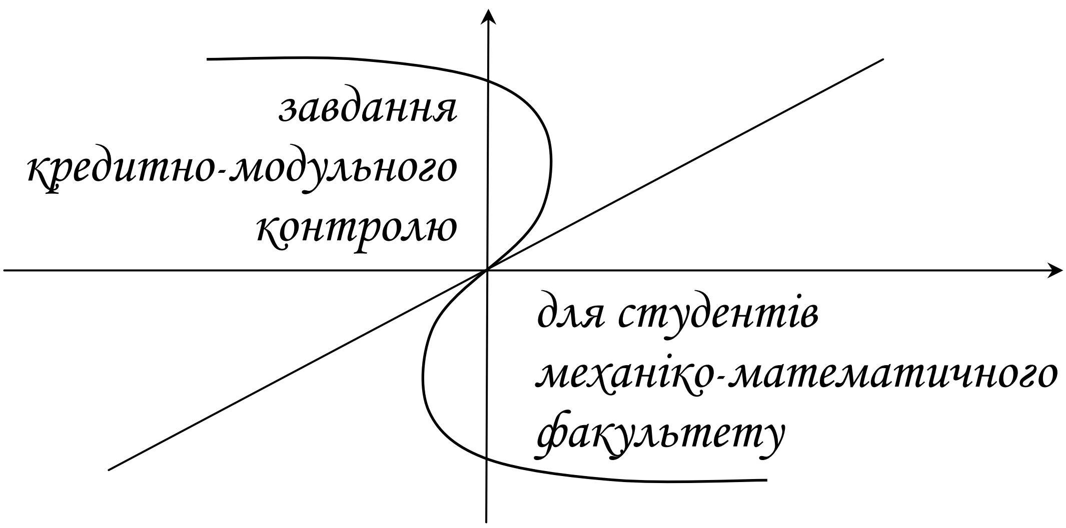
Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ



завдання кредитно-модульного контролю

для студентів механіко-математичного факультету

Під редакцією академіка НАН України

М.О. Перестюка

Київ – 2010

Диференціальні рівняння. Завдання кредитно-модульного контролю для студентів механіко-математичного факультету /Упор.: І.О. Парасюк та ін.; під ред. акад. М.О. Перестюка – К.: Відділ операт. поліґр. мех.-мат. ф-ту КНУ, 2010. – 43 с.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Упорядники:
Парасюк І.О.
Станжицький О.М.
Капустян О.В.
Чернікова О.С.
Сукретна А.В.
Ловейкін Ю.В.
Задоянчук Н.В.

ВСТУП

Вперше застосовувати диференціальні рівняння для опису різноманітних природніх явищ і законів було запропоновано ще Ісааком Н'ютоном. Відтоді теорія диференціальних рівнянь постійно розвивається і збагачується новими досягненнями та результатами.

На сьогоднішній день дуже важко собі уявити науковця: інженера, фізика, математика, біолога, без знання теорії диференціальних рівнянь і методів їх розв'язування. І це не дивно, адже практично будь-який процес, що змінюється (еволюціонує) в часі може бути описаний за допомогою диференціальних рівнянь або їх системи.

На механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка курс диференціальних рівнянь читається для студентів другого курсу всіх спеціалізацій.

Практична сторона курсу "Диференціальні рівняння" насамперед базується на засвоєнні методів інтегрування різноманітних класів диференціальних рівнянь та основних прийомів якісного дослідження поведінки їх розв'язків. Проте, на жаль, велика кількість існуючих на сьогодні підручників та збірників задач з диференціальних рівнянь, хоча в тому чи іншому обсязі охоплюють основні розділи теорії диференціальних рівнянь, які складають базовий університетський курс, але не містять значної кількості однотипних задач, які можна було пропонувати студентам у якості індивідуальних завдань.

Пропоновані завдання кредитно-модульного контролю охоплюють весь програмний матеріал нормативного курсу "Диференціальні рівняння". Завдання поділені на дванадцять робіт (по три в кожному модулі), кожна робота містить дванадцять варіантів.

Ці завдання виконуються студентами самостійно під час позааудиторної роботи. Щоб успішно виконати те чи інше завдання, слід вивчити відповідний лекційний матеріал та опрацювати самостійно вказані розділи з рекомендованої до даного завдання літератури.

Завдання оформлюються в окремому зошиті для самостійної роботи.

Номер варіанту, конкретний термін виконання завдань визначається викладачем, який при потребі надає студентам консультацію.

Рекомендована література

1. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.

2. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. – К.: Либідь, 2003.

3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1958.

4. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1984.

5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. – М.: Наука, 1974.

6. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971.

7. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962.

8. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. – М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 1
Скалярні диференціальні рівняння першого порядку

1 Задачі на складання диференціальних рівнянь

Література: [1], [2, § 1.3]

Варіант 1.

1. В умовах боротьби за існування швидкість збільшення числа особин популяції пропорційна (з коефіцієнтом $a = \text{const} > 0$) кількості особин в наявний момент часу, а швидкість їх зменшення пропорційна (з коефіцієнтом $b = \text{const} > 0$) квадрату кількості особин.
   а) Записати закон зміни кількості особин $x(t)$ у вигляді диференціального рівняння.
   б) Дослідити одержане рівняння і дати відповідь на питання:
   – яким повинно бути число особин x_0 в початковий момент часу $t = 0$, щоб з плином часу воно не змінювалося? Збільшувалось? Зменшувалось?
   – яким буде закон зміни кількості особин $x(t)$, записаний у вигляді аналітичної формули?

2. Нехай в умовах п. 1 $a = \text{const} > 0,\ b = 0$ і у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ число особин змінюється за законом
$$x\left(t_i + 0\right) = \gamma x\left(t_i\right), \quad \gamma = \text{const} > 0.$$
   а) Знайти аналітичну формулу для $x(t)$ у цьому випадку;
   б) Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \theta$ для будь-якого i, визначити значення параметра γ так, щоб функція $x(t)$ була θ-періодичною, обмеженою.

Варіант 2.

1. В процесі хімічної реакції хімічна речовина перетворюється в іншу речовину зі швидкістю, пропорційною (з коефіцієнтом $a = \text{const} > 0$) кількості неперетвореної речовини.
   а) Записати закон зміни кількості $x(t)$ неперетвореної речовини у вигляді диференціального рівняння.
   б) Записати закон зміни кількості $x(t)$ неперетвореної речовини у вигляді аналітичної формули.

в) Кількість неперетвореної речовини за годину після початку реакції була 38,8 г, а через 3 години – 9,7 г. Встановити, скільки речовини було на початку процесу.

2. Нехай в умовах п. 1 у фіксовані моменти часу $t_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$ кількість неперетвореної речовини змінюється за законом

$$x\left(t_i + 0\right) = \beta x\left(t_i\right), \quad \beta = \mathrm{const} > 0.$$

а) Знайти аналітичну формулу для $x(t)$ в цьому випадку;

б) Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \theta$ для будь-якого i, визначити значення параметра β так, щоб функція $x(t)$ була θ-періодичною, обмеженою.

Варіант 3.

1. Знайти закон зміни струму в колі з опором $R = \mathrm{const}$ та самоіндукцією $L = \mathrm{const}$, якщо початкова сила струму I_0, а електрорушійна сила змінюється за законом $U = U_0 \sin \omega t$.

а) Записати закон зміни струму $I(t)$ у вигляді диференціального рівняння.

б) Записати закон зміни струму $I(t)$ у вигляді аналітичної формули.

2. Нехай в умовах п. 1 $U_0 = 0$ і у фіксовані моменти часу $t_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$ струм змінюється за законом

$$I\left(t_i + 0\right) = \alpha I\left(t_i\right), \quad \alpha = \mathrm{const} > 0.$$

а) Знайти аналітичну формулу для $I(t)$ в цьому випадку;

б) Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \theta$ для будь-якого i, визначити значення параметра α так, щоб функція $I(t)$ була θ-періодичною, обмеженою.

Варіант 4.

1. Деяка кількість нерозчинної речовини містить у своїх порах 10 кг солі. Піддаючи її дії 90 л води, довідалися, що протягом години розчиняється 6 кг солі. Швидкість розчинення пропорційна (з коефіцієнтом $a = \mathrm{const} > 0$) добутку кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3 л) та концентрацією розчиненої солі (концентрацією даної речовини називають її кількість, що міститься в одиниці об’єму).

а) Записати закон зміни кількості солі в розчині $x(t)$ у вигляді диференціального рівняння.

б) Записати закон зміни кількості солі в розчині $x(t)$ у вигляді аналітичної формули.

в) Скільки солі розчиняється протягом години, якщо кількість води подвоїти?

2. Нехай в умовах п. 1 у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ у розчин додається 10 л чистої води, яка миттєво перемішується з розчином. Знайти аналітичну формулу для $x(t)$ в цьому випадку (записати рекурентну формулу).

Варіант 5.

1. Маса ракети з паливом – M_1, без палива – m_1, швидкість виходу продуктів горіння з ракети – c, початкова швидкість дорівнює нулю.
   а) Не беручи до уваги силу ваги та силу опору навколишнього середовища, записати закон зміни швидкості ракети $v = v(m)$ у вигляді диференціального рівняння.
   б) Записати закон зміни швидкості ракети у вигляді аналітичної формули.
   в) Яка буде швидкість ракети, коли згорить усе паливо?

2. Нехай ракета має три ступені, маси яких з паливом відповідно – M_1, M_2, M_3, а без палива – m_1, m_2, m_3; швидкість виходу продуктів горіння з ракети – c; початкова швидкість дорівнює нулю; ступінь, яка відпрацювала – відкидається.
   а) Знайти закон зміни швидкості ракети $v = v(m)$ у вигляді аналітичної формули.
   б) Яка буде швидкість ракети, коли згорить усе паливо?

Варіант 6.

1. Точка маси m рухається прямолінійно. На неї діє сила пропорційна кубові часу, який пройшов з моменту, коли швидкість дорівнювала $v_0 = \text{const} > 0$ (коефіцієнт пропорційності $a = \text{const} > 0$). Крім цього, точка зазнає опору середовища, який пропорційний добутку часу та швидкості (з коефіцієнтом $b = \text{const} > 0$).
   а) Записати закон зміни швидкості $v(t)$ у вигляді диференціального рівняння.
   б) Записати закон зміни $v(t)$ у вигляді аналітичної формули.

2. Нехай в умовах п. 1 $a = 0$ і в фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ точка зазнає дії імпульсної сили, внаслідок чого швидкість у ці моменти часу змінюється за законом
$$v\left(t_i + 0\right) = \gamma v\left(t_i\right), \quad \gamma = \text{const} > 0.$$
   а) Знайти аналітичну формулу для $v(t)$ в цьому випадку.
   б) Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \theta$ для будь-якого i, визначити значення параметра γ так, щоб функція $v(t)$ була θ-періодичною, обмеженою.

Варіант 7.

1. Точка маси m рухається прямолінійно. На неї діє сила пропорційна часу (з коефіцієнтом пропорційності $a = \text{const} > 0$). Крім цього, точка зазнає опору середовища, який пропорційний швидкості (з коефіцієнтом $b = \text{const} > 0$).
   а) Записати закон зміни швидкості $v(t)$ у вигляді диференціального рівняння.
   б) Записати закон зміни $v(t)$ у вигляді аналітичної формули.

2. Нехай в умовах п. 1 $a = 0$ і у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ маса точки зменшується на 10 % свого попереднього значення, тобто маса у ці моменти часу змінюється за законом
$$m\left(t_i + 0\right) = 0,9 m\left(t_i\right).$$
Використовуючи закон збереження кількості руху: $v\left(t_i + 0\right) m\left(t_i + 0\right) = = v\left(t_i\right) m\left(t_i\right)$, знайти аналітичну формулу для $v(t)$ у цьому випадку.

Варіант 8.

1. Диск обертається у рідині. Сила тертя, що гальмує його рух пропорційна кутовій швидкості обертання (з коефіцієнтом пропорційності $a = \text{const} > 0$).
   а) Записати закон зміни кутової швидкості $\omega(t)$ у вигляді диференціального рівняння.
   б) Записати закон зміни кутової швидкості $\omega(t)$ у вигляді аналітичної формули.
   в) Диск, який почав обертатися з кутовою швидкістю 8 об/сек через 2 хвилини має швидкість 2 об/сек. У який момент часу диск буде обертатись зі швидкістю 1 об/сек?

2. Нехай в умовах п. 1 у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ на диск діє імпульсна сила, яка змінює кутову швидкість за законом
$$\omega(t_i + 0) = \beta \omega(t_i), \quad \beta = \text{const} > 0.$$
   а) Знайти аналітичну формулу для $\omega(t)$ у цьому випадку;
   б) Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \theta$ для будь-якого i, вибрати значення параметра β так, щоб $\omega(t)$ була θ-періодичною, обмеженою.

Варіант 9.

1. Крапля води, що має початкову масу m_0 і рівномірно випаровується зі швидкістю m_1 г/сек., рухається за інерцією з початковою швидкістю v_0. Опір середовища пропорційний швидкості руху краплі та її радіусу (вважаємо, що крапля має форму кулі). В початковий момент часу опір дорівнював f_0.

а) Записати закон зміни швидкості руху краплі $v(t)$ у вигляді диференціального рівняння.

б) Записати закон зміни $v(t)$ у вигляді аналітичної формули.

2. Нехай в умовах п. 1 $m_1 = 0$ (тобто випаровування відсутнє) і у фіксовані моменти часу $t_i \ (i = 1, 2, \ldots)$ на краплю діє імпульсна сила, яка миттєво змінює її швидкість за законом
$$v(t_i + 0) = \alpha v(t_i), \quad \alpha = \mathrm{const} > 0.$$
а) Знайти аналітичну формулу для $v(t)$ у цьому випадку.

б) Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \theta$ для будь-якого i, вибрати значення параметра α так, щоб $v(t)$ була θ-періодичною, обмеженою.

Варіант 10.

1. Надійністю приладу $p(t)$ називають ймовірність його безвідмовної роботи до моменту часу t. Відомо, що швидкість зменшення надійності певного приладу пропорційна (з коефіцієнтом $a = \mathrm{const} > 0$) надійності його в даний момент. Вважаємо, що в початковий момент часу надійність дорівнює одиниці. Визначити:

а) закон зміни надійності $p(t)$ у вигляді диференціального рівняння;

б) закон зміни $p(t)$ у вигляді аналітичної формули;

в) надійність в кінці другого року експлуатації, якщо відомо, що протягом першого року експлуатації надійність приладу зменшилась у два рази.

2. З метою підвищення надійності приладу в умовах п. 1 у фіксовані моменти часу $t_i \ (i = 1, 2, \ldots)$ здійснюються ремонтні роботи. Внаслідок чого надійність зростає і змінюється за законом
$$p(t_i + 0) = \beta p(t_i), \quad \beta = \mathrm{const} > 1.$$
а) Знайти аналітичну формулу для $p(t)$ у цьому випадку.

б) Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \theta$ для будь-якого i, вибрати значення параметра β так, щоб $p(t)$ була θ-періодичною, обмеженою.

Варіант 11.

1. Шматок металу з температурою a градусів помістили в піч, температура якої рівномірно підвищується протягом 1 години від a до b градусів. При різниці температури печі і температури металу в T градусів, метал нагрівається зі швидкістю kT градусів на хвилину.

а) Записати закон зміни температури металу $h(t)$ у вигляді диференціального рівняння.

б) Записати закон зміни $h(t)$ у вигляді аналітичної формули.

в) Яка буде температура металу за 1 годину?

2. Нехай в умовах п. 1 у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ метал піддається зовнішньому охолодженню і його температура миттєво змінюється за законом
$$h(t_i + 0) = \beta h(t_i), \quad \beta = \mathrm{const} > 0\,.$$
Знайти аналітичну формулу для $h(t)$ у цьому випадку.

Варіант 12.

1. У повітрі кімнати об'ємом 200 м^3 міститься 0,15 % вуглекислого газу (CO_2). По трубах вентиляції подається повітря, яке містить 0,04 % вуглекислого газу (CO_2), зі швидкістю 20 м^3/хв. і миттєво перемішується з повітрям в кімнаті. В той же час з кімнати виходить повітря з тією ж швидкістю.

   а) Записати закон зміни кількості $x(t)$ вуглекислого газу CO_2 в кімнаті у вигляді диференціального рівняння;

   б) Записати закон зміни кількості $x(t)$ CO_2 в кімнаті у вигляді аналітичної формули;

   в) Через скільки часу кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться у 3 рази?

2. Розглянути випадок, коли в умовах попередньої задачі у фіксовані моменти часу t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ у кімнаті спрацьовує пристрій, який «миттєво» викидає в повітря певну кількість вуглекислого газу, внаслідок чого його кількість у повітрі кімнати змінюється за законом:
$$x(t_i + 0) = \beta x(t_i), \quad \beta = \mathrm{const} > 1.$$
Знайти аналітичну формулу для $x(t)$ у цьому випадку.

2 Методи Лагранжа, Бернуллі та Ейлера

Література: [2, § 1.5, 1.6], [3, гл. 1, § 4; гл. 2, § 3]

Для кожного з наведених нижче рівнянь встановити тип і проінтегрувати рівняння:

- перше – *методом Лагранжа*,
- друге – *методом Бернуллі*,
- третє – *методом інтегрувального множника (методом Ейлера), звівши його попередньо до лінійного рівняння.*

Варіант 1.

1. $(2e^y - x)y' = 1$;
2. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$;
3. $\sin x dy - \cos x dx = e^y \sin x dx$.

Варіант 2.

1. $y' + 3y = x^2 + 1$;
2. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$;
3. $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$.

Варіант 3.

1. $y' - 2xy = \cos x - 2x \sin x$;
2. $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2x\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;
3. $\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt$.

Варіант 4.

1. $y' = y \cos x + \cos x$;
2. $y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x$;
3. $e^{-x}y' - e^{-x} = e^y$.

Варіант 5.

1. $y' = 2y + \cos^4 x$;
2. $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = x\sqrt{y}$;
3. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$.

Варіант 6.

1. $y' + 2y = e^{-x^2}$;
2. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$;
3. $\dfrac{\sqrt{\ln y}}{y}y' + \dfrac{2}{3(x+1)}(\ln y)^{\frac{3}{2}} = 1$.

Варіант 7.

1. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$;

2. $xy' + xy^2 = y$;

3. $xy' = e^y + 2y' + x$.

Варіант 8.

1. $y' \sin x \cos x = y + \sin^3 x$;

2. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$;

3. $(x+1)(y'y - 1) = y^2$.

Варіант 9.

1. $y' + (1 + x^2)y = \dfrac{1}{1 + x^6}$;

2. $xy' + y = y^2 \ln x$;

3. $x(e^y - y') = 2$.

Варіант 10.

1. $y' + 3y = \sin^4 x$;

2. $xy' = 2\sqrt{y} \cos x - 2y$;

3. $yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$.

Варіант 11.

1. $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$;

2. $y' + 4x^3 y^3 + 2xy = 0$;

3. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 7 = 0$.

Варіант 12.

1. $y' = \dfrac{1}{x + y^2}$;

2. $y' \cos x - y \sin x = y^4$;

3. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

Дати відповідь на наступне питання до першого рівняння (для кожного варіанту своє):

Варіант 1. Чи має рівняння розв'язки $y = y(x)$ визначені на $\mathbb{R}$?

Варіант 2. Знайти всі розв'язки рівняння, які є поліномами.

Варіант 3. Знайти всі періодичні розв'язки рівняння.

Варіант 4. Знайти всі 2π-періодичні розв'язки рівняння.

Варіант 5. Показати, що рівняння має єдиний π-періодичний розв'язок. Знайти цей розв'язок.

Варіант 6. Чи має рівняння обмежені на $\mathbb{R}$ розв'язки? Якщо так, знайти ці розв'язки.

Варіант 7. Чи має рівняння розв'язки обмежені на $\mathbb{R}$?

Варіант 8. Знайти розв'язок рівняння, який залишається обмеженим при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 9. Довести, що кожен розв'язок рівняння прямує до нуля при $x \to +\infty$.

Варіант 10. Показати, що рівняння має єдиний розв'язок періоду π. Знайти цей розв'язок.

Варіант 11. Знайти розв'язок рівняння, який залишається обмеженим при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 12. Чи має рівняння розв'язки $y = y(x)$ обмежені на $\mathbb{R}$? Якщо так, знайти їх.

3 Лінійні рівняння. Рівняння Ріккаті

Література: [1, § 1.3], [3, гл. 1, § 6]

Задача 3.1. Довести, що рівняння має єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок. Знайти цей розв'язок.

1. $y' - e^{x^2} y = \operatorname{arctg} x\,.$

2. $y' - 5y = e^{-3x^2}\,.$

3. $y' - \left(1 + e^{x}\right) y = \cos x\,.$

4. $y' - 2^{x^2+1} y = \dfrac{1}{x^2+1}.$

5. $y' - 7y = e^{-7x^4}\,.$

6. $y' - \dfrac{x^2+2}{x^2+1} y = \operatorname{arctg} x\,.$

7. $y' - \dfrac{x^2+2}{x^2+1} y = \sin x\,.$

8. $y' - \dfrac{1}{1+\sin^2 x} y = 4\,.$

9. $y' - \left(x^2 + 2x + 3\right) y = \operatorname{arcctg} x\,.$

10. $y' - \dfrac{1}{1+\cos^2 x} y = 8\,.$

11. $y' - \left(e^{x} + 10\right) y = \sin^2 x\,.$

12. $y' - \left(\operatorname{sh}^2 x + 1\right) y = \dfrac{x^2}{x^2+12}.$

Задача 3.2. Знайти кількість -періодичних розв'язків рівняння.

1. $y' + \left(1 + \sin 2x\right) y = e^{\cos 2x}\,.$

2. $y' + \sin x \cos x \, y = \sin 2x\,.$

3. $y' + \left|\sin x\right| y = \operatorname{tg}\left(\sin 2x\right).$

4. $y' + 2\cos^2 x \, y = 3 \sin 2x\,.$

5. $y' + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) y = 3\cos^2 x\,.$

6. $y' + 11\left|\cos x\right| y = \operatorname{tg}\left(\cos 2x\right).$

7. $y' + \left|\cos x\right| y = \left|\sin x\right|.$

8. $y' + y\sin^2 x = \cos 2x\,.$

9. $y' + 2\sin 2x\, y = e^{-\cos 2x}.$

10. $y' + \left|\sin x\right| y = \left|\cos x\right|.$

11. $y' + \left(5 + 2\cos 2x\right) y = 7e^{\sin 2x}\,.$

12. $y' + 6\cos 2xy = e^{3\sin 2x}\cos 2x\,.$

Задача 3.3. Розв'язати рівняння Ріккаті, попередньо звівши його до канонічного вигляду.

1. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x^3} + \dfrac{1}{x^6}.$

2. $y' = -\dfrac{y^2}{x^4} + \dfrac{4y}{x} + 1\,.$

3. $x^2y' - y^2 - 2xy - 3 = 0\,.$

4. $y' = -y^2 + \dfrac{2y}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}.$

5. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x} + \dfrac{3}{x^4}.$

6. $x^2y' + y^2 - 2xy - 1 = 0\,.$

7. $y' = -e^x y^2 - y + x^{-\frac{4}{3}}e^{-x}\,.$

8. $y' = y^2 - 2x^{-\frac{1}{3}}\,y + x^{-\frac{2}{3}}.$

9. $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}y - y^2\,.$

10. $xy' = x^{\frac{1}{3}}y^2 + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}.$

11. $xy' + y^2 - y - x^{\frac{2}{3}} = 0\,.$

12. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 2
Елементи загальної та якісної теорії диференціальних рівнянь на площині

4 *Геометрична та динамічна інтерпретація диференціального рівняння та його розв'язків*

Література: [1, гл. 1], [2, §1.1], [3, гл. 1, §1]

Задача 4.1.

Задано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$.

1) Зобразити поле напрямів в точках $\left(m,\ \dfrac{n}{2}\right)$, $\quad m = -3, -2, \ldots, 3; \quad n = 0, 1, \ldots, 6.$
2) Описати аналітично та зобразити множини точок максимуму розв'язків.
3) Зобразити ізокліни, які характеризуються кутовими коефіцієнтами $k = 1, 2, 3$.
4) Зобразити поле напрямків у будь-яких шести точках кожної ізокліни.
5) Зобразити області, де інтегральні криві рівняння зростають, та області, де інтегральні криві спадають.
6) Описати аналітично та зобразити множину точок перегину інтегральних кривих.
7) Виділити області, де інтегральні криві опуклі вгору.
8) Зобразити наближено інтегральну криву, яка проходить через точку $(0, 0)$.

1. $y' = y^2 - 3y + x - 2$.

2. $y' = y^2 - x$.

3. $y' = y^2 - y + x$.

4. $y' = y^2 - 3y - x + 2$.

5. $y' = y^2 + x$.

6. $y' = y^2 + y + x$.

7. $y' = y^2 - 2y + x$.

8. $y' = y^2 + y + x - 2$.

9. $y' = y^2 + x - 1$.

10. $y' = y^2 - x - 1$.

11. $y' = y^2 - 5y + x + 6$.

12. $y' = y^2 + x - 2$.

Задача 4.2.

Маємо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = g(y)\,. \tag{1}$$

1) Зобразити векторне поле в точках $0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4$.

2) Зобразити інтегральні криві рівняння (1) на площині Oxy. Чи має рівняння (1) розв'язки, визначені на $\mathbb{R}$?

3) Знайти множину точок перегину інтегральних кривих рівняння (1).

4) Нехай $y(x;y_0),\ x \in I_{y_0}$ непродовжуваний розв'язок рівняння (1) такий, що $y(0;y_0) = y_0$. Знайти явний вигляд інтервалу I_{y_0}.

5) При фіксованому $x \geq 0$ розглянемо відображення $g^x : H \to R \quad (H \subset R)$, що задається правилом $g^x : y_0 \mapsto y(x;y_0)$. Чи визначене це відображення на всьому $\mathbb{R}$?

6) Знайти множину $H \subset R$ таку, що $g^x : H \to R$ існує для будь-якого $x \geq 0$.

7) Знайти $g^1(0), \quad g^1([0;1])$.

8) Чи є такі точки y_0, що $g^x(y_0) = y_0$ для всіх $x \geq 0$?

1. $g(y) = y^2 + 3y + 2$.

2. $g(y) = y^2 - 2y - 3$.

3. $g(y) = y^2 - 3y + 2$.

4. $g(y) = y^2 + y - 6$.

5. $g(y) = y^2 + y$.

6. $g(y) = 2y - y^2 + 3$.

7. $g(y) = y^2 - y$.

8. $g(y) = y^2 - 1$.

9. $g(y) = y - y^2$.

10. $g(y) = y^2 - 2y$.

11. $g(y) = 3y - y^2 - 2$.

12. $g(y) = 2 - y^2 - y$.

5 Існування та єдиність розв'язку задачі Коші

Література: [2, гл. 2, § 1], [3, § 6], [4, § 1.7]

Задача 5.1.

У прямокутнику $\Pi = \left\{ \left(x,y\right) \in R^2 : \ \left|x - x_0\right| \le a; \ \left|y - y_0\right| \le b \right\}$ задана задача Коші

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x,y\right), \tag{1}$$

$$y\left(x_0\right) = y_0 . \tag{2}$$

1) Знайти сталу Ліпшиця функції $f\left(x;y\right)$ в Π та перевірити виконання умов теореми Пікара.
2) На якому проміжку $\left[x_0 - h; \ x_0 + h\right]$ теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень?
3) Знайти третє наближення $y_3\left(x\right), \ x \in \left[x_0 - h; x_0 + h\right]$ задачі (1), (2).
4) Оцінити $\max\limits_{\left|x - x_0\right| \le h} \left|y\left(x\right) - y_3\left(x\right)\right| = \beta_3$. При якому n буде виконуватися нерівність $\beta_n \le 10^{-3}$?
5) Чи можна продовжити розв'язок $y\left(x\right), \ x \in \left[x_0 - h, x_0 + h\right]$, на більший інтервал? На весь інтервал $\left[x_0 - a, x_0 + a\right]$?
6) Чи має розв'язок задача Коші (1), (2) якісь особливі властивості (монотонність, парність, непарність і т.п.)?

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2; \quad x_0 = 0, \ y_0 = 0; \ \ a = 2, \ b = 1.$

2. $f(x,y) = x^2 - y^2; \quad x_0 = 0, \ y_0 = 0; \ \ a = 1, \ b = 2.$

3. $f(x,y) = x^2 - y^2; \quad x_0 = 2, \ y_0 = 0; \ \ a = 1, \ b = 1.$

4. $f(x,y) = x + y^2; \quad x_0 = 3, \ y_0 = 0; \ \ a = 3, \ b = 1.$

5. $f(x,y) = x - y^2; \quad x_0 = 5, \ y_0 = 2; \ \ a = 2, \ b = 2.$

6. $f(x,y) = x - y^2;$ $x_0 = -4,\ y_0 = 2;\ \ a = 2,\ b = 3.$

7. $f(x,y) = 2xy + y^2;$ $x_0 = 5,\ y_0 = 3;\ \ a = 3,\ b = 2.$

8. $f(x,y) = x^2 + y^2;$ $x_0 = 7,\ y_0 = 0;\ \ a = 3,\ b = 1.$

9. $f(x,y) = e^x + y^2;$ $x_0 = 1,\ y_0 = 0;\ \ a = 2,\ b = 2.$

10. $f(x,y) = x + y^2;$ $x_0 = 2,\ y_0 = 3;\ \ a = 1,\ b = 2.$

11. $f(x,y) = xe^x + x^2y^2;$ $x_0 = 1,\ y_0 = 0;\ \ a = 2,\ b = 2.$

12. $f(x,y) = e^x + y^2;$ $x_0 = 0,\ y_0 = 1;\ \ a = 2,\ b = 1.$

Задача 5.2.

В області $K \subset \mathbb{R}^2$ задано рівняння з початковою умовою:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g\left(y\right); \\ y\left(x_0\right) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

1) Чи виконані для задачі Коші (3) умови теореми Пеано? На якому інтервалі ця теорема гарантує існування розв'язку задачі (3)?
2) Чи задовольняє функція $g\left(y\right)$ умову Ліпшиця в області K ?
3) Знайдіть всі розв'язки задачі Коші (3). Вкажіть максимальний та мінімальний розв'язки цієї задачі.

   Пояснення: *під максимальним розв'язком задачі Коші ми розуміємо такий її непродовжуваний розв'язок* $y_{\max} = y_{\max}(x)$*, що для будь-якого іншого розв'язку* $y = y(x)$ *цієї задачі має місце нерівність* $y(x) \le y_{\max}(x)$*. Мінімальний розв'язок* $y_{\min} = y_{\min}(x)$ *визначається аналогічно.*
4) Зобразите геометричну фігуру G, яку «заповнюють» інтегральні криві – графіки розв'язків задачі (3).

1. $g(y) = 3y^{2/3};\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$

2. $g(y) = -3y^{2/3};\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,x\,| + |\,y\,| \le 2\right\}.$

3. $g(y) = 4(y-1)^{3/4};\ x_0 = 0,\ y_0 = 1;\ K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 1,\ x^2 + y^2 - 2y \le 3\right\}.$

4. $g(y) = 2\sqrt{y};\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1\right\}.$

5. $g(y) = 4(2-y)^{3/4};\quad x_0 = -1,\ y_0 = 2;\quad K = \left\{(x;y) \in R^2 :\ x^2 + y^2 - 2y \le 5\right\}.$

6. $g(y) = \sqrt{-y};\quad x_0 = 1,\ y_0 = 0;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 4\right\}.$

7. $g(y) = -\sqrt{y};\quad x_0 = 2,\ y_0 = 0;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 9\right\}.$

8. $g(y) = (y-2)^{3/4};\quad x_0 = 1,\ y_0 = 2;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \le 5\right\}.$

9. $g(y) = -\sqrt{-y};\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 8\right\}.$

10. $g(y) = -(y+2)^{3/4};\quad x_0 = -1,\ y_0 = -2;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16\right\}.$

11. $g(y) = \left(1 - \dfrac{1}{2}y\right)^{1/3};\quad x_0 = 0,\ y_0 = 2;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 5y \le 6\right\}.$

12. $g(y) = -2\sqrt{y};\quad x_0 = -1,\ y_0 = 0;\quad K = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16\right\}.$

Задача 5.3.

Застосовуючи метод послідовних наближень Пікара, знайдіть точний розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a\left(x\right)y + b(x); \\ y\left(\alpha\right) = \beta. \end{cases} \tag{4}$$

Далі розв'яжіть задачу (4), застосовуючи метод Лагранжа та порівняйте отримані результати.

1. $a(x) = 1,\qquad b(x) = 2x - x^2,\qquad y(0) = 1.$

2. $a(x) = 1,\qquad b(x) = x - 1,\qquad y(0) = 1.$

3. $a(x) = -x, \qquad b(x) = x^3, \qquad y(0) = -1.$

4. $a(x) = 2x, \qquad b(x) = 2x^3, \qquad y(0) = 0.$

5. $a(x) = -1, \qquad b(x) = 2e^x, \qquad y(0) = 2.$

6. $a(x) = 1, \qquad b(x) = -1, \qquad y(0) = 2.$

7. $a(x) = 1, \qquad b(x) = 1 + x, \qquad y(0) = 0.$

8. $a(x) = -1, \qquad b(x) = 3x, \qquad y(0) = 1.$

9. $a(x) = 2, \qquad b(x) = x, \qquad y(0) = 0.$

10. $a(x) = 1, \qquad b(x) = 2x, \qquad y(0) = 1.$

11. $a(x) = 1, \qquad b(x) = \dfrac{1}{2}x(x-2), \qquad y(0) = 1.$

12. $a(x) = 1, \qquad b(x) = 2e^x, \qquad y(0) = 0.$

6 *Рівняння, не розв'язані відносно похідної*

Література: [3, § 1.8], [4, гл. 3, § 1 – 4]

Задача 6.1.

1) Користуючись теоремами Вієта і визначаючи корені для кубічних рівнянь (див., наприклад, [5, глава 6]) та, застосовуючи метод розщеплення, проінтегрувати рівняння.
2) Розв'язати задачу Коші для вказаних рівнянь в точці $M(1;1)$ та з'ясувати, чи має місце єдиність розв'язків задачі Коші в точці M.

1. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)y' - x^3y^3 = 0$.

2. $y'^3 - (x^2 + xy + 8y^2)y'^2 + (x^3y + 8x^2y^2 + 8xy^3)y' - 8x^3y^3 = 0$.

3. $y'^3 - (2x^2 + 2xy + y^2)y'^2 + (4x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3)y' - 4x^3y^3 = 0$.

4. $y'^3 - (2x^2 + xy + 2y^2)y'^2 + (2x^3y + 4x^2y^2 + 2xy^3)y' - 4x^3y^3 = 0$.

5. $y'^3 - (x^2 + 2xy + 3y^2)y'^2 + (2x^3y + 3x^2y^2 + 6xy^3)y' - 6x^3y^3 = 0$.

6. $y'^3 - (2x^2 + xy + 3y^2)y'^2 + (2x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3)y' - 6x^3y^3 = 0$.

7. $y'^3 - (3x^2 + 2xy + y^2)y'^2 + (6x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3)y' - 6x^3y^3 = 0$.

8. $y'^3 - (4x^2 + 3xy + 2y^2)y'^2 + (12x^3y + 8x^2y^2 + 6xy^3)y' - 24x^3y^3 = 0$.

9. $y'^3 - (3x^2 + 4xy + 2y^2)y'^2 + (12x^3y + 6x^2y^2 + 8xy^3)y' - 24x^3y^3 = 0$.

10. $y'^3 - (2x^2 + xy + 4y^2)y'^2 + (2x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3)y' - 8x^3y^3 = 0$.

11. $y'^3 - (x^2 + 2xy + y^2)y'^2 + (2x^3y + x^2y^2 + 2xy^3)y' - 2x^3y^3 = 0$.

12. $y'^3 - (x^2 + xy + 9y^2)y'^2 + (x^3y + 9x^2y^2 + 9xy^3)y' - 9x^3y^3 = 0$.

Задача 6.2.

За допомогою загального методу введення параметру проінтегрувати рівняння. Там, де це можливо, виключити параметр.

1. $y'^3 - (xy^4y' + y^5) = 0$.

2. $x^3y'^2 - x^2y'y + 1 = 0$.

3. $y'^3 - 2xy^4y' = 2y^5$.

4. $3x^2yy' + 2 + 3x^3y'^2 = 0$.

5. $y'^3 - 3y^5 = 3xy^4y'$.

6. $5 + 4x^2yy' = -4x^3y'^2$.

7. $y'^3 = 5(xy^4y' + y^5)$.

8. $3(x^3y'^2 + x^2yy') + 4 = 0$.

9. $9(xy^4y' + y^5) = y'^3$.

10. $7(x^3y'^2 + x^2yy') + 6 = 0$.

11. $\ln y' + (2xy' - y) = 0$.

12. $y' = \exp(xy' \,/\, y)$.

Задача 6.3.

1) Проінтегрувати рівняння.
2) Знайти особливі розв’язки для вказаних рівнянь.
3) При наявності особливого розв’язку, представити його геометричну інтерпретацію, зіставивши даний розв’язок з однопараметричною сім’єю інтегральних кривих.

1. $y'^2 - 2yy' + e^{2x} = 0$.

2. $e^{3x} + y'^2 = 3yy'$.

3. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.

4. $y'^2 + y^2 - 2yy' = e^{2x}y^2$.

5. $y'^2 + e^x = yy'$.

6. $y^2e^{3x} + 2yy' = y'^2 + y^2$.

7. $2yy' + e^{3x} = y'^2 + y^2$.

8. $y^2 - 2yy' = y^2e^{7x} - y'^2$.

9. $y'^2 - 4yy' = -e^{4x}$.

10. $y^2(e^{9x} - 1) = y'^2 - 2yy'$.

11. $4(1 - y) = (3y - 2)^2y'^2$.

12. $y'^2 - 5yy' + e^{5x} = 0$.

Задача 6.4.

1) Представити диференціальні рівняння в параметричній формі.
2) Проінтегрувати отримані рівняння.

1. $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

2. $y'^3 + x^3 - 4xy' = 0$.

3. $y'^3 + 2x^3 - 6xy' = 0$.

4. $2y'^3 - 8xy' + x^3 = 0$.

5. $3x^3 + y'^3 - 12xy' = 0$.

6. $x^3 + 5y'^3 = 12xy'$.

7. $y'^3 + 4x^3 = 9xy'$.

8. $4y'^3 + x^3 = 20xy'$.

9. $5x^3 + y'^3 - 21xy' = 0$.

10. $x^3 + 7y'^3 - 24xy' = 0$.

11. $2y'^3 + x^3 - 12xy' = 0$.

12. $x^3 + 3y'^3 - 9xy' = 0$.

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 3
Диференціальні рівняння вищих порядків.
Теорія лінійних диференціальних рівнянь та систем

7 Диференціальні рівняння вищих порядків

Література: [2, гл. 2], [3, гл. 4, § 2 – 4; гл. 6, § 1]

Задача 7.1.

Для наведених нижче задач Коші:

1) перевірити виконання умов теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші;
2) знайти загальний розв'язок диференціального рівняння;
3) знайти розв'язок задачі Коші.

1. $4y''\sqrt{y} = 1, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1.$

2. $yy'' - y'^2 = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 1.$

3. $y'' + 2y' = e^x y'^2, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 1.$

4. $y''(1 - 3yy'^2) = y'^4, \qquad y(0) = 4, \qquad y'(0) = 0.$

5. $x^2 yy'' = (y - xy')^2, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 1.$

6. $y^3(x^2 y'' + xy') = 1, \qquad y(1) = -1, \qquad y'(1) = 2.$

7. $y'^2 + 2xyy'' = 0, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 1.$

8. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0; \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = -1.$

9. $x^4 y'' - (y - xy')^3 = 0, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 1.$

10. $yy'' = 2xy'^2,$ $\quad y(2) = 2,$ $\quad y'(2) = \dfrac{1}{2}.$

11. $2xy'y'' = y'^2 - 1,$ $\quad y(1) = 2,$ $\quad y'(1) = 1.$

12. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y',$ $\quad y(-1) = \dfrac{\pi}{6},$ $\quad y'(-1) = 2.$

Задача 7.2.

Записати загальний розв'язок лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами, при цьому частинний розв'язок неоднорідного рівняння подати у вигляді суми двох доданків, один з яких шукати за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, інший за допомогою методу варіації довільних сталих.

1. $y'' - 2y' + 2y = e^x + \dfrac{e^x}{\sin x}.$

2. $y''' + y' = \cos^3 x + \dfrac{1}{\cos x}.$

3. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2} + xe^{3x}.$

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x} + xe^{2x}.$

5. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2 + x^4 e^x.$

6. $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}.$

7. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \operatorname{tg} x).$

8. $y'' + y = 3\sin x + \operatorname{ctg} x.$

9. $y''' + y' = \sin^3 x + \dfrac{2 + x^2}{x^3}.$

10. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x + \cos^2 x\,.$

11. $$y''' - 3y' + 2y = 9e^x + \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

12. $$y'' + 2y' + y = 5e^{-x}\sqrt{x+1} + (3x+7)e^x.$$

Задача 7.3.

Для наступних задач скласти математичну модель – диференціальне рівняння, розв'язати це рівняння і провести аналіз одержаного результату.

Варіант 1. Визначити найменшу швидкість з якою треба кинути тіло вертикально вгору, щоб воно не повернулось на Землю. Опором повітря знехтувати.

Варіант 2. Матеріальна точка маси m під дією сили ваги рухається по колу радіуса L, яке лежить у вертикальній площині. Знайти закон руху точки. Опором знехтувати.

Варіант 3. З літака опущено на парашуті вантаж певної маси. Відомо, що сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості його спускання. Визначити шлях S, пройдений за 10 с після початку спуску.

Варіант 4. Човен уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 2 м/с, його швидкість через 4 с після початку руху – 1 м/с. Через який час швидкість човна зменшиться до 0,5 м/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

Варіант 5. Куля входить у брус товщиною 12 см зі швидкістю 200 м/с, а вилітає, пробивши його, зі швидкістю 60 м/с. Брус чинить опір руху кулі, пропорційний квадрату швидкості кулі. Знайти час руху кулі крізь брус.

Варіант 6. Однорідний ланцюг довжиною 4 м зісковзує з гладкого столу. У початковий момент руху зі столу звисав кінець ланцюга довжиною 0,5 м. Нехтуючи тертям, знайти час зісковзування всього ланцюга.

Варіант 7. Тіло, яке знаходиться в початковий момент у рідині, занурюється в неї під дією власної ваги без початкової швидкості. Опір рідини прямо пропорційний швидкості тіла. Знайти закон руху тіла.

Варіант 8. Матеріальна точка маси m рухається по осі Ox під дією відновлюючої сили, направленої до початку координат і пропорційної віддалі рухомої точки від початку координат. Середовище, в якому відбувається рух, чинить опір рухомій точці, пропорційний швидкості руху точки. Знайти закон руху. Проаналізувати різні можливі варіанти в залежності від фізичних параметрів системи.

Варіант 9. Із гака зісковзує під дією власної ваги вільно висячий однорідний ланцюг (тертям нехтуємо). Визначити, за який час зісковзне з гака весь ланцюг, якщо в початковий момент з однієї сторони гака висіло 10 м, а з іншої сторони – 8 м ланцюга і початкова швидкість ланцюга дорівнювала нулеві.

Варіант 10. Тверде тіло маси m кинуто вертикально догори з початковою швидкістю v_0. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості тіла. Визначити найбільшу висоту, що її досягне тіло.

Варіант 11. Один кінець пружини нерухомо закріплений, а до іншого прикріплене тіло маси m. При русі тіла зі швидкістю v сила опору дорівнює hv. В момент часу $t = 0$ тілу, що знаходилось в положенні рівноваги, була надана швидкість v_0. Дослідити рух тіла у випадках $h^2 < 4km$ та $h^2 > 4km$. Вважати, що при відхиленні тіла на відстань x від положення рівноваги, пружина діє на нього з силою kx, направленою до положення рівноваги.

Варіант 12. Частинка маси m рухається по осі Ox, відштовхуючись від точки $x = 0$ з силою mr_0 та від точки $x = 1$ з силою mr_1, де r_0, r_1 – відстані до цих точок відповідно. Знайти закон руху частинки, за початкових умов: $x(0) = \frac{1}{2}$, $\dot{x}(0) = 0$.

8 Лінійні рівняння другого порядку

Література: [3, гл. 6, § 2]; [2, гл. 3]; [7]; [8]

Задача 8.1.

Задано диференціальне рівняння другого порядку.

1) Звести його до самоспряженого вигляду.
2) Звести рівняння до канонічного вигляду, застосовуючи заміну:
   а) шуканої функції;
   б) незалежної змінної.
3) Записати загальний розв'язок вихідного рівняння.
4) Звести вихідне рівняння до рівняння типу Ріккаті і записати загальний розв'язок одержаного рівняння.

1. $2xy'' + y' - 2y = 0.$

2. $x^2y'' - 2xy' + \left(x^2 + 2\right)y = 0.$

3. $xy'' - y' - 4x^3y = 0.$

4. $x^2y'' - 4xy' + \left(6 - x^2\right)y = 0.$

5. $y'' - 2xy' + x^2y = 0.$

6. $xy'' + 2y' + xy = 0.$

7. $4xy'' + 2y' + y = 0.$

8. $x^4y'' + 2x^3y' - y = 0.$

9. $\left(1 + x^2\right)y'' + xy' + y = 0.$

10. $\left(1 + x^2\right)y'' + 4xy' + 2y = 0.$

11. $x^2y'' + 2x^2y' + \left(x^2 - 2\right)y = 0.$

12. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0.$

Задача 8.2.

Використовуючи інтегрування за допомогою рядів, знайти розв'язок рівняння в околі точки $x_0 = 0$. Там, де це можливо, виразити розв'язок через елементарні функції. Знайти область збіжності одержаних рядів. Записати загальний розв'язок рівняння.

1. $x(x-1)y'' + (3x-2)y' + y = 0.$

2. $x(x-1)y'' + (2x-2)y' - 2y = 0.$

3. $x(x-1)y'' + (x+1)y' - y = 0.$

4. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$

5. $2x^2y'' + \left(3x - 2x^2\right)y' - (x+1)y = 0.$

6. $9x^2y'' - \left(x^2 - 2\right)y = 0.$

7. $x^2y'' - \left(3x + x^2\right)y' + 4y = 0.$

8. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$

9. $x^2y'' - x^2y' + (x-2)y = 0.$

10. $xy'' - xy' - y = 0.$

11. $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0.$

12. $x^2y'' - 2xy' + \left(x^2 + 2\right)y = 0.$

Задача 8.3.

Вивчити властивості розв'язків гіпергеометричного рівняння та рівняння Бесселя. Загальні розв'язки, запропонованих нижче рівнянь, виразити через гіпергеометричні функції або функції Бесселя. Там де це можливо виразити розв'язки через елементарні функції.

Варіант 1. Записати загальний розв'язок рівняння $2x(x-1)y'' + (-3+8x)y' + +4y = 0$ при $|\, x \,| < 1$. Чи має це рівняння нетривіальні розв'язки обмежені на проміжку $[0,1]$?

Варіант 2. Використовуючи заміну незалежної змінної $t = 2\sqrt{a}e^{\frac{x}{2}}$, записати загальний розв'язок рівняння $y'' + \left(ae^x - b\right)y = 0,\ \ a > 0,\ \ b > 0.$

Варіант 3. Використовуючи заміну незалежної змінної $t = x^2$, записати загальний розв'язок рівняння $x\left(1 - x^2\right)y'' + \left(2 - 3x^2\right)y' - \frac{3}{4}xy = 0.$

Варіант 4. Маємо рівняння $x^2y'' + axy' + \left(bx^m + c\right)y = 0$, $m \neq 0,\ (a-1)^2 - 4c \geq 0.$ Записати загальний розв'язок рівняння при $b = 0$. Вважаючи $b \neq 0$ зробити в рівнянні заміну шуканої функції $y(x) = x^{\frac{1-a}{2}}u(x)$ і потім заміну незалежної змінної $t = \frac{2}{m}\sqrt{b}x^{\frac{m}{2}}$. Записати загальний розв'язок одержаного при цьому рівняння, а також загальний розв'язок вихідного рівняння при $b \neq 0$.

Варіант 5. Заміною незалежної змінної звести рівняння $x^2y'' + xy' + \left(\lambda x^2 - \nu^2\right)y = 0, \quad \lambda > 0$, до рівняння Бесселя. Відтак записати загальний розв'язок одержаного рівняння. Розглянути випадок $\nu^2 = \dfrac{1}{4}$ і показати, що тоді будь-який розв'язок рівняння має безліч нулів на $\mathbb{R}^+$.

Варіант 6. Використовуючи заміну незалежної змінної $t = x^2$, записати загальний розв'язок рівняння $\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + \lambda\left(\lambda + 1\right)y = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Варіант 7. Заміною незалежної змінної звести рівняння $x^2y'' + xy' + 4\left(x^4 - \nu^2\right)y = 0$, до рівняння Бесселя. Відтак записати його загальний розв'язок. Чи має це рівняння розв'язки обмежені при $x \to 0+$?

Варіант 8. Використовуючи заміну незалежної змінної $t = \dfrac{2\sqrt{a}}{\lambda} e^{\frac{\lambda x}{2}}$, розв'язати рівняння $y'' + ae^{\lambda x}y = 0, \ a > 0, \quad \lambda \neq 0$. Чи має рівняння розв'язки обмежені на $\mathbb{R}$?

Варіант 9. В рівнянні $x\left(x^3 + 1\right)y'' + \left(x^3 - 1\right)y' - x^2y = 0$ зробити заміни незалежної змінної $t = -x^3$ і $s = x^3 + 1$. Записати загальний розв'язок кожного з одержаних рівнянь. Порівняти результати. Записати загальний розв'язок вихідного рівняння.

Варіант 10. Для рівняння $\left(1 - x^2\right)y'' + (ax + b)y' + cy = 0; \ a, b, c \in \mathbb{R}$ підібрати лінійну заміну незалежної змінної $x = \alpha t + \beta$ так, аби одержане для функції $y = y(t)$ рівняння було гіпергеометричним. Відтак записати загальний розв'язок вихідного рівняння при $a = 1, \ b = 2, \quad c = 3$.

Варіант 11. В рівнянні $y'' + 3y' + \left(4e^{2x} + 2\right)y = 0$ зробити заміну невідомої функції $y = e^{-\frac{3}{2}x}z$, потім заміну незалежної змінної $t = 2e^x$. Відтак записати загальний розв'язок одержаного і вихідного рівнянь.

Варіант 12. Записати загальний розв'язок рівняння $x\left(x - 1\right)y'' + \left(3x - \dfrac{1}{2}\right)y' - 15y = 0$ при $\left|x\right| < 1$. Чи має це рівняння нетривіальні розв'язки обмежені на проміжку [0,1]?

9 Коливність і крайові задачі

Література: [1, гл. 3, § 2, 4], [2, гл. 3, § 5], [3, гл. 6, § 2]

Задача 9.1.

Довести, що кожен розв'язок рівняння є коливним на відрізку $[0,9]$, та оцінити відстань між двома послідовними нулями на цьому відрізку.

1. $y'' + 2y' + \left(1 + e^{x}\right) y = 0.$

2. $(x+1)y'' + 2y' + (x+1)\left(x^{2} + 1\right) y = 0.$

3. $\left(x^{2} + 1\right) y'' + 4xy' + 43y = 0.$

4. $y'' + 2\mathrm{th}x\, y' + \left(1 + \mathrm{ch}x\right) y = 0.$

5. $(x+1)^{2} y'' - 2(x+1)y' + \left(x^{3} + 5x^{2} + 7x + 5\right) y = 0.$

6. $(x+1)^{2} y'' - 2(x+1)y' + 51y = 0.$

7. $y'' - 6y' + \left(9 + e^{2x}\right) y = 0.$

8. $(x+1)^{2} y'' - 2(x+1)y' + \left(x^{4} + 2x^{3} + 2x^{2} + 2x + 3\right) y = 0.$

9. $(x+1)\left(x^{2} + 1\right) y'' + 2\left(x^{2} + 1\right) y' + 82(x+1)y = 0.$

10. $(x+5)y'' + 2y' + \left(x^{2} + 8x + 15\right) y = 0.$

11. $y'' - 2xy' + (x+1)^{2} y = 0.$

12. $y'' - 2e^{x} y' + e^{2x} y = 0.$

Задача 9.2.

Знайти розв'язок крайової задачі. Вказати множину значень параметрів, при яких цей розв'язок існує.

1. $y'' + \omega^2 y = \sin \mu x, \quad y(0) = a, \; y(l) = b, \quad \omega, \mu, l > 0.$

2. $y'' + \nu^2 y = Hx, \quad y(0) = a, \quad y(l) = b, \quad \nu, H, l > 0.$

3. $y'' + \omega^2 y = 1, \quad y(0) = a, \quad y'(l) = b, \quad \omega, l > 0.$

4. $x^2 y'' + y = 0, \quad y(\alpha) = a, \quad y'(\beta) = b, \quad 0 < \alpha < \beta.$

5. $y'' + 2y' + \alpha y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(l) = b, \quad \alpha \geq 1, \; l > 0.$

6. $y'' + 4y' = x, \quad y(1) = a, \quad y(2) + \delta y'(2) = 0.$

7. $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}, \quad y(0) - hy'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

8. $x^2 y'' - \alpha y = 0, \quad y(a) = b, \quad y(+\infty) = 0, \quad a > 0.$

9. $y'' + 2hy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 2.$

10. $y'' - y = e^{\alpha x}, \quad y(+\infty) = 0, \quad y(l) - y'(l) = 1, \quad l > 0.$

11. $y'' - y' - \alpha y = 0, \quad y(+\infty) = 0, \quad y'(l) = b, \quad l > 0.$

12. $y'' + ay = 1, \quad y(0) = b, \quad y(1) = 0.$

Задача 9.3.

Побудувати функцію Гріна крайової задачі та записати з її допомогою розв'язок крайової задачі.

1. $x^2 y'' + 2xy' = f(x), \qquad y'(1) + y(1) = 0, \quad y'(2) = 0.$

2. $y'' + y' = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

3. $y'' - y = f(x), \qquad y'(0) = 0, \quad y'(2) + y(2) = 0.$

4. $y'' - 2y' + y = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) - y(1) = 0.$

5. $x^2y'' + 2xy' = f(x), \qquad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0.$

6. $x^2y'' - 2y = f(x), \qquad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$

7. $xy'' - y' = f(x), \qquad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0.$

8. $y'' + y = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$

9. $y'' + 2y' + 2y = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

10. $y'' + y = f(x), \qquad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

11. $x^2y'' - 2xy' + 2y = f(x), \qquad y(-1) = 0, \quad y'(0) = 0.$

12. $xy'' + y' = f(x), \qquad y'(1) = 0, \quad y(e) = 0.$

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 4
Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь і теорія стійкості

10 Системи диференціальних рівнянь

Література: [1, гл.2, § 3 – 4], [2, гл.4, § 3 – 4], [3, гл.7, § 2], [6, гл. 3, § 21, 22]

Задача 10.1.

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$y' = Ay + f(t), \tag{1}$$

де A – стала матриця розміру 3×3; $y,\ f$ – тривимірні вектори.

1) Знайти загальний розв'язок відповідної однорідної системи $y' = Ay$.

2) Виділити множину обмежених на $\mathbb{R}^+$ розв'язків однорідної системи.

3) Чи буде однорідна система з вашого варіанту топологічно еквівалентною системі з наступного варіанту (для останнього варіанту – системі з першого варіанту)?

4) Знайти матрицю e^{At}, обчислити $\det e^{-A}$.

5) Знайти розв'язок неоднорідної системи (1), використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} + 2e^{t} \\ 2e^{3t} + e^{t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 3e^{2t} \\ e^{2t} + 1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\cos t \\ -\sin t + e^{t} \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t + e^{-t} \\ 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ -e^{t} - 5e^{-2t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-4t} \\ 2 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} -e^{t} \\ 5e^{t} + 1 \\ 3e^{t} \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 2\operatorname{sh} t \\ 2e^{t} \end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix} 24 \\ -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Задача 10.2.

Використовуючи метод варіації довільних сталих, знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + \dfrac{2e^{-2t}\ln t}{t}, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + \dfrac{e^{t}}{\sin 3t}, \\ \dot{y} = 6x + 4y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 4y - \dfrac{e^{t}}{t^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 13y, \\ \dot{y} = -x + 4y - e^{t}\mathrm{ctg}\,2t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y + e^{3t}\sqrt{t}, \\ \dot{y} = 2x + y - \dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2e^{-t}}{\cos t}, \\ \dot{y} = 5x + 2y - \dfrac{3e^{-t}}{\cos t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + e^{-3t}t^{-\frac{3}{2}}, \\ \dot{y} = 2x - 5y - e^{-3t}t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y + \dfrac{5e^{t}}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x + 4y - \dfrac{3e^{t}}{\cos t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y - \dfrac{2e^{-t}\ln t}{t}, \\ \dot{y} = -3x + 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 6y, \\ \dot{y} = -3x + 2y + \dfrac{3e^{-t}}{\cos 3t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}\ln t, \\ \dot{y} = -x + 3y - e^{2t}\ln t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y - e^{-t}\mathrm{tg}\,2t, \\ \dot{y} = -13x + 2y. \end{cases}$

11 Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь

Література: [1, гл.1, § 9, гл.5, § 5 – 6], [2, гл.5], [3, гл.2, § 2; гл.7, § 6]

Задача 11.1.

Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь:

- стійкий;
- асимптотично стійкий;
- нестійкий.

Зобразити графічно знайдені множини параметрів на площині $0ab$.

1. $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = -x + (a-b)y - az. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = z, \\ \ddot{z} = -x + (1-b)y - az. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -x - by + (b-a+2)z, \\ \dot{z} = -x - by + (b-a)z. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = bx - (b+1)y - az. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = ax + by - (a+1)z. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = -x + (a-b)y + (1-a)z. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \dot{x} = -x + by + az, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -x + (b-1)y + az. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -x + ay + bz. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = -x - (b+a)y + az. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} \dot{x} = -x - by + (1-a)z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -x + by + (1-a)z. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} \dot{x} = -z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = -x + (b+a-1)y + az. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - z, \\ z' = x + ay - bz. \end{cases}$$

Задача 11.2.

1) Знайти всі положення рівноваги системи диференціальних рівнянь, для кожного з положень рівноваги записати відповідну систему першого наближення.
2) Дослідити на стійкість усі положення рівноваги.
3) Наближено зобразити на фазовій площині фазові траєкторії в околах положень рівноваги.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - y - 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y^2 + x^2 - 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = y + \sqrt{2x^2 + 1}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - xy + 12, \\ \dot{y} = x^2 - xy - 28. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y + xy - 6, \\ \dot{y} = xy + x + y - 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 - 9, \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy - 15, \\ \dot{y} = y^2 + xy - 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 - 65, \\ \dot{y} = x^2 y + y^2 x - 20. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy - 4x - 8. \end{cases}$

Задача 11.3.

1) За допомогою методу відокремлення змінних побудувати функцію Ляпунова.
2) Дослідити стійкість нульовий розв’язок системи.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y, \\ \dot{y} = -4x + y^3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x^5 - 3y, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^3 - y, \\ \dot{y} = 2x + 7y^5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^5, \\ \dot{y} = -3x - y^5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3 - y, \\ \dot{y} = 5x - 3y^3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x^3 - y, \\ \dot{y} = 3x - 3y^5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3 - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 3y, \\ \dot{y} = 2x - y^5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 4y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 5y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 2y^5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^5 + 3y, \\ \dot{y} = -4x + 2y^3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x^5, \\ \dot{y} = -3x - y^3. \end{cases}$

12 *Перші інтеграли систем диференціальних рівнянь*

Література: [1, гл.5, § 8, гл. 6]; [2, гл.5, § 5; додаток 1]

Задача 12.1.

Для консервативної системи з одним ступенем вільності

$$\ddot{x} + F(x) = 0$$

1) знайти потенціальну та повну механічну енергію частинки;
2) побудувати фазовий портрет системи;
3) з'ясувати питання про існування гомо- та гетероклінних кривих.

1. $\ddot{x} + x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0.$

2. $\ddot{x} + x^3 + x^2 - 2x = 0.$

3. $\ddot{x} - x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0.$

4. $\ddot{x} - x^3 + x^2 + 4x - 4 = 0.$

5. $\ddot{x} + x^3 - x = 0.$

6. $\ddot{x} - x^3 + 7x + 6 = 0.$

7. $\ddot{x} + x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0.$

8. $\ddot{x} + x^3 - x^2 - 2x = 0.$

9. $\ddot{x} - x^3 - 6x^2 - 11x - 6 = 0.$

10. $\ddot{x} - x^3 - x^2 + 4x + 4 = 0.$

11. $\ddot{x} + x^3 - 4x = 0.$

12. $\ddot{x} - x^3 + 7x - 6 = 0.$

Задача 12.2.

Знайти загальний розв'язок рівняння в частинних похідних і виділити розв'язок, що задовольняє вказаним умовам.

1. $xy^3 \dfrac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = y^3 x, \qquad x = -z, \;\; y = z^2.$

2. $(x - z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y - z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z, \qquad x - y = 2, \;\; z + 2x = 1.$

3. $y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + yz \dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0, \qquad x - y = 0, \;\; x - yz = 1.$

4. $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y, \quad z=y=-x.$

5. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=yx, \quad x=a, \quad z^2+y^2=a.$

6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2, \quad y=-2, \quad z=x-x^2.$

7. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y), \quad x=1, \quad zy+1=0.$

8. $(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1-z^2, \quad x=0, \quad z=y^2.$

9. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-yx, \quad x=2, \quad z=y^2+1.$

10. $x^2z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=y+x, \quad x=1, \quad z=2y+1.$

11. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, \quad xz=1, \quad 2z=y+x.$

12. $(y+2z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2, \quad x=z, \quad y=x^2.$

Навчальне видання

Диференціальні рівняння. Завдання кредитно-модульного контролю для студентів механіко-математичного факультету

Упорядники:
Парасюк Ігор Остапович
Станжицький Олександр Миколайович
Капустян Олексій Володимирович
Чернікова Ольга Сергіївна
Сукретна Анна Василівна
Ловейкін Юрій В'ячеславович
Задоянчук Ніна Василівна

Комп'ютерний набір, оформлення та верстка: Ловейкін Ю.В., Сукретна А.В.

Відділ оперативної поліграфії механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Наклад: 300 прим.