Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Гой Т. П., Махней О. В.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів напрямів підготовки
«фізика», «прикладна фізика»
вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2012

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика» (протокол № 9 від 28 квітня 2009 р.).

Рецензенти:

Каленюк П. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет «Львівська політехніка»),

Сторож О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет імені Івана Франка),

Тацій Р. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Г59 Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник / Гой Т. П., Махней О. В. – Івано-Франківськ : Голіней, 2012. – 356 с.

У вигляді курсу лекцій викладено основи теорії звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, а також деякі ідейно близькі питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості, елементи варіаційного числення). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних та інтегральних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів. У зв'язку з цим наведені численні приклади з фізики, механіки, інших наук. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика». Може бути корисним для студентів технічних напрямів підготовки.

ISBN ???

© Гой Т. П., Махней О. В., 2012.
© Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2012.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні та інтегральні рівняння й методи дослідження їх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні та інтегральні рівняння» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з фізики, механіки, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, машинобудування тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних та інтегральних рівнянь для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика», але може бути використаний також для студентів інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу за допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 7 розділів: «звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «системи звичайних диференціальних рівнянь», «рівняння з частинними похідними першого порядку», «основи теорії стійкості», «інтегральні рівняння», «основи варіаційного числення».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно – передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» – це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції та відповідного практичного заняття.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами. Кінець розв'язаних прикладів та задач позначається символом ■, але у тих випадках, де була можливість «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми (у поєднанні з іншими збірниками). Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені поіншому або більш повно.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

Автори висловлюють щиру вдячність рецензентам професорам П. І. Каленюку, О. Г. Сторожу, Р. М. Тацію, а також доценту М. І. Копачу за корисні критичні зауваження й методичні поради, які безумовно сприяли покращенню якості рукопису. Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника, за адресою:

76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника,
кафедра диференціальних рівнянь і прикладної математики

Розділ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.
2. Основні означення й поняття.
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих.

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Використання математичних моделей є одним з найбільш ефективних методів вивчення різноманітних фізичних процесів і явищ. Математичні моделі допомагають зрозуміти фізичний процес, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики його стану, з їх використанням можна передбачити подальший розвиток процесу без натуральних експериментів, проведення яких у багатьох випадках є надто дорогим або просто неможливим.

Вивчаючи фізичні явища, не завжди вдається безпосередньо знайти закони або формули, які пов'язують між собою величини фізичного процесу, але часто можна виявити певну функціональну залежність між невідомими характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять похідні невідомих характеристик процесу. Такі рівняння називають ***диференціальними***, а знаходження невідомої функції (розв'язку) – ***інтегруванням*** диференціального рівняння.

Розв'язування задачі дослідження певного фізичного явища чи процесу можна розділити на два етапи:

1. Складання диференціального рівняння, яке при певних припущеннях описує сутність явища чи процесу.

2. Знаходження розв'язку диференціального рівняння, тобто функціональної залежності між величинами, які характеризують фізичне явище.

Для складання диференціальних рівнянь природничих наук використовують фізичний зміст першої та другої похідної, а також додаткові умови та закони, притаманні конкретній галузі науки, такі як-от:

– другий закон Ньютона[1)] ($F = ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло);

– закон всесвітнього тяжіння ($F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, де m_1, m_2 – маси двох тіл, r – відстань між ними);

– закон Кірхгофа (алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю);

– закон Фур'є ($q = -\lambda(T)\frac{dT}{dx}$, де q – питомий потік теплоти, $\lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності середовища, $\frac{dT}{dx}$ – швидкість зміни температури T);

– закон Ньютона про охолодження тіла (швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та середовища);

– закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу);

– закон Гука (сила пружності пружини пропорційна її видовженню) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Зауважимо, що багато розділів фізики значною мірою можна розглядати як різні розділи теорії диференціальних рівнянь. Перш за все це виявляється в аналітичній механіці, яку багато вчених розглядають як математичну дисципліну. Основним апаратом сучасної теоретичної фізики також є диференціальні рівняння.

[1)] Бібліографічні дані про вчених, прізвища яких зустрічаються у посібнику, можна знайти на стор. 345.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до диференціальних рівнянь.

Задача 1. *Матеріальна точка P рухається по прямій, яку приймемо за вісь x, і у момент часу t займає положення x (рис. 1.1). Відома швидкість руху $v(t)$. Знайти закон руху точки, тобто залежність x від t, $x = x(t)$, якщо відомо, що у момент часу $t = t_0$ точка P займає положення $x = x_0$.*

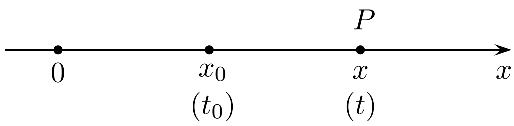

Рис. 1.1

Розв'язання. З курсу математичного аналізу відомо, що швидкість точки у момент часу t дорівнює похідній $x'(t)$ (фізичний зміст похідної), тобто

$$x'(t) = v(t). \tag{1.1}$$

Співвідношення (1.1) є диференціальним рівнянням руху точки P і задає закон її руху в диференціальній формі. Інтегруючи рівняння (1.1), одержуємо

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + C, \tag{1.2}$$

де C – довільна стала (стала інтегрування).

За умовою задачі $x(t_0) = x_0$. Підставляючи в (1.2) $x = x_0$ і $t = t_0$, одержуємо, що $C = x_0$. Отже, шуканим розв'язком (рухом) є

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + x_0. \blacksquare$$

Задача 2. *Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 400$ м/с, пробиває стіну товщиною $h = 0{,}2$ м і вилітає з неї зі швидкістю*

$v_1 = 100$ *м/с. Вважаючи, що сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості кулі, знайти тривалість руху кулі у стіні.*

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона $ma = F$, де m – маса кулі, $a = \frac{dv}{dt}$ – її прискорення (похідна швидкості v за часом t), F – сила, яка діє на кулю. За умовою задачі $F = -kv^2$, де знак мінус вказує на те, що сила опору стіни спрямована у бік, протилежний до напряму швидкості кулі. Отже, маємо таке диференціальне рівняння:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2. \tag{1.3}$$

З (1.3) одержуємо:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int dt + C \quad \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t + C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m}{kt - Cm}.$$

З умови $v(0) = v_0 = 400$ знаходимо $C = -\frac{1}{400}$, а тому

$$v = \frac{400m}{400kt + m}. \tag{1.4}$$

Якщо тепер підставити у рівняння (1.4) $t = T$ (T – шуканий час), а також $v = v_1 = 100$, то

$$\frac{4m}{400kT + m} = 1 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3k_1}{400},$$

де позначено $k_1 = m/k$. Сталу k_1 знайдемо з рівняння (1.4), яке, враховуючи, що $v = \frac{dx}{dt}$, запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{400k_1}{400t + k_1}.$$

Звідси

$$x = \int \frac{400k_1}{400t + k_1}dt + C \quad \Rightarrow \quad x = k_1 \ln(400t + k_1) + C.$$

Якщо $t = 0$, то $x = 0$ (куля входить у стіну), а тому $C = -k_1 \ln k_1$. Якщо $t = T$, то $x = h = 0{,}2$ (куля вилітає із стіни), а тому, враховуючи, що $T = 3k_1/400$, одержуємо:

$$0{,}2 = k_1 \ln 4k_1 - k_1 \ln k_1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{0{,}2}{\ln 4}.$$

Таким чином,

$$T = \frac{3k_1}{400} = \frac{3 \cdot 0{,}2}{400 \ln 4} \approx 0{,}001 \text{ с.} \ \blacksquare$$

Задача 3. *Визначити форму дзеркала, яке спрямований на нього потік паралельних променів збирає в одну точку.*

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною Oxy, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox – паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y = f(x)$ (рис. 1.2).

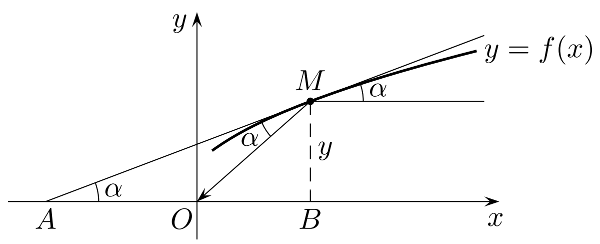

Рис. 1.2

Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (на рисунку цей кут позначено через α). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка кривої $y = f(x)$. Проведемо у цій точці дотичну MA до кривої $y = f(x)$. Трикутник MOA рівнобедрений. Оскільки $y' = \operatorname{tg} \alpha$ (геометричний зміст похідної), то, вважаючи, що $y > 0$, одержуємо

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

або, якщо помножити чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x^2 + y^2} - x$,

$$y' = \frac{1}{y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right). \tag{1.5}$$

Диференціальне рівняння (1.5) описує форму перерізу дзеркала площиною Oxy. З (1.5) одержуємо:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+y^2}=x+C,$$

де C – довільна стала. Таким чином, маємо рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy: $y^2=2Cx+C^2$. З геометричної точки зору одержали сім'ю парабол з вершинами у точках $(-C/2;0)$. Отже, поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox має вигляд

$$y^2+z^2=2Cx+C^2,$$

тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання. ■

Зауважимо, що якщо параболічне дзеркало, рівняння якого отримане у задачі 3, спрямувати на Сонце, то усі відбиті промені проходитимуть через фокус, де матимемо високу температуру (звідки і назва focus – з латині вогнище). Параболічні дзеркала використовують також у радіолокації.

Задача 4. *Знайти закон розпаду радію, якщо відомо, що швидкість розпаду прямо пропорційна його масі і через 1600 років початкова маса радію зменшиться вдвічі.*
Розв'язання. Нехай m_0 – початкова маса радію, $m(t)$ – маса радію у момент часу t. Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон розпаду можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$m'(t)=-k\,m(t), \tag{1.6}$$

де $k>0$, k – коефіцієнт пропорційності (знак мінус вказує на те, що маса радію з часом зменшується, а тому $m'(t)<0$).

Диференціальне рівняння (1.6) разом з умовою $m(0)=m_0$ є математичною моделлю розпаду радію. Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що $m'(t) = \frac{dm}{dt}$:

$$\frac{dm}{dt} + km = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{m} + k\,dt = 0 \quad \Rightarrow$$
$$d\,(\ln m + kt) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln m + kt = C_1 \quad \Rightarrow \quad m = e^{C_1 - kt}.$$

Оскільки C_1 – довільна стала, то можна позначити e^{C_1} через C. Отже,

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

За умовою задачі $m(0) = m_0$, а тому $C = m_0$. З умови $m(1600) = 0{,}5\,m_0$ знаходимо коефіцієнт k:

$$m(1600) = m_0 e^{-1600k} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5\,m_0 = m_0 e^{-1600k} \quad \Rightarrow$$
$$k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0{,}00043.$$

Отже, закон зміни маси радію від часу наближено подається формулою

$$m(t) = m_0 e^{-0{,}00043t}. \ \blacksquare$$

2. Основні означення й поняття. ***Звичайним диференціальним рівнянням*** називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.7}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = y(x)$ і похідними $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Позначення, які використані у означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція – через s, f, F тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння.

У рівнянні n-го порядку (1.7) вважається, що похідна n-го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, а наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$$y = xy' + y'^3, \quad y'' + y = \cos x,$$
$$y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y^{(10)} = x.$$

Перше з наведених рівнянь має перший порядок, друге рівняння – другий порядок, третє рівняння – четвертий порядок, четверте – десятий порядок.

Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають ***рівнянням з частинними похідними***. Наведемо приклади таких рівнянь:

$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ – рівняння, яке описує рух частинок за інерцією;

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – рівняння, яке описує закон поширення у часі та розподілу за довжиною температури нагрітого стрижня;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – рівняння, яке описує різноманітні коливальні процеси;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$ – рівняння, якому задовольняє потенціал $u(x, y, z)$ електростатичного поля, де $\rho(x, y, z)$ – густина зарядів.

Надалі, якщо не буде сказано про інше, розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Розв'язком рівняння (1.7) на деякому інтервалі (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння (1.7). Це означає, що для всіх $x \in (a, b)$ справджується тотожність

$$F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\Big) \equiv 0.$$

Наприклад, функція $y = e^x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' - y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Окрім неї, розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також $y = e^{-x}$, $y = 3e^x$, $y = 3e^x + 4e^{-x}$ і, взагалі, всі функції вигляду $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Пізніше буде встановлено, що звичайне диференціальне рівняння n-го порядку у загальному випадку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних сталих. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі $y = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$, де $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою***. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають ***сім'єю інтегральних кривих***. Наприклад, розв'язки рівняння $y'' = 2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y = x^2 + C_1x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у ***квадратурах*** (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння зінтегроване ***у скінченному вигляді***. Розглядатимемо в основному саме такі рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для представлення їх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків та дослідження їх властивостей.

3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Нехай маємо рівняння сім'ї кривих, залежної від одного дійсного параметра C:

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.8}$$

Побудуємо диференціальне рівняння сім'ї кривих (1.8), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім'ї. Для цього здиференціюємо за змінною x обидві частини рівності (1.8), враховуючи, що $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.9}$$

Якщо співвідношення (1.9) не містить C, то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна усім кривим сім'ї (1.8) (наприклад, якщо $y = x+C$, то $y' = 1$). У загальному випадку рівність (1.9) залежатиме від параметра C. Тоді, виключаючи цей параметр із системи (1.8), (1.9), одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.10}$$

Рівняння (1.10) виражає спільну властивість кривих (1.8) незалежно від сталої C, його називають ***диференціальним рівнянням сім'ї кривих*** (1.8).

Приклад 1. *Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і мають осі симетрії, паралельні до осі ординат.*

Розв'язання. Сім'ю парабол з умови задачі можна описати за допомогою формули $y = x^2 - Cx$, де C – довільна стала. Складемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x - C \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу C. Для цього знайдемо C з першого рівняння системи і підставимо у друге:

$$C = \frac{x^2 - y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^2 + y}{x}.$$

***Відповідь*:** $xy' = x^2 + y$.

Аналогічно, маючи сім'ю кривих $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, залежну від n довільних сталих, можна при певних умовах одержати диференціальне рівняння, для якого згадані криві будуть інтегральними. Для цього потрібно здиференціювати співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ n разів за змінною x і виключити з нього та отриманих внаслідок диференціювання n рівнянь сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$. У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, яке виражатиме загальну властивість цих кривих.

Приклад 2. *Знайти диференціальне рівняння сім'ї усіх кіл одиничного радіуса на площині.*

Розв'язання. Рівнянням усіх кіл радіуса 1 з центром у довільній точці площини (C_1, C_2) є

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1. \tag{1.11}$$

Двічі здиференціюємо (1.11):

$$\begin{gathered} 2(x - C_1) + 2(y - C_2)y' = 0, \\ 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0. \end{gathered}$$

Виключаючи тепер з системи

$$\begin{cases} (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1, \\ x - C_1 + (y - C_2)y' = 0, \\ 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0 \end{cases}$$

сталі $C_1,\ C_2$, одержуємо

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'\right)^2 + \left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(1 + y'^2\right)^3 = y''^2. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [5, с. 6 – 12], [14, с. 6 – 15], [16, с. 3 – 13, 22 – 25], [17, с. 9 – 19], [19, с. 4 – 8].

Питання до лекції 1

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням? Чим звичайні диференціальні рівняння відрізняються від рівнянь з частинними похідними?
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?
3. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння? Як називають операцію знаходження розв'язків диференціального рівняння?

4. Яку криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння?

5. У чому полягає основна задача теорії інтегрування диференціального рівняння?

6. У чому полягає математичне моделювання реальних фізичних процесів, яка його роль у вивченні процесу? Наведіть приклади використання диференціальних рівнянь для математичного моделювання фізичних процесів та явищ.

7. Який вигляд має рівняння сім'ї кривих, залежних від одного параметра (n параметрів)? Як знайти диференціальне рівняння заданої сім'ї однопараметричних кривих (n-параметричних кривих)?

Вправи до лекції 1

1. Перевірте, чи є функції

$$\text{а) } y = \cos x + \sin x + 5e^{-x}; \quad \text{б) } y = x \cdot \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt; \text{ в) } y = 3x + \ln x + 2$$

розв'язками відповідних диференціальних рівнянь

$$\text{а) } y' + y = 2\cos x; \quad \text{б) } xy' = y + x\sin x; \quad \text{в) } x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0.$$

2. Знайдіть криві, у яких кожний відрізок дотичної, який лежить між координатними осями, точкою дотику ділиться навпіл.

3. Складіть диференціальне рівняння сім'ї кривих:

$$\text{а) } x^2 + y^2 = C; \quad \text{б) } y = \cos(x + C); \quad \text{в) } y = C_1 x^2 + C_2 e^x.$$

4. Складіть диференціальне рівняння:

а) усіх кіл, які дотикаються до осі абсцис;

б) усіх прямих на площині;

в) парабол, які проходять через точку (1; 2) і мають вісь, паралельну до осі абсцис.

5. Знайдіть криві, нормалі до яких в усіх точках проходять через початок координат.

Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку.
4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. Метод ізоклін.
5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків.

1. Основні означення й поняття. Диференціальне рівняння першого порядку в загальному випадку можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція від x, $F(x, y, y')$ – задана функція змінних x, y, $y' = \frac{dy}{dx}$.

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

Таку форму запису диференціального рівняння називають ***нормальною***.

Найпростішим з диференціальних рівнянь у нормальній формі є рівняння $y' = f(x)$. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому інтервалі (a, b), то, як відомо з математичного аналізу, $y = \int f(x)dx + C$, де C – довільна стала.

У багатьох випадках рівняння (2.2) зручно записувати як $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ або у вигляді $dy - f(x, y)dx = 0$, який є окремим випадком рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.3}$$

де $M(x, y)$, $N(x, y)$ – відомі функції (***коефіцієнти рівняння***). Рівняння (2.3) зручне тим, що змінні x і y у ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію від іншої.

Розв'язком диференціального рівняння (2.2) на інтервалі (a, b) називають неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = y(x)$, яка перетворює рівняння (2.2) у тотожність, тобто $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Розв'язок рівняння (2.2) може бути заданий не тільки явно, тобто як $y = y(x)$, але й у неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$ (у вигляді, не розв'язаному відносно y) або у параметричній формі: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Наприклад, функція $y = \sqrt{1 - x^2}$, де $x \in (-1; 1)$, є розв'язком рівняння $y' = -x/y$, однак цей самий розв'язок можна подати у неявному вигляді $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, а також у параметричній формі $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 < t < \pi$.

2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Вже зазначалось, що диференціальні рівняння зазвичай мають безліч розв'язків. Однак у багатьох задачах теоретичного і прикладного характеру часто серед усіх розв'язків диференціального рівняння (2.2) потрібно знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.4}$$

де x_0, y_0 – задані числа, тобто розв'язок, який для заданого значення незалежної змінної $x = x_0$ набуває заданого значення y_0.

Задачу відшукання розв'язку рівняння (2.2), який задовольняє умову (2.4), називають ***задачею Коші*** (або ***початковою задачею***). Умову (2.4) називають ***початковою***, а числа x_0, y_0 – ***початковими даними*** задачі (2.2), (2.4).

З геометричної точки зору задача Коші (2.2), (2.4) полягає у відшуканні інтегральної кривої рівняння (2.2), яка проходить через наперед задану точку (x_0, y_0) площини Oxy.

Відповідь на питання про те, за яких умов задача Коші (2.2), (2.4) має розв'язок, дає теорема Пеано, доведення якої можна знайти, наприклад, в [10, с. 34 – 35].

Теорема 1 (Пеано). *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D площини Oxy, то існує неперервна разом зі своєю* *похідною першого порядку функція* $y = y(x)$, *яка є розв'язком задачі Коші* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, *де* $(x_0, y_0) \in D$.

Однак для багатьох задач важливо знати не тільки факт існування розв'язку диференціального рівняння, але також і те, чи є цей розв'язок єдиним. Відповідь на це питання має виняткове значення як для самої теорії диференціальних рівнянь, так і для багатьох її застосувань. Дійсно, якщо знати, що розв'язок задачі Коші єдиний, то, знайшовши розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, дослідник може бути впевненим, що інших розв'язків, які задовольняють ті самі початкові умови, немає. У задачах природознавства це приводить до одержання єдиного закону явища, який визначається тільки диференціальним рівнянням і початковими умовами. Ілюстрацією до цього можуть бути задачі фізичного змісту з лекції 1.

Виявляється, що умова неперервності функції $f(x, y)$ з теореми Пеано не гарантує єдиності розв'язку задачі Коші (2.2), (2.4). Розглянемо, наприклад, рівняння $y' = 2\sqrt{y}$. Його права частина визначена і неперервна у верхній частині площини Oxy ($y \geqslant 0$). За допомогою підстановки легко переконатись, що інтегральними кривими є півпараболи $y = (x + C)^2$, де $x \geqslant -C$, а також пряма $y = 0$ (вісь Ox). Очевидно, що у кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox єдиність розв'язку порушується, бо через цю точку проходять дві інтегральні криві, а саме: парабола $y = (x - x_0)^2$ і пряма $y = 0$ (рис. 2.1).

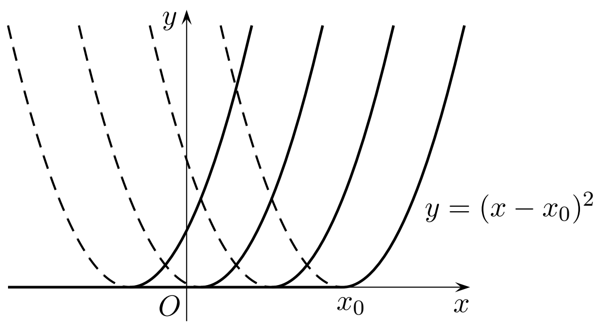

Рис. 2.1

Основною теоремою, яка забезпечує не тільки існування, але й єдиність розв'язку задачі Коші, є теорема Коші, яка у іншій постановці буде доведена на лекції 6.

Теорема 2 (Коші). *Нехай функція $f(x, y)$ визначена у прямокутнику*

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}, \quad a, b > 0$$

і задовольняє у ньому такі умови:

1) $f(x, y)$ *неперервна, а, отже, й обмежена, тобто*

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad M > 0;$$

2) *частинна похідна* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *існує та обмежена.*

Тоді задача Коші (2.2), (2.4) *має єдиний розв'язок принаймні на відрізку* $|x - x_0| \leqslant h$, *де* $h = \min(a,\, b/M)$.

За виконання умов теореми Коші можна гарантувати, що через кожну внутрішню точку області G проходить єдина інтегральна крива.

Одним з методів доведення теореми Коші є метод Пікара, який дає можливість побудувати розв'язок задачі Коші як границю послідовних наближень $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, визначених рекурентними формулами (***формулами Пікара***)

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема Коші має велике значення в теорії звичайних диференціальних рівнянь, бо дозволяє за виглядом правої частини рівняння (2.2) відповісти на питання про існування та єдиність розв'язку цього рівняння при заданих початкових умовах. Це особливо важливо у тих випадках, коли неможливо вказати точну формулу, що визначає розв'язок рівняння, а тому потрібно застосовувати методи наближеного розв'язування диференціального рівняння.

3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку. ***Загальним розв'язком*** диференціального рівняння (2.2) у деякій області G площини Oxy називають функцію

$$y = y(x, C), \tag{2.5}$$

яка залежить від однієї довільної сталої C, якщо:

1) вона є розв'язком рівняння (2.2) для довільного фіксованого значення сталої C;

2) для довільної початкової умови (2.4), де $(x_0, y_0) \in G$, існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x, C_0)$ задовольняє умову (2.4).

Якщо не можна знайти загальний розв'язок у вигляді (2.5), його шукають у неявному вигляді $F(x, y, C) = 0$. Такий розв'язок називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння. Часто загальний інтеграл одержують як $\Psi(x, y) = C$, тобто у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої C. Функцію $\Psi(x, y)$ у цьому випадку називають ***інтегралом*** диференціального рівняння. Аналогічно визначають сім'ю інтегральних кривих (розв'язків) рівняння, залежну від довільної сталої C, у параметричній формі $x = \varphi(t, C)$, $y = \psi(t, C)$ як ***загальний розв'язок у параметричній формі***.

Якщо у точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку проходить декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодної інтегральної кривої (розв'язок не існує). Такі точки називають ***особливими точками*** диференціального рівняння.

Шукати особливі точки потрібно серед точок, у яких мають розрив функція $f(x, y)$ або її частинна похідна $f'_y(x, y)$, а потім, аналізуючи загальний розв'язок, необхідно перевірити, чи будуть ці точки особливими. Така перевірка обов'язкова, бо теорема Коші дає лише достатні умови, а отже, може існувати єдиний розв'язок задачі Коші (2.2), (2.4) навіть тоді, коли в точці (x_0, y_0) не виконується одна або обидві умови теореми.

Розглянемо приклади.

1. $y' = y \sin x + e^x$. Функція $f(x, y) = y \sin x + e^x$ неперервна, а

похідна $f'_y = \sin x$ обмежена в усіх точках площини Oxy. Згідно з теоремою Коші через кожну точку площини Oxy проходить одна інтегральна крива.

2. $y' = \sqrt{1-y^2}$. Права частина визначена і неперервна в усіх точках площини Oxy, де $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Частинна похідна $f'_y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ стає необмеженою, якщо $y \to \pm 1$. Легко переконатись, що кожна з функцій $y = \sin(x+C)$ є розв'язком рівняння. Окрім того, маємо також розв'язки $y = \pm 1$. Таким чином, через кожну точку прямих $y = \pm 1$ проходять принаймні дві інтегральні криві, а тому у точках цих прямих порушується єдиність розв'язку (рис. 2.2).

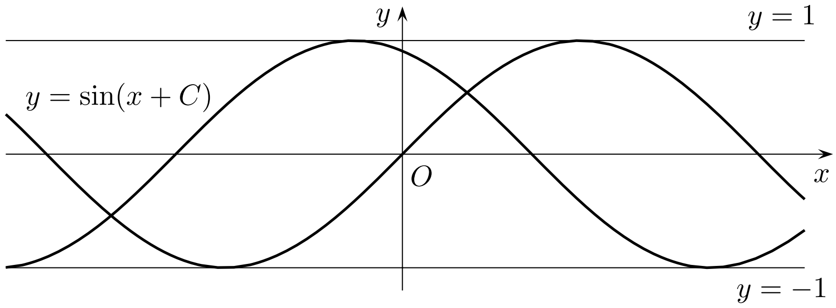

Рис. 2.2

3. $y' = y^{-2}$. У кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox функції $f(x,y) = y^{-2}$, $f'_y = -2y^{-3}$ розривні й необмежені при $y \to 0$, але через кожну таку точку проходить єдина інтегральна крива $y = \sqrt[3]{3(x-x_0)}$. Рисунок інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = y^{-2}$ пропонуємо читачам зробити самостійно.

Частинним розв'язком рівняння (2.2) в області G називають функцію $y = y(x, C_0)$, утворену з загального розв'язку (2.5) при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо кожна точка розв'язку диференціального рівняння є особливою, то такий розв'язок називають ***особливим***. Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному конкретному значенні сталої C.

З геометричної точки зору загальним розв'язком $y = y(x, C)$ є сім'я інтегральних кривих на площині Oxy, яка залежить від однієї довільної сталої C, а частинний розв'язок – це одна інтегральна крива цієї сім'ї, що проходить через задану точку. Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має загальну дотичну з однією з інтегральних кривих. Таку інтегральну криву називають ***обвідною*** сім'ї інтегральних кривих. Наприклад, для рівняння $y' = 2\sqrt{y}$ обвідною є пряма $y = 0$, тобто вісь Ox (рис. 2.1), а для рівняння $y' = \sqrt{1 - y^2}$ обвідними є прямі $y = \pm 1$ (рис. 2.2).

4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. У фізиці часто використовують поняття векторного поля, тобто функції, яка кожній точці деякої області ставить у відповідність певний вектор. Наприклад, вивчаючи течію рідини, кожній точці можна поставити у відповідність вектор швидкості течії у цій точці. Вивчаючи системи електричних або магнітних зарядів, кожній точці ставлять у відповідність вектор сили, з якою ця система діє на одиничний (пробний) заряд, розміщений у згаданій точці; ці вектори утворюють лінії індукції магнітного поля заданої системи зарядів.

Якщо розглядати x і y як декартові координати точки, то диференціальне рівняння (2.2) встановлює зв'язок між координатами довільної точки $M(x, y)$ площини і кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до інтегральної кривої у цій точці (рис. 2.3):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Якщо функція $f(x, y)$ визначена в області G, то кожній точці $M(x, y)$ цієї області відповідає деякий напрям, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x, y)$. Вказуючи цей напрям вектором (для визначеності вважатимемо його одиничним) з початком у точці M, одержимо в області G ***поле напрямів***, визначене рівнянням (2.2) (рис. 2.4).

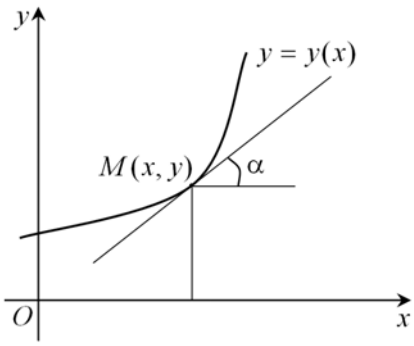

Рис. 2.3

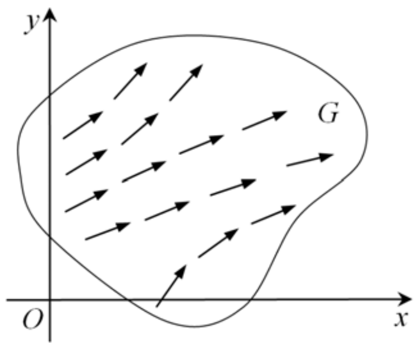

Рис. 2.4

Інтегральна крива, яка проходить через точку $M(x, y) \in G$, має ту властивість, що у кожній її точці напрям дотичної збігається з напрямом поля у цій точці. Тому з геометричної точки зору інтегрування диференціального рівняння (2.2) полягає у знаходженні кривих, дотичні до яких у кожній своїй точці збігаються з напрямом поля.

У фізиці розглядають лінії індукції заданого магнітного поля, тобто лінії, напрями яких у кожній точці збігаються з напрямом цього поля (рис. 2.5). З точки зору теорії диференціальних рівнянь лінії індукції магнітного поля є інтегральними кривими.

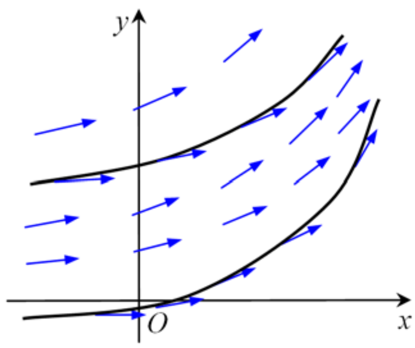

Рис. 2.5

Якщо у деякій точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ стає нескінченно великою, то напрям поля буде паралельний до осі Oy. Якщо $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) перетворюється в невизначеність $0/0$, то через цю точку не проходить жодна інтегральна крива.

Для побудови поля напрямів диференціального рівняння зручно використовувати геометричні місця точок, у яких дотичні до інтегральних кривих мають сталий напрям. Такі лінії називають ***ізоклінами***. Рівняння ізоклін диференціального рівняння (2.2) має вигляд

$$f(x, y) = k, \tag{2.6}$$

де k – довільна стала. Змінюючи в (2.6) значення k, одержимо множину ізоклін в області G. За допомогою ізоклін і відомих сталих кутів α $(k = \operatorname{tg} \alpha)$ нахилу дотичних до інтегральних кривих, які їх перетинають, можна схематично побудувати інтегральні криві диференціального рівняння. Такий метод дослідження диференціальних рівнянь називають ***методом ізоклін***.

За допомогою методу ізоклін можна визначити також такі характерні лінії й області поля інтегральних кривих: області зростання (при $k > 0$), спадання ($k < 0$) інтегральних кривих та лінії їх екстремумів ($k = 0$). Якщо функція $f(x, y)$ у рівнянні (2.2) диференційовна, то за допомогою другої похідної $y'' = f'_x + y' \cdot f'_y = f'_x + f \cdot f'_y$ можна визначити області опуклості та лінії точок перегину інтегральних кривих.

Приклад 1. *За допомогою ізоклін наближено зобразити інтегральні криві рівняння* $y' = x(y - 1)$.

Розв'язання. Згідно з (2.6) рівняння ізоклін має вигляд $x(y - 1) = k$, $k \in \mathbf{R}$. Якщо $k = 0$, то ізоклінами є прямі $x = 0$ і $y = 1$. Вздовж них $y' = \operatorname{tg} \alpha = 0$. Якщо $k \neq 0$, то ізоклінами є гіперболи $y = \frac{k}{x} + 1$. Якщо, наприклад, $k = \pm 1$, то $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$, а, отже, $\alpha = \pm 45°$. Якщо $k = \pm 0{,}5$, то $\alpha = \pm \operatorname{arctg} 0{,}5 \approx \pm 27°$ і т. д. Поле напрямів диференціального рівняння $y' = x(y - 1)$ зображене на рис. 2.6.

Якщо поле напрямів диференціального рівняння побудоване, то для того, щоб накреслити інтегральну криву рівняння, потрібно, як вже зазначалось, взяти на площині будь-яку точку і провести через неї криву так, щоб вона у кожній своїй точці збігалась з напрямом поля, тобто дотична до кривої у кожній точці повинна мати напрям вектора у цій точці. Інтегральні криві заданого рівняння схематично зображені на рис. 2.7. ■

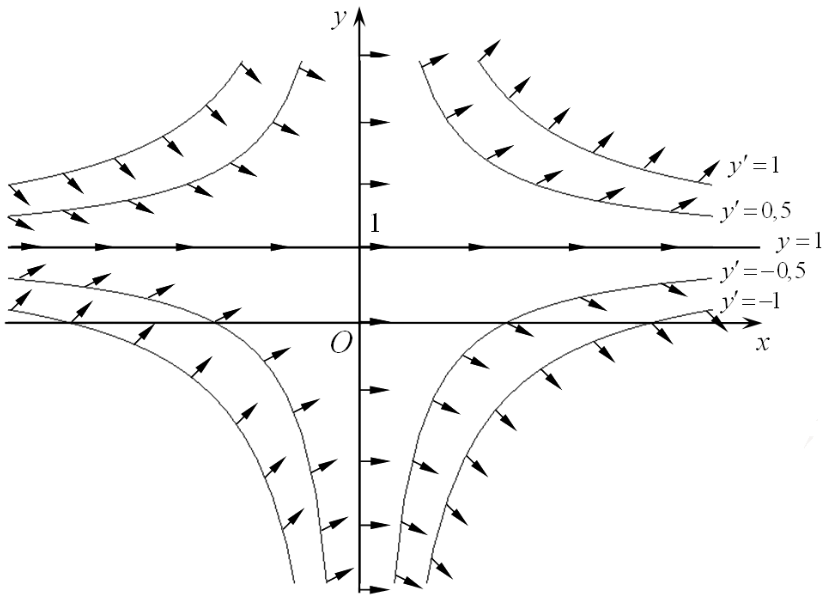
y
1
O
x
$y' = 1$
$y' = 0,5$
$y = 1$
$y' = -0,5$
$y' = -1$

Рис. 2.6

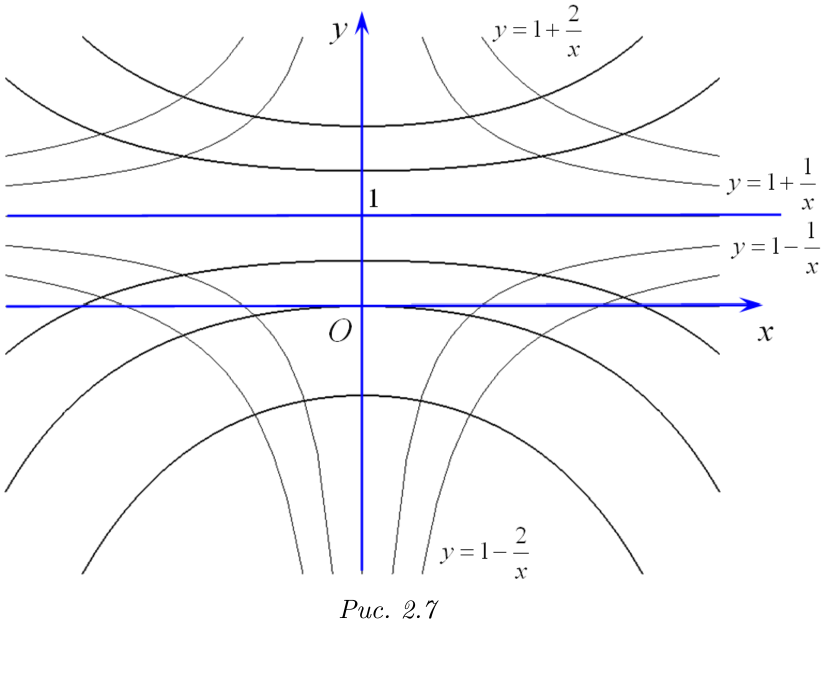
y
$y = 1 + \frac{2}{x}$
$y = 1 + \frac{1}{x}$
1
$y = 1 - \frac{1}{x}$
O
x
$y = 1 - \frac{2}{x}$

Рис. 2.7

5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. Розглянемо задачу про рух матеріальної точки P вздовж осі Ox (задача 1 з лекції 1). Позначимо швидкість точки P через $v(t,x)$ – функцію, залежну від часу t і положення x, яке займає точка у момент часу t. Диференціальним рівнянням цього руху буде

$$\frac{dx}{dt} = v(t,x). \tag{2.7}$$

Будь-який розв'язок $x = x(t)$ рівняння (2.7) визначає певний закон руху (його називатимемо просто ***рухом***). Задача Коші для рівняння (2.7) полягає у знаходженні такого руху $x = x(t)$, який визначається рівнянням (2.7) і задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$.

Руху $x = x(t)$ відповідає на площині (t,x) крива M_0M_1 (рис. 2.8), яка зображує залежність x від t. Цю криву називають ***графіком руху*** (не треба плутати графік руху з траєкторією руху точки P – відрізком P_0P_1 на рис. 2.8).

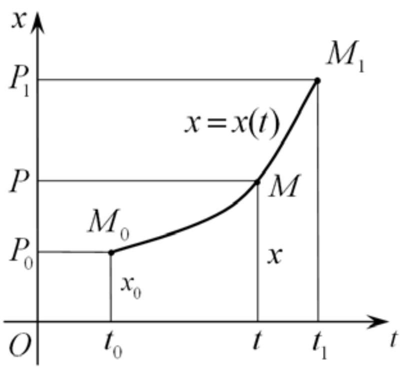

Рис. 2.8

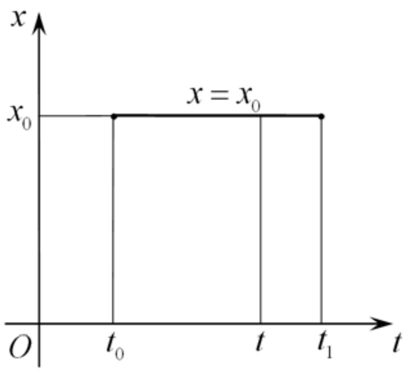

Рис. 2.9

Розглянемо окремі випадки рівняння (2.7):

1) функція $v(t,x)$ не залежить від x, тобто $\frac{dx}{dt} = v(t)$;

2) функція $v(t,x)$ не залежить від t, тобто

$$\frac{dx}{dt} = v(x). \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) називають ***стаціонарним*** або ***автономним***. У ньому швидкість залежить тільки від положення точки.

Якщо права частина рівняння (2.7) перетворюється в нуль при $x = x_0$ для всіх значень t, що розглядаються, тобто швидкість руху у точці x_0 в будь-який момент часу дорівнює нулю, то рівняння (2.7) має розв'язок $x = x_0$ (рис. 2.9). Цьому руху відповідає ***стан спокою***. Траєкторією цього руху є точка x_0, яку називають ***точкою спокою*** або ***точкою рівноваги***.

Рекомендована література: [1, с. 24 – 37, 42 – 48], [9, с. 7 – 14], [10, с. 7 – 9, 31 – 37], [16, с. 14 – 22, 25 – 27, 97 – 104], [19, с. 8 – 25, 76 – 85].

Питання до лекції 2

1. Який загальний вигляд має звичайне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком цього рівняння на заданому інтервалі (a, b)?

2. Яку форму звичайного диференціального рівняння першого порядку називають нормальною? Як звести рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ до нормальної форми?

3. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння першого порядку? Який її геометричний і механічний зміст?

4. Сформулюйте теорему Пеано про існування розв'язку задачі Коші для рівняння $y' = f(x, y)$. Чи можуть інтегральні криві рівняння $y' = f(x, y)$ з неперервною правою частиною перетинатися або дотикатися одна одної?

5. Чи гарантує неперервність функції $f(x, y)$ існування єдиного розв'язку задачі Коші для рівняння $y' = f(x, y)$? Сформулюйте теорему Коші. Чи може існувати єдиний розв'язок цієї задачі при невиконанні будь-якої умови теореми Коші?

6. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ у деякій області існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Який розв'язок називають загальним інтегралом? Що називають загальним розв'язком у параметричній формі?

7. Що таке частинний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$? Який розв'язок називають особливим? Дайте геометричне тлумачення цих розв'язків.

8. Який геометричний зміст мають рівняння $y' = f(x, y)$ та його розв'язки? Як визначити нахил інтегральної кривої у заданій точці

за виглядом правої частини рівняння? Як побудувати поле напрямів, визначене рівнянням $y' = f(x,y)$? У чому полягає геометричний зміст інтегрування цього рівняння?

9. Що таке ізокліна? Яким є рівняння ізоклін для диференціального рівняння $y' = f(x,y)$? Як знайти лінії екстремумів і лінії точок перегину інтегральних кривих цього рівняння? У чому полягає метод ізоклін наближеного розв'язування диференціального рівняння?

10. Який механічний зміст мають диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ та його розв'язки? Як пов'язаний між собою графік руху (розв'язку), визначений цим рівнянням, і траєкторія цього руху? Який рух називають станом спокою, якими є графік і траєкторія цього руху?

Вправи до лекції 2

1. Розв'яжіть задачі Коші:

а) $y' + x^2 = 1$, $y(0) = 3$; б) $y' = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 5$; в) $y' = \ln x$, $y(e) = 1$.

2. Визначіть закон руху тіла, яке рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 5t - t^2$ і $s(2) = 4$.

3. Користуючись теоремою Коші, виділіть області, у яких диференціальні рівняння мають єдиний розв'язок:

а) $y' = \sin y - x^2$; б) $y' = \sqrt{x^2 - y} + \cos x$; в) $y' = 2y\sqrt{y} + x^2$.

4. Знайдіть за допомогою формул Пікара наближення $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ до розв'язку задачі Коші $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.

5. За допомогою методу ізоклін побудуйте поле напрямів диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$ та наближено зобразіть декілька інтегральних кривих.

6. Напишіть рівняння, якому задовольняють:

а) усі точки екстремуму інтегральних кривих рівняння $y' = x^2 y + y$;

б) усі точки перегину інтегральних кривих рівняння $y' = y^2 e^{2x} - 4$.

Лекція 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратурах

План

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.
2. Однорідні рівняння.
3. Рівняння, звідні до однорідних.

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{3.1}$$

де кожен з коефіцієнтів біля диференціалів є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша – тільки від y. Рівняння (3.1) називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними***.

Для інтегрування рівняння (3.1) потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x, а коефіцієнт біля dy – тільки від y. Це досягається діленням обох частин рівняння на добуток $M_2(x)N_1(y)$, причому вважаємо, звичайно, що $M_2(x) \neq 0$ і $N_1(y) \neq 0$. Після цього одержуємо

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{3.2}$$

Рівняння (3.2) можна розглядати як рівність диференціалів, тому інтеграли від диференціалів відрізняються на сталу, тобто

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = C, \tag{3.3}$$

де C – довільна стала, x_0, y_0 – деякі числа з області задання і неперервності коефіцієнтів рівняння (3.2). Співвідношення (3.3) є загальним інтегралом рівняння (3.1). Його можна записати також у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = C,$$

бо визначені інтеграли зі змінної верхньою межею й невизначені інтеграли є первісними для одних і тих самих підінтегральних функцій, а тому відрізняються лише сталими, які можна включити в C.

Якщо a – розв'язок рівняння $M_2(x) = 0$, то $x = a$ є розв'язком рівняння (3.1), бо $dx = 0$, а $M_2(a) = 0$. Так само, якщо b – корінь рівняння $N_1(y) = 0$, то $y = b$ – корінь рівняння (3.1).

Диференціальне рівняння (3.2) можна записати у більш загальному вигляді:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \tag{3.4}$$

Рівняння (3.4) називають ***рівнянням з відокремленими змінними***, а перехід від (3.1) до рівняння вигляду (3.4) – ***відокремленням змінних***.

Загальним інтегралом рівняння (3.4) є

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати також у вигляді

$$y' = f_1(x)f_2(y). \tag{3.5}$$

Для інтегрування рівняння (3.5) потрібно поділити обидві його частини на $f_2(y)$ (якщо $f_2(y) \neq 0$) і помножити на dx (врахувавши, що $dy = y'dx$). Отже,

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx,$$

а після інтегрування одержуємо загальний інтеграл рівняння (3.5):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Тут, як і для рівняння (3.1), якщо $f_2(a) = 0$, то $y = a$ є розв'язком рівняння (3.5).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння*

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0.$$

Розв'язання. Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $x(y^2-1)$. Тоді:

$$\frac{x^2+1}{x}\,dx+\frac{y}{y^2-1}\,dy=0 \quad (x\neq 0, \quad y\neq\pm1) \quad \Rightarrow$$
$$\int\frac{x^2+1}{x}\,dx+\int\frac{y}{y^2-1}\,dy=C \quad \Rightarrow$$
$$\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2-1)}{y^2-1}=C \quad \Rightarrow$$
$$\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=C \quad \Rightarrow$$
$$\ln|x^2(y^2-1)|=2C-x^2 \quad \Rightarrow \quad |x^2(y^2-1)|=e^{2C}e^{-x^2} \quad \Rightarrow$$
$$x^2(y^2-1)=Ce^{-x^2},$$

де, враховуючи довільність сталої C, перепозначено $\pm\,e^{2C}$ через C. Надалі у такій ситуації використовуватимемо знак $:=$, наприклад, $C:=\pm\,e^{2C}$.

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2=1+Cx^{-2}e^{-x^2}. \tag{3.6}$$

З'ясуємо тепер можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x=0$, $y=1$, $y=-1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі містяться лише два останніх (їх можна отримати з формули (3.6), якщо $C=0$). Функція $x=0$ є особливим розв'язком.
Відповідь: $y^2=1+Cx^{-2}e^{-x^2}$, $x=0$.

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду

$$y'=f(ax+by), \tag{3.7}$$

де a, b – деякі сталі. Справді, якщо виконати заміну $z=ax+by$, то

$$y=\frac{z-ax}{b} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{b}z'-\frac{a}{b}$$

і для знаходження функції z одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $z'=bf(z)+a$.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y' = \cos(x+y)$.
Розв'язання. Нехай $z = x + y$. Тоді

$$z' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = z' - 1 \quad \Rightarrow \quad z' - 1 = \cos z \quad \Rightarrow \quad z' = 1 + \cos z.$$

Звідси, якщо $1 + \cos z \neq 0$, то

$$\frac{dz}{1+\cos z} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{1+\cos z} = x + C \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = x + C \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = x + C.$$

Отже, загальним інтегралом є $x - \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = C$.

Якщо $1 + \cos z = 0$, тобто $z = \pi + 2\pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$, то $y = -x + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ці розв'язки є особливими, бо їх не можна одержати із загального інтегралу при жодному значенні сталої C.
***Відповідь*:** $x - \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = C$, $y = -x + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

До розв'язування рівнянь з відокремлюваними змінними приводять багато задач прикладних наук. Розглянемо одну з них (див. також задачі 2, 4 з лекції 1).

Задача 1. *Посудина об'ємом 30 л наповнена повітрям (80% азоту і 20% кисню). У посудину закачується* 0,2 *л азоту в секунду, який неперервно перемішується з повітрям. З посудини витікає така сама кількість суміші. Через який час у посудині буде 90% азоту?*
Розв'язання. Позначимо через $y = y(t)$ кількість азоту у посудині в момент часу t. Розглянемо деякий проміжок часу $\Delta t = dt$ і знайдемо зміну кількості азоту у посудині за цей проміжок, вважаючи, що процес рівномірний. Якщо за 1 с закачується 0,2 л азоту, то через dt с в посудину потрапить $0{,}2\,dt$ л азоту. За цей час із посудини витече така сама кількість суміші. Оскільки в 30 л повітря міститься y л азоту, то у 1 л суміші міститься $\frac{y}{30}$ л азоту, а в $0{,}2\,dt$ л суміші є $\frac{y}{30} \cdot 0{,}2\,dt$ л азоту. Отже,

$$dy = 0{,}2\,dt - \frac{y}{30} \cdot 0{,}2\,dt \quad \Rightarrow \quad 150\,dy = (30 - y)\,dt. \tag{3.8}$$

Таким чином, одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$\frac{dy}{30-y} = \frac{dt}{150} \quad \Rightarrow \quad -\ln|30-y| = \frac{t}{150} + C \quad \Rightarrow$$
$$y(t) = 30 + Ce^{-t/150}. \tag{3.9}$$

Формула (3.9) визначає загальний розв'язок рівняння (3.8). З (3.9), використовуючи початкову умову (за умовою задачі $y(0) = 0{,}8 \cdot 30 = 24$ л), знаходимо значення сталої C: $30 + C = 24$, а отже, $C = -6$.

Підставляючи $C = -6$ у (3.9), одержуємо формулу для знаходження вмісту азоту у повітрі у будь-який момент часу t:

$$y(t) = 30 - 6e^{-t/150}.$$

Використовуючи цю функцію, визначимо час T, коли в посудині буде 90% азоту (27 л):

$$30 - 6e^{-T/150} = 27 \quad \Rightarrow \quad e^{-T/150} = 0{,}5 \quad \Rightarrow$$
$$T = -150 \cdot \ln 0{,}5 \approx 104 \text{ с.} \ \blacksquare$$

2. Однорідні рівняння. Функцію $f(x,y)$ називають ***однорідною функцією виміру m***, якщо для будь-яких x, y, t справджується тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x,y).$$

Наприклад, $f_1(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + 2y^3}$, $f_2(x,y) = \arcsin\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ є однорідними функціями вимірів 1 і 0 відповідно, бо

$$f_1(tx,ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + 2(ty)^3} = t\cdot\sqrt[3]{x^3 + 2y^3} = t^1 \cdot f_1(x,y),$$
$$f_2(tx,ty) = \arcsin\frac{(tx)^2 + (ty)^2}{(tx)^2 - (ty)^2} = \arcsin\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = t^0 \cdot f_2(x,y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{3.10}$$

називають ***однорідним***, якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією виміру 0.

Покажемо, що однорідне рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо права частина рівняння (3.10) – однорідна функція виміру 0, то за означенням $f(tx, ty) = f(x, y)$. Якщо підставити $t = 1/x$, то $f(x, y) = f(1,\ y/x)$, а тому рівняння (3.10) можна записати у вигляді $y' = f(1,\ y/x)$, звідки видно, що в однорідних рівняннях вигляду (3.10) права частина фактично залежить тільки від частки y/x. З огляду на це виконаємо заміну $u = y/x$, тобто

$$y = ux,$$

де $u = u(x)$ – нова шукана функція. Тоді

$$y' = u'x + u \quad \Rightarrow \quad u'x + u = f(1, u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (f(1, u) \neq u,\ \ x \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C.$$

Якщо позначити $F(u) \equiv \int \frac{du}{f(1,u)-u}$, то загальний інтеграл однорідного рівняння (3.10) можемо записати у вигляді

$$F(y/x) = \ln|x| + C.$$

Розв'язками однорідного рівняння (3.10) можуть бути також функції $y = ax$ $(x \neq 0)$, де $f(1, a) = a$ та $x = 0$ $(y \neq 0)$, які могли бути втрачені при відокремленні змінних. Ці розв'язки можуть бути особливими.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $x^2y' - y^2 + xy - x^2 = 0$.
Розв'язання. Записавши рівняння у вигляді

$$y' = (y^2 - xy + x^2)/x^2,$$

переконуємось, що воно є однорідним, бо його права частина є однорідною функцією виміру 0. Виконаємо заміну $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$ і, підставляючи ці вирази для y і y' у рівняння, одержуємо

$$u'x + u = \frac{x^2 + u^2x^2 - x^2u}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = 1 + u^2 - 2u \quad \Rightarrow$$
$$\frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x} \quad (u \neq 1, \;\; x \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{u-1} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad u = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \quad \Rightarrow \quad y = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x| + C}\right).$$

Якщо $u = 1$, то $y = x$ – особливий розв'язок, а $x = 0$ – не є розв'язком заданого рівняння.
***Відповідь*:** $y = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x|+C}\right)$, $y = x$.

Якщо диференціальне рівняння першого порядку записане у вигляді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

то воно буде однорідним, якщо $M(x, y)$, $N(x, y)$ є однорідними функціями однакового виміру. Пропонуємо читачам самостійно переконатись, що диференціальні рівняння

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0, \quad 2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

є однорідними.

Зауважимо, що диференціальне рівняння

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}, \tag{3.11}$$

одержане на лекції 1 у задачі 3 про форму дзеркала, яке збирає паралельні промені в одну точку, є однорідним. Розв'яжемо його за допомогою заміни $y = ux$. Тоді

$$u'x + u = \frac{\sqrt{x^2 + u^2x^2} - x}{ux} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{u} - u \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \int \frac{dx}{x} + C \quad \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \ln|x| + C.$$

Оскільки

$$\int \frac{d(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \left|1 + u^2 = p^2\right| = \int \frac{2p\,dp}{p - p^2} =$$
$$= 2\int \frac{dp}{1-p} = -\,2\ln|p-1| = -2\ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right|,$$

то

$$-\ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow$$
$$\sqrt{1+u^2} - 1 = C/x \quad \Rightarrow \quad u^2 = (C/x)^2 + 2C/x \quad \Rightarrow$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C^2 + 2Cx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2Cx + C^2.$$

Отже, загальним інтегралом рівняння (3.11) є $y^2 = 2Cx + C^2$ (порівняйте з результатом, одержаним на лекції 1).

3. Рівняння, звідні до однорідних. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \tag{3.12}$$

де a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – деякі сталі. Якщо c_1 і c_2 одночасно не дорівнюють нулю, то права частина рівняння (3.12) не є однорідною функцією виміру 0, а тому це рівняння не є однорідним. Однак, якщо

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_1b_2 \neq a_2b_2, \tag{3.13}$$

то рівняння (3.12) можна звести до однорідного за допомогою замін

$$x = m + \alpha, \quad y = n + \beta, \tag{3.14}$$

де сталі α і β потрібно вибрати так, щоб

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta = -\,c_1, \\ a_2\alpha + b_2\beta = -\,c_2. \end{cases} \tag{3.15}$$

Згідно з (3.13) $\Delta \neq 0$, а тому лінійна неоднорідна система (3.15) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Підставляючи у (3.12) замість x і y відповідні вирази з (3.14), одержуємо рівняння

$$\frac{dn}{dm} = \frac{a_1m + b_1n + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2m + b_2n + a_2\alpha + b_2\beta + c_2},$$

або, враховуючи (3.15),

$$\frac{dn}{dm} = \frac{a_1m + b_1n}{a_2m + b_2n}. \tag{3.16}$$

Диференціальне рівняння (3.16) є, очевидно, однорідним.

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $y' = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$.
Розв'язання. Оскільки $\Delta \neq 0$, то виконаємо заміну $x = m + \alpha$, $y = n + \beta$, де числа α і β задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3, \\ 2\alpha + \beta = 3. \end{cases}$$

Легко знаходимо, що $\alpha = \beta = 1$. Таким чином, після заміни $x = m + 1$, $y = n + 1$ одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{dn}{dm} = \frac{m + 2n}{2m + n}.$$

Нехай $n = um$. Тоді

$$u'm + u = \frac{1 + 2u}{2 + u} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 + u}{1 - u^2}du = \frac{dm}{m} \quad (u \neq \pm 1,\ m \neq 0).$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:

$$\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-u^2\right| = \ln|m| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow$$
$$1+u = Cm^2(1-u)^3 \quad (C := \pm C_1^2) \quad \Rightarrow$$
$$1+n/m = Cm^2\,(1-n/m)^3 \quad \Rightarrow \quad m+n = C(m-n)^3.$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є $x+y-2 = C(x-y)^3$.

Якщо $u=1$, то $n=m$, $m \neq 0$, тобто $y=x$, $x \neq 1$. Якщо $u=-1$, то $n=-m$, $m \neq 0$, тобто $y=-x+2$, $x \neq 1$. Перший розв'язок є особливим, а другий – частинним. Нарешті, якщо $m=0$, то $x=1$, але ця функція не є розв'язком заданого рівняння.
***Відповідь*:** $x+y-2=C(x-y)^3$, $y=x$.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (3.12) не виконується умова (3.13), тобто

$$a_1b_2 = a_2b_1, \tag{3.17}$$

то $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, а тому з рівняння (3.12) випливає, що

$$y' = \frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} = f(a_2x+b_2y),$$

тобто одержали рівняння вигляду (3.7), яке зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $z = a_2x+b_2y$.

Зауважимо, що за виконання умови (3.17) для зведення рівняння (3.12) до рівняння з відокремлюваними змінними можна виконувати також заміни $z=a_1x+b_1y$, $z=a_1x+b_1y+c_1$ або $z=a_2x+b_2y+c_2$.

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння*

$$(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння легко можна звести до вигляду (3.12), але робити це не обов'язково. Оскільки $\Delta=0$, то виконаємо заміну $z=x+y$. Тоді $dy=dz-dx$ і, підставляючи у рівняння, одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(z+1)dx + (2z-1)(dz-dx) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(2-z)\,dx + (2z-1)\,dz = 0.$$

Зінтегруємо його:

$$dx + \frac{2z-1}{2-z}\,dz = 0 \quad (z \neq 2) \quad \Rightarrow$$
$$\int dx + \int \frac{3-2(2-z)}{2-z}\,dz = C \quad \Rightarrow \quad x - 3\ln|2-z| - 2z = C.$$

Замінивши z на $x+y$, знаходимо загальний інтеграл у вигляді

$$3\ln|2-x-y| + x + 2y = C.$$

Якщо $z=2$, то $y = 2-x$. Цей розв'язок є, очевидно, особливим.

***Відповідь*:** $3\ln|2-x-y| + x + 2y = C,\ y = 2-x.$

Аналогічно інтегруються рівняння більш загального вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{3.18}$$

де $f(u)$ – неперервна функція свого аргументу.

Зауважимо, що деякі рівняння можна звести до однорідних за допомогою заміни $y = z^m$, де $z = z(x)$ – нова функція, а m – деяке число. Наприклад, у рівнянні $y' = x + \frac{y^2}{x^3}$ зробимо згадану заміну ($y = z^m \ \Rightarrow y' = mz^{m-1}z'$) і виберемо m таким, щоб одержане рівняння

$$mz^{m-1}z' = x + \frac{z^{2m}}{x^3} \quad \Rightarrow \quad mz' = \frac{x}{z^{m-1}} + \frac{z^{m+1}}{x^3}$$

було однорідним. Для цього потрібно, щоб права частина рівняння була однорідною функцією виміру 0, тобто число m повинне задовольняти рівняння $m-1=1$ і $m+1=3$, звідки $m=2$. Отже, за допомогою підстановки $y = z^2$ задане рівняння вдалося звести до однорідного

$$2z' = x/z + z^3/x^3,$$

зінтегрувати яке пропонуємо читачам самостійно.

Рекомендована література: [3, с. 11 – 39], [9, с. 23 – 27], [14, с. 16 – 177], [16, с. 28 – 33, 56 – 61], [19, с. 27 – 37].

Питання до лекції 3

1. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремленими змінними? Як знайти загальний інтеграл такого рівняння?

2. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними? Як інтегрується таке рівняння? Які функції можуть виявитися особливими розв'язками?

3. За допомогою яких замін рівняння $y' = f(ax + by)$ можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними?

4. Коли функція $f(x, y)$ буде однорідною виміру m? Наведіть приклади однорідних функцій виміру 0, 1, 2, 3, а також приклади неоднорідних функцій.

5. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним? За допомогою якої заміни шуканої функції таке рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?

6. Якою має бути права частина рівняння $y' = f(x, y)$, щоб воно було однорідним?

7. Якщо функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ однорідні, то чи досить цього для того, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було однорідним?

8. Якими повинні бути числа c_1, c_2, щоб диференціальне рівняння (3.18) було однорідним?

9. Якими повинні бути числа a_1, a_2, b_1, b_2, щоб рівняння (3.18) можна було звести до однорідного рівняння? Коли це рівняння можна звести відразу до рівняння з відокремлюваними змінними?

Вправи до лекції 3

1. Зінтегруйте диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\text{а) } y' = e^{x+y}; \quad \text{б) } y(1 - x^2)dy - x(1 - y^2)dx = 0;$$
$$\text{в) } (y^2 + xy^2)y' = yx^2 - x^2.$$

2. Знайдіть розв'язки задач Коші:

$$\text{а) } (1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1; \quad \text{б) } y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2};$$
$$\text{в) } xy^2dx + \frac{y^2 + 1}{\sqrt{x}}dy = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Зінтегруйте диференціальні рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\text{а) } y' = 2x + y + 3; \quad \text{б) } (x+y)y' = 1; \quad \text{в) } y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}.$$

4. Обґрунтуйте, що рівняння є однорідними, та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0; \quad \text{б) } y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}; \quad \text{в) } y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

5. Зінтегруйте рівняння, звідні до однорідних рівнянь:

$$\text{а) } (4y - 3x - 5)y' + 7x - 3y + 2 = 0;$$
$$\text{б) } (2x + 8)dx + (3y - 5x - 11)dy = 0.$$

Лекція 4. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратурах (продовження)

План

1. Лінійні рівняння.
2. Рівняння Бернуллі.
3. Рівняння у повних диференціалах.
4. Інтегрувальний множник.

1. Лінійні рівняння. ***Лінійним*** рівнянням першого порядку називають рівняння, у яке шукана функція та її похідна входять у першому степені і не перемножуються. Отже, лінійне рівняння має такий загальний вигляд:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \tag{4.1}$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – неперервні функції. В області, де $A(x) \neq 0$, рівняння (4.1) рівносильне рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.2}$$

у якому позначено $p(x) = B(x)/A(x)$, $q(x) = -C(x)/A(x)$.

Якщо ж $A(x_0) = 0$, то розв'язком рівняння (4.1), записаного у диференціальній формі $A(x)dy + B(x)ydx + C(x)dx = 0$, є $x = x_0$, у чому легко переконатися за допомогою підстановки. Наприклад, розв'язками рівняння $x(x - \pi)y' + \sin x \cdot y = \operatorname{tg} x$ є $x = 0$ і $x = \pi$. Спосіб відшукання інших розв'язків лінійних рівнянь буде наведений далі.

Якщо функції $p(x)$ та $q(x)$ у рівнянні (4.2) неперервні на деякому інтервалі (a, b), то згідно з теоремою Коші через кожну точку смуги $a < a_1 \leqslant x \leqslant b_1 < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходить єдина інтегральна крива. Справді, якщо рівняння (4.2) записати у вигляді $y' = q(x) - p(x)y$, то його права частина $f(x, y) = q(x) - p(x)y$ є, очевидно, неперервною функцією, а частинна похідна $f'_y(x, y) = -\,p(x)$ обмежена у цій області. У цьому випадку рівняння (4.2) особливих розв'язків не має.

Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (4.2) називають ***лінійним однорідним***, а якщо тотожно не дорівнює нулю, то ***лінійним неоднорідним***.

Для розв'язування лінійних рівнянь першого порядку використаємо ***метод варіації довільної сталої*** (***метод Лагранжа***) (з іншими методами розв'язування цих рівнянь можна познайомитись, наприклад, у [19, с. 41 – 44]). Для цього зінтегруємо спочатку лінійне однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0,$$

яке є водночас рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -\,p(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\,p(x)dx \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C \quad \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{4.3}$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.2) шукаємо у вигляді (4.3), замінивши довільну сталу C деякою функцією $C(x)$, тобто у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{4.4}$$

Підставляючи (4.4) у рівняння (4.2), одержуємо

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} +$$
$$+\, p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} = q(x) \quad \Rightarrow$$
$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C,$$

де C – довільна стала.

Підставляючи тепер знайдену функцію $C(x)$ у (4.4), маємо формулу для загального розв'язку лінійного рівняння (4.2):

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C \right). \tag{4.5}$$

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y' - 2y/x = x$.
Розв'язання. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} + C \quad \Rightarrow$$
$$\ln|y| = 2\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx^2.$$

Розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)x^2$. Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$C'(x)x^2 + C(x)\cdot 2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$
$$C(x) = \ln|x| + C.$$

Отже, $y = x^2 \cdot (\ln|x| + C)$. ■

Задача 1. *Знайти закон зміни сили струму I в електричному колі з опором R, самоіндукцією L, вважаючи, що напруга U є сталою, а сила струму у початковий момент дорівнює I_0.*
Розв'язання. Якщо в колі діє постійна напруга, то за законом Ома $U = RI$. Якщо напруга змінна, а також у моменти замикання і розмикання струму постійної напруги, в колі виникає самоіндукція, яка характеризується виникненням електрорушійної

сили, пропорційної швидкості зміни струму $\frac{dI}{dt}$. Отже, величина цієї додаткової електрорушійної сили індукції дорівнює $L\frac{dI}{dt}$, де L – коефіцієнт пропорційності, який називають коефіцієнтом самоіндукції. Як відомо з фізики, повна напруга U складається з напруги, викликаної явищем самоіндукції, і напруги, обумовленої опором кола, тому

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U,$$

звідки

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}. \tag{4.6}$$

Диференціальне рівняння (4.6) – лінійне відносно функції $I(t)$. Зінтегруємо спочатку відповідне однорідне рівняння $\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I = 0$. Відокремлюючи змінні, одержуємо:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \quad \Rightarrow \quad \ln I = -\frac{R}{L}t + C \quad \Rightarrow \quad I = C\,e^{-Rt/L}.$$

Нехай тепер $C = C(t)$. Підставимо $I = C(t)e^{-Rt/L}$ у рівняння (4.6). Тоді

$$C'(t)e^{-Rt/L} - \frac{R}{L}C(t)e^{-Rt/L} + \frac{R}{L}C(t)e^{-Rt/L} = \frac{U}{L} \quad \Rightarrow$$

$$C'(t) = \frac{U}{L}e^{Rt/L} \quad \Rightarrow \quad C(t) = \frac{U}{R}e^{Rt/L} + C \quad \Rightarrow$$

$$I(t) = \left(\frac{U}{R}e^{Rt/L} + C\right)e^{-Rt/L}.$$

Оскільки за умовою задачі $I(0) = I_0$, то, як легко перевірити, $C = I_0 - U/R$, а отже,

$$I(t) = \left(\frac{U}{R}e^{Rt/L} + I_0 - \frac{U}{R}\right)e^{-Rt/L} \quad \Rightarrow$$

$$I(t) = \left(I_0 - \frac{U}{R}\right)e^{-Rt/L} + \frac{U}{R}.$$

Якщо t необмежено зростає, то $e^{-Rt/L}$ швидко спадає і практично вже через короткий проміжок часу процес можна вважати усталеним, а сила струму визначатиметься за законом Ома, тобто $I = \frac{U}{R}$.

Якщо $I_0 = 0$, то $I(t) = \frac{U}{R}\big(1 - e^{-Rt/L}\big)$ – сила струму при замиканні кола. Якщо $U = 0$, то $I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$ – сила згасаючого струму при розмиканні кола. ■

Зауважимо, що наведений метод розв'язування лінійних рівнянь можна застосовувати також до рівнянь вигляду $(p(y)x + q(y))\cdot y' = 1$, якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, рівняння $(y^2 + 2x)y' = y$, в якому $y = y(x)$, є нелінійним. Однак, якщо записати його у вигляді

$$y' = \frac{y}{y^2 + 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x'} = \frac{y}{y^2 + 2x} \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{2}{y}x = y,$$

то маємо лінійне рівняння з прикладу 1, якщо x – шукана функція змінної y.

2. Рівняння Бернуллі. Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{4.7}$$

де m – деяке число, називають ***рівнянням Бернуллі***. Якщо $m = 0$, то одержуємо лінійне неоднорідне рівняння (4.2), а якщо $m = 1$, то рівняння з відокремлюваними змінними $y' + (p(x) - q(x))y = 0$, тому надалі вважатимемо, що $m \neq 0,\ m \neq 1$.

Для розв'язування рівняння Бернуллі, так само, як лінійного рівняння, використаємо метод варіації довільної сталої. Зінтегруємо спочатку рівняння $y' + p(x)y = 0$. Його загальний розв'язок подається формулою (4.3): $y = Ce^{-\int p(x)\,dx}$.

Розв'язок рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{4.8}$$

де $C(x)$ – деяка функція. Підставляючи (4.8) у рівняння (4.7), одержуємо

$$\begin{gathered}
C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} = \\
= q(x)C^m(x)e^{-m\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow \\
C'(x) = q(x)C^m(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow \\
\frac{dC(x)}{C^m(x)} = q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx \quad \Rightarrow \\
\int \frac{dC(x)}{C^m(x)} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C_1 \quad \Rightarrow \\
\frac{C^{1-m}(x)}{1-m} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C_1 \quad \Rightarrow \\
C(x) = \left((1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)^{\frac{1}{1-m}}.
\end{gathered}$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ в (4.8), одержуємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left((1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

При цьому міг бути втрачений розв'язок $y = 0$, якщо $m > 0$. Якщо $0 < m < 1$, то цей розв'язок буде особливим, а якщо $m > 1$, то частинним. Для $m \leqslant 0$ функція $y = 0$ не є розв'язком рівняння Бернуллі.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння Бернуллі*

$$y' - 2y/x = -xy^3.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння $y' - 2y/x = 0$ був знайдений під час розв'язування прикладу 1: $y = Cx^2$. Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)\,x^2$. Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - 2C(x)x = -C^3(x)x^7 \quad \Rightarrow$$
$$C'(x) = -C^3(x)x^5 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC(x)}{C^3(x)} = -x^5 dx \quad (C(x) \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{C^{-2}(x)}{-2} = -\frac{x^6}{6} + C \quad \Rightarrow \quad C(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{x^6 + C}} \quad \Rightarrow$$
$$y = \pm\, x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{x^6 + C}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^6 + C}}.$$

Якщо $C(x) = 0$, то $y = 0$. Пропонуємо самостійно переконатися, що ця функція є особливим розв'язком.
***Відповідь*:** $y = \pm\sqrt{3}x^2(x^6 + C)^{-1/2}$, $y = 0$.

Задача 2. *Знайти криві, у яких довжина відрізку, який відтинає дотична на осі Oy, дорівнює квадрату ординати точки дотику.*
Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої кривої $y = f(x)$. У точці M проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ і нехай A – точка перетину цієї дотичної з віссю Oy, B – проекція точки M на вісь Ox (рис. 4.1).

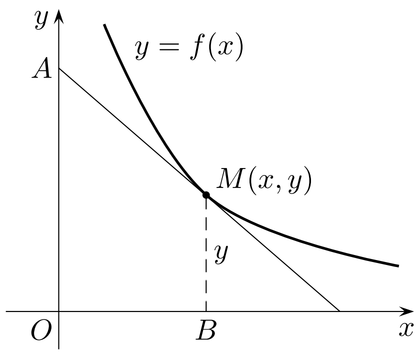

Рис. 4.1

За умовою задачі $OA = BM^2$, причому $BM = y$. Відрізок OA знайдемо з рівняння дотичної $Y - y = f'(x) \cdot (X - x)$, у яке підставимо $X = 0$. Тоді $OA = Y = y - y'x$.

Таким чином, одержуємо рівняння Бернуллі $y - y'x = y^2$, у чому легко переконатись, якщо записати його вигляді

$$y' - y/x = -y^2/x.$$

Зінтегруємо спочатку рівняння $y' - y/x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx.$$

Розв'язок рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді $y = C(x)\,x$. Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$C'(x)\,x + C(x) - C(x) = -\,C^2(x)\,x \quad \Rightarrow$$
$$C'(x) = -\,C^2(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{C^2} = -\,dx \quad \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{C(x)} = -\,x + C \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{x - C} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{x - C}.$$

Отже, шуканими кривими є гіперболи $y = \frac{x}{x-C}$. ■

Зауважимо, що наведений метод розв'язування рівняння Бернуллі можна застосовувати також до рівнянь вигляду $(p(y)x + q(y)x^m) \cdot y' = 1$, якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, якщо рівняння $(2x - y^2x^3) \cdot y' = y$ записати у вигляді

$$y' = \frac{y}{2x - y^2x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x'} = \frac{y}{2x - y^2x^3} \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{2}{y}x = -\,yx^3,$$

то маємо рівняння Бернуллі, розв'язане у прикладі 2 (якщо вважати, що $x = x(y)$).

3. Рівняння у повних диференціалах. Диференціальне рівняння

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{4.9}$$

називають ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = dU(x,y). \tag{4.10}$$

З (4.9), (4.10) випливає, що рівняння (4.9) можна записати у вигляді $dU = 0$, а тому загальним інтегралом рівняння у повних диференціалах є $U(x, y) = C$.

У загальному випадку складно безпосередньо з'ясувати, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Вкажемо ознаку, яка дозволить відповісти на це питання, а також один із способів знаходження функції $U(x, y)$.

Припустимо, що функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ у рівнянні (4.9) неперервні у деякому прямокутнику з центром у точці (x_0, y_0), і не перетворюються одночасно в нуль у цій точці. Окрім того, вважатимемо, що у згаданому прямокутнику існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$.

Припустимо, що справджується умова (4.10), тобто ліва частина рівняння (4.9) є повним диференціалом. Згідно з означенням диференціала функції двох змінних $dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, а тому

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{4.11}$$

Оскільки $M(x, y)$, $N(x, y)$ мають неперервні частинні похідні, то мішані похідні функції $U(x, y)$ не залежать від порядку диференціювання. Отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Звідси внаслідок рівності мішаних похідних одержуємо необхідну умову того, що (4.9) є рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4.12}$$

Покажемо, що умова (4.12) є також достатньою, тобто за виконання цієї умови ліва частина рівняння (4.9) є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$. Згідно з (4.11) шукана функція $U(x, y)$ повинна задовольняти умову $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$. Усі такі функції можна описати формулою

$$U(x, y) = \int M(x, y)\, dx + C(y), \tag{4.13}$$

де $C(y)$ – довільна неперервно диференційовна функція від y. Оскільки функція $U(x,y)$ повинна також задовольняти другу умову з (4.11), то

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + C'(y) = N(x,y). \tag{4.14}$$

Для виконання умови (4.14) потрібно відповідним чином підібрати функцію $C(y)$. Покажемо, що такий вибір за виконання умови (4.12) завжди можливий. Справді, з (4.14) маємо

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx.$$

Ліва частина цієї рівності є функцією тільки від y, а отже, права частина не залежить від x, тобто похідна за змінною x від правої частини повинна дорівнювати нулю. Переконаємось у цьому, враховуючи умову (4.12):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right) = \\
&= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right) = \\
&= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx\right) = \\
&= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

Наведене доведення достатності умов (4.12) дає водночас спосіб відшукання функції $U(x,y)$. Отже, спочатку потрібно знайти функцію $U(x,y)$ за формулою (4.13), розглядаючи y як сталу, а потім з рівності (4.14) знайти $C'(y)$, інтегруючи яке, отримаємо $C(y)$. Підставляючи знайдену функцію $C(y)$ у формулу (4.13), матимемо функцію $U(x,y)$. Для одержання загального інтегралу рівняння у повних диференціалах (4.9), як було доведено раніше, функцію $U(x,y)$ потрібно прирівняти до довільної сталої.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння*

$$(2xy + 3y^2)\,dx + (x^2 + 6xy - y^2)\,dy = 0.$$

Розв'язання. Тут $M(x,y) = 2xy + 3y^2$, $N(x,y) = x^2 + 6xy - y^2$, а отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для знаходження функції $U(x,y)$ маємо систему

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy - y^2.$$

Знайдемо вираз для шуканої функції з першого рівняння системи і підставимо його у друге рівняння:

$$U(x,y) = \int (2xy + 3y^2)\,dx + C(y) \quad \Rightarrow$$

$$U(x,y) = x^2 y + 3xy^2 + C(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy + C'(y) \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 6xy + C'(y) = x^2 + 6xy - y^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y) = -y^2 \quad \Rightarrow$$

$$C(y) = -y^3/3 + C.$$

Зауважимо, що в останній формулі довільну сталу інтегрування можна прийняти рівною нулю, оскільки потрібно знайти хоча б одну функцію $U(x,y)$, диференціал якої збігається з лівою частиною заданого рівняння.

Отже, $U(x,y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3/3$, а загальним інтегралом є $x^2 y + 3xy^2 - y^3/3 = C$. ∎

4. Інтегрувальний множник. Якщо (4.9) не є рівнянням у повних диференціалах, то завжди існує відмінна від сталого числа функція, після множення на яку ліва частина рівняння (4.9) стане повним диференціалом (доведення цього факту можна знайти, наприклад, в [19, с. 54]). Цю функцію називають ***інтегрувальним множником*** диференціального рівняння.

Нехай для коефіцієнтів рівняння (4.9) не справджується умова (4.12) і припустимо, що $\mu(x,y)$ – інтегрувальний множник цього рівняння. Тоді для коефіцієнтів рівняння

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

повинна справджуватись умова

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}. \tag{4.15}$$

Таким чином, інтегрувальний множник $\mu(x, y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними (4.15), однак розв'язати це рівняння у загальному випадку значно складніше, ніж звичайне диференціальне рівняння (4.9). Проте у окремих випадках знайти інтегрувальний множник вдається доволі легко. Розглянемо деякі з цих випадків.

1. Нехай рівняння (4.9) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від x, тобто $\mu = \mu(x)$. Тоді, враховуючи, що $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, з (4.15) маємо

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{d\mu}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx.$$

Якщо функція в правій частині останнього рівняння залежить тільки від x, тобто

$$\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \varphi(x),$$

то, зінтегрувавши його, одержуємо

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}.$$

2. Нехай рівняння (4.9) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від y, тобто $\mu = \mu(y)$. Тоді $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$ і з (4.15) знаходимо

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -M\frac{d\mu}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{-M}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy.$$

Якщо функція в правій частині останнього рівняння залежить тільки від y, тобто

$$\frac{1}{-M}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \psi(y),$$

то інтегрувальним множником є

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\,dy}. \tag{4.16}$$

Приклад 4. *За допомогою інтегрувального множника зінтегрувати рівняння* $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.
Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, а тому $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Оскільки

$$-\frac{1}{M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4xy - 1 - 1}{y - 2xy^2} = -\frac{2}{y} \equiv \psi(y),$$

то, скориставшись формулою (4.16), знаходимо інтегрувальний множник:

$$\mu(y) = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2\ln|y|} = y^{-2}.$$

Якщо помножити обидві частини заданого рівняння на $\mu(y) = y^{-2}$, то одержуємо рівняння у повних диференціалах $(2x - 1/y)\,dx + \left(1 + x/y^2 + 1/y\right)dy = 0$, бо для нього виконується умова (4.12):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x - \frac{1}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) = y^{-2}.$$

Оскільки

$$(2x - 1/y)dx + (1 + x/y^2 + 1/y)dy = d\,(x^2 - x/y + y + \ln|y|),$$

то шуканим загальним інтегралом є

$$x^2 - x/y + y + \ln|y| = C. \ \blacksquare$$

Розглянуті на лекціях 3, 4 типи рівнянь не охоплюють усіх рівнянь вигляду $y' = f(x, y)$, які можна зінтегрувати у квадратурах. Багато інших таких рівнянь можна знайти у довіднику [6]. Більшість з них або належать до рівнянь, вивчених на лекціях 3, 4, або зводяться до них за допомогою замін.

Рекомендована література: [4, с. 25 – 29, 34 – 44], [9, с. 28 – 41], [16, с. 69 – 96], [17, с. 31 – 36, 40 – 42, 90 – 101], [19, с. 37 – 57].

Питання до лекції 4

1. Який загальний вигляд має лінійне диференціальне рівняння першого порядку? Яка різниця між лінійним неоднорідним і однорідним рівняннями?

2. Чи має лінійне неоднорідне рівняння з неперервними коефіцієнтами особливі розв'язки? Відповідь обґрунтуйте з використанням теореми Коші.

3. У чому полягає метод варіації довільної сталої інтегрування лінійного неоднорідного рівняння?

4. Який загальний вигляд рівняння Бернуллі? У чому полягає метод варіації довільної сталої інтегрування цього рівняння? Чи може рівняння Бернуллі мати особливі розв'язки? Від чого це залежить?

5. Якими повинні бути функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було рівнянням у повних диференціалах? Як формулюється необхідна і достатня ознака того, щоб це рівняння було у повних диференціалах?

6. Як зінтегрувати рівняння у повних диференціалах? Який вигляд має загальний інтеграл такого рівняння?

7. У чому полягає метод інтегрувального множника? Наведіть формули для знаходження інтегрувального множника.

Вправи до лекції 4

1. Серед наведених рівнянь відшукайте лінійне рівняння та зінтегруйте його методом варіації довільної сталої:

$$\text{а) } y' = (x - y)^2; \quad \text{б) } xy' + 2y - xy^2 = 0; \quad \text{в) } y' = 4y + e^{2x}.$$

2. Доведіть, що рівняння $y' + y = 2\cos x$ має єдиний періодичний розв'язок, а всі інші розв'язки прямують до нього при $x \to +\infty$ (явище конвергенції).

3. Доведіть, що лінійне неоднорідне рівняння можна зінтегрувати за допомогою заміни $y = uv$, де u – частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння (метод Бернуллі).

4. Доведіть, що розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі будь-якого його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

5. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Бернуллі та зінтегруйте його:

$$\text{а) } y' + xy = y^2 \sin x; \quad \text{б) } y' + 2y = x^5; \quad \text{в) } y' = (x + y)^2.$$

6. Доведіть, що рівняння Бернуллі (4.7) можна звести до лінійного рівняння за допомогою заміни $z = y^{1-m}$. Зінтегруйте цим способом рівняння $xy' = y + x^2y^{-2}$.

7. Доведіть, що рівняння Ріккаті $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ за допомогою заміни $y = z + y_1$, де z – нова функція, y_1 – його частинний розв'язок, зводиться до рівняння Бернуллі.

8. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння у повних диференціалах та зінтегруйте його:

$$\text{а) } (ye^x - e^y)dx = (xe^y - e^x)dy; \quad \text{б) } 3x^2e^ydx + (x^3e^y - x)dy = 0;$$
$$\text{в) } (y\sin 2x + x)dx + (y^2 - \cos 2x)dy = 0.$$

9. Знайдіть інтегрувальний множник лінійного рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ та розв'яжіть це рівняння з його допомогою (метод Ейлера).

Лекція 5. Неявні диференціальні рівняння першого порядку

План

1. Основні означення й поняття.

2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку.

3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро.

4. Задача про ортогональні траєкторії.

1. Основні означення й поняття. ***Неявним диференціальним рівнянням першого порядку*** (*диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної*) називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5.1}$$

де функція $F(x, y, z)$ неперервна в деякій області $D \subset \mathbf{R}^3$.

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на інтервалі (a, b), називають ***розв'язком*** рівняння (5.1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Якщо рівняння (5.1) можна розв'язати через елементарні функції відносно y', то одержимо одне або декілька рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.2}$$

де $f_k(x, y)$ – дійсні функції, тобто інтегрування рівняння (5.1) зводиться до інтегрування кожного з рівнянь (5.2), основні типи яких розглядались на лекціях 2 – 4.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y'^2 - 4y = 0$.
Розв'язання. Задане рівняння розпадається на два рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = 2\sqrt{y}$ і $y' = -2\sqrt{y}$.

Загальним розв'язком першого з них є $y = (x + C)^2$, де $x \geqslant -C$, а другого – $y = (x + C)^2$, де $x \leqslant -C$. З геометричної точки зору це означає, що кожна парабола $y = (x + C)^2$ є інтегральною кривою. Окрім того, розв'язком рівняння є $y = 0$.

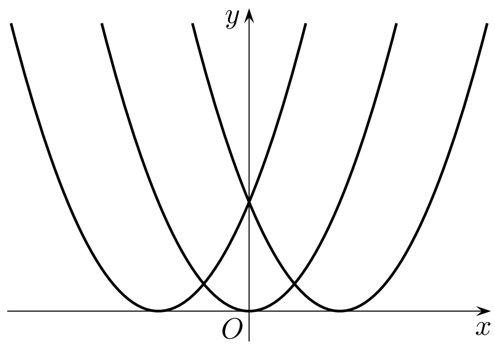

Рис. 5.1

Задане рівняння має також безліч розв'язків, які можна «склеїти» з частин наведених вище розв'язків. Наприклад, такими розв'язками будуть функції

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ (x-1)^2, & \text{якщо } x > 1, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{якщо } x < -1, \\ 0, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^2, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

графіки яких зображені на рис. 5.2 і 5.3 відповідно. Однак надалі такі розв'язки ми не розглядатимемо.

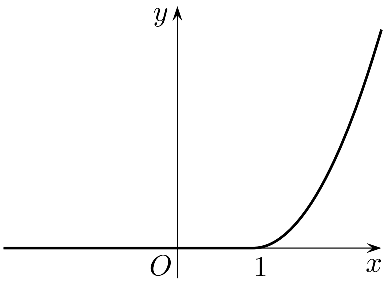

Рис. 5.2

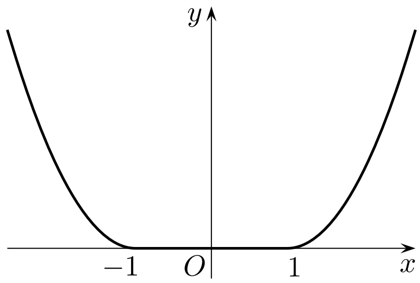

рис. 5.3

***Відповідь*:** $y = (x + C)^2$, $y = 0$.

Неявне диференціальне рівняння (5.1), так само, як і рівняння, розв'язане відносно похідної, визначає на площині Oxy деяке поле напрямів. Але тепер, як правило, у заданій точці (x_0, y_0) матимемо не один, а декілька напрямів поля, бо, розв'язуючи рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$ відносно y', зазвичай одержуємо декілька дійсних розв'язків. Наприклад, рівняння з прикладу 1 визначає у кожній точці (x_0, y_0), де $y_0 > 0$, два напрями поля: $y_1' = 2\sqrt{y_0}$ і $y_2' = -2\sqrt{y_0}$. У кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox це рівняння визначає тільки один напрям поля: $y_1'|_{(x_0,0)} = 0$.

Задача Коші для рівняння (5.1) формулюється так само, як і для рівняння, розв'язаного відносно похідної, а саме: потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння (5.1), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{5.3}$$

При цьому, якщо розв'язків, які задовольняють початкову умову (5.3), не більше, ніж кількість напрямів поля, визначеного рівнянням (5.1) у цій точці, тобто не більше кількості розв'язків y_0' рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$, то кажуть, що задача Коші (5.1), (5.3) має єдиний розв'язок. В інакшому випадку кажуть, що єдиність розв'язку цієї задачі порушується.

Нехай y_0' – один з дійсних коренів рівняння (5.1). З'ясуємо умови, за яких існує єдина інтегральна крива рівняння (5.1), що проходить через точку (x_0, y_0), причому дотична до неї у цій точці утворює з додатним напрямом Ox кут α_0, тангенс якого дорівнює y_0'.

Теорема. *Нехай ліва частина рівняння* (5.1) *задовольняє такі умови*:

1) *функція* $F(x, y, y')$ *визначена і неперервна разом з частинними похідними* $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ *в деякому замкненому околі точки* (x_0, y_0, y_0');

2) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

3) $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0, y_0, y_0')} \neq 0$.

Тоді рівняння (5.1) *має єдиний розв'язок* $y = y(x)$, *визначений і неперервно диференційовний у деякому околі точки* $x = x_0$, *який задовольняє початкову умову* $y(x_0) = y_0$, *і такий, що* $y'(x_0) = = y_0'$.

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [19, с. 63 – 64].

Для відшукання обвідної сім'ї інтегральних кривих можна скористатись таким правилом ([19, с. 82 – 85]):

1) скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

де $\Phi(x, y, C) = 0$ – загальний інтеграл диференціального рівняння (5.1);

2) із системи (5.4) за допомогою виключення параметра C знайти криву $\varphi(x, y) = 0$;

3) з кривої $\varphi(x, y) = 0$ вилучити точки, де Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють нулю. Решта кривої $\varphi(x, y) = 0$ і буде обвідною заданої сім'ї інтегральних кривих.

2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянемо деякі типи неявних диференціальних рівнянь вигляду (5.1), для яких існують загальні методи розв'язання. Найпростішим з них є ***рівняння, яке містить тільки похідну***, тобто рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \tag{5.5}$$

Нехай рівняння (5.5) має деяку (скінченну або нескінченну) кількість дійсних розв'язків $y' = k_j$, $j = 1, 2, \ldots$, де k_j – сталі. Далі, оскільки

$$y' = k_j \quad \Rightarrow \quad y = k_j x + C \quad \Rightarrow \quad k_j = \frac{y - C}{x},$$

то одержуємо загальний інтеграл цього рівняння у вигляді

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{5.6}$$

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y'^3 - 3y'^2 + 2 = 0$.
Розв'язання. Згідно з формулою (5.6) одержуємо загальний інтеграл

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(y - C)^3 - 3x(y - C)^2 + 2x^3 = 0. \ \blacksquare$$

Диференціальне рівняння вигляду

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0 \tag{5.7}$$

називають ***рівнянням першого порядку степеня n***. Згідно з основною теоремою алгебри рівняння (5.7) визначає n значень для y'. Якщо відкинути комплексні корені, то матимемо m ($m \leqslant n$) диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_1(x, y), \ y' = f_2(x, y), \ \ldots, \ y' = f_m(x, y). \tag{5.8}$$

Сукупність загальних розв'язків $y = \varphi_k(x, C)$ або загальних інтегралів $\Phi_k(x, y, C) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, рівнянь (5.8) є загальним інтегралом рівняння (5.7). Його можна записати також у вигляді

$$\big(y - \varphi_1(x, C)\big) \cdot \big(y - \varphi_2(x, C)\big) \cdot \ldots \cdot \big(y - \varphi_m(x, C)\big) = 0$$

або

$$\Phi_1(x,y,C)\cdot\Phi_2(x,y,C)\cdot\ldots\cdot\Phi_m(x,y,C)=0.$$

Якщо хоча б одне з рівнянь (5.8) має особливі розв'язки, то вони будуть також особливими розв'язками рівняння (5.7).

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y'^2 - 2yy'/x - 1 = 0$.
Розв'язання. Розв'язуючи це рівняння як квадратне відносно y', одержуємо два однорідні диференціальні рівняння (лекція 3):

$$y' = y/x \pm \sqrt{(y/x)^2 + 1}.$$

Виконуючи заміну $y = ux$, маємо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x = \sqrt{u^2+1} \quad \text{і} \quad u'x = -\sqrt{u^2+1}.$$

Зінтегруємо перше з них:

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow$$

$$u + \sqrt{u^2+1} = Cx \quad \Rightarrow \quad u^2+1 = (Cx-u)^2 \quad \Rightarrow$$

$$u = \frac{C^2x^2-1}{2Cx} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{C^2x^2-1}{2Cx} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C^2x^2-1}{2C}.$$

Аналогічно можна показати, що загальним розв'язком рівняння $u'x = -\sqrt{u^2+1}$ є $y = \frac{C^2-x^2}{2C}$, де C – довільна стала.
***Відповідь*:** $y = (C^2x^2-1)\big/(2C)$, $y = (C^2-x^2)\big/(2C)$.

Нехай рівняння (5.1) можна розв'язати відносно y, тобто воно має вигляд

$$y = f(x, y'). \tag{5.9}$$

Тоді можна використати ***метод введення параметра***. Позначимо $y' = p(x)$, тоді з (5.9) маємо співвідношення $y = f(x,p)$, диференціюючи яке, одержуємо

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow \quad y'dx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow$$

$$pdx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp. \tag{5.10}$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок $x = \varphi(p, C)$ рівняння (5.10). Тоді, підставляючи його у $y = f(x, p)$, одержимо загальний розв'язок рівняння (5.9) у параметричній формі

$$x = \varphi(p, C), \quad y = f\big(\varphi(p, C), p\big).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (5.10) у вигляді $p = h(x, C)$, то отримаємо загальний розв'язок рівняння (5.9) у явному вигляді $y = f(x, h(x, C))$.

Якщо рівняння (5.10) має особливий розв'язок $p = \psi(x)$, то $y = f\,(x, \psi(x))$ може бути особливим розв'язком рівняння (5.9).

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $y = {y'}^2 - 3xy' + 3x^2$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = p^2 - 3xp + 3x^2. \tag{5.11}$$

Здиференціюємо (5.11), враховуючи, що $dy = y'dx = pdx$:

$$\begin{gathered} dy = 2pdp - 3xdp - 3pdx + 6xdx \quad \Rightarrow \\ pdx = (2p - 3x)dp - (3p - 6x)dx \quad \Rightarrow \\ (2p - 3x)dp - 2(2p - 3x)dx = 0 \quad \Rightarrow \\ (2p - 3x)(dp - 2dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = 2dx \text{ або } 2p - 3x = 0. \end{gathered}$$

Отже, одержали два рівняння. З першого з них знаходимо $p = 2x + C$. Підставляючи знайдене значення p у (5.11), одержуємо загальний розв'язок

$$y = (2x + C)^2 - 3x(2x + C) + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + Cx + C^2.$$

З рівняння $2p - 3x = 0$ знаходимо $p = 3x/2$, а тому $y = 3x^2/4$. Цей розв'язок особливий.
***Відповідь*:** $y = x^2 + Cx + C^2$, $y = 3x^2/4$.

Нехай рівняння (5.1) можна розв'язати відносно x, тобто

$$x = f(y, y'). \tag{5.12}$$

Це рівняння також розв'яжемо ***методом введення параметра***. Позначимо $y' = p(y)$. Тоді, враховуючи, що $dx = \frac{dy}{y'}$, маємо

$$x = f(y,p) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp. \tag{5.13}$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок $y = \varphi(p, C)$ рівняння (5.13). Тоді, підставляючи його у $x = f(y,p)$, одержуємо загальний розв'язок рівняння (5.12) у параметричній формі

$$x = f\big(\varphi(p,C), p\big), \quad y = \varphi(p, C).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (5.13) у вигляді $p = h(y, C)$, то отримаємо загальний розв'язок рівняння (5.12) у явному вигляді $x = f(y, h(y, C))$.

Якщо рівняння (5.13) має особливий розв'язок $p = \psi(y)$, то $x = f\left(y, \psi(y)\right)$ може бути особливим розв'язком рівняння (5.12).

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння* $x = y'^3 + 4y'$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді $x = p^3 + 4p$. Далі маємо:

$$dx = 3p^2dp + 4dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{p} = 3p^2dp + 4dp \quad \Rightarrow$$

$$dy = (3p^3 + 4p)dp \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3p^4}{4} + 2p^2 + C.$$

Відповідь: $x = p^3 + 4p,\ y = 3p^4/4 + 2p^2 + C$.

3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро. Окремим випадком рівняння (5.9) є рівняння вигляду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \tag{5.14}$$

Якщо функція $\varphi(y')$ тотожно не збігається з y', то (5.14) називають ***рівнянням Лагранжа***. Як бачимо, рівняння Лагранжа лінійне відносно x і y.

Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{5.15}$$

Здиференціюємо (5.15), беручи до уваги, що $dy = pdx$:

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp \quad \Rightarrow$$
$$(p - \varphi(p))dx = (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp \quad (p \neq \varphi(p)) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{dp} - \frac{x\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Останнє рівняння є лінійним відносно функції $x(p)$. Інтегруючи його за формулою (4.5) з лекції 4, одержимо $x = \omega(p, C)$, що разом з (5.15) визначатиме загальний розв'язок рівняння Лагранжа у параметричній формі.

Якщо рівняння $p = \varphi(p)$ має дійсні корені $p = p_i$, то, підставляючи їх у рівняння (5.14), одержуємо $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$. Ці розв'язки рівняння Лагранжа (з геометричної точки зору – прямі) можуть бути особливими.

Приклад 6. *Зінтегрувати рівняння* $y = 2xy' + y'^2$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = 2xp + p^2 \quad \Rightarrow \quad dy = 2xdp + 2pdx + 2pdp \quad \Rightarrow$$
$$pdx = 2(x + p)dp + 2pdx \quad \Rightarrow \quad 2(x + p)dp + pdx = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2 \quad (p \neq 0).$$

Розв'язуючи одержане лінійне рівняння (див. лекцію 4), знаходимо, що $x = -2p/3 + C\big/p^2$. Підставляючи цей вираз x у рівність $y = 2xp + p^2$, після нескладних перетворень знаходимо, що $y = 2C/p - p^2\big/3$. Отже, загальним розв'язком у параметричній формі є

$$x = -\frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}, \quad y = \frac{2C}{p} - \frac{1}{3}p^2.$$

Якщо $p = 0$, то підставляючи його у $y = 2xp + p^2$, одержуємо розв'язок $y = 0$, який є особливим, бо його не можна отримати з загального при жодному значенні сталої C.

***Відповідь*:** $x = -2p/3 + C/p^2,\ y = 2C/p - p^2/3;\ y = 0.$

Розглянемо окремий випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y') \equiv y'$:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{5.16}$$

Рівняння (5.16) називають ***рівнянням Клеро***. Інтегруючи його за тією самою схемою, що і рівняння Лагранжа, маємо:

$$\begin{gathered} y' = p \quad \Rightarrow \quad y = xp + \psi(p) \quad \Rightarrow \\ pdx = xdp + pdx + \psi'(p)dp \quad \Rightarrow \\ dp \cdot (x + \psi'(p)) = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = 0 \quad \text{або} \quad x + \psi'(p) = 0. \end{gathered}$$

З першого рівняння знаходимо $p = C$ і, підставляючи у формулу $y = xp + \psi(p)$, одержуємо загальний розв'язок рівняння Клеро:

$$y = xC + \psi(C). \tag{5.17}$$

Легко бачити, що з геометричної точки зору загальний розв'язок рівняння Клеро є однопараметричною сім'єю прямих, а для його одержання потрібно у рівнянні (5.16) замінити похідну y' на сталу C.

З рівняння $x + \psi'(p) = 0$ знаходимо $x = -\psi'(p)$. Підставляючи цей вираз у формулу $y = xp + \psi(p)$, одержуємо, що $y = \psi'(p)p + \psi(p)$. Таким чином, маємо розв'язок

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = \psi'(p) \cdot p + \psi(p). \end{cases} \tag{5.18}$$

Розв'язок (5.18) зазвичай є особливим, і у цьому випадку з геометричної точки зору маємо обвідну сім'ї (5.17). Справді, відшукуючи криву, підозрілу на обвідну сім'ї (5.17), за правилом, вказаним наприкінці першого пункту цієї лекції, маємо систему

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C), \\ 0 = x + \psi'(C), \end{cases}$$

друге рівняння якої одержане з першого диференціюванням за параметром C. Звідси легко знаходимо

$$\begin{cases} x = -\,\psi'(C), \\ y = -\,\psi'(C)\,C + \psi(C), \end{cases}$$

тобто систему, яка відрізняється від (5.18) тільки позначенням параметра.

Приклад 7. *Зінтегрувати рівняння* $y = xy' + 2y'^2$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = xp + 2p^2 \quad \Rightarrow \quad dy = xdp + pdx + 4pdp \quad \Rightarrow$$
$$(x + 4p)dp = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = 0 \text{ або } x + 4p = 0.$$

З рівняння $dp = 0$ знаходимо, що $p = C$. Підставляючи $p = C$ у рівність $y = xp + 2p^2$, одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння $y = Cx + 2C^2$.

Якщо $x = -4p$, то $y = -4p^2 + 2p^2 = -2p^2$. Таким чином, особливим розв'язком є $x = -4p$, $y = -2p^2$. Виключивши звідси параметр p, одержуємо особливий розв'язок у явному вигляді: $y = -x^2/8$.
Відповідь: $y = Cx + 2C^2$, $y = -x^2/8$.

4. Задача про ортогональні траєкторії. Як ще один приклад одного з багатьох геометричних застосувань диференціальних рівнянь першого порядку, розглянемо задачу про ортогональні траєкторії.

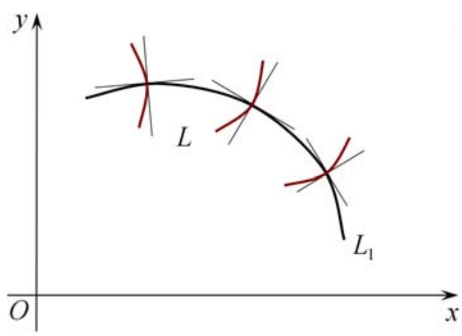

Рис. 5.4

Якщо крива L_1 перетинає усі криві L заданої сім'ї під прямим кутом[1)], то її називають ***ортогональною траєкторією***

[1)]Кутом між двома кривими у точці їх перетину називають кут між дотичними до них у цій точці.

цієї сім'ї (рис. 5.4). Зокрема, кожна з півпрямих, які виходять з початку координат

$$y = kx \text{ при } x \neq 0 \text{ та } x = 0 \text{ при } y \neq 0,$$

є, очевидно, ортогональною траєкторією сім'ї концентричних кіл $x^2 + y^2 = R^2$ з центром у початку координат і будь-яке з цих кіл є ортогональною траєкторією згаданої сім'ї півпрямих.

Розв'яжемо задачу у загальній постановці: знайти сім'ю ортогональних траєкторій заданої однопараметричної сім'ї кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{5.19}$$

де C – параметр. Для цього спочатку складемо диференціальне рівняння сім'ї (5.19) (п. 3 лекції 1), виключивши параметр C з системи

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial y} \cdot y' = 0. \end{cases}$$

У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї (5.19) вигляду

$$F(x, y, y') = 0. \tag{5.20}$$

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка ортогональної траєкторії L_1. Згідно з умовою взаємної перпендикулярності двох прямих кутовий коефіцієнт дотичної до ортогональної траєкторії L_1 у точці M дорівнює $-1/y'$, де y' – кутовий коефіцієнт дотичної в точці M до кривої L сім'ї (5.19), яка проходить через цю точку. Тому, замінивши у диференціальному рівнянні (5.20) заданої сім'ї (5.19) y' на $-1/y'$, одержимо диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0. \tag{5.21}$$

Зінтегрувавши рівняння (5.21), знайдемо шукану сім'ю ортогональних траєкторій.

Приклад 8. *Скласти диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сім'ї півкубічних парабол* $y^2 - Cx^3 = 0$.

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих. Позначимо $\Phi(x,y,C) \equiv y^2 - Cx^3$, тоді $\Phi'_x + \Phi'_y y' \equiv 2yy' - 3Cx^2$. Виключаючи параметр C з системи

$$\begin{cases} y^2 - Cx^3 = 0, \\ 2yy' - 3Cx^2 = 0, \end{cases}$$

одержуємо диференціальне рівняння $2yy' - 3y^2/x = 0$.

З формули (5.21) випливає, що шуканим рівнянням ортогональних траєкторій є

$$-2y\frac{1}{y'} - \frac{3y^2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{y'} + \frac{3y}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{2x}{3y} \quad \Rightarrow$$
$$3yy' + 2x = 0. \ \blacksquare$$

Із задачею про відшукання ортогональних траєкторій зустрічаємось у картографії, навігації, механіці. Кажуть, що силове поле створене силами F, які мають потенціал $u = u(x,y)$, якщо проекції сил на осі координат F_x і F_y дорівнюють відповідним частинним похідним функції u, тобто $F_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Лінії $u(x,y) = C$ називають ***лініями рівня***. Лінії, дотичні до яких збігаються з напрямом сили у точці дотику, називають ***силовими лініями***. Покажемо, що силові лінії є ортогональними траєкторіями сім'ї ліній рівня $u(x,y) = C$. Справді, оскільки дотична до силової лінії за означенням збігається з напрямом сили F у точці дотику, то її кутовий коефіцієнт дорівнює $k_1 = \frac{F_y}{F_x}$. З іншого боку, кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня можна знайти з рівняння $u'_x + u'_y \cdot y' = 0$. Він дорівнює $k_2 = -\frac{u'_x}{u'_y} = -\frac{F_x}{F_y}$. Оскільки $k_1 \cdot k_2 = -1$, то силові лінії і лінії рівня ортогональні.

Рекомендована література: [9, с. 42 – 49], [10, с. 41 – 50], [16, с. 112 – 131], [19, с. 58 – 76, 86 – 89], [20, с. 68 – 82].

Питання до лекції 5

1. Який загальний вигляд має неявне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком неявного диференціального рівняння першого порядку?

2. Як побудувати поле напрямів, задане неявним диференціальним рівнянням першого порядку?

3. Як формулюється задача Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку? Коли розв'язок цієї задачі єдиний?

4. Як формулюється теорема про існування єдиного розв'язку задачі Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку?

5. Яке неявне диференціальне рівняння називають рівнянням першого порядку степеня n? Як воно інтегрується?

6. Який вигляд має загальний інтеграл рівняння $F(y') = 0$?

7. Які заміни використовується для інтегрування рівнянь $y = f(x, y')$, $x = f(y, y')$? Чи можуть ці рівняння мати особливі розв'язки?

8. Який вигляд має рівняння Лагранжа? Яку заміну використовують для інтегрування цього рівняння? Які криві можуть бути його особливими розв'язками?

9. Який вигляд має рівняння Клеро? Як знайти загальний і особливий розв'язки цього рівняння?

10. Що таке ортогональна траєкторія заданої сім'ї кривих на площині? Як побудувати диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій?

Вправи до лекції 5

1. Зінтегруйте рівняння та виділіть інтегральні криві, які проходять через задану точку:

$$\text{а) } y'^2 = 4y, \ \ M(1,0); \quad \text{б) } yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0, \quad M(1,1).$$

2. Знайдіть за виглядом рівнянь криві, підозрілі на особливі розв'язки, і перевірте, чи будуть вони особливими розв'язками:

$$\text{а) } y'^2 = 4y; \quad \text{б) } y^2({y'}^2 + 1) = 1.$$

3. Зінтегруйте рівняння:

$$\text{а) } e^{y'} + y' = 1; \quad \text{б) } y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0.$$

4. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Лагранжа та зінтегруйте його:

$$\text{а) } y' = 2xy - y'^2; \quad \text{б) } y = 2xy' - y'^2; \quad \text{в) } y = xy' - 2y'^2.$$

5. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Клеро та зінтегруйте його:

$$\text{а) } y' = 2xy + y'^2; \quad \text{б) } y = xy' + xy'^2; \quad \text{в) } y - xy' - \sqrt{1 - y'^2} = 0.$$

6. Знайдіть ортогональні траєкторії сім'ї кіл радіуса 1, центри яких лежать на осі абсцис.

7. Знайдіть силові лінії поля, створеного силами, що мають потенціал $u = x^2/2 + y^2$.

Лекція 6. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку

План

1. Принцип стискуючих відображень.
2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Продовження розв'язку задачі Коші.
4. Коректність задачі Коші.

1. Принцип стискуючих відображень. ***Метричним простором*** називають множину $W = \{x\}$ елементів x довільної природи, якщо для будь-якої пари елементів $x, y \in W$ за певним правилом введено ***метрику*** (***відстань***), тобто числову функцію $\rho(x, y)$, яка задовольняє такі властивості (аксіоми):

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причому $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (для будь-яких $x, y, z \in W$).

Елементи метричного простору називатимемо також ***точками*** цього простору.

Наведемо два важливі приклади метричних просторів.

1. Сукупність дійсних n-вимірних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з метрикою $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$ є метричним простором. Його називають ***n-вимірним евклідовим простором*** і позначають $\mathbf{R}^n$.

2. Сукупність дійсних, неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $y(t)$ з метрикою $\rho\left(x(t), y(t)\right) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ також є метричним простором. Цей простір позначають $C[a, b]$.

Для обох просторів властивості з означення метрики легко перевіряються.

Послідовність x_1, x_2, x_3, $\ldots$ елементів метричного простору W називають ***фундаментальною***, якщо $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_{n+p}) = 0$ для довільного цілого p.

Метричний простір W називають ***повним***, якщо у ньому будь-яка фундаментальна послідовність x_1, x_2, x_3, $\ldots$ збігається до деякого елемента цього ж простору. Можна довести, що простори $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ і $C[a, b]$ є повними [7, с. 59].

Нехай у повному метричному просторі W заданий ***оператор*** (відображення, функція) A, який кожному елементу простору W ставить у відповідність елемент цього ж простору:

$$y = Ax, \quad x, y \in W.$$

Тоді кажуть, що оператор A відображає простір W у себе.

Оператор A називають ***стискуючим***, якщо існує таке число α, $0 \leqslant \alpha < 1$, що для будь-яких елементів $x_1, x_2 \in W$

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \alpha \rho(x_1, x_2). \tag{6.1}$$

Число α з цього означення називають ***коефіцієнтом стиснення***.

Елемент $\varphi \in W$ називають ***нерухомою точкою*** оператора A, якщо $A\varphi = \varphi$. Інакше кажучи, нерухомі точки – це розв'язки рівняння $Ax = x$.

Відзначимо, що багато питань, пов'язаних з існуванням та єдиністю розв'язків рівнянь різних типів, можна звести до питання про існування нерухомої точки деякого відображення A метричного простору у себе. Однією з найважливіших умов існування нерухомої точки є ***принцип стискуючих відображень***, вперше сформульований С. Банахом. Цей принцип є теоретичною основою ***методу послідовних наближень*** (***методу ітерацій***), який широко використовується для наближеного розв'язування диференціальних, інтегральних та алгебричних рівнянь.

Теорема 1 (принцип стискуючих відображень). *Якщо стискуючий оператор A відображує повний метричний простір W у себе, то існує єдина нерухома точка φ цього оператора. Її можна знайти за формулою*

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} x_n \quad (x_n = Ax_{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots),$$

причому елемент x_0 у просторі W вибирається довільно.

Доведення. Візьмемо довільний елемент $x_0 \in W$ і побудуємо послідовність елементів

$$\left.\begin{array}{c} x_0, \quad x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0, \ \ldots, \\ x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \ \ldots \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

Покажемо, що послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ фундаментальна. Для цього, використовуючи (6.1), оцінимо спочатку відстані між сусідніми елементами простору W:

$$\left.\begin{array}{c} \rho(x_2, x_1) = \rho(Ax_1, Ax_0) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_0), \\ \rho(x_3, x_2) = \rho(Ax_2, Ax_1) \leqslant \alpha\rho(x_2, x_1) \leqslant \alpha^2\rho(x_1, x_0), \ \ldots, \\ \rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leqslant \\ \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(x_1, x_0), \ \ldots \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

Використовуючи оцінки (6.3), а також $p-1$ разів властивість 3 з означення метрики, одержуємо

$$\begin{gathered} \rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1}\right)\rho(x_1, x_0) = \\ = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \end{gathered}$$

для достатньо великого n. Отже,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0). \tag{6.4}$$

Оскільки $0 \leqslant \alpha < 1$, то з (6.4) випливає, що для досить великих n величина $\rho(x_n, x_{n+p})$ є як завгодно малою, тобто $\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \varepsilon$, а отже, x_1, x_2, x_3, $\ldots$ – фундаментальна послідовність. Оскільки W – повний простір, то ця послідовність має границю, яку позначимо $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Із співвідношень

$$\rho(A\varphi, \varphi) \leqslant \rho(A\varphi, x_n) + \rho(x_n, \varphi) = \rho(A\varphi, Ax_{n-1}) + \rho(x_n, \varphi) \leqslant \\ \leqslant \alpha\rho(\varphi, x_{n-1}) + \rho(x_n, \varphi) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

випливає, що $\rho(A\varphi, \varphi) = 0$, а отже, $A\varphi = \varphi$, тобто φ є нерухомою точкою відображення A.

Для доведення єдиності нерухомої точки припустимо, що існує ще одна нерухома точка ψ відображення A, тобто $A\psi = \psi$. Тоді

$$\rho(\varphi, \psi) = \rho(A\varphi, A\psi) \leqslant \alpha\rho(\varphi, \psi) \quad \Rightarrow \\ \rho(\varphi, \psi)(1-\alpha) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\varphi, \psi) = 0.$$

З рівності $\rho(\varphi, \psi) = 0$ згідно з першою властивістю метрики випливає, що $\psi = \varphi$, тобто φ – єдина нерухома точка відображення A. Теорему доведено.

Елементи x_0, x_1, x_2, $\ldots$ у формулі (6.2) називають ***послідовними наближеннями*** нерухомої точки φ.

Наголошуємо, що вибір початкового наближення $x_0 \in W$ є довільним і впливає лише на швидкість збіжності послідовності x_1, x_2, x_3, $\ldots$ до своєї границі φ.

2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Використовуючи принцип стискуючих відображень, доведемо теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної[1]:

$$y' = f(x, y), \tag{6.5}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.6}$$

[1] Ця теорема без доведення наведена у п. 2 лекції 2.

Теорема 2 (Коші). *Нехай функція $f(x, y)$ визначена у прямокутнику*

$$D = \{(x, y) : x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \ \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\},$$

де $a, b > 0$, і задовольняє у ньому такі умови:

1) *$f(x, y)$ неперервна, а отже, й обмежена* ($|f(x, y)| \leqslant M$);

2) *частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ існує та обмежена* $\left(\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant L\right)$.

Тоді задача Коші (6.5), (6.6) *має єдиний розв'язок $y = y(x)$ принаймні на відрізку $G = \{x : x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h\}$, де*

$$h < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right).$$

Доведення. Покажемо спочатку, що задача Коші (6.5), (6.6) рівносильна інтегральному рівнянню[2)]

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{6.7}$$

Справді, якщо неперервна функція $y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (6.7), то, диференціюючи (6.7), одержуємо, що $y' = f(x, y(x))$ і, очевидно, $y(x_0) = y_0$. Таким чином, функція $y(x)$ є розв'язком задачі Коші (6.5), (6.6).

Навпаки, нехай $y(x)$ – розв'язок задачі (6.5), (6.6), тобто $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ і $y(x_0) = y_0$. Тоді, інтегруючи цю тотожність у межах від x_0 до x, одержуємо

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \Rightarrow \quad y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt,$$

тобто $y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (6.7).

Надалі досліджуватимемо рівняння (6.7).

[2)] Інтегральне рівняння – це рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтеграла. Інтегральні рівняння вивчатимуться на лекціях 20 – 22.

Позначимо через W множину неперервних функцій $y = y(x)$, які задані на відрізку G і задовольняють на ньому нерівність $|y(x) - y_0| \leqslant b$. На множині W введемо метрику

$$\rho(y, z) = \max_{x \in G} |y(x) - z(x)|, \quad y, z \in W.$$

Таким чином, W – метричний простір. Цей простір є повним. Справді, якщо послідовність функцій $y_n = y_n(x)$, $y_n \in W$, є фундаментальною, то, як відомо з математичного аналізу, ця послідовність збігається рівномірно на відрізку G до деякої неперервної на цьому відрізку функції $y = y(x)$. Для функцій $y_n \in W$ виконується нерівність

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b, \quad x \in G, \ \ n = 1, 2, \dots,$$

яка зберігається після переходу до границі при $n \to \infty$, тобто $|y(x) - y_0| \leqslant b$. Але тоді $y \in W$, звідки випливає, що W – повний простір.

Праву частину інтегрального рівняння (6.7) природно розглядати як деяке інтегральне перетворення неперервної функції $y(x)$. Рівність

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big) dt \tag{6.8}$$

ставить у відповідність кожній функції $y \in W$ деяку функцію $z \in W$. Справді, якщо $y \in W$, то $y(x)$ неперервна функція, графік якої належить прямокутнику $D_1 = \{(x, y) : x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h, \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$, тому на підставі неперервності функції $f(x, y)$ в D_1 права частина рівняння (6.8) є неперервною функцією від x, тобто $z(x)$ – неперервна функція на відрізку G. Далі, використовуючи відому з математичного аналізу нерівність

$$\left| \int_a^b g(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |g(x)|\, dx \right|, \tag{6.9}$$

одержуємо, що

$$|z(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant M\, |x - x_0| \leqslant Mh \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b,$$

звідки випливає, що $z \in W$.

Отже, кожній неперервній функції $y(x)$ формула (6.8) ставить у відповідність неперервну функцію $z(x)$. Результат виконання цього перетворення позначимо через Ay:

$$Ay \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Таким чином, можемо вважати, що рівність (6.8) визначає оператор

$$z = Ay \quad (y, z \in W),$$

який переводить повний простір W у себе (такий оператор називають ***інтегральним оператором Фредгольма***). Покажемо, що цей оператор є стискуючим. Справді, якщо $z_1 = Ay_1$, $z_2 = Ay_2$ $(y_1, y_2 \in W)$, то, використовуючи (6.8), (6.9), умову теореми про обмеженість частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$, а також теорему Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо

$$|z_1 - z_2| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)| \cdot \left| f'_y(t, \omega(t)) \right| dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \rho(y_1, y_2) L\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(y_1, y_2) L\, |x - x_0| \leqslant Lh\, \rho(y_1, y_2) = \alpha \rho(y_1, y_2), \tag{6.10}$$

де $\omega \in [y_1, y_2]$, а число $\alpha = Lh$ задовольняє нерівність $0 \leqslant \alpha < 1$ (за умовою $h < 1/L$).

З (6.10) випливає, що

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{x \in G} |z_1(x) - z_2(x)| \leqslant \alpha \rho(y_1, y_2),$$

а отже, згідно з принципом стискуючих відображень (теорема 1) у просторі W існує єдина функція (нерухома точка) $y \in W$, для якої $y = Ay$, інакше кажучи, функція, яка є розв'язком рівняння (6.7), а отже, й розв'язком задачі Коші (6.5), (6.6). Теорему доведено.

Зауваження 1. Застосовуючи метод послідовних наближень, можна отримати наближений розв'язок задачі Коші (6.5), (6.6):

$$y_n(x) = Ay_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $y_0 \in W$.

Зауваження 2. Умову теореми 2 про обмеженість частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ можна замінити ***умовою Ліпшіца***:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|,$$

де $(x, y_1), (x, y_2) \in D$, L – стала Ліпшіца. Покажемо, що з обмеженості частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ в області D випливає виконання умови Ліпшіца. Справді, нехай $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant L$. Тоді, використовуючи формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \big|f'_y(x, \omega(x))\big| \cdot |y_1 - y_2| \leqslant L\,|y_1 - y_2|,$$

де $\omega \in [y_1, y_2]$.

Якщо виконуються умови теореми 2 і в деякому околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні похідні до k-го порядку включно, то розв'язок $y(x)$ задачі Коші (6.5), (6.6) неперервно диференційовний $(k+1)$ разів. Справді, оскільки функція $f(x, y(x))$ неперервно диференційовна, то з (6.5) випливає, що $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \equiv f_1(x, y)$. За умовою $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервно диференційовні, тому $y''' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f = f_2(x, y)$ також неперервно диференційовна функція. Повторюючи аналогічні міркування k разів, одержимо, що $y^{(k+1)} = f_k(x, y)$ – неперервна функція.

3. Продовження розв'язку задачі Коші. Нехай Q – деяка область у $\mathbf{R}^2$ і функція $f(x, y)$ неперервна у цій області. Для довільної точки (x_0, y_0) прямокутника D теорема Пеано (лекція 2) дає змогу встановити існування розв'язку задачі Коші (6.5), (6.6) на деякому, можливо досить малому, відрізку з центром у точці x_0. Інакше кажучи, теорема Пеано – це локальна теорема існування розв'язку диференціального рівняння (6.5). Для її застосування параметри a і b прямокутника D (вони можуть залежати від x_0, y_0), центр якого розташований у точці (x_0, y_0), потрібно вибрати такими, щоб $D \subset Q$. Після цього можна визначити число $h = h(x_0, y_0)$ і відповідний відрізок G, на якому існує розв'язок задачі (6.5), (6.6).

Кінцеві точки графіка розв'язку задачі (6.5), (6.6), існування якого гарантує теорема Пеано, лежать в області Q. Розглядаючи їх як нові початкові дані, можна знову застосувати теорему Пеано й розширити область існування цього розв'язку, якщо взяти до уваги таке твердження.

Теорема 3. *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області Q, а функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – неперервні розв'язки рівняння* (6.5) *на відрізках $[x_0, x_1]$ і $[x_1, x_2]$ відповідно, причому $y_1(x_1) = y_2(x_1)$. Тоді функція*

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & \text{якщо } x \in [x_0, x_1], \\ y_2(x), & \text{якщо } x \in (x_1, x_2] \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (6.5) *на відрізку $[x_0, x_2]$.*

Доведення. Очевидно, що так визначена функція $y(x)$ задовольняє рівняння (6.5) як на інтервалі $[x_0, x_1)$, так і на $(x_1, x_2]$. Лівостороння і правостороння похідні функції $y(x)$ у точці x_1 існують і набувають значень $f(x_1, y_1(x_1))$ і $f(x_1, y_2(x_1))$ відповідно. Але з умови теореми випливає, що ці значення збігаються з $f(x_1, y(x_1))$, а тому $y(x)$ – розв'язок рівняння (6.5) на всьому відрізку $[x_0, x_2]$. Теорему доведено.

Можливо, що інтегральну криву не можна буде продовжити через наближення до точки, у якій порушені умови теореми існування та єдиності розв'язку, або інтегральна крива наблизиться до асимптоти, яка паралельна до осі Oy. Ці випадки проілюструємо прикладами:

1) $xdx + ydy = 0$, $y(0) = 4$. Інтегруючи рівняння і використовуючи початкову умову, одержуємо:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, \quad y(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{C^2 - x^2}, \quad C = 4 \quad \Rightarrow$$
$$y = \sqrt{16 - x^2}.$$

Розв'язок не можна продовжити за межі інтервалу $-4 < x < 4$ (рис. 6.1). У межових точках $(-4, 0)$ і $(4, 0)$ права частина рівняння $y' = -\frac{x}{y}$ розривна. Умови теореми Пеано (існування розв'язку) порушені.

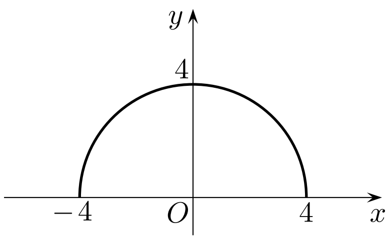

Рис. 6.1

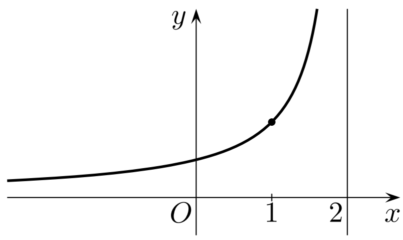

Рис. 6.2

2) $y' = y^2$, $y(1) = 1$. Інтегруючи рівняння та використовуючи початкову умову, одержуємо:

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \; y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x-2}.$$

Інтегральну криву можна продовжити лише до асимптоти $x = 2$ $(-\infty < x < 2)$ (рис. 6.2).

4. Коректність задачі Коші. У реальних задачах, що моделюються й розв'язуються за допомогою диференціальних рівнянь вигляду (6.5), початкові умови, а також права частина – функція f, як правило, відомі з деяким наближенням. Окрім того, функція f може залежати від одного або кількох параметрів (маси, температури, заряду тощо), які характеризують природу задачі й завжди вимірюються з деякою похибкою, тобто наближено. Тому важливими є питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, а також про те, як змінюється цей розв'язок на скінченному проміжку за малих змін (збурень) початкових значень, параметрів і самої функції f. Вимоги існування та єдиності розв'язку, його неперервної залежності від початкових умов, параметрів і функції f на скінченному проміжку становлять зміст поняття ***коректності задачі Коші***.

Використовуючи теорему 2 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, розглянемо теореми, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема 4 (про неперервну залежність розв'язків від параметру). *Якщо права частина диференціального рівняння*

$$y' = f(x, y, \mu) \tag{6.11}$$

неперервна за змінною μ, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, і для кожного фіксованого μ задовольняє умови теореми 2 з тими самими сталими a, b, L, M, то розв'язок $y = y(x, \mu)$ рівняння (6.11), *який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від μ.*

Доведення. Оскільки члени послідовності

$$y_n(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t, \mu)\big)\,dt$$

є неперервними функціями змінних x і μ, а стала $\alpha = Lh < 1$ не залежить від μ, то послідовність $y_1(x, \mu)$, $y_2(x, \mu)$, $\ldots$ збігається до $y(x, \mu)$ рівномірно по μ. Як відомо з математичного аналізу, рівномірно збіжна послідовність неперервних функцій збігається до неперервної функції, тобто $y = y(x, \mu)$ – функція, неперервна за аргументом μ. Теорему доведено.

Теорема 5 (про неперервну залежність від початкових умов). *Нехай виконані умови теореми 2. Тоді розв'язок задачі Коші* (6.5), (6.6) $y = y(x, x_0, y_0)$ *неперервно залежить від початкових умов.*

Доведення. Якщо зробити заміни $z = y(x, x_0, y_0) - y_0$ і $t = x - x_0$, то відносно функції $z(t)$ одержимо диференціальне рівняння $z' = f(t + x_0, z + y_0)$ з нульовими початковими умовами. Згідно з теоремою 4 маємо неперервну залежність розв'язків від x_0, y_0 як від параметрів. Теорему доведено.

Рекомендована література: [7, с. 52 – 63], [9, с. 71 – 90], [10, с. 27 – 41], [17, с. 63 – 78], [20, с. 27 – 41].

Питання до лекції 6

1. Що називають метричним простором? Які властивості задовольняє метрика такого простору? Наведіть приклади метричних просторів.

2. Яку послідовність елементів метричного простору називають фундаментальною? Який метричний простір називають повним?

3. Що таке оператор, заданий у повному метричному просторі? Коли оператор відображає метричний простір у себе? Який оператор називають стискуючим? Що називають нерухомою точкою оператора?

4. Як формулюється принцип стискуючих відображень? Яке його практичне значення? Чому?

5. Як формулюється теорема Коші про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної? Наведіть основні ідеї доведення цієї теореми.

6. Як, використовуючи метод послідовних наближень, можна знайти наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?

7. Чи можна продовжити розв'язок задачі Коші за межі відрізку, визначеного теоремою Коші? Наведіть приклади.

8. Що становить зміст поняття коректність задачі Коші? Наведіть теореми про неперервну залежність розв'язків від параметру та про неперервну залежність від початкових умов. У чому практична важливість цих теорем?

Вправи до лекції 6

1. Побудуйте послідовні наближення y_0, y_1, y_2 до розв'язку задачі Коші $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$.

2. Вкажіть який-небудь відрізок, на якому існує розв'язок задачі Коші $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$.

3. Користуючись якою-небудь достатньою умовою єдиності, виділіть на площині Oxy ті точки, через які проходить єдиний розв'язок рівняння $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$.

4. Чи можуть графіки двох розв'язків рівняння $y' = x + y^2$ перетинатися (дотикатися) в деякій точці?

5. Скільки похідних мають розв'язки рівнянь:

$$\text{а) } y' = x + y^{7/3}; \quad \text{б) } y' = x|x| - y^2.$$

Розділ 2.
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Лекція 7. Диференціальні рівняння вищих порядків

План

1. Основні означення й поняття.
2. Неповні рівняння.
3. Однорідні рівняння.

1. Основні означення й поняття. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\Big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\Big) = 0. \tag{7.1}$$

Якщо рівняння (7.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y^{(n)} = f\Big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\Big). \tag{7.2}$$

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі (a, b), називають ***розв'язком*** рівняння (7.2) на цьому інтервалі, якщо вона для всіх $x \in (a, b)$ перетворює це рівняння у тотожність.

Для рівняння (7.2) ***задача Коші*** формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який для $x = x_0$ задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{7.3}$$

де $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа, які називають ***початковими даними розв'язку*** $y = y(x)$. Число x_0 називають початковим значенням незалежної змінної x, сукупність чисел x_0, y_0, y_0', $\dots$,

$y_0^{(n-1)}$ – ***початковими даними рівняння*** (7.2), а умови (7.3) – ***початковими умовами***.

Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{7.4}$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0'. \tag{7.5}$$

З геометричної точки зору задача Коші (7.4), (7.5) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку (x_0, y_0) і має у цій точці заданий напрям дотичної y_0', тобто $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Зауважимо, що єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння n-го порядку (7.2) не означає, що через точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної (лекція 2). Наприклад, єдиність розв'язку задачі Коші (7.4), (7.5) означає, що через кожну точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива рівняння (7.4), дотична до якої у цій точці утворює з додатним напрямом осі Ox кут α_0, для якого $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$. Водночас, крім цієї інтегральної кривої через точку (x_0, y_0) можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної у цій точці.

Розглянемо питання про механічне трактування диференціального рівняння другого порядку, його розв'язків та задачі Коші. Нехай матеріальна точка маси m рухається по прямій, яку приймемо за вісь Ox, під дією сили $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$, залежної від часу t, положення x і швидкості $\frac{dx}{dt}$ у момент часу t. Згідно з другим законом Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

де $\frac{d^2x}{dt^2}$ – прискорення точки в момент часу t, або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{7.6}$$

де $f = F/m$.

Кожному розв'язку $x = x(t)$ рівняння (7.6) відповідає певний ***закон руху***, тому часто розв'язок $x = x(t)$ називають ***рухом***, який визначений рівнянням (7.6). Задача інтегрування рівняння (7.6) полягає у знаходженні всіх рухів, визначених цим рівнянням, та у вивченні їх властивостей.

З механічної точки зору задача Коші для рівняння (7.6) полягає у знаходженні такого руху $x = x(t)$, який задовольняє початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0,$$

тобто в початковий момент часу $t = t_0$ точка повинна займати задане положення x_0 і мати задану швидкість x'_0.

Достатня умова існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку поширюється і на випадок рівняння n-го порядку: *для існування* (*неперервного разом з похідними до порядку* n *включно*) *розв'язку задачі Коші* (7.2), (7.3) *досить припустити, щоб права частина рівняння* (7.2) *була неперервною в околі початкових даних* (***теорема Пеано***).

Відповідь на питання про існування єдиного розв'язку задачі Коші (7.2), (7.3) дає така теорема [19, с. 93 – 99].

Теорема (Коші). *Якщо функція* $f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$ *у рівнянні* (7.2):

1) *неперервна за всіма аргументами у деякому околі точки* $\Big(x_0,\, y_0,\, y'_0,\, \dots,\, y_0^{(n-1)}\Big)$;

2) *має обмежені частинні похідні за змінними* y, y', $\dots$, $y^{(n-1)}$ *в околі точки* $\Big(x_0,\, y_0,\, y'_0,\, \dots,\, y_0^{(n-1)}\Big)$,

то існує єдиний розв'язок задачі Коші (7.2), (7.3), *який визначений і неперервний разом з похідними до порядку* n *включно на деякому відрізку* $|x - x_0| \leqslant h$.

Загальним розв'язком рівняння (7.2) називають сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від n довільних сталих:

$$y = \varphi\,(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Загальний розв'язок рівняння (7.2) у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння.

У деяких випадках, інтегруючи рівняння (7.2), шукають сім'ю інтегральних кривих, яка залежить від n довільних сталих C_1, C_2, …, C_n, у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y = \psi(p, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Таку сім'ю інтегральних кривих називають ***загальним розв'язком у параметричній формі***.

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (7.2) називають ***частинним***, якщо його можна одержати з формули загального розв'язку при певних числових значеннях сталих C_1, C_2, …, C_n. Розв'язок, який не можна одержати з загального розв'язку при жодних значеннях сталих C_1, C_2, …, C_n, називають ***особливим***.

Зауважимо, що диференціальне рівняння n-го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежну від довільних сталих, кількість яких може бути $n-1$. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y'' = 2\sqrt{y'}$.
Розв'язання. Зробимо заміну $y' = z$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді

$$z' = 2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int dx \quad (z \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\sqrt{z} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad z = (x + C_1)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = (x + C_1)^2.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2.$$

Особливому розв'язку $z = 0$ рівняння $z' = 2\sqrt{z}$ відповідає сім'я особливих розв'язків $y = C$ рівняння $y'' = 2\sqrt{y'}$.
***Відповідь*:** $y = (x + C_1)^3/3 + C_2,\ y = C$.

2. Неповні рівняння. Розглянемо деякі класи звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку, загальний розв'язок (загальний інтеграл) яких можна знайти за допомогою квадратур. Зведення до квадратур виконується або за допомогою спеціальних прийомів, або шляхом попереднього зниження порядку рівняння.

Розглянемо спочатку неповні рівняння. Найпростішими з них є рівняння вигляду

$$F\Big(x, y^{(n)}\Big) = 0. \tag{7.7}$$

Припустимо, що (7.7) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$. Тоді

$$y^{(n)} = f(x). \tag{7.8}$$

Рівняння (7.8) з неперервною функцією $f(x)$ завжди інтегрується в квадратурах. Справді, інтегруючи обидві частини цього рівняння, маємо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Далі аналогічно одержуємо:

$$y^{(n-2)} = \int\!\!\int f(x)\,dx\,dx + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int\!\!\int\!\!\int f(x)\,dx\,dx\,dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y = \underbrace{\int\!\!\int\dots\int}_{n \text{ разів}} f(x)\,dx\,dx\dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} +$$

$$+ \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \tag{7.9}$$

Формула (7.9) визначає загальний розв'язок рівняння (7.8).

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y'' = \sin^2 3x$.

Розв'язання. Інтегруючи обидві частини рівняння, одержуємо

$$y' = \int \sin^2 3x\, dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C_1.$$

Інтегруючи ще один раз, знаходимо загальний розв'язок:

$$y = \int \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C_1 \right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 6x}{72} + C_1 x + C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, $C_1 := C_1/2$.
Відповідь: $y = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 6x}{72} + C_1 x + C_2$.

У динаміці матеріальної точки рівняння вигляду $x'' = f(t)$, де t – час, $x = x(t)$, зустрічається при вивченні прямолінійного руху, якщо сила, що діє на цю точку, залежить тільки від часу.

Задача 1. *Знайти закон руху* $x(t)$ *матеріальної точки маси* m, *яка рухається вздовж прямої під дією сили, що змінюється за формулою* $F = k\,e^{-pt}$, *де* $p > 0$, *якщо початкові положення та швидкість руху дорівнюють нулю.*
Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона

$$mx'' = k\,e^{-pt} \quad \Rightarrow \quad x'' = \frac{k}{m} e^{-pt},$$

тобто маємо рівняння вигляду $x'' = f(t)$. Двічі інтегруючи, одержуємо:

$$x' = -\frac{k}{mp} e^{-pt} + C_1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k}{mp^2} e^{-pt} + C_1 t + C_2.$$

Оскільки за умовою задачі $x(0) = 0$, $v(0) = x'(0) = 0$, то $C_1 = \frac{k}{mp}$, $C_2 = -\frac{k}{mp^2}$, а тому

$$x = \frac{k}{mp^2} e^{-pt} + \frac{k}{mp} t - \frac{k}{mp^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{k}{mp^2} \left(e^{-pt} + pt - 1 \right).$$

Зауважимо, що оскільки $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} = 0$, то для великих значень t знайдений рух наближається до рівномірного руху

$$x(t) = \frac{k}{mp} t - \frac{k}{mp^2}.$$

Відповідь: $x(t) = \frac{k}{mp^2} \left(e^{-pt} + pt - 1 \right)$.

Розглянемо диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох її послідовних перших похідних, тобто рівняння вигляду

$$F\Big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\Big) = 0, \tag{7.10}$$

де $1 \leqslant k < n$. Введемо нову невідому функцію $z = z(x)$ за формулою

$$y^{(k)} = z. \tag{7.11}$$

З (7.10), (7.11) випливає, що функція z є розв'язком рівняння

$$F\Big(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\Big) = 0. \tag{7.12}$$

Звичайно, рівняння (7.12) не обов'язково інтегрується у скінченному вигляді, але його порядок на k одиниць менший від порядку рівняння (7.10). Якщо $z = \omega\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ – загальний розв'язок рівняння (7.12), то для знаходження функції y одержуємо рівняння k-го порядку

$$y^{(k)} = \omega\,(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

яке легко інтегрується (це рівняння вигляду (7.8)).

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y'' = \sqrt{2 - 3y'}$.
Розв'язання. Зробимо заміну $y' = z(x)$. Тоді для знаходження функції z одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = \sqrt{2 - 3z}.$$

Зінтегруємо його:

$$\frac{dz}{\sqrt{2-3z}} = dx \quad (2 - 3z \neq 0) \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3}\sqrt{2-3z} = x + C_1 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{4}{9}(2 - 3z) = (x + C_1)^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}(x + C_1)^2.$$

Оскільки $z = y'$, то

$$y' = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}(x + C_1)^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}(x + C_1)^3 + C_2.$$

Окрім того, якщо $z = 2/3$, то $y = 2x/3 + C$. Ці розв'язки є особливими.
Відповідь: $y = 2x/3 - (x + C_1)^3/4 + C_2,\ y = 2x/3 + C$.

Задача 2. *Точка маси m рухається по прямій під дією сили, яка змінюється за формулою $F_1 = A \sin \omega t$. Вважаючи, що опір середовища пропорційний швидкості точки, тобто $F_2 = -kv$, вивести закон руху $x(t)$ точки, якщо її початкові положення та швидкість дорівнюють нулю.*
Розв'язання. За умовою задачі $F = F_1 + F_2$. Згідно з другим законом Ньютона

$$ma = A \sin \omega t - kv,$$

а оскільки $v = x'$, $a = x''$, то одержуємо диференціальне рівняння вигляду (7.10):

$$mx'' + kx' = A \sin \omega t.$$

Початковими умовами є $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ (за умовою задачі початкові положення та швидкість точки дорівнюють нулю).

Вводимо нову функцію $x' = u$ (тоді $x'' = u'$) і одержуємо лінійне рівняння першого порядку

$$u' + \frac{k}{m} u = \frac{A}{m} \sin \omega t$$

з початковою умовою $u(0) = 0$. Розв'язок цього рівняння можна знайти за формулою (4.5) з лекції 4. Пропонуємо читачам самостійно переконатися в тому, що

$$u = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

З умови $u(0) = 0$ знаходимо сталу $C_1 = \frac{Am\omega}{k^2+\omega^2 m^2}$, а тому

$$u = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

Оскільки $u = x'$, то функція $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$x' = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right),$$

інтегруючи яке, знаходимо

$$x(t) = \frac{Am}{k^2+\omega^2 m^2}\left(-\frac{m\omega}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m\omega}\cos\omega t - \sin\omega t\right) + C_2.$$

Оскільки $x(0) = 0$, то

$$C_2 = \frac{Am}{k^2+\omega^2 m^2}\left(\frac{m\omega}{k} + \frac{k}{m\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{A}{k\omega}.$$

Таким чином,

$$x(t) = \frac{A}{k\omega} - \frac{Am}{k^2+\omega^2 m^2}\left(\frac{m\omega}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m\omega}\cos\omega t + \sin\omega t\right). \ \blacksquare$$

Розглянемо тепер диференціальне рівняння, яке явно не містить незалежної змінної, тобто рівняння вигляду

$$F\Big(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0. \tag{7.13}$$

Покажемо, що порядок цього рівняння можна знизити на одиницю. Для цього введемо нову функцію z за формулою $y' = z$, вважаючи y новою незалежною змінною, тобто $z = z(y)$. Виразимо похідні y'', $y''', \ldots, y^{(n)}$ через функцію z та її похідні за змінною y:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z'z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\cdot z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}\cdot z\right)\frac{dy}{dx} = (z''z + z'^2)z,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y^{(n)} = \omega\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big).$$

Отже, для знаходження функції z одержали диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку

$$F\Big(y, z, z'z, \ldots, \omega\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0. \tag{7.14}$$

Якщо $z = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ – загальний розв'язок рівняння (7.14), то загальний інтеграл рівняння (7.13) можемо знайти, розв'язавши рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}).$$

Зауважимо, що приймаючи y за незалежну змінну, можна втратити розв'язки рівняння (7.13) вигляду $y = C$. Безпосередньою підстановкою у рівняння (7.13) потрібно з'ясувати, чи має воно такі розв'язки.

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $yy'' = y'^2 - y'^3$.
Розв'язання. Нехай $y' = z(y)$. Тоді $y'' = z'z$ і, підставляючи в рівняння, маємо:

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2 - z^3 \quad \Rightarrow \quad z\left(y\frac{dz}{dy} - z + z^2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z = 0 \quad \text{або} \quad y\frac{dz}{dy} = z - z^2.$$

З першого рівняння випливає, що $y' = 0$, а отже, $y = C$, а з другого:

$$y\frac{dz}{dy} = z - z^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z - z^2} = \int \frac{dy}{y} \quad \left(z - z^2 \neq 0, \;\; y \neq 0\right) \quad \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|z| - \ln|1 - z| = \ln|y| + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z}{1-z} = C_1 y \quad \Rightarrow \quad z = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}.$$

Оскільки $z = y'$, то

$$y' = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1 + C_1 y}{y} dy = C_1 dx \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + C_1\right) dy = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + C_1 y = C_1 x + C_2.$$

Якщо $z - z^2 = 0$, то $z = 0$ або $z = 1$. Випадок $z = 0$ вже розглянуто, а якщо $z = 1$, то $y' = 1$, $y = x + C$. Усі ці прямі є особливими розв'язками.
***Відповідь*:** $\ln|y| + C_1 y = C_1 x + C_2,\ y = x + C,\ y = C.$

3. Однорідні рівняння. Диференціальне рівняння

$$F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0 \tag{7.15}$$

називають ***однорідним*** відносно шуканої функції та її похідних, якщо його ліва частина для довільного $t \neq 0$ справджує умову

$$F\Big(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}\Big) = t^m \cdot F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big), \tag{7.16}$$

де число m – вимір однорідності функції F. Покажемо, що за допомогою підстановки

$$z = \frac{y'}{y}, \tag{7.17}$$

де $z = z(x)$ – нова невідома функція, порядок рівняння (7.15) можна знизити на одиницю. Справді, оскільки

$$y' = yz, \qquad y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y \cdot (z'' + 3zz' + z^3),\ \ldots,\ y^{(n)} = y \cdot g\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big),$$

то, підставляючи ці вирази в (7.15), маємо співвідношення

$$F\Big(x, y, y\,z, y \cdot (z^2 + z'), \ldots, y \cdot g\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0,$$

яке, враховуючи (7.16), можемо записати у вигляді

$$y^m \cdot F\Big(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, g\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0.$$

Після скорочення на y^m $(y \neq 0)$, одержуємо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$F\Big(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, g\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0. \tag{7.18}$$

Якщо $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ – загальний розв'язок рівняння (7.18), то, беручи до уваги (7.17), знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння (7.15):

$$y = C_n \cdot e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\, dx},$$

де C_1, C_2, …, C_n – довільні сталі.

Функція $y = 0$ є розв'язком рівняння (7.15), але цей розв'язок можна отримати з загального при $C_n = 0$.

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння* $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$.
Розв'язання. Легко переконатися, що ліва частина рівняння є однорідною функцією (виміру 2), а тому задане рівняння є однорідним. Нехай $y' = yz$. Тоді $y'' = (z' + z^2)y$ і, підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$x^2y^2(z' + z^2) - (y - xyz)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x^2(z' + z^2) - (1 - xz)^2 = 0 \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$x^2z' + 2xz = 1 \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}.$$

Отже, маємо лінійне рівняння першого порядку (лекція 4). Його загальним розв'язком є $z = 1/x + C_1/x^2$. Далі маємо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right) dx \quad \Rightarrow$$
$$\ln|y| = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_2xe^{-C_1/x}.$$

Розв'язок $y = 0$ є частинним (його можна одержати з загального розв'язку при $C_2 = 0$).
***Відповідь*:** $y = C_2xe^{-C_1/x}$.

Рекомендована література: [9, с. 15 – 17, 50 – 58], [14, с. 227 – 287], [15, с. 41 – 51], [16, с. 136 – 161], [19, с. 91 – 113].

Питання до лекції 7

1. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної?

2. Як формулюється задача Коші для диференціальне рівняння n-го порядку? Яка достатня умова існування розв'язку такої задачі? Наведіть теорему Коші про існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Який геометричний зміст має ця задача для диференціального рівняння другого порядку?

3. Який механічний зміст диференціального рівняння другого порядку та його розв'язків?

4. Що називають загальним розв'язком (загальним інтегралом) диференціального рівняння n-го порядку? Який розв'язок називають частинним, особливим? Чи може диференціальне рівняння n-го порядку мати безліч особливих розв'язків?

5. Який вигляд має загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ з неперервною правою частиною?

6. За допомогою якої заміни можна знизити порядок диференціального рівняння, що не містить шуканої функції, і рівняння, що не містить шуканої функції та послідовних перших похідних?

7. Як знизити порядок диференціального рівняння, яке не містить незалежної змінної?

8. Яку умову має справджувати ліва частина диференціального рівняння $F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$, щоб воно було однорідним відносно шуканої функції та її похідних? Яка заміна виконується у такому рівнянні?

Вправи до лекції 7

1. Зінтегруйте рівняння:

$$\text{а) } y'' = 2^x; \quad \text{б) } y''' = \sin x \cos x; \quad \text{в) } y^{\mathrm{IV}} = 2x^{-2}.$$

2. Знайдіть частинний розв'язок рівняння $y''' = \cos x$, який задовольняє початкові умови $y(0) = -5$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$.

3. Визначте тип рівнянь та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } xy'' + xy'^2 + y' = 0; \quad \text{б) } y' + y''^2 = xy'; \quad \text{в) } 4\sqrt{y}y'' = 1.$$

4. Знайдіть розв'язок рівнянь, які задовольняють задані початкові умови, дослідивши попередньо питання про існування та єдиність шуканого розв'язку:

$$\text{а) } y'' = (1 + y'^2)^{3/2}, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0;$$
$$\text{б) } 4y' + y''^2 = 4xy'', \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1.$$

5. Відшукайте рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних, та зінтегруйте його:

$$\text{а) } x^2y^2 - y''^2 + yy'^2 = 0; \quad \text{б) } xyy'' + yy' = xy'^2 + y^2;$$
$$\text{в) } xyy'' + xy'^2 - \sqrt{y}y' = 0.$$

6. Знайдіть інтегральну криву рівняння $yy'' + y'^2 = 1$, яка проходить через точку $(0, 1)$ і дотикається у цій точці до прямої $y = 1 - x$. Обґрунтуйте єдиність такої інтегральної кривої.

Лекція 8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку

План

1. Основні означення й поняття.
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння.
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції.
4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.
5. Формула Остроградського – Ліувілля.

1. Основні означення й поняття. У багатьох прикладних задачах як самі функції, що вивчаються, так і їх похідні набувають настільки малих значень, що їх квадратами, кубами і вищими степенями можна знехтувати. Це дозволяє замінити довільні залежності між величинами залежностями лінійними. Застосовуючи зазначену операцію лінеаризації до диференціальних рівнянь, що описують певний процес чи явище, одержують диференціальні рівняння, в які шукана функція та її похідні входять лінійно. Такі рівняння називають лінійними.

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{8.1}$$

Вважатимемо, що функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ (***коефіцієнти*** рівняння) і права частина $f(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b).

Якщо $f(x) \equiv 0$ на інтервалі (a, b), то рівняння (8.1) називають ***лінійним однорідним***. Воно має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{8.2}$$

Якщо функція $f(x)$ тотожно відмінна від нуля на інтервалі (a, b), то рівняння (8.1) називають ***лінійним неоднорідним***.

Розглянемо питання про існування розв'язку рівняння (8.1). Розв'язавши його відносно старшої похідної, маємо:

$$y^{(n)} = f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y. \tag{8.3}$$

На підставі зроблених припущень відносно коефіцієнтів та правої частини рівняння (8.1) переконуємось, що права частина рівняння (8.3) є неперервною функцією на інтервалі (a, b) і має неперервні, а отже, й обмежені на відрізку $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ частинні похідні за змінними y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ (ними є функції $-p_n(x)$, $-p_{n-1}(x)$, $\ldots$, $-p_1(x)$ відповідно). Отже, з теореми Коші (лекція 7) випливає, що для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y'_0, \;\; \ldots, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0 \in (a, b)$, рівняння (8.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$. Цей розв'язок n разів диференційовний на інтервалі (a, b). Особливих розв'язків рівняння (8.1) не має.

Для скорочення записів позначимо ліву частину рівняння (8.1) через $L(y)$:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \tag{8.4}$$

Таким чином, $L(y)$ – це результат виконання над функцією y операцій, вказаних у правій частині формули (8.4), а саме: знаходження похідних функції y до порядку n включно, множення y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ на коефіцієнти рівняння й додавання отриманих добутків. Сукупність цих операцій позначимо через L:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

і називатимемо ***лінійним диференціальним оператором n-го порядку***.

Відзначимо основні властивості оператора L, які випливають з аналогічних властивостей похідних:

Властивість 1. *Сталий множник можна винести за знак лінійного диференціального оператора, тобто для довільної сталої* C

$$L(Cy) = C\,L(y).$$

Властивість 2. *Лінійний диференціальний оператор від суми функцій дорівнює сумі лінійних диференціальних операторів від доданків, тобто*

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Використовуючи оператор L, лінійне неоднорідне рівняння (8.1) і лінійне однорідне рівняння (8.2) можна записувати відповідно як $L(y) = f(x)$ і $L(y) = 0$.

2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння. Для знаходження дійсних розв'язків лінійного диференціального рівняння іноді використовують його комплексні розв'язки.

Комплексну функцію $y(x) = u(x) + i\,v(x)$, де $i = \sqrt{-1}$, дійсної змінної x називають ***комплексним розв'язком*** рівняння (8.2) на інтервалі (a, b), якщо її підстановка перетворює це рівняння у тотожність $L\left(y(x)\right) \equiv 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Покажемо, що якщо комплексна функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (8.2), то її дійсна та уявна частини є дійсними розв'язками цього ж рівняння. Справді, нехай функція $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ є розв'язком рівняння (8.2), тобто $L\left(y(x)\right) \equiv 0$. Використовуючи властивості 1, 2 оператора L, одержуємо, що

$$L\left(y(x)\right) = L\left(y_1(x) + iy_2(x)\right) = L\left(y_1(x)\right) + iL\left(y_2(x)\right).$$

Отже, $L(y_1(x)) + iL(y_2(x)) \equiv 0$, звідки й випливає, що

$$L(y_1(x)) \equiv 0, \quad L(y_2(x)) \equiv 0.$$

Очевидно, кожне лінійне однорідне рівняння (8.2) має нульовий розв'язок $y \equiv 0$, який називають ***тривіальним***.

Пізніше буде показано, що знання частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння спрощує процес побудови загального розв'язку, а іноді дозволяє повністю розв'язати задачу інтегрування цього рівняння. Це є можливим завдяки тому, що частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння мають низку цікавих властивостей, які сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. *Якщо y_1 – частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння* (8.2), *то $y = Cy_1$, де C – довільна стала, також є розв'язком цього рівняння.*
Доведення. Оскільки $L(y_1) \equiv 0$, $a < x < b$, то, використовуючи властивість 1 оператора L, одержуємо, що

$$L(Cy_1) = CL(y_1) \equiv 0,$$

а отже, Cy_1 є розв'язком рівняння (8.2). Теорему доведено.

Таким чином, знаючи один частинний розв'язок рівняння (8.2), можемо без квадратур одержати відразу сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від одного параметра (сталої C).

Теорема 2. *Якщо y_1 і y_2 – два частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння* (8.2), *то їх сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.*
Доведення. Оскільки $L(y_1) \equiv 0$, $L(y_2) \equiv 0$, то, використовуючи властивість 2 оператора L, одержуємо, що

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv 0.$$

Теорему доведено.

З теорем 1, 2 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Якщо y_1, y_2, ..., y_n – частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння* (8.2), *то*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

де C_1, C_2, $\ldots$, C_n *– довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння.*

Для ілюстрації теореми 3 розглянемо рівняння $y'' + y = 0$. Воно, як легко переконатись, має розв'язки $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$, а тому його розв'язком є також кожна функція сім'ї $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Природно виникає питання: якими повинні бути n частинних розв'язків y_1, y_2, $\ldots$, y_n рівняння (8.2), щоб їх лінійна комбінація $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, яка містить n довільних сталих C_1, C_2, $\ldots$, C_n, була загальним розв'язком цього рівняння? Для відповіді на це важливе питання введемо поняття лінійної залежності (лінійної незалежності) функцій.

3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції. Функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$, визначені на інтервалі (a, b), називають ***лінійно незалежними*** на цьому інтервалі, якщо співвідношення

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \tag{8.5}$$

де α_1, α_2, $\ldots$, α_n – сталі, виконується для всіх $x \in (a, b)$ тільки тоді, коли всі $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Якщо у співвідношенні (8.5) хоча б одна із сталих α_1, α_2, $\ldots$, α_n відмінна від нуля, то функції y_1, y_2, $\ldots$, y_n називають ***лінійно залежними*** на інтервалі (a, b).

Розглянемо приклади.

1. Функції $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $\ldots$, $y_n = x^{n-1}$ лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Справді, рівність $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0$, в якій не всі α_j дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно, бо є алгебричним рівнянням $(n-1)$-го степеня, яке, як відомо з алгебри, не може мати більше $n-1$ різних коренів.

2. Функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ лінійно незалежні на будь-якому інтервалі, бо співвідношення $\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0$, де α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно на жодному інтервалі.

3. Функції $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 3$ лінійно залежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо $3 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 3 \equiv 0$.

Зауважимо, що у випадку лінійної залежності функцій одну з них можна лінійно виразити через інші. Наприклад, якщо функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні і $\alpha_n \neq 0$, то з (8.5) одержуємо:

$$y_n = -\frac{1}{\alpha_n}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}).$$

Для встановлення ознак лінійної залежності та лінійної незалежності функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ розглянемо визначник, складений з цих функцій та їх похідних до порядку $n-1$ включно:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{8.6}$$

Визначник (8.6) називають ***визначником Вронського*** або ***вронскіаном*** функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Теорема 4 (необхідна умова лінійної залежності n функцій). *Якщо функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні на деякому інтервалі (a, b), то їх вронскіан тотожно дорівнює нулю на цьому інтервалі.*

Доведення. Згідно з умовою теореми для $a < x < b$ маємо

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \tag{8.7}$$

де не всі числа α_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, дорівнюють нулю. Диференціюючи співвідношення (8.7) $n-1$ разів, одержуємо лінійну однорідну систему відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases} \tag{8.8}$$

Оскільки хоча б одне число α_j відмінне від нуля, то система (8.8) має ненульовий розв'язок. Отже, визначник цієї системи, який є вронскіаном функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n, дорівнює нулю в кожній точці інтервалу (a, b). Теорему доведено.

З теореми 4 випливає важливе твердження: *якщо* $W(x) \neq 0$ *хоча б в одній точці інтервалу* (a, b), *то функції* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *є лінійно незалежними на цьому інтервалі.* Наприклад, функції e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x} лінійно незалежні на (a, b), якщо k_1, k_2, k_3 – різні числа. Справді,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & k_3^2e^{k_3x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} =$$
$$= e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Наголошуємо, що тотожність $W(x) \equiv 0$ є тільки необхідною умовою лінійної залежності функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n, тобто з того, що $W(x) \equiv 0$, взагалі кажучи, не випливає, що функції y_1, $y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні (див. вправу 9 до лекції). Однак, якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є не довільними функціями, а частинними розв'язками лінійного однорідного рівняння (8.2), то справджується таке твердження.

Теорема 5 (необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку). *Якщо розв'язки* y_1, y_2, $\ldots$, y_n *лінійного однорідного рівняння* (8.2) *лінійно незалежні на інтервалі* (a, b), *то їх вронскіан відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Доведення. Припустимо, що у деякій точці $x_0 \in (a, b)$ $W(x_0) = 0$. Складемо систему рівнянь, вважаючи числа C_j за невідомі:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Визначником системи (8.9) є $W(x_0)$, а оскільки за припущенням $W(x_0) = 0$, то ця система має ненульовий розв'язок, який позначимо $C_1 = \tilde{C}_1$, $C_2 = \tilde{C}_2$, $\ldots$, $C_n = \tilde{C}_n$.

Складемо лінійну комбінацію розв'язків y_1, y_2, ..., y_n:

$$y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \ldots + \tilde{C}_n y_n. \tag{8.10}$$

Згідно з теоремою 3 функція (8.10) є розв'язком рівняння (8.2), а з системи (8.9) випливає, що у точці $x = x_0$ розв'язок (8.10) перетворюється в нуль разом з усіма похідними до порядку $n-1$ включно. Але ці самі умови задовольняє також тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння (8.2), а отже, згідно з теоремою Коші (про єдиність розв'язку) обидва розв'язки збігаються, тобто

$$\tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \ldots + \tilde{C}_n y_n \equiv 0,$$

причому не всі числа $\tilde{C}_j$ дорівнюють нулю. Це означає, що функції y_1, y_2, ..., y_n лінійно залежні на інтервалі (a, b), що суперечить умові теореми. Отже, припущення про те, що $W(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$, хибне. Теорему доведено.

З теорем 4, 5 випливає ознака лінійної незалежності n частинних розв'язків рівняння (8.2): *для того, щоб n розв'язків лінійного однорідного рівняння* (8.2) *були лінійно незалежними на інтервалі* (a, b), ***необхідно і достатньо***, *щоб їх вронскіан не перетворювався в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. Будь-яку сукупність n розв'язків лінійного однорідного рівняння (8.2), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a, b), називають ***фундаментальною системою розв'язків*** цього рівняння на інтервалі (a, b).

Наприклад, функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо вони є розв'язками цього рівняння і лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$. Але це рівняння має й інші фундаментальні системи розв'язків, наприклад, кожна пара функцій вигляду $y_1 = k \cos x$, $y_2 = k \sin x$, де k – довільна стала, відмінна від нуля, також буде фундаментальною системою розв'язків.

Можна довести (див., наприклад, [19, с. 118 – 119]), що кожне лінійне однорідне диференціальне рівняння має фундаментальну систему розв'язків, а як видно з наведеного прикладу, таке рівняння може мати безліч фундаментальних систем розв'язків.

Знання фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок рівняння (8.2), який містить n довільних сталих, причому цей розв'язок буде загальним.

Теорема 6. *Якщо y_1, y_2, ..., y_n – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння* (8.2), *то загальний розв'язок цього рівняння визначається формулою*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{8.11}$$

де C_1, C_2, ..., C_n *– довільні числа.*

Доведення. Покажемо, що завжди можна вибрати сталі C_1, C_2, ..., C_n так, щоб формула (8.11) визначала розв'язок рівняння (8.2), який задовольняє будь-які наперед задані початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\;\; y'(x_0) = y'_0,\; \ldots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{8.12}$$

Для визначення C_1, C_2, ..., C_n одержуємо неоднорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = y_0, \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) + \ldots + C_ny'_n(x_0) = y'_0, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{8.13}$$

Визначником системи (8.13) є $W(x_0)$. Згідно з теоремою 5 $W(x_0) \neq 0$, а отже, система (8.13) має єдиний розв'язок $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, ..., $\tilde{C}_n$. Функція (8.11) є розв'язком рівняння (8.2) згідно з теоремою 3. Вираз (8.11), в якому $C_i = \tilde{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, очевидно, задовольняє початкові умови (8.12). Теорему доведено.

Розглянемо, наприклад, рівняння $y'' + y = 0$. Раніше було показано, що функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, а тому згідно з теоремою 6 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ є загальним розв'язком наведеного рівняння.

5. Формула Остроградського – Ліувілля. Нехай маємо n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійного однорідного рівняння (8.2). Тоді це рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.14)$$

бо рівняння (8.14) має ті самі лінійно незалежні розв'язки, що й (8.2). Справді, якщо підставити в (8.14) замість y одну з функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, то одержимо визначник, який має два однакові стовпці і тому тотожно рівний нулю. Звідси випливає, що загальні розв'язки рівнянь (8.2) і (8.14) однакові, а самі рівняння відрізняються лише множником. Розкладаючи визначник з (8.14) за елементами останнього стовпця, запишемо рівняння (8.14) у вигляді

$$\Delta_0(x)y^{(n)} - \Delta_1(x)y^{(n-1)} + \Delta_2(x)y^{(n-2)} - \dots$$
$$\dots + (-1)^k\Delta_k(x)y^{(n-k)} + \dots + (-1)^n\Delta_n(x)y = 0, \qquad (8.15)$$

де $\Delta_i(x)$ – визначник, утворений викреслюванням останнього стовпця і $(n+1-i)$-го рядка у визначнику з (8.14).

Оскільки рівняння (8.15) збігається з рівнянням (8.2), то прирівнюючи коефіцієнти біля однакових похідних і враховуючи, що $\Delta_0(x) = W(x)$, одержуємо

$$p_1(x) = -\frac{\Delta_1(x)}{W(x)}, \quad p_2(x) = \frac{\Delta_2(x)}{W(x)}, \quad \dots, \quad p_n(x) = (-1)^n\frac{\Delta_n(x)}{W(x)}. \qquad (8.16)$$

Здиференціюємо тепер вронскіан (8.6), використовуючи таке правило: похідна від визначника n-го порядку дорівнює сумі n визначників, які одержуємо з нього почерговою заміною елементів першого, другого, …, n-го рядка їх похідними. Усі ці визначники, крім останнього, дорівнюють нулю (бо вони мають два однакові рядки), а тому

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Легко бачити, що $W'(x) = \Delta_1(x)$, а якщо врахувати першу формулу з (8.16), то

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -\,p_1(x),$$

звідки, інтегруючи, знаходимо

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}, \tag{8.17}$$

де $x = x_0$ – довільна точка з інтервалу (a, b). Формулу (8.17) називають ***формулою Остроградського – Ліувілля***. Вона дозволяє знайти вронскіан фундаментальної системи розв'язків рівняння (8.2), не маючи самої системи.

З формули Остроградського – Ліувілля випливають такі ***властивості вронскіана*** розв'язків лінійного однорідного рівняння:

1. *Якщо вронскіан n розв'язків* y_1, y_2, $\ldots$, y_n *рівняння* (8.2) *дорівнює нулю в деякій точці* $x_0 \in (a, b)$, *то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.*

2. *Якщо вронскіан n розв'язків рівняння* (8.2) *відмінний від нуля хоч в одній точці* $x_0 \in (a, b)$, *то він відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Формулу (8.14) можна використовувати для побудови диференціального рівняння, якщо відомою є його фундаментальна система розв'язків.

Приклад 1. *Побудувати диференціальне рівняння, яке має фундаментальну систему розв'язків* $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x - 1$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (8.14):

$$\begin{vmatrix} x^2 & x-1 & y \\ 2x & 1 & y' \\ 2 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладаючи визначник за елементами третього стовпця, маємо:

$$y\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [9, с. 91 – 102], [15, с. 171 – 177], [16, с. 174 – 197], [19, с. 113 – 121], [20, с. 93 – 106].

Питання до лекції 8

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n-го порядку? Чим лінійне однорідне рівняння відрізняється від лінійного неоднорідного?

2. Що називають лінійним диференціальним оператором n-го порядку і які його основні властивості? Як можна записати лінійні однорідне і неоднорідне рівняння з використанням лінійного диференціального оператора?

3. Що називають комплексним розв'язком лінійного однорідного рівняння? Доведіть, що дійсна і уявна частини комплексного розв'язку також є розв'язками цього рівняння.

4. Чи є лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння розв'язком цього ж рівняння?

5. Які функції називають лінійно незалежними та лінійно залежними на інтервалі? Наведіть приклади таких функцій.

6. Що називають вронскіаном функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$?

7. Як формулюється необхідна умова лінійної залежності функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$?

8. Як формулюється необхідна і достатня умова лінійної незалежності n частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння?

9. Що таке фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння? Як побудувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, знаючи його фундаментальну систему розв'язків?

10. Який вигляд має формула Остроградського – Ліувілля? Наведіть властивості вронскіана розв'язків лінійного однорідного рівняння, які випливають з цієї формули.

Вправи до лекції 8

1. Знайдіть $L(e^x)$, $L(e^{2x})$, $L(x^2)$, якщо L – лінійний диференціальний оператор, заданий формулою

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 3.$$

2. З'ясуйте, розв'язком якого рівняння є функція $y = x^2 e^x$:

а) $y''' - 2y'' = xe^x$; б) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; в) $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$.

3. Знайдіть вронскіан функцій:

$$\text{а) } y_1 = x^2,\ y_2 = \sqrt{x};\quad \text{б) } y_1 = e^x,\ y_2 = 4e^x;$$
$$\text{в) } y_1 = \cos^2 x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = 1.$$

Чи можна, знаючи вронскіан, зробити висновок про лінійну залежність (лінійну незалежність) цих функцій?

4. Дослідіть на лінійну залежність функції:

$$\text{а) } y_1 = e^{2x},\ y_2 = x^2;\quad \text{б) } y_1 = 3x + 5,\ y_2 = 9x + 15;$$
$$\text{в) } y_1 = 2^x,\ y_2 = 3^x,\ y_3 = 4^x.$$

5. Доведіть, що $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $y'' + y' - 6y = 0$.

6. Доведіть, що функції y_1, y_2 лінійно залежні на деякому інтервалі (a, b), якщо $\frac{y_1}{y_2} \equiv \text{const} \neq 0$, $a < x < b$.

7. Доведіть, що якщо серед функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ хоч одна тотожно дорівнює нулю, то вони лінійно залежні.

8. Запишіть лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке має фундаментальну систему розв'язків:

$$\text{а) } y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos 2x;\quad \text{б) } y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}.$$

9. Доведіть, що вронскіан функцій

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-1, 0], \\ x^2, & \text{якщо } x \in [0, 1], \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in [-1, 0], \\ 0, & \text{якщо } x \in [0, 1] \end{cases}$$

тотожно дорівнює нулю, але вони лінійно незалежні на відрізку $[-1, 1]$.

Лекція 9. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

План

1. Основні означення й поняття.
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел.
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел.
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів.

1. Основні означення й поняття. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами – важливий клас диференціальних рівнянь. Їх розв'язки виражаються через елементарні функції або у квадратурах. До таких рівнянь зводиться багато прикладних задач, зокрема з теоретичної механіки і електрики.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – дійсні числа, а права частина $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) функція (зокрема, вона може бути й сталою).

Вивчимо спочатку питання про побудову загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, тобто рівняння

$$L(y) = 0. \tag{9.1}$$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (9.1) потрібно знати хоча б одну фундаментальну систему розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ цього рівняння. Тоді згідно з теоремою 6 лекції 8 загальним розв'язком цього рівняння буде

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Легко переконатися, що лінійне однорідне рівняння першого порядку $y' + ay = 0$, де a – дійсна стала, має частинний розв'язок $y_1 = e^{-ax}$. Спробуємо й для лінійного однорідного рівняння n-го порядку (9.1) частинний розв'язок відшукати у вигляді

$$y = e^{kx}, \tag{9.2}$$

де k – деяке, поки що невизначене, число (дійсне або комплексне). Підставляючи (9.2) в ліву частину рівняння (9.1), одержуємо:

$$L(e^{kx}) = (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n) \cdot e^{kx}. \tag{9.3}$$

З (9.3) випливає, що функція (9.2) буде розв'язком диференціального рівняння (9.1) тоді і тільки тоді, коли число k є коренем алгебричного рівняння

$$P(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{9.4}$$

Многочлен $P(k)$ називають ***характеристичним многочленом***, рівняння (9.4) – ***характеристичним рівнянням***, яке відповідає рівнянню (9.1), а його корені – ***характеристичними числами*** рівняння (9.1). Легко бачити, що складаючи характеристичне рівняння, досить замінити в (9.1) похідні різних порядків відповідними степенями k.

2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел. Структура фундаментальної системи розв'язків, а отже, і загального розв'язку рівняння (9.1) залежить від характеристичних чисел. Припустимо, що всі характеристичні числа k_1, k_2, …, k_n дійсні та прості (різні). Тоді згідно з (9.2) функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{k_n x} \tag{9.5}$$

є частинними розв'язками рівняння (9.1). Покажемо, що вони є лінійно незалежними. Для цього обчислимо вронскіан функцій (9.5):

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \dots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \dots & k_ne^{k_nx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} & \dots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)\,x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Визначник у правій частині останньої рівності є визначником Вандермонда і, як відомо з курсу алгебри, дорівнює добутку множників вигляду $k_j - k_i$, де $1 \leqslant i < j \leqslant n$. За припущенням $k_j \neq k_i$ $(j \neq i)$, тому $W(x) \neq 0$. Таким чином, функції (9.5) утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (9.1), а тому згідно з теоремою 6 (лекція 8) функція

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \ldots + C_ne^{k_nx},$$

де C_1, C_2, $\ldots$, C_n – довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (9.1).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$. Його коренями є $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$. Отже, загальний розв'язок має вигляд $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$, де C_1, C_2 – довільні сталі. ■

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 7y'' + 12y' = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 7k^2 + 12k = 0$ має прості корені $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$. Отже, загальним розв'язком є $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{4x}$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. ■

Розглянемо випадок, коли всі характеристичні числа різні, але серед них є комплексні. Нехай $a + bi$ – одне з таких чисел. Відомо, що коли алгебричне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь, то воно має також і спряжений з ним корінь. Отже, характеристичне рівняння у випадку, який розглядаємо, має також спряжений комплексний корінь $a - bi$.

Характеристичному числу $a+bi$ відповідає комплексний розв'язок $y = e^{(a+bi)x}$. Але, оскільки за формулою Ейлера

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx),$$

то дійсна та уявна частини, тобто функції $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ також є розв'язками рівняння (9.1) (див. п. 2 лекції 8), причому ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$ (пропонуємо самостійно переконатися, що їх вронскіан відмінний від нуля). Спряженому кореню $a - bi$ відповідають також два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки $e^{ax}\cos bx$, $-e^{ax}\sin bx$, але розв'язок $-e^{ax}\sin bx$ лінійно залежний з $e^{ax}\sin bx$, а отже, спряжений корінь не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, якщо всі характеристичні числа різні, але серед них є комплексні, то кожному дійсному кореню k відповідає розв'язок e^{kx}, а кожній парі спряжених комплексних коренів $a \pm bi$ відповідають два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки вигляду $e^{ax}\cos bx$ і $e^{ax}\sin bx$. Всього матимемо n дійсних частинних розв'язків вигляду

$$e^{kx}, \quad e^{ax}\cos bx, \quad e^{ax}\sin bx, \tag{9.6}$$

які утворюють фундаментальну систему розв'язків. Згідно з теоремою 6 з лекції 8 загальний розв'язок рівняння (9.1) одержимо у вигляді лінійної комбінації усіх частинних розв'язків (9.6) з довільними сталими $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 3k^2 + 9k + 13 = 0$ має один дійсний і два комплексно спряжені корені: $k_1 = -1$, $k_2 = 2+3i$, $k_3 = 2-3i$. Тому функції e^{-x}, $e^{2x}\cos 3x$, $e^{2x}\sin 3x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальним розв'язком є $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}\cos 3x + C_3e^{2x}\sin 3x$. ■

3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел. Нехай k_1 – дійсне або комплексне характеристичне число кратності s. Тоді, як відомо з алгебри,

$$P(k_1) = P'(k_1) = \ldots = P^{(s-1)}(k_1) = 0, \quad P^{(s)}(k_1) \neq 0, \tag{9.7}$$

де $P(k)$ – характеристичний многочлен (див. (9.4)).

Для знаходження розв'язків, які відповідають характеристичному числу k_1, здиференціюємо тотожність (9.3), записану у вигляді

$$L(e^{kx}) = P(k) \cdot e^{kx},$$

m разів за змінною k, використовуючи формулу Лейбніца для m-ї похідної від добутку двох функцій:

$$(uv)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \, u^{(j)} v^{(m-j)},$$

де $C_m^j = \frac{m!}{(m-j)!j!}$ – кількість сполучень з m елементів по j. Будемо мати:

$$L(x^m e^{kx}) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \, P^{(j)}(k) \, x^{m-j} \, e^{kx}.$$

Тепер, враховуючи (9.7), приходимо до висновку, що $L(x^m e^{k_1 x}) \equiv 0$ для $m = 0, 1, \ldots, s-1$. Це означає, що функції

$$e^{k_1 x}, \; x e^{k_1 x}, \; x^2 e^{k_1 x}, \; \ldots, \; x^{s-1} e^{k_1 x} \tag{9.8}$$

є розв'язками рівняння (9.1). Вони, як легко показати, є лінійно незалежними на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Якщо при цьому число k_1 є дійсним, то функції (9.8) також будуть дійсними. Таким чином, кожному дійсному характеристичному числу k_1 кратності s відповідає s дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (9.8).

Якщо маємо комплексне характеристичне число $a+bi$ кратності s, то характеристичним числом тієї ж кратності буде також спряжене число $a - bi$. Згідно з (9.8) числу $a + bi$ відповідає s комплексних розв'язків:

$$e^{(a+ib)x}, \; x e^{(a+ib)x}, \; x^2 e^{(a+ib)x}, \; \ldots, \; x^{s-1} e^{(a+ib)x}.$$

Виділяючи у них дійсні та уявні частини, одержуємо $2s$ дійсних розв'язків:

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, \;\; xe^{ax}\cos bx, \;\ldots, \; x^{s-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, \;\; xe^{ax}\sin bx, \;\ldots, \; x^{s-1}e^{ax}\sin bx. \end{cases} \tag{9.9}$$

Нескладно довести, що ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$.

Так само, як і для випадку простого комплексного характеристичного числа, кратне характеристичне число $a - bi$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Таким чином, кожній парі комплексно-спряжених характеристичних чисел $a \pm bi$ кратності s відповідають $2s$ дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (9.9).

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 7k^2 + 15k - 9 = 0$ має один простий корінь $k_1 = 1$ і один кратний корінь $k_2 = k_3 = 3$. Цим кореням відповідають розв'язки e^x, e^{3x}, xe^{3x}, а $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}$ є загальним розв'язком. ■

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ має кратний дійсний корінь $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Отже, задане рівняння має три лінійно незалежні розв'язки e^x, xe^x, x^2e^x, а його загальним розв'язком є $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$. ■

Приклад 6. *Зінтегрувати рівняння* $y^{\mathrm{V}} - y^{\mathrm{IV}} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16 = 0$ має один простий корінь $k_1 = 1$ і два кратні комплексно-спряжені корені $k_2 = k_3 = 2i$, $k_4 = k_5 = -2i$. Отже, загальним розв'язком є

$$y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3x\cos 2x + C_4\sin 2x + C_5x\sin 2x. \;\blacksquare$$

4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо деякі лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які за допомогою заміни незалежної змінної можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Рівнянням Ейлера називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{9.10}$$

де a_1, a_2, …, a_n – сталі дійсні числа.

Побудуємо загальний розв'язок рівняння Ейлера для $x > 0$ (якщо $x < 0$, то в усіх наступних викладках потрібно замінити x на $-x$). Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$. Тоді

$$\begin{gathered} y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}, \\ y''_{x^2} = \big(y''_{t^2} \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}\big)e^{-t} = \big(y''_{t^2} - y'_t\big)e^{-2t}, \\ y'''_{x^3} = \big(y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t\big)e^{-3t}, \quad \ldots, \\ y^{(n)}_{x^n} = \Big(y^{(n)}_{t^n} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!\, y'_t\Big)e^{-nt}. \end{gathered}$$

Підставляючи $x = e^t$ і знайдені вирази для y'_x, y''_{x^2}, …, $y^{(n)}_{x^n}$ у (9.10), одержимо лінійне однорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння і підставивши у нього $t = \ln x$, матимемо загальний розв'язок рівняння Ейлера.

Приклад 7. *Зінтегрувати рівняння* $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.
Розв'язання. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$ (тоді $t = \ln x$). Тоді, як було доведено, $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = \big(y''_{t^2} - y'_t\big)e^{-2t}$. Підставляючи ці вирази у вихідне рівняння, для знаходження функції $y = y(t)$ одержуємо:

$$\begin{gathered} e^{2t}\big(y'' - y'\big)e^{-2t} - 2e^t y' e^{-t} + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \text{ (див. приклад 1)} \;\Rightarrow\; y = C_1 e^{\ln x} + C_2 e^{2\ln x} \;\Rightarrow \\ y = C_1 x + C_2 x^2. \;\blacksquare \end{gathered}$$

Узагальненням рівняння Ейлера є ***рівняння Лагранжа***. Так називають диференціальне рівняння вигляду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(ax+b)y' + p_n y = 0.$$

Якщо використати підстановку $ax+b=q$ і позначити $q=e^t$, або відразу зробити заміну незалежної змінної за формулою $ax+$ $+b=e^t$, то одержимо лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

До рівняння зі сталими коефіцієнтами зводиться також ***рівняння Чебишова***, тобто рівняння

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \tag{9.11}$$

Точки $x = \pm 1$ є особливими точками цього рівняння. На кожному з інтервалів $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ виконуються умови теореми Коші. Побудуємо загальний розв'язок рівняння (9.11) на інтервалі $(-1,1)$. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою

$$t = \arccos x \quad (x = \cos t).$$

Тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -y'_t \frac{1}{\sin t},$$

$$y''_{x^2} = -\left(y''_{t^2}\frac{1}{\sin t} - y'_t\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right) = y''_{t^2}\frac{1}{\sin^2 t} - y'_t\frac{\cos t}{\sin^3 t}.$$

Підставляючи знайдені вирази для y'_x і y''_{x^2}, а також $x=\cos t$, у рівняння (9.11), одержуємо диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0. \tag{9.12}$$

Загальним розв'язком рівняння (9.12) є

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt,$$

а після повернення до змінної x маємо

$$y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$

Частинні розв'язки рівняння (9.11) $T_n = \cos(n \arccos x)$ називають ***многочленами Чебишова***.

Можна показати [19, с. 158 – 159], що лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

зводиться перетворенням незалежної змінної до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами тільки за допомогою підстановки

$$t = \alpha \int \sqrt[n]{p_1(x)}\, dx, \tag{9.13}$$

де α – деяка стала. З формули (9.13) легко знайти застосовані вище підстановки для рівнянь Ейлера, Лагранжа та Чебишова.

5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів. Припустимо, що матеріальна точка маси m прямолінійно рухається вздовж осі Ox під впливом трьох сил:

1) сили F_1, що притягує точку до початку координат; цю силу вважатимемо пропорційною віддалі x точки від початку координат, тобто $F_1 = -ax$, де $a > 0$;

2) сили F_2 опору середовища, яку припускатимемо пропорційною швидкості руху точки (це припущення близьке до дійсності для незначних швидкостей), тобто $F_2 = -bx'$, де $b \geqslant 0$;

3) збурювальної (зовнішньої) сили, що спрямована вздовж осі Ox і дорівнює $F_3(t)$ у момент часу t.

Тоді згідно з другом законом Ньютона $F = ma$, де $F = F_1 + F_2 + F_3$, $a = x''(t)$, маємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки:

$$mx'' = -ax - bx' + F_3(t)$$

або

$$x'' + 2p\,x' + q^2 x = f(t), \tag{9.14}$$

де $p = b/(2m) \geqslant 0$ – ***коефіцієнт опору***, $q = \sqrt{a/m} > 0$ – ***коефіцієнт відхилення***, $f(t) = F_3(t)/m$.

Рівняння (9.14) є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Зінтегрувавши його, знайдемо закон руху матеріальної точки.

Оскільки найбільший інтерес становлять випадки, коли рух, який визначений рівнянням (9.14), є коливанням точки біля положення $x = 0$, то рівняння (9.14) називають ***рівнянням коливань***. При цьому, якщо збурювальна сила відсутня, тобто $f(t) \equiv 0$, то рівняння (9.14) називають ***рівнянням вільних коливань*** і воно має вигляд

$$x'' + 2p\,x' + q^2 x = 0. \tag{9.15}$$

Диференціальне рівняння (9.14), у якому права частина тотожно відмінна від нуля, називають ***рівнянням вимушених коливань***.

Розглянемо рівняння (9.15) і з'ясуємо, як параметри p, q впливають на характер руху матеріальної точки. Проаналізуємо окремі випадки рівняння (9.15).

Випадок 1. *Рух відбувається у середовищі без опору* ($p = 0$). Тоді рівняння руху має вигляд

$$x'' + q^2 x = 0. \tag{9.16}$$

Зауважимо, що рівняння (9.16) описує вертикальні рухи тіла, підвішеного на пружині, під впливом сили пружності пружини і сили ваги, малі коливання маятника, коливання повітря в акустичному резонаторі та інші явища коливної природи.

Характеристичним рівнянням для (9.16) є $k^2 + q^2 = 0$, характеристичними числами – комплексно-спряжена пара $k_1 = qi$, $k_2 = -\,qi$, а тому загальним розв'язком рівняння (9.16) є

$$x = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt.$$

Замість довільних сталих C_1, C_2 введемо нові сталі A і φ ($A > 0$) за формулами $C_1 = A \sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$. Тоді

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2} \quad (C_2 \neq 0),$$

$$x = A\sin\varphi\cos qt + A\cos\varphi\sin qt \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = A\sin(qt + \varphi). \tag{9.17}$$

Рух, який описується формулою (9.17), називають ***гармонічним коливанням***. Він є, очевидно, періодичним рухом з ***періодом*** $T = 2\pi/q$ і ***частотою*** q. Число A називають ***амплітудою коливання*** (9.17) (це максимальне відхилення точки від стану рівноваги). Величину $qt+\varphi$ називають ***фазою коливання***, а кут φ – ***початковою фазою*** коливання (9.17).

З формули (9.17) випливає, що всі рухи, визначені рівнянням (9.16), обмежені, бо при $t \to +\infty$ $|x(t)| \leqslant A$. Графік кожного конкретного руху можна одержати за допомогою елементарних перетворень графіка функції $x = \sin t$ (рис. 9.1).

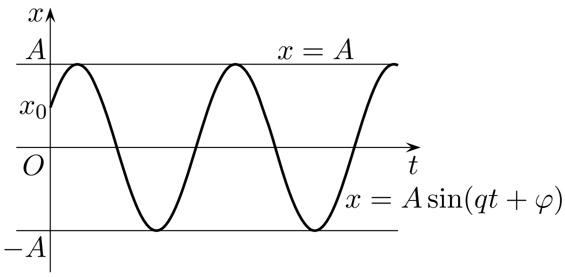

Рис. 9.1

Будь-яким початковим умовам $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$ згідно з теоремою про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння n-го порядку (лекція 7) відповідає єдиний рух з формули (9.17). Знайдемо його. Оскільки $x' = Aq\cos(qt+\varphi)$, то відповідні значення амплітуди A і початкової фази φ одержуємо з системи

$$\begin{cases} A\sin\varphi = x_0, \\ Aq\cos\varphi = x_0' \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{q}\sqrt{q^2x_0^2 + {x_0'}^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{qx_0}{x_0'}.$$

Випадок 2. *Рух відбувається у середовищі з опором* $p > 0$. Характеристичним рівнянням для (9.15) є $k^2 + 2pk + q^2 = 0$, а характеристичними числами –

$$k_1 = -p + \sqrt{p^2 - q^2} \quad \text{і} \quad k_2 = -p - \sqrt{p^2 - q^2}.$$

Якщо $p^2 - q^2 < 0$, то, позначивши $p^2 - q^2 = -h^2$, загальний розв'язок рівняння (9.15) можемо записати як

$$x = e^{-pt}(C_1 \cos ht + C_2 \sin ht),$$

де $h = \sqrt{q^2 - p^2}$, або, враховуючи позначення, які використовувались при виведенні формули (9.17), у вигляді

$$x(t) = Ae^{-pt} \sin(ht + \varphi). \tag{9.18}$$

Рух точки, який описується формулою (9.18), називають ***згасаючим гармонічним коливанням*** з періодом $T = 2\pi/h$, частотою h, амплітудою Ae^{-pt}, початковою фазою φ (рис. 9.2). На відміну від гармонічного коливання (9.17) тут амплітуда є величиною змінною. Але вона обмежена, бо $Ae^{-pt} \leqslant A$, і прямує до нуля при $t \to +\infty$. Число A називають ***початковою амплітудою***, а p – ***коефіцієнтом згасання***. Множник e^{-pt} характеризує швидкість згасання коливання.

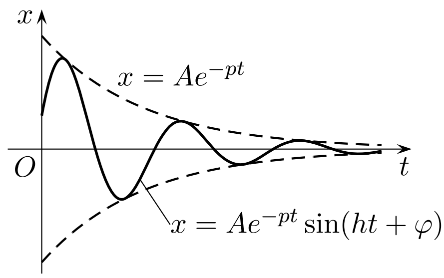

Рис. 9.2

Якщо $p^2 - q^2 > 0$, то, позначивши $p^2 - q^2 = h^2$, загальний розв'язок рівняння (9.15) запишемо у вигляді

$$x(t) = C_1 e^{(h-p)\,t} + C_2 e^{-(h+p)\,t}. \tag{9.19}$$

Оскільки $h < p$, то $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Нарешті, якщо $p^2 - q^2 = 0$, то $k_1 = k_2 = -\,p$, а загальним розв'язком є

$$x(t) = e^{-p\,t}(C_1 + C_2 t), \tag{9.20}$$

причому знову $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Рухи, які описуються формулами (9.19) і (9.20), називають ***аперіодичними згасаючими рухами***. Із зростанням t відхилення $x(t)$ асимптотично наближається до нуля і коливань навколо положення $x = 0$ немає. Усі розглянуті рухи називають ***вільними*** або ***власними коливаннями***.

Таким чином, наявність опору середовища ($p > 0$) видозмінює характер коливань, причому, якщо опір p порівняно невеликий ($p < q$), то рухи залишаються періодичними, згасаючи при $t \to +\infty$, а при великому опорі середовища ($p \geqslant q$) рухи стають аперіодичними.

Рекомендована література: [9, с. 129 – 137, 387 – 389], [11, с. 145 – 150], [14, с. 292 – 322, 330 – 349], [16, с. 220 – 241], [19, с. 131 – 138, 144 – 148, 158 – 162].

Питання до лекції 9

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

2. Що називають характеристичним рівнянням, яку назву мають корені характеристичного рівняння?

3. Який вигляд має формула загального розв'язку лінійного однорідного рівняння n-го порядку у випадку простих дійсних характеристичних чисел?

4. Які два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають парі комплексних характеристичних чисел $a \pm bi$?

5. Які лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають дійсному характеристичному числу k кратності s?

6. Який вигляд має рівняння Ейлера? За допомогою якої заміни незалежної змінної його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?

7. Який вигляд має рівняння Лагранжа? За допомогою якої заміни його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?

8. Який вигляд має рівняння Чебишова? За допомогою якої заміни його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами? Що таке многочлен Чебишова?

9. Як інтегрується рівняння вільних коливань у середовищі без опору? Який вигляд має загальний розв'язок цього рівняння? Що на-

зивають гармонічним коливанням, його амплітудою, періодом, частотою і початковою фазою? Як залежать амплітуда і початкова фаза від початкових значень шуканої функції та її похідної?

10. Як інтегрується рівняння вільних коливань у середовищі з опором? Що називають згасаючим гармонічним коливанням, його періодом, частотою, амплітудою і початковою фазою? Яка поведінка амплітуди при $t \to +\infty$? Як впливає наявність опору середовища на характер коливань?

Вправи до лекції 9

1. Зінтегруйте лінійні однорідні рівняння другого порядку:

$$\text{а) } y'' - 6y' + 8y = 0; \quad \text{б) } y'' + 2y' + 2y = 0; \quad \text{в) } y'' - 2y' = 0.$$

2. Зінтегруйте лінійні однорідні рівняння:

$$\text{а) } y''' - y'' = 0; \quad \text{б) } y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0; \quad \text{в) } y^{\mathrm{IV}} - y = 0.$$

3. Знайдіть розв'язки задач Коші:

$$\text{а) } y'' + y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1;$$
$$\text{б) } y'' - 2y' + y = 0, \;\; y(2) = 1, \;\; y'(2) = -2;$$
$$\text{в) } y''' - y' = 0, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = 1.$$

4. Зінтегруйте рівняння Ейлера та Лагранжа:

$$\text{а) } x^2y'' + 2xy' - 12y = 0; \quad \text{б) } 2x^2y'' - xy' - 2y = 0;$$
$$\text{в) } (2x+3)^2y'' + (4x+6)y' - 4y = 0.$$

5. Для яких значень p і q усі розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$ будуть обмежені на півосі $x \geqslant 0$?

6. Складіть лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами якомога меншого порядку, яке має задані частинні розв'язки:

$$\text{а) } y_1 = xe^x; \quad \text{б) } y_1 = x^2e^{2x}; \quad \text{в) } y_1 = x, \;\; y_2 = \sin x.$$

Лекція 10. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку

План

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Метод невизначених коефіцієнтів.
4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів.

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (10.1)$$

і відповідне однорідне рівняння

$$L(y) = 0. \quad (10.2)$$

Виявляється, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (10.1) завжди можна знайти, якщо відомі загальний розв'язок рівняння (10.2) і будь-який частинний розв'язок рівняння (10.1). Це випливає з такої теореми.

Теорема 1. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння* (10.1) *дорівнює сумі будь-якого його частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* (10.2).

Доведення. Нехай $Y = Y(x)$ – відомий частинний розв'язок рівняння (10.1), тобто $L(Y) \equiv f(x)$. Введемо нову невідому функцію $z = z(x)$ і покладемо

$$y = z + Y. \quad (10.3)$$

Підставляючи (10.3) в (10.1) та враховуючи лінійність оператора L, одержуємо $L(y) = L(z + Y) = L(z) + L(Y) = f(x)$. Оскільки $L(Y) = f(x)$, то

$$L(z) = 0, \quad (10.4)$$

тобто z – розв'язок лінійного однорідного рівняння (10.2).

Тоді згідно з теоремою 6 (лекція 8) загальним розв'язком рівняння (10.4) є $z = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, де y_1, y_2, $\ldots$, y_n – деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, – довільні сталі. Підставимо отриманий розв'язок рівняння (10.4) у (10.3):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + Y \tag{10.5}$$

і покажемо, що формула (10.5) визначає загальний розв'язок рівняння (10.1). Згідно з означенням загального розв'язку диференціального рівняння n-го порядку для цього потрібно показати, що з (10.5) при належному виборі сталих C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, можна одержати розв'язок, який задовольняє довільні початкові умови, тобто

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Послідовно диференціюючи (10.5), знаходимо

$$\begin{cases} y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + Y, \\ y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' + Y', \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Якщо підставити в цю систему $x = x_0$, то матимемо неоднорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, визначником якої є $W(x_0)$. Оскільки y_1, y_2, $\ldots$, y_n – фундаментальна система розв'язків, то $W(x_0) \neq 0$. Таким чином, сталі C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, з отриманої системи визначаються однозначно, а тому розв'язок (10.5) справді є загальним. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай права частина лінійного неоднорідного рівняння* (10.1) *є сумою двох доданків, тобто*

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \tag{10.6}$$

Якщо y_1 – частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_1(x)$, а y_2 – частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння (10.6).

Доведення теореми випливає з того, що

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Розглянемо, наприклад, рівняння $y'' + 2y = 2 + e^x$. Рівняння $y'' + 2y = 2$ має частинний розв'язок $y_1 = 1$, а рівняння $y'' + 2y = e^x$ – частинний розв'язок $y_2 = e^x/3$. Згідно з теоремою 2 функція $y = 1 + e^x/3$ є частинним розв'язком рівняння $y'' + 2y = 2 + e^x$, у чому легко переконатись перевіркою.

Зауваження. Теорема 2 поширюється і на випадок, коли права частина рівняння є сумою довільної скінченної кількості доданків.

2. Метод варіації довільних сталих. Розглянемо загальний метод знаходження частинних розв'язків неоднорідного рівняння (10.1) – ***метод варіації довільних сталих*** (***метод Лагранжа***).

Нехай маємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (10.2):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{10.7}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Частинний розв'язок рівняння (10.1) шукаємо у вигляді (10.7), вважаючи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не сталими, а невідомими функціями від x, тобто

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n. \tag{10.8}$$

Виберемо тепер функції $C_j = C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, так, щоб функція (10.8) була розв'язком рівняння (10.1). Диференціюючи (10.8), одержуємо

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n.$$

Накладемо умову, що $C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0$. Тоді

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'.$$

Диференціюючи ще один раз, одержуємо:

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n'.$$

Нехай $C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0$, тоді

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''.$$

Продовжуючи диференціювати і вибираючи функції C_1, C_2, ..., C_n так, щоб

$$C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0,$$

одержуємо

$$y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}.$$

І, нарешті,

$$\begin{gathered} y^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + \\ + C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)}. \end{gathered}$$

Підставимо тепер у рівняння (10.1) вирази для y та її похідних:

$$\begin{gathered} C_1\Big(y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y_1' + p_ny_1\Big) + \\ + C_2\Big(y_2^{(n)} + p_1y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y_2' + p_ny_2\Big) + \ldots \\ \ldots + C_n\Big(y_n^{(n)} + p_1y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y_n' + p_ny_n\Big) + \\ + C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{gathered}$$

Множники в дужках тотожно дорівнюють нулю, бо функції y_1, y_2, ..., y_n є частинними розв'язками рівняння (10.2). Отже, останнє рівняння запишеться так:

$$C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, шукані функції $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, задовольняють систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Маємо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$. Оскільки визначником цієї системи є відмінний від нуля вронскіан функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n, то вона має єдиний розв'язок $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$. Інтегруючи, знайдемо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$, після чого залишиться підставити їх у формулу (10.8).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння $y'' - y'/x = x$.*
Розв'язання. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad (\ln y' - \ln x)' = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\ln \frac{y'}{x} = \ln C \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 x \quad \Rightarrow$$
$$y = C_1 x^2 + C_2. \tag{10.9}$$

Нехай тепер $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$. З системи

$$\begin{cases} C_1'(x) x^2 + C_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ 2C_1'(x) x + C_2'(x) \cdot 0 = x \end{cases}$$

знаходимо

$$C_1'(x) = 1/2, \quad C_2'(x) = -\,x^2/2 \quad \Rightarrow$$
$$C_1(x) = x/2 + C_1, \quad C_2(x) = -x^3/6 + C_2.$$

Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у (10.9), одержуємо загальний розв'язок $y = C_1 x^2 + C_2 + x^3/3$. ■

3. Метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$L(y) \equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny = f(x), \quad (10.10)$$

де a_j – дійсні числа, функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a, b).

До рівняння (10.10) можна застосувати метод варіації довільних сталих, викладений у п. 2 цієї лекції, однак цей метод має суттєві недоліки: розв'язання алгебричної системи з досить складними коефіцієнтами та взяття громіздких інтегралів. Тому, якщо можливо, методу варіації довільних сталих уникають і вдаються до так званого ***методу невизначених коефіцієнтів***, який при певній структурі правої частини рівняння $f(x)$ дозволяє досить легко знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (10.10).

Розглянемо окремі випадки, пов'язані з виглядом правої частини рівняння (10.10).

Випадок 1. Нехай функція $f(x)$ є добутком многочлена на показникову функцію, тобто

$$L(y) = P_m(x)e^{\alpha x}, \quad (10.11)$$

де $P_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m$ є многочленом з дійсними або комплексними коефіцієнтами (він може вироджуватись у сталу), α – дійсне або комплексне число.

Будуючи частинний розв'язок рівняння (10.11), виділятимемо два випадки.

Випадок 1.1. α не є характеристичним числом, тобто $P(\alpha) \neq 0$ ($P(\alpha)$ – характеристичний многочлен, див. лекцію 9). Тоді частинний розв'язок $Y = Y(x)$ шукатимемо у вигляді

$$Y = Q_m(x)e^{\alpha x}, \quad (10.12)$$

де $Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m$ – многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ визначаються після підстановки (10.12) у рівняння (10.11) і прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів x у обох частинах отриманої рівності. Переконаємось, що коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ у цьому випадку знайдуться однозначно. Підставляючи (10.12) в (10.11) та враховуючи властивості оператора L, одержуємо:

$$
\begin{gathered}
L(Y) = L\bigl(Q_m(x)\cdot e^{\alpha x}\bigr) = \\
= L\left((q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m)\cdot e^{\alpha x}\right) = \\
= q_0L(x^me^{\alpha x}) + q_1L(x^{m-1}e^{\alpha x}) + \ldots + q_{m-1}L(xe^{\alpha x}) + \\
+ q_mL(e^{\alpha x}) = (p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m)e^{\alpha x}.
\end{gathered}
$$

Скористаємось тепер формулами

$$
L(e^{\alpha x}) = P(\alpha)e^{\alpha x}, \quad L(x^se^{\alpha x}) = \sum_{j=0}^{s} C_s^jP^{(j)}(\alpha)x^{s-j}e^{\alpha x},
$$

які були виведені у п. 3 лекції 9. Після скорочення на $e^{\alpha x}$ маємо:

$$
\begin{gathered}
q_0\sum_{j=0}^{m} C_m^jP^{(j)}(\alpha)x^{m-j} + q_1\sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^jP^{(j)}(\alpha)x^{m-1-j} + \ldots \\
\ldots + q_{m-1}\sum_{j=0}^{1} C_1^jP^{(j)}(\alpha)x^{1-j} + q_mP(\alpha) = \\
= p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m.
\end{gathered}
$$

Прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x:

$$
\left.
\begin{array}{r|l}
x^m & q_0P(\alpha) = p_0, \\
x^{m-1} & q_0mP'(\alpha) + q_1P(\alpha) = p_1, \\
\ldots & \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x^0 & q_0P^{(m)}(\alpha) + q_1P^{(m-1)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P'(\alpha) + \\
 & \quad + q_mP(\alpha) = p_m.
\end{array}
\right\}
\qquad (10.13)
$$

Оскільки $P(\alpha) \neq 0$, то з системи (10.13) послідовно можна однозначно визначити всі коефіцієнти q_0, q_1, …, q_m, наприклад $q_0 = p_0/P(\alpha)$, $q_1 = (p_1 - q_0mP'(\alpha))/P(\alpha)$ і т. д.

Випадок 1.2. α є характеристичним числом кратності k, тобто

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

У цьому випадку частинний розв'язок Y у вигляді (10.12) побудувати не можна, бо $P(\alpha) = 0$. Шукатимемо його у вигляді

$$Y = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}, \tag{10.14}$$

де $Q_m(x)$ – многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, які визначаються так само, як і випадку 1.1. Підставляючи (10.14) в (10.11), одержуємо:

$$L(Y) = L\big(x^k Q_m(x) e^{\alpha x}\big) =$$
$$= L\left(\sum_{j=0}^{m} q_j x^{k+m-j} e^{\alpha x}\right) = \sum_{j=0}^{m} q_j L\big(x^{k+m-j} e^{\alpha x}\big) =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{s=k}^{k+m-j} C^s_{k+m-j} P^{(s)}(\alpha) x^{k+m-j-s} e^{\alpha x} = \sum_{j=0}^{m} p_j x^{m-j} e^{\alpha x}$$

або після скорочення на $e^{\alpha x}$

$$\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{s=0}^{m-j} C^{k+s}_{k+m-j} P^{(k+s)}(\alpha) x^{m-j-s} = \sum_{j=0}^{m} p_j x^{m-j}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, одержуємо систему:

$$\begin{array}{l|l}
x^m & q_0 C^k_{k+m} P^{(k)}(\alpha) = p_0, \\
\ldots & \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x^1 & q_0(k+m)P^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1(k+m-1)P^{(k+m-2)}(\alpha) + \ldots \\
 & \quad \ldots + q_{m-1}(k+1)P^{(k)}(\alpha) = p_{m-1}, \\
x^0 & q_0 P^{(k+m)}(\alpha) + q_1 P^{(k+m-1)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} P^{(k+1)}(\alpha) + \\
 & \quad + q_m P^{(k)}(\alpha) = p_m,
\end{array}$$

з якої, оскільки $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$, можна однозначно визначити всі коефіцієнти $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

Випадок 2. Нехай права частина рівняння (10.11) має вигляд

$$f(x) = e^{ax}\Big(P_m^{(1)}(x)\cos bx + P_m^{(2)}(x)\sin bx\Big), \tag{10.15}$$

де $P_m^{(1)}(x)$ та $P_m^{(2)}(x)$ – многочлени степенів не вищих від m, причому хоча б один з них має степінь m (вони можуть бути й сталими числами, один з них може бути тотожно рівним нулю).

Якщо скористатись формулами Ейлера

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i},$$

то (10.15) можемо записати у вигляді

$$f(x) = P_m^{(1)}(x)e^{ax}\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + P_m^{(2)}(x)e^{ax}\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} =$$
$$= \tilde{P}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x} + \tilde{P}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x},$$

де $\tilde{P}_m^{(1)}(x)$, $\tilde{P}_m^{(2)}(x)$ – многочлени степеня m, тобто $f(x)$ є сумою двох доданків, які розглядались у випадку 1.

Випадок 2.1. Нехай $a + bi$ не є характеристичним числом. Згідно з теоремою 2 у цьому випадку частинний розв'язок знайдеться у вигляді

$$Y(x) = \tilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x},$$

де $\tilde{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$ – многочлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами. Перейшовши до дійснозначних функцій, одержуємо остаточне правило знаходження частинного розв'язку рівняння (10.11) з правою частиною вигляду (10.15): *якщо $a + bi$ не є характеристичним числом, то частинний розв'язок знайдеться у вигляді*

$$Y(x) = e^{ax}\Big(Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\Big),$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ – многочлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2.2. Нехай $a + bi$ є k-кратним характеристичним числом. У цьому випадку частинний розв'язок знайдеться у вигляді

$$Y(x) = x^k \Big(\tilde{Q}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x} \Big)$$

або

$$Y(x) = x^k e^{ax} \Big(Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx \Big).$$

В обох випадках коефіцієнти многочленів $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ визначаються після підстановки $Y(x)$ у рівняння (10.1).

Зауважимо, що схема знаходження частинного розв'язку $Y(x)$ не зміниться, якщо $P_m^{(1)}(x) \equiv 0$ або $P_m^{(2)}(x) \equiv 0$. А якщо $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x)$, де $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ мають вигляд (10.12) або (10.15) із різними α, $a + bi$, то згідно з теоремою 2 $Y = Y_1 + \ldots + Y_k$, де $Y_j = Y_j(x)$ – частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 2y'' = -24x^2 + 24x - 4 - 2e^x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 2$, тому загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є $y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}$. Праву частину заданого рівняння запишемо у вигляді $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x) = (-24x^2 + 24x - 4)e^{0x}$, $f_2(x) = -2e^x$.

Оскільки $\alpha = 0$ є характеристичним числом кратності 2, а $\alpha = 1$ не є характеристичним числом, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$Y = x^2(Ax^2 + Bx + C) + De^x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^x.$$

Підставляючи це Y у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$-24Ax^2 + (24A - 12B)x + (6B - 4C) - De^x \equiv$$
$$\equiv -24x^2 + 24x - 4 - 2e^x,$$

з якої, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, знаходимо A, B, C, D:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -24A = -24, \\ x^1 & 24A - 12B = 24, \\ x^0 & 6B - 4C = -4, \\ e^x & -D = -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 2.$$

Отже, $Y = x^4 + x^2 + 2e^x$, а тому загальним розв'язком є

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + x^4 + x^2 + 2e^x. \ \blacksquare$$

4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів. Розглянемо диференціальне рівняння вимушених коливань (лекція 9)

$$x'' + 2p\,x' + q^2 x = f(t). \tag{10.16}$$

Згідно з теоремою 1 про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння усі рухи, які визначаються рівнянням (10.16), утворюються з сукупності усіх рухів, визначених відповідним однорідним рівнянням (рівнянням ***вільних коливань точки***), і будь-якого одного руху, визначеного неоднорідним рівнянням (10.16).

Розглянемо випадок, коли збурювальна сила $f(t)$ періодична і має синусоїдальний характер.

Випадок 1. *Рух відбувається у середовищі без опору* ($p = 0$). Тоді рівняння руху має вигляд

$$x'' + q^2 x = M \sin \omega t. \tag{10.17}$$

Власні коливання $x_0(t)$, які визначаються відповідним однорідним рівнянням $x'' + q^2 x = 0$, є гармонічними (див. формулу (9.17) з лекції 9):

$$x_0(t) = \hat{A} \sin(qt + \varphi). \tag{10.18}$$

Залишається знайти частинний розв'язок рівняння (10.17). Вигляд цього розв'язку залежить від того, чи є число $a + ib = i\omega$ коренем характеристичного рівняння $k^2 + q^2 = 0$. Оскільки $k_{1,2} = \pm\, iq$, то все залежить від того, чи збігається частота збурювальної сили з частотою власних коливань (***резонансний випадок***), чи маємо незбіг цих частот (***нерезонансний випадок***).

Розглянемо спочатку нерезонансний випадок, тобто коли $\omega \neq q$. Частинний розв'язок рівняння (10.17) $X(t)$ шукаємо у вигляді $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, де A і B – деякі сталі, які визначимо згодом (випадок 2.1 п. 3 цієї лекції). Тоді

$$X'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t,$$
$$X''(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

і, підставляючи в (10.17), одержуємо рівняння

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + q^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = M\sin\omega t.$$

З нього, прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ відповідно, маємо:

$$\begin{cases} -A\omega^2 + Aq^2 = 0, \\ -B\omega^2 + Bq^2 = M \end{cases} \Rightarrow \quad A = 0, \quad B = \frac{M}{q^2-\omega^2}.$$

Таким чином, $X(t) = \frac{M}{q^2-\omega^2}\sin\omega t$, а загальним розв'язком рівняння (10.17) є

$$x(t) = \frac{M}{q^2-\omega^2}\sin\omega t + \hat{A}\sin(qt+\varphi).$$

Вимушені коливання, визначені цим загальним розв'язком, називають ***накладеними гармонічними коливаннями***.

Розглянемо рівняння вимушених коливань

$$x'' + q^2x = M\sin qt, \tag{10.19}$$

яке є окремим випадком рівняння (10.17), коли $\omega = q$, тобто коли частота збурювальної сили збігається з частотою власних коливань (***резонанс***). У цьому випадку частинний розв'язок має вигляд

$$X(t) = t(A\cos qt + B\sin qt),$$

бо iq є простим характеристичним числом (випадок 2.2 п. 3 цієї лекції). Тоді

$$X'(t) = A\cos qt + B\sin qt + tq(-A\sin qt + B\cos qt),$$
$$X''(t) = -2Aq\sin qt + 2Bq\cos qt - tq^2(A\cos qt + B\sin qt)$$

і, підставляючи в (10.19), одержуємо рівняння

$$-2Aq\sin qt + 2Bq\cos qt - q^2t(A\cos qt + B\sin qt) +$$
$$+ q^2t(A\cos qt + B\sin qt) = M\sin qt \quad \Rightarrow$$
$$-2Aq\sin qt + 2Bq\cos qt = M\sin qt.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos qt$, $\sin qt$ відповідно, знаходимо, що $A = -\frac{M}{2q}$, $B = 0$. Таким чином,

$$X(t) = -\frac{M}{2q}t\cos qt. \tag{10.20}$$

Частинний розв'язок (10.20) є вимушеним коливанням і має необмежену амплітуду при $t \to +\infty$. Графік цього коливання розташований між прямими $x = \frac{M}{2q}t$ і $x = -\frac{M}{2q}t$ (рис. 10.1).

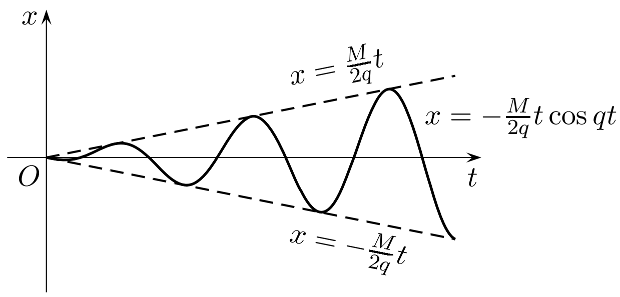

Рис. 10.1

У реальних фізичних системах коливання ніколи не можуть зростати необмежено, бо коливання з необмеженою амплітудою або стримуються опором, або призводять до руйнування системи.

Загальним розв'язком рівняння (10.19) є

$$x(t) = \hat{A}\sin(qt+\varphi) - \frac{M}{2q}t\cos qt.$$

Вимушені коливання, визначені цим розв'язком, утворюються накладанням гармонійних коливань (10.18) і коливань з необмеженою амплітудою (10.20).

Випадок 2. *Рух відбувається в середовищі з малим опором* ($p < q$). Припустимо, що збурювальна сила має синусоїдальний характер. Тоді рівнянням руху є

$$x'' + 2p\,x' + q^2 x = M\sin\omega t. \tag{10.21}$$

Згідно з формулою (9.18) власні коливання $x_0(t)$ мають вигляд

$$x_0(t) = \hat{A}e^{-pt}\sin\left(\sqrt{q^2-p^2}\,t+\varphi\right).$$

Частинний розв'язок $X(t)$ рівняння (10.21) шукаємо у вигляді

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{10.22}$$

де сталі A і B знайдемо, підставляючи (10.22) в (10.21):

$$\begin{gathered}
-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + 2p(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + \\
+ q^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = M\sin\omega t \quad \Rightarrow \\
\left(-A\omega^2 + 2pB\omega + Aq^2\right)\cos\omega t + \\
+\left(-B\omega^2 - 2pA\omega + q^2B\right)\sin\omega t = M\sin\omega t \quad \Rightarrow \\
\begin{cases} A(q^2-\omega^2) + 2p\omega B = 0, \\ -2pA\omega + (q^2-\omega^2)B = M \end{cases} \quad \Rightarrow \\
A = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}, \quad B = \frac{M(q^2-\omega^2)}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}.
\end{gathered}$$

Отже,

$$X(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{M(q^2-\omega^2)}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\sin\omega t, \tag{10.23}$$

а загальний розв'язок рівняння (10.21) має вигляд

$$x(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{M(q^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}\sin\omega t + \\ + \hat{A}e^{-pt}\sin\Big(\sqrt{q^2 - p^2}\,t + \varphi\Big).$$

Оскільки при $t \to +\infty$ останній доданок прямує до нуля, то для достатньо великих t можна вважати, що

$$x(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{M(q^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}\sin\omega t,$$

тобто власними (згасаючими) коливаннями можна знехтувати.

Амплітуда $\tilde{A}$ вимушеного коливання (10.23) виражається формулою $\tilde{A} = \frac{M}{\sqrt{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}}$, а якщо опір p дуже малий, то $\tilde{A} \approx \frac{M}{|\omega^2 - q^2|}$. Звідси випливає, що при наближенні ω до q амплітуда $\tilde{A}$ є доволі значною навіть для малого M.

Рекомендована література: [5, с. 176 – 212], [9, с. 103 – 108, 138 – 148], [11, с. 151 - 154], [16, с. 243 – 261], [19, с. 125 – 130, 138 – 144, 148 – 150].

Питання до лекції 10

1. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

2. Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо його права частина є сумою двох або більшої кількості доданків?

3. У чому полягає метод варіації довільних сталих інтегрування лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

4. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв'язків лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами? Якого вигляду має бути права частина рівняння, щоб можна було використати цей метод?

5. Який вигляд має рівняння вимушених коливань у середовищі без опору у випадку періодичної збурювальної сили синусоїдального характеру? Як інтегрується це рівняння? Який вигляд має загальний розв'язок у нерезонансному і резонансному випадках?

6. Як інтегрується рівняння вимушених коливань у середовищі з малим опором у випадку періодичної збурювальної сили синусоїдального характеру? Який вигляд має графік частинного розв'язку цього рівняння?

Вправи до лекції 10

1. Зінтегруйте лінійні неоднорідні рівняння методом варіації довільних сталих:

а) $y'' + 3y' + 2y = \frac{2}{e^x+1}$; б) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$; в) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

2. Зінтегруйте лінійні неоднорідні рівняння методом невизначених коефіцієнтів:

а) $y'' - y = x^2 + 3x$; б) $y'' - 4y' = x + 2$; в) $y'' + y' = 2\sin x + x\cos x$.

3. Знайдіть розв'язки задач Коші:

а) $y'' + y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$;
б) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. Для кожного рівняння запишіть частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами, не шукаючи їх:

а) $y'' - 2y' + 2y = 5x^2e^x + 2\cos x$; б) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 3x$;
в) $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\sin 5x$.

Лекція 11. Лінійні однорідні рівняння другого порядку

План

1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку.

2. Самоспряжена форма лінійного однорідного рівняння другого порядку.

3. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок.

4. Використання формули Остроградського – Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку.

5. Інтегрування лінійних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку часто виникають при розв'язуванні різноманітних прикладних задач механіки, фізики, біології та інших наук.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \tag{11.1}$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі (a, b).

Якщо $a(x) \neq 0$ на інтервалі (a, b), то рівняння (11.1) можна записати у вигляді

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{11.2}$$

де $p(x) = b(x)/a(x)$, $q(x) = c(x)/a(x)$.

Покажемо, що рівняння (11.2) можна звести до рівняння, яке не містить першої похідної. Для цього запровадимо заміну

$$y = \alpha(x)\, z, \tag{11.3}$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція, $\alpha(x)$ – поки що невідома функція, яка буде знайдена згодом. Підставляючи (11.3) в (11.2), одержуємо:

$$\alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z'' +$$
$$+ p(x)\left(\alpha'(x)z + \alpha(x)z'\right) + q(x)\alpha(x)z = 0 \quad \Rightarrow$$
$$z'' + \left(\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x)\right)\cdot z' + \left(\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + q(x)\right)\cdot z = 0. \tag{11.4}$$

Виберемо тепер функцію $\alpha(x)$ так, щоб коефіцієнт біля z' перетворився у нуль, тобто

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x) = 0.$$

Звідси знаходимо, що

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}. \tag{11.5}$$

Враховуючи, що

$$\alpha'(x) = -\frac{p(x)}{2}e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx},$$
$$\alpha''(x) = \left(-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx},$$

надамо рівнянню (11.4) вигляду

$$z'' + \left(-\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)\right)z = 0.$$

Таким чином, з (11.3) і (11.5) випливає, що заміна шуканої функції за формулою

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx} \cdot z$$

зводить рівняння (11.2) до рівняння

$$z'' + I(x)\,z = 0, \tag{11.6}$$

де позначено
$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x).$$

Рівняння (11.6) називають ***канонічною формою*** рівняння (11.2), а функцію $I(x)$ – ***інваріантом*** рівняння (11.2), бо вона не змінює свого значення для всіх перетворень за допомогою підстановок вигляду (11.3). Очевидно, що коли рівняння (11.6) інтегрується у квадратурах, то інтегрується у квадратурах і рівняння (11.2). Так, наприклад, буде, якщо $I(x) = C$, $I(x) = \frac{C}{x^2}$ або $I(x) = \frac{C}{(ax+b)^2}$. У першому випадку рівняння (11.6) буде лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, у другому – рівнянням Ейлера, у третьому – рівнянням Лагранжа (див. лекцію 9). Зауважимо, що для лінійного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами інваріантом є взятий з протилежним знаком дискримінант відповідного характеристичного рівняння.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння Бесселя*
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{11.7}$$

Розв'язання. Існування та єдиність розв'язку гарантовані на інтервалах $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$; $x = 0$ – особлива точка рівняння Бесселя. Оскільки $p(x) = 1/x$, $q(x) = 1 - n^2/x^2$, то
$$I(x) = 1 + \left(\frac{1}{4} - n^2\right) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Якщо, наприклад, $n = \pm 1/2$, то $I(x) = 1$ і, враховуючи (11.6), маємо:
$$z'' + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Враховуючи тепер, що $y = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}} z = \frac{z}{\sqrt{x}}$, остаточно одержуємо
$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}. \ \blacksquare$$

Зауважимо, що до рівняння Бесселя вигляду (11.7), окремий випадок якого зінтегрований у прикладі 1, зводиться багато задач фізики, механіки та астрономії, наприклад, задачі про стійкість вертикального стрижня, який має форму зрізаного конуса і стискається поздовжньою силою, поздовжній згин вертикального стрижня під дією власної ваги ([14, с. 390 – 395], [5, с. 222 – 229]).

2. Самоспряжена форма лінійного однорідного рівняння другого порядку. Лінійне однорідне рівняння другого порядку, в якому коефіцієнт біля y' дорівнює похідній від коефіцієнта біля y'', тобто рівняння

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0$$

або

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = 0 \tag{11.8}$$

називають ***самоспряженим***.

Покажемо, що будь-яке лінійне однорідне рівняння другого порядку (11.1) з неперервними на інтервалі (a, b) коефіцієнтами $a(x), b(x), c(x)$ $(a(x) \neq 0)$ завжди можна звести до самоспряженої форми. Для цього помножимо обидві частини рівняння (11.1) на поки що невідому функцію $\mu(x)$:

$$a(x)\mu(x)y'' + b(x)\mu(x)y' + c(x)\mu(x)y = 0.$$

Виберемо тепер функцію $\mu(x)$ так, щоб справджувалась рівність

$$\begin{gathered} b(x)\mu(x) = \big(a(x)\mu(x)\big)' \quad \Rightarrow \\ a(x)\,\mu'(x) + \big(a'(x) - b(x)\big)\,\mu(x) = 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} + \frac{a'(x) - b(x)}{a(x)} = 0 \quad \Rightarrow \\ \mu(x) = \frac{1}{a(x)} \cdot e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}. \end{gathered} \tag{11.9}$$

Таким чином, помноживши (11.1) на знайдену функцію $\mu(x)$, одержуємо

$$\begin{gathered} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \cdot y'' + \frac{b(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \cdot y' + \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \\ \left(e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} y'\right)' + \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \cdot y = 0, \end{gathered}$$

тобто рівняння (11.8), у якому

$$p(x) = e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}, \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}.$$

З двох останніх формул випливає, що $p(x)$ і $q(x)$ – неперервні на (a, b), причому $p(x) > 0$.

Приклад 2. *Звести рівняння Бесселя* (11.7) *до самоспряженої форми.*

Розв'язання. Розглянемо задане рівняння на інтервалі $(0, +\infty)$. Використовуючи формулу (11.9), знаходимо функцію $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \frac{1}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Отже, рівняння Бесселя у самоспряженій формі запишеться таким чином:

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(xy'\big)' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0. \ \blacksquare$$

3. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок. Нехай відомий один нетривіальний частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$ рівняння (11.2). Покажемо, що запровадивши заміну

$$y = y_1 \int u\,dx, \tag{11.10}$$

де $u = u(x)$ – нова невідома функція, рівняння (11.2) можна звести до лінійного однорідного рівняння першого порядку, а отже, рівняння (11.2) інтегрується у квадратурах.

Підставляючи (11.10) у (11.2), одержуємо:

$$y_1'' \int u\,dx + 2y_1'u + y_1u' +$$

$$+ p(x)\left(y_1' \int u\,dx + y_1u\right) + q(x)y_1 \int u\,dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\big(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\big) \cdot \int u\,dx + \big(2y_1' + p(x)y_1\big)\,u + y_1u' = 0.$$

Оскільки y_1 – частинний розв'язок рівняння (11.10), то

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,$$

а тому

$$y_1 u' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right) u = 0 \quad \Rightarrow \quad u' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)u = 0.$$

Для знаходження функції u одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальним розв'язком, як легко переконатися, є $u = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,dx}$. Нехай $C = 1$. Підставимо отримане значення u у (11.10), тоді другий частинний розв'язок рівняння (11.2) подається формулою

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx,$$

а тому згідно з теоремою 6 (лекція 8) загальним розв'язком рівняння (11.2) є

$$y = y_1\left(C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx\right). \tag{11.11}$$

Формулу (11.11) називають ***формулою Абеля.***

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння Лежандра*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Існування та єдиність розв'язку гарантовані на інтервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$; $x = \pm 1$ – особливі точки рівняння Лежандра. Один частинний розв'язок заданого рівняння легко вгадується: $y_1 = x$. Оскільки $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$, то згідно з (11.11) маємо

$$y = x\left(C_1 + C_2\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}\,dx\right) = x\left(C_1 + C_2\int \frac{dx}{(1-x^2)x^2}\right) =$$

$$= x\left(C_1 + C_2\int\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx\right) =$$

$$= x\left(C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}\right)\right).$$

Відповідь: $y = x\left(C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}\right)\right)$.

4. Використання формули Остроградського – Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку. Якщо відомий один нетривіальний частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (11.2), то це рівняння можна зінтегрувати іншим способом, ніж у попередньому пункті, з використанням формули Остроградського – Ліувілля.

Згідно з теоремою 6 (лекція 8) для того, щоб знайти загальний розв'язок рівняння (11.2), потрібно знати фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Нехай $y_2(x)$ – такий розв'язок рівняння (11.2), що $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Використовуючи формулу Остроградського – Ліувілля у вигляді $W(x) = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$ (формула (11.16) з лекції 8)), одержуємо:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)\,dx} \quad (\text{якщо } C = 1) \quad \Rightarrow$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{11.12}$$

Отже, для знаходження функції $y_2(x)$ маємо рівняння (11.12) – лінійне рівняння першого порядку. Зінтегруємо його. Для цього поділимо обидві частини цього рівняння на y_1^2 ($y_1 \neq 0$):

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}dx.$$

Оскільки функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ за побудовою утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (11.2), то шуканим загальним розв'язком є

$$y = y_1\left(C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx\right).$$

Одержали формулу Абеля (11.11).

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння*

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що $y_1(x) = x$ є частинним розв'язком заданого рівняння. Оскільки $p(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$, то, використовуючи формулу (11.12), одержуємо:

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} \quad \Rightarrow \quad y_1y_2' - y_1'y_2 = e^{\ln(x^2+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{x^2+1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{x^2+1}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$y_2 = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

Отже, загальним розв'язком є $y = C_1x + C_2(x^2 - 1)$. ■

5. Інтегрування лінійних рівнянь за допомогою степеневих рядів. Відомо, що розв'язки лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами не завжди виражаються через елементарні функції, а інтегрування таких рівнянь рідко зводиться до квадратур.

Найбільш поширеним методом інтегрування вказаних рівнянь є зображення шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду. Нагадаємо деякі поняття і факти, що стосуються степеневих рядів.

Функцію $f(x)$, яка визначена на інтервалі (a, b), називають ***аналітичною*** в точці $x_0 \in (a, b)$, якщо її можна розвинути в степеневий ряд, збіжний у деякому околі точки x_0. Кажуть, що функція $f(x)$ ***аналітична*** на інтервалі (a, b), якщо вона в кожній точці $x_0 \in (a, b)$ може бути розвинена в степеневий ряд, що збігається в деякому околі точки x_0. Зокрема, якщо ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$$

має радіус збіжності $r > 0$, то функція $f(x)$ аналітична на інтервалі $(x_0 - r,\, x_0 + r)$.

Розглянемо диференціальне рівняння (11.2), в якому функції $p(x)$ і $q(x)$ аналітичні на інтервалі $(x_0 - a, x_0 + a)$, тобто їх можна розвинути у степеневі ряди

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cdot (x - x_0)^k,$$

які збігаються на інтервалі $(x_0 - a, x_0 + a)$.

Теорема 1. *Якщо у рівнянні* (11.2) *функції* $p(x)$ *і* $q(x)$ *аналітичні на інтервалі* $(x_0 - a, x_0 + a)$, *то будь-який розв'язок цього рівняння є аналітичною функцією при* $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, *тобто може бути розвинений у степеневий ряд*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{11.13}$$

що збігається для $(x_0 - a, x_0 + a)$.

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [17, с. 284 – 286].

Точку $x = x_0$ називають ***точкою аналітичності*** рівняння (11.2). В околі точки аналітичності розв'язок рівняння (11.2) шукають у вигляді ряду (11.13), де числа c_0, c_1, c_2, ... підлягають визначенню.

Приклад 5. *За допомогою степеневих рядів зінтегрувати рівняння* $y'' + xy = 0$.

Розв'язання. Відзначимо, що задане рівняння не інтегрується у квадратурах. Його розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{11.14}$$

вважаючи c_k, $k = 0, 1, \ldots$ невизначеними коефіцієнтами. Покажемо, що ці коефіцієнти можна визначити і при цьому ряд (11.14) збігатиметься в деякому околі точки $x = 0$.

Двічі здиференціюємо ряд (11.14) і підставимо його разом з рядом для y'' у задане рівняння. Одержимо тотожність

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv 0 \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k \equiv -\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, знаходимо, що

$$c_2 = 0, \quad c_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} c_{k-1}, \quad k \geqslant 1.$$

Отже,

$$c_{3m} = \frac{(-1)^m c_0}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2},$$
$$c_{3m+1} = \frac{(-1)^m c_1}{(3m+1)3m(3m-2)(3m-3)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3}, \quad c_{3m+2} = 0,$$

де $m = 1, 2, \ldots$, а коефіцієнти c_0 і c_1 залишаються невизначеними (довільними).

Покладаючи $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, що рівносильно початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, знаходимо ряд

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2}. \quad (11.15)$$

Покладаючи $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, що рівносильно початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, одержуємо ряд

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{(3m+1)3m(3m-2)(3m-3)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3}. \quad (11.16)$$

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, легко показати, що ряди (11.15), (11.16) збігаються для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$, а тому їх можна диференціювати на $(-\infty,+\infty)$. Підставляючи (11.15), (11.16) у рівняння (11.2), переконуємось, що $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (11.2). Більш того, ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty,+\infty)$, бо їх вронскіан відмінний від нуля у точці $x=0$:

$$W(0)=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ визначаються формулами (11.15), (11.16), а C_1, C_2 – довільні сталі. ■

Зазначимо, що метод степеневих рядів можна використовувати також для розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),$$

якщо $p(x)$, $q(x)$ і $f(x)$ – аналітичні функції в деякому околі точки $x=x_0$.

Розглянемо тепер випадок, коли $p(x)$ і $q(x)$ – коефіцієнти рівняння (11.2) – не є аналітичними в околі точки $x=x_0$. Точку $x=x_0$, для якої $\lim\limits_{x\to x_0}p(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0}q(x)=\infty$, називають ***особливою*** точкою рівняння (11.2).

Нехай коефіцієнти рівняння (11.2) можна подати формулами $p(x)=\frac{p_1(x)}{x-x_0}$, $q(x)=\frac{q_1(x)}{(x-x_0)^2}$, де $p_1(x)$, $q_1(x)$ – аналітичні функції на інтервалі (x_0-a,x_0+a), тобто

$$p_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{1k}(x-x_0)^k,\quad q_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_{1k}(x-x_0)^k.$$

Тоді рівняння (11.2) зручно записати у вигляді

$$(x-x_0)^2y''+(x-x_0)p_1(x)y'+q_1(x)y=0,\qquad x\neq x_0.$$

Якщо $x=x_0$ – особлива точка рівняння (11.2) (це буде, якщо хоча б одне з чисел p_{10}, q_{10}, q_{11} відмінне від нуля), то її називають

регулярною особливою точкою. В околі регулярної особливої точки $x = x_0$ розв'язки рівняння (11.2), взагалі кажучи, можуть не зображатись у вигляді степеневого ряду вигляду (11.13). Наприклад, обидва розв'язки $y_1 = x^{1/2}$ і $y_2 = x^{-2}$ рівняння Ейлера $x^2y'' + \frac{5}{2}xy' - y = 0$ не можна розвинути у степеневі ряди вигляду (11.13), тобто у ряди за цілими додатними степенями x.

У цьому випадку розв'язок рівняння потрібно шукати у вигляді ***узагальненого степеневого ряду***

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

де числа $r,\ c_0,\ c_1,\ \ldots$ підлягають визначенню.

Приклад 6. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$xy'' + 2y' + xy = 0. \tag{11.17}$$

Розв'язання. Точка $x_0 = 0$ є особливою, бо $p(x) = \frac{2}{x} \to \infty$ при $x \to 0$. Тому розв'язок шукаємо у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Тоді

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + r) c_k x^{k+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + r)(k + r - 1) c_k x^{k+r-2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для y, y', y'' у (11.17), одержуємо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + r)(k + r - 1) c_k x^{k+r-1} +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k + r) c_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r+1} = 0$$

або після скорочення на x^r:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k-1}+2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+1}=0.$$

Оскільки збіжні степеневі ряди є абсолютно збіжні всередині інтервалу збіжності, то попередній рівності можна надати такого вигляду:

$$\begin{gathered}(r^2+r)c_0x^{-1}+(r^2+3r+2)c_1x^0+\big(c_0+(r^2+5r+6)c_2\big)\,x+\\+\big(c_1+(r^2+7r+12)c_3\big)\,x^2+\big(c_2+(r^2+9r+20)c_4\big)\,x^3+\ldots=0\end{gathered}\tag{11.18}$$

Звідси випливає, що усі коефіцієнти узагальненого степеневого ряду (11.18) дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases}(r^2+r)c_0=0,\\(r^2+3r+2)c_1=0,\\c_0+(r^2+5r+6)c_2=0,\\c_1+(r^2+7r+12)c_3=0,\\c_2+(r^2+9r+20)c_4=0,\\\qquad\cdots\ \cdots\ \cdots\end{cases}\tag{11.19}$$

Нехай $c_0\neq0$, тоді з першого рівняння системи (11.19) одержуємо, що $r=0$ або $r=-1$. Якщо $r=0$ і, наприклад, $c_0=1$, то з (11.19) знаходимо

$$\begin{gathered}c_1=0,\quad c_2=-\frac{1}{3!},\quad c_3=0,\quad c_4=\frac{1}{5!},\ \ldots,\\c_{2k-1}=0,\quad c_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!},\ \ldots\end{gathered}$$

Таким чином, функція

$$y_1(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=\frac{\sin x}{x}$$

є розв'язком рівняння (11.17).

Нехай тепер $r = -1$. Тоді, вважаючи, що $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, з (11.19) знаходимо

$$c_2 = -\frac{1}{2!}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{4!}, \; \ldots, \quad c_{2k-1} = 0, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \; \ldots,$$

а отже, функція

$$y_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \ldots = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{\cos x}{x}$$

також є розв'язком рівняння (11.17). Оскільки знайдені функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні (пропонуємо у цьому переконатися самостійно, знайшовши їх вронскіан), то згідно з теоремою 6 (лекція 8) загальним розв'язком рівняння (11.17) є

$$y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}. \; \blacksquare$$

Рекомендована література: [9, с. 202 – 219], [10, с. 95, 172 – 185], [14, с. 363 – 404, 412 – 435], [17, с. 269 – 273, 283 – 294], [19, с. 120 – 122, 150 – 158].

Питання до лекції 11

1. За допомогою якої підстановки лінійне однорідне рівняння другого порядку можна звести до рівняння, яке не містить першої похідної? Як називають таку форму рівняння?

2. Що називають інваріантом лінійного однорідного рівняння другого порядку? Чим зумовлена така назва? Якого вигляду має бути інваріант, щоб відповідне лінійне однорідне рівняння другого порядку інтегрувалося у квадратурах?

3. Який загальний вигляд має рівняння Бесселя? Для якого значення n воно інтегрується через елементарні функції?

4. Яку особливість має лінійне однорідне рівняння другого порядку у самоспряженій формі? Як лінійне однорідне рівняння другого порядку з неперервними коефіцієнтами звести до самоспряженого вигляду?

5. Як, маючи один частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку, зінтегрувати це рівняння у квадратурах? Який вигляд має формула Абеля?

6. Як можна використати формулу Остроградського – Ліувілля для інтегрування лінійного однорідного рівняння другого порядку?

7. Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку за допомогою степеневих рядів? У якому випадку розв'язок цього рівняння потрібно шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду?

Вправи до лекції 11

1. Зведіть рівняння до канонічної форми та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0; \quad \text{б) } x^2y'' + 2x^2y' + (x^2 - 2)y = 0.$$

2. Зведіть рівняння до самоспряженого вигляду:

$$\text{а) } xy'' + (1 - x)y' + n^2y = 0 \text{ (рівняння Лагерра);}$$
$$\text{б) } y'' - 2xy' + 2ny = 0 \text{ (рівняння Чебишова – Ерміта).}$$

3. Зінтегруйте рівняння, знаючи їх частинні розв'язки $y_1(x)$:

$$\text{а) } (2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \ \ y_1(x) = e^{-2x};$$
$$\text{б) } x(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \ \ y_1(x) = x.$$

4. Зінтегруйте рівняння методом степеневих рядів:

$$\text{а) } y'' + xy' + y = 0; \quad \text{б) } y'' - ye^x = 0.$$

5. Зінтегруйте рівняння методом узагальнених степеневих рядів:

$$\text{а) } xy'' - (x + 1)y' + y = 0; \quad \text{б) } 9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0.$$

Лекція 12. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку

План

1. Основні означення й поняття.
2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі.
3. Функція Ґріна крайової задачі.
4. Крайові задачі на власні значення.

1. Основні означення й поняття. У задачі Коші умови, за допомогою яких можна виділити певний частинний розв'язок диференціального рівняння, задаються в одній (початковій) точці. Проте у багатьох прикладних задачах умови на невідому функцію та її похідні часто задаються у двох точках, наприклад, на кінцях відрізка, де шукається розв'язок задачі. Такі умови називають ***крайовими***. Задачу відшукання розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє крайові умови, називають ***крайовою***.

Крайові задачі виникають при вивченні багатьох фізичних задач (коливання струни, коливання валів, поширення тепла у провіднику тощо). Наприклад, у задачі про рух матеріальної точки маси m під дією заданої сили F у багатьох випадках потрібно знайти закон руху $s(t)$, якщо у початковий момент часу $t = t_0$ вона знаходилась у точці M_1, а в момент часу $t = t_1$ повинна потрапити у точку M_2. Використовуючи закон Ньютона $F = ma$, де $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ – прискорення, ця задача зводиться до відшукання розв'язку диференціального рівняння другого порядку

$$ms'' = F(t, s, s'),$$

який задовольняє крайові умови $s(t_0) = s_0$, $s(t_1) = s_1$.

Надалі обмежимось розглядом крайових задач тільки для диференціальних рівнянь другого порядку. Для рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{12.1}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ функції, крайові умови означимо наступним чином:

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = y_0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = y_1, \end{cases} \tag{12.2}$$

де α_1, α_2, β_1, β_2, y_0, y_1 – задані числа, причому α_1, β_1, а також α_2, β_2 одночасно не дорівнюють нулю. Якщо $y_0 = y_1 = 0$, тобто

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases} \tag{12.3}$$

то такі крайові умови називають ***однорідними***.

Якщо $f(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то задачу (12.1), (12.2) називають ***неоднорідною крайовою задачею***, а якщо $f(x) \equiv 0$ і $y_0 = y_1 = 0$, – ***однорідною крайовою задачею***.

Розв'язком крайової задачі (12.1), (12.2) називають функцію $y(x)$, яка двічі неперервно диференційовна на (a,b), неперервно диференційовна на $[a,b]$ і задовольняє рівняння (12.1) на (a,b) та крайові умови (12.2).

2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі. Як відомо, розв'язок задачі Коші для рівняння (12.1) з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1, \quad x_0 \in [a,b],$$

де $p(x)$, $q(x)$ – неперервні на $[a,b]$, згідно з теоремою Коші (лекція 7) існує та єдиний на всьому відрізку $[a,b]$. Для крайової задачі (12.1), (12.2) це зовсім не обов'язково, тобто її розв'язок може не існувати або не бути єдиним. Для детальнішого розгляду цього питання позначимо через $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{12.4}$$

а через $Y(x)$ – частинний розв'язок рівняння (12.1). Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (лекція 10, п. 1) загальним розв'язком рівняння (12.1) є

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + Y(x), \tag{12.5}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Для отримання розв'язку крайової задачі (12.1), (12.2) сталі C_1, C_2 необхідно визначити з крайових умов (12.2). Підставляючи (12.5) в (12.2), одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} \big(\alpha_1\varphi_1'(a) + \beta_1\varphi_1(a)\big)C_1 + \big(\alpha_1\varphi_2'(a) + \beta_1\varphi_2(a)\big)C_2 = \\ \qquad = -\alpha_1 Y'(a) - \beta_1 Y(a) + y_0, \\ \big(\alpha_2\varphi_1'(b) + \beta_2\varphi_1(b)\big)C_1 + \big(\alpha_2\varphi_2'(b) + \beta_2\varphi_2(b)\big)C_2 = \\ \qquad = -\alpha_2 Y'(b) - \beta_2 Y(b) + y_1. \end{cases}$$

Позначимо через U і $\tilde{U}$ матрицю та розширену матрицю цієї системи, а через Δ – визначник матриці U. Використовуючи відому з курсу алгебри теорему Кронекера – Капеллі про розв'язність лінійної системи алгебричних рівнянь, одержуємо важливий результат.

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі* (12.1), (12.2):

– *існує та единий, якщо* $\Delta \neq 0$;

– *не існує, якщо* $\Delta = 0$ *і ранг матриці* U *не дорівнює рангу розширеної матриці* $\tilde{U}$;

– *існує, але не единий, якщо* $\Delta = 0$ *і ранг матриці* U *дорівнює рангу матриці* $\tilde{U}$.

Ранг матриці U називають ***рангом крайової задачі*** (12.1), (12.2). Однорідна крайова задача (12.4), (12.3) має лише тривіальний розв'язок, якщо ранг матриці U дорівнює двом, і безліч розв'язків, визначених з точністю до сталого множника, якщо ранг матриці U дорівнює одиниці.

Приклад 1. *Дослідити на розв'язність крайову задачу* $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y(a) = y_0,\ a \neq 0.$

Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння є $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. З крайової умови $y(0) = 0$ знаходимо $C_1 = 0$, а з умови $y(a) = y_0$ одержуємо рівняння $C_2 \sin 2a = y_0$. Якщо $\sin 2a \neq 0$, тобто $a \neq k\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}$, то $C_2 = \frac{y_0}{\sin 2a}$ і маємо єдиний розв'язок задачі $y = \frac{y_0}{\sin 2a} \cdot \sin 2x$.

Якщо $\sin 2a = 0$, тобто $a = k\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}$, то можливі два випадки. Якщо $y_0 \neq 0$, то рівняння $C_2 \sin 2a = y_0$, а значить, і задана крайова задача розв'язків немає. Якщо $y_0 = 0$, то рівняння

$C_2 \sin 2a = y_0$ перетворюється у тотожність і крайова задача має безліч розв'язків вигляду $y = C_2 \sin 2x$, де C_2 – довільна стала. ■

Зауважимо, що крайові умови можуть мати також граничний вигляд, а числа a або b можуть бути невласними. Можна, наприклад, розглядати такі крайові умови:

$$\begin{cases} \alpha_1 \lim\limits_{x \to a} y'(x) + \beta_1 \lim\limits_{x \to a} y(x) = 0, \\ \alpha_2 \lim\limits_{x \to \infty} y'(x) + \beta_2 \lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. *Знайти розв'язок рівняння* $x^2 y'' = 2y$, *який задовольняє умови* $y(1) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$.

Розв'язання. Маємо рівняння Ейлера (лекція 9). Зробимо заміну $x = e^t$ $(t = \ln x)$, тоді $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y'_{x^2} = \big(y''_{t^2} - y'_t\big) e^{-2t}$. Підставляючи у рівняння, для знаходження функції $y = y(t)$ одержуємо лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' - y' - 2y = 0$, загальним розв'язком якого є

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{-\ln x} + C_2 e^{2 \ln x} \quad \Rightarrow$$
$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2.$$

Виберемо сталі C_1, C_2 так, щоб справджувались крайові умови. З умови $y(1) = 1$ випливає, що $C_1 + C_2 = 1$. З умови $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$, враховуючи, що $y' = -C_1 \big/ x^2 + 2C_2 x$, знаходимо $C_2 = 0$, а отже, $C_1 = 1$. Таким чином, розв'язком заданої крайової задачі є гіпербола $y = 1/x$. ■

3. Функція Ґріна крайової задачі. Надалі розглядатимемо лише однорідні крайові умови, бо для неоднорідних крайових умов розв'язок $y(x)$ задачі (12.1), (12.2) можна шукати у вигляді $y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$, де $\bar{y}(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $[a, b]$ функція, яка задовольняє неоднорідні крайові умови. Тоді для функції $z(x)$ одержуємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами і правою частиною $f(x) - L(\bar{y})$.

Наприклад, неоднорідні крайові умови $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ за допомогою заміни

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{b - a}(x - a) - y_0$$

зводяться до однорідних крайових умов $z(a) = 0$, $z(b) = 0$.

Покажемо, що розв'язок рівняння (12.1), який задовольняє однорідні крайові умови (12.3), при певних умовах однозначно виражається через так звану функцію Ґріна крайової задачі.

Функцією Ґріна крайової задачі (12.1), (12.3) називають функцію $G(x, s)$, яка визначена для довільних $x, s \in [a, b]$ і задовольняє такі три умови:

1) для кожного фіксованого $s \in [a, b]$ $G(x, s)$ як функція змінної x на кожному з проміжків $[a, s)$ і $(s, b]$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (12.4);

2) $G(x, s)$ за змінною x задовольняє однорідні крайові умови (12.3);

3) $G(x, s)$ – неперервна для всіх $x, s \in [a, b]$, а її частинна похідна $\frac{\partial G}{\partial x}$ має при $x = s$ розрив першого роду зі стрибком

$$\frac{\partial G(s + 0, s)}{\partial x} - \frac{\partial G(s - 0, s)}{\partial x} = 1.$$

Теорема 2. *Якщо однорідна крайова задача* (12.4), (12.3) *має лише тривіальний розв'язок, то функція Ґріна неоднорідної крайової задачі* (12.1), (12.3) *існує та єдина.*

Доведення. Нехай $\varphi_1(x)$ – розв'язок рівняння (12.4) з початковими умовами $y(a) = \alpha_1$, $y'(a) = -\beta_1$, а $\varphi_2(x)$ – розв'язок рівняння (12.4) з початковими умовами $y(b) = \alpha_2$, $y'(b) = -\beta_2$. Очевидно, що функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ тотожно не дорівнюють нулю на $[a, b]$, причому $\varphi_1(x)$ задовольняє першу крайову умову, а $\varphi_2(x)$ – другу крайову умову з (12.3). Крім того, функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ лінійно незалежні на $[a, b]$, бо інакше $\varphi_2(x) = C\varphi_1(x)$, $C \neq 0$, і тоді $\varphi_2(x)$ задовольняла б обидві крайові умови (12.3), що суперечить припущенню про те, що крайова задача (12.4), (12.3) має лише тривіальний розв'язок. Таким чином, $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (12.4).

Функцію Ґріна $G(x,s)$ шукаємо у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\varphi_1(x), & a \leqslant x < s, \\ c_2(s)\varphi_2(x), & s < x \leqslant b. \end{cases}$$

За побудовою функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ функція $G(x,s)$ задовольняє пункти 1, 2 означення функції Ґріна. Для того, щоб вона задовольняла пункт 3 цього означення, залишається знайти $c_1(s)$, $c_2(s)$ з системи

$$\begin{cases} c_2(s)\varphi_2(s) - c_1(s)\varphi_1(s) = 0, \\ c_2(s)\varphi_2'(s) - c_1(s)\varphi_1'(s) = 1. \end{cases} \tag{12.6}$$

Ця система однозначно розв'язна відносно $c_1(s)$, $c_2(s)$, бо її визначник відмінний від нуля на $[a,b]$ (ним є вронскіан $W(s)$ функцій $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$). Остаточно одержуємо:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{\varphi_2(s)\varphi_1(x)}{W(s)}, & a \leqslant x \leqslant s, \\ \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x)}{W(s)}, & s \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{12.7}$$

Теорему доведено.

Функцію Ґріна крайової задачі (12.1), (12.3) можна будувати методом, який використовувався при доведенні теореми 2.

Приклад 3. *Побудувати функцію Ґріна крайової задачі* $y'' - y = f(x)$, $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$.

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $y'' - y = 0$ є $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$. Частинний розв'язок $\varphi_1(x) = e^x + e^{-x}$ задовольняє першу крайову умову, а розв'язок $\varphi_2(x) = e^{-x}$ – другу. Тому функцію Ґріна шукаємо у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\cdot(e^x + e^{-x}), & 0 \leqslant x < s, \\ c_2(s)\cdot e^{-x}, & s < x \leqslant 2. \end{cases} \tag{12.8}$$

Система (12.6) для знаходження функцій $c_1(s)$, $c_2(s)$ має вигляд

$$\begin{cases} c_1(s)(e^s + e^{-s}) - c_2(s)\cdot e^{-s} = 0, \\ c_1(s)(e^{-s} - e^s) - c_2(s)\cdot e^{-s} = 1. \end{cases}$$

З неї знаходимо:

$$c_1(s) = -\frac{e^{-s}}{2}, \quad c_2(s) = -\frac{e^s + e^{-s}}{2}.$$

Підставляючи знайдені $c_1(s)$, $c_2(s)$ у (12.8), одержуємо функцію Ґріна заданої крайової задачі:

$$G(x,s) = \begin{cases} -e^{-s} \cdot \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \ 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\frac{e^s+e^{-s}}{2} \cdot e^{-x}, \ \ s \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} -e^{-s} \operatorname{ch} x, \ 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -e^{-x} \operatorname{ch} s, \ \ s \leqslant x \leqslant 2. \end{cases} \blacksquare$$

Теорема 3. *Якщо однорідна крайова задача* (12.4), (12.3) *має лише тривіальний розв'язок, то розв'язок неоднорідної крайової задачі* (12.1), (12.3) *існує, единий і задається формулою*

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,s) \cdot f(s)\, ds, \tag{12.9}$$

де $G(x,s)$ *– функція Ґріна крайової задачі* (12.1), (12.3).
Доведення. Запишемо формулу (12.9) у вигляді

$$y(x) = \int\limits_a^x G(x,s) \cdot f(s)\, ds + \int\limits_x^b G(x,s) \cdot f(s)\, ds.$$

На кожному з проміжків $[a,x)$ і $(x,b]$ функції $G(x,s)$ і $\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ неперервні, а тому кожний з інтегралів можна здиференціювати за змінною x [1]. Одержуємо:

$$y'(x) = \int_a^x \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds + G(x, x-0)f(x) +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds - G(x, x+0)f(x).$$

Оскільки функція $G(x,s)$ неперервна при $s = x$, то неінтегральні доданки взаємознищуються, а тому

$$y'(x) = \int_a^x \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds + \int_x^b \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds. \tag{12.10}$$

Рівність (12.10) ще один раз здиференціюємо за змінною x:

$$y''(x) = \int_a^x \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds + \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} f(x) +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} f(x) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds + \left(\frac{\partial G(x+0, x)}{\partial x} - \frac{\partial G(x-0, x)}{\partial x} \right) f(x).$$

Використовуючи пункт 3 з означення функції $G(x,s)$, останню формулу можемо записати у вигляді

$$y''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds + f(x). \tag{12.11}$$

---

[1] Використовуємо формулу $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)\,ds \right) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x}\,ds + f\left(x, \psi(x)\right)\frac{d\psi}{dx} - f\left(x, \varphi(x)\right)\frac{d\varphi}{dx}$.

З формул (12.9) – (12.11), враховуючи властивості функції $G(x,s)$, одержуємо, що (12.9) – розв'язок крайової задачі (12.1), (12.3). Цей розв'язок єдиний, бо якщо припустити існування іншого розв'язку $\tilde{y}(x)$, то функція $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ буде нетривіальним розв'язком однорідної крайової задачі, що суперечить умові теореми. Теорему доведено.

4. Крайові задачі на власні значення. Часто виникає необхідність знайти розв'язки крайової задачі

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (a,b), \tag{12.12}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases} \tag{12.13}$$

де λ – дійсний або комплексний параметр, функції $p(x)$, $q(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Задачу знаходження значень параметра λ, для яких крайова задача (12.12), (12.13) має нетривіальні розв'язки, називають ***крайовою задачею на власні значення***.

Значення параметра λ, для яких крайова задача (12.12), (12.13) має нетривіальні розв'язки, називають ***власними значеннями***, а відповідні їм нетривіальні розв'язки – ***власними функціями*** крайової задачі на власні значення.

Кількість лінійно незалежних розв'язків крайової задачі (12.12), (12.13) для заданого власного значення λ називають ***кратністю*** цього власного значення.

Можна довести (див., наприклад, [13, с. 24 – 26]), що для задачі (12.12), (12.13) справджується тільки одне з таких тверджень:

1. Крайова задача (12.12), (12.13) не має власних значень.

2. Крайова задача (12.12), (12.13) має не більше зчисленної множини власних значень, які при цьому не можуть мати скінченної граничної точки.

3. Кожне число λ є власним значенням крайової задачі (12.12), (12.13).

Приклад 4. *Знайти власні значення та власні функції задачі* $y'' = \lambda y,\ y(0) = 0,\ y(b) = 0,\ b \neq 0.$

Розв'язання. Нехай $\lambda > 0$ або λ – комплексне. Тоді задача не має нетривіальних розв'язків, бо, підставляючи загальний розв'язок рівняння $y'' - \lambda y = 0$

$$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

у крайові умови, одержуємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,b} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0.$$

Нехай $\lambda = 0$. Тоді, підставляючи загальний розв'язок $y = C_1 x + C_2$ у крайові умови, одержуємо

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 b + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0,$$

тобто і у цьому випадку задача має тільки тривіальний розв'язок.

Нехай тепер $\lambda < 0$. Тоді загальним розв'язком рівняння $y'' - \lambda y = 0$ є

$$y = C_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(x\sqrt{-\lambda}),$$

а, враховуючи крайові умови, одержуємо:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos(b\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(b\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin(b\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Якщо y тотожно не дорівнює нулю, то $C_2 \neq 0$ і, отже, $\sin(b\sqrt{-\lambda}) = 0$.

Звідси маємо формулу для всіх власних значень задачі:

$$\lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ \ldots$$

Їм відповідають власні функції

$$y_k = c_k \sin\frac{\pi k x}{b}, \quad k = 1, 2, \ \ldots,$$

де c_k – довільні сталі, відмінні від нуля. ■

Важливим окремим випадком задачі на власні значення є ***задача Штурма – Ліувілля***:

$$\big(p(x)y'\big)' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad x \in (a,b),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases}$$

де функції $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $x \in [a,b]$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Детальніше з задачею Штурма – Ліувілля, властивостями її власних значень і власних функцій можна ознайомитись, наприклад, у [9, с. 189 – 201].

Рекомендована література: [9, с. 166 – 201], [10, с. 189 – 197], [13, с. 13 – 51], [15, с. 185 – 192], [16, с. 303 – 319].

Питання до лекції 12

1. Що таке крайові умови, крайова задача для звичайного диференціального рівняння? Який вигляд мають крайові умови для лінійного диференціального рівняння другого порядку?

2. Чим відрізняються неоднорідні крайові умови від однорідних? Чому, розглядаючи крайову задачу, можна обмежитись однорідними крайовими умовами?

3. Яку функцію називають розв'язком крайової задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку?

4. Коли розв'язок крайової задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку існує та єдиний, не існує, існує, але неєдиний?

5. Що таке функція Ґріна крайової задачі? Яка її роль у побудові розв'язку неоднорідної крайової задачі? Коли існує єдина функція Ґріна крайової задачі? Як можна побудувати функцію Ґріна?

6. Що називають крайовою задачею на власні значення? Що таке власні значення, власні функції такої задачі? Як формулюється задача Штурма – Ліувілля?

Вправи до лекції 12

1. Знайдіть розв'язки крайових задач:

$$\text{а) } y'' + 9y = 1, \quad y(0) = 0, \;\; y'(\pi) = 1;$$
$$\text{б) } y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; \lim_{x \to +\infty} y'(x) = 2.$$

2. Побудуйте функції Ґріна крайових задач:

$$\text{а) } y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \;\; y(1) = 0;$$
$$\text{б) } xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0, \;\; y(2) = 0.$$

3. Знайдіть власні значення й власні функції задач:

$$\text{а) } y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \;\; y'(b) = 0, \;\; b \neq 0;$$
$$\text{б) } x^2 y'' + \frac{y}{4} = \lambda y, \quad y(1) = 0, \;\; y(b) = 0, \;\; b \neq 1.$$

Розділ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Лекція 13. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків.
3. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до нормальної системи й обернена задача.
4. Лінійні однорідні системи.

1. Основні означення й поняття. Розв'язуючи багато проблем сучасної фізики та техніки, доводиться визначати відразу декілька невідомих функцій з відповідної кількості диференціальних рівнянь, тобто мати справу з системою диференціальних рівнянь. Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\ y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0, \\ F_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\ y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ F_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\ y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0, \end{cases} \tag{13.1}$$

де y_1, y_2, $\ldots$, y_n – шукані функції незалежної змінної x, називають ***системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку***.

Якщо (13.1) можна розв'язати відносно похідних усіх функцій, то одержимо систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{13.2}$$

яку називають ***нормальною***.

Розв'язком системи (13.2) на деякому інтервалі (a, b) називають впорядковану сукупність функцій

$$y_1 = y_1(x),\ \ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \tag{13.3}$$

визначених і неперервно диференційовних на цьому інтервалі, якщо вона перетворює всі рівняння системи (13.2) у тотожності, які справджуються для всіх значень $x \in (a, b)$. Криву в $(n+1)$-вимірному просторі $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, яка відповідає розв'язку (13.3), називають ***інтегральною кривою*** системи (13.2).

Задача Коші для системи (13.2) формулюється так: серед усіх розв'язків цієї системи знайти розв'язок (13.3), який задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_{10},\ \ \ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{13.4}$$

де $x = x_0$ – довільна точка з проміжку (a, b), а y_{10}, y_{20}, $\ldots$, y_{n0} – довільні наперед задані дійсні числа (їх називають ***початковими даними розв'язку***). Сукупність чисел x_0, y_{10}, y_{20}, $\ldots$, y_{n0} називають ***початковими даними системи*** (13.2), а умови (13.4) – ***початковими умовами*** системи (13.2).

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуканні серед усіх інтегральних кривих системи (13.2) такої кривої, яка проходить через задану точку $(x_0,\ y_{10},\ y_{20},\ \ldots,\ y_{n0})$.

Розглядаючи задачу Коші (13.2), (13.4), природно виникає питання про існування та єдиність її розв'язку. Виявляється, що для існування неперервно диференційовного розв'язку цієї задачі досить припустити, щоб *праві частини системи* (13.2) *були неперервними в деякому околі початкових даних* (***теорема Пеано***). Наступна теорема гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші (13.2), (13.4) (доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [19, с. 93 – 99]).

Теорема (Коші). *Нехай праві частини системи* (13.2) *визначені в* $(n+1)$*-вимірному паралелепіпеді*

$$G = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : |x - x_0| \leqslant a,\ |y_j - y_{j0}| \leqslant b,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

де $a > 0$, $b > 0$, *і задовольняють у ньому такі умови*:

1) *вони неперервні, а, отже, й обмежені, тобто*

$$|f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant M, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \;\; M > 0;$$

2) *частинні похідні* $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, *існують та обмежені.*
Тоді задача Коші (13.2), (13.4) *має єдиний розв'язок принаймні на відрізку* $|x - x_0| \leqslant h$, *де* $h = \min(a, \, b/M)$.

Нехай G – це область простору зміни змінних $x, y_1, \ldots, y_n$, у кожній точці якої задача Коші (13.2), (13.4) має єдиний розв'язок. Сукупність функцій

$$y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{13.5}$$

які визначені в деякій області зміни x, C_1, C_2, $\ldots$, C_n і мають неперервні частинні похідні за змінною x, називають ***загальним розв'язком*** системи (13.2) в області G, якщо:

1) систему (13.5) можна розв'язати в області G відносно довільних сталих C_1, C_2, $\ldots$, C_n, тобто

$$C_j = \psi_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{13.6}$$

2) для всіх значень $(x, y_1, \ldots, y_n) \in G$ формули (13.6) визначають такі значення C_1, C_2, $\ldots$, C_n, для яких сукупність функцій (13.5) є розв'язком системи (13.2).

Розв'язок системи (13.2), у кожній точці якого виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають ***частинним***. З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються з нього для конкретних значень довільних сталих C_1, C_2, $\ldots$, C_n, є частинними. Розв'язок системи, у кожній точці якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші для цієї системи, називають ***особливим***.

Неперервно диференційовну і незвідну до сталої функцію $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ називають ***інтегралом*** системи (13.2), якщо вона тотожно перетворюється у сталу вздовж довільного частинного розв'язку цієї системи. Звідси випливає, що $d\psi = 0$ внаслідок системи (13.2), тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n =$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1\,dx + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n\,dx \equiv 0.$$

Рівність $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$, де C – довільна стала, називають ***першим інтегралом*** системи (13.2). Наприклад, кожна з рівностей (13.6) є першим інтегралом системи (13.2).

Сукупність n перших інтегралів системи (13.2)

$$\psi_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

називають ***загальним інтегралом*** цієї системи, якщо інтеграли ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n є ***незалежними***, тобто між ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n не існує співвідношення вигляду $F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$ для жодної функції F. З математичного аналізу відомо, що для незалежності в області G функцій ψ_1, ψ_2,$\ldots$, ψ_n, які мають частинні похідні $\frac{\partial\psi_j}{\partial y_k}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, необхідно і достатньо, щоб визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

в області G був відмінний від нуля.

Можна показати, що нормальна система n рівнянь не може мати більше, ніж n незалежних інтегралів системи (13.2).

Будь-які n перших інтегралів називають ***незалежними***, якщо відповідні їм інтеграли незалежні. Отже, задача побудови загального інтеграла системи буде розв'язаною, якщо буде знайдено n незалежних перших інтегралів.

Загального способу знаходження перших інтегралів не існує. Однак у багатьох випадках вдається знайти перший інтеграл шляхом деяких перетворень системи, у результаті чого отримується диференціальне рівняння, яке легко інтегрується. Кожне таке рівняння називають ***інтегровною комбінацією***. Кожна інтегровна комбінація породжує перший інтеграл. Однак серед них можуть виявитись і залежні інтеграли, а тому одержуючи новий перший інтеграл, потрібно перевірити, чи буде він незалежним з раніше отриманими.

Приклад 1. *Зінтегрувати систему*[1)]

$$\begin{cases} y' = z(y-z)^{-2}, \\ z' = y(y-z)^{-2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Поділивши перше рівняння системи на друге, одержуємо інтегровну комбінацію $\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y}$, звідки, відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy - zdz = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y^2 - z^2 = C_1. \tag{13.7}$$

Віднімаючи від другого рівняння заданої системи перше, одержимо ще одну інтегровну комбінацію $\frac{d(z-y)}{dx} = \frac{-1}{z-y}$, звідки

$$(z-y)^2 = -2x + C_2. \tag{13.8}$$

Кожне із співвідношень (13.7), (13.8) є першим інтегралом, а оскільки вони є незалежними (у цьому пропонуємо переконатися самостійно), то їх сукупність є загальним інтегралом системи.
***Відповідь*:** $y^2 - z^2 = C_1$, $(z-y)^2 = -2x + C_2$.

Як вже згадувалось, до систем диференціальних рівнянь зводяться різноманітні задачі прикладного характеру. Розглянемо одну з них.

Задача. *Визначити траєкторію руху гарматного снаряду, який вилітає з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту.*
Розв'язання. За початок координат візьмемо точку вильоту снаряда (рис. 13.1). На снаряд діє сила його ваги $P = mg$, її складова на осі x дорівнює нулю, бо сила перпендикулярна до цієї осі. Припустимо, що опір повітря пропорційний швидкості руху. Тоді диференціальними рівняннями руху вздовж координатних осей є

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mk\frac{dy}{dt}.$$

[1)] Якщо у системі дві невідомі функції, то позначатимемо їх через y, z.

Якщо знехтувати опором повітря, то ці рівняння після скорочення на m матимуть вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{13.9}$$

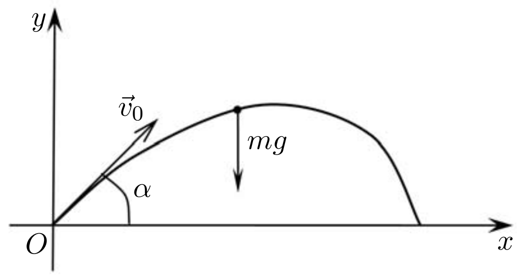

Рис. 13.1

Отже, задача звелася до інтегрування системи двох диференціальних рівнянь. Інтегруючи кожне рівняння системи (13.9), одержуємо:

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} = C_1, \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt} = -gt + C_2, \tag{13.10}$$

де v_x, v_y – складові швидкості $v = v(x, y)$ на осях. У початковий момент часу $t_0 = 0$ компонентами швидкості є $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = v_0 \sin\alpha$, а отже,

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha.$$

Враховуючи ці формули, з (13.10) знаходимо

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha + C_4,$$

але оскільки $x(0) = y(0) = 0$, то $C_3 = C_4 = 0$. Остаточно маємо

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha.$$

Виключаючи з цих рівнянь t, одержуємо траєкторію руху (параболу)

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\operatorname{tg}\alpha.$$

Дальність x_1 польоту снаряда знайдемо з рівняння $y = 0$, тобто

$$x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальною дальність польоту буде тоді, коли $\sin 2\alpha = 1$, звідки знаходимо відповідний кут вильоту $\alpha = \pi/4$. ■

2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків. Нормальній системі (13.2) та її розв'язкам можна надати механічне тлумачення. Розглянемо систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{13.11}$$

де t – час, x_1, x_2, $\ldots$, x_n – координати точки n-вимірного простору. Цей простір називають ***фазовим***. Для $n = 1$ фазовим простором є вісь t (***фазова пряма***), для $n = 2$ – площина (t, x), яку називають ***фазовою***.

Кожний розв'язок (інтегральна крива)

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(t) \tag{13.12}$$

системи (13.11) виражає ***закон руху*** точки у фазовому просторі. Тому розв'язок (13.12) називатимемо ***рухом*** у n-вимірному просторі $\mathbf{R}^n$, який визначений системою (13.11), а криву, яку описує рухома точка у фазовому просторі, – ***траєкторією руху***.

Ліві частини системи (13.11) є складовими (за осями координат) швидкості руху точки, тому кажуть, що ця система задає поле швидкостей рухів, тобто точка може проходити у момент часу t через положення $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тільки з заданою швидкістю.

Якщо швидкість, з якою точка проходить через положення $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не залежить від моменту часу проходження, тобто система (13.11) має вигляд

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{13.13}$$

то її називають ***автономною*** (***стаціонарною***), а рух, що описуються такою системою, – ***усталеним***.

Якщо у деякій точці $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ праві частини системи (13.13) дорівнюють нулю для всіх значень часу t, тобто $f_j(t, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \equiv 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$, то ця система має розв'язок

$$x_1 \equiv x_{10},\ \ x_2 \equiv x_{20},\ \ldots,\ x_n \equiv x_{n0}, \tag{13.14}$$

адже, підставляючи його в (13.11), одержимо тотожності. Рух (13.14) називають ***станом спокою***. Траєкторією цього руху є точка $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, яку називатимемо ***точкою спокою***.

Задача Коші для системи (13.11) полягає у знаходженні руху (13.12), який задовольняє початкові умови

$$x_1(t_0) = x_{10},\ \ x_2(t_0) = x_{20},\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_{n0},$$

де t_0, x_{10}, x_{20}, $\ldots$, x_{n0} – задані числа (***початкові дані***), тобто шукається такий рух (13.12), при якому рухома точка знаходиться у заданій точці $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ фазового простору у заданий момент часу t. При цьому $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ називають ***початковою точкою руху*** (13.12). Зауважимо, що якщо початковою точкою руху (13.12) є точка спокою $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, то одним з розв'язків задачі Коші буде стан спокою (13.14).

3. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до нормальної системи й обернена задача. Диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{13.15}$$

завжди можна звести до нормальної системи n диференціальних рівнянь. З цією метою позначимо

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_n.$$

Тоді

$$y_1' = y' = y_2, \quad y_2' = y'' = y_3, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n,$$
$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

тобто функції y_1, y_2, …, y_n задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \quad \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{13.16}$$

Система (13.16) – це нормальна система, рівносильна диференціальному рівнянню (13.15). Зведення одного диференціального рівняння довільного порядку, розв'язаного відносно старшої похідної, до рівносильної нормальної системи рівнянь у багатьох випадках спрощує задачу знаходження загального розв'язку або розв'язку задачі Коші.

Розглянемо обернену задачу, тобто задачу про зведення нормальної системи (13.2), у якій f_j – $(n-1)$ разів диференційовні функції, до одного диференціального рівняння. Для цього послідовно здиференціюємо $(n-1)$ разів одне з рівнянь системи (13.2) (наприклад, перше), замінюючи після кожного диференціювання похідні $y_1', y_2', \dots, y_n'$ виразами для них з системи (13.2), і виключимо з першого рівняння цієї системи і отриманих $(n-1)$-го рівняння функції $y_2, y_3, \dots, y_n$. При цьому для знаходження функції y_1, очевидно, одержимо диференціальне рівняння n-го порядку вигляду

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right),$$

і якщо вдасться знайти його загальний розв'язок, то функції $y_2, y_3, \ldots, y_n$ знайдуться без квадратур.

Метод розв'язування нормальної системи рівнянь зведенням її до одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної, називають ***методом виключення***.

У деяких випадках зведення нормальної системи до одного рівняння можна здійснювати з відхиленням від описаної загальної схеми.

Приклад 2. *Зінтегрувати систему методом виключення*

$$\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння виразимо z через y і підставимо у друге рівняння системи:

$$z = y' - 2y \quad \Rightarrow \quad \left(y' - 2y\right)' = 3y + 4\left(y' - 2y\right) \quad \Rightarrow$$
$$y'' - 6y' + 5y = 0.$$

Загальним розв'язком одержаного рівняння є $y = C_1e^x + C_2e^{5x}$. Підставляючи цей вираз у перше рівняння системи, маємо

$$z = \left(C_1e^x + C_2e^{5x}\right)' - 2\left(C_1e^x + C_2e^{5x}\right) = -C_1e^x + 3C_2e^{5x}.$$

***Відповідь*:** $y = C_1e^x + C_2e^{5x},\ z = -C_1e^x + 3C_2e^{5x}$.

Приклад 3. *Зінтегрувати систему методом виключення*

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 + 2y_1, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Здиференціюємо третє рівняння системи і підставимо замість y_1', y_2' відповідні вирази з початкової системи:

$$y_3'' = y_1' - y_2' + 2y_3' = 2y_1 - y_2 + y_3 - (y_1 + 2y_2 - y_3) +$$
$$+ 2(y_1 - y_2 + 2y_3) = 3y_1 - 5y_2 + 6y_3.$$

Диференціюючи отримане співвідношення і знову використовуючи рівняння системи, одержуємо рівняння

$$y_3''' = 3y_1' - 5y_2' + 6y_3' = 7y_1 - 19y_2 + 20y_3.$$

Із системи

$$\begin{cases} y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_3'' = 3y_1 - 5y_2 + 6y_3, \\ y_3''' = 7y_1 - 19y_2 + 20y_3 \end{cases}$$

виключимо y_1 і y_2. Для цього достатньо, наприклад, розв'язати систему, утворену з першого і другого рівнянь, відносно y_1 і y_2.

$$\begin{cases} y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_3'' = 3y_1 - 5y_2 + 6y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 - y_2 = y_3' - 2y_3, \\ 3y_1 - 5y_2 = y_3'' - 6y_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}y_3'' + \frac{5}{2}y_3' - 2y_3, \quad y_2 = -\frac{1}{2}y_3'' + \frac{3}{2}y_3'.$$

Підставивши знайдений розв'язок в третє рівняння, одержимо

$$y_3''' - 6y_3'' + 11y_3' - 6y_3 = 0.$$

Оскільки характеристичними числами, як легко перевірити, є $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, то загальний розв'язок останнього рівняння має вигляд

$$y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Після цього знаходимо y_1, y_2:

$$y_1 = C_2e^{2x} + C_3e^{3x}, \quad y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

***Відповідь*:** $y_1 = C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$, $y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}$, $y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$.

Потрібно мати на увазі, що при розв'язуванні систем (як і рівнянь) відповідь може бути записана у різній формі, причому її можна звести від одного до іншого вигляду перепозначенням сталих.

4. Лінійні однорідні системи. ***Лінійною*** системою диференціальних рівнянь першого порядку називають систему

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{13.17}$$

яку скорочено можна записати у вигляді

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Вважатимемо, що функції $p_{kj}(x)$, $f_k(x)$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, неперервні на деякому інтервалі (a, b). Тоді згідно з теоремою Коші (п. 1) система (13.17) має єдиний розв'язок (13.3), який задовольняє початкові умови (13.4). Цей розв'язок буде визначений на деякому відрізку $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Особливих розв'язків система (13.17) не має.

Якщо на інтервалі (a, b) всі $f_k(x) \equiv 0$, то систему (13.17) називають ***лінійною однорідною***. Вона має вигляд

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.18}$$

Якщо у системі (13.17) не всі функції $f_k(x)$ тотожно дорівнюють нулю, то її називають ***лінійною неоднорідною***.

Очевидно, кожна лінійна однорідна система має нульовий розв'язок $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $\ldots$, $y_n = 0$, який називають ***тривіальним***.

Розв'язки лінійної однорідної системи (13.18) мають деякі характерні властивості, які аналогічні до відповідних властивостей розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку (лекція 8, п. 2).

Властивість 1. *Якщо* $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, $\ldots$, $y_n = \varphi_n(x)$ *– розв'язок однорідної системи* (13.18), *то*

$$y_1 = C\varphi_1(x), \quad y_2 = C\varphi_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = C\varphi_n(x),$$

де C – довільна стала, також є розв'язком цієї системи.

Властивість 2. *Якщо задано m розв'язків системи* (13.18):

$$\begin{array}{rl} \textit{1-й розв'язок}: & y_{11},\, y_{12},\, \ldots,\, y_{1n}, \\ \textit{2-й розв'язок}: & y_{21},\, y_{22},\, \ldots,\, y_{2n}, \\ \ldots & \ldots\ \ldots \\ m\textit{-й розв'язок}: & y_{m1},\, y_{m2},\, \ldots,\, y_{mn}, \end{array}$$

то їх лінійна комбінація з довільними сталими C_1, C_2, ..., C_m

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_m y_{m1}, \\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_m y_{m2}, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_n &= C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_m y_{mn}, \end{aligned}$$

або, скорочено,

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{13.19}$$

також є розв'язком системи (13.18).

Доведення. Підставляючи (13.19) в (13.18), одержуємо

$$\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik}\right)' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_{ij}\right) \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{m} C_i y'_{ik} = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_{ij}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведення властивості випливає з тотожного виконання рівностей

$$y'_{ik} \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_{ij}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \;\; i = 1, 2, \ldots, m,$$

які є результатом підставляння i-го розв'язку у систему (13.18). Властивість доведено.

Так само, як і для лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку, для знаходження дійсних розв'язків системи (13.2) часто використовують її комплексні розв'язки. Сукупність функцій

$$y_j(x) = u_j(x) + i\, v_j(x), \;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $u_j(x)$, $v_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – дійсні функції, називають ***комплексним розв'язком*** системи (13.2) на інтервалі (a, b), якщо вона перетворює всі рівняння цієї системи у тотожності. При цьому легко показати, що впорядковані сукупності, складені окремо з дійсних та з уявних частин цього розв'язку, є дійсними розв'язками системи (13.2) ([20, с. 184]).

Рекомендована література: [1, с. 115 – 118, 134 – 135], [9, с. 18 – 22, 65 – 70, 91 – 92], [16, с. 322 – 340], [19, с. 93 – 99, 164 – 179], [20, с. 51 – 53, 168 – 184].

Питання до лекції 13

1. Який загальний вигляд має система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку? Що називають розв'язком цієї системи на деякому інтервалі (a, b)?

2. Який вигляд має нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку? Як формулюється задача Коші для нормальної системи? Який її геометричний та механічний зміст? Яку нормальну систему називають автономною?

3. Який механічний зміст має нормальна система та її розв'язок? Що таке фазовий простір, фазова площина, фазова пряма? Як пов'язані між собою рух, який описується системою диференціальних рівнянь, та його траєкторія? Який рух називають станом спокою, яка його траєкторія? Що таке поле швидкостей, визначене системою диференціальних рівнянь? Дайте механічне тлумачення задачі інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь.

4. Як формулюється теорема Коші про достатні умови існування та єдиності неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь?

5. Що називають загальним розв'язком (інтегралом) нормальної системи диференціальних рівнянь у деякій області існування та єдиності розв'язків задачі Коші? Що називають частинним та особливим

розв'язками нормальної системи диференціальних рівнянь? Як вони пов'язані з загальним розв'язком системи?

6. Що таке інтегровні комбінації і як вони використовуються для знаходження загального інтеграла?

7. Як диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, можна звести до рівносильної йому нормальної системи диференціальних рівнянь?

8. Який вигляд має лінійна система диференціальних рівнянь? Чим відрізняється лінійна неоднорідна система від однорідної? Які властивості мають розв'язки лінійної однорідної системи?

Вправи до лекції 13

1. Зінтегруйте системи, використовуючи інтегровні комбінації:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 2(y^2 + z^2)x, \\ z' = 4yzx; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = \sin y \cos z, \\ z' = \cos y \sin z. \end{cases}$$

2. Зінтегруйте системи методом виключення:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 10y - 6z, \\ z' = 18y - 11z; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = y - 2z - xe^x, \\ z' = 5y - z - (x+1)e^x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_2' = -6y_1 + 2y_2 - 2y_3, \\ y_3' = -6y_1 - 2y_2 - y_3. \end{cases}$$

Лекція 14. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій.

2. Формула Остроградського – Якобі.

3. Теорема про побудову загального розв'язку лінійної однорідної системи.

4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера.

1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій. Нехай задано m сукупностей функцій

$$\left.\begin{array}{c} y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_{m1},\ y_{m2},\ \ldots,\ y_{mn}, \end{array}\right\} \tag{14.1}$$

у кожній з яких по n функцій, визначених і неперервних на деякому інтервалі (a, b). Сукупності функцій (14.1) називають ***лінійно незалежними*** на інтервалі (a, b), якщо тотожності

$$\begin{array}{c} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{21} + \ldots + \alpha_m y_{m1} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{12} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_m y_{m2} \equiv 0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \alpha_1 y_{1n} + \alpha_2 y_{2n} + \ldots + \alpha_m y_{mn} \equiv 0, \end{array}$$

де $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ – сталі, виконуються тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. В іншому випадку сукупності функцій (14.1) називають ***лінійно залежними*** на (a, b).

Зокрема, дві сукупності функцій $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ і $y_{21}, y_{22}, \ldots,$ y_{2n} будуть лінійно незалежними на (a, b), якщо не існує співвідношення вигляду

$$\frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \ldots = \frac{y_{2n}}{y_{1n}} = k \neq 0, \qquad a < x < b.$$

Наприклад, сукупності функцій

$$y_{11} = 3e^{3x},\ y_{12} = 2e^{3x},\ y_{13} = e^{3x}\ \text{ і}$$

$$y_{21} = e^{3x},\ y_{22} = 2e^{3x},\ y_{23} = 3e^{3x}$$

є лінійно незалежними на $(-\infty, +\infty)$, а сукупності функцій

$$y_{11} = 2e^{3x},\ y_{12} = e^{3x},\ y_{13} = -e^{3x}\ \text{ і}$$

$$y_{21} = 4e^{3x},\ y_{22} = 2e^{3x},\ y_{23} = -2e^{3x}$$

лінійно залежні на $(-\infty, +\infty)$.

Встановимо необхідну умову лінійної залежності довільних n сукупностей функцій. Отже, нехай маємо n сукупностей функцій

$$\left.\begin{array}{c} y_{11},\ y_{12},\ \cdots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \cdots,\ y_{2n}, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_{n1},\ y_{n2},\ \cdots,\ y_{nn}. \end{array}\right\} \tag{14.2}$$

Визначником Вронського або ***вронскіаном*** сукупностей функцій (14.2) називають визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{14.3}$$

Теорема 1 (необхідна умова лінійної залежності n сукупностей функцій). *Якщо n сукупностей функцій (14.2) лінійно залежні на інтервалі (a, b), то $W(x) \equiv 0$ на цьому інтервалі.*

Доведення. Оскільки n сукупностей функцій (14.2) лінійно залежні, то за означенням

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad a < x < b, \tag{14.4}$$

де не всі α_i дорівнюють нулю. Розглядаючи (14.4) як однорідну лінійну систему алгебричних рівнянь відносно α_1, α_2, $\ldots$, α_n, бачимо, що вона має ненульовий розв'язок, а тому визначник цієї системи дорівнює нулю. Цим визначником є вронскіан, отже $W(x) \equiv 0$ в усіх точках інтервалу (a, b). Теорему доведено.

Теорему 1 можна сформулювати інакше: *якщо вронскіан* n *сукупностей функцій* (14.2) *на деякому інтервалі* (a, b) *відмінний від нуля, то ці сукупності функцій лінійно незалежні на цьому інтервалі.*

Нехай тепер кожна з сукупностей функцій (14.2) є розв'язком лінійної однорідної системи

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{14.5}$$

коефіцієнти $p_{kj}(x)$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, якої неперервні на деякому інтервалі (a, b).

Теорема 2 (необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь). *Якщо* n *розв'язків* (14.2) *системи* (14.5) *лінійно незалежні на інтервалі* (a, b), *то їх вронскіан не перетворюється в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

Доведення теореми проведемо від супротивного. Нехай $W(x_0) = 0$ для деякої точки $x_0 \in (a, b)$. Складемо систему n алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.6}$$

Оскільки визначник однорідної системи (14.6) дорівнює нулю (ним є $W(x_0)$), то вона має ненульовий розв'язок $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$, $\ldots$, $C_n = C_n^{(0)}$.

Побудуємо розв'язок

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.7}$$

Оскільки $C_i^{(0)}$ задовольняють систему (14.6), то розв'язок (14.7) має нульові початкові значення у точці $x = x_0$, тобто $y_1(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0, \ldots, y_n(x_0) = 0$. Але ці самі початкові умови задовольняє також тривіальний розв'язок, тому згідно з теоремою Коші (п. 1, лекція 13) ці розв'язки збігаються, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

де не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Отримали, що розв'язки (14.2) лінійно залежні на (a, b), що суперечить умові теореми. Теорему доведено.

З теорем 1 і 2 випливає: *для того, щоб n розв'язків системи* (14.5) *були лінійно незалежними на інтервалі* (a, b), ***необхідно і достатньо***, *щоб їх вронскіан не перетворювався в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

2. Формула Остроградського – Якобі. Ця формула дозволяє з точністю до сталого множника виразити вронскіан розв'язків лінійної однорідної системи (14.5) через діагональні коефіцієнти цієї системи, а саме

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} \left(p_{11}(x) + p_{22}(x) + \ldots + p_{nn}(x)\right) dx}, \tag{14.8}$$

де $x = x_0$ – довільна точка інтервалу (a, b). Формулу (14.8) називають ***формулою Остроградського – Якобі***. Для доведення формули (14.8) знайдемо похідну від вронскіана (14.3), диференціюючи його за стовпцями. У цьому випадку похідна від визначника n-го порядку дорівнює сумі n визначників, які отримуються з нього почерговою заміною елементів першого, другого, …, n-го стовпця їх похідними, тобто

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & y'_{1k} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & y'_{2k} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & y'_{nk} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замінимо похідні $y'_{1k}, y'_{2k}, \ldots, y'_{nk}$ їх виразами з (14.5). Тоді

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{kj} y_{1j} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{kj} y_{2j} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{kj} y_{nj} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти кожен з визначників справа на суму n визначників, то всі вони дорівнюватимуть нулю (кожен з них матиме два пропорційні стовпці), крім визначників, які відповідають $j = k$. У цьому випадку k-й визначник справа дорівнює $p_{kk}(x)W(x)$, а тому $W'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{kk}(x)W(x)$, звідки інтегруванням отримуємо формулу (14.8) (порівняйте з виведенням формули Остроградського – Ліувілля з лекції 8).

З формули Остроградського – Якобі, зокрема, випливають такі властивості:

1. *Якщо* $W(x) = 0$ *хоч у одній точці інтервалу* (a, b), *то* $W(x) = 0$ *в усіх точках цього інтервалу.*

2. *Якщо* $W(x) \neq 0$ *у деякій точці інтервалу* (a, b), *то* $W(x) \neq 0$ *в усіх точках цього інтервалу.*

3. Теорема про побудову загального розв'язку лінійної однорідної системи. Сукупність n розв'язків лінійної однорідної системи (14.5), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a, b), називають ***фундаментальною системою розв'язків*** на цьому інтервалі.

З п. 1, 2 цієї лекції випливає таке твердження: *сукупність n розв'язків лінійної однорідної системи* (14.5) *буде фундаментальною системою розв'язків на інтервалі* (a, b) *тоді і тільки тоді, коли вронскіан цих розв'язків відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу* (a, b).

Так само, як і для лінійних однорідних рівнянь n-го порядку (лекція 8), знання фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати загальний розв'язок лінійної однорідної системи (14.5).

Теорема 3. *Якщо сукупності функцій* (14.2) *утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійної однорідної системи* (14.5) *на інтервалі* (a, b), *то формули*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_n y_{n1}, \\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{n2}, \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_n &= C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_n y_{nn}, \end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *– довільні сталі, визначають загальний розв'язок системи* (14.5) *в усій її області задання.*

Доведення. Неоднорідну систему (14.9) можна розв'язати відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, бо її визначник відмінний від нуля (ним є $W(x)$). Крім того, сукупність функцій (14.9) є розв'язком системи (14.5) для всіх значень довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (властивість 2 з п. 4 лекції 13). Тому згідно з означенням загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь сукупність функцій (14.9) є загальним розв'язком системи (14.5). Теорему доведено.

4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера. Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n, \\ \quad\cdots\ \ \cdots\ \ \cdots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n. \end{cases} \tag{14.10}$$

де $a_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$ – дійсні сталі, і покажемо, що її завжди можна зінтегрувати у скінченному вигляді (тобто через елементарні функції або у квадратурах).

Згідно з теоремою 3 для побудови загального розв'язку системи (14.10) досить знайти хоча б одну її фундаментальну систему розв'язків. Частинний розв'язок системи (14.10) шукаємо у вигляді

$$y_1 = \gamma_1 e^{kx}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{kx}, \quad \ldots, \quad y_n = \gamma_n e^{kx}, \tag{14.11}$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ і k – деякі сталі, причому $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ не дорівнюють нулю одночасно (інакше матимемо очевидний тривіальний розв'язок, який не може належати фундаментальній системі розв'язків). Якщо підставити (14.11) в систему (14.10), скоротити e^{kx} і перенести усі доданки у ліву частину, то одержуємо однорідну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - k)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{14.12}$$

Ненульовий розв'язок системи (14.12) існує лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю. Позначивши його через $\Delta(k)$, маємо

$$\Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{14.13}$$

Рівняння (14.13) називають ***характеристичним рівнянням*** системи (14.10), його корені – ***характеристичними числами***, а визначник $\Delta(k)$ – ***характеристичним визначником***.

Нехай усі характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ прості. Тоді, як відомо з алгебри, $\Delta(k_j) = 0,\ \Delta'(k_j) \neq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Покажемо, що ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - k_j & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k_j & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k_j \end{pmatrix},$$

складеної з коефіцієнтів системи, яку одержуємо з (14.12) після заміни у ній k на k_j, дорівнює $n-1$. Для цього знайдемо $\Delta'(k)$:

$$\Delta'(k) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}-k & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\Delta_{11}(k) - \Delta_{22}(k) - \ldots - \Delta_{nn}(k), \tag{14.14}$$

де $\Delta_{jj}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $a_{jj}-k$ визначника $\Delta(k)$. Оскільки $\Delta'(k_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то з (14.14) випливає, що хоча б один з визначників $\Delta_{jj}(k_i)$ (а це визначники $(n-1)$-го порядку), відмінний від нуля. Отже, ранг матриці A дорівнює $n-1$, а тому одне з рівнянь системи (14.12) є наслідком інших і ця система має ненульовий розв'язок, який визначається з точністю до довільного множника P_i:

$$\gamma_{i1} = P_i m_{i1}, \;\; \gamma_{i2} = P_i m_{i2}, \;\; \ldots, \;\; \gamma_{in} = P_i m_{in}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.15}$$

Якщо у формулах (14.15) зафіксувати множник P_i, то одержимо конкретний розв'язок системи (14.12).

Підставляючи тепер у (14.11) замість k послідовно характеристичні числа k_1, k_2, …, k_n, а замість γ_1, γ_2, …, γ_n – відповідні їм розв'язки системи (14.12), визначені формулами (14.15) при фіксованих множниках P_i, одержуємо n розв'язків системи (14.10)

$$\begin{cases} y_{11} = \gamma_{11} e^{k_1 x}, \;\; y_{12} = \gamma_{12} e^{k_2 x}, \;\; \ldots, \;\; y_{1n} = \gamma_{1n} e^{k_n x}, \\ y_{21} = \gamma_{21} e^{k_1 x}, \;\; y_{22} = \gamma_{22} e^{k_2 x}, \;\; \ldots, \;\; y_{2n} = \gamma_{2n} e^{k_n x}, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{n1} = \gamma_{n1} e^{k_1 x}, \;\; y_{n2} = \gamma_{n2} e^{k_2 x}, \;\; \ldots, \;\; y_{nn} = \gamma_{nn} e^{k_n x}. \end{cases} \tag{14.16}$$

Легко показати, що ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$. Якщо при цьому всі числа k_1, k_2, $\ldots$, k_n дійсні, то розв'язки (14.16) також будуть дійсними.

Таким чином, для простих дійсних характеристичних чисел система (14.10) має n дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду (14.16). Тому згідно з теоремою 3 формули

$$\begin{cases} y_1 = C_1\gamma_{11}e^{k_1x} + C_2\gamma_{21}e^{k_2x} + \ \ldots + C_n\gamma_{n1}e^{k_nx}, \\ y_2 = C_1\gamma_{12}e^{k_1x} + C_2\gamma_{22}e^{k_2x} + \ \ldots + C_n\gamma_{n2}e^{k_nx}, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = C_1\gamma_{1n}e^{k_1x} + C_2\gamma_{2n}e^{k_2x} + \ \ldots + C_n\gamma_{nn}e^{k_nx} \end{cases}$$

визначають загальний розв'язок системи (14.10).

Припустимо, що характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ прості, але серед них є комплексні. Нехай $a+ib$ і $a-ib$ – пара комплексно-спряжених характеристичних чисел. Числу $a+ib$ згідно з (14.11) відповідає розв'язок

$$y_1 = \gamma_1 e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{(a+ib)x}, \ \ldots, \ y_n = \gamma_n e^{(a+ib)x},$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – комплексні числа. Покладаючи

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21}, \quad \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}, \ \ldots, \ \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n},$$

одержуємо комплексний розв'язок

$$y_1 = (\gamma_{11} + i\gamma_{21})e^{(a+ib)x}, \ y_2 = (\gamma_{12} + i\gamma_{22})e^{(a+ib)x}, \ \ldots,$$
$$y_n = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n})e^{(a+ib)x}.$$

Відокремлюючи у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, маємо два дійсні розв'язки:

$$y_{11} = e^{ax}(\gamma_{11}\cos bx - \gamma_{21}\sin bx),$$
$$y_{12} = e^{ax}(\gamma_{12}\cos bx - \gamma_{22}\sin bx), \ \ldots,$$
$$y_{1n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\cos bx - \gamma_{2n}\sin bx)$$

і

$$y_{21} = e^{ax}(\gamma_{11}\sin bx + \gamma_{21}\cos bx),$$
$$y_{22} = e^{ax}(\gamma_{12}\sin bx + \gamma_{22}\cos bx),\ \ldots,$$
$$y_{2n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\sin bx + \gamma_{2n}\cos bx).$$

Легко показати, що ці розв'язки лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Очевидно також, що спряжений корінь $a - ib$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Приклад 1. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 10k + 9 = 0,$$

знаходимо $k_1 = 1$, $k_2 = 9$, отже, характеристичні числа дійсні і прості.

Складемо систему для знаходження чисел γ_1 і γ_2, які відповідають характеристичному числу k_1. Матрицю коефіцієнтів цієї системи отримуємо з матриці

$$\begin{pmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{pmatrix}$$

заміною k на k_1. Отже, шукана система має вигляд

$$\begin{cases} 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = -\gamma_2.$$

Нехай $\gamma_1 = 1$, тоді $\gamma_2 = -1$. Таким чином, характеристичному числу $k_1 = 1$ відповідає розв'язок $y_1 = e^x$, $z_1 = -\,e^x$.

Аналогічно, розв'язуючи систему, яка відповідає $k_2 = 9$:

$$\begin{cases} -4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

знаходимо, що $\gamma_1 = \gamma_2$. Якщо взяти $\gamma_1 = 1$, то $\gamma_2 = 1$, а тому цьому характеристичному числу відповідає розв'язок $y_2 = e^{9x}$, $z_2 = e^{9x}$.

Загальний розв'язок записуємо згідно з теоремою 3:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \quad z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \ \blacksquare$$

Приклад 2. *Зінтегрувати систему* $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 4k + 5 = 0$$

має комплексно-спряжені корені $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$. Розв'язок, який відповідає k_1, має вигляд $y = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$, де числа γ_1, γ_2 знайдемо з системи:

$$\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Покладаючи $\gamma_1 = 1$, знаходимо $\gamma_2 = -i$, а тому шуканим розв'язком є $y = e^{(2+i)x}$, $z = -i\, e^{(2+i)x}$. Відокремлюючи у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, одержуємо два дійсні розв'язки: $y_1 = e^{2x}\cos x$, $z_1 = e^{2x}\sin x$ і $y_2 = e^{2x}\sin x$, $z_2 = -e^{2x}\cos x$. Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків, а тому загальним розв'язком є

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \quad z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x). \ \blacksquare$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є кратні, то метод, викладений вище, застосовувати не можна. Однак і у цьому випадку вдається побудувати фундаментальну систему розв'язків через елементарні функції. Зауважимо перш за все, що якщо k_1 – просте характеристичне число, то, незалежно від того, чи будуть серед інших характеристичних чисел зустрічатися кратні чи ні, йому завжди відповідає один частинний розв'язок вигляду $y_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}$, $y_2 = \gamma_2 e^{k_1 x}$, $\ldots$, $y_n = \gamma_n e^{k_1 x}$, де γ_1, γ_2, $\ldots$,

γ_n – деякі сталі, які визначаються з точністю до сталого множника.

Таким чином, задача зводиться до того, щоб знайти частинні розв'язки, які відповідають кратному кореню. При цьому, так само, як і для лінійного однорідного рівняння n-го порядку, виявляється, що одному характеристичному числу кратності s відповідає s лінійно незалежних частинних розв'язків.

Теорема 4. *Якщо* k_1 *– характеристичне число кратності* s*, то йому відповідає розв'язок системи* (14.10)

$$y_1 = P_1(x)e^{k_1 x}, \quad y_2 = P_2(x)e^{k_1 x}, \; \dots, \; y_n = P_n(x)e^{k_1 x}, \qquad (14.17)$$

де $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ *– многочлени степеня не вищого, ніж* $s-1$*, які мають у сукупності* s *довільних коефіцієнтів.*

Доведення теореми можна знайти, наприклад, в [10, с. 119 – 126].

З практичної точки зору розв'язок, що відповідає характеристичному числу k_1, потрібно шукати у вигляді (14.17), вважаючи $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\dots$, $P_n(x)$ многочленами $(s-1)$-го степеня з невизначеними коефіцієнтами і, підставляючи їх в (14.10), виразити всі коефіцієнти через s з них, які залишаються довільними. Покладаючи по черзі один з цих довільних коефіцієнтів рівним одиниці, а решта рівними нулю, побудуємо s лінійно незалежних розв'язків, які відповідають характеристичному числу k_1. Усі ці частинні розв'язки будуть утворені з добутків функції $e^{k_1 x}$ на многочлени від x, степені яких не перевищують $s-1$. Якщо многочлени $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\dots$, $P_n(x)$ у формулі (14.17) вироджуються у сталі, то одержимо s лінійно незалежних частинних розв'язків такого ж вигляду, як і для випадку простого характеристичного числа.

Якщо система (14.10) має комплексне характеристичне число $a+bi$ кратності s, то вона має також спряжене характеристичне число $a-bi$ тієї ж кратності. Побудувавши s лінійно незалежних комплексних розв'язків, які відповідають числу $a+bi$ і відокремивши в них дійсні та уявні частини, одержимо $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Отже, у загальному випадку кожному простому дійсному характеристичному числу відповідає один частинний розв'язок, кожній парі простих комплексно-спряжених характеристичних чисел відповідає два дійсні лінійно незалежні розв'язки, дійсному характеристичному числу кратності s відповідає s дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків, а для кожної пари комплексно-спряжених характеристичних чисел кратності s маємо $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Усього матимемо n дійсних розв'язків, які утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Загальний розв'язок системи (14.10) одержимо згідно з теоремою 3.

Приклад 3. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = 6y + z, \\ z' = -16y - 2z. \end{cases} \tag{14.18}$$

Розв'язання. Розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6-k & 1 \\ -16 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 4k + 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 2.$$

Згідно з теоремою 4 загальний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = (Ax + B)e^{2x}, \quad z = (Cx + D)e^{2x}. \tag{14.19}$$

Оскільки

$$y' = (2Ax + 2B + A)e^{2x}, \quad z' = (2Cx + 2D + C)e^{2x},$$

то після підстановки (14.19) в (14.18) маємо:

$$\begin{cases} (2Ax + 2B + A)e^{2x} = 6(Ax + B)e^{2x} + (Cx + D)e^{2x}, \\ (2Cx + 2D + C)e^{2x} = -16(Ax + B)e^{2x} - 2(Cx + D)e^{2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (4A + C)x - A + 4B + D = 0, \\ (16A + 4C)x + 16B + 4D + C = 0. \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, отримуємо систему:

$$\begin{cases} 4A + C = 0, \\ -A + 4B + D = 0, \\ 16A + 4C = 0, \\ 16B + 4D + C = 0. \end{cases}$$

У цій системі є лише два лінійно незалежних рівняння, наприклад, перше і друге. Вважатимемо у них вільними невідомими, приміром, A і B і надамо їм довільних значень: $A = C_1$, $B = C_2$. Тоді $C = -4C_1$, $D = C_1 - 4C_2$, а загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y = (C_1 x + C_2)e^{2x}, \quad z = (-4C_1 x + C_1 - 4C_2)e^{2x}. \ \blacksquare$$

Приклад 4. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо характеристичні числа системи:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^3 - 3k - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_1 = 2, \ k_{2,3} = -1.$$

Числу $k_1 = 2$ відповідає система двох рівнянь (третє є наслідком двох перших):

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Один з її розв'язків $\gamma_1 = 1, \ \gamma_2 = 1, \ \gamma_3 = 1$. Тому $y_1^{(1)} = e^{2x}$, $y_2^{(1)} = e^{2x}$, $y_3^{(1)} = e^{2x}$ є розв'язком заданої системи.

Характеристичним числам $k_{2,3} = -1$ відповідає одне рівняння (друге і третє збігаються з ним): $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Виберемо два лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, наприклад, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = -1$ і $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = 1$. Кожному з них відповідає один розв'язок:

$$y_1^{(2)} = e^{-x}, \ y_2^{(2)} = 0, \ \ y_3^{(2)} = -e^{-x},$$
$$y_1^{(3)} = 0, \ y_2^{(3)} = -e^{-x}, \ \ y_3^{(3)} = e^{-x}.$$

Оскільки вронскіан знайдених трьох розв'язків відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & -e^{-x} \\ e^{2x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальним розв'язком є

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \quad y_2 = C_1 e^{2x} - C_3 e^{-x},$$
$$y_3 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [9, с. 91 – 102, 109 – 128], [10, с. 84 – 90, 115 – 127], [16, с. 341 – 356], [19, с. 198 – 205, 210 – 214, 222 – 227], [20, с. 185 – 188, 192 – 199].

Питання до лекції 14

1. Які сукупності функцій називають лінійно незалежними (лінійно залежними) на деякому інтервалі? Наведіть приклади таких сукупностей функцій.

2. Що таке вронскіан розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь? Як за допомогою вронскіана визначити, чи є задані n сукупностей функцій лінійно незалежними?

3. Як формулюється необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n диференціальних рівнянь? Сформулюйте необхідну і достатню умову лінійної незалежності на інтервалі (a, b) n розв'язків лінійної однорідної системи.

4. Який вигляд має формула Остроградського – Якобі? Які властивості випливають з цієї формули?

5. Що називають фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи на деякому інтервалі? Яка її роль у побудові загального розв'язку лінійної однорідної системи?

6. Який вигляд має лінійна однорідна система диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами? Що називають характеристичним визначником, характеристичним рівнянням, характеристичними числами такої системи?

7. У чому полягає метод Ейлера інтегрування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами? Як залежить структура фундаментальної системи розв'язків такої системи від вигляду характеристичних чисел?

Вправи до лекції 14

1. Зінтегруйте системи методом Ейлера:

$$\text{а)}\ \begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 6y + 7z; \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} y' = -5y - 4z, \\ z' = 10y + 7z; \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = -2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ y_3' = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3; \end{cases} \quad \text{г)}\ \begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

Лекція 15. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Метод невизначених коефіцієнтів.
4. Метод Д'Аламбера.

1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи. Розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{15.1}$$

або, у скороченому записі:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.2}$$

Припустимо, що нам відомий деякий частинний розв'язок цієї системи

$$y_1 = y_1^{(1)}, \quad y_2 = y_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad y_n = y_n^{(1)},$$

а отже,

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_j^{(1)} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.3}$$

Введемо нові невідомі функції $z_1 = z_1(x)$, $z_2 = z_2(x)$, …, $z_n = = z_n(x)$ і покладемо

$$y_k = y_k^{(1)} + z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.4}$$

Підставляючи функції (15.4) в систему (15.1), одержуємо

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \frac{dz_k}{dx} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) z_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.5}$$

Враховуючи (15.3), з (15.5) для знаходження функцій z_1, z_2, …, z_n отримуємо лінійну однорідну систему

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) z_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.6}$$

Однорідну систему (15.6) називають ***відповідною неоднорідній системі*** (15.2).

Згідно з теоремою 3 (лекція 14) загальний розв'язок системи (15.6) визначається формулою

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.7}$$

де $z_{jk} = z_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, – деяка фундаментальна система розв'язків системи (15.6), C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, – довільні сталі.

Підставляючи (15.7) у (15.4), одержуємо, що

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.8}$$

Формула (15.8) визначає загальний розв'язок системи (15.1) в усій області її задання.

Таким чином, *для знаходження загального розв'язку неоднорідної системи* (15.1) *достатньо знайти будь-який її частинний розв'язок і додати до нього загальний розв'язок відповідної однорідної системи* (15.6).

2. Метод варіації довільних сталих. Для знаходження частинного розв'язку, а разом з тим і загального розв'язку лінійної неоднорідної системи у випадку, коли вдається зінтегрувати відповідну однорідну систему, часто використовують ***метод варіації довільних сталих*** (***метод Лагранжа***).

Розв'язок лінійної неоднорідної системи (15.1) шукаємо у вигляді
$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.9}$$
де $z_{jk} = z_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, – деяка фундаментальна система розв'язків однорідної системи (15.6), а $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – деякі неперервно диференційовні функції.

Виберемо у (15.9) функції $C_j(x)$ так, щоб ця формула визначала розв'язок системи (15.1). Підставляючи (15.9) в (15.1), одержуємо:
$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \left(z_{jk}' - \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{jl} \right) =$$

$$= f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.10}$$

Оскільки z_{jk} – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (15.6), то вираз у дужках у формулі (15.10) дорівнює нулю, а тому для знаходження функцій $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, маємо систему:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.11}$$

Визначник системи (15.11) відмінний від нуля для всіх $x \in (a, b)$ (ним є вронскіан $W(x)$), а тому вона має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера:

$$C_j'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.12}$$

де $W_{kj}(x)$ – алгебричне доповнення елемента z_{kj} вронскіана $W(x)$. Інтегруючи (15.12), знаходимо

$$C_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x)\,dx + C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де C_j – довільні сталі, а x_0 – довільна точка з інтервалу (a, b).

Підставляючи знайдені вирази для $C_j(x)$ у формулу (15.9), одержуємо

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.13}$$

Підставляючи в (15.13) $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, маємо частинний розв'язок

$$y_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а тому (15.13) можна записати у вигляді (15.8). Отже, розв'язок, який визначається формулою (15.13), є загальним розв'язком лінійної неоднорідної системи (15.1).

Приклад 1. *За допомогою методу варіації довільних сталих зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -y + 2z + 4xe^x. \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідну однорідну систему зінтегруємо методом виключення:

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -y + 2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 2z - z',$$

$$2z' - z'' = 2(2z - z') - z \quad \Rightarrow \quad z'' - 4z' + 3z = 0.$$

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, то

$$z_0 = C_1e^x + C_2e^{3x} \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2(C_1e^x + C_2e^{3x}) -$$
$$-(C_1e^x + 3C_2e^{3x}) \quad \Rightarrow \quad y_0 = C_1e^x - C_2e^{3x}.$$

Розв'язок заданої неоднорідної системи шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)e^x - C_2(x)e^{3x}, \quad z = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{3x}, \qquad (15.14)$$

де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ знайдемо з системи вигляду (15.11):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{3x} = 4xe^x \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$C_1'(x) = 2x, \quad C_2'(x) = 2xe^{-2x} \quad \Rightarrow$$

$$C_1(x) = x^2 + C_1, \quad C_2(x) = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C_2.$$

Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ у (15.14), одержуємо загальний розв'язок заданої системи:

$$y = (x^2 + C_1)e^x - \big(-xe^{-2x} - 0{,}5e^{-2x} + C_2\big)e^{3x} =$$
$$= C_1e^x - C_2e^{3x} + \big(x^2 + x + 0{,}5\big)e^x,$$
$$z = (x^2 + C_1)e^x + \big(-xe^{-2x} - 0{,}5e^{-2x} + C_2\big)e^{3x} =$$
$$= C_1e^x + C_2e^{3x} + \big(x^2 - x - 0{,}5\big)e^x.$$

Після зведення подібних доданків і перепозначення сталої ($C_1 := C_1 + 0{,}5$), маємо

$$y = C_1 e^x - C_2 e^{3x} + \big(x^2 + x\big)e^x,$$
$$z = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \big(x^2 - x - 1\big)e^x. \ \blacksquare$$

3. Метод невизначених коефіцієнтів. У п. 1 цієї лекції встановлено, що інтегрування лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь зводиться до необхідності побудови фундаментальної системи розв'язків відповідної однорідної системи. Тому особливий інтерес становлять такі лінійні неоднорідні системи, у яких фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи виражається через елементарні функції. До таких систем відносяться, передовсім, системи зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases}$$

або, у скороченому записі:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.15}$$

Якщо функції $f_k(x)$ у системі (15.15) складаються з сум і добутків многочленів $P_m(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m$ та функцій $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, то її розв'язок можна шукати ***методом невизначених коефіцієнтів***. Це робиться за такими ж правилами, що і для одного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (лекція 10), але з певними змінами. Зокрема, якщо

$$f_k(x) = P_{m_k}(x)e^{\alpha x},$$

де $P_{m_k}(x)$ – многочлен степеня m_k, то частинний розв'язок системи (15.15) потрібно шукати не у вигляді $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ (як це було для лінійного рівняння), а як

$$y_i = Q_{m+s}^{(i)}(x)e^{\alpha x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.16}$$

де $Q_{m+s}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – многочлени степеня $m + s$ з невідомими коефіцієнтами, $m = \max\limits_{k=1,\ldots,n} m_k$; $s = 0$, якщо α – не є характеристичним числом, і s дорівнює кратності цього числа, якщо α є характеристичним числом (якщо точніше, число $m+s$ на m одиниць більше найвищого зі степенів многочленів, на які множаться експоненти $e^{\alpha x}$ у загальному розв'язку відповідної однорідної системи).

Невідомі коефіцієнти многочленів $Q_{m+s}^{(i)}(x)$ визначають прирівнюванням коефіцієнтів біля відповідних доданків після підставляння (15.16) у систему (15.15).

Аналогічно визначаються степені многочленів у випадках, коли функції $f_k(x)$ у системі (15.15) містять функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а число $\alpha + \beta i$ є або не є характеристичним.

Приклад 2. *Зінтегрувати систему методом невизначених коефіцієнтів*:

$$\begin{cases} y' = y - 2z + e^x, \\ z' = y + 4z + e^{2x}. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи метод Ейлера (лекція 14), знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Характеристичному числу $k_1 = 2$ відповідає система

$$\begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки, наприклад, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -1$. Числу $k_2 = 3$ відповідає система

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Отже, загальним розв'язком однорідної системи є:

$$y_0 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{3x}, \quad z_0 = -C_1e^{2x} - C_2e^{3x}.$$

Враховуючи вигляд функцій $f_1(x) = e^x$ і $f_2(x) = e^{2x}$, частинний розв'язок y_1, z_1 неоднорідної системи через невизначені коефіцієнти запишемо у вигляді

$$y_1 = Ae^x + (Bx + C)e^{2x}, \quad z_1 = De^x + (Ex + F)e^{2x}. \qquad (15.17)$$

Підставляючи (15.17) у задану систему, одержуємо:

$$\begin{gathered} Ae^x + 2(Bx + C)e^{2x} + Be^{2x} = \\ = Ae^x + (Bx + C)e^{2x} - 2De^x - 2(Ex + F)e^{2x} + e^x, \\ De^x + 2(Ex + F)e^{2x} + Ee^{2x} = \\ = Ae^x + (Bx + C)e^{2x} + 4De^x + 4(Ex + F)e^{2x} + e^{2x}. \end{gathered}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля e^x, e^{2x} і xe^{2x} в обох частинах цих тотожностей, одержуємо відповідно:

$$\begin{array}{r|l} e^x & A = A - 2D + 1, \\ e^{2x} & 2C + B = C - 2F, \\ xe^{2x} & 2B = B - 2E, \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} e^x & D = A + 4D, \\ e^{2x} & 2F + E = C + 4F + 1, \\ xe^{2x} & 2E = B + 4E. \end{array}$$

Звідси

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = -1, \quad F = -1,$$

а тому частинним розв'язком неоднорідної системи є

$$y_1 = -\frac{3}{2}e^x + 2xe^{2x}, \quad z_1 = \frac{1}{2}e^x - (x + 1)e^{2x},$$

а загальним розв'язком –

$$y = 2C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - \frac{3}{2}e^x + 2xe^{2x},$$
$$z = -C_1e^{2x} - C_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x - (x+1)e^{2x}. \ \blacksquare$$

Приклад 3. *Записати частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (не шукаючи їх) системи*

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x} + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x. \end{cases} \tag{15.18}$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичні числа відповідної однорідної системи:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 3.$$

У системі (15.18) для функцій xe^{3x}, $e^{3x}\sin x$, $xe^{3x}\cos x$ числа $\alpha+\beta i$ відповідно дорівнюють 3, $3+i$, $3+i$. Тому окремо знайдемо частинні розв'язки систем

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x}, \\ z' = y + 2z \end{cases} \tag{15.19}$$

і

$$\begin{cases} y' = 4y - z + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x. \end{cases} \tag{15.20}$$

Для системи (15.19) $\alpha+\beta i = k_1 = k_2 = 3$, $s = 2$, $m = 1$. Згідно з (15.16) її частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{3x},$$
$$z_1 = (fx^3 + gx^2 + hx + p)e^{3x}.$$

Для системи (15.20) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq k_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$, а тому її частинний розв'язок має вигляд

$$y_2 = (Ax + B)e^{3x}\sin x + (Cx + D)e^{3x}\cos x,$$
$$z_2 = (Ex + F)e^{3x}\sin x + (Gx + H)e^{3x}\cos x.$$

Тоді частинний розв'язок системи (15.18) запишеться у вигляді:

$$y = y_1 + y_2, \qquad z = z_1 + z_2. \ \blacksquare$$

4. Метод Д'Аламбера. Розглянемо лінійну неоднорідну систему двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ z' = a_{21}y + a_{22}z + f_2(x). \end{cases} \tag{15.21}$$

Помножимо друге рівняння цієї системи на деяке число λ і додамо почленно до першого рівняння:

$$(y + \lambda z)' = (a_{11} + \lambda a_{21})y + (a_{12} + \lambda a_{22})\,z + f_1(x) + \lambda\, f_2(x) \quad \Rightarrow$$

$$(y + \lambda z)' = (a_{11} + \lambda a_{21})\left(y + \frac{a_{12} + \lambda a_{22}}{a_{11} + \lambda a_{21}} z\right) + f_1(x) + \lambda f_2(x). \tag{15.22}$$

Користуючись довільністю числа λ, виберемо його таким, щоб

$$\frac{a_{12} + \lambda a_{22}}{a_{11} + \lambda a_{21}} = \lambda,$$

тобто

$$a_{21}\lambda^2 + (a_{11} - a_{22})\lambda - a_{12} = 0. \tag{15.23}$$

Тоді рівняння (15.22) запишемо у вигляді:

$$(y + \lambda z)' = (a_{11} + \lambda a_{21})(y + \lambda z) + f_1(x) + \lambda f_2(x). \tag{15.24}$$

Рівняння (15.24) є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку з шуканою функцією $y+\lambda z$. Інтегруючи його (формула (4.5) з лекції 4), одержуємо:

$$y + \lambda z = e^{(a_{11}+\lambda a_{21})x}\left(\int \bigl(f_1(x) + \lambda f_2(x)\bigr) e^{-(a_{11}+\lambda a_{21})x} dx + C\right). \tag{15.25}$$

Якщо корені λ_1 і λ_2 квадратного рівняння (15.23) різні і дійсні, то маємо систему

$$\begin{cases} y+\lambda_1 z = e^{(a_{11}+\lambda_1 a_{21})x}\left(\displaystyle\int\bigl(f_1(x)+\lambda_1 f_2(x)\bigr)e^{-(a_{11}+\lambda_1 a_{21})x}dx + C_1\right),\\ y+\lambda_2 z = e^{(a_{11}+\lambda_2 a_{21})x}\left(\displaystyle\int\bigl(f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)\bigr)e^{-(a_{11}+\lambda_2 a_{21})x}dx + C_2\right), \end{cases}$$

розв'язуючи яку відносно y і z, знайдемо загальний інтеграл системи (15.21).

Якщо корені рівняння (15.23) кратні, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то з (15.25) одержуємо тільки одне рівняння:

$$y+\lambda z = e^{(a_{11}+\lambda a_{21})x}\left(\int\bigl(f_1(x)+\lambda f_2(x)\bigr)e^{-(a_{11}+\lambda a_{21})x}dx + C\right),$$

але у цьому випадку, підставляючи вираз для y, знайдений звідси, у друге рівняння системи (15.21), одержимо лінійне рівняння першого порядку з невідомою функцією z.

Рекомендована література: [5, с. 244 – 264], [9, с. 103 – 107, 138 – 144], [10, с. 90 – 91, 127 – 131], [16, с. 370 – 385], [19, с. 206 – 210].

Питання до лекції 15

1. Як знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи, якщо відомий її частинний розв'язок і загальний розв'язок відповідної однорідної системи?
2. У чому полягає метод варіації довільних сталих знаходження загального розв'язку лінійної неоднорідної системи?
3. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів інтегрування лінійних неоднорідних систем зі сталими коефіцієнтами? Чи для кожної лінійної системи його можна використати?
4. У чому полягає метод Д'Аламбера інтегрування лінійних систем зі сталими коефіцієнтами?

Вправи до лекції 15

1. Зінтегруйте системи методом варіації довільних сталих:

а) $\begin{cases} y' = 4y - 8z + \operatorname{tg} 4x, \\ z' = 4y - 4z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z + \sqrt{x}e^x. \end{cases}$

2. Зінтегруйте системи методом невизначених коефіцієнтів:

а) $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -2y + z + 4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = 3y + 2z - 3e^x, \\ z' = -3y - 2z - e^x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y' = 5y - z + 5\sin x, \\ z' = 4y + z + 2\cos x. \end{cases}$

3. Зінтегруйте системи методом Д'Аламбера:

а) $\begin{cases} y' = -2y - z + 12x, \\ z' = -4y - 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = 5y + 4z + e^x, \\ z' = 4y + 5z + 1. \end{cases}$

Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 16. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку

План

1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик.
2. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння.
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння.

1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик. Багато проблем техніки і математичної фізики (коливання струни і мембрани, теплопередача, дифузія, газова динаміка та інші) приводять до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ми обмежимося викладом найпростіших відомостей теорії рівнянь з частинними похідними першого порядку, маючи за мету показати зв'язок таких рівнянь з системами звичайних диференціальних рівнянь і навести методи побудови загального розв'язку та розв'язку задачі Коші, які ґрунтуються на цьому зв'язку. Рівняння з частинними похідними вищих порядків інтегруються іншими методами, які у цьому посібнику не розглядаються.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називають таке співвідношення, яке містить невідому функцію від декількох змінних, незалежні змінні та частинні похідні невідомої функції за незалежними змінними. Порядок старшої частинної похідної, яка входить у рівняння, називають ***поряд-***

ком рівняння. Наприклад, диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку має такий загальний вигляд:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{16.1}$$

де $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – шукана функція, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\ldots$, $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ – її частинні похідні, Φ – задана неперервно диференційовна функція в деякій області $G \subset \mathbf{R}^{2n+1}$, причому в рівняння (16.1) принаймні одна частинна похідна входить обов'язково.

Багато фізичних явищ описуються рівняннями з частинними похідними першого порядку. Наприклад, у газовій динаміці важливу роль відіграє рівняння Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

де $u = u(t, x)$, а в оптиці вивчається рівняння

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = f(x, y, z),$$

де $u = u(x, y, z)$, яке описує поширення світлових променів у неоднорідному середовищі з показником заломлення $f(x, y, z)$.

Розв'язком рівняння (16.1) називають неперервно диференційовну функцію $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка перетворює рівняння (16.1) у тотожність для кожної точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset G$.

Якщо $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – розв'язок рівняння (16.1), то його графік – поверхню $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у просторі $(n+1)$-ї змінної $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ – називають ***інтегральною поверхнею*** рівняння (16.1).

Розглянемо декілька простих прикладів відшукання розв'язків рівняння (16.1).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$, *де* $z = z(x, y)$.

Розв'язання. Інтегруючи обидві частини за змінною y, одержуємо $z = \int (x - y)dy = xy - \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – довільна диференційовна функція змінної x. ■

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$.

Розв'язання. Інтегруючи за змінною x, маємо $\frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція. Інтегруючи останню рівність за змінною y, одержуємо, що

$$z = \int \big(x + \varphi(y)\big) dy = xy + \varphi_1(y) + \varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(y) = \int \varphi(y)\, dy$, $\varphi_2(x)$ – довільні диференційовні функції. ■

З наведених прикладів випливає, що розв'язки диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку можуть залежати від однієї довільної функції, а розв'язки рівняння другого порядку – від двох довільних функцій. Пізніше буде показано, що розв'язки рівняння (16.1) можуть залежати від однієї неперервно диференційовної функції, кількість аргументів якої $(n-1)$.

Якщо у рівнянні (16.1) функція Φ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то його називають ***лінійним***. Лінійне рівняння можна записати у вигляді

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \qquad (16.2)$$

Якщо права частина рівняння (16.2) тотожно дорівнює нулю, а коефіцієнти f_1, f_2, $\ldots$, f_n не залежать від шуканої функції u, то маємо рівняння

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \qquad (16.3)$$

яке називають ***лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку***. Вважаємо, що коефіцієнти f_1, f_2, $\ldots$, f_n визначені та неперервні разом з частинними похідними за змінними x_1, x_2, $\ldots$, x_n у деякому околі заданої точки $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ і у цій точці вони одночасно не перетворюються у нуль, наприклад, $f_n(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \neq 0$. Очевидно, що рівняння (16.3) має розв'язок $u = c$, де c – довільна стала.

Одночасно з рівнянням (16.3) розглядатимемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{16.4}$$

яка складається з $(n-1)$-го рівняння. Систему (16.4) називають ***системою характеристик*** (***характеристичною системою***). Систему характеристик можна записати також у вигляді:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1}{f_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{f_2}{f_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n}. \tag{16.5}$$

Доведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (16.3) і відповідною системою характеристик (16.4).

Теорема 1. *Кожний інтеграл системи* (16.4) *є розв'язком рівняння* (16.3).

Доведення. Нехай $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – інтеграл системи (16.4), визначений у деякому околі точки $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. Тоді згідно з означенням інтеграла (лекція 13, п. 1) повний диференціал функції ψ внаслідок системи (16.4) тотожно дорівнює нулю, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0,$$

де диференціали dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_{n-1} потрібно замінити виразами, які випливають з (16.5):

$$dx_1 = \frac{f_1}{f_n} dx_n, \;\; dx_2 = \frac{f_2}{f_n} dx_n, \;\; \ldots, \;\; dx_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{f_n} dx_n.$$

Таким чином,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{f_1}{f_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{f_2}{f_n} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \cdot dx_n \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$f_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \ldots + f_n \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0,$$

звідки випливає, що функція $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є розв'язком рівняння (16.3). Теорему доведено.

Теорема 2. *Кожний відмінний від сталої розв'язок рівняння* (16.3) *є інтегралом системи* (16.4).
Доведення. Нехай $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – розв'язок рівняння (16.3), причому $u \neq \text{const}$. Тоді

$$f_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \ldots + f_n \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0. \tag{16.6}$$

Знайдемо диференціал функції ψ внаслідок системи (16.4):

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{f_1}{f_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{f_2}{f_n} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n = \\ &= \frac{1}{f_n} \left(f_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \ldots + f_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n, \end{aligned}$$

звідки, враховуючи (16.6), маємо, що $d\psi \equiv 0$, тобто ψ є інтегралом системи (16.4). Теорему доведено.

Розглянемо, наприклад, рівняння з частинними похідними $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} - 3z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Йому відповідає система характеристик $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-3z}$, яка має інтеграли $\psi_1 = x^3 z$, $\psi_2 = x\big/\sqrt{y}$. Отже, функції $u_1 = x^3 z$, $u_2 = x\big/\sqrt{y}$ є розв'язками наведеного рівняння з частинними похідними.

2. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння. Наступна теорема визначає спосіб побудови загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (16.3).

Теорема 3. *Нехай*

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \dots,\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

є незалежними інтегралами системи (16.4). *Тоді функція*

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \tag{16.7}$$

де Φ *– довільна функція, яка має неперервні похідні за змінними* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, *є розв'язком рівняння* (16.3).

Доведення. Підставляючи (16.7) у рівняння (16.3) і беручи до уваги, що функції $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ є розв'язками рівняння (16.3), отримуємо:

$$f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + f_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$
$$= f_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + f_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + f_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(f_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + f_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0,$$

а це й означає, що функція (16.7) є розв'язком рівняння (16.3). Теорему доведено.

Формулу (16.7) називають ***загальним розв'язком*** рівняння (16.3). Звертаємо увагу, що загальний розв'язок рівняння з частинними похідними першого порядку містить довільну функцію, а не довільні сталі, як це було для звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Розв'язання. Складемо відповідну систему характеристик $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ і зінтегруємо її. Будемо мати: $y/x = C_1$, $z/x = = C_2$, а тому інтегралами є $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$. Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є

$$u = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція від часток y/x і z/x, тобто u є довільною неперервно диференційовною однорідною функцією нульового виміру незалежних змінних x, y, z. Наприклад, розв'язками заданого рівняння є функції

$$u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}, \quad u_3 = \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad u_4 = \sin\frac{z}{x}, \quad u_5 = e^{x/z}.$$

Відповідь: $u = \Phi\,(y/x,\ z/x)$.

З теореми 3 випливає, що задача про побудову загального розв'язку рівняння (16.3) рівносильна задачі про відшукання $n-1$ незалежних інтегралів відповідної йому системи характеристик (16.4).

У випадку двох незалежних змінних, позначивши шукану функцію через $z(x, y)$, маємо рівняння

$$f_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{16.8}$$

Відповідна система характеристик вироджується в одне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = \frac{dy}{f_2(x,y)}. \tag{16.9}$$

Якщо $\psi(x, y)$ – інтеграл рівняння (16.9), то $z = \Phi\,(\psi(x, y))$, де $\Phi(\psi)$ – довільна неперервно диференційовна функція від змінної ψ, буде загальним розв'язком рівняння (16.8).

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
Розв'язання. Відповідна система характеристик вироджується у рівняння з відокремлюваними змінними: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, інтегралом якого є $\psi = x^2 + y^2$. Згідно з теоремою 3 загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$z = \Phi(x^2 + y^2).$$

З геометричної точки зору маємо сім'ю поверхонь обертання з віссю обертання Oz. Таким чином, задане рівняння є диференціальним рівнянням усіх поверхонь обертання з віссю обертання Oz. Інтегральними поверхнями є поверхні обертання $z = \Phi(x^2 + y^2)$. Окремими випадками цих поверхонь є $z = x^2 + y^2$ (параболоїд обертання), $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (півсфера), $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (конус), $z = c$ (площина).
Відповідь: $z = \Phi(x^2 + y^2)$.

3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння. ***Задача Коші*** для рівняння (16.3) полягає у знаходженні розв'язку $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який для фіксованого значення однієї з незалежних змінних, наприклад x_n, перетворюється у задану неперервно диференційовну функцію решти змінних, тобто задовольняє ***початкову умову***:

$$u|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{16.10}$$

У випадку, коли шукана функція залежить від двох незалежних змінних, тобто для рівняння (16.8), задача Коші полягає у відшуканні такого розв'язку $z = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову

$$z|_{x=x_0} = \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – задана функція. Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних поверхонь, які визначаються рівнянням (16.8), шукається така поверхня $z = f(x, y)$, яка проходить через задану криву $z = \varphi(y)$, яка лежить у площині $x = x_0$ (ця площина паралельна до площини Oyz).

Згідно з теоремою 3 загальний розв'язок рівняння (16.3) задається формулою (16.7), тобто

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Підставляючи цю функцію в (16.10), бачимо, що розв'язок задачі Коші (16.3), (16.10) зводиться до визначення вигляду функції Φ, яка задовольняє умову

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Таким чином, одержуємо ***правило розв'язування задачі Коші*** (16.3), (16.10):

1) *скласти відповідну систему характеристик і знайти її* $n-1$ *незалежних інтегралів:*

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \;\; \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \;\; \ldots, \;\; \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

2) *замінити у знайдених інтегралах незалежну змінну* x_n *її початковим значенням* $x_n = x_{n0}$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_2, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \tag{16.11}$$

і розв'язати систему (16.11) *відносно* x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, *тобто знайти*

$$x_1 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}), \quad x_2 = \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}), \ \ldots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1});$$

3) *побудувати функцію*

$$u = \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \\ \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})\big),$$

яка і буде розв'язком задачі Коші.

Приклад 5. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{x=3} = y + z.$$

Розв'язання. Інтегралами відповідної системи характеристик є $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$ (див. приклад 3). Оскільки

$$\psi_1|_{x=3} = \bar{\psi}_1 = \frac{y}{3}, \quad \psi_2|_{x=3} = \bar{\psi}_2 = \frac{z}{3},$$

то $y = 3\bar{\psi}_1$, $z = 3\bar{\psi}_2$, а тому шуканим розв'язком є

$$u = 3\psi_1 + 3\psi_2 \quad \Rightarrow \quad u = 3\frac{y+z}{x}. \ \blacksquare$$

Приклад 6. *Знайти інтегральну поверхню рівняння*

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

яка при $x = 0$ проходить через криву $z = y^2$.
Розв'язання. Оскільки $\psi(x, y) = x^2 + y^2$ (див. приклад 4), то $\bar{\psi} = \psi|_{x=0} = y^2$. Звідси $y = \pm\sqrt{\bar{\psi}}$, а тому шуканою інтегральною поверхнею є

$$z = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad z = x^2 + y^2.$$

З геометричної точки зору маємо параболоїд обертання. ■

Рекомендована література: [1, с. 325 – 328], [9, с. 275 – 280], [10, с. 198 – 202], [16, с. 458 – 463], [19, с. 247 – 281].

Питання до лекції 16

1. Що називають диференціальним рівнянням з частинними похідними? Як визначити порядок такого рівняння?

2. Що називають розв'язком рівняння з частинними похідними? Який геометричний зміст має розв'язок рівняння з двома незалежними змінними?

3. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку? У якому випадку його називають однорідним?

4. Який вигляд має система характеристик для лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку? Який зв'язок між лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку і відповідною системою характеристик?

5. Як формулюється задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку? Який геометричний зміст вона має у випадку двох незалежних змінних?

6. Як побудувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку? Як розв'язується задача Коші для цього рівняння?

Вправи до лекції 16

1. Перевірте, чи є вказані функції розв'язками заданих рівнянь з частинними похідними:

$$\text{а) } 2\sqrt{x}\tfrac{\partial z}{\partial x} - y\tfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = \sqrt{x} + \ln y;$$

$$\text{б) } (x^2 + y^2)\tfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\tfrac{\partial u}{\partial y} + xz\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = \tfrac{x^2 - y^2}{z^2} + 3;$$

$$\text{в) } \left(x + \tfrac{z^4}{y}\right)\tfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\tfrac{\partial u}{\partial y} + z\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = \tfrac{z^2 + z^3}{y} + 2xz.$$

2. Зінтегруйте однорідні рівняння з частинними похідними:

$$\text{а) } (x+2y)\tfrac{\partial z}{\partial x} - y\tfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \text{б) } x\tfrac{\partial u}{\partial x} + yz\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$$
$$\text{в) } (x^2y - x^2y^2)\tfrac{\partial u}{\partial x} + y\tfrac{\partial u}{\partial y} + \tfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Розв'яжіть задачі Коші:

$$\text{а) } x\tfrac{\partial z}{\partial x} - y\tfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\ z|_{y=1} = 2x; \quad \text{б) } \tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial u}{\partial y} + 2\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0,\ u|_{x=1} = yz.$$

Лекція 17. Квазілінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

План

1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку.

2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку.

3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку.

4. Рівняння Пфаффа.

1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку. Рівняння вигляду

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots$$
$$\dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \qquad (17.1)$$

називають ***лінійним неоднорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку***. Це рівняння називають ще ***квазілінійним***. До цього ж типу будемо відносити також рівняння, у яких $F \equiv 0$, але хоча б один з коефіцієнтів f_j залежить від u. Вважаємо, що f_1, f_2, $\dots$, f_n, F – неперервно диференційовні функції в деякому околі заданої точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)$, і нехай, наприклад, $f_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) \neq 0$.

Розв'язок рівняння (17.1) шукаємо у неявному вигляді:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0, \tag{17.2}$$

де функція V має неперервні частинні похідні за усіма аргументами принаймні в деякій області зміни $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, причому $V'_u|_{(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0)} \neq 0$ (це гарантує те, що в цій області рівняння (17.2) визначає u як неявну функцію від $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Здиференціювавши (17.2) за змінною x_k (вона входить у (17.2) явно і неявно через функцію u), одержуємо:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\,\frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17.3}$$

Підставляючи вирази для частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ з (17.3) у (17.1), після простих перетворень одержуємо лінійне однорідне рівняння з частинними похідними

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{17.4}$$

відносно невідомої функції V.

Щоб зінтегрувати рівняння (17.4), утворимо відповідну ***систему характеристик*** (п. 1 лекції 16):

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{F} \tag{17.5}$$

і припустимо, що нам вдалося відшукати n незалежних інтегралів цієї системи:

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u).$$

Згідно з теоремою 3 попередньої лекції загальний розв'язок рівняння (17.4) можна записати у вигляді

$$V = \Phi\big(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ \ldots,$$
$$\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\big), \tag{17.6}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція своїх аргументів.

Враховуючи (17.2), одержуємо шуканий розв'язок рівняння (17.1) у неявному вигляді

$$\Phi\big(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\, \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\, \ldots,\\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\big) = 0. \qquad (17.7)$$

Співвідношення (17.7), де Φ – довільна неперервно диференційовна функція, називають ***загальним розв'язком*** рівняння (17.1). Якщо (17.7) вдасться розв'язати відносно u, то одержимо загальний розв'язок у явному вигляді: $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де u – неперервно диференційовна функція.

Систему (17.5) називають ***системою характеристик*** квазілінійного рівняння (17.1).

Таким чином, *для знаходження загального розв'язку рівняння* (17.1) *потрібно утворити відповідну систему характеристик, знайти n незалежних інтегралів цієї системи і прирівняти до нуля довільну диференційовну функцію цих інтегралів. Отримана при цьому рівність вигляду* (17.7) *буде загальним розв'язком рівняння* (17.1) *у неявному вигляді. Розв'язуючи його відносно u* (*якщо це можливо*), *можна знайти загальний розв'язок у явному вигляді.*

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u.$
Розв'язання. Складемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}$$

і знайдемо її інтеграли: $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$, $\psi_3 = u/x$. Отже, загальним розв'язком є

$$\Phi\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\Big) = 0. \qquad (17.8)$$

Якщо (17.8) можна розв'язати відносно u/x, то

$$\frac{u}{x} = f\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Big) \quad \Rightarrow \quad u = x \cdot f\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Big),$$

де f – довільна функція, а отже, розв'язком заданого рівняння є довільна однорідна неперервно диференційовна функція виміру 1. Такими функціями, наприклад, є

$$u_1 = x, \quad u_2 = x \cdot \frac{y}{x} = y, \quad u_3 = x\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) = y + z,$$
$$u_4 = x\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{z^2}{x^2}\right) = \frac{y^2}{x} - 2\frac{z^2}{x}. \ \blacksquare$$

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$.
Розв'язання. Запишемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x}.$$

З рівняння $\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2}$ (це рівняння з відокремленими змінними) знаходимо перший інтеграл $y^{-1} - e^{-x} = C_1$, а з рівняння $\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x}$, враховуючи, що $e^x = \frac{y}{1-yC_1}$, маємо ще один перший інтеграл $z - \frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}} = C_2$. Таким чином, загальним інтегралом заданого рівняння є $\Phi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}, \frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}}\right) = 0$, а загальним розв'язком –

$$z = \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} + \varphi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right). \ \blacksquare$$

2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку. ***Задача Коші*** для квазілінійного рівняння (17.1), так само, як і для лінійного однорідного рівняння, полягає у знаходженні такого розв'язку $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цього рівняння, який задовольняє ***початкову умову***:

$$u\big|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{17.9}$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція.

Покажемо, як знайти розв'язок задачі Коші для рівняння (17.1), знаючи його загальний розв'язок (17.7). Як і для однорідного рівняння, все зводиться до визначення вигляду функції Φ. Якщо записати початкову умову (17.9) у вигляді

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

і порівняти її з (17.7), то бачимо, що функцію Φ потрібно вибрати так, щоб

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) - \\ - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{17.10}$$

де через $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n$ позначено функції, які отримуються з інтегралів системи (17.5) заміною x_n початковим значенням x_{n0}, тобто

$$\bar{\psi}_j = \psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{17.11}$$

Розв'язуючи систему (17.11) відносно x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, u, одержуємо:

$$x_j = \omega_j(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n), \ j = 1, 2, \ldots, n-1; \\ u = \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n).$$

Якщо тепер в якості функції Φ взяти функцію

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) - \\ - \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ \ldots, \ \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\big),$$

то умова (17.10), очевидно, справджується. Отже, формула

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) - \\ - \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ \ldots, \ \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\big) = 0 \tag{17.12}$$

визначає розв'язок задачі Коші (17.1), (17.9) у неявному вигляді. Розв'язуючи (17.12) відносно u (якщо це можливо), одержимо розв'язок задачі Коші у явному вигляді, тобто у вигляді $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Таким чином, приходимо до такого ***правила розв'язування задачі Коші*** для квазілінійного рівняння (17.1):

1) *утворити відповідну систему характеристик і знайти n її незалежних інтегралів*:

$$\psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, u), \quad j = 1, \ldots, n; \tag{17.13}$$

2) *замінити в інтегралах* (17.13) *незалежну змінну* x_n *її заданим значенням* $x_n = x_{n0}$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_2, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \tag{17.14}$$

і розв'язати систему (17.14) *відносно* x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, u:

$$x_j = \omega_j(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n), \ j = 1, \ldots, n;$$
$$u = \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n);$$

3) *утворити співвідношення*

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) -$$
$$- \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ \ldots, \ \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\big) = 0, \tag{17.15}$$

яке й визначатиме шуканий розв'язок задачі Коші (17.1), (17.9) *у неявному вигляді. Розв'язуючи* (17.15) *відносно u* (*якщо це можливо*), *одержимо розв'язок задачі Коші у явному вигляді.*

Приклад 3. *Знайти інтегральну поверхню рівняння*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

яка проходить через лінію $y = 1$, $z = x^2$.

Розв'язання. Запишемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Першими інтегралами цієї системи, як легко перевірити, є

$$yx^2 = C_1 \quad \text{і} \quad x^2/2 - y^2/4 - z = C_2.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння можна записати у вигляді $\Phi\big(yx^2, \ x^2/2 - y^2/4 - z\big) = 0$, а загальним розв'язком є

$$z = x^2/2 - y^2/4 + \varphi(yx^2). \tag{17.16}$$

Функція φ згідно з початковою умовою задовольняє рівняння

$$x^2 = x^2/2 - 1/4 + \varphi(x^2) \quad \text{при} \quad \varphi(t) = t/2 + 1/4.$$

Отже, $\varphi(yx^2) = yx^2/2 + 1/4$, а з (17.16) знаходимо шуканий розв'язок:

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{yx^2}{2} + \frac{1}{4}. \ \blacksquare$$

3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку. Розглянемо нелінійне рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними (значна частина результатів може бути поширена на випадок більшої кількості змінних). У загальному випадку таке рівняння можна записати у вигляді

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{17.17}$$

де $z = z(x, y)$ – шукана функція, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, F – задана неперервно диференційовна функція своїх аргументів у деякому околі початкової точки $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, яка залежить від p і q нелінійно.

Виявляється, що задача інтегрування одного рівняння вигляду (17.17) є складнішою, ніж інтегрування системи двох сумісних рівнянь вигляду (17.17).

Розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ G(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

і припустимо, що у деякій області зміни x, y, z, p, q цю систему можна розв'язати відносно p і q, тобто

$$p = A(x, y, z), \quad q = B(x, y, z), \tag{17.18}$$

де функції A і B – неперервно диференційовні в деякому околі початкової точки (x_0, y_0, z_0).

Знайдемо необхідну умову сумісності системи (17.18). Припустимо, що розв'язок $z = z(x, y)$ системи (17.18) має неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ у деякому околі точки (x_0, y_0).

Диференціюючи рівняння системи (17.18) за змінними y і x відповідно, одержуємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot B,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot A.$$

Прирівнюючи обидва вирази для другої мішаної похідної (результат не залежить від порядку диференціювання), одержуємо шукану ***необхідну умову сумісності системи*** (17.18):

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\,\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\,\frac{\partial B}{\partial z} = 0. \tag{17.19}$$

Рівність (17.19) перетвориться у тотожність, якщо замість z підставити розв'язок $z(x, y)$ системи (17.18). Якщо умова (17.19) не виконується тотожно, то (17.19) – рівняння з трьома змінними x, y, z, яке визначає z як функцію від x і y, $z = z(x, y)$, і попередні міркування показують, що розв'язок системи (17.18), якщо він існує, не може бути іншим, ніж цією функцією. Чи є функція $z = z(x, y)$ розв'язком системи (17.18), легко перевірити за допомогою підстановки.

З'ясуємо, за яких умов система (17.18) має безліч розв'язків, тобто через кожну точку (x_0, y_0, z_0) деякої області простору проходить інтегральна поверхня, яка відповідає певному розв'язку. У цьому випадку умова (17.19) повинна виконуватись у кожній точці згаданої області, тобто тотожно для (x, y, z).

Отже, тотожне виконання умови (17.19) необхідне для того, щоб система (17.18) мала безліч розв'язків, які залежать принаймні від однієї довільної сталої. Можна показати, що тотожне виконання умови (17.19) є також достатнім для сумісності системи (17.18), тобто за виконання цієї умови знаходження спільних розв'язків системи (17.18) зводиться до інтегрування двох звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 4. *Зінтегрувати систему рівнянь*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + yz, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz.$$

Розв'язання. Складемо вираз для лівої частини рівності (17.19):

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\,\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\,\frac{\partial B}{\partial z} =$$
$$= z + (z^2 + 2xz)(1 + y) - 2z - (z + yz)(2z + 2x) = -z(1 + z + yz).$$

Знайдений вираз не дорівнює тотожно нулю. Прирівнюючи його до нуля, одержуємо, що $z = 0$ і $z = -\frac{1}{1+y}$. За допомогою підстановки переконуємось, що тільки функція $z = 0$ є розв'язком заданої системи.
***Відповідь*:** $z = 0$.

Приклад 5. *Зінтегрувати систему рівнянь*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} + \frac{2z}{y} - y^2.$$

Розв'язання. Умова сумісності (17.19) виконується тотожно:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\,\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\,\frac{\partial B}{\partial z} = 2y - \frac{2}{y}\cdot y^2 \equiv 0.$$

Інтегруючи перше рівняння системи за змінною x, знаходимо

$$z = \int y^2 dx = xy^2 + u(y), \tag{17.20}$$

де $u(y)$ – довільна диференційовна функція змінної y.

Підставляючи в друге рівняння системи, одержуємо:

$$2xy + u'(y) = \frac{1}{y^2} + 2xy + \frac{2u}{y} - y^2 \quad \Rightarrow \quad u'(y) - \frac{2u}{y} = \frac{1}{y^2} - y^2.$$

А це є лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції u. Його загальним розв'язком є $u = -\frac{1}{3y} - y^3 + Cy^2$, де C – довільна стала. Підставляючи цей вираз для u у (17.20), одержуємо загальний розв'язок системи:

$$z = xy^2 - y^3 - \frac{1}{3y} + Cy^2. \ \blacksquare$$

4. Рівняння Пфаффа. ***Рівнянням Пфаффа*** називають рівняння вигляду

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \tag{17.21}$$

У рівняння (17.21) змінні x, y, z входять симетрично, а отже, будь-яку з них можна прийняти за шукану функцію. Припустимо, що коефіцієнти P, Q, R визначені та неперервні разом з частинними похідними першого порядку в околі початкової точки (x_0, y_0, z_0) і не перетворюються у цій точці одночасно в нуль. Нехай, наприклад, $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді рівняння (17.21) можна записати у вигляді

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy.$$

Знайдемо умову, за якої рівняння Пфаффа має сім'ю розв'язків (інтегральних поверхонь), залежну від однієї довільної сталої. Оскільки на кожній інтегральній поверхні $z = z(x,y)$ справджується співвідношення $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy.$$

Звідси, враховуючи незалежність диференціалів dx і dy, одержуємо, що шукані інтегральні поверхні повинні задовольняти систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}. \tag{17.22}$$

Таким чином, рівняння Пфаффа (17.21) рівносильне системі (17.22) і, отже, необхідно з'ясувати умови повної інтегровності цієї системи.

Записуючи умову (17.19) для системи (17.22), маємо:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial y} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{Q}{R}\right) =$$
$$= -\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{P}{R}\right).$$

Домножуючи обидві частини на R^2 і згрупувавши доданки відносно P, Q і R, одержуємо:

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0. \quad (17.23)$$

Для зручності запам'ятовування умову (17.23) можна записати у вигляді умовної рівності

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0,$$

якщо визначник умовно розкласти за елементами першого рядка.

Якщо умова (17.23) виконується тотожно, то її називають ***умовою повної інтегровності рівняння Пфаффа***. За виконання цієї умови інтегрування рівняння Пфаффа зводиться до інтегрування системи (17.22). При цьому існує сім'я розв'язків, яка містить одну довільну сталу.

Приклад 6. *Зінтегрувати рівняння Пфаффа*

$$(2x^2+2xz+2xy^2-1)\,dx-2y\,dy-dz=0.$$

Розв'язання. Оскільки умова (17.23) повної інтегровності виконується тотожно:

$$(2x^2+2xz+2xy^2-1)\cdot(0-0)+(-2y)\cdot(2x-0)+(-1)\cdot(0-4xy)\equiv 0,$$

то задане рівняння має сім'ю інтегральних поверхонь, залежну від довільної сталої. Вважаючи шуканою функцією $z=z(x,y)$, замінимо задане рівняння рівносильною системою

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x^2+2xz+2xy^2-1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y \qquad (17.24)$$

і перевіримо для неї виконання умови сумісності (17.19):

$$4xy+2x(-2y)-0-0\cdot(2x^2+2xz+2xy^2-1)\equiv 0.$$

Отже, систему (17.24) можна зінтегрувати. Перше з рівнянь у (17.24) лінійне відносно z (якщо зафіксувати y). Інтегруючи його (за формулою (4.5) з лекції 4), знаходимо

$$z = e^{x^2}\left(\int (2x^2 + 2xy^2 - 1)e^{-x^2}dx + C(y)\right),$$

де $C(y)$ – довільна диференційовна функція змінної y. Оскільки

$$\int(2x^2 + 2xy^2 - 1)e^{-x^2}dx = -y^2e^{-x^2} + \int 2x^2e^{-x^2}dx - \int e^{-x^2}dx =$$
$$= -y^2e^{-x^2} - xe^{-x^2} + \int e^{-x^2}dx - \int e^{-x^2}dx = -(y^2 + x)e^{-x^2},$$

то

$$z = e^{x^2}\Big(C(y) - (y^2 + x)e^{-x^2}\Big) \quad \Rightarrow \quad z = C(y)e^{x^2} - y^2 - x.$$

Виберемо тепер $C(y)$ так, щоб функція z задовольняла друге рівняння з (17.24). Диференціюючи $z = C(y)e^{x^2} - y^2 - x$ за змінною y, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C'(y)e^{x^2} - 2y \quad \Rightarrow \quad C'(y)e^{x^2} - 2y = -2y \quad \Rightarrow$$
$$C(y) = C \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{x^2} - y^2 - x. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [9, с. 280 – 305], [10, с. 202 – 213], [16, с. 463 – 470], [19, с. 282 – 300], [20, с. 243 – 278].

Питання до лекції 17

1. Яке рівняння з частинними похідними першого порядку називають квазілінійним?

2. Який вигляд має система характеристик для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?

3. Як побудувати загальний розв'язок квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?

4. Як формулюється задача Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку? Як знайти розв'язок задачі

Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?

5. Який загальний вигляд має система нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними? Як інтегруються така система?

6. Що називають рівнянням Пфаффа? Якій системі рівносильне це рівняння? Якою є умова повної інтегровності рівняння Пфаффа?

Вправи до лекції 17

1. Зінтегруйте квазілінійні рівняння:

$$\text{а) } xy\tfrac{\partial z}{\partial x} - y^2\tfrac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \text{б) } xz^3\tfrac{\partial z}{\partial x} + yz^3\tfrac{\partial z}{\partial y} = x^2y^2.$$

2. Знайдіть інтегральні поверхні рівнянь, які проходять через задані лінії:

$$\text{а) } y^2\tfrac{\partial z}{\partial x} + xy\tfrac{\partial z}{\partial y} = x,\ x = 0,\ z = y^2;$$
$$\text{б) } x\tfrac{\partial z}{\partial x} + y\tfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy,\ x = 2,\ z = y^2 + 1.$$

3. Знайдіть поверхні, які задовольняють рівняння Пфаффа:

$$\text{а) } (x - y)dx + z\,dy - x\,dz = 0; \quad \text{б) } 3yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

Розділ 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

Лекція 18. Основи теорії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь

План

1. Основні означення й поняття.
2. Дослідження на стійкість точок спокою.
3. Стійкість за першим наближенням.
4. Критерії Рауса – Гурвіца, Л'єнара – Шипара.

1. Основні означення й поняття. Створюючи прилади, конструкції, машини, які відповідають певним умовам, необхідно знати, як буде вести себе об'єкт при невеликих перерозподілах сил або при зміні початкових умов. Той об'єкт, експлуатаційні параметри якого не реагують на ці зміни, називають стійким. Наприклад, при різних відхиленнях маятника від положення рівноваги, тобто різних початкових умовах, рух маятника повинен бути стійким.

Взагалі, розв'язуючи конкретну фізичну чи технічну задачу, зазвичай цікавляться не загальним, а частинним розв'язком диференціального рівняння, тобто розв'язком, який задовольняє певні початкові умови. Останні, як правило, беруться з досліду чи експерименту, а тому за їх абсолютну точність ручатися не можна. Маючи це на увазі, деколи припускають, що незначні зміни початкових умов викликають незначну зміну самого розв'язку, інакше кажучи, що розв'язок неперервно залежить від початкових умов. Але якщо незначні зміни початкових умов зумовлюють істотні відхилення розв'язків, то такі розв'язки навіть наближено не описують явище чи процес, які розглядаються. Такі розв'язки називають нестійкими. Отже, одним з основних є питання про так звану стійкість розв'язків диференціальних рівнянь щодо різного роду збурень їх вхідних даних, тобто неточностей задання цих даних (початкових даних, правих частин рівнянь тощо).

Питання стійкості розв'язків диференціальних рівнянь – предмет ***теорії стійкості розв'язків*** (теорії стійкості руху). Теорія стійкості застосовується у багатьох областях науки і природознавства, наприклад, у екології, біології, економіці та інших науках. У механіці її, зокрема, використовують для аналізу стійкості польоту снарядів, стабілізації руху супутників, вивчення стійкості механічних систем, руху твердих тіл з пружними елементами і порожнинами, які містять рідину, тощо.

З фізичної точки зору задача про стійкість може бути сформульована так: розглядається деякий рух, що відповідає заданим початковим умовам. Якщо після зміни початкових умов на малу величину характер руху залишиться попереднім або зміниться мало, то такий рух називають стійким.

Перейдемо до викладення основних понять теорії стійкості більш строго. Позначимо через $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, $\ldots$, $y_n = y_n(t)$ дійсні функції, які характеризують стан механічного, електромеханічного чи іншого явища або процесу. Так можуть, наприклад, позначатися координати, швидкості, сили струмів, величини напруг, температури або функції цих величин. Припустимо, що процес зміни величин y_1, y_2, $\ldots$, y_n з часом t описується нормальною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18.1}$$

з початковими умовами

$$y_1(t_0) = y_{10}, \quad y_2(t_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_{n0}. \tag{18.2}$$

Якщо розглядати $y_1, y_2, \ldots, y_n$ як координати рухомої точки, то кожний розв'язок задачі (18.1), (18.2) називатимемо ***рухом***.

Якщо систему (18.1) розглядати на скінченному проміжку $|t - t_0| < T$, то відповідь на питання про вплив малих змін початкових умов (18.2) на відхилення розв'язків системи дає теорема 5 з лекції 6. Але у практичних задачах аргумент (ним, як правило, є час) може необмежено зростати. Тоді згадана теорема не гарантує неперервної залежності розв'язків від початкових умов, тобто незначна зміна початкових умов може викликати істотні зміни у поведінці розв'язку при необмеженому зростанні значення аргумента. Отже, надалі вважатимемо, що $t \in [T, +\infty)$, тобто час може необмежено зростати.

Розв'язок

$$y_j = \varphi_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [T, +\infty),$$

системи (18.1) називають ***стійким*** (***стійким за Ляпуновим***), якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geqslant T$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що довільний інший розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, цієї ж системи, початкові значення $y_j(t_0)$ якого задовольняють нерівності

$$|y_j(t_0) - \varphi_j(t_0)| < \delta, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18.3}$$

визначений для всіх $t \geqslant t_0$ і справджуються нерівності

$$|y_j(t) - \varphi_j(t)| < \varepsilon, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \ t \geqslant t_0. \tag{18.4}$$

Іншими словами, розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (18.1) є стійким, якщо кожний розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (18.1) з початковими умовами з δ-околу точки $\varphi_j(t_0)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при $t_0 \leqslant t < +\infty$ існує і не виходить з ε-околу графіка розв'язку $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, називають ***асимптотично стійким***, якщо:

1) він стійкий;

2) усі розв'язки $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (18.1) з достатньо близькими початковими умовами при $t \to +\infty$ необмежено наближаються до $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тобто з нерівності (18.3) випливає, що

$$\lim_{t \to +\infty} |y_j(t) - \varphi_j(t)| = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.5}$$

Зауважимо, що умови 1) і 2) цього означення незалежні. З умови 1) означення не випливає умова 2), бо з нерівності (18.4) не випливає (18.5). З умови 2) означення також не завжди випливає умова 1).

Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (18.1) називають ***нестійким***, якщо він не є стійким. Це означає, що існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого як завгодно малого $\delta > 0$ знайдеться розв'язок системи (18.1) $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для якого при виконанні нерівностей (18.3) принаймні для одного значення j матимемо, що

$$|y_j(t) - \varphi_j(t)| \geqslant \varepsilon$$

для деякого $t \geqslant t_0$.

Як правило, для доведення нестійкості розв'язку користуються необмеженістю різниці $|y_j(t) - \varphi_j(t)|$ на інтервалі $[t_0, +\infty)$ або тим, що ця різниця прямує до $+\infty$, якщо $t \to +\infty$.

Розв'язок (рух), який відповідає початковим даним t_0, y_{10}, y_{20}, $\ldots$, y_{n0}, називають ***незбуреним***, а розв'язок зі зміненими початковими даними t_0, $\tilde{y}_{10}$, $\tilde{y}_{20}$, $\ldots$, $\tilde{y}_{n0}$ – ***збуреним*** розв'язком (рухом).

Приклад 1. *Дослідити на стійкість розв'язки задачі*

$$y' = ky, \quad y(t_0) = y_0.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння є $y(t) = Ce^{kt}$, а розв'язком заданої задачі Коші –

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{18.6}$$

Задамо іншу початкову умову $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$. Тоді розв'язком цієї задачі (збуреним розв'язком) є

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{18.7}$$

Оцінимо різницю розв'язків (18.6) і (18.7):

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = \left| y_0 e^{k(t-t_0)} - \tilde{y}_0 e^{k(t-t_0)} \right| = e^{k(t-t_0)}\, |y_0 - \tilde{y}_0|. \tag{18.8}$$

Якщо $k < 0$, то $e^{k(t-t_0)} < 1$ для всіх $t \geqslant t_0$. Отже, якщо $|y_0 - \tilde{y}_0| < \delta = \varepsilon$, то з (18.8) маємо, що

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| < |y_0 - \tilde{y}_0| < \varepsilon,$$

тобто розв'язок стійкий. У цьому випадку розв'язок також асимптотично стійкий, оскільки

$$\lim_{t\to+\infty}|y(t)-\tilde{y}(t)| = \lim_{t\to+\infty}|y_0-\tilde{y}_0|e^{k(t-t_0)} =$$
$$= |y_0-\tilde{y}_0|\lim_{t\to+\infty}e^{k(t-t_0)} = 0.$$

Якщо $k>0$, то розв'язок (18.6) нестійкий, бо яким би не було t_0, для $t \geqslant t_0$, $y_0 \neq \tilde{y}_0$, різниця розв'язків (18.6) і (18.7) при зростанні t стає нескінченно великою, оскільки $\lim\limits_{t\to+\infty}|y_0-\tilde{y}_0|e^{k(t-t_0)} = +\infty$.

Нарешті, якщо $k=0$, то розв'язок $y=y_0$ стійкий, але не асимптотично стійкий, бо вираз $|y_0-\tilde{y}_0|$ не прямує до нуля, коли $t\to+\infty$.

***Відповідь*:** Розв'язок стійкий, якщо $k \leqslant 0$, у тому числі асимптотично стійкий, якщо $k<0$, і нестійкий, якщо $k>0$.

2. Дослідження на стійкість точок спокою. Дослідження на стійкість заданого розв'язку $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ системи (18.1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального (нульового) розв'язку деякої іншої системи. Для цього у системі (18.1) перейдемо до нових невідомих функцій

$$x_j(t) = y_j(t) - \varphi_j(t), \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{18.9}$$

Отже, невідомі функції $x_j(t)$, $j=1,2,\ldots,n$, – це відхилення старих невідомих функцій від функцій, які входять у розв'язок, що досліджується на стійкість. Величини $x_j(t)$, $j=1,2,\ldots,n$, називають ***збуреннями***. Підставляючи (18.9) в (18.1), одержуємо

$$y_j'(t) = x_j'(t) + \varphi_j'(t) = f_j(t, x_1(t)+\varphi_1(t), \ldots, x_n(t)+\varphi_n(t)) \quad \Rightarrow$$
$$x_j' = f_j(t, x_1+\varphi_1, \ldots, x_n+\varphi_n) - f_j(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{18.10}$$

де $j=1,2,\ldots,n$.

Рівняння (18.10) називають диференціальними рівняннями збуреного руху. Кожному рухові системи (18.1) відповідає частинний розв'язок системи (18.10). Зокрема, незбуреному рухові системи (18.1), очевидно, відповідає тривіальний розв'язок

$$x_j(t) \equiv 0, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{18.11}$$

системи (18.10). Розв'язок (18.11) характерний тим, що точка $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ не рухається зі зміною часу t, а знаходиться на місці. Тривіальний розв'язок системи (18.10) і точку $(0, 0, \ldots, 0)$ у цьому випадку називають ***положенням рівноваги*** системи (18.10) або ***точкою спокою***.

Отже, задача дослідження стійкості (асимптотичної стійкості, нестійкості) точки спокою системи (18.10) рівносильна задачі дослідження стійкості (асимптотичної стійкості, нестійкості) розв'язку системи (18.1).

З урахуванням цих міркувань означення стійкості та асимптотичної стійкості можемо сформулювати інакше.

Нехай у системі (18.1) $f_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тривіальний розв'язок $\varphi_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (18.1) ***стійкий*** (***стійкий за Ляпуновим***), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що кожний розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тієї ж системи, початкові значення $y_j(t_0)$ якого задовольняють нерівності

$$|y_j(t_0)| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

визначений для всіх $t \geqslant t_0$ і виконуються нерівності

$$|y_j(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

для $t \geqslant t_0$. Якщо, крім того, $\lim\limits_{t \to +\infty} |y_j(t)| = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то тривіальний розв'язок $\varphi_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, називають ***асимптотично стійким***.

Отже, стійкість тривіального розв'язку означає, що траєкторія довільного руху, початкова точка якої знаходиться у деякому δ-околі початку координат фазового простору $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ системи (18.1), для $t \geqslant t_0$ не виходить за межі довільного ε-околу точки спокою.

Легко показати, що це означення стійкості можна замінити таким: для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з нерівності $y_1^2(t_0) + y_2^2(t_0) + \ldots + y_n^2(t_0) < \delta^2$ випливатиме нерівність

$$y_1^2(t) + y_2^2(t) + \ldots + y_n^2(t) < \varepsilon^2$$

для всіх $t \geqslant t_0$.

Приклад 2. *Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи* $\frac{dx}{dt} = -\,y$, $\frac{dy}{dt} = x$, *який при* $t = t_0 = 0$ *набуває значення* $x = \tilde{x}_0$, $y = \tilde{y}_0$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему і враховуючи початкові умови, знаходимо

$$x = \tilde{x}_0 \cos t - \tilde{y}_0 \sin t, \quad y = \tilde{x}_0 \sin t + \tilde{y}_0 \cos t,$$

звідки $x^2 + y^2 = \tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2$. Для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ досить взяти $\delta \leqslant \varepsilon$, адже як тільки $\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2 < \delta^2$, то $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ для всіх $t > 0$. Отже, розв'язок $x = y = 0$ є стійким. ■

Приклад 3. *Дослідити на стійкість точку спокою системи* $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = 2x + y$, $x(0) = \tilde{x}_0$, $y(0) = \tilde{y}_0$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему, знаходимо $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$, $y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$. Враховуючи початкові умови, одержуємо, що $C_1 = (\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)/3$, $C_2 = (2\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0)/3$. Остаточно маємо

$$x = \frac{\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0}{3} e^{2t} + \frac{2\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0}{3} e^{-t}, \quad y = \frac{2}{3}\left(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0\right) e^{2t} - \frac{2\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0}{3} e^{-t}.$$

Покладемо $\tilde{y}_0 = 2\tilde{x}_0$. Тоді, яким би малим не було число $\tilde{x}_0$, функції $|x|$ та $|y|$ необмежено зростатимуть при $t \to +\infty$, а тому розв'язок $x = y = 0$ є нестійким. ■

3. Стійкість за першим наближенням. У наведених прикладах диференціальні рівняння або системи можна було зінтегрувати через елементарні функції. У таких випадках відповісти на питання про стійкість розв'язків не викликає особливих труднощів. Але з практичної точки зору важливо вміти досліджувати на стійкість розв'язки системи (18.10), не маючи її загального розв'язку. На встановленні таких критеріїв і спинимось.

Припустимо, що праві частини системи (18.1) $f_j(t, y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, неперервні разом з частинними похідними до другого порядку включно. Нехай $y_j(x) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – точка спокою системи (18.1), тобто $f_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Використовуючи формулу Тейлора в околі початку координат, систему (18.1) можемо записати у вигляді:

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t,0,\ldots,0) + \left.\frac{\partial f_j}{\partial y_1}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot y_1 + \left.\frac{\partial f_j}{\partial y_2}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot y_2 + \ldots$$
$$\ldots + \left.\frac{\partial f_j}{\partial y_n}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot y_n + R_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де функції $R_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ містять доданки не нижче другого порядку відносно $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Якщо позначити тепер $\left.\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right|_{(t,0,\ldots,0)} = a_{ji}(t)$ і врахувати, що $f_j(t,0,\ldots,0) = 0$, то остаточно маємо систему

$$y_j' = a_{j1}(t)y_1 + a_{j2}(t)y_2 + \ldots + a_{jn}(t)y_n + \\ + R_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.12}$$

Систему рівнянь

$$y_j' = a_{j1}(t)y_1 + a_{j2}(t)y_2 + \ldots + a_{jn}(t)y_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18.13}$$

називають ***системою першого наближення***, а задачу на стійкість точки спокою цієї системи – задачею на стійкість розв'язку в першому наближені.

Зауважимо, що дослідження на стійкість точки спокою для лінійної системи (18.13) є складною і досі не розв'язаною проблемою, бо не існує загального способу інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь з довільними змінними коефіцієнтами.

Розглянемо окремий випадок системи (18.13), коли її коефіцієнти є сталими: $a_{jk}(t) = a_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, тобто

$$y_j' = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18.14}$$

і дослідимо питання про стійкість тривіального розв'язку системи (18.14). Нагадаємо (лекція 14), що розв'язки цієї системи мають вигляд

$$y_1 = A_1 e^{k_1 t}, \ \ y_2 = A_2 e^{k_2 t}, \ \ \ldots, \ \ y_n = A_n e^{k_n t},$$

де k_1, k_2, …, k_n – характеристичні числа системи (18.14), а для існування нетривіальних розв'язків необхідно й досить, щоб

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{18.15}$$

Розглянемо окремі випадки, пов'язані з виглядом коренів рівняння (18.15) (характеристичних чисел системи (18.14)).

1. *Якщо всі характеристичні числа системи* (18.14) *мають від'ємні дійсні частини* (*тобто або вони дійсні від'ємні числа, або комплексні числа, дійсні частини яких від'ємні*), *то тривіальний розв'язок системи* (18.14) *асимптотично стійкий.* Припустимо, що усі характеристичні числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ дійсні і прості. Оскільки $k_j < 0$, то всі функції $y_{ij} = A_{ij}e^{k_jt}$ прямують до нуля при $t \to +\infty$. Якщо $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $i = \sqrt{-1}$, $\alpha_j < 0$, то, подавши e^{k_jt} у тригонометричній формі $e^{k_jt} = e^{\alpha_jt}(\cos\beta_jt + i\sin\beta_jt)$, переконуємось, що при $t \to +\infty$ функції $y_{ij} = A_{ij}e^{k_jt} \to 0$ (якщо $\alpha_j < 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\alpha_jt} = 0$). Ці висновки не зміняться, якщо деякі з характеристичних чисел (або всі) є кратними. Справді, якщо число k_j має кратність s, то йому відповідають розв'язки $P_{s-1}(t)e^{k_jt}$, де $P_{s-1}(t)$ – многочлен степеня, не вищого за $s-1$, і $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{k_jt}P_{s-1}(t) = 0$, бо $k_j < 0$, а показникова функція зростає швидше, ніж степенева (останню рівність легко довести, використовуючи правило Лопіталя).

2. *Якщо хоча б одне характеристичне число системи* (18.14) *має додатну дійсну частину* (*тобто або це число додатне, або комплексне з додатною дійсною частиною*), *то тривіальний розв'язок системи* (18.14) *нестійкий.* Справді, у цьому випадку принаймні одна з функцій e^{k_1t}, e^{k_2t}, …, e^{k_nt} необмежено зростає за модулем при $t \to +\infty$, і оскільки вона міститься у загальному розв'язку, то останній також необмежено зростає при зростанні t. Отже, розв'язки близькі до точки спокою $y_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, за початковими даними, зі зростанням t необмежено від неї віддалятимуться.

3. *Якщо серед характеристичних чисел системи* (18.14) *немає чисел з додатними дійсними частинами, але є прості числа з нульовою дійсною частиною, то тривіальний розв'язок системи* (18.14) *є стійким, але не асимптотично стійким.* У цьому випадку всі функції $y_j(t)$ обмежені за модулем для будь-якого $t > t_0$, якими б не були початкові значення цих функцій. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при виборі $|\tilde{y}_{j0}| < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, будемо мати $|y_j(t)| < \varepsilon$ для всіх $t > t_0$. Значить, тривіальний розв'язок системи (18.14) є стійким. Але він не асимптотично стійкий, бо для довільних $\tilde{y}_{j0}$ не будуть одночасно прямувати до нуля всі функції $y_j(t)$ при $t \to +\infty$.

4. *Якщо серед характеристичних чисел системи* (18.14) *немає чисел з додатними дійсними частинами, але є кратні числа з нульовими дійсними частинами, то можливі як стійкі, так і нестійкі тривіальні розв'язки.*

Повернемось до системи першого наближення (18.12).

Теорема 1 (Ляпунова). *Нехай функції* $R_j(t, y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *у системі* (18.12) *неперервні за сукупністю змінних і нескінченно малі вище першого порядку при* $y_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *тобто для всіх* $t \geqslant t_0$ *і* $|y_k| < d$

$$|R_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M \left(|y_1|^{1+\alpha} + |y_2|^{1+\alpha} + \ldots + |y_n|^{1+\alpha}\right),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

або

$$|R_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \omega(y)|y|, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$, α, M *– додатні сталі,* $\omega(y) \to 0$ *при* $|y| \to 0$. *Нехай, крім того,* $a_{jk}(t) = a_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, *де* a_{jk} *– сталі. Тоді якщо характеристичні числа системи* (18.14) *мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок системи* (18.1) *асимптотично стійкий*; *якщо хоча б одне характеристичне число має додатну дійсну частину, то тривіальний розв'язок системи* (18.1) *нестійкий.*

Якщо дійсні частини всіх характеристичних чисел недодатні, причому дійсна частина хоча б одного з них дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, взагалі кажучи, неможливе (починають впливати нелінійні члени R_i).

Приклад 4. *Дослідити на стійкість за першим наближенням тривіальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{1+2y} - e^{2(x+y)}, \\ \frac{dy}{dt} = \sin x + \ln(1-y). \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи формулу Тейлора для функції $f(x,y)$ двох змінних з залишковим членом у формі Пеано і обмежившись похідними першого порядку:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)\cdot x + f'_y(0,0)\cdot y + o(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ – відстань від точки $(0,0)$ до довільної точки (x,y), $o(\rho)$ – нескінченно мала величина при $\rho \to 0$ більш високого порядку, ніж ρ, виділимо лінійні частини правих частин системи:

$$\sqrt{1+2y} - e^{2(x+y)} = -2x - y + R_1(x,y),$$
$$\sin x + \ln(1-y) = x - y + R_2(x,y),$$

де $R_j(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $j = 1, 2$, задовольняють умови теореми 1.

Знайдемо характеристичні числа лінійної системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{vmatrix} -2-k & -1 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 3k + 3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Оскільки дійсні частини обох характеристичних чисел від'ємні, то тривіальний розв'язок заданої системи асимптотично стійкий. ■

4. Критерії Рауса – Гурвіца, Л'єнара – Шипара. Як випливає з попереднього пункту лекції, розв'язуючи задачі на стійкість для систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, важливо знати знаки дійсних частин характеристичних чисел.

Розглянемо алгебричне рівняння

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \quad a_0 > 0. \tag{18.16}$$

Нагадаємо деякі твердження, доведення яких можна знайти у підручниках з лінійної алгебри.

Теорема 2. *Необхідною умовою того, що всі дійсні частини коренів рівняння* (18.16) *від'ємні, є нерівності* $a_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Тепер наведемо необхідні і достатні умови, за виконання яких дійсні частини характеристичних чисел будуть від'ємними. Позначимо

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix},$$

де $a_j = 0$, якщо $j > n$.

Теорема 3 (критерій Рауса – Гурвіца). *Дійсні частини коренів рівняння* (18.16) *від'ємні тоді і тільки тоді, коли*

$$\Delta_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 4 (критерій Л'єнара – Шипара). *Дійсні частини коренів рівняння* (18.16) *від'ємні тоді і тільки тоді, коли* $a_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *і*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \Delta_{n-5} > 0, \ \ldots$$

Приклад 5. *Дослідити на стійкість точку спокою рівняння*

$$y^{\mathrm{IV}} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0.$$

Розв'язання. Використаємо критерій Рауса – Гурвіца. Складемо характеристичне рівняння: $k^4 + 5k^3 + 13k^2 + 19k + 10 = 0$. Оскільки

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot \Delta_3 > 0,$$

то точка спокою асимптотична стійка. ■

Приклад 6. *Дослідити на стійкість точку спокою рівняння*

$$y^{\mathrm{V}} + 4y^{\mathrm{IV}} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$$

Розв'язання. Оскільки всі коефіцієнти характеристичного рівняння $k^5 + 4k^4 + 16k^3 + 25k^2 + 13k + 9 = 0$ додатні і

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 16 & 4 & 1 \\ 9 & 13 & 25 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 13 \end{vmatrix} > 0,$$

то згідно з критерієм Л'єнара – Шипара точка спокою заданого рівняння асимптотична стійка. ■

Рекомендована література: [9, с. 231 – 252], [10, с. 156 – 171], [16, с. 390 – 416], [19, с. 229 – 241], [20, с. 203 – 206, 221 – 229].

Питання до лекції 18

1. Що вивчає теорія стійкості розв'язків диференціальних рівнянь? Чому так важливо з практичної точки зору знати, чи є розв'язок диференціального рівняння або системи стійким?

2. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь є стійким, асимптотично стійким, нестійким? Дайте геометричні трактування цих понять.

3. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь називають незбуреним (збуреним)?

4. Що називають положенням рівноваги (точкою спокою) системи?

5. У чому полягає основна ідея дослідження на стійкість розв'язку в першому наближенні?

6. Як дослідити на стійкість точку спокою нормальної системи зі сталими коефіцієнтами? Коли точка спокою є асимптотично стійкою, стійкою, але не асимптотично стійкою, нестійкою? Якими повинні бути характеристичні числа, щоб система могла мати як стійкі, так і нестійкі тривіальні розв'язки?

7. Як формулюються критерії Рауса – Гурвіца і Л'єнара – Шипара про невід'ємність дійсних частин характеристичних чисел? Як ці критерії використовують для дослідження на стійкість розв'язків лінійних рівнянь (систем) зі сталими коефіцієнтами?

Вправи до лекції 18

1. Використовуючи означення стійкості, дослідіть на стійкість розв'язки задач Коші рівнянь і систем:

$$\text{а) } y' = 2x(1+y), \;\; y(0)=0; \quad \text{б) } y' = y + x, \;\; y(0) = 1;$$

$$\text{в) } \begin{cases} y_1' = -y_1 - 9y_2, \;\; y_1(0) = 0, \\ y_2' = y_1 - y_2, \;\; y_2(0) = 0. \end{cases}$$

2. Дослідіть на стійкість точку спокою систем:

$$\text{а) } \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + 5y_3, \\ y_2' = -2y_1 + y_3, \\ y_3' = -3y_3; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2, \\ y_3' = y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

3. Дослідіть на стійкість за першим наближенням точку спокою систем:

$$\text{а) } \begin{cases} y_1' = 3y_1y_2 - y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1^4 + y_2^3 + 2y_1 - 3y_2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_1^2 \sin y_2, \\ y_2' = -y_1 - 4y_2 + 1 - \cos y_2^2. \end{cases}$$

4. Використовуючи критерії Рауса – Гурвіца або Л'єнара – Шипара, дослідіть на стійкість тривіальний розв'язок рівнянь:

а) $y''' - 3y' + 2y = 0$; б) $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0$;
в) $y^{\mathrm{V}} + 3y^{\mathrm{IV}} - 5y''' - 15y'' + 4y' + 12y = 0$.

Лекція 19. Метод функцій Ляпунова. Фазова площина

План

1. Дослідження на стійкість за методом функцій Ляпунова.
2. Класифікація точок спокою автономної системи.

1. Дослідження на стійкість за методом функцій Ляпунова. На попередній лекції вивчались деякі питання, пов'язані з дослідженням на стійкість розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь. При цьому використовувалась відповідна система першого наближення. Але заміна нелінійної системи (18.12) лінійною системою (18.13) є фактично заміною однієї проблеми іншою і між ними може не бути нічого спільного. Можна навести приклади таких систем диференціальних рівнянь, дослідження яких за першим наближенням дає стійкість незбуреного руху, хоча насправді він нестійкий, і навпаки. Водночас відомі приклади, коли перше наближення повністю розв'язує проблему стійкості.

Відповідь на питання про стійкість (асимптотичну стійкість) нормальної нелінійної системи

$$y_j' = f_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{19.1}$$

яка має тривіальний розв'язок $y_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, дає така теорема.

Теорема 1 (Ляпунова). *Якщо існує диференційовна функція $V = V(y_1, \ldots, y_n)$, яка задовольняє умови*:

1) $V \geqslant 0$ *і* $V = 0$ *тільки тоді, коли* $y_1 = \ldots = y_n = 0$;

2) *повна похідна функції* V *вздовж фазової траєкторії* (*тобто вздовж розв'язку* $y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *системи* (19.1)) *недодатна, тобто*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot f_j(t, y_1, \ldots, y_n) \leqslant 0$$

для $t \geqslant t_0$, *то тривіальний розв'язок системи* (19.1) *стійкий.*

Якщо замість умови 2) *виконується нерівність*

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\beta < 0$$

для $t \geqslant t_1 > t_0$ *і* $0 < \delta_1 \leqslant y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \delta_2$, *де* δ_1, δ_2, β *– сталі, то тривіальний розв'язок системи* (19.1) *асимптотично стійкий.*

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [10, с. 163 – 165].

Функцію V з теореми 1 називають ***функцією Ляпунова***. Зауважимо, що загального способу побудови функції Ляпунова немає. Її рекомендується шукати у вигляді квадратичної форми від аргументів y_1, y_2, $\ldots$, y_n, тобто у вигляді $V = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, y_i\, y_j$. З умови 1) теореми 1 випливає, що V повинна бути додатно визначеною квадратичною формою. Яким чином вибрати коефіцієнти a_{ij}, щоб форма V була додатно визначеною, вказується у ***критерії Сильвестра***, відомому з курсу алгебри: потрібно, щоб

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

У простіших випадках функцію Ляпунова можна шукати у вигляді

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \quad V(x, y) = ax^4 + by^4, \quad V(x, y) = ax^4 + by^2,$$

де $a > 0$, $b > 0$, тощо.

Приклад 1. *Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи*
$$\frac{dx}{dt} = -x^5 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $V(x, y) = x^2 + y^2$. Вона задовольняє обидві умови теореми 1. Справді:

1) $V \geqslant 0$ і $V = 0$ тільки тоді, коли $x = y = 0$;

2) вздовж розв'язку x, y системи
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(-x^5 - y) + 2y(x - y^3) = \\ = -2(x^6 + y^4) \leqslant 0.$$

Згідно з теоремою 1 тривіальний розв'язок системи стійкий. Більш того, оскільки поза околом початку координат ($x^2 + y^2 \geqslant \geqslant \delta > 0$) маємо $\frac{dV}{dt} \leqslant -\beta < 0$, де β – мінімум функції $2(x^6 + y^4)$ поза колом $x^2 + y^2 = \delta$, то розв'язок $x = y \equiv 0$ асимптотично стійкий. ■

Приклад 2. *Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи*
$$\frac{dx}{dt} = 2y^3 - x^5, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3 - y^5.$$

Розв'язання. Шукаємо функцію Ляпунова у вигляді $V(x, y) = = V_1(x) + V_2(y)$. Тоді
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2(x, y) = \\ = V_1'(x)(2y^3 - x^5) + V_2'(y)(-x - y^3 - y^5) = \\ = -x^5 V_1'(x) - (y^3 + y^5) V_2'(y) + 2y^3 V_1'(x) - x V_2'(y).$$

Нехай, наприклад,
$$2y^3 V_1'(x) - x V_2'(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1'(x)}{x} \equiv \frac{V_2'(y)}{2y^3} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{V_1'(x)}{x} = \mu, \quad \frac{V_2'(y)}{2y^3} = \mu \quad (\mu = \text{const}) \quad \Rightarrow$$
$$V_1(x) = \frac{\mu}{2}x^2, \quad V_2(y) = \frac{\mu}{2}y^4.$$

Виберемо $\mu = 2$. Тоді $V(x, y) = x^2 + y^4$, $V(x, y) > 0$, якщо $x^2 + y^2 \neq 0$ і $V(0, 0) = 0$.

Окрім того,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2(x, y) = -(2x^6 + 4y^6 + 4y^8) \leqslant -\beta < 0,$$

де β – мінімум функції $f(x, y) = 2x^6 + 4y^6 + 4y^8$ поза колом з центром у початку координат. З теореми 1 випливає асимптотична стійкість тривіального розв'язку системи. ■

Пропонуємо читачам самостійно переконатися у тому, що отримати однозначну відповідь про стійкість тривіальних розв'язків систем з прикладів 1, 2 за першим наближенням не можна.

2. Класифікація точок спокою автономної системи. Розглянемо поведінку на фазовій площині $\mathbf{R}^2$ фазових траєкторій автономної системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{19.2}$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – неперервно диференційовні в деякій області (або в усій площині $\mathbf{R}^2$) функції. Система (19.2) може мати лише три типи фазових траєкторій: точка, замкнена траєкторія (цикл) і незамкнена траєкторія. Розв'язок, траєкторією якого є точка (x_0, y_0) (положення рівноваги), є сталим $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ (для будь-якого $t \in \mathbf{R}$). Замкненій траєкторії відповідає періодичний розв'язок, незамкненій – неперіодичний.

Основною задачею якісного дослідження системи (19.2) є одержання ***фазового портрету*** системи, тобто картини розбиття фазової площини $\mathbf{R}^2$ на траєкторії.

Для того, щоб побудувати фазовий портрет системи (19.2), потрібно знати поведінку траєкторій в околах так званих особливих траєкторій: положень рівноваги, граничних циклів і деяких незамкнених кривих, які відділяють сім'ї траєкторій одну від одної. ***Граничним циклом*** системи (19.2) називають такий цикл, деякий окіл якого цілком заповнений траєкторіями, вздовж яких точка $(x(t),\, y(t))$ необмежено наближається до нього при $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$.

Розглянемо випадок, коли система (19.2) є лінійною:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{19.3}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – дійсна стала матриця, причому $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Легко бачити, що $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ є розв'язком системи (19.3).

Системі (19.3) відповідає одне рівняння з дробово-лінійною правою частиною

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \tag{19.4}$$

тобто всі інтегральні криві рівняння (19.4) є траєкторіями системи (19.3). Але цим не вичерпуються всі траєкторії системи (19.3), бо вона допускає рух $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, траєкторією якого є точка $x = y = 0$ (точка спокою).

Французький математик Пуанкаре показав, що можливими є кілька випадків, кожен з яких відповідає за розташування інтегральних кривих в околі особливої точки $(0, 0)$ або, що те саме, за розташування траєкторій системи (19.3) в околі точки спокою $(0, 0)$. Ці випадки називають ***типами Пуанкаре***.

Позначимо через k_1 і k_2 – корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = k^2 - (a_{11} + a_{22})k + \Delta = 0. \tag{19.5}$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то з (19.5) випливає, що $k = 0$ не є характеристичним числом.

Випадок 1. *k_1 і k_2 дійсні та різні.* Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ – власні вектори матриці A, що відповідають кореням

k_1 і k_2, тобто

$$\begin{cases}(a_{11}-k_1)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0,\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k_1)\alpha_2=0,\end{cases}\quad \begin{cases}(a_{11}-k_2)\beta_1+a_{12}\beta_2=0,\\ a_{21}\beta_1+(a_{22}-k_2)\beta_2=0.\end{cases}\tag{19.6}$$

Згідно з теоремою 3 лекції 14 загальним розв'язком системи (19.3) є

$$x=C_1\alpha_1e^{k_1t}+C_2\beta_1e^{k_2t},\quad y=C_1\alpha_2e^{k_1t}+C_2\beta_2e^{k_2t},\tag{19.7}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Якщо $k_1<0$, $k_2<0$, то з (19.7) випливає, що точка спокою $x=y=0$ є асимптотично стійкою. Справді, якщо, наприклад, $t_0=0$, то розв'язок (19.7), який проходить через точку (x_0,y_0), у момент часу t_0 визначається сталими C_1 і C_2, які знаходяться з системи

$$x_0=C_1\alpha_1+C_2\beta_1,\quad y_0=C_1\alpha_2+C_2\beta_2,$$

де $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$. Але тоді $C_1=Ax_0+By_0$, $C_2=Dx_0+Ey_0$, де A, B, D, E – деякі сталі. Враховуючи, що $|e^{k_1t}|\leqslant 1$, $|e^{k_2t}|\leqslant 1$ для $k_1<0$, $k_2<0$, маємо оцінки

$$|x|\leqslant|Ax_0+By_0|\cdot|\alpha_1|+|Dx_0+Ey_0|\cdot|\beta_1|,$$
$$|y|\leqslant|Ax_0+By_0|\cdot|\alpha_2|+|Dx_0+Ey_0|\cdot|\beta_2|.$$

Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$ таке, що як тільки $|x_0|<\delta$, $|y_0|<\delta$, то

$$|x|<\varepsilon,\quad |y|<\varepsilon\quad (t>0),$$

тобто точка спокою $(0,0)$ стійка. Окрім того, оскільки $e^{k_jt}\to 0$ $(k_j<0)$ при $t\to+\infty$, то з (19.7) випливає, що точка $(0,0)$ також асимптотично стійка.

Якщо виключити аргумент t з системи (19.7), то одержана при цьому функція $y=f(x)$ визначатиме траєкторію руху в системі координат Oxy.

Матеріальна точка, яка знаходиться у початковий момент часу $t=t_0$ в δ-околі початку координат, для досить великих t

переходить у точку, яка належить ε-околу початку координат і при $t \to +\infty$ прямує до початку координат. Таку точку спокою називають ***стійким вузлом***.

На рис. 19.1 зображено розташування траєкторій, яке відповідає цьому випадку. Стрілками вказаний напрям руху по траєкторії при $t \to +\infty$. Усі траєкторії, крім однієї, в точці $(0, 0)$ мають спільну дотичну.

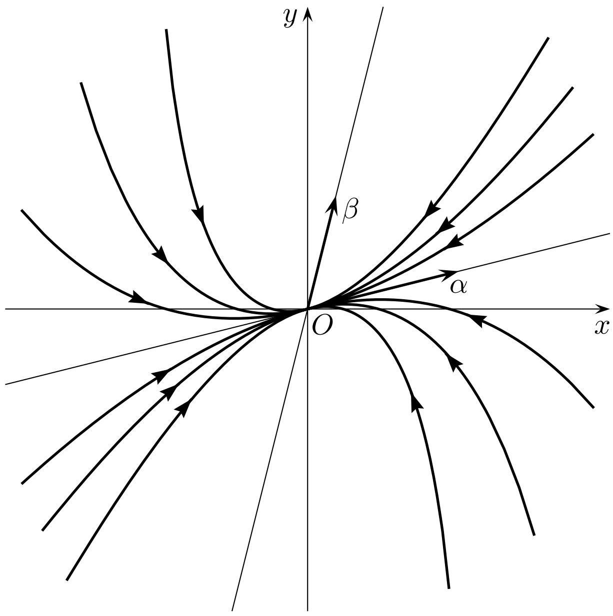

Рис. 19.1

Якщо $|k_1| < |k_2|$, то кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює α_2/α_1. Справді, з (19.3) і (19.7) маємо ($C_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}\big(C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_1 e^{k_2 t}\big) + a_{22}\big(C_1\alpha_2 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t}\big)}{a_{11}(C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_1 e^{k_2 t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t})} =$$

$$= \frac{a_{21}\big(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(k_2-k_1)t}\big) + a_{22}\big(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(k_2-k_1)t}\big)}{a_{11}\big(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(k_2-k_1)t}\big) + a_{12}\big(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(k_2-k_1)t}\big)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a_{21}C_1\alpha_1 + a_{22}C_1\alpha_2}{a_{11}C_1\alpha_1 + a_{12}C_1\alpha_2} = \frac{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2} = \frac{k_1\alpha_2}{k_1\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

бо згідно з (19.6) $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = k_1\alpha_2,\ a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = k_1\alpha_1$. Якщо $\alpha_1 = 0$, то аналогічно одержуємо, що

$$\frac{dx}{dy} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0.$$

Якщо $C_1 = 0$, то з (19.7) одержуємо одну траєкторію – пряму $y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x$, дотична до якої має кутовий коефіцієнт $\frac{\beta_2}{\beta_1}$.

Таким чином, дотична до траєкторій, в яких $C_1 \neq 0$, паралельна до власного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, який відповідає найменшому за модулем характеристичному числу k_1 (якщо $\alpha_1 = 0$, то вектор направлений вздовж осі Oy). Крім того, при $C_1 = 0$ є одна траєкторія – пряма $y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x$, яка паралельна до другого власного вектора $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, що відповідає більшому за модулем характеристичному числу k_2.

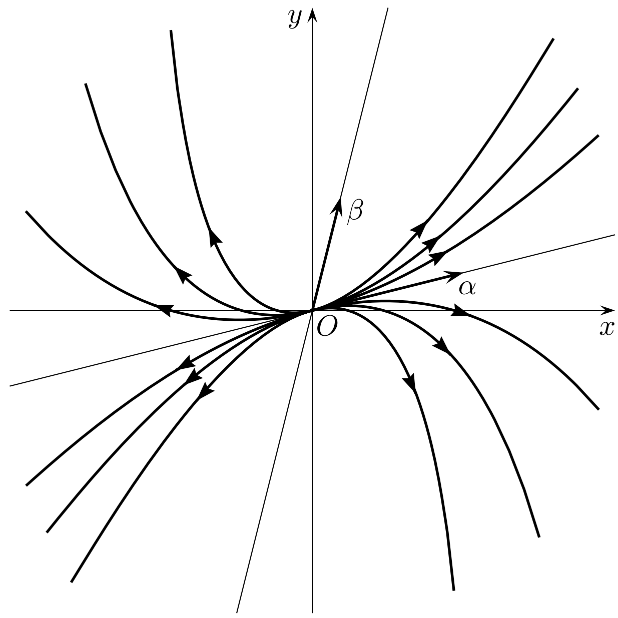

Рис. 19.2

Якщо тепер $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то з (19.7) випливає, що точка спокою $x = y = 0$ нестійка, бо $e^{k_j t} \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Таку точку спокою називають ***нестійким вузлом***. Цей випадок отримуємо з попереднього заміною t на $(-t)$, а тому рух точки по траєкторії відбувається у протилежному напрямі (рис. 19.2).

Нарешті, якщо $k_1 < 0$, $k_2 > 0$ або $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, то точка спокою нестійка, бо $e^{k_2 t} \to +\infty$ або $e^{k_1 t} \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Точки, які розташовані в δ-околі початку координат, по траєкторії

$$x = C_2\beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = C_2\beta_2 e^{k_2 t}$$

рухаються у нескінченність. Однак у цьому випадку є траєкторія, по якій рух точки відбувається у напрямі до початку координат при $t \to +\infty$, а саме

$$x = C_1\alpha_1 e^{k_1 t}, \quad y = C_1\alpha_2 e^{k_1 t}. \tag{19.8}$$

Цією траєкторією є пряма $\alpha_1 y - \alpha_2 x = 0$, яку легко одержати з (19.8), виключивши змінну t. Таку точку спокою називають ***сідлом*** (рис. 19.3).

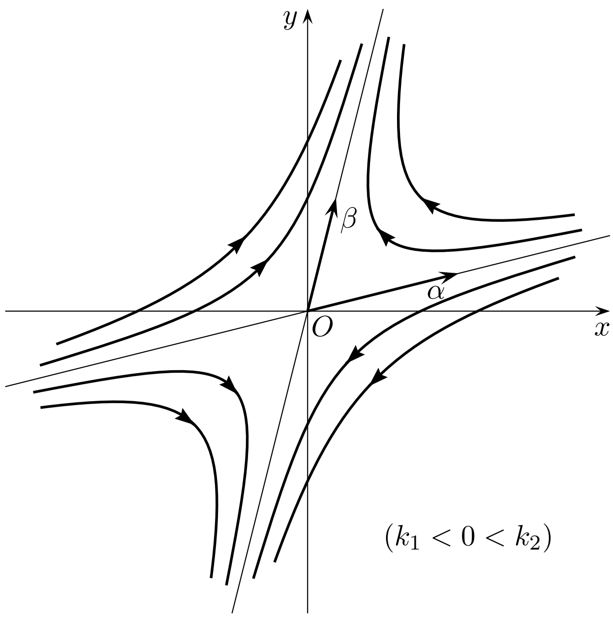

Рис. 19.3

Випадок 2. k_1 *і* k_2 *комплексно-спряжені*: $k_{1,2} = p \pm iq$, $q \neq 0$. Загальний розв'язок системи (19.3) можна записати у вигляді (19.7), де вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і $\beta = \bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ мають комплексні координати. Як відомо (лекція 13), дійсна та уявна частини цього розв'язку є дійсними розв'язками системи, тому загальний розв'язок системи (19.3) можна записати у вигляді лінійної комбінації цих розв'язків:

$$x = e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \quad y = e^{pt}(a \cos qt + b \sin qt), \quad (19.9)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, a і b – лінійні комбінації цих сталих.

Якщо $p = 0$, то траєкторії (19.9) для різних C_1, C_2 (на підставі періодичності множників у дужках) є замкненими кривими – еліпсами з центрами у точці $(0, 0)$ (рис. 19.4). Цю точку називають ***центром***. Якщо $p = 0$, то точка $(x(t), y(t))$ рухається по одному з еліпсів вказаної сім'ї, обходячи його безліч разів. Вона, очевидно, не прямує до жодної границі при $t \to +\infty$, тобто точка спокою $(0, 0)$ не асимптотично стійка. Але вона є стійкою.

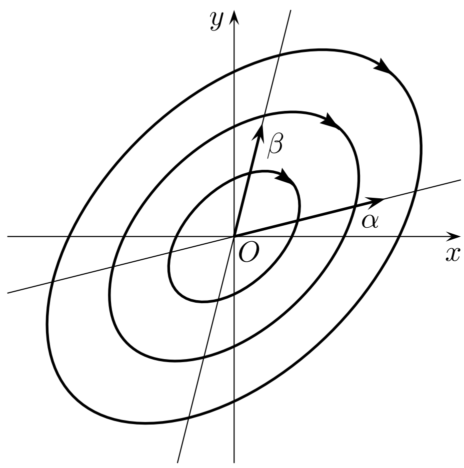

Рис. 19.4

Нехай тепер $p < 0$. З (19.9) випливає, що у цьому випадку точка (x, y) при $t \to +\infty$ прямує до початку координат – точки $x = 0$, $y = 0$, яку називають ***стійким фокусом***. Наявність множника e^{pt}, який при $t \to +\infty$ прямує до нуля, перетворює замкнені криві у спіралі, які асимптотично наближаються при $t \to +\infty$ до початку координат (рис. 19.5).

Точки, які розташовані при $t = t_0$ у довільному δ-околі початку координат, для достатньо великого t потрапляють у заданий ε-окіл початку координат.

Траєкторії, які прямують до фокуса, характерні тим, що дотичні до них при $t \to +\infty$ не прямують до жодної границі. Цим фокус відрізняється від вузла.

У випадку $p < 0$ точка $x = 0$, $y = 0$ асимптотично стійка.

Якщо дійсна частина p чисел k_1 і k_2 додатна, то цей випадок переходить у попередній після заміни t на $-t$. Отже, траєкторії зберігають таку ж форму, як на рис. 19.5, однак рух точки відбуватиметься у протилежному напрямі. Оскільки $e^{pt} \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то точки, які знаходяться у початковий момент часу в околі початку координат, потім переходять у нескінченність. Таку точку спокою називають ***нестійким фокусом*** (рис. 19.6).

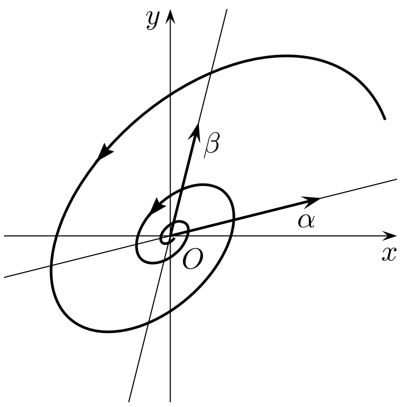

Рис. 19.5

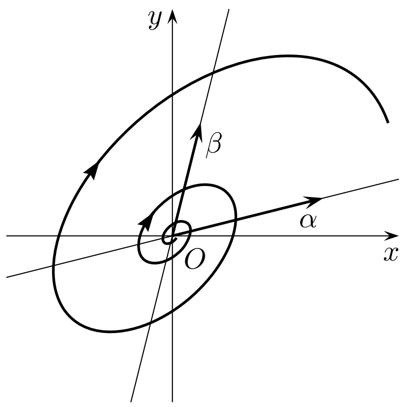

Рис. 19.6

Випадок 3. $k_1 = k_2$. Тоді k_1, k_2 – дійсні, а загальний розв'язок системи (19.3) має вигляд

$$x = (A + Bt)e^{k_1 t}, \quad y = (C + Dt)e^{k_1 t},$$

де A, B, C, D – сталі, пов'язані між собою двома лінійними рівняннями, які можна одержати, якщо підставити функції $x(t)$, $y(t)$ у систему (19.3) і скоротити на $e^{k_1 t}$.

Якщо $k_1 < 0$, то $e^{k_1 t} \to 0$, $te^{k_1 t} \to 0$ при $t \to +\infty$ і, отже, точка спокою $x = y = 0$ асимптотично стійка. Її називають ***стійким вузлом***. Якщо $k_1 > 0$, то точка спокою нестійка, її називають ***нестійким вузлом***.

Детальніше про випадок $k_1 = k_2$ можна прочитати, наприклад, в [10, с. 144 – 148].

Наведені три випадки отримані у припущенні, що визначник Δ системи (19.3) відмінний від нуля. Припустимо тепер, що $\Delta = 0$. Тоді характеристичними числами є $k_1 = 0$ і $k_2 = a_{11} + a_{22}$. Якщо $k_2 \neq 0$, то загальний розв'язок системи (19.3) має вигляд

$$x = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{k_2 t}, \tag{19.10}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі і $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0$, $-a_{22}\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0$.

Виключаючи з (19.10) параметр t, одержуємо сім'ю паралельних прямих

$$y - C_1\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}(x - C_1\alpha_1).$$

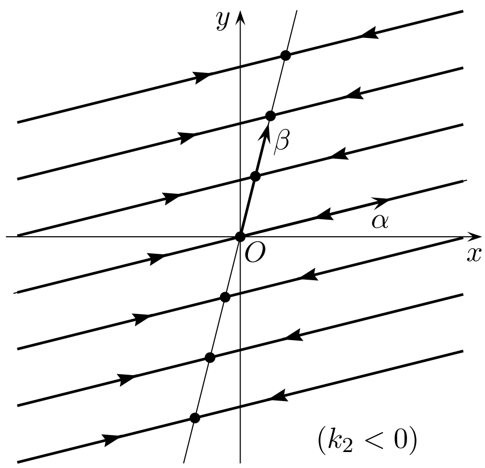

Рис. 19.7

Якщо $k_2 < 0$, то при $t \to +\infty$ на кожній траєкторії (на одному з паралельних променів) точки наближаються до точки спокою (рис. 19.7)

$$x = C_1\alpha_1, \;\; y = C_1\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x.$$

Точка спокою $x = y = 0$, так само, як і довільна точка прямої $y = \alpha_2 x/\alpha_1$, при $k_2 < 0$ стійка, але не асимптотично стійка. Якщо $k_2 > 0$, то точка спокою нестійка.

Якщо $k_1 = k_2$, то можливі два випадки:

1. Загальним розв'язком системи (19.3) є $x = C_1$, $y = C_2$ (це буде тоді, коли матриця A нульова). Тоді точка спокою стійка, але не асимптотично стійка. Усі точки площини (x, y) є стійкими точками спокою.

2. Загальний розв'язок системи (19.3) має вигляд

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = a + bt.$$

Тоді точка спокою нестійка. У цьому випадку $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12}\,a_{21} < 0$.

Приклад 3. *Дослідити характер точки спокою системи*

$$\frac{dx}{dt} = 5y - x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y.$$

Накреслити фазові траєкторії на площині (x, y).
Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-k & 5 \\ 0 & -2-k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. Отже, точка спокою $x = y = 0$ є стійким вузлом.

Характеристичному числу $k_1 = -1$ відповідає власний вектор $\alpha = (1, 0)$, а числу $k_2 = -2$ – вектор $\beta = (-5, 1)$. Похідна $\frac{dy}{dx}$ у точці початку координат дорівнює $\alpha_2/\alpha_1 = 0$. Отже, дотичні до фазових траєкторій у початку координат є горизонтальними, а самі траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 19.8. ■

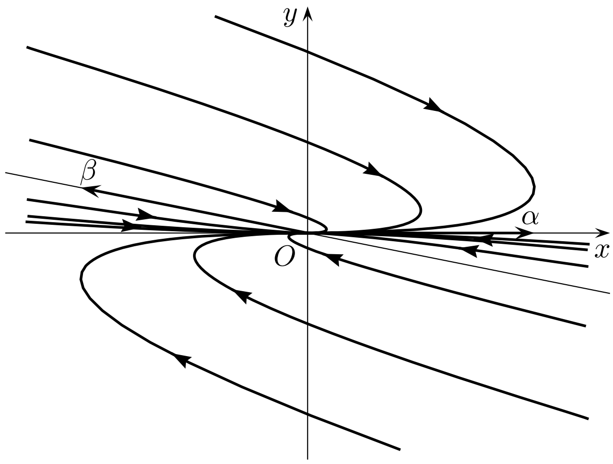

Рис. 19.8

Приклад 4. *Дослідити характер точки спокою системи*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \alpha y$$

залежно від значення параметра α.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має комплексні корені $k_{1,2} = \alpha \pm i$. Якщо $\alpha = 0$, то точка спокою є центром. У цьому випадку система набирає вигляду $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$. Звідси $x^2 + y^2 = C$, тобто фазовими траєкторіями є кола з центром у точці $(0, 0)$ радіуса $\sqrt{C}$. Якщо $\alpha \neq 0$, то точка спокою є фокусом: стійким, якщо $\alpha < 0$ і нестійким, якщо $\alpha > 0$. Фазовими траєкторіями є спіралі, які «накручуються» на точку $(0, 0)$. Якщо $\alpha < 0$, то точка $(x(t), y(t))$ рухається по спіралях у напрямі точки спокою, а для $\alpha > 0$ – у напрямі від неї. ■

Рекомендована література: [1, с. 251 – 281], [9, с. 253 – 274], [10, с. 132 – 149, 163 – 168], [16, с. 417 – 453], [19, с. 216 – 222, 241 – 245].

Питання до лекції 19

1. Як формулюється теорему Ляпунова про стійкість (асимптотичну стійкість) нормальної нелінійної системи?

2. Які властивості має функція Ляпунова? У якому вигляді рекомендується шукати функцію Ляпунова?

3. Що називають фазовим портретом нормальної системи? Як побудувати фазовий портрет системи?

4. Як пов'язані між собою автономна лінійна однорідна система двох диференціальних рівнянь (19.3) і рівняння першого порядку з однорідною дробово-лінійною правою частиною (19.4)?

5. Дайте класифікацію Пуанкаре точок спокою автономної системи диференціальних рівнянь. У якому випадку точка спокою є стійкою, асимптотично стійкою, нестійкою?

Вправи до лекції 19

1. Дослідіть на стійкість тривіальний розв'язок системи, знаючи функцію Ляпунова:

$$\text{а)}\ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3, \end{cases} \quad V = x^2 + y^2;$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}, \end{cases} \quad V = x^2 + 2y^2.$$

2. Дослідіть особливі точки рівнянь. Накресліть інтегральні криві на площині (x, y):

$$\text{а)}\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y}; \quad \text{б)}\ \frac{dy}{dx} = \frac{-x+2y}{2x-y}.$$

3. Дослідіть особливі точки систем. Накресліть траєкторії на площині (x, y):

$$\text{а)}\ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x; \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

Розділ 6.
ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лекція 20. Інтегральні рівняння, їх застосування та деякі методи розв'язування

План

1. Основні означення й поняття.

2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь.

3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

1. Основні означення й поняття. ***Інтегральним рівнянням*** називають рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наведемо приклади інтегральних рівнянь:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{20.1}$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{20.2}$$

де $K(x,s)$ і $f(x)$ – задані функції, а $y(x)$ – шукана функція (вони можуть бути дійсними або комплекснозначними), λ – деяке число (дійсне або комплексне).

Функцію $K(x,s)$ називають ***ядром*** інтегрального рівняння, $f(x)$ – ***вільним членом***. У рівняннях (20.1), (20.2) функція $f(x)$ визначена на відрізку $x \in [a,b]$. У рівнянні (20.1) ядро $K(x,s)$ визначене у квадраті

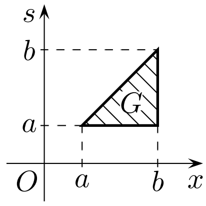

Рис. 20.1

$$Q = \{(x,s) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant b\},$$

а у рівнянні (20.2) – у трикутнику (рис. 20.1)

$$G = \{(x,s) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant x\}.$$

Надалі, якщо не сказано про інше, вважатимемо, що ядро $K(x, s)$ і вільний член $f(x)$ є неперервними функціями у своїх областях визначення.

Рівняння (20.1), (20.2) є ***лінійними*** інтегральними рівняннями, бо шукана функція входить у ці рівняння лінійно. Зустрічаються також і нелінійні інтегральні рівняння. Таким, наприклад, є рівняння

$$y(x) = \int_0^1 e^x y^2(s)\,ds + 2, \quad x \in [0, 1].$$

Надалі розглядатимемо тільки лінійні інтегральні рівняння.

Якщо шукана функція міститься тільки під знаком інтеграла, то відповідне рівняння називають ***інтегральним рівнянням першого роду***. Такими рівняннями, наприклад, є

$$\int_a^b K(x, s)y(s)\,ds = f(x), \tag{20.3}$$

$$\int_a^x K(x, s)y(s)\,ds = f(x). \tag{20.4}$$

Рівняння (20.1) і (20.2), у яких шукана функція міститься також поза знаком інтеграла, називають ***інтегральними рівняннями другого роду***.

Якщо межі інтегрування фіксовані, то відповідне інтегральне рівняння називають ***рівнянням Фредгольма***, а якщо одна з меж інтегрування є змінною, – то ***рівнянням Вольтерра***. Отже, (20.1), (20.3) – рівняння Фредгольма, а (20.2), (20.4) – рівняння Вольтерра.

Рівняння Вольтерра можна розглядати як окремий випадок рівняння Фредгольма, вважаючи в (20.2) або (20.4), що $K(x, s) \equiv 0$ для $s > x$. Однак фізичні задачі, які приводять до рівнянь Вольтерра і Фредгольма, а також властивості розв'язків цих рівнянь суттєво різні, тому рівняння Вольтерра вивчатимемо окремо.

Рівняння (20.1) – (20.4) називають ***однорідними***, якщо $f(x) \equiv 0$, у іншому випадку – ***неоднорідними***.

Розв'язком інтегрального рівняння називають функцію $y(x)$, яка перетворює його у тотожність для $x \in [a, b]$. Наприклад, функція $y(x) = \frac{1}{\pi} x^{-1/2}$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра першого роду

$$\int_0^x \frac{y(s)}{\sqrt{x-s}}\, ds = 1,$$

а функція $y(x) = e^{-x} - 2x$ – розв'язком рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = e^{-x} + 2\int_0^1 x e^s y(s)\, ds,$$

у чому можна переконатися перевіркою (пропонуємо читачам показати це самостійно, виконуючи вправу 1 після лекції).

2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння відіграють важливу роль у математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів і явищ. Переважно основою для складання інтегральних рівнянь є відповідні фізичні закони. Так, наприклад, відомі закони збереження маси, імпульсу та енергії мають інтегральне формулювання і приводять до інтегральних рівнянь в якості моделей конкретних процесів чи явищ. Інтегральні рівняння виникають у багатьох областях науки і техніки, а також у численних застосуваннях, наприклад у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії масо- і теплоперенесення, біомеханіці, геофізиці, астрономії тощо. Розглянемо деякі приклади.

Задача 1 (задача Абеля). *У вертикальній площині* (τ, s) *знайти криву, вздовж якої матеріальна точка, почавши рух без початкової швидкості у точці з ординатою* x, *під дією сили тяжіння досягає осі* $O\tau$ *за час* $T = f(x)$, *де* $f(x)$ *– задана функція. Тертям знехтувати.*

Розв'язання. Нехай $\alpha = \alpha(s)$ – кут, який утворює дотична до шуканої кривої з віссю $O\tau$ (рис. 20.2).

Приріст кінетичної енергії точки при її переміщенні з M до N дорівнює роботі сили тяжіння, тобто

$$\frac{mv^2}{2} = mg(x - s),$$

де m – маса точки, g – прискорення земного тяжіння. Звідси одержуємо формулу для швидкості рухомої точки:

$$v = \sqrt{2g(x - s)}.$$

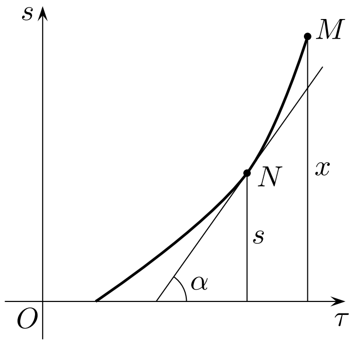

Рис. 20.2

Знаходимо складову вектора швидкості вздовж осі Os:

$$\frac{ds}{dt} = -v\sin\alpha = -\sqrt{2g(x - s)}\sin\alpha,$$

де t – поточне значення часу падіння, а знак «мінус» вказує на те, що напрям швидкості протилежний до напряму осі Os.

З попередньої рівності випливає, що

$$dt = -\frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{2g}\sqrt{x - s}}, \tag{20.5}$$

де позначено $\varphi(s) = \frac{1}{\sin\alpha(s)}$.

Зінтегрувавши рівність (20.5) у межах від 0 до x, одержуємо час T, потрібний матеріальній точці для переміщення з висоти $s = x$ до положення $s = 0$:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x - s}}.$$

Оскільки $T = f(x)$, то для знаходження функції $\varphi(s)$ одержали інтегральне рівняння Вольтерра першого роду:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x - s}} = f(x). \tag{20.6}$$

Інтегральне рівняння (20.6) називають ***рівнянням Абеля***.

Якщо, розв'язавши рівняння (20.6), знайдемо функцію $\varphi(s)$, то можемо скласти рівняння шуканої кривої:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad s = \Phi(\alpha).$$

Далі маємо:

$$\frac{ds}{d\tau} = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{ds}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\Phi'(\alpha)\,d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \Rightarrow$$
$$\tau = \int \frac{\Phi'(\alpha)\,d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} \equiv \Phi_1(\alpha).$$

Таким чином, шукана крива визначається у параметричній формі:

$$\tau = \Phi_1(\alpha), \quad s = \Phi(\alpha). \ \blacksquare$$

Задача 2. *Знайти потенціальну енергію поля, в якому частинка здійснює коливання, якщо відома залежність періоду коливання частинки від її енергії.*

Розв'язання. Припустимо, що потенціальна енергія поля задається функцією $u(x)$, яка є парною і монотонно зростаючою для $x > 0$. Згідно з законом збереження енергії

$$\frac{mv^2}{2} + u(x) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + u(x) = E,$$

де E – енергія частинки, m – її маса. Відокремлюючи змінні, одержуємо

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\,(E - u(x))} \quad \Rightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}} \quad \Rightarrow$$
$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}} + C,$$

де C – довільна стала.

Нехай $u(0) = 0$ і $x_0(E)$ – корінь рівняння $u(x) = E$. Тоді для періоду коливань $T(E)$ маємо формулу

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \cdot \int\limits_0^{x_0(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}}.$$

Перейшовши під інтегралом до змінної du, одержуємо

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \cdot \int\limits_0^{E} \frac{\Phi(u)\,du}{\sqrt{E - u}}, \tag{20.7}$$

де $\Phi(u) = \frac{dx(u)}{du}$. Якщо функція $u(x)$ невідома, але відома залежність $T(E)$ для деякого інтервалу значень E, то задача знаходження функції $u(x)$ зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра першого роду (20.7) відносно функції $\Phi(u)$.

Знайшовши з (20.7) $\Phi(u)$, шукану залежність для $u(x)$ можна одержати з того, що

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{dx}{du}\right)^{-1} = \frac{1}{\Phi(u)}, \qquad u(0) = 0. \ \blacksquare$$

3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Інтегральні рівняння Вольтерра другого роду часто використовуються для опису динаміки різноманітних процесів у системах. Прикладами динамічних систем є механізми, електричні кола, системи регулювання. До аналізу динамічних систем зводяться багато задач дослідження процесів хімії, біології, біофізики, екології, економіки тощо. Зокрема, кожну задачу Коші для лінійного диференціального рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

можна звести до розв'язування деякого лінійного інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Покажемо це на прикладі.

Приклад 1. *Скласти інтегральне рівняння, яке відповідає задачі Коші*

$$y'' + 2y' + y = x^2, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0. \tag{20.8}$$

Розв'язання. Позначимо $y'' = u$. Інтегруючи це співвідношення та враховуючи початкові умови, послідовно знаходимо

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(s)\,ds = \int_0^x u(s)\,ds,$$

$$y(x) = y(0) + \int_0^x dp \int_0^p u(s)\,ds = 1 + \int_0^x (x-s)u(s)\,ds. \tag{20.9}$$

Підставляючи знайдені вирази для $y(x)$, $y'(x)$ у задане рівняння, одержуємо

$$u(x) + 2\int_0^x u(s)\,ds + \left(1 + \int_0^x (x-s)u(s)\,ds\right) = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = x^2 - 1 - \int_0^x (2 + x - s)u(s)\,ds. \tag{20.10}$$

Таким чином, якщо $y(x)$ – розв'язок заданої задачі Коші, то функція $u(x) = y''$ задовольняє інтегральне рівняння (20.10). І навпаки, якщо $u(x)$ – розв'язок рівняння (20.10), то функція $y(x)$, визначена формулою (20.9), є розв'язком задачі Коші (20.8). Отже, задача (20.8) рівносильна інтегральному рівнянню (20.10). ■

Відомо (лекція 6), що задача Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

у загальному випадку рівносильна нелінійному інтегральному рівнянню Вольтерра

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f\big(x, y(s)\big)\,ds.$$

Аналогічно задачу Коші для довільного диференціального рівняння n-го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної,

$$y^{(n)} = f\Big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\Big),$$
$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ \ \dots,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

можна звести до системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра.

Приклад 2. *Скласти систему інтегральних рівнянь, рівносильну задачі Коші* $y'' = -y'^2 + 2y,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
Розв'язання. Позначимо $y_1 = y$, $y_2 = y'$. Тоді задана задача Коші зводиться до задачі Коші для нормальної системи:

$$y_1' = y_2,\ \ y_2' = 2y_1 - y_2^2,\quad y_1(0) = 1,\ \ y_2(0) = 0.$$

У свою чергу, отримана система диференціальних рівнянь з урахуванням початкових умов рівносильна системі інтегральних рівнянь

$$y_1(x) = 1 + \int\limits_0^x y_2(s)\,ds,\quad y_2(x) = \int\limits_0^x \big(2y_1(s) - y_2^2(s)\big)\,ds.\ \blacksquare$$

У багатьох випадках розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра другого роду або системи таких рівнянь може бути зведене до розв'язування деякої задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Наведемо два способи, за допомогою яких це можна зробити.

Спосіб 1. Розглянемо рівняння Вольтерра другого роду (20.2) і припустимо, що його ядро $K(x, s)$ і вільний член $f(x)$ мають неперервні похідні $\frac{\partial K(x,s)}{\partial x}$ і $f'(x)$ (за цих умов інтегральне рівняння можна здиференціювати один або декілька разів за змінною x).

Приклад 3. *Розв'язати інтегральне рівняння*

$$y(x) = \cos x + \int\limits_0^x \cos(x - s) y(s)\,ds, \tag{20.11}$$

звівши його до задачі Коші для диференціального рівняння.
Розв'язання. Послідовно диференціюючи (20.11), одержуємо:

$$y'(x) = -\sin x - \int_0^x \sin(x-s)y(s)\,ds, \tag{20.12}$$

$$y''(x) = -\cos x - \int_0^x \cos(x-s)y(s)\,ds. \tag{20.13}$$

Виразивши інтеграл з рівняння (20.11):

$$\int_0^x \cos(x-s)y(s)\,ds = y(x) - \cos x$$

і підставивши його в (20.13), одержуємо:

$$y''(x) = -\cos x - (y(x) - \cos x) \quad \Rightarrow \quad y'' + y = 0.$$

Загальним розв'язком одержаного рівняння зі сталими коефіцієнтами є

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{20.14}$$

З (20.11), (20.12) знаходимо початкові умови:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

за допомогою яких з формули (20.14) легко виділяємо шуканий розв'язок $y = \cos x$. ■

Очевидно, що цей спосіб завжди приводить до мети у тому випадку, коли ядро $K(x,s)$ є многочленом за степенями $x - s$, наприклад, коли $K(x,s) = x - s$, $K(x,s) = (x-s)^2$, $K(x,s) = (x-s)^3 + 2(x-s)$ тощо.

Спосіб 2. Нехай ядро рівняння Вольтерра другого роду (20.2) є ***виродженим***, тобто має вигляд

$$K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x)q_j(s).$$

Отже, маємо інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int_a^x \left(\sum_{j=1}^{n} p_j(x) q_j(s) \right) y(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a, b]. \qquad (20.15)$$

Запишемо рівняння (20.15) інакше:

$$y(x) = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \int_a^x q_j(s) y(s)\,ds + f(x) \qquad (20.16)$$

і позначимо

$$u_1(x) = \int_a^x q_1(s) y(s)\,ds, \;\; \ldots\,, \;\; u_n(x) = \int_a^x q_n(s) y(s)\,ds. \qquad (20.17)$$

За допомогою функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ з (20.17) рівняння (20.16) можна записати у вигляді

$$y(x) = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j(x) u_j(x) + f(x). \qquad (20.18)$$

Диференціюючи співвідношення (20.17) і підставляючи замість $y(x)$ вираз (20.18), для невідомих функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} u_1' = \lambda q_1(x) \sum\limits_{j=1}^{n} p_j(x) u_j(x) + q_1(x) f(x), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_n' = \lambda q_n(x) \sum\limits_{j=1}^{n} p_j(x) u_j(x) + q_n(x) f(x). \end{cases}$$

Підставляючи в (20.17) $x = a$, знаходимо початкові умови:

$$u_1(a) = \ldots = u_n(a) = 0.$$

Визначивши з останньої системи функції $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ і підставивши їх у (20.18), одержимо розв'язок $y(x)$ інтегрального рівняння (20.15).

Приклад 4. *Розв'язати інтегральне рівняння*

$$y(x) = 2 + 3\int\limits_0^x \frac{e^s + e^{-s}}{e^x + e^{-x}} y(s)\,ds,$$

звівши його до задачі Коші для диференціального рівняння.
Розв'язання. Позначивши

$$u(x) = \int\limits_0^x (e^s + e^{-s}) y(s)\,ds, \tag{20.19}$$

задане рівняння запишемо у вигляді

$$y(x) = 2 + \frac{3u(x)}{e^x + e^{-x}}. \tag{20.20}$$

З (20.19) і (20.20) випливає, що диференціальне рівняння для знаходження $u(x)$ має вигляд:

$$u'(x) = (e^x + e^{-x})y(x) = (e^x + e^{-x})\left(2 + \frac{3u(x)}{e^x + e^{-x}}\right) \quad \Rightarrow$$
$$u' - 3u = 2(e^x + e^{-x}),$$

тобто є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку (лекція 4). Використовуючи формулу загального розв'язку (4.5), одержуємо, що

$$u = e^{\int 3\,dx}\left(\int 2(e^x + e^{-x})e^{-\int 3\,dx}dx + C\right) \quad \Rightarrow$$
$$u = e^{3x}\left(2\int (e^{-2x} + e^{-4x})\,dx + C\right) \quad \Rightarrow \quad u = Ce^{3x} - e^x - \frac{e^{-x}}{2}.$$

Оскільки з (20.19) випливає, що $u(0) = 0$, то $C = \frac{3}{2}$,

$$u = \frac{3}{2}e^{3x} - e^x - \frac{e^{-x}}{2},$$

а отже, використовуючи (20.20), одержуємо шуканий розв'язок:

$$y(x) = 2 + \frac{3}{e^x + e^{-x}} \left(\frac{3}{2} e^{3x} - e^x - \frac{e^{-x}}{2} \right) \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3e^{3x} - 2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{9e^{3x} - 2e^x + e^{-x}}{2(e^x + e^{-x})}. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [5, с. 82 – 84], [7, с. 9 – 26], [8, с. 13 – 19, 35 – 38, 110 – 113], [9, с. 306 – 314], [16, с. 481 – 482].

Питання до лекції 20

1. Яке рівняння називають інтегральним? Що називають ядром інтегрального рівняння, вільним членом? Наведіть приклади інтегральних рівнянь. Що називають розв'язком інтегрального рівняння?

2. Яке інтегральне рівняння називають лінійним? Наведіть приклади лінійних та нелінійних інтегральних рівнянь. Коли інтегральне рівняння буде першого (другого) роду?

3. Яке рівняння називають рівнянням Фредгольма, рівнянням Вольтерра?

4. Яке інтегральне рівняння називають однорідним (неоднорідним)?

5. Якому інтегральному рівнянню рівносильна задача Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?

Вправи до лекції 20

1. Доведіть, що задані функції є розв'язками інтегральних рівнянь:

$$\text{а) } y(x) = \tfrac{1}{\pi\sqrt{x}}, \quad \int\limits_0^x \tfrac{y(s)}{\sqrt{x-s}}\, ds = 1;$$

$$\text{б) } y(x) = e^{-x} - 2x, \quad y(x) = e^{-x} + 2\int\limits_0^1 x e^s y(s)\, ds.$$

2. Складіть інтегральні рівняння, які відповідають задачам Коші:

$$\text{а) } y' + 2xy = e^x, \quad y(0) = 1;$$

$$\text{б) } y'' - \sin x \cdot y' + e^x y = x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1;$$

$$\text{в) } y' = x \sin y + 2, \quad y(\pi) = \pi.$$

3. Розв'яжіть інтегральні рівняння, попередньо звівши їх до звичайних диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } y(x) = e^x + \int_0^x y(s)\,ds; \quad \text{б) } y(x) = x - 1 + 2\int_0^x (x-s)y(s)\,ds.$$

Лекція 21. Лінійні інтегральні рівняння

План

1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма.
2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерра.
3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма.
4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерра.

1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма. Принцип стискуючих відображень, який використовувався для дослідження існування розв'язків диференціальних рівнянь (лекція 6), має широке застосування й у теорії інтегральних рівнянь.

Нагадаємо спочатку принцип стискуючих відображень (лекція 6).

Теорема 1. *Якщо стискуючий оператор A відображає повний метричний простір W у себе, то існує єдина нерухома точка φ цього оператора. Її можна знайти за формулами*

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} x_n \quad (x_n = Ax_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots),$$

причому елемент x_0 у просторі W можна вибрати довільно.

Розглянемо рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \tag{21.1}$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \leqslant x \leqslant b$, а функція $K(x,s)$ (ядро) неперервна у квадраті

$$Q = \{(x,s) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant b\}.$$

Розглянемо ***інтегральний оператор Фредгольма*** (див. лекцію 6, п. 2)

$$Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds,$$

де $y \in C[a,b]$ (означення простору $C[a,b]$ наведене на лекції 6). Тоді рівняння (21.1) можна записати в операторній формі:

$$y = \lambda Ay + f \quad \Rightarrow \quad (I - \lambda A)y = f, \tag{21.2}$$

де I – одиничний оператор, тобто оператор, який кожному елементу простору ставить у відповідність цей самий елемент.

Розв'язком рівняння (21.2) називають неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $y = y(x)$, яка перетворює це рівняння у тотожність.

Якщо $\lambda = 0$, то зрозуміло, що $y(x) = f(x)$, тобто розв'язок рівняння (21.1) єдиний. Покажемо, що це рівняння має розв'язок (до того ж єдиний) і для довільних досить малих $|\lambda|$.

Нехай A – оператор, визначений формулою

$$Ay = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x).$$

Тоді рівняння (21.1) набирає вигляду $Ay = y$, а тому фактично йдеться про відшукання нерухомої точки оператора A. Дослідимо властивості цього оператора. Нехай $y \in C[a,b]$. Покажемо, що функція

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x)$$

також належить простору $C[a,b]$. Маємо оцінку:

$$|g(x+h)-g(x)| \leqslant |f(x+h)-f(x)| + \\ +|\lambda|\int_a^b |K(x+h,s)-K(x,s)|\cdot|y(s)|ds. \qquad (21.3)$$

З неперервності функцій $f(x)$ і $K(x,s)$ випливає, що

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } |h|<\delta_1,$$
$$|K(x+h,s)-K(x,s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)Y|\lambda|} \text{ для } |h|<\delta_2 \ (\forall s\in[a,b]),$$

де $Y = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)|$. Таким чином, з (21.3) одержуємо, що

$$|g(x+h)-g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ для } |h|<\min(\delta_1,\delta_2).$$

Отже, оператор A переводить простір $C[a,b]$ у себе.

З'ясуємо тепер, для яких значень $|\lambda|$ оператор A є стискуючим. Нехай $y_1\in C[a,b]$, $y_2\in C[a,b]$. Тоді

$$\rho(Ay_1,Ay_2) = \max_{x\in[a,b]}|Ay_1-Ay_2| = \\ = \max_{x\in[a,b]}\left|\lambda\int_a^b K(x,s)\big(y_1(s)-y_2(s)\big)ds\right| \leqslant \\ \leqslant |\lambda|M(b-a)\max_{x\in[a,b]}|y_1(x)-y_2(x)| = |\lambda|M(b-a)\cdot\rho(y_1,y_2),$$

де $M = \max\limits_{(x,s)\in Q}|K(x,s)|$.

Отже, якщо

$$|\lambda|M(b-a)<1,$$

тобто

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \qquad (21.4)$$

то оператор A стискуючий.

Таким чином, нами доведено таке твердження.

Теорема 2. *Для будь-якого* λ, *що задовольняє умову* (21.4), *інтегральне рівняння Фредгольма* (21.1) *з неперервним ядром і неперервним вільним членом має єдиний неперервний розв'язок* $y(x)$. *Послідовні наближення* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$ *цього розв'язку визначаються рекурентними формулами*:

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s) y_n(s)\, ds + f(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $y_1(x)$ *– довільна неперервна функція на відрізку* $[a,b]$, *причому* $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Приклад 1. *Знайти методом послідовних наближень розв'язок рівняння Фредгольма другого роду*

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^1 xs\, y(s)\, ds + 2x.$$

Розв'язання. Ядро $K(x,s) = xs$ неперервне у квадраті $0 \leqslant x, s \leqslant 1$, причому $M = \max\limits_{x,s\in[0,1]} |xs| = 1$. Згідно з (21.4) розв'язок заданого рівняння можна знайти методом послідовних наближень для $|\lambda| < 1$:

$$y_1(x) = 2x, \quad y_2(x) = \lambda \int\limits_0^1 xs \cdot 2s\, ds + 2x = \frac{2}{3}\lambda x + 2x = 2\left(1 + \frac{\lambda}{3}\right)x,$$

$$y_3(x) = \lambda \int\limits_0^1 xs \cdot \left(\frac{2}{3}\lambda + 2\right) s\, ds + 2x = 2\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2\right)x, \quad \ldots,$$

$$y_n(x) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1}\right)x, \quad \ldots$$

Використовуючи формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, одержуємо, що

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \frac{2}{1 - \frac{\lambda}{3}} x = \frac{6x}{3 - \lambda}.$$

***Відповідь*:** $y = \frac{6x}{3-\lambda}$.

2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерра. Теорема 1 (принцип стискуючих відображень) допускає низку узагальнень. Наведемо одне з таких тверджень, доведення якого можна знайти в [9, с. 315].

Теорема 3. *Нехай оператор A, що переводить метричний простір W у себе, є неперервним, причому для деякого натурального n оператор A^n є стискуючим. Тоді оператор A має єдину нерухому точку.*

Розглянемо тепер інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \tag{21.5}$$

у якому функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \leqslant x \leqslant b$, а ядро $K(x,s)$ неперервне у трикутнику

$$G = \{(x,s) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant x\}.$$

Нехай A – оператор, визначений формулою

$$Ay = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \quad y \in C[a,b].$$

Як і у п. 1, легко перевірити, що оператор A переводить простір $C[a,b]$ у себе.

Для довільних $y_1 \in C[a,b]$, $y_2 \in C[a,b]$ маємо

$$|Ay_2 - Ay_1| \leqslant |\lambda| M(x-a)\,\rho(y_2,y_1) \leqslant |\lambda| M(b-a)\,\rho(y_2,y_1),$$

де $M = \max\limits_{(x,s)\in G} |K(x,s)|$, тобто

$$\rho(Ay_2, Ay_1) \leqslant |\lambda| M(b-a)\,\rho(y_2,y_1).$$

Покажемо, що деякий степінь оператора A стискуючий. Маємо:

$$|Ay_2 - Ay_1| \leqslant (x-a)|\lambda| M \rho(y_2, y_1),$$

$$|A^2 y_2 - A^2 y_1| = \left| \lambda \int\limits_a^x K(x,s)\big(Ay_2(s) - Ay_1(s)\big) ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \rho(y_2, y_1), \ \ \ldots,$$

$$|A^n y_2 - A^n y_1| \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \rho(y_2, y_1).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\big(\lambda M(b-a)\big)^n = 0$, то для будь-якого λ число n можна вибрати настільки великим, щоб $\alpha_n = \frac{1}{n!}\big(\lambda M(b-a)\big)^n < 1$. Тоді оператор A^n буде стискуючим, адже

$$\rho\left(A^n y_2 - A^n y_1\right) \leqslant \alpha_n \rho(y_2, y_1), \quad \alpha_n < 1.$$

Виконуються всі умови теореми 3, а отже, оператор A у просторі $C[a,b]$ має єдину нерухому точку. Таким чином, справджується таке твердження.

Теорема 4. *Якщо в інтегральному рівнянні Вольтерра* (21.5) *ядро і вільний член неперервні, то воно має єдиний неперервний розв'язок* $y(x)$. *Послідовні наближення* $y_1(x)$, $y_2(x)$, … *цього розв'язку визначаються рекурентними формулами*:

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,s) y_n(s)\, ds + f(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $y_1(x)$ – *довільна функція з простору* $C[a,b]$, *причому* $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Приклад 2. *Знайти методом послідовних наближень розв'язок рівняння Вольтерра другого роду*

$$y(x) = \int\limits_0^x (s-x) y(s)\, ds + x, \quad x \in [0, \pi].$$

Розв'язання. Легко перевірити, що всі умови теореми 4 виконуються. Виберемо $y_1(x) = x$. Тоді

$$y_2(x) = \int_0^x (s - x)s\,ds + x = x - \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (s - x)\left(s - \frac{s^3}{6}\right)ds + x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \ \ldots,$$

$$y_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \ \ldots$$

Тоді

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x.$$

***Відповідь*:** $y = \sin x$.

Метод послідовних наближень можна застосовувати також до нелінійних рівнянь Вольтерра, наприклад, до рівняння

$$y(x) = \lambda \int_a^x K\big(x, s, y(s)\big)\,ds + f(x). \tag{21.6}$$

При певних умовах на функції $f(x)$ і $K\big(x, s, y(s)\big)$ послідовні наближення

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K\big(x, s, y_n(s)\big)\,ds + f(x), \ n = 1, 2, \ldots, \ y_1 \in C[a, b],$$

гарантовано збігаються до розв'язку рівняння (21.6).

3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма. Розглянемо рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)\,ds + f(x), \tag{21.7}$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \leqslant x \leqslant b$, а ядро $K(x,s)$ неперервне у квадраті Q.

Розв'язок інтегрального рівняння (21.7) шукаємо у вигляді суми степеневого ряду по λ (лекція 11):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\lambda^n = y_0(x) + y_1(x)\lambda + \ldots + y_n(x)\lambda^n + \ldots, \quad (21.8)$$

де $y_0(x)$, $y_1(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$, $\ldots$ – поки що невідомі функції. Припустимо, що ряд (21.8) рівномірно збігається на відрізку $[a,b]$. Тоді його можна почленно інтегрувати і, підставляючи у (21.7), отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x,s)y_n(s)\,ds + f(x).$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів λ, знаходимо рекурентні формули

$$y_{n+1}(x) = \int_a^b K(x,s)y_n(s)\,ds, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (21.9)$$

де $y_0(x) = f(x)$. Тепер покажемо, що функціональний ряд (21.8) рівномірно збігається на $[a,b]$.

Внаслідок неперервності функцій $K(x,s)$ і $f(x)$ випливає неперервність функцій $y_n(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, визначених формулами (21.9). Позначимо $M = \max\limits_{(x,s)\in Q} |K(x,s)|$, $N = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Тоді для всіх $x \in [a,b]$ маємо

$$|y_0(x)| = |f(x)| \leqslant N,$$

$$|y_1(x)| \leqslant \int_a^b |K(x,s)|\cdot|y_0(s)|\,ds \leqslant N\cdot M(b-a),$$

$$|y_2(x)| \leqslant \int_a^b |K(x,s)|\cdot|y_1(s)|\,ds \leqslant N\cdot[M(b-a)]^2, \ \ldots,$$

$$|y_n(x)| \leqslant \int\limits_a^b |K(x,s)|\cdot|y_{n-1}(s)|\,ds \leqslant N\cdot[M(b-a)]^n, \ \ldots$$

Звідси випливає, що функціональний ряд (21.8) має мажорантою числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Nq^n,$$

який збігається для $q = |\lambda| M(b-a) < 1$. Тоді згідно з ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд (21.8) збігається абсолютно і рівномірно для $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$ на $[a,b]$ і його сума є неперервною на $[a,b]$ функцією. Єдиність побудованого розв'язку випливає з єдиності розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду при виконанні умови (21.4) (п. 1 цієї лекції).

Формули (21.9) запишемо у вигляді

$$y_0(x) = f(x), \quad y_1(x) = \int\limits_a^b K(x,s)f(s)\,ds,$$

$$y_2(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\left(\int\limits_a^b K(t,s)f(s)\,ds\right)dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,t)K(t,s)\,dt\right)f(s)\,ds = \int\limits_a^b K_2(x,s)f(s)\,ds,$$

де

$$K_2(x,s) = \int\limits_a^b K(x,t)K(t,s)\,dt.$$

Позначимо також $K_1(x,s) = K(x,s)$. Аналогічно

$$y_3(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\left(\int\limits_a^b K_2(t,s)f(s)\,ds\right)dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)K_2(t,s)\,dt \right) f(s)\,ds = \int_a^b K_3(x,s)f(s)\,ds,$$

де

$$K_3(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_2(t,s)\,dt,$$

і так далі:

$$y_n(x) = \int_a^b K_n(x,s)f(s)\,ds,$$

де

$$K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt, \quad n = 2,3,\ldots \tag{21.10}$$

Ядра $K_n(x,s)$ називають ***ітерованими*** (***повторними***). З їх допомогою ряд (21.8) запишемо у вигляді

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x,s)f(s)\,ds. \tag{21.11}$$

Функцію

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s).$$

називають ***резольвентою*** ядра $K(x,s)$.

Розв'язок рівняння (21.7), враховуючи (21.11), можна виразити через резольвенту, а саме:

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)\,ds + f(x). \tag{21.12}$$

Приклад 3. *За допомогою ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок інтегрального рівняння*

$$y(x) = \int_0^1 \frac{x}{s^2+1} y(s)\,ds + x^2 + 1.$$

Розв'язання. Оскільки $K(x,s) = \frac{x}{s^2+1}$, то, використовуючи формули (21.10) для ітерованих ядер, одержуємо:

$$K_1(x,s) = K(x,s) = \frac{x}{s^2+1},$$

$$K_2(x,s) = \int_0^1 \frac{x}{t^2+1}\frac{t}{s^2+1}\,dt = \frac{\ln 2}{2}\frac{x}{s^2+1},$$

$$K_3(x,s) = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{x}{t^2+1}\frac{t}{s^2+1}\,dt = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 \frac{x}{s^2+1}, \quad \dots,$$

$$K_n(x,s) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^{n-1} \frac{x}{s^2+1}.$$

Якщо $\frac{\ln 2}{2}|\lambda| < 1$, тобто $|\lambda| < \frac{2}{\ln 2}$, то, використовуючи формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, знайдемо резольвенту ядра:

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln 2}{2}\lambda\right)^{n-1} \frac{x}{s^2+1} = \frac{1}{1-\frac{\ln 2}{2}\lambda} \cdot \frac{x}{s^2+1}.$$

Для заданого рівняння $\lambda = 1 < \frac{2}{\ln 2}$ і, отже, $R(x,s,1) = = \frac{2}{2-\ln 2} \cdot \frac{x}{s^2+1}$. Шуканим розв'язком на підставі (21.12) є

$$y(x) = \int_0^1 \frac{2}{2-\ln 2} \cdot \frac{x}{s^2+1}(s^2+1)\,ds + x^2 + 1 = x^2 + \frac{2x}{2-\ln 2} + 1. \quad \blacksquare$$

4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерра. Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \tag{21.13}$$

у якому функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а ядро $K(x,s)$ неперервне у трикутнику $G = \{(x,s) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant x\}$.

Як і для інтегрального рівняння Фредгольма, розв'язок рівняння (21.13) шукаємо у вигляді степеневого ряду (21.8). Формально підставивши (21.8) у (21.13), почленно зінтегрувавши і прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів λ, отримуємо рекурентні формули

$$y_{n+1}(x) = \int_a^x K(x,s)y_n(s)\,ds, \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{21.14}$$

де $y_0(x) = f(x)$.

Нехай $M = \max\limits_{(x,s)\in G} |K(x,s)|$, $N = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Тоді для всіх $x \in [a,b]$ маємо

$$|y_0(x)| = |f(x)| \leqslant N,$$

$$|y_1(x)| \leqslant \int_a^x |K(x,s)|\cdot|y_0(s)|\,ds \leqslant N\cdot M(x-a),$$

$$|y_2(x)| \leqslant \int_a^x |K(x,s)|\cdot|y_1(s)|\,ds \leqslant N\frac{M^2(x-a)^2}{2!}, \ \dots,$$

$$|y_n(x)| \leqslant \int_a^x |K(x,s)|\cdot|y_{n-1}(s)|\,ds \leqslant N\frac{M^n(x-a)^n}{n!}, \ \dots$$

З цих оцінок випливає, що

$$|y_n(x)| \leqslant N\frac{M^n(b-a)^n}{n!},$$

а тому функціональний ряд (21.8) мажорується числовим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} N\frac{q^n}{n!}, \tag{21.15}$$

де $q = |\lambda|M(b-a)$. Згідно з ознакою Д'Аламбера ряд (21.15) збігається для всіх λ, а тому ряд (21.8) збігається рівномірно на $[a,b]$ для всіх λ, а його сума є неперервною на $[a,b]$ функцією.

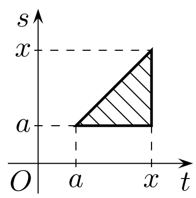

Рис. 21.1

Змінивши порядок інтегрування (рис. 21.1), формули (21.14) можна записати у вигляді

$$y_0(x) = f(x), \quad y_1(x) = \int_a^x K(x,s)f(s)\,ds,$$

$$y_2(x) = \int_a^x K(x,t)\left(\int_a^t K(t,s)f(s)\,ds\right)dt =$$

$$= \int_a^x \left(\int_s^x K(x,t)K(t,s)\,dt\right) f(s)\,ds = \int_a^x K_2(x,s)f(s)\,ds,$$

де

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)K(t,s)\,dt,$$

і так далі:

$$y_n(x) = \int_a^x K_n(x,s)f(s)\,ds,$$

де

$$K_n(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt, \quad n = 2,3,\ldots \tag{21.16}$$

Позначимо також $K_1(x,s) = K(x,s)$. Ядра $K_n(x,s)$ називають ***ітерованими*** (***повторними***). З їх допомогою ряд (21.8) запишемо у вигляді

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^x K_n(x, s) f(s)\, ds. \tag{21.17}$$

Функцію

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s). \tag{21.18}$$

називають ***резольвентою*** ядра $K(x, s)$.

Розв'язок рівняння (21.13), враховуючи (21.17), можна виразити через резольвенту, а саме:

$$y(x) = \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s)\, ds + f(x). \tag{21.19}$$

Приклад 4. *За допомогою ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок інтегрального рівняння*

$$y(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x x y(s)\, ds.$$

Розв'язання. З рекурентних співвідношень (21.16) одержуємо:

$$K_1(x, s) = x, \quad K_2(x, s) = \int_s^x xt\, dt = x \cdot \frac{x^2 - s^2}{2},$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x xt \frac{t^2 - s^2}{2}\, dt = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^2, \ \ldots,$$

$$K_n(x, s) = \frac{x}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Використовуючи формулу (21.18), знайдемо резольвенту

$$R(x, s, \lambda) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\lambda \frac{x^2 - s^2}{2} \right)^{n-1} = x\, e^{\lambda \frac{x^2 - s^2}{2}}.$$

Знайдемо тепер розв'язок заданого рівняння за формулою (21.19). Оскільки $f(x) = x$ і $\lambda = -1/2$, то

$$y(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^x xs\,e^{-\frac{x^2-s^2}{4}}\,ds = x - xe^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x d\left(e^{s^2/4}\right) =$$
$$= xe^{-\frac{x^2}{4}}\left(e^{\frac{x^2}{4}} - 1\right) = x\left(1 - e^{-\frac{x^2}{4}}\right).$$

***Відповідь*:** $y = x\left(1 - e^{-\frac{x^2}{4}}\right)$.

Рекомендована література: [7, с. 63 – 115], [8, с. 20 – 26, 45 – 55, 165 – 173], [9, с. 314 – 327, 338 – 357].

Питання до лекції 21

1. У чому полягає метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма другого роду? За якими рекурентними формулами можна знайти послідовні наближення розв'язку цього рівняння?

2. У чому полягає метод послідовних наближень для рівняння Вольтерра другого роду? За якими формулами можна знайти послідовні наближення розв'язку цього рівняння?

3. За якими формулами будуються ітеровані ядра для рівняння Фредгольма другого роду? Як за їх допомогою записати розв'язок цього рівняння у вигляді функціонального ряду?

4. Що називають резольвентою ядра інтегрального рівняння Фредгольма другого роду? Як за допомогою резольвенти можна виразити розв'язок цього рівняння?

5. Що називають резольвентою ядра інтегрального рівняння Вольтерра другого роду? Як за допомогою резольвенти можна виразити розв'язок цього рівняння?

Вправи до лекції 21

1. Розв'яжіть інтегральні рівняння Фредгольма методом послідовних наближень:

а) $y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 y(s)\,ds + \sin(\pi x)$; б) $y(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 s \cdot y(s)\,ds - 1$.

2. Розв'яжіть інтегральні рівняння Вольтерра методом послідовних наближень:

$$\text{а) } y(x) = \int\limits_0^x xy(s)\,ds + 1 - x^2, \quad y_0(x) = 1 - x^2;$$

$$\text{б) } y(x) = \int\limits_0^x y(s)\,ds - \frac{x^2}{2} - x, \quad y_0(x) = -1.$$

3. Розв'яжіть інтегральні рівняння Фредгольма методом ітерованих ядер:

$$\text{а) } y(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi y(s)\,ds + \sin x; \quad \text{б) } y(x) = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^s y(s)\,ds + e^{-x}.$$

4. Розв'яжіть інтегральні рівняння Вольтерра методом ітерованих ядер:

$$\text{а) } y(x) = \int\limits_0^x sy(s)\,ds - 1; \quad \text{б) } y(x) = \int\limits_0^x xsy(s)\,ds + x.$$

Лекція 22. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння першого роду

План

1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття.

2. Теореми Фредгольма.

3. Інтегральні рівняння Фредгольма і Вольтерра першого роду.

1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{22.1}$$

ядро якого є скінченною сумою добутків двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша – тільки від s, тобто

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)Q_i(s). \tag{22.2}$$

Ядро вигляду (22.2) називають ***виродженим***.

Вважаємо, що функції $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а також $Q_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, лінійно незалежні на відрізку $[a, b]$. Якщо це не так, то кожну з цих функцій можна подати у вигляді лінійної комбінації меншої кількості лінійно незалежних функцій, а отже, ядро (22.2) запишеться за допомогою меншої кількості доданків. Припустимо також, що $P_i \in C[a, b]$, $Q_i \in C[a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді ядро (22.2), очевидно, неперервне у квадраті $Q = \{(x, s) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant b\}$. Інтегральні рівняння такого вигляду вдається повністю дослідити, користуючись лише засобами лінійної алгебри.

Підставляючи (22.2) у рівняння (22.1), одержуємо

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b Q_i(s)y(s)\,ds + f(x). \tag{22.3}$$

Нехай інтегральне рівняння (22.3) має розв'язок $y(x)$, неперервний на відрізку $[a, b]$. Позначимо

$$q_i = \int_a^b Q_i(s)y(s)\,ds, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{22.4}$$

Тоді рівняння (22.3) можемо записати у вигляді

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) + f(x). \tag{22.5}$$

Для знаходження невідомих чисел q_i підставимо (22.5) в (22.4).

Будемо мати:

$$q_i = \int\limits_a^b Q_i(s)y(s)\,ds = \int\limits_a^b \left(\lambda \sum_{j=1}^n q_j P_j(s) + f(s)\right) Q_i(s)\,ds =$$
$$= \lambda \sum_{j=1}^n q_j \int\limits_a^b P_j(s)Q_i(s)\,ds + \int\limits_a^b f(s)Q_i(s)\,ds.$$

Позначимо

$$k_{ij} = \int\limits_a^b P_j(s)Q_i(s)\,ds, \quad f_i = \int\limits_a^b f(s)Q_i(s)\,ds, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді для знаходження невідомих q_i одержуємо систему лінійних неоднорідних алгебричних рівнянь:

$$q_i - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{22.6}$$

Якщо система (22.6) несумісна, то, очевидно, інтегральне рівняння (22.3) розв'язків не має. Якщо система (22.6) має розв'язок q_1, q_2, …, q_n, то підставивши його в (22.5), знайдемо неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію $y(x)$ – розв'язок інтегрального рівняння (22.3) (у цьому легко переконатися за допомогою підстановки).

Таким чином, розв'язування інтегрального рівняння (22.1) з виродженим ядром зводиться до розв'язування відповідної системи (22.6) лінійних алгебричних рівнянь.

Позначимо визначник системи (22.6) через $D(\lambda)$:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix}. \tag{22.7}$$

Визначник $D(\lambda)$ називають ***визначником Фредгольма*** для рівняння (22.3), а його нулі, тобто корені рівняння $D(\lambda) = 0$ –

характеристичними числами ядра $K(x, s)$ (або рівняння (22.3)). Очевидно, що визначник $D(\lambda)$ тотожно відмінний від нуля, бо $D(0) = 1$.

2. Теореми Фредгольма. Оскільки визначник $D(\lambda)$, визначений формулою (22.7), є многочленом відносно параметра λ степеня не вище n, то згідно з основною теоремою алгебри рівняння $D(\lambda) = 0$ має не більше, ніж n різних коренів.

Розглянемо окремі випадки.

Випадок 1. Нехай $D(\lambda) \neq 0$, тобто число λ не є характеристичним. Тоді система (22.6) однозначно розв'язна для довільних правих частин f_i. Розв'язок цієї системи знаходимо, наприклад, за формулами Крамера:

$$q_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{22.8}$$

де $D_i(\lambda)$ – визначник, утворений з визначника (22.7) заміною i-го стовпця на стовпець правих частин f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким чином, доведене таке твердження.

Теорема 1 (перша теорема Фредгольма). *Якщо λ не є характеристичним числом ядра $K(x, s)$, то для довільної неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ рівняння* (22.3) *має єдиний неперервний на відрізку $[a, b]$ розв'язок $y(x)$, визначений формулою* (22.5).

Оскільки $D(\lambda) \neq 0$, то відповідне інтегральному рівнянню (22.3) однорідне рівняння

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b Q_i(s) y(s)\, ds \tag{22.9}$$

має тільки тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$. Справді, якщо на відрізку $[a, b]$ $f(x) \equiv 0$, то

$$f_i = \int_a^b f(s) Q_i(s)\, ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

і система лінійних рівнянь (22.6) є однорідною. Як відомо, однорідна система лінійних рівнянь з відмінним від нуля визначником має тільки тривіальний розв'язок. Отже, $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, а тому з (22.5) випливає, що $y(x) \equiv 0$. Таким чином, теорему 1 можна сформулювати інакше: *для того, щоб рівняння* (22.3) *з довільною неперервною на відрізку* $[a, b]$ *функцією* $f(x)$ *мало єдиний неперервний на відрізку* $[a, b]$ *розв'язок* $y(x)$, *необхідно і достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння* (22.9) *мало тільки тривіальний розв'язок.*

Приклад 1. *Розв'язати інтегральне рівняння*

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (5x - 3s)y(s)\,ds + 1.$$

Розв'язання. Оскільки

$$K(x, s) = 5x - 3s = P_1(x)Q_1(s) + P_2(x)Q_2(s),$$

де $P_1(x) = 5x$, $P_2(x) = -3$, $Q_1(s) = 1$, $Q_2(s) = s$, то задане рівняння запишемо у вигляді

$$y(x) = \lambda \int_0^1 P_1(x)Q_1(s)y(s)\,ds + \lambda \int_0^1 P_2(x)Q_2(s)y(s)\,ds + 1 = \\ = 5\lambda x p_1 - 3\lambda p_2 + 1, \tag{22.10}$$

де

$$p_1 = \int_0^1 y(s)\,ds, \quad p_2 = \int_0^1 s y(s)\,ds. \tag{22.11}$$

Підставляючи (22.10) в (22.11) та обчислюючи інтеграли, для знаходження p_1, p_2 одержуємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 = \int\limits_0^1 (5\lambda p_1 s - 3\lambda p_2 + 1)\,ds = \frac{5\lambda}{2}p_1 - 3\lambda p_2 + 1, \\ p_2 = \int\limits_0^1 (5\lambda p_1 s^2 - 3\lambda p_2 s + s)\,ds = \frac{5\lambda}{3}p_1 - \frac{3}{2}\lambda p_2 + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{5\lambda}{2}\right) p_1 + 3\lambda p_2 = 1, \\ \frac{5\lambda}{3} p_1 - \left(1 + \frac{3\lambda}{2}\right) p_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Визначником одержаної системи є

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{5\lambda}{2} & 3\lambda \\ \frac{5\lambda}{3} & -1 - \frac{3\lambda}{2} \end{vmatrix} = \frac{-5\,\lambda^2 + 4\lambda - 4}{4}.$$

Очевидно, що $D(\lambda) \neq 0$ для довільного дійсного λ, а тому за формулами Крамера знаходимо p_1 і p_2:

$$p_1 = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ -1/2 & -1 - 3\lambda/2 \end{vmatrix} = \frac{4}{5\lambda^2 - 4\lambda + 4},$$

$$p_2 = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - 5\lambda/2 & 1 \\ 5\lambda/3 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{5\lambda + 6}{3(5\lambda^2 - 4\lambda + 4)}.$$

Підставляючи знайдені p_1, p_2 у (22.10), після нескладних перетворень одержуємо шуканий розв'язок:

$$y(x) = \frac{20\lambda x - 10\lambda + 4}{5\lambda^2 - 4\lambda + 4}. \quad \blacksquare$$

Використовуючи формули (22.8), знайдемо розв'язок інтегрального рівняння (22.3). Для цього кожен визначник $D_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, у (22.8) розкладемо за елементами i-го стовпця правих частин:

$$D_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) f_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{22.12}$$

де $D_{ik}(\lambda)$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, – алгебричні доповнення, які є многочленами відносно λ степеня, не вищого, ніж $n - 1$. Враховуючи (22.12), з (22.8) маємо

$$q_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) f_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Підставляючи ці значення у формулу (22.5), одержуємо

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) f_k + f(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) \int_a^b f(s) Q_k(s)\, ds + f(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) P_i(x) Q_k(s) f(s) \right) ds + f(x)$$

або

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s)\, ds + f(x),$$

де

$$R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) P_i(x) Q_k(s). \qquad (22.13)$$

Функцію $R(x, s, \lambda)$, визначену формулою (22.13), називають ***резольвентою інтегрального рівняння*** (22.3) або ***резольвентою ядра*** (22.2). Очевидно, що для фіксованих x, s резольвента (22.13) є дробово-раціональною функцією від параметра λ. Для всіх значень λ, відмінних від характеристичних чисел ядра $K(x, s)$, функція $R(x, s, \lambda)$ є неперервною у квадраті Q.

Випадок 2. Нехай $D(\lambda) = 0$, тобто λ є характеристичним числом ядра $K(x, s)$. Тоді, як відомо з алгебри, однорідна система, відповідна системі (22.6), має p, $p \leqslant n$, лінійно незалежних сукупностей розв'язків:

$$q_1^{(l)}, q_2^{(l)}, \ldots, q_n^{(l)}, \quad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Функції

$$y_l(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i^{(l)} P_i(x), \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$

а також їх довільні комбінації є розв'язками однорідного рівняння (22.9). Нетривіальні розв'язки рівняння (22.9) називають ***власними функціями*** цього рівняння (або його ядра), які відповідають дійсному характеристичному числу. Число p називають ***рангом*** (***кратністю***) характеристичного числа.

Можна показати, що множина всіх власних функцій, які відповідають певному характеристичному числу, утворює лінійний простір вимірності p, базисом якого є сукупність функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_p(x)$. Тоді довільний розв'язок однорідного рівняння (22.9) можна записати у вигляді

$$y(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j y_j(x), \tag{22.14}$$

де α_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, – деякі сталі. Співвідношення (22.14) називають ***загальним розв'язком*** однорідного інтегрального рівняння (22.9).

Ядро $K^*(x,s)$ називають ***спряженим*** до ядра $K(x,s)$, якщо

$$K^*(x,s) = \overline{K(s,x)},$$

де риска означає комплексне спряження. Якщо $K(x,s)$ – дійснозначна функція, то $K^*(x,s) = K(s,x)$.

Інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \bar{\lambda} \int_a^b K^*(x,s)\varphi(s)\,ds + g(x)$$

називають ***спряженим*** до інтегрального рівняння (22.1).

Заради спрощення надалі будемо вважати, що ядро $K(x,s)$ і параметр λ – дійсні. Для інтегрального рівняння (22.3) з виродженим ядром спряженим до нього є рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} Q_i(x) \int_a^b P_i(s)\varphi(s)\,ds + g(x).$$

Якщо $g(x) = 0$, то спряженим до (22.9) інтегральним рівнянням є рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} Q_i(x) \int_a^b P_i(s)\varphi(s)\,ds, \tag{22.15}$$

а його розв'язок можна записати як

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i Q_i(x),$$

де сталі $\tilde{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, визначаються з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\tilde{q}_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ji}\tilde{q}_j = 0, \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{22.16}$$

Систему (22.16) називають ***спряженою*** до системи (22.6), а її матриця є транспонованою до матриці системи (22.6). Системи (22.6) і (22.16) мають p лінійно незалежних сукупностей розв'язків. Базисом простору розв'язків рівняння (22.15) є система функцій

$$\varphi_l(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i^{(l)} Q_i(x), \quad l = 1, 2, \ldots, p, \tag{22.17}$$

де $\tilde{q}_1^{(l)}$, $\tilde{q}_2^{(l)}$, $\ldots$, $\tilde{q}_n^{(l)}$, $l = 1, 2, \ldots, p$, – базис простору розв'язків системи (22.16).

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 2 (друга теорема Фредгольма). *Якщо* λ *є характеристичним числом рівняння* (22.3) *з виродженим ядром* $K(x, s)$, *то однорідне інтегральне рівняння* (22.9) *і спряжене до нього рівняння* (22.15) *мають однакову кількість лінійно незалежних власних функцій.*

Нехай тепер λ – характеристичне число ядра $K(x, s)$ рангу p. Розглянемо неоднорідне інтегральне рівняння (22.3). Якщо це рівняння має розв'язок, то його можна записати у вигляді (22.5).

Як відомо з алгебри, для сумісності системи рівнянь (22.6) необхідно і достатньо, щоб вектор $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ вільних членів був ортогональним до підпростору розв'язків спряженої однорідної системи. Це означає, що вектор $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ має бути ортогональним до кожного з p базисних векторів $\left(\tilde{q}_1^{(l)}, \tilde{q}_2^{(l)}, \ldots, \tilde{q}_n^{(l)}\right)$, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \, \tilde{q}_i^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Оскільки $f_i = \int_a^b f(s) Q_i(s)\, ds$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то, враховуючи (22.17), маємо

$$\int_a^b f(x) \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i^{(l)} Q_i(x)\, dx = \int_a^b f(x) \varphi_l(x)\, dx = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 3 (третя теорема Фредгольма). *Якщо λ є характеристичним числом, то неоднорідне інтегральне рівняння* (22.3) *з виродженим ядром $K(x, s)$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли вільний член $f(x)$ ортогональний до всіх розв'язків спряженого однорідного рівняння* (22.15).

Таким чином, якщо число λ є характеристичним, то питання про існування розв'язку неоднорідного інтегрального рівняння (22.3) зводиться до перевірки p умов ортогональності:

$$\int_a^b f(x) \varphi_l(x)\, dx = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Ці умови називають ще ***умовами розв'язності*** рівняння (22.3). Якщо вони справджуються, то інтегральне рівняння має безліч розв'язків, які можна описати формулою

$$y(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i(x) + \tilde{y}(x),$$

де перший доданок – загальний розв'язок однорідного рівняння (22.9), а другий – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (22.3).

Приклад 2. *Розв'язати інтегральне рівняння*

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x-s) y(s)\, ds + x.$$

Розв'язання. Оскільки $\sin(x-s) = \sin x \cos s - \sin s \cos x$, то маємо інтегральне рівняння з виродженим ядром. Тоді

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s \cdot y(s)\, ds - \lambda \int_0^{2\pi} \sin s \cos x \cdot y(s)\, ds + x =$$

$$= \lambda p_1 \sin x - \lambda p_2 \cos x + x, \qquad (22.18)$$

де

$$p_1 = \int_0^{2\pi} \cos s \cdot y(s)\, ds, \quad p_2 = \int_0^{2\pi} \sin s \cdot y(s)\, ds. \qquad (22.19)$$

Підставляючи функцію $y(x)$, визначену формулою (22.18), у (22.19), та обчислюючи інтеграли, одержуємо систему відносно p_1 і p_2:

$$p_1 = \int_0^{2\pi} \cos s\, (\lambda p_1 \sin s - \lambda p_2 \cos s + s)\, ds =$$

$$= \lambda p_1 \int_0^{2\pi} \cos s \sin s\, ds - \lambda p_2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s\, ds + \int_0^{2\pi} s \cos s\, ds = -\lambda p_2 \pi;$$

$$p_2 = \int_0^{2\pi} \sin s\, (\lambda p_1 \sin s - \lambda p_2 \cos s + s)\, ds =$$

$$= \lambda p_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 s\, ds - \lambda p_2 \int_0^{2\pi} \sin s \cos s\, ds + \int_0^{2\pi} s \sin s\, ds = \lambda p_1 \pi - 2\pi.$$

Отже,

$$\begin{cases} p_1 + \lambda\pi p_2 = 0, \\ -\lambda\pi p_1 + p_2 = -2\pi. \end{cases}$$

Визначником цієї системи є $D(\lambda) = (\lambda\pi)^2 + 1$. Оскільки $D(\lambda) \neq 0$ для всіх дійсних λ, то неоднорідна система має єдиний розв'язок:

$$p_1 = \frac{2\pi^2\lambda}{(\lambda\pi)^2 + 1}, \quad p_2 = -\frac{2\pi}{(\lambda\pi)^2 + 1}.$$

Тоді з (22.18) знаходимо шуканий розв'язок:

$$y(x) = \frac{2\pi^2\lambda^2}{(\lambda\pi)^2 + 1}\sin x + \frac{2\pi\lambda}{(\lambda\pi)^2 + 1}\cos x + x. \ \blacksquare$$

Наслідком теорем 1 – 3 є таке твердження.

Теорема 4 (альтернатива Фредгольма). *Якщо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має лише тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння має єдиний розв'язок.*

Якщо однорідне рівняння має нетривіальні розв'язки, то відповідне неоднорідне рівняння залежно від вільного члена або не має розв'язків, або має безліч розв'язків.

Зауважимо, що теореми 1 – 4 справджуються не тільки для виродженого, але й для довільного неперервного ядра відповідного інтегрального рівняння.

3. Інтегральні рівняння Фредгольма і Вольтерра першого роду. Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x),$$

взагалі кажучи, не має розв'язку для довільної правої частини $f(x)$, а якщо розв'язок існує, він може бути неєдиним. Наприклад, розв'язком інтегрального рівняння

$$\int_0^1 y(s)\,ds = 1$$

є кожна з функцій $y(x) = \alpha x + \beta$, де α, β – будь-які дійсні числа, які задовольняють умову $\alpha + 2\beta = 2$ (у цьому можна переконатись безпосередньою підстановкою), а рівняння

$$\int\limits_0^1 y(s)\,ds = 1 + x^2,$$

очевидно, взагалі не має розв'язків.

Таким чином, розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма першого роду – некоректна задача. Для розв'язування таких задач використовують спеціальні методи, вивчення яких виходить за рамки цього посібника.

Оскільки інтегральні рівняння Вольтерра першого роду є окремим випадком рівнянь Фредгольма, все сказане вище про рівняння Фредгольма першого роду залишається правильним і для рівнянь Вольтерра. Але у багатьох випадках інтегральні рівняння Вольтерра першого роду легко розв'язуються.

Розглянемо, наприклад, інтегральне рівняння Вольтерра першого роду

$$\int\limits_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \tag{22.20}$$

де $f(a) = 0$, і припустимо, що функції $K(x,s)$, $\frac{\partial K(x,s)}{\partial x}$, $f(x)$, $f'(x)$ неперервні у трикутнику

$$G = \{(x,s) : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant x\}.$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (22.20) за змінною x, одержуємо

$$K(x,x)y(x) + \int\limits_a^x \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} y(s)\,ds = f'(x). \tag{22.21}$$

Будь-який неперервний при $a \leqslant x \leqslant b$ розв'язок $y(x)$ рівняння (22.21) є, очевидно, й розв'язком рівняння (22.20). Навпаки, кожен неперервний розв'язок рівняння (22.20) при $a \leqslant x \leqslant b$ задовольняє також рівняння (22.21).

Якщо $K(x,x)$ не перетворюється в нуль у жодній точці відрізку $[a,b]$, то рівняння (22.21) можемо записати у вигляді

$$y(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)} y(s)\,ds,$$

тобто воно зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, яке розглядалось на лекціях 20, 21.

Якщо $K(x,x)$ перетворюється в нуль у деякій точці відрізка $[a,b]$, то рівняння (22.21) володіє особливими властивостями, відмінними від властивостей рівнянь Вольтерра другого роду. Такі рівняння іноді називають рівняннями третього роду.

Якщо $K(x,x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$, існують неперервні другі похідні ядра та функції $f(x)$ за змінною x і виконується умова $f'(a) = 0$, то можна ще раз здиференціювати рівняння (22.21) за змінною x. Тоді одержуємо рівняння

$$K'_x(x,x)y(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 K(x,s)}{\partial x^2} y(s)\,ds = f''(x),$$

яке, якщо $K'_x(x,x) \neq 0$ на відрізку $[a,b]$, після ділення на $K'_x(x,x)$ зводиться до інтегрального рівняння другого роду.

Приклад 3. *Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду*

$$\int_0^x (x+s+1)y(s)\,ds = x.$$

Розв'язання. Здиференціюємо рівняння за змінною x:

$$(2x+1)y(x) + \int_0^x y(s)\,ds = 1. \qquad (22.22)$$

Оскільки $2x + 1 \neq 0$ для $x \geqslant 0$, то після ділення на $2x + 1$ отримуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = -\int_0^x \frac{1}{2x+1} y(s)\,ds + \frac{1}{2x+1}. \tag{22.23}$$

Розв'яжемо рівняння (22.23), звівши його попередньо до звичайного диференціального рівняння (лекція 20). Для цього його спочатку здиференціюємо за змінною x:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{2x+1} + \frac{2}{(2x+1)^2}\int_0^x y(s)\,ds - \frac{2}{(2x+1)^2}. \tag{22.24}$$

З (22.22) виразимо інтеграл

$$\int_0^x y(s)\,ds = 1 - (2x+1)y(x)$$

і, підставивши його в рівняння (22.24), після нескладних перетворень отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = -\frac{3y}{2x+1}. \tag{22.25}$$

Крім того, з (22.23) маємо початкову умову $y(0) = 1$.

Загальним розв'язком рівняння (22.25) є

$$y = \frac{C}{\sqrt{(2x+1)^3}},$$

а враховуючи початкову умову $y(0) = 1$, отримуємо частинний розв'язок цього рівняння:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}},$$

який є також розв'язком заданого інтегрального рівняння.

Відповідь: $y = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$.

Якщо ядро інтегрального рівняння залежить лише від x чи від s (або є добутком таких функцій), $K(x,x) \neq 0$ на відрізку $[a,b]$, $f(a) = 0$, то інтегральне рівняння Вольтерра першого роду (22.20) вдається розв'язати ще простіше.

Приклад 4. *Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду*

$$\int\limits_0^x (x+1)y(s)\,ds = x.$$

Розв'язання. Оскільки $x + 1 \neq 0$ для $x \geqslant 0$, то

$$\int\limits_0^x y(s)\,ds = \frac{x}{x+1}.$$

Здиференціювавши обидві частини за змінною x, одержуємо

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}. \;\blacksquare$$

Рекомендована література: [7, с. 27 – 51, 225 – 243], [8, с. 56 – 79, 87 – 95, 139 – 156], [9, с. 327 – 337], [16, с. 482 – 483].

Питання до лекції 22

1. Яке ядро інтегрального рівняння називають виродженим? До якої системи зводиться розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром?

2. Який вигляд має визначник Фредгольма? Що таке характеристичні числа ядра? Що називають власними функціями ядра? Що таке ранг характеристичного числа? Яке ядро називають спряженим?

3. Коли інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має єдиний розв'язок? Сформулюйте теореми Фредгольма. У чому полягає альтернатива Фредгольма?

4. Чи завжди інтегральне рівняння Фредгольма чи Вольтерра має єдиний розв'язок? Наведіть приклади.

5. Як можна розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду (22.20), якщо $f(a) = 0$?

Вправи до лекції 22

1. Розв'яжіть інтегральні рівняння Фредгольма з виродженими ядрами:

$$\text{а) } y(x) = 3 + 2\int_0^1 (x+s)y(s)\,ds; \quad \text{б) } y(x) = \lambda\int_0^\pi \sin(x+s)y(s)\,ds + 4x.$$

2. Розв'яжіть інтегральні рівняння Вольтерра першого роду:

$$\text{а) } \int_0^x (x+5)(s^2+1)y(s)\,ds = 3x^2; \quad \text{б) } \int_0^x (xs+1)y(s)\,ds = 2x.$$

Розділ 7. ОСНОВИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Лекція 23. Простіші варіаційні задачі

План

1. Предмет варіаційного числення. Класичні варіаційні задачі.
2. Основі означення й поняття варіаційного числення.
3. Найпростіша задача варіаційного числення.

1. Предмет варіаційного числення. Класичні варіаційні задачі. У курсі математичного аналізу вивчались задачі на знаходження найбільших та найменших значень функцій однієї та більшої кількості змінних. Однак у багатьох задачах фізики виникає необхідність знайти найбільші чи найменші значення не функцій, а величин особливого роду, які називають функціоналами.

Нехай M – деяка множина функцій. Якщо кожній функції цієї множини можна поставити у відповідність деяке дійсне число, то кажуть, що на множині M задано ***функціонал***. Таким чином, можна сказати, що функціонали – це функції, у яких незалежною змінною є криві або інші функції.

Наприклад, кожній спрямлюваній кривій[1)] площини або простору можна поставити у відповідність певне число – її довжину. Отже, довжина кривої – це функціонал, визначений на множині спрямлюваних кривих. Функціоналами є також координати центру ваги, моменти інерції, статичні моменти деякої однорідної кривої або поверхні, бо їх значення визначаються вибором кривої або поверхні, тобто вибором функцій, які входять у рівняння кривої чи поверхні. Взагалі, функціоналом є кожний визначений

[1)] Спрямлюваною називають криву, для якої довжина будь-якої вписаної ламаної з вершинами у послідовних точках кривої (від одного кінця до іншого) є скінченною.

інтеграл. Функціонали інтегрального типу зустрічаються у багатьох задачах математики, класичної механіки, математичної фізики, механіки суцільних середовищ і в інших розділах науки.

Основною задачею ***варіаційного числення*** є дослідження функціоналів на екстремум (максимум або мінімум) і відшукання тих функцій, на яких цей екстремум досягається. Задачі, у яких функціонали досліджується на екстремум, називають ***варіаційними***.

Багато законів фізики зводяться до твердження, що деякий функціонал повинен досягати свого екстремуму. Ці закони називають ***варіаційними принципами*** фізики. До варіаційних принципів чи наслідків з них, наприклад, належать закон збереження енергії, закон збереження імпульсу, закон збереження кількості руху, принцип Ферма в оптиці тощо.

Великий вплив на розвиток варіаційного числення мали такі три задачі.

Задача 1 (ізопериметрична задача). *Знайти криву заданої довжини L, яка обмежує на площині фігуру найбільшої площі.*

Заради спрощення розглянемо задачу у дещо вужчій постановці. Припустимо, що фігура має такий вигляд, як на рис. 23.1, а L – це довжина криволінійної частини фігури. Припустимо також, що криволінійна частина є графіком неперервно диференційовної функції $y = y(x)$, визначеної на відрізку $[a, b]$. При цьому, очевидно,

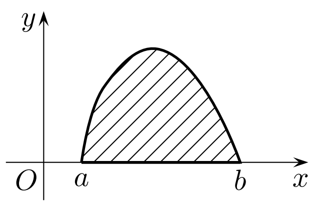

Рис. 23.1

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{23.1}$$

З математичного аналізу відомо, що довжина L криволінійної частини межі обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx, \tag{23.2}$$

а площа відповідної фігури – за формулою

$$S(y) = \int_a^b y(x)\,dx. \tag{23.3}$$

Отже, задача звелася до знаходження неперервно диференційовної функції $y(x)$, яка задовольняє умови (23.1), (23.2) (L – фіксоване) і для якої функціонал (23.3) набуває найбільшого значення.

Задачі такого роду розв'язували ще у Давній Греції. Наприклад, Архімед встановив, що з усіх замкнених кривих, довжини яких дорівнюють деякому заданому значенню, коло охоплює найбільшу площу, а з усіх замкнених кривих, які охоплюють задану площу, коло має найменшу довжину.

У 1696 році Й. Бернуллі сформулював наступну задачу.

Задача 2 (задача про брахістохрону). *У вертикальній площині знайти криву, що з'єднує задані дві точки O і A, рухаючись по якій матеріальна точка під дією сили тяжіння скотиться з точки O в точку A за найкоротший час.*

Зрозуміло, що важливим є той випадок, коли точки $O(0,0)$ і $A(a,b)$ не лежать на вертикальній прямій (рис. 23.2). Нехай $M(x,y)$ – довільна точка кривої. У порівнянні з початком координат потенціальна енергію точки $M(x,y)$ зменшиться на mgy (m – маса точки, g – прискорення вільного падіння), а кінетична енергія – збільшиться на $mv^2/2$. Згідно з законом збереження енергії

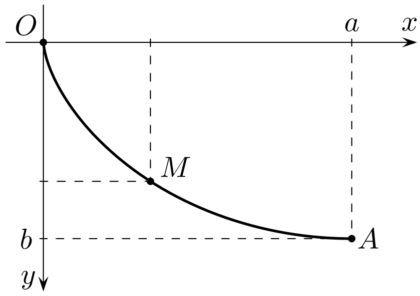

Рис. 23.2

$$mv^2/2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Вважаючи, що траєкторією руху точки є крива $y = y(x)$, причому $y(x)$ – диференційовна на відрізку $[0, a]$ функція, одержуємо

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}\, dx}{dt},$$

де ds – диференціал довжини дуги кривої. Тому

$$\sqrt{2gy}dt = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx. \tag{23.4}$$

З диференціального рівняння (23.4) знаходимо час, необхідний для того, щоб матеріальна точка спустилась з точки O до точки A:

$$t(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^a \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}\, dx. \tag{23.5}$$

Знаючи координати початкової та кінцевої точок траєкторії, одержуємо крайові умови для функції $y(x)$:

$$y(0) = 0, \qquad y(a) = b. \tag{23.6}$$

Таким чином, задача про брахістохрону звелася до дослідження на мінімум функціонала (23.5), який задовольняє крайові умови (23.6).

Задача 3 (задача про геодезичні лінії). *На поверхні, яка у прямокутній системі координат $Oxyz$ задана рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$, знайти криву найменшої довжини, що з'єднує дві точки A і B цієї поверхні* (*рис.* 23.3).

Геодезичними лініями деякої поверхні називають найкоротші за довжиною лінії, що лежать на поверхні і з'єднують дві точки цієї

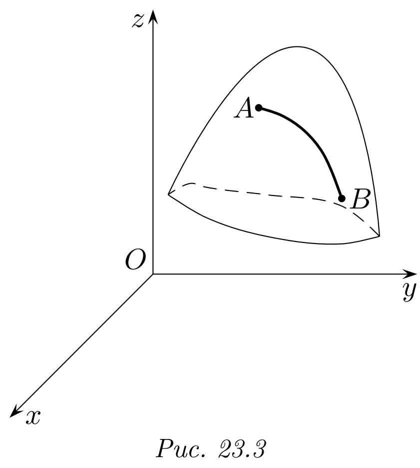

Рис. 23.3

поверхні. Наприклад, геодезичними лініями площини є прямі, а геодезичними лініями сфери – дуги великого кола.

Припустимо, що поверхня $\varphi(x, y, z) = 0$ є гладкою, а шукана крива задана рівняннями $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x \in [a, b]$, де $y = y(x)$ і $z = z(x)$ – диференційовні функції. Тоді з використанням криволінійного інтеграла першого роду довжина L кривої між заданими точками дорівнює:

$$L(y, z) = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx. \qquad (23.7)$$

Отже, задачу вдалось звести до знаходження таких гладких на відрізку $[a, b]$ функцій $y = y(x)$, $z = z(x)$, що

$$\varphi\big(x, y(x), z(x)\big) \equiv 0, \;\; y(a) = y_0, \; y(b) = y_1, \;\; z(a) = z_0, \; z(b) = z_1,$$

а функціонал (23.7) набуває мінімального значення.

Зауважимо, що (23.7) – це функціонал, який залежить від двох функцій. Детальніше такі функціонали вивчатимуться на лекції 24.

2. Основі означення й поняття варіаційного числення. Як вже зазначалось, функціонал є узагальненням поняття функції. Функція однієї змінної ставить у відповідність за певним правилом одному числу x інше число y, функція декількох змінних ставить у відповідність скінченній сукупності чисел x_1, x_2, …, x_n число y. Функціонал ставить у відповідність функції $y = y(x)$ (нескінченній кількості її значень) деяке число J. У цьому випадку функціонал позначатимемо $J[y]$.

Множину функцій $y = y(x)$, на якій визначений функціонал $J[y]$, називають ***областю визначення*** функціонала, а число J – ***значенням*** функціонала. Часто аргумент функціонала – функцію $y(x)$ – як елемент деякого простору називають ***точкою***.

Для вивчення таких понять, як приріст функціонала, неперервність функціонала, екстремум функціонала та деяких інших суттєвим є поняття «відстані» між аргументами функціонала –

елементами різних метричних просторів (означення та деякі приклади метричних просторів – на лекції 6). Такими просторами, наприклад, є:

$C[a,b]$ – простір функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$;

$C^k[a,b]$ – простір функцій, k разів неперервно диференційовних відрізку $[a,b]$.

Відстань у просторі $C[a,b]$ між двома функціями $y_1(x)$ і $y_2(x)$, $x \in [a,b]$, можна ввести за формулою

$$\rho_C(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Формулу, яка встановлює відстань між елементами простору, називають ***метрикою*** цього простору (див. також лекцію 6).

Нехай ε – деяке додатне число. ***ε-околом*** у метриці простору $C[a,b]$ або ***сильним ε-околом*** кривої $y = y_0(x)$ називають множину всіх неперервних кривих $y = y(x)$, для яких $\rho_C(y, y_0) < \varepsilon$.

Відстанню у просторі $C^1[a,b]$ між двома функціями $y_1(x)$ і $y_2(x)$, $x \in [a,b]$, називають число

$$\rho_{C^1}(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

ε-околом у метриці простору $C^1[a,b]$ або ***слабким ε-околом*** кривої $y = y_0(x)$ називають множину всіх неперервно диференційовних кривих $y = y(x)$, для яких $\rho_{C^1}(y, y_0) < \varepsilon$.

Аналогічно можна ввести поняття відстані та околу у просторі $C^k[a,b]$, де $k \geqslant 2$.

Зрозуміло, що функція $y(x)$, яка потрапляє у слабкий ε-окіл функції $y_0(x)$, потрапить також у сильний ε-окіл функції $y_0(x)$. Іншими словами, слабкий ε-окіл завжди міститься у сильному ε-околі. Тому, якщо функціонал на кривій $y = y_0(x)$ володіє деякою властивістю по відношенню до кривих з сильного околу, то цією ж властивістю він володітиме по відношенню до кривих з його слабкого околу.

Функціонал $J[y]$ називають ***лінійним***, якщо:

1) $J[Cy] = CJ[y]$, де C – довільна стала;

2) $J[y_1 + y_2] = J[y_1] + J[y_2]$.

Розглянемо функціонал $J[y]$ і зафіксуємо функцію $y_0(x)$ з його області визначення. Тоді довільну іншу функцію $y(x)$ з цієї області можна зобразити у вигляді $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$, де функцію $\delta y(x)$, яка виражає зміну аргумента функціонала $J[y]$, називають ***варіацією аргумента*** $y_0(x)$.

Приростом функціонала $J[y]$ у точці $y_0(x)$, який відповідає варіації аргумента δy, називають величину

$$\Delta J \equiv \Delta J[y_0(x)] = J[y_0(x) + \delta y] - J[y_0(x)].$$

Зафіксуємо тепер аргумент $y(x)$ функціонала $J[y]$, задамо і також зафіксуємо деяку варіацію δy аргумента $y(x)$ і розглянемо сім'ю кривих $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\delta y$, де α – довільний параметр. На кривих $y(x, \alpha)$ функціонал $J[y]$ перетворюється у функцію $J(\alpha)$ змінної α. Нехай існує похідна $\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}$.

Варіацією δJ ***функціонала*** $J[y]$ при $y = y(x)$ називають похідну $\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}$ при $\alpha = 0$, тобто

$$\delta J[y, \delta y] = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

Приклад 1. *Знайти варіацію функціонала* $J[y] = \int\limits_a^b y^2(x)dx$.

Розв'язання. Згідно з означенням варіації функціонала

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} \int\limits_a^b (y + \alpha\delta y)^2 \, dx \Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= 2\int\limits_a^b (y + \alpha\delta y)\delta y \, dx \Bigg|_{\alpha=0} = 2\int\limits_a^b y\delta y \, dx. \ \blacksquare$$

Зауважимо, що поняття варіації функціонала аналогічне означенню диференціала функції однієї змінної. Справді, диференціал функції $f(x)$ у точці x можна знайти за правилом знаходження варіації функціонала:

$$df = \frac{d}{d\alpha} f(x + \alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha\Delta x)\Delta x\big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x.$$

Функціонал $J[y]$ має ***локальний мінімум*** (***локальний максимум***) на кривій $y = y_0(x)$ у лінійному метричному просторі E (наприклад, у C або C^1), якщо у цьому просторі існує такий ε-окіл кривої $y = y_0(x)$, що для довільної кривої $y = y(x)$ з цього околу справджується нерівність

$$J[y] - J[y_0] \geqslant 0 \quad (J[y] - J[y_0] \leqslant 0)\,.$$

Якщо в означенні мінімуму (максимуму) функціонал розглядається у просторі C, то маємо ***сильний локальний мінімум*** (***сильний локальний максимум***), а якщо у просторі C^1, то ***слабкий локальний мінімум*** (***слабкий локальний максимум***). Якщо у цьому означенні не накладати обмежень на розмір ε-околу кривої $y = y_0(x)$, то кажуть, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається ***абсолютний мінімум*** (***абсолютний максимум***) функціонала.

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму функціонала). *Нехай на кривій $y = y_0(x)$, $y_0 \in E$, досягається локальний екстремум функціонала J і нехай на y_0 існує варіація $\delta J[y_0, \delta y]$. Тоді $\delta J[y_0, \delta y] = 0$ для довільних $\delta y \in E$.*

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(\alpha) = J[y_0 + \alpha\delta y]$, $\delta y \in E$, $\delta y \neq 0$. Нехай для конкретності y_0 – точка мінімуму функціонала J, тоді існує ε-окіл точки y_0 такий, що для всіх функцій $y_0 + \alpha\delta y$ з цього околу виконується нерівність $J[y_0 + \alpha\delta y] \geqslant J[y_0]$. Тоді, очевидно, існує число $\alpha_0 > 0$ таке, що для всіх α з інтервалу $(-\alpha_0, \alpha_0)$ виконується нерівність $J[y_0 + \alpha\delta y] \geqslant J[y_0]$, тобто для всіх α із заданого інтервалу маємо нерівність $\varphi(\alpha) \geqslant \varphi(0)$. Таким чином, функція φ у точці 0 має мінімум. Оскільки функція $\varphi(\alpha)$ диференційовна, то $\varphi'(0) = 0$. Отже, $\delta J[y_0, \delta y] = \varphi'(0) = 0$. Теорему доведено.

Отже, перша варіація для функціонала – це аналог першої похідної для функції однієї змінної у необхідній умові екстремуму.

3. Найпростіша задача варіаційного числення. Розглянемо функціонал
$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y')\, dx, \tag{23.8}$$
де $L(x, y, y')$ – двічі неперервно диференційовна функція, яку називають ***інтегрантом***. Відрізок $[a, b]$ вважаємо фіксованим і скінченним, а межові точки допустимих кривих закріпленими, тобто
$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{23.9}$$

Найпростіша задача варіаційного числення ставиться так: серед усіх функцій $y(x)$, які мають неперервну похідну $\big(y \in C^1[a, b]\big)$ і задовольняють крайові умови (23.9) (такі функції називають ***допустимими***), знайти ту, на якій досягається екстремум функціонала (23.8). Цю задачу називають також ***задачею з закріпленими межами***.

Оскільки множина функцій, для яких забезпечується сильний екстремум, ширша, ніж для слабкого екстремуму, то функція $y_0 \in C^1[a, b]$, що забезпечує сильний екстремум, забезпечує також слабкий екстремум. Тому для функції $y_0 \in C^1[a, b]$ необхідна умова слабкого екстремуму є необхідною умовою сильного, а достатня умова сильного екстремуму є достатньою умовою слабкого.

Встановлюючи необхідні умови існування екстремуму функціонала (23.8), використовуватимемо ***лему Лагранжа***, яку називають ще ***основною лемою варіаційного числення***.

Лема (лема Лагранжа). *Нехай $g(x)$ – неперервна на відрізку $[a, b]$ функція. Якщо $\int_a^b g(x)h(x)\, dx = 0$ для кожної неперервно диференційовної функції $h(x)$ $(h \in C^1[a, b])$, що задовольняє крайові умови $h(a) = h(b) = 0$, то $g(x) = 0$ для всіх $x \in [a, b]$.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто існує точка $x_0 \in [a, b]$ така, що $g(x_0) \neq 0$. Тоді, враховуючи неперервність функції $g(x)$, маємо, що $g(x) \neq 0$ для всіх $x \in [a_1, b_1] \subset [a, b]$.

Нехай $g(x) \geqslant m > 0$. Розглянемо тепер функцію $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \begin{cases} (x-a_1)^{2k}(x-b_1)^{2k}, & x \in [a_1, b_1], \\ 0, & x \notin [a_1, b_1]. \end{cases}$$

Функція $\omega(x)$ є неперервно диференційовною, а також справджує умови $\omega(a) = \omega(b) = 0$. Тоді

$$\int_a^b g(x)\omega(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} g(x)\omega(x)\,dx \geqslant m\int_{a_1}^{b_1} \omega(x)\,dx > 0.$$

Одержали суперечність. Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай функція $y_0(x)$ забезпечує слабкий локальний екстремум функціоналу (23.8), функції L, L'_y, $L'_{y'}$ – неперервні, а $L'_{y'}$ – неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$. Тоді для будь-яких $x \in [a,b]$*

$$L'_y\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) - \frac{d}{dx}L'_{y'}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) = 0, \tag{23.10}$$

де L'_y, $L'_{y'}$ – частинні похідні інтегранта за змінними y, y'.
Доведення. Побудуємо функцію

$$\varphi(\alpha) = J[y_0 + \alpha h] = \int_a^b L\left((x, y_0(x) + \alpha h(x), y_0'(x) + \alpha h'(x)\right) dx,$$

де h – довільна неперервно диференційовна функція, яка задовольняє нульові крайові умови, тобто $h \in C^1[a,b]$, $h(a) = h(b) = 0$. Знайдемо

$$\delta J[y_0, h] = \varphi'(0) =$$

$$= \int_a^b \left(L'_y\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)\, h(x) + L'_{y'}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)\, h'(x)\right) dx.$$

Другий доданок у цьому інтегралі зінтегруємо частинами $(u = L'_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)),\ dv = h'(x)dx)$:

$$\delta J[y_0, h] = \int_a^b L'_y\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)\, h(x)\, dx +$$

$$+ L'_{y'}\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)\, h(x)\big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\Big(L'_{y'}\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)\Big) h(x)\, dx.$$

Другий доданок у правій частині останньої рівності дорівнює нулю, бо $h(a) = h(b) = 0$. Для того, щоб функціонал $J[y]$ набував екстремального значення у точці $y_0(x)$ необхідно, щоб $\delta J[y_0, h] = 0$, тобто

$$\int_a^b \left(L'_y\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big) - \frac{d}{dx}\Big(L'_{y'}\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)\Big)\right) h(x)\, dx = 0.$$

Застосувавши до останньої рівності лему Лагранжа, отримуємо формулу (23.10). Теорему доведено.

Формулу (23.10) називають ***рівнянням Ейлера***, а його розв'язки (інтегральні криві) – ***екстремалями***. Допустимі функції (з класу $C^1[a, b]$ з заданими крайовими умовами), що задовольняють рівняння Ейлера, називають ***допустимими екстремалями***.

Приклад 2. *Розв'язати найпростішу варіаційну задачу*

$$J[y] = \int_1^2 \Big(xy'^2 + 2yy'\Big)\, dx, \quad y(1) = 0,\ y(2) = 2\ln 2.$$

Розв'язання. Оскільки $L(x, y, y') = xy'^2 + 2yy'$, то $L'_y = 2y'$, $L'_{y'} = 2xy' + 2y$. Згідно з (23.10) рівнянням Ейлера є

$$2y' - (2xy' + 2y)' = 0 \quad \Rightarrow \quad xy'' + y' = 0.$$

Для розв'язання цього рівняння запровадимо заміну змінної $y' = z(x)$. Тоді

$$xz' + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{C_1}{x} \quad \Rightarrow$$
$$y = C_1 \ln|x| + C_2.$$

Врахувавши крайові умови, знаходимо $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Отже, єдиною допустимою екстремаллю є $y_0(x) = 2\ln x$.

Доведемо тепер, що знайдена допустима екстремаль справді забезпечує екстремум функціоналу $J[y]$. Для довільної функції $h \in C^1[1,2]$, яка задовольняє умови $h(1) = h(2) = 0$, маємо

$$J[y_0 + h] - J[y_0] =$$
$$= \int_1^2 \big(x(y_0' + h')^2 + 2(y_0 + h)(y_0' + h')\big)\, dx - \int_1^2 (x{y_0'}^2 + 2y_0y_0')\, dx =$$
$$= 2\int_1^2 (xy_0' + y_0)h' dx + \int_1^2 x(h')^2\, dx + 2\int_1^2 y_0'h\, dx + 2\int_1^2 h'h\, dx.$$

Перший інтеграл зінтегруємо частинами ($u = xy_0' + y_0$, $dv = h'dx$), врахувавши, що $h(1) = h(2) = 0$:

$$2\int_1^2 (xy_0' + y_0)h' dx = 2(xy_0' + y_0)h\Big|_1^2 - 2\int_1^2 (xy_0' + y_0)'h\, dx =$$
$$= -2\int_1^2 (y_0' + xy_0'' + y_0')h\, dx.$$

Тоді

$$J[y_0 + h] - J[y_0] =$$
$$= -2\int_1^2 (2y_0' + xy_0'')h\, dx + \int_1^2 x{h'}^2\, dx + 2\int_1^2 y_0'h\, dx + 2\int_1^2 (h^2)' dx =$$

$$= \int_1^2 xh'^2\,dx - 2\int_1^2 (y_0' + xy_0'')h\,dx + h^2\big|_1^2 = \int_1^2 xh'^2\,dx \geqslant 0.$$

При цьому використали, що y_0 – екстремаль, а тому вона задовольняє рівняння Ейлера $xy'' + y' = 0$.

Таким чином, на допустимій екстремалі $y_0 = 2\ln x$ маємо абсолютний мінімум функціонала $J[y]$. ■

У прикладі 2 рівняння Ейлера вдалось легко зінтегрувати. Але так буває не завжди. Розглянемо кілька окремих випадків рівняння Ейлера, в яких порядок диференціального рівняння легко знизити.

1. Інтегрант не залежить від y', тобто $L = L(x, y)$. Тоді рівняння Ейлера набуває вигляду $L'_y = 0$ і є алгебричним, а не диференціальним. Тому його розв'язок не містить довільних сталих і може задовольняти крайові умови лише у виняткових випадках.

2. Інтегрант залежить від y' лінійно, тобто

$$L(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

У цьому випадку рівняння Ейлера має вигляд

$$M'_y + N'_y y' - N'_x - N'_y y' = 0 \quad \Rightarrow \quad M'_y - N'_x = 0.$$

Це рівняння також алгебричне, а його розв'язки можуть задовольняти крайові умови лише в окремих випадках. Якщо $M'_y - N'_x \equiv 0$, то підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, тому інтеграл не залежить від шляху інтегрування і варіаційна задача взагалі не має змісту.

3. Інтегрант не залежить від y, тобто $L = L(x, y')$. Тоді

$$\frac{d}{dx}L'_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad L'_{y'} = C.$$

Це так званий ***інтеграл імпульсу***.

4. Інтегрант не залежить явно від x, тобто $L = L(y, y')$. Тоді маємо ***інтеграл енергії***

$$L - y'L'_{y'} = C. \tag{23.11}$$

Це випливає з того, що

$$\frac{d}{dx}\left(L - y'L'_{y'}\right) = L'_y y' + L'_{y'}y'' - y''L'_{y'} - L''_{y'y}(y')^2 - L''_{y'y'}y'y'' =$$
$$= y'\left(L'_y - L''_{y'y}y' - L''_{y'y'}y''\right) = y'\left(L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'}\right).$$

Рівняння (23.11) має зайву екстремаль $y = \text{const}$.

Зауважимо, що теорема 2 дає лише необхідну, а не достатню умову екстремуму.

Приклад 3. *Розв'язати найпростішу варіаційну* задачу

$$J[y] = \int_0^{2\pi} (9y^2 - 16y'^2)\,dx, \quad y(0) = 1,\ y(2\pi) = 3.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера має вигляд

$$18y + 32y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + 9y/16 = 0.$$

Його загальний розв'язок $y = C_1 \cos\frac{3}{4}x + C_2 \sin\frac{3}{4}x$, а з крайових умов знаходимо $C_1 = 1$ і $C_2 = -3$. Отже, єдиною допустимою екстремаллю є

$$y_0(x) = \cos(3x/4) - 3\sin(3x/4).$$

Доведемо тепер, що знайдена допустима екстремаль не забезпечує екстремуму функціоналу. Для довільної функції $h \in C^1[0, 2\pi],\ h(0) = h(2\pi) = 0$ маємо

$$J[y_0 + h] - J[y_0] =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(9(y_0 + h)^2 - 16(y_0' + h')^2\right) dx - \int_0^{2\pi} (9y_0^2 - 16y_0'^2)\,dx =$$
$$= 18\int_0^{2\pi} y_0 h\,dx + 9\int_0^{2\pi} h^2\,dx - 32\int_0^{2\pi} y_0'h'\,dx - 16\int_0^{2\pi} h'^2\,dx =$$

$$= 18\int_0^{2\pi} y_0 h\,dx + 9\int_0^{2\pi} h^2\,dx - 32y_0'h\Big|_0^{2\pi} + 32\int_0^{2\pi} y_0''h\,dx -$$

$$-16\int_0^{2\pi} h'^2 dx = \int_0^{2\pi}\left(9h^2 - 16h'^2\right)dx.$$

Розглянемо послідовності функцій $h_{mn}(x) = \frac{1}{n}\sin\frac{mx}{2}$, де $n, m \in \mathbf{N}$. Очевидно, що $h_{mn} \in C^1[0, 2\pi]$, $h_{mn}(0) = h_{mn}(2\pi) = 0$. Крім того, $h_{mn}(x)$ збігаються до нуля при $n \to \infty$. Тоді

$$J[y_0 + h_{mn}] - J[y_0] = \int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{n^2}\sin^2\frac{mx}{2} - \frac{4m^2}{n^2}\cos^2\frac{mx}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2n^2}(1-\cos mx) - \frac{2m^2}{n^2}(1+\cos mx)\right)dx = (9-4m^2)\frac{\pi}{n^2}.$$

Різниця $9 - 4m^2$ змінює знак: якщо $m = 2, 3, \ldots$, то вона від'ємна, а якщо $m = 1$, то додатна. Тому ця варіаційна задача не має екстремуму на єдиній допустимій екстремалі y_0.
***Відповідь*:** Варіаційна задача не має екстремуму.

Приклад 4. *Розв'язати варіаційну задачу*

$$t(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx, \quad y(0) = 0, \;\; y(a) = b.$$

Розв'язання. Функціонал $t(y)$ виник при дослідженні задачі про брахістохрону (п. 1 цієї лекції). Оскільки інтегрант явно не залежить від x, то скористаємось формулою (23.11) для рівняння Ейлера:

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C.$$

Після спрощень отримуємо диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної (такі рівняння вивчались на лекції 5):

$$y(1+{y'}^2) = C_1.$$

Зінтегруємо це рівняння методом введення параметра. Нехай $y' = \operatorname{ctg} p$. Тоді

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2} \quad \Rightarrow y = C_1 \sin^2 p = \frac{1}{2}C_1(1-\cos 2p),$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin p \cos p \, dp}{\operatorname{ctg} p} = 2C_1 \sin^2 p \, dp = C_1(1-\cos 2p)\, dp,$$

$$x = C_1\left(p - \frac{1}{2}\sin 2p\right) + C_2 = \frac{1}{2}C_1(2p - \sin 2p) + C_2.$$

З умов $x(0) = y(0) = 0$ одержуємо, що $C_2 = 0$. Таким чином, параметричне рівняння шуканої кривої має вигляд

$$x = \frac{C_1}{2}(2p - \sin 2p), \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2p),$$

де C_1 визначається з умови $y(a) = b$. Отримане параметричне рівняння задає сім'ю циклоїд і, отже, брахістохроною є циклоїда (рис. 23.2). ■

Рекомендована література: [12, с. 72 – 85], [15, с. 289 – 301], [16, с. 472 – 476], [20, с. 280 – 305].

Питання до лекції 23

1. Що таке функціонал, перша варіація функціонала, екстремум функціонала?
2. Якою є необхідна умова екстремуму функціонала?
3. У чому полягає найпростіша задача варіаційного числення?
4. Сформулюйте основну лему варіаційного числення.
5. Сформулюйте необхідну умову екстремуму функціонала для найпростішої задачі варіаційного числення. Який вигляд має рівняння Ейлера для цієї задачі?
6. Що називають інтегрантом, екстремалями, допустимими екстремалями?

7. До якого рівняння зводиться рівняння Ейлера у випадку, коли: а) інтегрант не залежить від y'; б) інтегрант лінійно залежить від y'; в) інтегрант не залежить від y; г) інтегрант не залежить явно від x?

Вправи до лекції 23

1. Знайдіть допустимі екстремалі варіаційних задач:

$$\text{а) } I[y] = \int_0^{\pi/8} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx, \quad y(0) = 2, \ \ y(\tfrac{\pi}{8}) = 3;$$

$$\text{б) } I[y] = \int_1^3 \big((2x^2y^3 - y^2)y' + y^4x + \sin x\big)\,dx, \quad y(1) = 2, \ \ y(3) = 7.$$

2. Розв'яжіть найпростіші варіаційні задачі:

$$\text{а) } I[y] = \int_0^1 (2xy + y'^2)e^x\,dx, \quad y(0) = \tfrac{3}{2}, \ \ y(1) = e^{-1};$$

$$\text{б) } I[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + y^2 - 4y\cos x)\,dx, \quad y(0) = 2, \ \ y\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = \operatorname{ch}\tfrac{\pi}{2}.$$

Лекція 24. Деякі узагальнення найпростішої варіаційної задачі

План

1. Варіаційна задача з кількома функціями.
2. Варіаційна задача з похідними вищих порядків.
3. Ізопериметрична задача.

1. Варіаційна задача з кількома функціями. Розглянемо варіаційну задачу:

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] =$$
$$= \int_a^b L\big(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\big)\,dx, \tag{24.1}$$

$$y_1(a) = A_1, \ \ y_2(a) = A_2, \ \ \ldots, \ \ y_n(a) = A_n, \tag{24.2}$$

$$y_1(b) = B_1, \ \ y_2(b) = B_2, \ \ \ldots, \ \ y_n(b) = B_n \tag{24.3}$$

у класі неперервно диференційовних на відрізку $[a, b]$ сукупностей функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$.

Функцію $2n+1$ змінної $L(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$ у формулі (24.1) називають ***інтегрантом***. За аналогією з найпростішою задачею варіаційного числення (лекція 23) сукупності функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ називатимемо ***допустимими*** у задачі (24.1) – (24.3), якщо вони є неперервно диференційовними на відрізку $[a, b]$ і задовольняють крайові умови (24.2), (24.3).

Теорема 1. *Нехай сукупність функцій*

$$\tilde{y}_1(x),\ \tilde{y}_2(x),\ \ldots,\ \tilde{y}_n(x) \tag{24.4}$$

забезпечує слабкий локальний екстремум задачі (24.1) – (24.3), *а функція L – неперервно диференційовна за всіма змінними на відрізку $[a, b]$. Тоді сукупність функцій* (24.4) *задовольняє систему рівнянь*

$$\begin{aligned} L'_{y_k}\big(x, \tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x), \tilde{y}_1'(x), \ldots, \tilde{y}_n'(x)\big) - \\ - \frac{d}{dx}\Big(L'_{y_k'}\big(x, \tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x), \tilde{y}_1'(x), \ldots, \tilde{y}_n'(x)\big)\Big) = 0, \end{aligned} \tag{24.5}$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$, L'_{y_k}, $L'_{y_k'}$ – частинні похідні інтегранта за змінними y_k та y_k'.

Доведення. Поклавши в (24.1) – (24.3) $y_2(x) \equiv \tilde{y}_2(x)$, …, $y_n(x) \equiv \tilde{y}_n(x)$, для функціонала $J[y_1]$ отримуємо найпростішу варіаційну задачу, розв'язком якої є $\tilde{y}_1(x)$. Тоді з необхідної умови розв'язку найпростішої варіаційної задачі (теорема 2 з лекції 23) випливає, що сукупність функцій (24.4) задовольняє перше рівняння системи (24.5). Далі, фіксуючи в (24.1) $y_1(x) \equiv \tilde{y}_1(x)$, $y_3(x) \equiv \tilde{y}_3(x)$, …, $y_n(x) \equiv \tilde{y}_n(x)$, одержуємо найпростішу варіаційну задачу для функціонала $J[y_2]$, розв'язком якої є $\tilde{y}_2(x)$. Виконання рівняння Ейлера для $\tilde{y}_2(x)$ означає, що сукупність функцій (24.4) задовольняє друге рівняння системи (24.5) і т. д. Нарешті, припустивши, що $y_1(x) \equiv \tilde{y}_1(x)$, …, $y_{n-1}(x) \equiv \tilde{y}_{n-1}(x)$, отримуємо найпростішу варіаційну задачу для функціонала $J[y_n]$, розв'язком якої є $\tilde{y}_n(x)$. Тоді кожна з функцій $\tilde{y}_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, є розв'язком n-го рівняння системи (24.5), а отже, сукупність функцій (24.4) – розв'язком всієї системи (24.5). Теорему доведено.

Систему рівнянь (24.5) називають ***системою Ейлера***. Кожен розв'язок системи Ейлера називають ***екстремаллю*** функціонала (24.1), а кожну екстремаль цього функціонала з множини допустимих функцій – ***допустимою екстремаллю***.

Система (24.5) містить n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, їх розв'язки будуть залежати від $2n$ довільних сталих, для відшукання яких є $2n$ крайових умов.

Приклад 1. *Знайти допустимі екстремалі функціонала*

$$J[y, z] = \int_0^{\pi/2} (y'z' - yz)\, dx,$$
$$y(0) = 0, \;\; z(0) = 1, \;\; y(\pi/2) = 1, \;\; z(\pi/2) = -1.$$

Розв'язання. Оскільки інтегрант $L(x, y, z, y', z') = y'z' - yz$, то $L'_y = -z$, $L'_{y'} = z'$, $L'_z = -y$, $L'_{z'} = y'$. Згідно з (24.5) система Ейлера набуває вигляду

$$\begin{cases} z'' + z = 0, \\ y'' + y = 0. \end{cases}$$

Її загальним розв'язком, як легко переконатися, є

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad z = C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Звідси, враховуючи задані крайові умови, знаходимо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, $C_4 = -1$. Отже, єдиною допустимою екстремаллю є

$$\hat{y}(x) = \sin x, \quad \hat{z}(x) = \cos x - \sin x. \;\blacksquare$$

2. Варіаційна задача з похідними вищих порядків. Розглянемо варіаційну задачу

$$J[y] = \int\limits_a^b L\Big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\Big)\, dx, \qquad (24.6)$$

$$y^{(k)}(a) = A_k, \quad y^{(k)}(b) = B_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \qquad (24.7)$$

у просторі $C^n[a,b]$. Функцію $n+2$ змінних $L\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big)$ називають ***інтегрантом***. Функції з простору $C^n[a,b]$ називатимемо ***допустимими*** в задачі (24.6), (24.7), якщо вони задовольняють крайові умови (24.7). Позначимо через $\mathring{C}^n[a,b]$ множину функцій $h \in C^n[a,b]$, для яких виконуються умови $h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 2. *Нехай функція $y_0(x)$ забезпечує слабкий локальний екстремум задачі (24.6), (24.7), а функції L, L'_y, $L'_{y'}$, $\dots$, $L'_{y^{(n)}}$ – неперервні і $L'_{y^{(k)}} \in C^k[a,b]$. Тоді функція $y_0(x)$ задовольняє рівняння*

$$L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}L'_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}L'_{y^{(n)}} = 0. \qquad (24.8)$$

Тут L'_y, $L'_{y'}$, $\dots$, $L'_{y^{(n)}}$ – частинні похідні інтегранта за змінними y, y', $\dots$, $y^{(n)}$.

Доведення. Знайдемо першу варіацію функціонала $J[y]$. Для цього відшукаємо похідну $\varphi'(0)$ функції $\varphi(\alpha) = J[y_0 + \alpha h]$ для довільної функції $h \in \mathring{C}^n[a,b]$

$$\delta J[y_0, h] = \varphi'(0) =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} L'_{y^{(k)}}\Big(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)\Big) h^{(k)}(x)\right] dx. \qquad (24.9)$$

Згідно з першою необхідною умовою екстремуму функціонала (теорема 1 з лекції 23) у точці $y_0(x)$ виконується рівність $\delta J[y_0, h] = \varphi'(0) = 0$ для всіх $h \in \mathring{C}^n[a,b]$. Щоб застосувати лему Лагранжа (лекція 23), перетворимо вираз (24.9), інтегруючи частинами k разів k-й доданок під знаком інтеграла при $k = 1, 2, \ldots, n$. Враховуючи нульові крайові умови, які задовольняє функція $h(x)$, одержуємо:

$$\delta J[y_0, h] =$$
$$= \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(L'_{y^{(k)}} \left(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x) \right) \right) \right] h(x)\, dx = 0.$$

Застосовуючи тепер лему Лагранжа, отримуємо рівняння (24.8). Теорему доведено.

Рівняння (24.8) називають рівнянням ***Ейлера – Пуассона***. Кожен розв'язок цього рівняння називають ***екстремаллю*** функціонала (24.6), а кожну екстремаль функціонала (24.6) з множини допустимих функцій, – ***допустимою екстремаллю***.

Загальний розв'язок рівняння Ейлера – Пуассона (диференціального рівняння порядку $2n$) міститиме $2n$ довільних сталих, для відшукання яких маємо рівно $2n$ крайових умов.

Приклад 2. *Розв'язати варіаційну задачу*

$$J[y] = \int_0^1 (y''^2 - 48y)\, dx, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = -5, \;\; y(1) = y'(1) = -2.$$

Розв'язання. Оскільки інтегрант $L(x, y, y', y'') = y''^2 - 48y$, то $L'_y = -48$, $L'_{y'} = 0$, $L'_{y''} = 2y''$. Тому рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд $y^{\mathrm{IV}} = 24$. Загальний розв'язок цього диференціального рівняння такий:

$$y = x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Невідомі сталі C_1, C_2, C_3, C_4 знаходимо з крайових умов:

$$\begin{cases} C_4 = 1, \\ C_3 = -5, \\ 1 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = -2, \\ 4 + 3C_1 + 2C_2 + C_3 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -3, \\ C_2 = 4, \\ C_3 = -5, \\ C_4 = 1. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль

$$y_0(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1. \tag{24.10}$$

Доведемо тепер за означенням, що екстремаль (24.10) справді забезпечує екстремум функціоналу. Для довільної функції $h \in \mathring{C}^2[0,1]$ маємо

$$J[y_0 + h] - J[y_0] = \int_0^1 \big((y_0'' + h'')^2 - 48(y_0 + h)\big)\,dx -$$

$$- \int_0^1 (y_0''^2 - 48y_0)\,dx = 2\int_0^1 y_0'' h''\,dx + \int_0^1 (h''^2 - 48h)\,dx =$$

$$= 2y_0'' h'\Big|_0^1 - 2\int_0^1 y_0''' h'\,dx + \int_0^1 (h''^2 - 48h)\,dx =$$

$$= -\,2y_0''' h\Big|_0^1 + \int_0^1 (2y_0^{\mathrm{IV}} - 48)h\,dx + \int_0^1 h''^2 dx = \int_0^1 h''^2 dx \geqslant 0.$$

Виконуючи ці перетворення, використано те, що $y_0(x)$ – екстремаль і, отже, вона задовольняє рівняння Ейлера – Пуассона $2y^{\mathrm{IV}} - 48 = 0$.

Таким чином, допустима екстремаль (24.10) забезпечує абсолютний мінімум заданої варіаційної задачі. ■

Приклад 3. *Розв'язати варіаційну задачу*

$$J[y] = \int_0^1 (y''^2 + 4y'^2 + 3x)\,dx,$$

$$y(0) = 1, \;\; y'(0) = 3, \;\; y(1) = 4, \;\; y'(1) = 3.$$

Розв'язання. Оскільки $L(x, y, y', y'') = y''^2 + 4y'^2 + 3x$, то $L'_y = 0$, $L'_{y'} = 8y'$, $L'_{y''} = 2y''$. Тому рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд $y^{\mathrm{IV}} - 4y'' = 0$, а відповідне йому характеристичне рівняння

$\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$ має корені 0, 0, 2, -2. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння такий:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

Невідомі сталі C_1, C_2, C_3, C_4 знаходимо з крайових умов:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 + C_4 = 1, \\ C_2 + 2C_3 - 2C_4 = 3, \\ C_1 + C_2 + C_3 e^2 + C_4 e^{-2} = 4, \\ C_2 + 2C_3 e^2 - 2C_4 e^{-2} = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 3, \\ C_3 = 0, \\ C_4 = 0. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $y_0(x) = 1 + 3x$.

Доведемо тепер за означенням, що ця екстремаль справді забезпечує екстремум функціоналу. Для довільної функції $h \in \overset{\circ}{C}{}^2[0,1]$ маємо

$$J[y_0 + h] - J[y] = \int_0^1 \Big((y_0'' + h'')^2 + 4(y_0' + h')^2 + 3x \Big) dx -$$

$$- \int_0^1 (y_0''^2 + 4{y_0'}^2 + 3x)\, dx = 2\int_0^1 y_0'' h'' dx + 8\int_0^1 y_0' h' dx +$$

$$+ \int_0^1 (h''^2 + 4h'^2)\, dx = 2y_0'' h' \Big|_0^1 - 2\int_0^1 y_0''' h' dx + 8y_0' h\Big|_0^1 -$$

$$- 8\int_0^1 y_0'' h\, dx + \int_0^1 (h''^2 + 4h'^2)\, dx = -\, 2y_0''' h\Big|_0^1 + 2\int_0^1 y_0^{\mathrm{IV}} h\, dx -$$

$$- 8\int_0^1 y_0'' h\, dx + \int_0^1 (h''^2 + 4h'^2)\, dx = \int_0^1 (h''^2 + 4h'^2)\, dx \geqslant 0.$$

Тут використали той факт, що $y_0(x)$ – екстремаль і, отже, вона задовольняє рівняння Ейлера – Пуассона $y^{\mathrm{IV}} - 4y'' = 0$.

***Відповідь*:** на екстремалі $y_0(x) = 1 + 3x$ досягається абсолютний мінімум.

3. Ізопериметрична задача. Розглянемо узагальнення найпростішої варіаційної задачі на випадок наявності додаткових умов зв'язку (умов, що накладаються на шукану функцію). Такі задачі виникають, зокрема, при відшуканні кривих заданого периметру, що обмежують максимальну площу (лекція 23). Розв'язуючи такі задачі, використовують ***метод множників Лагранжа*** – аналог відомого з курсу математичного аналізу методу множників Лагранжа, який використовується для розв'язування задач на умовний екстремум функцій багатьох змінних.

Нехай потрібно дослідити на екстремум функціонал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{24.11}$$

при виконанні крайових умов

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \tag{24.12}$$

та умови зв'язку

$$K[y] \equiv \int_a^b G(x, y(x), y'(x))\, dx = q, \tag{24.13}$$

де q – деяке число. Умови вигляду (24.13) називають ***ізопериметричними***. Екстремум шукаємо серед функцій $y \in C^1[a, b]$, які задовольняють крайові умови (24.12) та ізопериметричну умову (24.13) (такі функції називають ***допустимими***).

Теорема 3. *Нехай функція $y_0(x)$ забезпечує слабкий локальний екстремум ізопериметричної задачі* (24.11) – (24.13), *функції F, G – неперервні, а F'_y, G'_y – неперервно диференційовні на відрізку $[a, b]$. Тоді існують такі дійсні числа λ_0 і λ, які одночасно не дорівнюють нулю, що на кривій $y_0(x)$ виконується рівняння*

$$L'_y(x, y_0, y'_0) - \frac{d}{dx}\Big(L'_{y'}(x, y_0, y'_0)\Big) = 0, \tag{24.14}$$

де

$$L(x, y, y') = \lambda_0 F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y').$$

Доведення. Позначимо через $\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ множину тих функцій $h \in C^1[a,b]$, для яких $h(a) = h(b) = 0$. Знайдемо перші варіації функціоналів J та K, визначених формулами (24.11) і (24.13):

$$\delta J[y_0, h] = \int\limits_a^b \Big(F'_y(x, y_0, y'_0)h(x) + F'_{y'}(x, y_0, y'_0)h'(x) \Big)\, dx,$$

$$\delta K[y_0, h] = \int\limits_a^b \Big(G'_y(x, y_0, y'_0)h(x) + G'_{y'}(x, y_0, y'_0)h'(x) \Big)\, dx,$$

для всіх $h \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$.

Нехай $\delta K[y_0, h] = 0$ для довільної функції $h \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Зінтегруємо частинами другий доданок у $\delta K[y_0, h]$:

$$\delta K[y_0, h] = \int\limits_a^b G'_y(x, y_0, y'_0)h(x)\, dx + G'_{y'}(x, y_0, y'_0)h(x)\Big|_a^b -$$
$$- \int\limits_a^b \frac{d}{dx}(G'_y(x, y_0, y'_0))h(x)\, dx.$$

Застосувавши лему Лагранжа (лекція 23), одержуємо, що

$$G'_y(x, y_0, y'_0) - \frac{d}{dx} G'_{y'}(x, y_0, y'_0) = 0,$$

тобто рівняння (24.14), у якому $\lambda_0 = 0$, $\lambda = 1$.

Нехай тепер $\delta K[y_0, h] = 0$ не для всіх $h \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Отже, існує функція $h_0 \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ така, що $\delta K[y_0, h_0] \neq 0$. Візьмемо тепер довільну функцію $h \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ і розглянемо функції

$$u = \varphi(\alpha, \beta) = J[y_0 + \alpha h + \beta h_0],$$
$$v = \psi(\alpha, \beta) = K[y_0 + \alpha h + \beta h_0],$$

де α, β – дійсні числа. З умов, накладених на функції F, G і $y_0(x)$ випливає, що до інтегралів, через які виражаються функціонали

J і K, можна застосувати теорему про диференціювання інтегралів, залежних від параметра, причому $\varphi(\alpha,\beta)$ і $\psi(\alpha,\beta)$ є неперервно диференційовними функціями в деякому околі $\alpha=\beta=0$, і що

$$\varphi(0,0)=J[y_0],\quad \frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial\alpha}=\delta J[y_0,h],\quad \frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial\beta}=\delta J[y_0,h_0],$$
$$\psi(0,0)=K[y_0],\quad \frac{\partial\psi(0,0)}{\partial\alpha}=\delta K[y_0,h],\quad \frac{\partial\psi(0,0)}{\partial\beta}=\delta K[y_0,h_0].$$

Покажемо, що при $\alpha=\beta=0$ для довільної функції $h\in\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ якобіан функцій $\varphi(\alpha,\beta)$ і $\psi(\alpha,\beta)$ тотожно дорівнює нулю, тобто

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} & \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} & \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \end{vmatrix}\right|_{\alpha=\beta=0}\equiv 0.$$

Припустимо протилежне, тобто що цей якобіан відмінний від нуля для деякої функції $\tilde{h}\in\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Тоді з теореми про систему неявних функцій випливає, що система рівнянь

$$u=\varphi(\alpha,\beta),\quad v=\psi(\alpha,\beta)$$

однозначно розв'язна відносно α, β у деякому околі $\alpha=\beta=0$. Припустивши для визначеності, що $y_0(x)$ забезпечує локальний мінімум ізопериметричної задачі, розглянемо систему рівнянь

$$\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(0,0)-\varepsilon,\quad \psi(\alpha,\beta)=\psi(0,0), \tag{24.15}$$

де $\varepsilon>0$. Згідно з теоремою про систему неявних функцій існує єдиний розв'язок $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ системи (24.15) з околу $\alpha=\beta=0$ такий, що

$$\varphi(\hat{\alpha},\hat{\beta})=\varphi(0,0)-\varepsilon=J[y_0]-\varepsilon,$$
$$\psi(\hat{\alpha},\hat{\beta})=\psi(0,0)=K[y_0]=q.$$

Це означає, що знайдеться функція вигляду $y_0(x)+\hat{\alpha}\tilde{h}(x)+$ $+\hat{\beta}h_0(x)$, для якої

$$J[y_0+\hat{\alpha}\tilde{h}+\hat{\beta}h_0]=J[y_0]-\varepsilon<J[y_0],\quad K[y_0+\hat{\alpha}\tilde{h}+\hat{\beta}h_0]=q.$$

Але це суперечить тому, що $y_0(x)$ забезпечує локальний мінімум. Отже, наше припущення неправильне і для всіх $h \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ якобіан

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} & \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} & \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \end{array} \right| \Bigg|_{\alpha=\beta=0} = \left| \begin{array}{cc} \delta J[y_0,h] & \delta K[y_0,h] \\ \delta J[y_0,h_0] & \delta K[y_0,h_0] \end{array} \right| \equiv 0. \qquad (24.16)$$

Покладемо $\lambda_0 = 1$, $\lambda = -\frac{\delta J[y_0,h_0]}{\delta K[y_0,h_0]}$. Оскільки $\delta K[y_0,h_0] \neq 0$, то $\lambda \neq \infty$. Тоді з (24.16) для кожної функції $h \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ отримуємо тотожність

$$\lambda_0 \delta J[y_0,h] + \lambda \delta K[y_0,h] \equiv 0.$$

В інтегральній формі ця тотожність має вигляд

$$\int\limits_a^b \Big((\lambda_0 F'_y + \lambda G'_y) h(x) + (\lambda_0 F'_{y'} + \lambda G'_{y'}) h'(x) \Big) dx \equiv 0.$$

Інтегруючи частинами доданок, що містить $h'(x)$, одержуємо:

$$\int\limits_a^b (\lambda_0 F'_y + \lambda G'_y) h(x)\, dx + (\lambda_0 F'_{y'} + \lambda G'_{y'}) h(x)\Big|_a^b -$$
$$- \int\limits_a^b \frac{d}{dx} (\lambda_0 F'_{y'} + \lambda G'_{y'}) h(x)\, dx \equiv 0.$$

Звідси, враховуючи формулу для L і застосовуючи основну лему варіаційного числення, отримуємо рівняння Ейлера (24.14). Теорему доведено.

Вираз

$$L(x,y,y') = \lambda_0 F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y')$$

з теореми 3 називають ***лагранжіаном***, числа λ_0, λ – ***множниками Лагранжа***, а рівняння (24.14) – ***рівнянням Ейлера***. Кожен розв'язок рівняння Ейлера (24.14) називають ***екстремаллю*** ізопериметричної задачі, а кожну екстремаль, що є допустимою функцією, – ***допустимою екстремаллю*** ізопериметричної задачі.

Зауважимо, що ізопериметричну задачу (24.11) – (24.13) можна узагальнити на випадок кількох умов зв'язку

$$K_i[y] \equiv \int\limits_a^b G_i(x, y(x), y'(x))\, dx = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

У цьому випадку лагранжіан L для рівняння (24.14) матиме вигляд

$$L(x, y, y') = \lambda_0 F(x, y, y') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(x, y, y').$$

Приклад 4. *Розв'язати ізопериметричну задачу*

$$J[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx, \quad \int\limits_0^1 xy\, dx = 0, \quad y(0) = -4, \quad y(1) = 4.$$

Розв'язання. Складемо лагранжіан $L(x, y, y') = \lambda_0 y'^2 + \lambda xy$. Рівняння Ейлера для L має вигляд

$$\lambda x - 2\lambda_0 y'' = 0.$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то також $\lambda = 0$, а отже, числа λ_0, λ множниками Лагранжа бути не можуть і допустимих екстремалей немає. Тому $\lambda_0 \neq 0$. Нехай $\lambda_0 = 1$. Тоді

$$y'' = \frac{\lambda}{2} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\lambda}{4} x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\lambda}{12} x^3 + C_1 x + C_2.$$

З крайових умов і умови зв'язку знаходимо:

$$y(0) = -4 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -4,$$

$$y(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{12} + C_1 - 4 = 4,$$

$$\int_0^1 xy\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \left(\frac{\lambda x^4}{12} + C_1 x^2 - 4x\right) dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda x^5}{60} + \frac{C_1 x^3}{3} - 2x^2\right)\Bigg|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{60} + \frac{C_1}{3} - 2 = 0.$$

Звідси $\lambda = 60$, $C_1 = 3$, $C_2 = -4$, тому єдина допустима екстремаль

$$y_0(x) = 5x^3 + 3x - 4.$$

Покажемо, що вона забезпечує абсолютний мінімум ізопериметричної задачі. Справді, для кожної допустимої функції $y(x) = y_0(x) + h(x)$, де $h(x)$ – довільна функція з простору $\mathring{C}^1[0,1]$, для якої $\int_0^1 xh\,dx = 0$, маємо

$$J[y_0 + h] - J[y_0] = \int_0^1 (y_0' + h')^2 dx - \int_0^1 {y_0'}^2 dx =$$

$$= 2\int_0^1 y_0' h' dx + \int_0^1 {h'}^2 dx = 2y_0' h\big|_0^1 - 2\int_0^1 y_0'' h\,dx + \int_0^1 {h'}^2 dx =$$

$$= -2\int_0^1 30xh\,dx + \int_0^1 {h'}^2 dx = \int_0^1 {h'}^2 dx \geqslant 0.$$

Тут використано інтегрування частинами та рівняння Ейлера $y'' = 30x$.

Відповідь: на екстремалі $y_0(x) = 5x^3 + 3x - 4$ досягається абсолютний мінімум.

Приклад 5. *Визначити криву заданої довжини l, яка проходить через точки $A(-x_0, 0)$, $B(x_0, 0)$ і разом з відрізком $[-x_0, x_0]$ обмежує фігуру максимальної площі.*

Розв'язання. Маємо окремий випадок задачі 1 з лекції 23. Потрібно відшукати функцію $y(x)$, що задовольняє крайові умови $y(-x_0) = 0$, $y(x_0) = 0$ та забезпечує максимум функціоналу

$$S[y] = \int_{-x_0}^{x_0} y\,dx$$

за ізопериметричної умови

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Складаємо лагранжіан $L = \lambda_0 y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$. Використовуючи (24.14), одержуємо рівняння Ейлера:

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 - \frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$ (не всі множники Лагранжа – нулі) і, отже, $y' = \mathrm{const}$. Тоді з крайових умов $y(-x_0) = 0$, $y(x_0) = 0$ та ізопериметричної умови випливає, що допустима екстремаль $y_0 \equiv 0$ для $l = 2x_0$.

Якщо $\lambda_0 \neq 0$, то покладемо $\lambda_0 = 1$. Тоді з рівняння Ейлера

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 1.$$

Інтегруючи це рівняння та виконуючи нескладні перетворення, одержуємо:

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 y'^2 = (x + C_1)^2(1 + y'^2) \quad \Rightarrow$$

$$y'^2 = \frac{(x + C_1)^2}{\lambda^2 - (x + C_1)^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$dy = \pm \frac{(x+C_1)\,dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x+C_1)^2}} = \mp\, d\sqrt{\lambda^2 - (x+C_1)^2} \quad \Rightarrow$$
$$y + C_2 = \mp\sqrt{\lambda^2 - (x+C_1)^2} \quad \Rightarrow \quad (x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 = \lambda^2.$$

Це є рівняння кола. Оскільки $y(-x_0) = y(x_0)$, то $C_1 = 0$, тобто $x^2 + (y+C_2)^2 = \lambda^2$.

Невідомі сталі C_2, λ можна знайти єдиним чином з умови $y(x_0) = 0$ та ізопериметричної умови.

Якщо $2x_0 < l \leqslant \pi x_0$, то існує єдина (з точністю до знаку) екстремаль – дуга кола довжини l з центром на осі Oy, яке проходить через точки $(\pm\, x_0, 0)$. Оскільки задача на максимум, то вибираємо екстремаль, що лежить у верхній півплощині. Для $l < 2x_0$ і $l > \pi x_0$ немає допустимих екстремалей.

***Відповідь*:** Якщо $2x_0 < l \leqslant \pi x_0$, то максимальну площу разом з відрізком $[-x_0, x_0]$ обмежує дуга кола довжини l з центром на осі Oy, яке проходить через точки $(\pm\, x_0, 0)$ і лежить у верхній півплощині.

Рекомендована література: [12, с. 85 – 93, 206 – 215], [15, с. 301 – 307, 322 – 326], [20, с. 305 – 312, 385 – 391].

Питання до лекції 24

1. У чому полягає варіаційна задача для функціонала, який залежить від кількох функцій? Якою є необхідна умова існування екстремуму цієї задачі?

2. Як формулюється варіаційна задача з похідними вищих порядків. Якою є необхідна умова існування екстремуму цієї задачі? Який вигляд має рівняння Ейлера – Пуассона? Що називають екстремалями і допустимими екстремалями цієї задачі?

3. Як формулюється ізопериметрична задача? Якою є необхідна умова існування екстремуму цієї задачі у випадку однієї та кількох ізопериметричних умов. У чому полягає метод множників Лагранжа розв'язування цієї задачі? Що таке лагранжіан? Наведіть приклад застосування ізопериметричної задачі в геометрії.

Вправи до лекції 24

1. Знайдіть допустимі екстремалі функціоналів:

$$\text{а) } I[y,z]=\int_0^1 (y^2+12xz+{y'}^2+{z'}^2)\,dx,$$
$$y(0)=1,\ \ y(1)=e,\ \ z(0)=5,\ \ z(1)=8;$$
$$\text{б) } I[y,z]=\int_0^{2\pi} (2yz-2y^2+{y'}^2-{z'}^2)\,dx,$$
$$y(0)=0,\ \ y(2\pi)=1,\ \ z(0)=0,\ \ z(2\pi)=1.$$

2. Розв'яжіть варіаційні задачі зі старшими похідними:

$$\text{а) } \int_0^1 (240xy-{y''}^2)\,dx,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=6,\ \ y(1)=8,\ \ y'(1)=12;$$
$$\text{б) } \int_0^1 e^{-x}{y''}^2 dx,\ \ y(0)=-2,\ \ y'(0)=0,\ \ y(1)=1-e,\ \ y'(1)=1.$$

3. Розв'яжіть ізопериметричні задачі:

$$\text{а) } \int_0^1 (2xy+{y'}^2)\,dx,\quad y(0)=0,\ \ y(1)=1,\ \int_0^1 xy\,dx=1;$$
$$\text{б) } \int_0^1 {y'}^2 dx,\quad y(0)=y(1)=0,\ \int_0^1 y\,dx=1,\ \int_0^1 xy\,dx=0.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Агафонов С. А. Дифференциальные уравнения / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Т. В. Муратова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 352 с.
2. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.
3. Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – 384 с.
4. Васильева А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
5. Гутер Р. С. Дифференциальные уравнения / Р. С. Гутер, А. Р. Янпольский. – М. : Высш. шк., 1976. – 304 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
7. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 304 с.
8. Краснов М. Л. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Едиториал УРСС, 2007. – 192 с.
9. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.
10. Лавренюк С. П. Курс диференціальних рівнянь / С. П. Лавренюк. – Львів : Вид-во наук.-техн. л-ри, 1997. – 216 с.
11. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения / Н. М. Матвеев. – М. : Просвещение, 1988. – 256 с.

12. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі / М. П. Моклячук. – К. : ТВіМС, 2004. – 384 с.
13. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 526 с.
14. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев. – Минск : Выш. школа, 1973. – 560 с.
15. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / В. К. Романко. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.
16. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 504 с.
17. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.
18. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А. Ф. Филиппов. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
19. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. – К. : Техніка, 2003. – 368 с.
20. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 320 с.

КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ

АБЕЛЬ Нільс Генрік (Abel Niels Henrik; 1802 – 1829) – норвезький математик. Автор важливих відкриттів в алгебрі та математичному аналізі. Встановив нерозв'язність загального алгебричного рівняння степеня $n > 5$, одержав ознаки збіжності числових та функціональних рядів. Займався також диференціальними рівняннями, одним з перших почав вивчати інтегральні рівняння.

БАНАХ Стефан (Banach Stefan; 1892 – 1945) – польський і український математик, професор Львівського університету. Один із творців сучасного функціонального аналізу і львівської математичної школи.

БЕРНУЛЛІ Даниїл (Bernoulli Daniel; 1700 – 1782) – швейцарський математик, механік, фізик. Син Й. Бернуллі. Найбільш відомий працями з математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь – його разом з Д'Аламбером і Ейлером вважають творцем математичної фізики. Як фізик збагатив кінетичну теорію газів, гідродинаміку, аеродинаміку, теорію пружності. Йому належить одне з перших формулювань закону збереження енергії, а також (одночасно з Ейлером) перше формулювання закону збереження моменту кількості руху.

БЕРНУЛЛІ Йоганн (Bernoulli Johann; 1667 – 1748) – швейцарський математик. Молодший брат Я. Бернуллі, батько Д. Бернуллі. Дав перше систематичне викладення диференціального та інтегрального числення, автор деяких методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (розробив метод відокремлення змінних та метод підстановки інтегрування лінійних рівнянь першого порядку). Один з творців варіаційного числення, зокрема сформулював класичну задачу про геодезичні лінії та знайшов характерну геометричну властивість цих ліній. Йому належать також вагомі дослідження з механіки, зокрема з теорії удару, руху тіл у середовищі з опором.

БЕРНУЛЛІ Якоб (Bernoulli Jacob; 1654 – 1705) – швейцарський математик. Автор видатних праць з аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь (рівняння Бернуллі). Разом з братом Йоганном заклав основи варіаційного числення. При цьому особливе значення мали ізопериметрична задача і знайдений ним розв'язок сформульованої Й. Бернуллі задачі про брахістохрону. Працював також у різних галузях фізики (визначення центру кочення тіл, опору тіл різної форми, які рухаються у рідині).

БЕССЕЛЬ Фрідріх Вільгельм (Bessel Friedrich Wilhelm; 1784 – 1846) – німецький астроном і математик. Праці присвячені теорії диференціальних рівнянь і небесній механіці. У математиці його ім'я носять так звані циліндричні функції першого роду (функції Бесселя) і диференціальне рівняння, яке вони задовольняють (рівняння Бесселя).

ВАНДЕРМОНД Александр Теофіл (Vandermonde Alexandre Theophill; 1735 – 1796) – французький математик. Відомий працями з алгебри, зокрема дав логічний виклад теорії визначників, де відомий визначник Вандермонда.

ВЕЙЄРШТРАСС Карл Теодор Вільгельм (Weierstraß Karl Theodor Wilhelm; 1815 – 1897) – німецький математик. Його основні дослідження присвячені математичному аналізу, теорії функцій, варіаційному численню, лінійній алгебрі. До варіаційного числення відносяться: дослідження достатніх умов екстремуму функціонала (умова Вейєрштрасса), побудова задач варіаційного числення для параметрично заданої функції та ін.

ВОЛЬТЕРРА Віто (Volterra Vito; 1860 – 1940) – італійський математик. Відомий працями з математичної фізики, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, теорії пружності. Розробив математичну теорію боротьби за існування.

ВРОНСЬКИЙ (ГЕНЕ-ВРОНСЬКИЙ) Юзеф Марія (Hoëne-Wrocski Jozef Maria; 1778 – 1853) – польський математик і філософ. Одержав цікаві результати в алгебрі, математичному аналізі, теорії диференціальних рівнянь. Уперше ввів функціональний визначник, який має велике значення в теорії лінійних диференціальних рівнянь (визначник Вронського або вронскіан).

ГРІН Джордж (Green George; 1793 – 1841) – англійський математик і фізик. Основоположник школи математичної фізики в Кембриджі. Одержав вагомі результати в математичній фізиці, розвинув теорію електрики й магнетизму, спираючись на знайдені ним формули теорії потенціалу.

ГУК Роберт (Hooke Robert; 1635 – 1703) – англійський природознавець, член Лондонського королівського товариства. Основні праці у різноманітних галузях фізики і астрономії. Один з творців математичної теорії пружності.

ГУРВІЦ Адольф (Hurwitz Adolf; 1859 – 1919) – німецький математик. Відомий працями з математичного аналізу, алгебри (критерій Гурвіца), теорії чисел. З 1892 р. професор Політехнічної школи у Цюріху, де серед його студентів був Альберт Ейнштейн.

Д'АЛАМБЕР Жан Лерон (D'Alembert Jean Le Rond; 1717 – 1783) – французький математик, механік і філософ. Автор фундаментальних праць з механіки, математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь. Вперше сформулював загальні правила складання диференціальних рівнянь руху будь-яких матеріальних систем (принцип Д'Аламбера). Основні математичні праці стосуються теорії диференціальних рівнянь, де він запропонував метод розв'язування рівнянь другого порядку з частинними похідними, які виражають малі коливання нескінченно тонкої однорідної струни (хвильових рівнянь). Його роботи, а також наступні роботи Л. Ейлера і Д. Бернуллі заклали основу математичної фізики.

ЕЙЛЕР Леонард (Euler Leonhard; 1707 – 1783) – видатний математик, механік, фізик, астроном. За походженням швейцарець, але майже півжиття провів у Росії, 15 років працював у Німеччині. Автор майже 850 наукових праць з математичного аналізу, диференціальної геометрії, наближених методів обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики та ін. Систематично розвиваючи нові прийоми інтегрування диференціальних рівнянь та ввівши низку основних понять у цій області, Ейлер створив як самостійну дисципліну теорію звичайних диференціальних рівнянь і заклав основи теорії рівнянь з частинними похідними.

ЕРМІТ Шарль (Hermite Charles; 1822 – 1901) – французький математик. Роботи присвячені теорії чисел, алгебрі та теорії спеціальних функцій. Зокрема, вивчав клас ортогональних многочленів (многочлени Ерміта) – розв'язків одного звичайного диференціального рівняння другого порядку (рівняння Ерміта).

КАПЕЛЛІ Альфредо (Capelli Alfredo; 1855 – 1910) – італійський математик. Розвинув теорію квадратичних форм та теорію алгебричних рівнянь. Довів необхідну і достатню умову існування розв'язку довільної лінійної системи алгебричних рівнянь.

КІРХГОФ Густав Роберт (Kirchhoff Gustav Robert; 1824 – 1887) – німецький фізик. Основні праці з оптики, електродинаміки і механіки. Розв'язав задачу про розподіл електричних струмів у розгалужених електричних колах (правила Кірхгофа). Математичні дослідження відносяться головно до математичної фізики (метод наближеного розв'язування задач дифракції коротких хвиль, формули Кірхгофа в теорії потенціалу, представлення електричної схеми у вигляді графа).

КЛЕРО Алексіс Клод (Clairaut Alexis Claude; 1713 – 1765) – французький математик, механік і астроном. Ввів поняття повного диференціала функції кількох змінних, загального та частинного розв'язків диференціального рівняння. Відомий також працями з геометрії, аналітичної механіки, геодезії, астрономії.

КОШІ Огюстен Луї (Cauchy Augustin Louis; 1789 – 1857) – французький математик. Опублікував понад 800 праць із теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теоретичної механіки, математичної фізики. Дав чітке означення неперервної функції, основних понять теорії збіжних рядів (ознака Коші, критерій Коші), розвинув основи теорії аналітичних функцій. У теорії диференціальних рівнянь довів основну теорему існування розв'язку початкової задачі (задачі Коші). Розробив методи інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку.

КРАМЕР Габріель (Cramer Gabriel; 1704 – 1752) – швейцарський математик. Один з творців лінійної алгебри, учень Й. Бернуллі. Запропонував метод розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (метод Крамера). Отримав нові результати також у геометрії, теорії ймовірностей, небесній механіці. Займався історією математики.

КРОНЕКЕР Леопольд (Kronecker Leopold; 1823 – 1891) – німецький математик. Написав понад 120 наукових праць з алгебри і теорії чисел. Був прихильником «арифметизації» математики, яка, на його думку, повинна зводитись до арифметики цілих чисел.

ЛАГЕРР Едмон Нікола (Laguerre Edmond Nicolas; 1834 – 1886) – французький математик. Основні праці з геометрії, теорії функцій комплексної змінної та теорії спеціальних функцій. Зокрема, дослідив клас ортогональних многочленів (многочлени Лагерра) – розв'язків одного звичайного диференціального рівняння другого порядку (рівняння Лагерра).

ЛАГРАНЖ Жозеф Луї (Lagrange Joseph Louis; 1736 – 1813) – французький математик і механік. Найбільш важливі праці відносяться до варіаційного числення і механіки. Йому належать також видатні дослідження з різних питань математичного аналізу (формула залишкового члена ряду Тейлора, формула скінченних приростів – формула Лагранжа, теорія умовних екстремумів – метод множників Лагранжа), диференціальних рівнянь (теорія особливих розв'язків, метод варіації довільних сталих для лінійного рівняння n-го порядку) та ін.

ЛЕЖАНДР Андрієн Марі (Legendre Adrien Marie; 1752 – 1833) – французький математик. Відомий працями зі сферичної тригонометрії, теорії ймовірностей, теорії чисел. Вивчаючи динаміку еліпсоїда обертання, відкрив і дослідив властивості многочленів, які згодом одержали назву многочленів Лежандра. У варіаційному численні встановив ознаку існування екстремуму (умова Лежандра).

ЛЕЙБНІЦ Готфрід Вільгельм (Leibniz Gottfried Wilhelm; 1646 – 1716) – німецький математик, фізик, філософ. Один із творців диференціального та інтегрального числень, їхніх понять і символіки.

Йому належать терміни «диференціал», «диференціальне числення», «диференціальне рівняння», «функція», «координати» та ін. У фізиці відкрив закон збереження енергії, висловив ідею про перетворення одних видів енергії в інші. Йому належить низка відкриттів у спеціальних розділах фізики: в теорії пружності, теорії коливань та ін.

ЛІПШІЦ Рудольф Отто Сигізмунд (Lipschitz Rudolf Otto Sigismund; 1832 – 1903) – німецький математик. Автор важливих праць з математичного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь (умова Ліпшіца), теоретичної механіки.

ЛІУВІЛЛЬ Жозеф (Liouville Joseph; 1809 – 1882) – французький математик. Автор важливих праць з комплексного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь (формула Остроградського – Ліувілля). Першим строго довів неінтегровність у квадратурах деяких класів диференціальних рівнянь. Разом зі Ж. Штурмом розробив теорію крайових задач на власні значення для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку (задача Штурма – Ліувілля). Довів одну з фундаментальних теорем механіки – теорему про інтегрування канонічних рівнянь динаміки.

ЛОПІТАЛЬ Гійом Франсуа Антуан (Lhopital Guillaume François Antoine de; 1661 – 1704) – французький математик. Автор першого друкованого підручника з диференціального числення. Дослідив низку складних задач математичного аналізу, зокрема запропонував один з методів розв'язування задачі про брахістохрону.

ЛЯПУНОВ Олександр Михайлович (1857 – 1918) – російський математик і механік, дійсний член Петербурзької Академії наук, професор Харківського, Одеського університетів. Засновник математичної теорії стійкості руху, автор важливих досліджень про фігури рівноваги рідини, що рівномірно обертається. Зробив вагомий внесок у теорію ймовірностей та теорію потенціалу.

НЬЮТОН Ісаак (Newton Isaac; 1643 – 1727) – англійський фізик, математик, механік, астроном. Заклав теоретичні основи механіки і астрономії, відкрив закон всесвітнього тяжіння, разом із Лейбніцем вважається творцем диференціального та інтегрального числень. Винайшов метод інтегрування диференціальних рівнянь розвиненням їх розв'язків у степеневі ряди. На основі закону всесвітнього тяжіння дав математичне обґрунтування першого закону Кеплера.

ОМ Георг Сімон (Ohm Georg Simon; 1787 – 1854) – німецький фізик. Встановив основний закон електричного кола (закон Ома). Відкриття Ома дали вперше можливість кількісно розглянути явища електричного струму і мали велике значення для науки.

ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович (1801 – 1862) – український і російський математик (родом з Полтавщини), член Петербурзької Академії наук та багатьох закордонних академій наук. Розв'язав низку важливих задач математичної фізики, теорії звичайних диференціальних рівнянь (формула Остроградського – Ліувілля), варіаційного числення, теоретичної механіки. Запропонував спосіб зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної.

ПЕАНО Джузеппе (Peano Giuse; 1858 – 1932) – італійський математик. Запропонував систему аксіом арифметики, довів теорему існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння з неперервною правою частиною, першим побудував неперервну криву, яка цілком заповнює квадрат (крива Пеано).

ПІКАР Шарль Еміль (Picard Charles Émile; 1856 – 1941) – французький математик. Основні праці з теорії диференціальних рівнянь (дослідження особливих точок, асимптотичні розв'язки, метод послідовних наближень розв'язування задачі Коші).

ПУАНКАРЕ Анрі Жюль (Poincare Henri Jules; 1854 – 1912) – французький математик, фізик, астроном і філософ. Автор понад 1000 праць з диференціальних рівнянь, теорії потенціалів, математичної фізики, небесної механіки. Один з засновників якісної теорії диференціальних рівнянь.

ПУАССОН Сімеон Дені (Poisson Siméon Denis; 1781 – 1840) – французький математик, механік і фізик. Автор важливих праць з теоретичної механіки, математичної фізики, варіаційного числення, теорії ймовірностей. Зокрема, ввів так зване рівняння Пуассона і застосував його до розв'язування задач гравітації та електростатики. Досліджував питання теплопровідності, магнетизму, капілярності, поширення звукових хвиль та ін.

ПФАФФ Йоганн Фрідріх (Pfaff Johann Friedrich; 1765 – 1825) – німецький математик і астроном. Відомий дослідженнями з теорії диференціальних рівнянь (рівняння Пфаффа).

РАУС Едвард Джон (Routh Edward John; 1831 – 1907) – англійський механік і математик. Відомий працями з теоретичної механіки. Займався проблемами стійкості рівноваги і руху (критерій Рауса – Гурвіца). Встановив спеціальний алгоритм для визначення кількості коренів алгебричного рівняння, які мають додатні дійсні частини (теорема Рауса).

РІККАТІ Джакопо Франческо (Riccati Jacopo Francesco; 1676 – 1754) – італійський математик та інженер. Основні праці стосуються інтегрального числення й диференціальних рівнянь, зокрема він автор дослідження про інтегровність у квадратурах одного класу диференціальних рівнянь першого порядку (спеціальне рівняння Ріккаті).

СИЛЬВЕСТР Джеймс Джозеф (Sylvester James Joseph; 1814 – 1897) – англійський математик. Основні праці з алгебри (критерій Сильвестра), теорії чисел, теорії ймовірностей, механіки і математичної фізики.

ТЕЙЛОР Брук (Taylor Brook; 1685 – 1731) – англійський математик. Вивів загальну формулу (формула Тейлора) розвинення функцій у степеневі ряди (ряди Тейлора), започаткував математичну теорію коливання струни. Автор робіт, присвячених перспективі, взаємодії магнітів, капілярності та ін.

ФРЕДГОЛЬМ Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866 – 1927) – шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння Фредгольма, теореми Фредгольма).

ФУР'Є Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768 – 1830) – французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці. Зокрема, вивів диференціальне рівняння теплопровідності, розробив метод розв'язування цього рівняння при певних крайових умовах (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження найрізноманітніших задач, пов'язаних з хвилями і коливаннями (астрономія, акустика, радіотехніка та ін.).

ХОПФ Еберхард (Hopf Eberhard; 1902 – 1983) – німецький і американський математик. Основні роботи стосуються теорії динамічних систем і диференціальних рівнянь з частинними похідними. Займався також астрофізикою.

ШТУРМ Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François; 1803 – 1855) – швейцарський математик. Основні праці присвячені задачам математичної фізики та пов'язаним з ними крайовим задачам на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь (задача Штурма – Ліувілля). Заклав основи теорії коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. Автор важливих робіт з оптики і механіки.

ЯКОБІ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob; 1804 – 1851) – німецький математик. Йому належать відкриття в теорії чисел, алгебрі, варіаційному численні, інтегральному численні та теорії диференціальних рівнянь. Досліджував диференціальні рівняння динаміки, розробив нові методи їх розв'язування.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

Гой Тарас Петрович
Махней Олександр Володимирович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Дизайн обкладинки *О. В. Махней*
Технічний редактор *О. В. Махней*

Підписано до друку ????????. Формат видання $60 \times 84/16$, папір офсетний, друк цифровий, гарнітура CM Roman.
Умовн. друк. арк. ???. Наклад ??? прим.

Друк: підприємець Голіней О. М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (03422) 58 04 32.