближення* для системи (25.1), а задачу на стійкість точки спокою цієї системи — задачею на стійкість розв'язку в першому наближенні.

Розглянемо окремий випадок системи (25.2), коли її коефіцієнтами є сталі:

$$\frac{dy_j}{dt} = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{25.3}$$

Якщо характеристичні числа системи (25.3) мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок системи (25.1) асимптотично стійкий; якщо хоча б одне характеристичне число має додатну дійсну частину, то тривіальний розв'язок системи (25.1) нестійкий.

Якщо дійсні частини всіх характеристичних чисел недодатні, причому дійсна частина хоча б одного з них дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, узагалі кажучи, неможливе.

25.2. Функції Ляпунова.

Теорема Ляпунова. Якщо існує *функція Ляпунова* — диференційовна функція $V = V(y_1, \dots, y_n)$, яка задовольняє умови:

1) $V \geqslant 0$ і $V = 0$ тільки тоді, коли $y_1 = \ldots = y_n = 0$;

2) повна похідна функції V вздовж фазової траєкторії (тобто вздовж розв'язку $y_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, системи (25.1)) недодатна, тобто

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot f_j(t, y_1, \dots, y_n) \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0,$$

то тривіальний розв'язок системи (25.1) стійкий.

Якщо замість умови 2) виконується нерівність

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\beta < 0$$

для $t \geqslant t_1 > t_0$ і $0 < \delta_1 \leqslant y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \delta_2$, де δ_1, δ_2, β — сталі, то тривіальний розв'язок системи (25.1) асимптотично стійкий.

Теорема Четаєва. Якщо в деякій області D простору y_1, y_2, …, y_n, такій, що точка $y_1 = \ldots = y_n = 0$ належить межі області D, існує диференційовна функція $V = V(y_1, \dots, y_n)$, яка задовольняє умови:

1) $V \geqslant 0$ і $V = 0$ на межі області D;

2) в області D повна похідна функції V вздовж фазової траєкторії (тобто вздовж розв'язку $y_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, системи (25.1)) не є меншою від сталого додатного числа β, тобто

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \beta > 0$$

для $t \geqslant t_1 > t_0$ і $0 < \delta_1 \leqslant y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \delta_2$, де δ_1, δ_2, β — сталі, то тривіальний розв'язок системи (25.1) нестійкий.

Загального способу побудови функції Ляпунова немає. Її рекомендується шукати у вигляді $V = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$ так, щоб квадратична форма V була додатно визначеною. Яким чином вибрати коефіцієнти a_{ij}, щоб форма V була додатно визначеною, вказується у *критерії Сильвестра*, відомому з курсу алгебри: потрібно, щоб

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

У простіших випадках функцію Ляпунова шукають у вигляді $V(x, y) = ax^2 + by^2$, $V(x, y) = ax^4 + by^4$, $V(x, y) = ax^4 + by^2$, де $a > 0$, $b > 0$, тощо.

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 25.1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = e^{x+3y} - \cos 2x, \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти системи першого наближення:

$$a_{11} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+3y} - \cos 2x)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = (e^{x+3y} + 2\sin 2x)\big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1,$$

$$a_{12} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+3y} - \cos 2x)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 3e^{x+3y}\big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 3,$$

$$a_{21} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{4 + 8x} - 2e^y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{4}{\sqrt{4 + 8x}}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2,$$

$$a_{21} = \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{4 + 8x} - 2e^y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -2e^y\big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -2.$$

Знайдемо характеристичні числа відповідної системи першого наближення

$$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 3 \\ 2 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 8 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Оскільки одне з характеристичних чисел додатне, то тривіальний розв'язок заданої системи нестійкий. ■

Приклад 25.2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = -2x^5 - y, \\ y' = x - y^3. \end{cases} \tag{25.4}$$

Розв'язання. Система першого наближення має вигляд:

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Знайдемо характеристичні числа:

$$\begin{vmatrix} -k & -1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm i.$$

Оскільки дійсна частина обидвох характеристичних чисел дорівнює нулю, зробити висновок про стійкість системи (25.4) з допомогою системи першого наближення неможливо.

Розглянемо функцію $V(x, y) = x^2 + y^2$. Вона задовольняє обидві умови, які вимагаються для функції Ляпунова. Справді, $V \geqslant 0$ і $V = 0$ тільки тоді, коли $x = y = 0$; вздовж розв'язку x, y системи

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(-2x^5 - y) + 2y(x - y^3) =$$

$$= -(4x^6 + 2y^4) \leqslant 0.$$

Отже, тривіальний розв'язок системи стійкий. А оскільки поза околом початку координат ($x^2 + y^2 \geqslant \delta > 0$) маємо $\frac{dV}{dt} \leqslant -\beta < 0$, де β — мінімум функції $(4x^6 + 2y^4)$ поза колом $x^2 + y^2 = \delta$, то розв'язок $x = y \equiv 0$ асимптотично стійкий. ■

Приклад 25.3. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 2y^3 - x^5, \\ y' = -x - y^3 - y^5. \end{cases}$$

Розв'язання. Пропонуємо читачам самостійно переконатися у тому, що дати однозначну відповідь на питання про стійкість тривіального розв'язку цієї системи за першим наближенням неможливо. Шукаємо функцію Ляпунова у вигляді $V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$. Тоді

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2(x, y) =$$
$$= V_1'(x)(2y^3 - x^5) + V_2'(y)(-x - y^3 - y^5) =$$
$$= -x^5 V_1'(x) - (y^3 + y^5) V_2'(y) + 2y^3 V_1'(x) - x V_2'(y).$$

Нехай, наприклад, $2y^3 V_1'(x) - x V_2'(y) \equiv 0$. Тоді

$$\frac{V_1'(x)}{x} \equiv \frac{V_2'(y)}{2y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1'(x)}{x} = \mu, \ \frac{V_2'(y)}{2y^3} = \mu \ \ (\mu = \text{const}) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad V_1(x) = \frac{\mu}{2} x^2, \quad V_2(y) = \frac{\mu}{2} y^4.$$

Нехай $\mu = 2$. Тоді $V(x, y) = x^2 + y^4$, $V(x, y) > 0$, якщо $x^2 + y^2 \neq 0$ і $V(0, 0) = 0$. Окрім того,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2(x, y) = -(2x^6 + 4y^6 + 4y^8) \leqslant -\beta < 0,$$

де β — мінімум функції $f(x, y) = 2x^6 + 4y^6 + 4y^8$ поза колом з центром у початку координат. Отже, маємо асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи. ■

Приклад 25.4. Дослідити на стійкість всі точки спокою системи

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку самі точки спокою системи. Для цього необхідно знайти розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ \ln(3x^2 - 1) - \ln 2 = 0. \end{cases}$$

Отримуємо дві точки спокою: $(-1, 1)$ і $(1, 1)$.

Дослідимо на стійкість точку спокою $(-1, 1)$. Для цього виконаємо заміни $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 1$. Отримаємо:

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 - 2x_1 - y_1, \\ y_1' = \ln\big(3(x_1 - 1)^2 - 1\big) - \ln 2. \end{cases}$$

Система першого наближення має вигляд:

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - y_1, \\ y_1' = -3x_1. \end{cases}$$

Знайдемо характеристичні числа:

$$\begin{vmatrix} -2-k & -1 \\ -3 & -k \end{vmatrix} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; k^2 + 2k - 3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; k_1 = -3,\; k_2 = 1.$$

Отже, точка спокою $(-1, 1)$ є нестійкою.

Дослідимо на стійкість точку спокою $(1, 1)$. Для цього виконаємо заміни $x_2 = x - 1$, $y_2 = y - 1$. Отримаємо:

$$\begin{cases} x_2' = x_2^2 + 2x_2 - y_2, \\ y_2' = \ln\big(3(x_2 + 1)^2 - 1\big) - \ln 2. \end{cases}$$

Система першого наближення має вигляд:

$$\begin{cases} x_2' = 2x_2 - y_2, \\ y_2' = 3x_2. \end{cases}$$

Знайдемо характеристичні числа:

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 2k + 3 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$k_1 = 1 - \sqrt{2}i, \ k_2 = 1 + \sqrt{2}i.$$

Отже, точка спокою $(1, 1)$ є нестійкою.
Відповідь: $(-1, 1)$ і $(1, 1)$ — нестійкі точки спокою.

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Дослідити на стійкість за першим наближенням тривіальний розв'язок систем:

A1. $\begin{cases} x' = y - 3x + 6x^2 + 4xy - y^3, \\ y' = -4x - 2y + xy - x^3. \end{cases}$

A2. $\begin{cases} x' = \ln(2y + e^{-5x}), \\ y' = 3y - 1 + \sqrt[3]{1 - 7x}. \end{cases}$

A3. $\begin{cases} x' = e^{3x} - e^{y^2} + \sin(x + 4y), \\ y' = \cos 5x - e^{6y+x}. \end{cases}$

A4. $\begin{cases} x' = \sin(3x - 5y), \\ y' = 2\cos(4x + 5y) - 2e^{y-3x}. \end{cases}$

A5. $\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ y' = \sqrt{9 + 12x} - 3e^{y}, \\ z' = -2y. \end{cases}$

Визначити, при яких значеннях параметра a нульовий розв'язок систем є асимптотично стійким:

A6. $\begin{cases} x' = ax - 3y + x^2, \\ y' = 2x + y + 3xy. \end{cases}$ **A7.** $\begin{cases} x' = \ln(1 + ax + y), \\ y' = \sin x + ay. \end{cases}$

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем, користуючись функціями Ляпунова і теоремами Ляпунова або Четаєва:

A8. $\begin{cases} x' = -2y - 2x^3, \\ y' = x - y^3. \end{cases}$ **A10.** $\begin{cases} x' = -x - y^2, \\ y' = xy - 2x^2y. \end{cases}$

A9. $\begin{cases} x' = 5x - y^2, \\ y' = xy + y^3. \end{cases}$

Дослідити на стійкість всі точки спокою систем:

A11. $\begin{cases} x' = x - 3x^2 + y, \\ y' = y - x^2 - 3x. \end{cases}$

A12. $\begin{cases} x' = 3x - y - 3, \\ y' = \operatorname{arctg}(xy). \end{cases}$

A13. $\begin{cases} x' = \ln(y^2 - 3x), \\ y' = x + y - 1. \end{cases}$

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Дослідити на стійкість за першим наближенням тривіальний розв'язок систем:

C1. $\begin{cases} x' = 4x - 2y + 6xy^2, \\ y' = x + y - 7xy + y^4. \end{cases}$

C2. $\begin{cases} x' = 6x^3 - 4xy + 6x + 10y, \\ y' = 2x^5 - 5y^2 + 3y - x. \end{cases}$

C3. $\begin{cases} x' = 4x^2 + 12y^3 - 3xy + 6x + y, \\ y' = 2x^3 - 4y^4 + 5y^6 - y^5 + 3x - y. \end{cases}$

C4. $\begin{cases} x' = e^{3x-y} - \cos(x + y), \\ y' = \sqrt{x+1} - 1 + \sin y. \end{cases}$

C5. $\begin{cases} x' = \sqrt[3]{8 - 12y} - 2\cos 5x, \\ y' = \ln(e^{4x} - 7y). \end{cases}$

C6. $\begin{cases} x' = 3x - \operatorname{tg} 4y, \\ y' = \ln(e^{x+5y} - 2x). \end{cases}$

C7. $\begin{cases} x' = 2x^2 - 3y, \\ y' = \ln(3x^2 - 4x + 1) + 4y. \end{cases}$

C8. $\begin{cases} x' = \ln(3e^{-3y} - 2\cos 4x), \\ y' = \sqrt{16 - 2x} - 4e^{x+4y}. \end{cases}$

C9. $\begin{cases} x' = 5\sqrt[3]{1 - 3x} - 5 - 4y, \\ y' = x^3 + 10\sqrt{4 - y - x} - 20 - 6y. \end{cases}$

C10. $\begin{cases} x' = e^{x-y} - \sqrt{1 + 2y}, \\ y' = \ln(3y + 1 - \sin 3x). \end{cases}$

C11. $\begin{cases} x' = \sqrt{4 + 2x} - e^{2x} - e^{y}, \\ y' = \ln(3x - 5y + \cos 7x). \end{cases}$

C12. $\begin{cases} x' = 4\cos x - \sqrt{9+3y+x} - 1, \\ y' = \ln(e^{-15y} + 6y). \end{cases}$

C13. $\begin{cases} x' = 3x + \sin 2y, \\ y' = 2y - x + \operatorname{tg} 3x. \end{cases}$

C14. $\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(x - 3y), \\ y' = \ln(e^{3x-y} - 3y). \end{cases}$

C15. $\begin{cases} x' = \sin(2x - 7y), \\ y' = e^{3x-5y} + \cos(4x + y) - 2. \end{cases}$

C16. $\begin{cases} x' = \sqrt{4+2x+z} - 2e^{y-2x+3z}, \\ y' = \ln(e^{x+y} - 3x - 6y + 2z), \\ z' = \sin(x + 2y + z). \end{cases}$

C17. $\begin{cases} x' = e^{3x} + e^{3y} - 2e^{3z}, \\ y' = 7x + 4y - 5z, \\ z' = \ln(e^{x-z} + 4\sin(x+y)). \end{cases}$

C18. $\begin{cases} x' = -6y - 2z, \\ y' = \sin(x - 8y - z), \\ z' = e^{x-z} - e^{y-z}. \end{cases}$

C19. $\begin{cases} x' = e^{x} - e^{-2z}, \\ y' = 5z - 3\sin(x+y), \\ z' = \ln(1 + 3z - x). \end{cases}$

C20. $\begin{cases} x' = \cos 2x + \sin 3y - e^{4z}, \\ y' = \ln(e^{x+y+z} - 2y), \\ z' = z. \end{cases}$

Визначити, при яких значеннях параметра a нульовий розв'язок систем є асимптотично стійким:

C21. $\begin{cases} x' = ax + 2y - y^2, \\ y' = 2x + ay - x^2. \end{cases}$

C22. $\begin{cases} x' = \sin(x + ay), \\ y' = 4x - 6y - 2xy. \end{cases}$

C23. $\begin{cases} x' = ax - 5y + xy^2, \\ y' = e^{ax} - e^{y}. \end{cases}$

C24. $\begin{cases} x' = 3y - \sin x, \\ y' = 3x + ay. \end{cases}$

C25. $\begin{cases} x' = 2e^{-x} - \sqrt{4+ay}, \\ y' = \ln(1 - x + ay). \end{cases}$

C26. $\begin{cases} x' = \ln(e - ax) - e^{2y}, \\ y' = 5x + \operatorname{tg} y. \end{cases}$

C27. $\begin{cases} x' = \cos(ax - y) - y, \\ y' = e^{x+ay} - 1. \end{cases}$

C28. $\begin{cases} x' = ax - y, \\ y' = \operatorname{tg}(x + ay). \end{cases}$

C29. $\begin{cases} x' = 1 - e^{2x+ay}, \\ y' = \sqrt{1 + ax} - 1. \end{cases}$

C30. $\begin{cases} x' = \ln(e^{ax+y} - x + y), \\ y' = 6x + ay. \end{cases}$

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем, користуючись функціями Ляпунова і теоремами Ляпунова або Четаєва:

C31. $\begin{cases} x' = 4x^3 - y, \\ y' = x + y^3. \end{cases}$

C32. $\begin{cases} x' = y - 2x^3, \\ y' = -2x - 5y^3. \end{cases}$

C33. $\begin{cases} x' = -xy^2, \\ y' = -2y - 3x^2y. \end{cases}$

C34. $\begin{cases} x' = -xy^2, \\ y' = -4xy^2 - 3y^3. \end{cases}$

C35. $\begin{cases} x' = 2y + 3x^3, \\ y' = y^3 - x. \end{cases}$

C36. $\begin{cases} x' = y - 2x^3, \\ y' = -x - 3y^3. \end{cases}$

C37. $\begin{cases} x' = -y + 3x^3, \\ y' = 2x + y^3. \end{cases}$

C38. $\begin{cases} x' = -4x^2y - 3x^3, \\ y' = -x^2y. \end{cases}$

C39. $\begin{cases} x' = y - x + xy, \\ y' = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

C40. $\begin{cases} x' = -x - 2y + x^2y^2, \\ y' = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}. \end{cases}$

C41. $\begin{cases} x' = -x^3 + 2y, \\ y' = -x - y^5. \end{cases}$

Дослідити на стійкість всі точки спокою систем:

C42. $\begin{cases} x' = 5x - 2y + x^3, \\ y' = 2x - y + x^3. \end{cases}$

C43. $\begin{cases} x' = 5x - x^2 - y, \\ y' = 5y - x^2 - x. \end{cases}$

C44. $\begin{cases} x' = x(x + y - 3), \\ y' = y(x + 1). \end{cases}$

C45. $\begin{cases} x' = \ln(x + y + 2), \\ y' = x^3 + y^3 + 1. \end{cases}$

C46. $\begin{cases} x' = e^{x-y} - e^{y-x}, \\ y' = e^{3xy+2x+y} - 1. \end{cases}$

C47. $\begin{cases} x' = (x - 2)(y - 1), \\ y' = xy - 4. \end{cases}$

C48. $\begin{cases} x' = e^{5xy} + x^2 - 5, \\ y' = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{cases}$ **C50.** $\begin{cases} x' = x - y^2, \\ y' = x^2 - 2y^2 - 8. \end{cases}$

C49. $\begin{cases} x' = e^{3x+3y} + x, \\ y' = x - x^3. \end{cases}$ **C51.** $\begin{cases} x' = 3x - 5y + 2, \\ y' = \ln \frac{y}{x}. \end{cases}$

C52. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 5x + 4, \\ y' = 3xy. \end{cases}$

C53. $\begin{cases} x' = 1 - x(2y + 3) - 8y^2, \\ y' = \ln \frac{2+x}{1-x}. \end{cases}$

C54. $\begin{cases} x' = x^3 y + y^2, \\ y' = \ln(x^3 + y) - 4y. \end{cases}$

C55. $\begin{cases} x' = \sqrt[3]{1 + 2x + x^2 - y} - 5y - 1, \\ y' = y. \end{cases}$

C56. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = \ln(1 - 2x + x^2 - y) - 2y. \end{cases}$

Відповіді

A1. Асимптотично стійкий. **A2.** Нестійкий. **A3.** Нестійкий. **A4.** Нестійкий. **A5.** Асимптотично стійкий. **A6.** $-6 < a < -1$. **A7.** $a < -1$. **A8.** Асимптотично стійкий. **A9.** Нестійкий. **A10.** Стійкий. **A11.** $(0, 0)$ — нестійка, $(2, 10)$ — нестійка. **A12.** $(0, -3)$ — нестійка, $(1, 0)$ — нестійка. **A13.** $(5, -4)$ — асимптотично стійка, $(0, 1)$ — нестійка. **C1.** Нестійкий. **C2.** Нестійкий. **C3.** Нестійкий. **C4.** Нестійкий. **C5.** Асимптотично стійкий. **C6.** Нестійкий. **C7.** Нестійкий. **C8.** Нестійкий. **C9.** Асимптотично стійкий. **C10.** Нестійкий. **C11.** Асимптотично стійкий. **C12.** Асимптотично стійкий. **C13.** Нестійкий. **C14.** Асимптотично стійкий. **C15.** Асимптотично стійкий. **C16.** Нестійкий. **C17.** Нестійкий. **C18.** Асимптотично стійкий. **C19.** Нестійкий. **C20.** Нестійкий. **C21.** $a < -2$. **C22.** $a < -\frac{3}{2}$. **C23.** $0 < a < 1$. **C24.** $a < -9$. **C25.** $a < 0$. **C26.** $e < a < 10e$. **C27.** $a < 0$. **C28.** $a < 0$. **C29.** $a \neq 0$. **C30.** $a < -3$. **C31.** Нестійкий. **C32.** Асимптотично стійкий. **C33.** Стійкий. **C34.** Стійкий.

C35. Нестійкий. **C36.** Асимптотично стійкий. **C37.** Нестійкий. **C38.** Стійкий. **C39.** Асимптотично стійкий. **C40.** Асимптотично стійкий. **C41.** Асимптотично стійкий. **C42.** $(0,0)$ — нестійка, $(1,3)$ — нестійка, $(-1,-3)$ — нестійка. **C43.** $(0,0)$ — нестійка, $(4,4)$ — нестійка. **C44.** $(0,0)$ — нестійка, $(3,0)$ — нестійка, $(-1,4)$ — асимптотично стійка. **C45.** $(-1,0)$ — нестійка, $(0,-1)$ — нестійка. **C46.** $(0,0)$ — нестійка, $(-1,-1)$ — нестійка. **C47.** $(2,2)$ — нестійка, $(4,1)$ — нестійка. **C48.** $(2,0)$ — нестійка, $(-2,0)$ — асимптотично стійка. **C49.** $(-1,1)$ — нестійка. **C50.** $(4,2)$ — асимптотично стійка, $(4,-2)$ — нестійка. **C51.** $(1,1)$ — нестійка. **C52.** $(0,2)$ — нестійка, $(0,-2)$ — нестійка, $(-4,0)$ — асимптотично стійка, $(-1,0)$ — нестійка. **C53.** $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ — нестійка, $(-\frac{1}{2},\frac{5}{8})$ — асимптотично стійка. **C54.** $(1,0)$ — нестійка. **C55.** $(0,0)$ — нестійка, $(-2,0)$ — нестійка. **C56.** $(0,0)$ — асимптотично стійка, $(2,0)$ — нестійка.

Тема 26. Особливі точки на фазовій площині

Короткі теоретичні відомості

26.1. Лінійна автономна система зі сталими коефіцієнтами на площині. Для дослідження особливої точки $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{26.1}$$

або рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{26.2}$$

зі сталими дійсними коефіцієнтами a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} потрібно знайти корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{26.3}$$

Якщо корені характеристичного рівняння (26.3) є дійсними, різними і від'ємними, то особлива точка є стійким вузлом, траєкторії в околі цієї точки зображені на рис. 26.1 (вектори α і β є власними векторами матриці з правої частини системи 26.1, що відповідають числам k_1 і k_2). Якщо корені рівняння (26.3) є дійсними, різними і додатними, то особлива точка є нестійким вузлом (рис. 26.2). Якщо корені рівняння (26.3) є дійсними і мають різний знак, то особлива точка є сідлом (на рис. 26.3 наведено випадок, коли $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, на рис. 26.4 — випадок, коли $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, вектор α відповідає числу k_1, вектор β — числу k_2). Якщо корені рівняння (26.3) є комплексними з від'ємною дійсною частиною, то особлива точка є стійким фокусом (рис. 26.5). Якщо корені рівняння (26.3) є комплексними з додатною дійсною частиною, то особлива точка є нестійким фокусом (рис. 26.6). Якщо корені рівняння (26.3) є чисто уявними, то особлива точка є центром (рис. 26.7). Якщо $k_1 = k_2 < 0$, то особлива точка є стійким виродженим вузлом (рис. 26.9) або стійким дикритичним вузлом (рис. 26.11). Якщо $k_1 = k_2 > 0$, то особлива точка є нестійким виродженим вузлом (рис. 26.10) або нестійким дикритичним вузлом (рис. 26.12). Дикритичний вузол має місце лише у випадку системи $\frac{dx}{dt} = ax$, $\frac{dy}{dt} = ay$. Якщо $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, то всі точки прямої $y = -a_{11}x/a_{12}$ є особливими, а траєкторії є паралельними півпрямими, зокрема при $k_2 < 0$ особливі точки є стійкими (рис. 26.13), а при $k_2 > 0$ — нестійкими (рис. 26.14). Якщо $k_1 = k_2 = 0$, то також існує безліч особливих точок, які або розміщуються на прямій $y = -a_{11}x/a_{12}$, а траєкторії є паралельними прямими (рис. 26.8), або всі точки площини є особливими. Останній випадок можливий лише, якщо $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$.

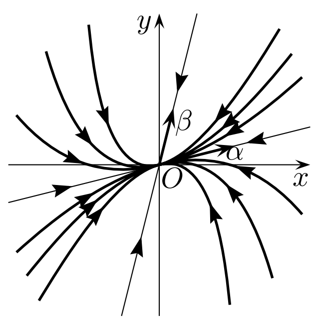

Рис. 26.1

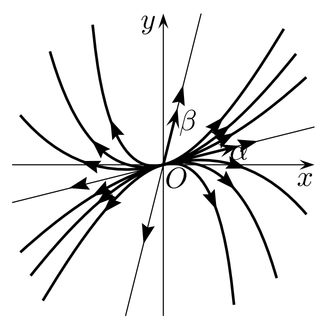

Рис. 26.2

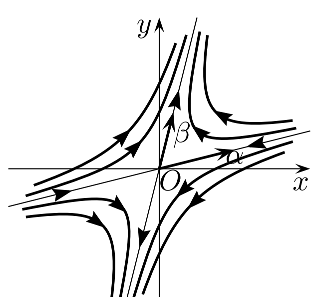

Рис. 26.3

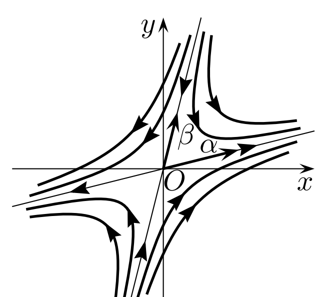

Рис. 26.4

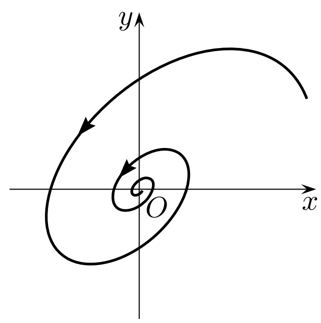

Рис. 26.5

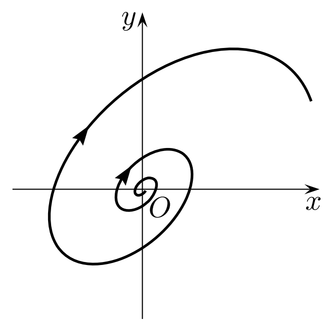

Рис. 26.6

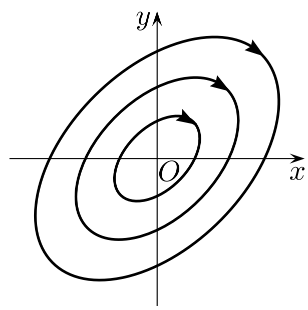

Рис. 26.7

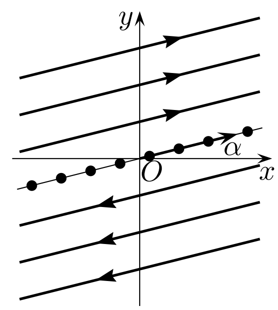

Рис. 26.8

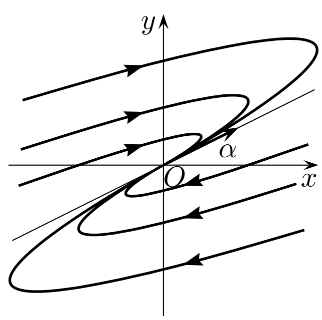

Рис. 26.9

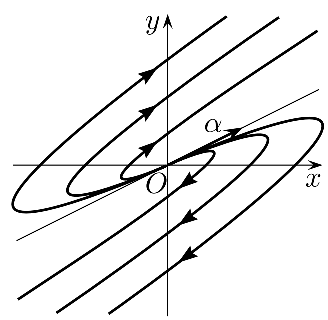

Рис. 26.10

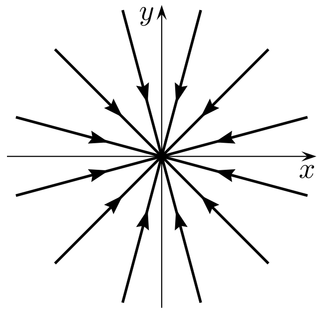

Рис. 26.11

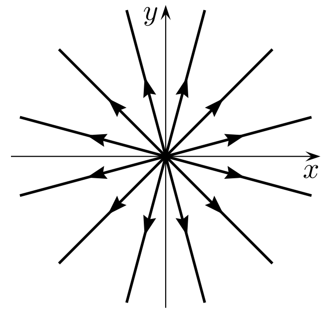

Рис. 26.12

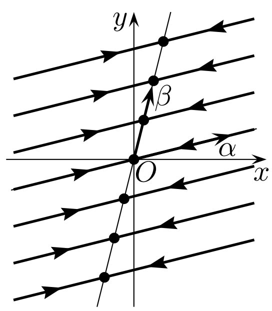

Рис. 26.13

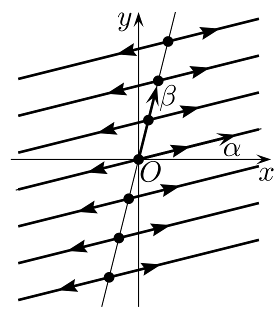

Рис. 26.14

Для того щоб побудувати траєкторії у випадку вузла, сідла чи паралельних прямих, потрібно спочатку знайти власні вектори матриці системи (26.1). У випадку вузла криві дотикаються до прямої, напрямленої вздовж власного вектора, відповідного меншому за абсолютною величиною числу k. Для фокуса необхідно визначити напрям закручування траєкторій. Для цього достатньо побудувати в якій-небудь точці (x, y) вектор швидкості $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, який визначається за формулами (26.1).

26.2. Автономна система на площині. Особливою точкою системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \tag{26.4}$$

або рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \tag{26.5}$$

де функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є двічі неперервно диференційовними, називається така точка, в якій $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = 0$. Для дослідження особливої точки цієї системи або рівняння потрібно перенести початок координат у досліджувану особливу точку і розкласти функції P і Q в околі цієї точки за формулою Тейлора, обмежившись членами першого порядку. Тоді система (26.4) набуде вигляду

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v + \varphi(u,v), \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v + \psi(u,v), \end{cases} \tag{26.6}$$

де u, v — нові координати (після перенесення),

$$a_{11} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}, \quad a_{12} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}},$$

$$a_{21} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}, \quad a_{22} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}.$$

Припустимо, що дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (26.3) не дорівнюють нулю. Тоді особлива точка $u = 0$, $v = 0$ системи (26.6) буде мати той самий тип, що й особлива точка лінеаризованої системи

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v, \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v, \end{cases} \tag{26.7}$$

отриманої з системи (26.6) відкиданням функцій φ і ψ. Крім того, кутові коефіцієнти напрямів, по яким інтегральні криві входять в особливу точку, для систем (26.7) і (26.6) ті самі, напрям закручування інтегральних кривих у випадку фокуса теж є таким самим. Однак, якщо особлива точка системи

(26.7) є центром, то для системи (26.6) вона може бути як центром, так і фокусом. Для наявності фокуса необхідно і достатньо, щоб нульовий розв'язок системи (26.6) був асимптотично стійким при $t \to +\infty$ або при $t \to -\infty$. Для наявності центра достатньо (але не необхідно), щоб інтегральні криві системи (26.6) мали вісь симетрії, що проходить через досліджувану точку. Вісь симетрії існує, зокрема, тоді, коли рівняння (26.5) не змінюється при заміні x на $-x$ (або y на $-y$). У деяких випадках для дослідження наявності фокуса буває зручно перейти до полярної системи координат. Прямим для системи (26.7) можуть відповідати криві для системи (26.6).

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 26.1. Дослідити особливу точку системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

Накреслити інтегральні криві на фазовій площині xOy.

Розв'язання. Оскільки коренями характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ 1 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

є числа $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, то особлива точка $x = y = 0$ є нестійким вузлом.

Числу $k_1 = 1$ відповідає власний вектор $\alpha = (-3, 1)$, а числу $k_2 = 5$ — вектор $\beta = (1, 1)$. Траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 26.15. ■

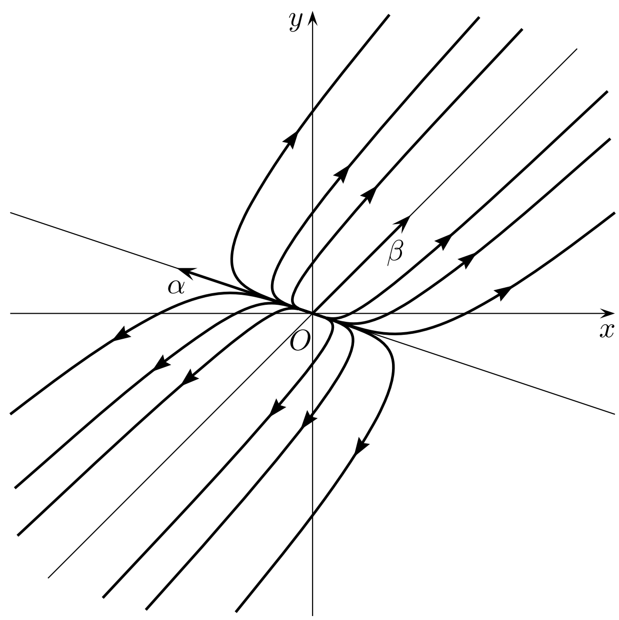

Рис. 26.15

Приклад 26.2. Дослідити особливу точку рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x - 5y}{x + 3y}. \tag{26.8}$$

Накреслити інтегральні криві на фазовій площині xOy.
Розв'язання. Рівнянню (26.8) відповідає система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 5y. \end{cases} \tag{26.9}$$

Оскільки коренями характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - k & 3 \\ -6 & -5 - k \end{vmatrix} = 0$$

є числа $k_1 = -2+3i$, $k_2 = -2-3i$, то особлива точка $x = y = 0$ є стійким фокусом.

Побудуємо в точці $(1,0)$ вектор швидкості $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. Внаслідок (26.10) він дорівнює $(x+3y, -6x-5y)$. У точці $x=1$, $y=0$ отримуємо вектор $(1,-6)$ (рис. 26.16). Отже, зростанню t відповідає рух за годинниковою стрілкою, а траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 26.17. ■

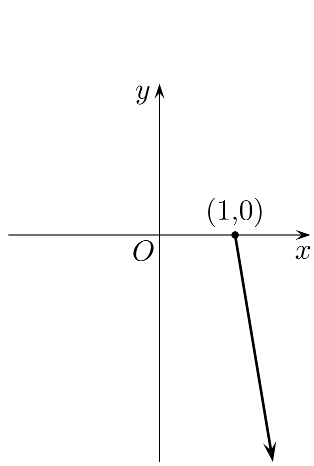

Рис. 26.16

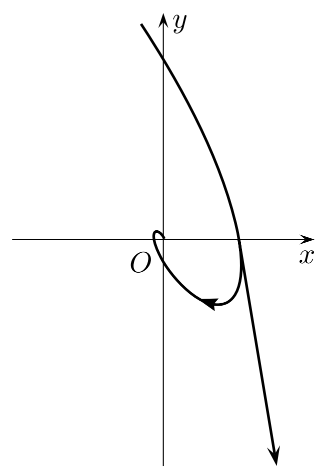

Рис. 26.17

Приклад 26.3. Дослідити особливу точку системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 6x. \end{cases}$$

Накреслити інтегральні криві на фазовій площині xOy.
Розв'язання. Оскільки коренями характеристичного рівняння є числа $k_1 = 0$, $k_2 = 7$, то всі точки прямої $y = \frac{3}{2}x$ є нестійкими, а траєкторії мають вигляд півпрямих, паралельних власному вектору $\beta = (1, -2)$, відповідному власному значенню $k_2 = 7$. Траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 26.18. ■

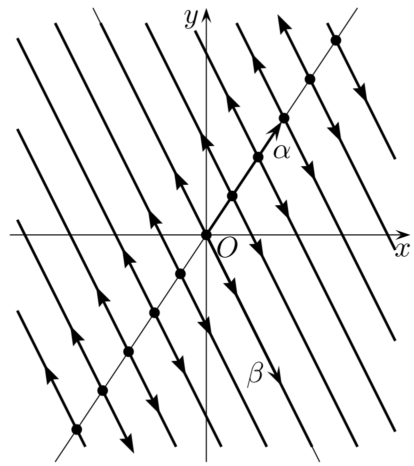

Рис. 26.18

Приклад 26.4. Дослідити особливі точки системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = y + \sqrt{1 + 2x^2}. \end{cases}$$

Накреслити інтегральні криві на фазовій площині.
Розв'язання. Особливі точки знаходимо з системи

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ y + \sqrt{1 + 2x^2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ y_1 = -1,\ \ x_2 = 2,\ y_2 = -3.$$

Переносимо систему координат у точку $(0; -1)$ заміною $x = u$, $y = v - 1$. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + v, \\ \frac{dv}{dt} = v - 1 + \sqrt{1 + 2u^2}. \end{cases}$$

Знаходимо:

$$a_{11} = \frac{\partial}{\partial u}(u + v)\Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 1, \quad a_{12} = \frac{\partial}{\partial v}(u + v)\Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 1,$$

$$a_{21} = \frac{\partial}{\partial u}\left(v - 1 + \sqrt{1 + 2u^2}\right)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = \frac{2u}{\sqrt{1+2u^2}}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 0,$$

$$a_{22} = \frac{\partial}{\partial v}\left(v - 1 + \sqrt{1 + 2u^2}\right)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 1.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-k)^2 = 0$$

має єдиний корінь $k = 1$. Тому особлива точка $(0; -1)$ є нестійким виродженим вузлом. Числу $k = 1$ відповідає власний вектор $\alpha = (1, 0)$. Траєкторії можна побудувати у площині uOv, наприклад, як на рис. 26.19.

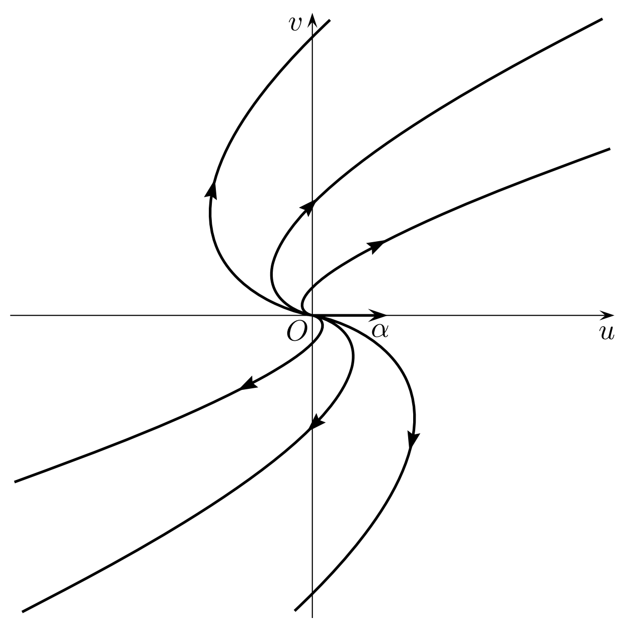

Рис. 26.19

Перенесемо тепер систему координат у точку $(2; -3)$ заміною $x = u + 2$, $y = v - 3$. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + v, \\ \frac{dv}{dt} = v - 3 + \sqrt{1 + 2(u+2)^2}. \end{cases}$$

Знаходимо:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = \frac{4}{3}, \quad a_{22} = 1.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ \frac{4}{3} & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3k^2 - 6k - 1 = 0$$

має корені $k_1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < 0$ і $k_2 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} > 0$. Тому особлива точка $(2; -3)$ є сідлом. Числу $k_1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ відповідає власний вектор $\alpha = (\sqrt{3}, -2)$, а числу $k_2 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ — власний вектор $\beta = (\sqrt{3}, 2)$. Траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 26.20. ■

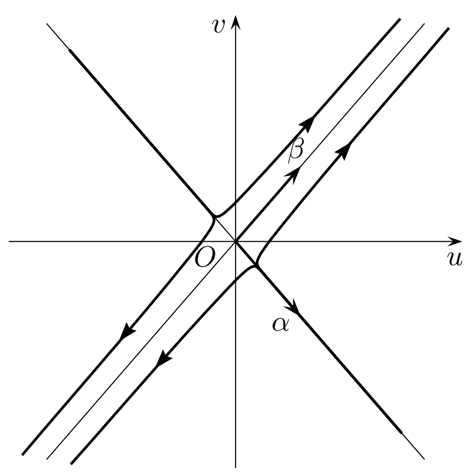

Рис. 26.20

Приклад 26.5. Дослідити особливі точки рівняння

$$x'' + x' = \ln(1 - 3x + x^2 - x').$$

Накреслити інтегральні криві відповідної системи на фазовій площині.

Розв'язання. Рівняння зводиться до системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \ln(1 - 3x + x^2 - y) - y. \end{cases}$$

Особливі точки знаходимо з системи

$$\begin{cases} y = 0, \\ \ln(1 - 3x + x^2 - y) = y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ \ x_2 = 3,\ y_2 = 0.$$

Дослідимо спочатку точку $(0, 0)$. Знаходимо коефіцієнти лінеаризованої системи:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -3, \quad a_{22} = -2.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -3 & -2 - k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 2k + 3 = 0$$

має комплексні корені $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$. Тому особлива точка $(0; 0)$ є стійким фокусом.

Побудуємо в точці $(1, 0)$ вектор швидкості $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. Внаслідок

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 2y \end{cases}$$

у точці $x = 1$, $y = 0$ він дорівнює $(0, -3)$. Отже, зростанню t відповідає рух за годинниковою стрілкою, а траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 26.21.

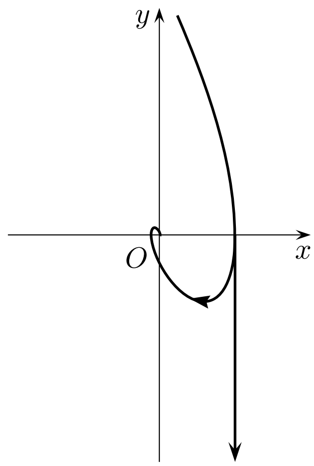

Рис. 26.21

Перенесемо тепер систему координат у точку $(3;0)$ заміною $x = u + 3$, $y = v$. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \ln(u^2 + 3u - v + 1) - v. \end{cases}$$

Знаходимо:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 3, \quad a_{22} = -2.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 3 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 2k - 3 = 0$$

має корені $k_1 = -3$ і $k_2 = 1$. Тому особлива точка $(3;0)$ є сідлом. Числу $k_1 = -3$ відповідає власний вектор $\alpha = (1, -3)$, а числу $k_2 = 1$ — власний вектор $\beta = (1, 1)$. Траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 26.22. ■

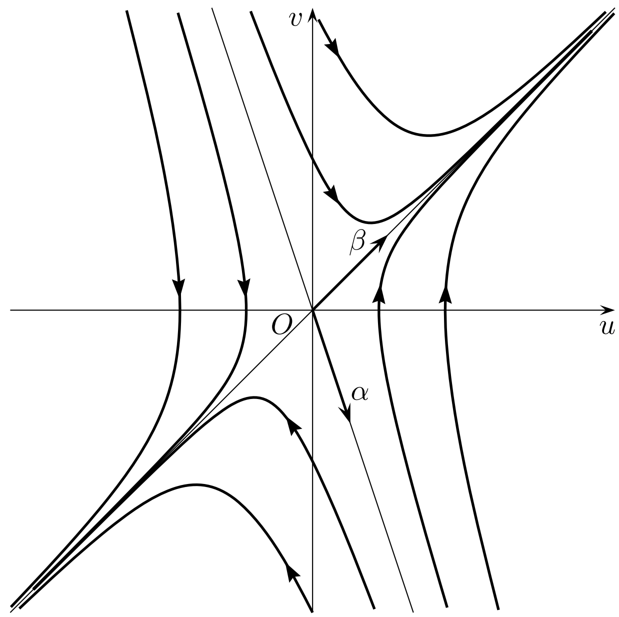

Рис. 26.22

Приклад 26.6. Дослідити особливі точки системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y + x\sqrt{x^2+y^2}, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{26.10}$$

Розв'язання. Система має єдину особливу точку $x = y = 0$. Характеристичне рівняння для відповідної лінеаризованої системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases}$$

має корені $k = \pm 2i$. Тому для лінеаризованої системи точка $(0, 0)$ є центром. Для визначення типу особливої точки $x = y = 0$ для системи (26.10) перейдемо до полярної системи координат:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Отримуємо систему вигляду

$$\begin{cases} r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi = -2r\sin\varphi + r^2\cos\varphi, \\ r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi = 2r\cos\varphi + r^2\sin\varphi, \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$\begin{cases} r' = r^2, \\ \varphi' = 2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи випливає, що $r' > 0$, а, отже, $r(t)$ — зростаюча функція. Аналогічно, з другого рівняння системи видно, що $\varphi(t)$ також є зростаючою функцією. Тому траєкторії розкручуються навколо початку координат проти годинникової стрілки, а точка $x = y = 0$ для системи (26.10) насправді є нестійким фокусом. ■

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Дослідити особливі точки систем і накреслити інтегральні криві на фазовій площині:

A1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 4x. \end{cases}$

A2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$

A3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

A4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 3x. \end{cases}$

Дослідити особливі точки рівнянь і накреслити інтегральні криві на фазовій площині:

A5. $\frac{dy}{dx} = \frac{10y-7x}{14y-11x}$.

A6. $\frac{dy}{dx} = \frac{-5x-2y}{2x+5y}$.

A7. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-4x}{6y-7x}$.

Дослідити особливі точки рівняння і накреслити інтегральні криві відповідної системи на фазовій площині:

A8. $x'' + 2x' + 3x = 0$.

Дослідити особливі точки систем і накреслити інтегральні криві на фазовій площині:

A9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 6, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - x. \end{cases}$

A10. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 3, \\ \frac{dy}{dt} = \operatorname{arctg}(xy). \end{cases}$

A11. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - x^2 - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x. \end{cases}$

Дослідити особливі точки рівняння і накреслити інтегральні криві відповідної системи на фазовій площині:

A12. $x'' + 2x' + x - 2x^2 + 1 = 0.$

A13. Дослідити характер особливої точки системи

$$\begin{cases} x' = ax + y, \\ y' = -x + ay \end{cases}$$

залежно від значення параметра a.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Дослідити особливі точки систем і накреслити інтегральні криві на фазовій площині:

C1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y - 5x, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 6x. \end{cases}$

C2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -7x + y. \end{cases}$

C3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$

C4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 16y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 7y. \end{cases}$

C5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 9y - 4x. \end{cases}$

C6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$

C7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$

C8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y. \end{cases}$

C9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 6y. \end{cases}$

C10. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

C11. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6y - 8x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 4x. \end{cases}$

C12. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5y - x, \\ \frac{dy}{dt} = 5y - 3x. \end{cases}$

C13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 9y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 4y. \end{cases}$

C14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5y - 7x, \\ \frac{dy}{dt} = 8y - 10x. \end{cases}$

C15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$

Дослідити особливі точки рівнянь і накреслити інтегральні криві на фазовій площині:

C16. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-x}{5x-3y}$.

C17. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y}{x-2y}$.

C18. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

C19. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x-3y}{2x-y}$.

C20. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y}{2y-x}$.

C21. $\frac{dy}{dx} = \frac{-9x-3y}{3x+y}$.

C22. $\frac{dy}{dx} = \frac{8x-7y}{x-2y}$.

C23. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-7y}{-2x-2y}$.

C24. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+6y}{5x-y}$.

C25. $\frac{dy}{dx} = \frac{-6x-7y}{2x+5y}$.

Дослідити особливі точки рівнянь і накреслити інтегральні криві відповідних систем на фазовій площині:

C26. $x'' - 5x' + 4x = 0$.

C27. $x'' - 9x = 0$.

C28. $x'' + 4x' + 4x = 0$.

C29. $x'' + 16x = 0$.

C30. $x'' - 2x' + 6x = 0$.

Дослідити особливі точки систем і накреслити інтегральні криві на фазовій площині:

C31. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 4. \end{cases}$

C32. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y^2 - 1, \\ \frac{dy}{dt} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$

C33. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{2x+2y} + x, \\ \frac{dy}{dt} = \arccos(x - x^3) - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

C34. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ln(5 - 2x - 2y), \\ \frac{dy}{dt} = e^{xy} - 1. \end{cases}$

C35. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ln(x + y), \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^3 - 1. \end{cases}$

C36. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$

C37. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^2 - xy + 2, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - x - 2. \end{cases}$

C38. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3xy, \\ \frac{dy}{dt} = e^{-4xy} - x. \end{cases}$

C39. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - y, \\ \frac{dy}{dt} = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2. \end{cases}$

C40. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = \operatorname{arctg}(1 - y^2). \end{cases}$

C41. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 8y + 3, \\ \frac{dy}{dt} = \ln \frac{x}{y}. \end{cases}$

C42. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4 - 4x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = xy. \end{cases}$

C43. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8 + 4y - 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - 4y^2. \end{cases}$

C44. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \operatorname{arctg}(x - y - 1), \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{3x^2 + 3y - 2} - 1. \end{cases}$

C45. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{x^2 - y} - e^{2x}, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y - y^2. \end{cases}$

Дослідити особливі точки рівнянь і накреслити інтегральні криві відповідних систем на фазовій площині:

C46. $x'' + x^3 = e^{-\frac{4x'}{x}}$.

C47. $x'' - e^{2x'} - x^3 = 0$.

C48. $x'' - 4x' + 2x^2 - x - 3 = 0$.

C49. $x'' + 3x' - 4x + 2x^2 = 0$.

C50. $x'' = 3 \arcsin x' - 2 \ln \frac{1+x}{3-x}$.

Дослідити характер особливих точок систем залежно від значень параметра a:

C51. $\begin{cases} x' = 2x + ay, \\ y' = x + y. \end{cases}$

C52. $\begin{cases} x' = ax + y, \\ y' = x + ay. \end{cases}$

C53. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = ax + 3y. \end{cases}$

C54. $\begin{cases} x' = -2x - 4y, \\ y' = ax + y. \end{cases}$

C55. $\begin{cases} x' = -x + ay, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$

Відповіді

У відповідях, крім координат і типу особливої точки, вказана додаткова інформація, необхідна для побудови траєкторій. Для точок $(0,0)$ координати точки не вказуються.

А1. Нестійкий вузол, $k_1 = 2$, $k_2 = 6$, $\alpha = (1,2)$, $\beta = (1,-2)$. **А2.** Стійкий фокус, проти годинникової стрілки. **А3.** Нестійкий вироджений вузол, $k = 2$, $\alpha = (0,1)$. **А4.** Стійкі особливі точки заповнюють пряму лінію, траєкторії — паралельні півпрямі, $k_1 = 0$, $k_2 = 10$, $\alpha = (1,3)$, $\beta = (-3,1)$. **А5.** Сідло, $k_1 = -4$, $k_2 = 3$, $\alpha = (2,1)$, $\beta = (1,1)$. **А6.** Центр, за годинниковою стрілкою. **А7.** Стійкий вузол, $k_1 = -3$, $k_2 = -1$, $\alpha = (3,2)$, $\beta = (1,1)$. **А8.** Стійкий фокус, за годинниковою стрілкою. **А9.** $(-2,-1)$ — нестійкий вузол, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $\alpha = (0,1)$, $\beta = (-1,1)$. **А10.** $(0,3)$ — сідло, $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $\alpha = (1,-3)$, $\beta = (1,1)$; $\left(\frac{3}{2},0\right)$ — нестійкий вузол, $k_1 = \frac{3}{2}$, $k_2 = 2$, $\alpha = (2,-1)$, $\beta = (1,0)$. **А11.** $(0,1)$ — центр, проти годинникової стрілки; $(0,-1)$ — сідло, $k_1 = -2$, $k_2 = 2$, $\alpha = (1,-1)$, $\beta = (1,1)$. **А12.** $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ — стійкий фокус, за годинниковою стрілкою; $(1,0)$ — сідло, $k_1 = -3$, $k_2 = 1$, $\alpha = (1,-3)$, $\beta = (1,1)$. **А13.** Якщо $a = 0$, то точка $(0,0)$ є центром, якщо $a < 0$, — стійким фокусом, якщо $a > 0$, — нестійким фокусом. **С1.** Сідло, $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $\alpha = (1,1)$, $\beta = (1,2)$. **С2.** Нестійкий фокус, проти годинникової стрілки. **С3.** Нестійкі особливі точки заповнюють пряму лінію, траєкторії — паралельні прямі, $k = 0$, $\alpha = (1,2)$. **С4.** Стійкий вироджений вузол, $k = -3$, $\alpha = (4,1)$. **С5.** Нестійкий вузол, $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $\alpha = (2,1)$, $\beta = (1,1)$. **С6.** Центр, проти годинникової стрілки. **С7.** Стійкий дикритичний вузол. **С8.** Нестійкий вироджений вузол, $k = 3$, $\alpha = (1,2)$. **С9.** Нестійкі особливі точки заповнюють пряму лінію, траєкторії — паралельні півпрямі, $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $\alpha = (1,-1)$, $\beta = (1,-2)$. **С10.** Стійкий фокус, за годинниковою стрілкою. **С11.** Стійкий вузол, $k_1 = -4$, $k_2 = -2$, $\alpha = (3,2)$,

$\beta = (1,1)$. **C12.** Нестійкий фокус, за годинниковою стрілкою. **C13.** Стійкий вироджений вузол, $k = -1$, $\alpha = (-3,1)$. **C14.** Сідло, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$, $\alpha = (1,1)$, $\beta = (1,2)$. **C15.** Нестійкий вироджений вузол, $k = 5$, $\alpha = (-3,1)$. **C16.** Нестійкий вузол, $k_1 = 2$, $k_2 = 6$, $\alpha = (1,1)$, $\beta = (-3,1)$. **C17.** Центр, проти годинникової стрілки. **C18.** Нестійкий дикритичний вузол. **C19.** Стійкі особливі точки заповнюють пряму лінію, траєкторії — паралельні півпрямі, $k_1 = -1$, $k_2 = 0$, $\alpha = (1,3)$, $\beta = (1,2)$. **C20.** Сідло, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$, $\alpha = (-2,1)$, $\beta = (1,2)$. **C21.** Нестійкі особливі точки заповнюють пряму лінію, траєкторії — паралельні прямі, $k = 0$, $\alpha = (1,-3)$. **C22.** Стійкий вироджений вузол, $k = -3$, $\alpha = (1,2)$. **C23.** Стійкий вузол, $k_1 = -5$, $k_2 = -4$, $\alpha = (2,3)$, $\beta = (1,1)$. **C24.** Нестійкий фокус, проти годинникової стрілки. **C25.** Стійкий фокус, за годинниковою стрілкою. **C26.** Нестійкий вузол, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $\alpha = (1,1)$, $\beta = (1,4)$. **C27.** Сідло, $k_1 = -3$, $k_2 = 3$, $\alpha = (1,-3)$, $\beta = (1,3)$. **C28.** Стійкий вироджений вузол, $k = -2$, $\alpha = (1,-2)$. **C29.** Центр, за годинникової стрілкою. **C30.** Нестійкий фокус, за годинниковою стрілкою. **C31.** $(4,8)$ — нестійкий вироджений вузол, $k = 1$, $\alpha = (1,1)$. **C32.** $(0,-1)$ — нестійкий фокус, проти годинникової стрілки; $(0,1)$ — сідло, $k_1 = -4$, $k_2 = 4$, $\alpha = (1,-3)$, $\beta = (1,1)$. **C33.** $(-1,1)$ — сідло, $k_1 = -1$, $k_2 = 4$, $\alpha = (-1,2)$, $\beta = (2,1)$. **C34.** $(0,2)$ — стійкий фокус, проти годинникової стрілки; $(2,0)$ — сідло, $k_1 = -2$, $k_2 = 2$, $\alpha = (1,0)$, $\beta = (1,-2)$. **C35.** $(0,1)$ — нестійкий вузол, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $\alpha = (1,0)$, $\beta = (1,2)$; $(1,0)$ — сідло, $k_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$, $k_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$, $\alpha = (-1, 1+\sqrt{13})$, $\beta = (2, \sqrt{13}-1)$. **C36.** $(1,1)$ — нестійкий фокус, проти годинникової стрілки; $(1,-1)$ — сідло, $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, $\alpha = (1,-2)$, $\beta = (2,1)$. **C37.** $(-1,-5)$ — стійкий фокус, за годинниковою стрілкою; $(2,7)$ — нестійкий вузол, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $\alpha = (2,3)$, $\beta = (1,1)$. **C38.** $(1,0)$ — стійкий вузол, $k_1 = -1$, $k_2 = -3$, $\alpha = (-3,1)$, $\beta = (1,-1)$. **C39.** $(1,1)$ — нестійкий фокус, проти годинникової стрілки; $(-1,1)$ — сідло,

$k_1 = -3$, $k_2 = 1$, $\alpha = (1, 1)$, $\beta = (1, -1)$. **С40.** $(1, -1)$ — нестійкий вузол, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (2, 1)$; $(1, 1)$ — сідло, $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $\alpha = (2, 3)$, $\beta = (1, 0)$. **С41.** $(1, 1)$ — нестійкий вузол, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $\alpha = (2, 1)$, $\beta = (4, 1)$. **С42.** $(0, 2)$ — стійкий вироджений вузол, $k = -2$, $\alpha = (1, -1)$; $(1, 0)$ — сідло, $k_1 = -4$, $k_2 = 1$, $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (2, -5)$. **С43.** $(-2, -1)$ — нестійкий фокус, за годинниковою стрілкою; $(4, 2)$ — стійкий вузол, $k_1 = -8$, $k_2 = -12$, $\alpha = (1, 1)$, $\beta = (1, 2)$. **С44.** $(1, 0)$ — нестійкий фокус, проти годинникової стрілки; $(-2, -3)$ — сідло, $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $\alpha = (1, 2)$, $\beta = (1, -2)$. **С45.** $(0, 0)$ — стійкий вузол, $k_1 = -1$, $k_2 = -3$, $\alpha = (1, -1)$, $\beta = (1, 1)$; $(1, -1)$ — сідло, $k_1 = -e$, $k_2 = e$, $\alpha = (e, 1)$, $\beta = (e, -1)$. **С46.** $(1, 0)$ — стійкий вузол, $k_1 = -1$, $k_2 = -3$, $\alpha = (1, -1)$, $\beta = (1, -3)$. **С47.** $(-1, 0)$ — нестійкий фокус, за годинниковою стрілкою. **С48.** $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ — нестійкий фокус, за годинниковою стрілкою; $(-1, 0)$ — сідло, $k_1 = -1$, $k_2 = 5$, $\alpha = (1, -1)$, $\beta = (1, 5)$. **С49.** $(0, 0)$ — сідло, $k_1 = -4$, $k_2 = 1$, $\alpha = (1, -4)$, $\beta = (1, 1)$; $(2, 0)$ — стійкий фокус, за годинниковою стрілкою. **С50.** $(1, 0)$ — нестійкий вузол, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\alpha = (1, 1)$, $\beta = (1, 2)$. **С51.** Якщо $a < -\frac{1}{4}$, то точка $(0, 0)$ є нестійким фокусом, якщо $a = -\frac{1}{4}$, — нестійким виродженим вузлом, якщо $-\frac{1}{4} < a < 2$, — нестійким вузлом, якщо $a > 2$, — сідлом, якщо $a = 2$, то існує безліч нестійких особливих точок. **С52.** Якщо $a < -1$, то точка $(0, 0)$ є стійким вузлом, якщо $-1 < a < 1$, — сідлом, якщо $a > 1$, — нестійким вузлом, якщо $a = -1$, то існує безліч стійких особливих точок, якщо $a = 1$, то існує безліч нестійких особливих точок. **С53.** Якщо $a < 0$, то точка $(0, 0)$ є нестійким фокусом, якщо $a = 0$, — нестійким виродженим вузлом, якщо $0 < a < 9$, — нестійким вузлом, якщо $a > 9$, — сідлом, якщо $a = 9$, то існує безліч нестійких особливих точок. **С54.** Якщо $a > \frac{9}{16}$, то точка $(0, 0)$ є стійким фокусом, якщо $a = \frac{9}{16}$, — стійким виродженим вузлом, якщо $\frac{1}{2} < a < \frac{9}{16}$, — стійким вузлом, якщо $a < \frac{1}{2}$, — сідлом, якщо $a = \frac{1}{2}$, то існує безліч стійких особливих точок. **С55.** Якщо

$a < 0$, то точка $(0, 0)$ є стійким фокусом, якщо $a = 0$, — стійким виродженим вузлом, якщо $0 < a < \frac{1}{3}$, — стійким вузлом, якщо $a > \frac{1}{3}$, — сідлом, якщо $a = \frac{1}{3}$, то існує безліч стійких особливих точок.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – 384 с.
2. Гой Т. П. Диференціальні рівняння / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.
3. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння / Ю. Д. Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
4. Головач Г. П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г. П. Головач, О. Ф. Калайда. – К. : Техніка, 1997. – 288 с.
5. Гудименко Ф. С. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф. С. Гудименко, І. А. Павлюк, В. О. Волкова. – К. : Вища шк., 1972. – 154 с.
6. Івасишен С. Д. Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. – Чернівці : Рута : ЧНУ, 2010. – 288 с.
7. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.
8. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – СПб. : Лань, 2002. – 432 с.
9. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 504 с.

10. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.

11. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск : Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.

12. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. – К. : Техніка, 2003. – 368 с.

Допоміжна література

13. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.

14. Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 356 с.

15. Диференціальні рівняння. Завдання кредитно-модульного контролю для студентів механіко-математичного факультету / Упор.: І. О. Парасюк та ін.; за ред. М. О. Перестюка. – К. : Відділ операт. поліrр. мех.-мат. факультету КНУ, 2010. – 43 с.

16. Збірник задач підвищеної складності з курсу «Диференціальні рівняння» / О. В. Капустян [та ін.]; за ред. М. О. Перестюка. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011. – 79 с.

17. Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н. Х. Ибрагимов. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2007. – 421 с.

18. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.

19. Краснов М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

20. Лопушанська Г. П. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики / Г. П. Лопушанська, О. М. Бугрій, А. О. Лопушанський. – Львів : Видавець І. Е. Чижиков, 2012. – 362 с.

21. Ляшко І. І. Диференціальні рівняння / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1981. – 504 с.

22. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1967. – 504 с.

23. Пантелеев А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, А. В. Босов. – М. : Изд-во МАИ, 2000. – 380 с.

24. Перестюк М. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, М. Я. Свіщук. – К. : ТВіМС, 2004. – 224 с.

25. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев. – Минск : Выш. школа, 1973. – 560 с.

26. Романко В. К. Сборник задач по Дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко. – М. : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 256 с.