

# СИНЕРГЕТИКА: ИЕРАРХИИ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ И УСТРОЙСТВАХ

Книга известного западногерманского физика-теоретика, профессора Штутгартского университета Германа Хакена знакомит читателя с идеями, понятиями и методами синергетики» общим подходом к изучению универсальных свойств явлений самоорганизации в динамических, химических, биологических и др. системах. Основное внимание уделяется иерархиям неустойчивостей, приводящих к возникновению структур различной сложности, и выбору адекватного математического аппарата для их описания.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов физико-математических и других естественнонаучных специальностей, занимающихся общими проблемами самоорганизации

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие к русскому изданию	14
Предисловие	15
Глава 1. Введение	19
1.1. Что такое синергетика?	19
1.2. Физика	19
1.2.1. Жидкости: образование динамических структур	19
1.2.2. Лазеры: когерентные колебания	26
1.2.3. Плазма: неисчерпаемое разнообразие неустойчивостей	28
1.2.4. Физика твердого тела: мультистабильность, импульсы, хаос	28
1.3. Техника	29
1.3.1. Строительная механика, сопротивление материалов, авиа- и ракетостроение: выпучивание после «выхлопа», флаттер и т. д.	29
1.3.2. Электротехника и электроника: нелинейные колебания	30
1.4. Химия: макроскопические структуры	31
1.5. Биология	33
1.5.1. Несколько общих замечаний	33
1.5.2. Морфогенез	34
1.5.3. Динамика популяций	35
1.5.4. Эволюция	35
1.5.5. Иммунная система	36
1.6. Общая теория вычислительных систем	36
1.6.1. Самоорганизация вычислительных машин (в частности, параллельные вычисления)	36
1.6.2. Распознавание образов машинами	37
1.6.3. Надежные системы из ненадежных элементов	37
1.7. Экономика	38
1.8. Экология	38

1.9. Социология	38
1.10. Что общего между приведенными выше примерами?	39
1.11. Какие уравнения нам нужны?	40
1.11.1. Дифференциальные уравнения	41
1.11.2. Дифференциальные уравнения первого порядка	41
1.11.3. Нелинейность	42
1.11.4. Управляющие параметры	42
1.11.5. Стохастичность	43
1.11.6. Многокомпонентность и мезоскопический подход	45
1.12. Как выглядят решения?	46
1.13. Качественные изменения: общий подход	57
1.14. Качественные изменения: типичные явления	62
1.14.1. Бифуркация из одного узла (или фокуса) в два узла (или фокуса)	63
1.14.2. Бифуркация из фокуса в предельный цикл (бифуркация Хопфа)	65
1.14.3. Бифуркации из предельного цикла	65
1.14.4. Бифуркации из тора в другие торы	68
1.14.5. Странные аттракторы	69
1.14.6. Показатели Ляпунова*	70
1.15. Влияние флуктуации (шумов). Неравновесные фазовые переходы	73
1.16. Эволюция пространственных структур	75
1.17. Дискретные отображения. Отображение Пуанкаре	77
1.18. Дискретные отображения с шумом	85
1.19. Пути к самоорганизации	86
1.19.1. Самоорганизация через изменение управляющих параметров	86
1.19.2. Самоорганизация через изменение числа компонент	87
1.19.3. Самоорганизация через переходы	88
1.20. Как мы намереваемся действовать дальше?	88
Глава 2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения	91
2.1. Примеры линейных дифференциальных уравнений: случай одной переменной	91
2.1.1. Линейное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом	92
2.1.2. Линейное дифференциальное уравнение с периодическим коэффициентом	92
2.1.3. Линейное дифференциальное уравнение с квазипериодическим коэффициентом	93
2.1.4. Линейное дифференциальное уравнение с вещественным ограниченным коэффициентом	97
2.2. Группы и инвариантность	99
2.3. Системы с вынуждающей силой	103
2.4. Общие теоремы об алгебраических и дифференциальных уравнениях	106
2.4.1. Вид уравнений	106

2.4.2. Жорданова нормальная форма	107
2.4.3. Некоторые общие теоремы о линейных дифференциальных уравнениях	108
2.4.4. Обобщенные характеристические показатели и показатели Ляпунова	110
2.5. Прямые и обратные уравнения: дуальные пространства решений	112
2.6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	115
2.7. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами	121
2.8. Теоретико-групповая интерпретация	125
2.9. Теория возмущений*	128
Глава 3. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с квазипериодическими коэффициентами	136
3.1. Постановка задачи и теорема 3.1.1	136
3.2. Леммы	139
3.3. Доказательство утверждения «а» теоремы 3.1.1.: построение треугольной матрицы (на примере матрицы $2 \times 2$ ).	144
3.4. Доказательство квазипериодичности элементов треугольной матрицы $C$ по $\tau$ , а также периодичности по $(\varphi_j$ и принадлежности классу $C^k$ по $\varphi$ (на примере матрицы $2 \times 2$ ).	146
3.5. Построение треугольной матрицы $C$ и доказательство квазипериодичности ее элементов по $\tau$ , а также их периодичности $\varphi_j$ и принадлежности классу $C^k$ по $\varphi$ (для матрицы $m \times m$ все $\lambda$ различны)	148
3.6. Приближенные методы. Сглаживание	152
3.6.1. Вариационный метод	152
3.6.2. Сглаживание	153
3.7. Треугольная матрица $C$ и приведение ее к блочно-диагональному виду	156
3.8. Общий случай: некоторые обобщенные характеристические показатели совпадают	163
3.9. Решение уравнения (3.1.1) методом последовательных приближений	168
Глава 4. Стохастические нелинейные дифференциальные уравнения	177
4.1. Пример	178
4.2. Дифференциальное уравнение Ито и уравнение Ито—Фоккера—Планка	180
4.3. Исчисление Стратоновича	184
4.4. Уравнения Ланжевена и уравнение Фоккера—Планка	187
Глава 5. Мир связанных нелинейных осцилляторов	189
5.1. Связанные линейные осцилляторы	190
5.1.1. Линейные осцилляторы с линейной связью	190
5.1.2. Линейные осцилляторы с нелинейной связью. Пример. Сдвиги частот	191
5.2. Возмущения квазипериодического движения в случае амплитуд, не	193

зависящих от времени (квазипериодическое движение сохраняется)	
5.3. Некоторые соображения о сходимости метода последовательных приближений	200
Глава 6. Осцилляторы с нелинейной связью: случай, когда квазипериодическое движение сохраняется	207
6.1. Постановка задачи	207
6.2. Теорема Мозера (теорема 6.2.1)	215
6.3. Метод последовательных приближений	216
Глава 7. Нелинейные уравнения. Принцип подчинения	224
7.1 Пример	224
7.1.1. Адиабатическое приближение	225
7.1.2. Исключение переменной	226
7.2. Общая формулировка принципа подчинения. Основные уравнения	232
7.3. Формальные соотношения	236
7.4. Итерационный метод	240
7.5. Оценка остаточного члена. Проблема дифференцируемости	243
7.6. Принцип подчинения для дискретных отображений с шумом	245
7.7. Формальные соотношения	247
7.8. Итерационный метод для дискретного случая*	253
7.9. Принцип подчинения для стохастических дифференциальных уравнений*	255
Глава 8. Нелинейные уравнения. Качественные макроскопические изменения	262
8.1. Бифуркации из узла или фокуса. Основные преобразования	262
8.2. Простое вещественное собственное значение становится положительным	265
8.3. Кратное вещественное собственное значение становится положительным	269
8.4. Простое комплексное собственное значение пересекает мнимую ось. Бифуркация Хопфа	271
8.5. Бифуркация Хопфа (продолжение)	274
8.6. Взаимная синхронизация двух осцилляторов	280
8.7. Бифуркация из предельного цикла	283
8.8. Бифуркация из предельного цикла: частные случаи	288
8.8.1. Бифуркация в два предельных цикла	288
8.8.2. Удвоение периода	290
8.8.3. Субгармоники	291
8.8.4. Бифуркация в тор	293
8.9. Бифуркация из тора (квазипериодическое движение)	295
8.10. Бифуркация из тора: частные случаи	299
8.10.1. Простое собственное значение становится положительным	299
8.10.2. Комплексное невырожденное собственное значение пересекает	302

мнимую ось	
8.11. Иерархии неустойчивостей, сценарии и пути к турбулентности	306
8.11.1. Картина Ландау—Хопфа	306
8.11.2. Картина Рюэля—Такенса	307
8.11.3. Бифуркации торов. Квазипериодические движения	308
8.11.4. Путь к хаосу через удвоение периода. Последовательность Фейгенбаума	309
8.11.5. Путь через перемежаемость	309
Глава 9. Пространственные структуры	310
9.1. Основные дифференциальные уравнения	310
9.2. Общий метод решения	313
9.3. Анализ бифуркаций для конечных геометрий	316
9.4. Обобщенные уравнения Гинзбурга—Ландау	318
9.5. Упрощение обобщенных уравнений Гинзбурга—Ландау. Образование структур в конвекции Бенара	322
Глава 10. Влияние шума	327
10.1. Общий подход	327
10.2. Простой пример	327
10.3. Численное решение уравнения Фоккера—Планка для комплексного параметра порядка	331
10.4. Некоторые общие теоремы о решениях уравнения Фоккера—Планка	339
10.4.1. Зависящие и не зависящие от времени решения уравнения Фоккера—Планка для случая, когда дрейфовые коэффициенты линейны по координатам, а коэффициенты диффузии постоянны	339
10.4.2. Точные стационарные решения уравнения Фоккера—Планка для систем, находящихся в детальном равновесии	340
10.4.3. Пример	345
10.4.4. Важные частные случаи	347
10.5. Поведение нелинейных стохастических систем вблизи критических точек: краткие выводы	348
Глава 11. Дискретные отображения с шумом	349
11.1. Уравнение Чепмена—Колмогорова	349
11.2. Влияние границ. Одномерный пример	350
11.3. Совместная вероятность и вероятность первого выхода на границу. Прямые и обратные уравнения	351
11.4. Связь с интегральным уравнением Фредгольма	352
11.5. Решение в виде интеграла по траекториям	353
11.6. Среднее время первого выхода на границу	355
11.7. Линейная динамика и гауссов шум. Точное, зависящее от времени решение уравнения Чепмена—Колмогорова	356
Глава 12. Пример неразрешимой проблемы в динамике	358
Глава 13. Некоторые замечания по поводу взаимосвязей синергетики и	360

других наук	
Приложение. Доказательство теоремы Мозера (предложенное Мозером)	364
1. Сходимость рядов Фурье	364
2. Наиболее общее преобразование, необходимое для доказательства теоремы 6.2.1	366
3. Сходимость ряда	368
4. Доказательство теоремы 6.2.1	378
Литература	382
Дополнительная литература	400
Литература, добавленная при корректуре	409
Предметный указатель	412

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автокатализ 35, 42, 61	— — — в странные аттракторы 307, 308
Аспектное отношение 25	
Аттрактор 48, 49, 59, 72, 73	— — — комплексное
— <i>Лоренца</i> 57	невырожденное собственное значение пересекает мнимую ось 302—306
— <i>Ресслера</i> 56	— — — простое вещественное собственное значение становится положительным 299—302
— странный (хаотический) 55—57, 69—70, 72, 307, 308	— — — стягивание в предельный цикл 306
Аттракторы, классификация по показателям <i>Ляпунова</i> 72, 73, 308	— — — удвоение периода 309
Аттракторы-многообразия 49—55	— из узла или фокуса 63—65, 262—269
<i>Белоусова—Жаботинского</i> реакция 31—33	— — — — <i>Хопфа</i> 65, 271—280
— — — концентрические волны 33	— — — — в предельный цикл 65
— — — спиральные волны 33	— — — — в два узла и ли два фокуса 63—65
<i>Бенара</i> ячейки 23—25	— — — — взаимная синхронизация двух осцилляторов 280—283
Бистабильность 27	— — — — кратное вещественное собственное значение становится положительным 269, 270
Бифуркация 63—69	— — — — простое вещественное собственное значение
— из предельного цикла 65—68, 283—295	
— — — — в два предельных цикла 66, 288—290	
— — — — в тор 66, 293—295	
— — — — удвоение периода 67, 68, 290, 291	
— из тора 68, 69, 295—306	
— — — в другие торы 68, 69, 307, 308	

становится положительным  
255—269

Броуновское движение 44, 179  
Винеровский процесс 255  
«Выхлоп» тонкой оболочки 29, 30  
Вычислительные машины 36, 37  
*Ганна* осциллятор 28  
Группа 100, 101  
— *Абелева* 101, 125, 167  
— — ограниченных операторов в  
гильбертовом пространстве 168  
— неприводимое представление 128  
Диффузии матрица 311  
«Дорожки» в облаках 23  
Инвариантность 102  
Интеграл по траекториям 353  
К.А.М (*Колмогорова—Арнольда—*  
*Мозера*) условия 95  
Картина *Ландау—Хопфа* 306, 307  
— *Помо—Манневия* 309  
— *Рюэля—Такенса* 307, 308  
Контрчлен 194  
*Лапласа* детерминизм 43  
Логарифм от матрицы (оператора)  
125  
Малые знаменатели 223  
*Михаэлиса—Ментен* член 311  
Многокомпонентность 45—46  
Многообразии 49—50  
— дифференцируемое 50—51  
— инвариантное 54  
— неустойчивое 55  
— притягивающее 54  
— устойчивое 55  
— центральное 55  
Морфогенез 34—35  
Морфогены 35  
Нелинейность 42  
Неустойчивости 20  
— в лазерах 26—27  
— в механических системах 29—30  
— в плазме 28

— в твердом теле 28—29  
— в электронике 30—31  
— термоупругие 29  
Неустойчивость *Бенара*  
(конвективная) 21—25, 57,  
322—326  
— *Маренго* 25  
— *Тейлора* 20—23  
— тонких оболочек 29—30  
Отображение дискретное 77—86  
— — критическое замедление 84  
— — нарушение симметрии 84  
— — показатель *Ляпунова* 84, 85  
— — принцип подчинения 84  
— — с шумом 85, 86, 349—357  
— логистическое 80, 82  
— *Пуанкаре* 78, 83  
— с шумом, влияние границ 310, 311,  
356  
Параметр порядка 60—62  
Перенормированные частоты 236  
Пламена 33  
Подстановка *Ито* 179  
— *Стратоновича* 180  
Подчиненная переменная 61, 62  
Показатель *Ляпунова* 70—73, 110—  
112  
— — для дискретного отображения  
84, 85  
— обобщенный характеристический  
99, 110—112  
— характеристический 92, 93, 97, 115  
— — непрерывный спектр 319—322  
— — дискретный спектр 317, 318  
— *Флоке* 123  
Популяций динамика 35  
Поток 47  
Предельный цикл 48—51  
Приближение адиабатическое 61,  
211, 213—215, 225—232  
— вращающейся волны 292  
— линейное 60

- Принцип подчинения 61, 62, 232—  
236, 300, 318, 321
- — для дискретного отображения  
84
- — — — с шумом 245, 246
- — для стохастических  
дифференциальных  
отображений 255—261
- Процедура *Ито* 180—184
- *Стратоновича* 180, 184—187
- Разрушение мостов 29
- Распознавание образов 37
- Рост кристаллов 29
- Самоорганизация 19
- через изменение управляющих  
параметров 86
- через изменение числа компонент  
87—88
- через переходы 88
- Силы когерентные 178
- макроскопические 178
- флуктуирующие 178
- Система автономная 62
- биологическая 33, 34
- иммунная 36
- синергетическая 39, 40
- Системы, далекие от состояния  
термодинамического  
равновесия 73
- надежные из ненадежных  
элементов 37, 38
- Сплайн-функция 154
- Статистическое усреднение 178
- Стержня изгиб 29
- Стоуна* теорема 168
- Стохастичность 43 —44
- Структуры в жидкости 19—26
- временные 19
- в химии 31 —33
- в электронике 30—31
- пространственно-временные 19
- пространственные 19
- — граничные условия 312, 313
- — эволюция 75—77
- Субгармоник генерация 67, 78, 291,  
292
- Тейлора* вихри 20—23
- Тор 51—54
- обмотка 52
- Туннельный диод 28, 29
- Удвоение периода 67
- — последовательность 81, 82
- — точка накопления 81
- Управляющие параметры 42, 43
- Уравнение для параметров порядка  
90
- *Дуффинга* 68
- *Лоренца* 57
- Уравнение «реакций с диффузией»  
311
- *Ресслера* 56
- Уровень макроскопический 45
- мезоскопический 45
- микроскопический 45
- Устойчивость, анализ по линейному  
приближению 60
- потеря 88
- структурная 57, 58
- Фазовые переходы 19
- Фейгенбаума* число 82
- Флаттер 30
- Флуктуации 73—75, 88, 90
- квантовые 44
- Функция от матриц 124
- Хаос 23, 27, 44, 69, 82, 306—309
- Химическая «праструктура» 34—35
- Чувствительность к изменениям  
начальных условий 44, 73
- Шум аддитивный 44
- мультипликативный 44
- Эволюция 35, 36
- Эйгена*—*Шустер* гиперциклы 35, 36
- Эксперимент *Ноэля*—*Неймана* 39
- *Эша* 39



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В 1978 г. издательство «Шпрингер» выпустило книгу профессора Штутгартского университета (ФРГ) Г. Хакена «Синергетика» [1]. Эта книга — введение в теорию неравновесных фазовых переходов и процессов самоорганизации в физических, химических и биологических системах. Годом раньше в США вышла книга Г. Николиса и И. Пригожина «Самоорганизация в неравновесных системах» [2]. В 1978 г. в Брюсселе состоялся очередной Сольвеевский конгресс, целиком посвященный проблеме: «Порядок и флуктуации в равновесной и неравновесной статистической механике» [3]. Многие из вопросов, которые затрагиваются в названных книгах и которые обсуждались на Сольвеевском конгрессе, были поставлены и решались уже сравнительно давно. Есть, однако, основания считать 1977—1978 гг. годами рождения нового объединяющего направления в современной науке. Чтобы подчеркнуть роль коллективных, кооперативных эффектов в процессах самоорганизации, Г. Хакен назвал это новое направление *синергетикой*. Целесообразность введения этого термина неоднократно, и порой очень бурно, оспаривалась. Здесь нет, разумеется, необходимости анализировать доводы «за» и «против» — целесообразность и полезность того или иного нового термина определяется самим ходом развития науки. Отметим лишь следующее.

В 1980 г. издательство «Мир» выпустило книгу Г. Хакена [1] на русском языке. Она имела несомненный успех у читателей. В 1984 г. вышел сборник переводов работ по синергетике [4]. В 1982 г. впервые в СССР была проведена международная конференция (в Таллине), в программе которой вопросы синергетики занимали одно из ведущих мест. В 1983 г. в г. Пущине была проведена международная конференция под девизом: «Синергетика-83». Она была целиком посвящена самоорганизации в биологии, химии и физике. В ее работе приняли участие многие известные специалисты, в частности М. В. Волькенштейн, Я. Б. Зельдович, Б. Б. Кадомцев, А. М. Обухов, И. Р. Пригожин, Г. Хакен, В. Эбелинг.

Первая книга Г. Хакена стала началом специальной серии, выпускаемой издательством «Шпрингер». Предлагаемая читателям новая книга стоит в ней под номером 20. Это уже не общее введение в круг вопросов синергетики. Книга имеет четкую направленность, которая определяется подзаголовком: «Иерархии неустойчивостей

в самоорганизующихся системах и устройствах». Такая сравнительно узкая направленность позволила автору последовательно изложить математический аппарат, который в настоящее время используется для описания широкого класса неравновесных фазовых переходов, формирующих процессы самоорганизации.

Книга состоит из 13 глав, весьма различных по степени трудности излагаемого материала. Наиболее трудные главы отмечены звездочкой. Автор считает, что они могут быть опущены при первом чтении.

Первая, вводная глава является иллюстративной. Ее задача — дать представление о задачах синергетики в различных областях знания: физике, технике, химии, биологии, общей теории вычислительных систем, экономике, экологии, социологии, выявить общие черты рассматриваемых в них проблем и, наконец, продемонстрировать общность математического аппарата. Эта общность проявляется как при динамическом, так и при статистическом описаниях. На многих примерах показано единство основных понятий теории самоорганизации: принцип подчинения, параметры порядка, диссипативные структуры, неравновесные фазовые переходы. Общими являются и пути, ведущие к самоорганизации. Изложенное в первой главе убедит многих читателей в целесообразности и плодотворности развиваемого единого подхода к описанию эволюционных явлений, явлений самоорганизации и в полезности введения объединяющего термина «синергетика».

Как в вводной, так и в заключительной главах автор подчеркивает, что основная цель книги — изложение концепций и теоретических методов синергетики. При этом, однако, ставится вопрос и о месте синергетики среди других наук. Так, на с. 90 читаем: «Наконец, гл. 13 резюмирует тему вводной главы: какое место занимает синергетика среди других наук. В некотором смысле эту главу можно рассматривать как своего рода краткий экскурс в теорию познания».

Приведенные в заключительной главе соображения весьма интересны, но, принимая целесообразность и полезность развиваемого общего синергетического подхода, все же трудно согласиться с некоторыми выводами автора. Например: «Совершенно очевидно, что каждая из перечисленных нами научных дисциплин (и многие другие) имеет достаточно веские основания считать синергетику своей составной частью. Но в то же время синергетика каждый раз привносит характерные особенности, понятия или методы, чуждые традиционно сложившимся научным направлениям. Так, *термодинамика* действует в полную силу только в том случае, если рассматриваемые системы находятся в тепловом равновесии, *термодинамика необратимых процессов* применима только к системам вблизи теплового равновесия. Синергетические системы в физике, химии и биологии находятся *далеко от теплового равновесия* и могут обнаруживать такие необычные особенности, как колебания.

Хотя термодинамическое понятие *макроскопических переменных* используется и в синергетике, такие переменные, называемые *параметрами порядка*, имеют совершенно иную природу, чем в термодинамике». (с. 361). Аналогичные утверждения делаются и в вводной главе. На с. 40 читаем: «... за последние годы стало ясно, что такие подходы (в том числе некоторые обобщения, например термодинамика необратимых процессов) не дают адекватного описания физических систем, находящихся далеко от теплового равновесия, или экономических процессов. Причина заключается в том, что эти подходы по своей природе статичны...». Здесь с автором трудно согласиться. Значимость синергетики, как уже отмечалось, в ее объединяющей роли. Едва ли нужно поэтому противопоставлять ее другим разделам науки, в частности термодинамике.

В последние годы существенно развилась и сформировалась статистическая теория неравновесных процессов, основы которой были заложены еще Больцманом более ста лет назад (см., например, [5—9]). При этом удается дать единое изложение статистических методов описания неравновесных диссипативных процессов на всех возможных уровнях: кинетическом, гидродинамическом, диффузионном, химической кинетики, термодинамическом. Во всех случаях (при переходе от полного динамического описания на основе обратимых уравнений классической или квантовой механики к неполному статистическому описанию) устанавливаются соответствующие диссипативные уравнения для макроскопических, коллективных переменных. На основе этих уравнений в открытых системах описываются и различные неравновесные фазовые переходы, приводящие к образованию диссипативных структур на разных стадиях процессов самоорганизации. Тем самым современная статистическая теория неравновесных процессов является и фундаментом и одновременно основным рабочим инструментом синергетики.

Использование статистической теории неравновесных процессов в качестве основы синергетики позволяет существенно расширить класс уравнений, описывающих процессы самоорганизации. Наряду с уравнениями (1.11.13), которые соответствуют в статистической теории уравнениям химической кинетики с учетом диффузии, теперь становятся возможны более общие и существенно более богатые по содержанию уравнения. Первый шаг к обобщению — переход от уравнений (1.11.13) к уравнениям гидродинамики химически реагирующих систем. Переход на следующий, более высокий уровень обобщения — это переход к кинетическим уравнениям для функций распределения в 6-мерном пространстве координат и импульсов. Такое расширение описания имеет во многих случаях принципиальное значение, поскольку позволяет не только выявить область применимости уравнений типа (1.11.13), на которых в настоящее время базируется теория самоорганизации, но и описывать многие другие явления.

После вводной идут две главы, в которых излагаются основы теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами (гл. 2) сами по себе не новы, однако способ их изложения оригинален и полезен в связи с тем, что в последующих главах представлен более сложный математический аппарат. Так, гл. 3 посвящена уже теории обыкновенных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Трудно указать другую книгу, в которой эти вопросы излагались бы с такой полнотой и в то же время на таком достаточно доступном уровне.

Гл. 4: «Стохастические нелинейные дифференциальные уравнения», пожалуй, слишком фрагментарна. Основное внимание в ней уделяется двум возможным трактовкам нелинейных стохастических уравнений (дилемма Ито—Стратоновича) и переходу к соответствующим уравнениям Фоккера—Планка. Вопрос о преимуществах каждой из двух трактовок фактически не обсуждается, а такой анализ был бы полезен, поскольку они не исчерпывают всех вариантов: возможна иная запись уравнения Фоккера—Планка и соответствующего уравнения Ланжевена, более естественная с точки зрения общей кинетической теории. (Для системы с диссипативной нелинейностью это приводит к обобщенному выражению Эйнштейна для коэффициента диффузии.)

Две главы, 5 и 6, посвящены теории связанных (линейно или нелинейно) осцилляторов. В ее развитие внесли вклад многие выдающиеся математики, механики и физики, и ей посвящены многие монографии и учебные пособия. Тем не менее обе главы во многом оригинальны, очень содержательны и чрезвычайно интересны. В них, в частности, излагается теорема Мозера, обобщающая известные результаты Колмогорова и Арнольда. Автор пытается решить вопрос: «Могут ли *нелинейно* связанные осцилляторы совершать квазипериодические движения?» — вопрос очень актуальный в связи с проблемой возникновения турбулентности. Полное доказательство теоремы Мозера о существовании квазипериодических решений дано в приложениях к основному тексту.

Глава 7: «Нелинейные уравнения. Принцип подчинения», пожалуй, наиболее существенна для понимания возможности самоорганизации в различных системах (на принятом в книге уровне описания). Принцип подчинения, который иллюстрируется на многих примерах, описываемых как динамическими, так и стохастическими уравнениями, позволяет выделить при образовании (по мере изменения бифуркационного — управляющего — параметра) новых диссипативных структур величины, которые играют роль параметров порядка. Изложение начинается с очень простых примеров и завершается исследованием дискретных отображений со случайными источниками и стохастических дифференциальных уравнений. При этом переход от дискретного времени к непрерывному в стохастических уравнениях не является тривиальным. Надо про-

водить четкое различие между точками в совпадающие моменты и в моменты времени, разделенные бесконечно малыми промежутками.

Введение *общего принципа подчинения* как одного из основных принципов самоорганизации принадлежит Г. Хакену. Основываясь на нем, в сложных системах можно исключить большое число переменных и свести задачу к решению небольшого числа переменных, играющих роль *параметров порядка*.

Процедура упрощения исходных сложных систем уравнений сама по себе, разумеется, далеко не нова. Она уже давно с успехом применяется в физике и особенно в химии. Ее часто называют редукцией. В теории дифференциальных уравнений основой этого метода служат работы Л. С. Понтрягина [10] и А. Н. Тихонова [11], посвященные исследованию систем уравнений, содержащих малые параметры при производных. Широко используется в практических расчетах известная теорема Тихонова (см., например, [12]). Метод редукции используется и в статистической физике при получении кинетических уравнений [5, 7—9]. Эти работы фактически содержат обоснование принципа подчинения — одного из важнейших инструментов теории самоорганизации.

Некоторым читателям предыдущие главы, быть может, покажутся несколько утомительными, но, добравшись до гл. 8: «Нелинейные уравнения. Качественные макроскопические изменения», даже наиболее скептически настроенные из них увидят, что они трудились не зря. Эта глава посвящена центральной проблеме синергетики. В ней дается описание качественных изменений в сложных макроскопических системах при изменении управляющих параметров. Глава написана блестяще. Она читается со все возрастающим интересом. Хотя многие из рассматриваемых здесь вопросов можно найти в недавних обзорах и новейших монографиях, изложение Г. Хакена захватывает своей свежестью, последовательностью, доступностью и вместе с тем глубиной. Читатель видит, что математический аппарат предыдущих глав начинает работать в полную силу. Результаты Колмогорова—Арнольда—Мозера приобретают практическую значимость. Подход автора от традиционного подхода существенно отличается широтой и возможностями. Он позволяет не только описывать различные бифуркации, но и судить о поведении решений вблизи стационарных состояний, т. е. о релаксации.

После рассмотрения последовательности бифуркаций, приводящих ко все более сложным движениям, автор делает замечание о роли флуктуаций, перекидывая тем самым мостик к дальнейшему изложению, и переходит к заключительному пункту этой главы: «Иерархия неустойчивостей. Сценарии, пути к турбулентности». Здесь кратко обсуждаются возможные пути (возможные «сценарии») перехода к турбулентности: возникновение турбулентности по Ландау и Хопфу; возникновение турбулентности по Рюэлю

и Такенсу; переход к турбулентности через последовательность бифуркаций удвоения (механизм Фейгенбаума); переход к турбулентности через перемежаемость турбулентного и ламинарного течений. Остается открытым вопрос о физических условиях, при которых оказывается возможным тот или иной путь перехода к турбулентности. Открытым, в частности, остается вопрос об области существования трехчастотных квазипериодических движений (трехмерных торов), которые наблюдаются, например, при течениях между вращающимися цилиндрами.

При всех разобранных «сценариях» турбулентность возникает через последовательность бифуркаций, происходящих по мере увеличения значения управляющего параметра (числа Рейнольдса). Этим бифуркациям отвечают (по принятой теперь терминологии) неравновесные фазовые переходы. Можно сказать, таким образом, что переход от ламинарного течения к турбулентному идет через последовательность фазовых переходов. По И. Пригожину и Г. Хакену процессы самоорганизации представляются как последовательности фазовых переходов, происходящих при изменении соответствующих управляющих параметров. В связи с этим можно поставить следующий вопрос. Является ли переход от ламинарного течения к турбулентному примером процесса самоорганизации и, следовательно, примером перехода от менее упорядоченного движения к более упорядоченному?

Какова точка зрения Г. Хакена? Этот вопрос в книге специально не обсуждается. О позиции автора можно судить лишь по высказываниям на с. 23, 26. В разделе, посвященном образованию динамических структур в жидкости (с. 23), читаем: «... при еще больших числах Рэлея наступают осцилляции с несколькими основными частотами, которые при дальнейшем возрастании числа Рэлея сменяются совершенно беспорядочным движением, называемым турбулентностью, или хаосом». В разделе, посвященном когерентным колебаниям в лазерах (с. 26) читаем: «При различных условиях испускание света может становиться «хаотическим», или «турбулентным», т. е. совершенно беспорядочным. Линейчатый спектр частот при этом сменяется широкополосным».

Отождествление турбулентного и хаотического движений хотя и очень распространено, едва ли конструктивно. В связи с этим в гл. 23 книги [9] сделана, по-видимому, впервые попытка выявить черты, особенности турбулентного движения, позволяющие рассматривать переход от ламинарного течения к турбулентному как переход к чрезвычайно сложному, но более упорядоченному движению, или, иными словами, как неравновесный фазовый переход в самоорганизующейся системе. В подтверждение этой точки зрения в докладе на конференции «Синергетика-83» в Пущине в июле 1983 г. и в работе [13] приведены результаты сравнения производства энтропии для турбулентного течения и воображаемого ламинарного (которое сохранялось бы при числах Рейнольдса, ббль-

ших критического). Расчет показал, что при турбулентном течении производство энтропии меньше. Это, разумеется, аргумент в пользу такой точки зрения, что турбулентное движение более упорядочено. Среди участников конференции, которые в той или иной мере поддерживали этот вывод, были И. Пригожин, Г. Хакен и В. Эбелинг.

В докладе на конференции в Киеве (на Второй международной рабочей группе по нелинейным турбулентным процессам в физике) в октябре 1983 г. и в работе [14] были приведены результаты расчета энтропии для ламинарного и турбулентного течений. Значения энтропии определялись при одинаковой средней кинетической энергии частиц относительно локальной средней скорости ламинарного и турбулентного течений. Благодаря этому требованию турбулентное течение при расчете энтропии надо рассматривать при более низкой температуре. Соответствующая разность энтропий  $T(S_{\text{л}} - S_{\text{т}}) = \frac{\rho}{2} \langle (\delta u)^2 \rangle > 0$ ,  $\delta u$  — турбулентная пульсация скорости течения.

Таким образом, принимая энтропию за меру неопределенности, можно сказать, что при переходе от ламинарного течения к турбулентному степень упорядоченности возрастает и тем самым идет при этом процесс самоорганизации («S-теорема» [14]). Большая упорядоченность турбулентного течения проявляется в замене молекулярной передачи импульса от слоя к слою соответствующим кооперативным, упорядоченным процессом — возникает турбулентная вязкость. Это определяет, в частности, изменение закона сопротивления при течениях по трубам и каналам и при обтекании тел.

Интересно отметить, что идентичная точка зрения имеется в английской книге «Порядок из хаоса», написанной И. Пригожиным совместно с Изабелл Стенгерс, и выпущенной в апреле 1984 г. [15]. На с. 141 и 142 авторы пишут: «В течение долгого времени турбулентность отождествлялась с беспорядком или шумом... переход от ламинарного течения к турбулентному есть процесс самоорганизации. Часть энергии системы, которая в ламинарном движении была тепловым движением молекул, преобразуется в организованное макроскопическое движение». Эти слова очень точно соответствуют результатам расчета, проведенного в работе [14]. В. Эбелинг вместе со своими сотрудниками также выполнил ряд исследований по расчету энтропии ламинарного и турбулентного движений, подтвердивших точку зрения на переход от ламинарного течения к турбулентному, как на процесс самоорганизации. Многие результаты указанных здесь работ освещены в обзоре «Самоорганизация и турбулентность» [16]. Данная книга Г. Хакена написана, по-видимому, в основном в 1982 г. — начале 1983 г. и отражает сложившийся к этому времени взгляд на характер турбулентного движения; более поздняя точка зрения автора нам, к сожалению, неизвестна.

Продолжим после столь длинного отступления обзор результатов настоящей книги.

Гл. 9 посвящена теории пространственных диссипативных структур. Ее основой служит уравнение Гинзбурга—Ландау. В качестве иллюстрации рассматривается процесс возникновения ячеек Бенаара при тепловой конвекции в несжимаемой жидкости.

В гл. 10 исследуется влияние шума на процессы, уже ранее рассмотренные. Глава невелика по объему, но весьма содержательна. Интересны приведенные примеры численного решения уравнения Фоккера—Планка. Приводится решение многомерного уравнения Фоккера—Планка для стационарного состояния при выполнении условия детального баланса. Изложение в целом не претендует на полноту, поскольку в серии книг по синергетике, выпускаемой издательством «Шпрингер», имеются специальные выпуски, посвященные этим вопросам.

Тема следующей главы — «Дискретные отображения при наличии шума» — очень актуальна, но в настоящее время разработана еще недостаточно. Приведены уравнения, которые служат аналогами соответствующих уравнений Фоккера—Планка предыдущей главы. Исходным при анализе является уравнение Чепмена—Колмогорова.

Как мы уже отмечали, в заключительной главе сделана попытка определить место и роль синергетики среди других научных дисциплин. Популярность и роль синергетики с каждым годом существенно возрастают. Различным ее аспектам посвящено много оригинальных работ, немалое число обзоров и монографий. Имеются уже и учебные пособия, отражающие достижения синергетики. Естественно, что в такой ситуации автору трудно дать достаточно полную библиографию. Переводчик и редактор постарались хотя бы в какой-то мере восполнить имеющиеся пробелы.

В заключение отметим, что хотя книга и имеет относительно узкую направленность и читать ее нелегко, она, несомненно, будет полезна широкому кругу читателей. Труд, затраченный на ее изучение, окупится с лихвой.

Ю. Л. Климонтович

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.
2. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.
3. Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics/Ed. G. Nicolis, G. Dewel, J. W. Turner.— John Wiley and Sons, New York, 1981.
4. Синергетика: Сб. статей. Пер. с англ./Под ред. Б. Б. Кадомцева.— М.: Мир, 1984.
5. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехиздат, 1946.

6. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика.— М.: Наука, 1971.
7. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
8. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы.— М.: Наука, 1975.
9. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика.— М.: Наука, 1982.
10. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1965.
11. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.— Мат. сборник, 1952, т. 31 (73), с. 575.
12. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика.— М.: Наука, 1984.
13. *Климонтович Ю. Л., Энгель Херберт Х.* Осредненные стационарные турбулентные течения Куэтта и Пуазейля.— ЖТФ, 1984, т. 54, с. 440.
14. *Климонтович Ю. Л.* Энтропия и производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях.— Письма в ЖТФ, 1984, т. 10, вып. 2, с. 80.
15. *Prigogine I., Stengers I.* Order out of Chaos.— Toronto — New York — London — Sydney: Bantam Books, 1984.
16. *Ebeling W., Klimontovich Yu. L.* Selforganization and Turbulence.— Leipzig: Teubner Verlag, 1984.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга представляет собой попытку изложить конструктивный подход к теории образования временных, пространственных или пространственно-временных структур. Перевод ее на русский язык — для меня большая честь и радость. В Советском Союзе существует давняя традиция в области конструктивного подхода к динамическим системам — области, в развитие которой фундаментальный вклад внесли А. М. Ляпунов, Л. И. Мандельштам, А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин и многие другие. Область синергетики характеризуется единым подходом и моделированием сложных процессов самоорганизации. На меня произвели сильное впечатление научные результаты советских авторов, представленные в их докладах на конференциях в Таллине и Пущине, на которых мне довелось присутствовать. Я очень рад тому, что труд по переводу и редактированию этой книги взяли на себя мои советские коллеги — Ю. А. Данилов и проф. Ю. Л. Климонтович, которые на протяжении многих лет занимаются близкими проблемами. Надеюсь, что эта книга окажется полезной студентам, профессорам и научным работникам в их собственной работе и исследованиях.

*Г. Хакен*

Март 1984 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена междисциплинарной области науки — синергетике и поэтому может представить интерес для физиков, химиков, математиков, биологов, инженеров-строителей и механиков, представителей других направлений современной науки и техники, а также для студентов соответствующих специальностей. В ней продолжен обзор основных понятий и методов, начатый в моей книге «Синергетика», которая к настоящему времени успела выйти на английском, русском, японском, китайском и немецком языках. При работе над этой книгой я стремился к тому, чтобы ее можно было читать независимо от моей предыдущей книги, хотя знание некоторых вопросов, изложенных в «Синергетике», было бы полезно.

Почему обе мои книги адресованы столь широкой аудитории? Почему неустойчивости так распространены и что общего между различными устройствами и самоорганизующимися системами? Самоорганизующиеся системы обретают присущие им структуры или функции без какого бы то ни было вмешательства извне. Дифференциация клеток в биологии и процесс эволюции могут в равной мере служить примерами самоорганизации. С другой стороны, такие устройства, как используемые в радиопередатчиках электронные генераторы, сделаны руками человека. Но мы часто забываем о том, что во многих случаях технические устройства функционируют на основе процессов, тесно связанных с самоорганизацией. В электронном генераторе движение электронов становится когерентным без воздействия извне когерентной вынуждающей силы; само устройство сконструировано так, что допускает специфические коллективные движения электронов. Совершенно ясно, что демаркационная линия между самоорганизующимися системами и техническими устройствами не может быть проведена вполне однозначно. Если в создаваемых им устройствах человек вводит определенные граничные условия, делающие возможной самоорганизацию компонентов, то в биологических системах ряд автоматически накладываемых условий запускает процессы самоорганизации и управляет ими. Именно поэтому изучать устройства и самоорганизующиеся системы, в частности те, которые встречаются в биологии, полезно с единой, общей точки зрения.

Смысл подзаголовка этой книги станет понятен, если мы объясним, что такое неустойчивость. Лучше всего это сделать на примере.

Жидкость, находявшаяся в состоянии покоя, если в ней начинаются макроскопические колебания, переходит из старого состояния в новое и таким образом теряет устойчивость. Если изменять некоторые условия, например варьировать подаваемую на вход энергию, то система может через серию неустойчивостей переходить в совершенно различные режимы.

Вопрос о том, существуют ли общие принципы, управляющие возникновением самоорганизующихся структур и (или) функций,— основной вопрос синергетики. Когда я более десяти лет назад дал на него утвердительный ответ для широкого класса систем и предложил рассматривать проблемы самоорганизации в рамках междисциплинарного направления, названного мной «синергетикой», многим ученым это могло показаться абсурдным. Почему системы, состоящие из столь различных по своей природе компонентов, как электроны, атомы, молекулы, фотоны, клетки, животные или даже люди, должны, когда они самоорганизуются, подчиняться одним и тем же принципам, образуя электрические колебания, структуры в жидкостях, химические волны, лазерные пучки, органы людей и животных, популяции животных или социальные группы? Но прошедшее десятилетие принесло множество подтверждений тому, что самые разнообразные явления самоорганизации подчиняются одним и тем же принципам, и многочисленные разрозненные примеры, давно известные из литературы, подпадают под объединяющие понятия синергетики. Диапазон таких примеров необычайно широк: от морфогенеза в биологии и некоторых аспектов функционирования мозга до флаттера крыла самолета, от молекулярной физики до космических масштабов эволюции звезд, от электронных приборов до формирования общественного мнения, от мышечного сокращения до выпучивания конструкций. Кроме того, несмотря на существование множества различных дисциплин, обнаружилось поразительное сходство основных понятий, относящихся к образованию пространственных, временных и функциональных структур.

Ввиду многочисленности связей между синергетикой и другими областями науки и техники можно было бы думать, что синергетика использует большое число совершенно разнородных понятий. Однако это не так. Ситуацию, сложившуюся в действительности, лучше всего пояснить с помощью аналогии. Объяснить, как действует двигатель внутреннего сгорания, совсем не сложно, по крайней мере если говорить об основных принципах. Но для того, чтобы построить двигатель для обычной машины, гоночной машины или современного винтового самолета, требуется все более и более высокая техническая квалификация. Аналогичным образом основные принципы синергетики допускают весьма простое объяснение, но применение их к любой реальной системе требует значительных специальных (математических) познаний. При работе над этой книгой автор ставил перед собой две цели. Во-первых, доступно изложить основные понятия: неустойчивость, параметры порядка и принцип

подчинения. Эти понятия образуют «машинное обеспечение» синергетики в ее современном виде и позволяют охватить широкий класс систем от тех, рассмотрением которых занимаются фундаментальные науки, образующие «машинное обеспечение», до тех, рассмотрением которых занимаются прикладные науки, образующие «математическое обеспечение». Во-вторых, изложить необходимый математический аппарат «методом последовательных приближений» от простых случаев к более сложным. Такой подход должен позволить читателю овладеть излагаемым аппаратом настолько, чтобы иметь возможность применять его к конкретным проблемам в своей собственной области и осуществлять самостоятельный поиск новых аналогий между различными областями науки и техники.

Современная наука весьма часто бывает перегружена ворохом специальной терминологии и обозначений. Я стремился свести терминологию до минимума и в случае необходимости объяснять смысл новых терминов. Теоремы и методы изложены так, чтобы их можно было применять к конкретным задачам, т. е. приведены конструктивные доказательства, а не чистые теоремы существования. Стремясь использовать понятия общей теории динамических систем, я пытался следовать *конструктивному* подходу. В большинстве частей книги мне удалось осуществить свои намерения. Трудности возникли лишь в связи с *квазипериодическими процессами*. Я включил эти тонкие проблемы (например, бифуркацию торов) и мой подход к их решению не только потому, что они находятся на передовом рубеже современных математических исследований, но и потому, что с ними приходится то и дело сталкиваться при рассмотрении как естественных, так и искусственных систем. Главы, посвященные рассмотрению этих сложных проблем, так же, как и другие трудные главы, отмечены звездочкой. При первом чтении их можно опустить.

Поскольку эта книга вышла в серии по синергетике, выпускаемой издательством «Шпрингер», уместно сказать несколько слов о том, как она связана с другими выпусками серии. Том 1 (*Haken H. Synergetics. An Introduction*; русский перевод: *Хакен Г. Синергетика.*— М.: Мир, 1980) был посвящен главным образом первой неустойчивости, приводящей к появлению пространственных структур и осцилляций. В настоящей книге (том 20) рассмотрены неустойчивости различных порядков и их последовательности. Том 1 включал в себя введение в теорию стохастических процессов. Более подробно этот круг вопросов рассмотрен в томе 13 (*Gardiner C. W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*; готовится перевод). Материал книги Гардинера может служить общей основой для томов 15 (*Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*; готовится перевод) и 18 (*Risken H. The Fokker-Planck Equation*). Эти три книги охватывают важные

аспекты синергетики в отношении флуктуаций. Проблема мультипликативного шума и наиболее интересные следствия из нее рассмотрены в нашей книге лишь очень кратко. Интересующегося читателя мы отсылаем к книге Хорстхемке и Лефеве. Уравнение Фоккера—Планка, самое ценное средство анализа систем в точках перехода, где другие методы могут оказаться бессильными, рассмотрено, хотя и весьма бегло, в моей предыдущей и этой книгах. Тем, кого интересует полный и всесторонний обзор современного состояния наших знаний по кругу проблем, примыкающих к уравнению Фоккера—Планка, мы рекомендуем обратиться к книге Рискена. Чтобы не увеличивать чрезмерно объем нашей книги, я умышленно отказался от изложения тех приложений излагаемых в ней методов, которые увели бы нас слишком далеко. Приложения понятий и методов синергетики к социологии и экономике подробно изложены в томе 14 (*Weidlich W., Haag G. Concepts and Models of a Quantitative Sociology*). Наконец, в книге: *Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов.* — М.: Наука, 1980 (*Springer Series in Synergetics, v. 10*) — превосходно изложены методы расчета взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем и возникающих при этом различных коллективных явлений.

В то время как эта книга и другие упоминавшиеся выше работы дают нам теоретическую и математическую основу синергетики, не меньшее, если не большее, значение имеют эксперименты по изучению самоорганизующихся систем. До сих пор результаты таких экспериментов выходили в серии по синергетике, выпускаемой издательством «Шпрингер», только в виде трудов конференций. Хотелось бы надеяться, что в будущем в серии появятся монографии, посвященные эксперименту. В заключение я хотел бы отметить, что синергетика по-прежнему открывает широкий простор для экспериментальных и теоретических исследований.

Я хотел бы выразить свою признательность физика Карлу Цайле и д-ру Арне Вундерлину за ценные замечания и скрупулезную вычитку рукописи и проверку вычислений. Хочу поблагодарить также д-ра Герберта Оно, выполнившего рисунки, и моего секретаря г-жу У. Функе, тщательно перепечатавшую несколько вариантов рукописи со всеми формулами. Без ее неустанных усилий эта книга вряд ли бы вышла. Я признателен сотрудникам издательства «Шпрингер» за великолепную работу в процессе подготовки книги к печати. Пользуясь случаем, хочу поблагодарить Фонд фирмы «Фольксваген» в Ганновере за эффективную поддержку проекта «Синергетика», в рамках которого в течение последних четырех лет получен ряд результатов, изложенных в этой книге.

*Герман Хакен*

## 1.1. Что такое синергетика?

Синергетика занимается изучением систем, состоящих из многих подсистем самой различной природы, таких, как электроны, атомы, молекулы, клетки, нейроны, механические элементы, фотоны, органы, животные и даже люди. В этой книге мы хотим рассмотреть, каким образом взаимодействие таких подсистем приводит к возникновению пространственных, временных или пространственно-временных структур в макроскопических масштабах. В частности, мы сосредоточим внимание на тех ситуациях, когда структуры возникают в результате самоорганизации, и попытаемся выяснить, какие принципы управляют процессами самоорганизации безотносительно к природе подсистем. В этой главе мы приведем типичные примеры переходов беспорядок — порядок или порядок — порядок в самых различных областях от физики до социологии и дадим краткий обзор основных понятий и математического подхода.

## 1.2. Физика

В принципе все фазовые переходы в физических системах, находящихся в термодинамическом равновесии, такие, как переход жидкость—газ, ферромагнитный переход или возникновение сверхпроводимости, подпадают под общее определение процессов, представляющих интерес для синергетики. С другой стороны, эти явления интенсивно изучаются теорией фазовых переходов, в последнее время — с помощью метода ренормгруппы, которому посвящено большое число книг и обзорных статей. (При чтении каждого раздела советуем обращаться к списку использованной и рекомендуемой литературы, приведенному в конце книги.) Поэтому мы не будем рассматривать эти явления и сосредоточим внимание на тех современных достижениях синергетики, которые остаются за рамками теории фазовых переходов.

### 1.2.1. Жидкости: образование динамических структур

Прекрасные примеры образования структур все возрастающей сложности дает нам гидродинамика. Поскольку образование любой структуры означает, что предшествующее состояние жидкости

не может существовать далее, т. е. становится *неустойчивым*, явления образования структур часто называют *неустойчивостями*.

Рассмотрим в качестве первого примера неустойчивость Тейлора и следующие за ней неустойчивости. В этих экспериментах (рис. 1.2.1) изучается движение жидкости между коаксиальными цилиндрами.

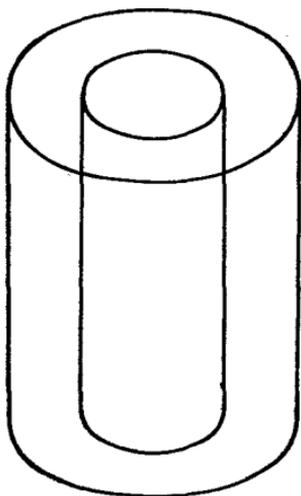


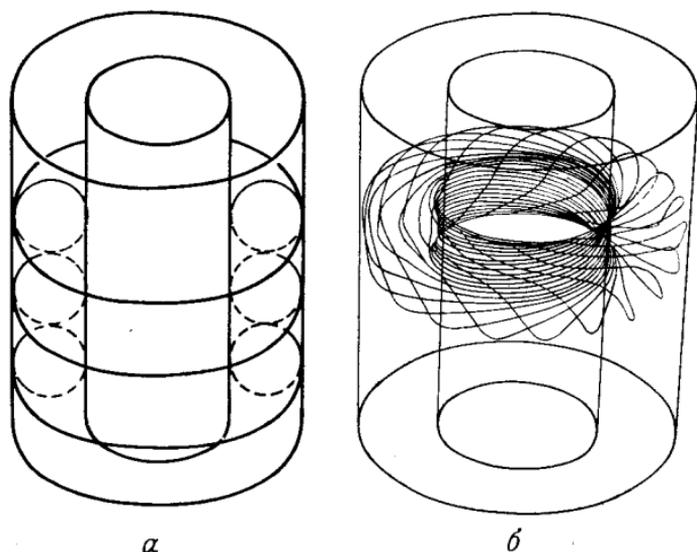
Рис. 1.2.1. Схема экспериментальной установки для изучения неустойчивости Тейлора. Жидкость заполняет пространство между двумя коаксиальными цилиндрами. Наружный цилиндр прозрачный. Внутренний цилиндр может вращаться с постоянной скоростью.

Обычно внутренний цилиндр заставляют вращаться, а наружный закрепляют неподвижно, но производились и такие эксперименты, в которых вращались оба цилиндра. Мы опишем явления, наблюдаемые в том случае, когда наружный цилиндр закреплен неподвижно, а внутренний вращается с различными скоростями. При малых скоростях вращения жидкость образует коаксиальные линии тока. Это вполне понятно, так как внутренний цилиндр пытается увлечь за собой жидкость за счет трения между поверхностью цилиндра и жидкостью. При возрастании скорости (обычно измеряемой в безразмерных числах Тейлора) возникает движение нового типа. Движение жидкости организуется в так называемые вихри Тейлора, в которых жидкость периодически движется то наружу, то внутрь в горизонтальных слоях (рис. 1.2.2, а, б).

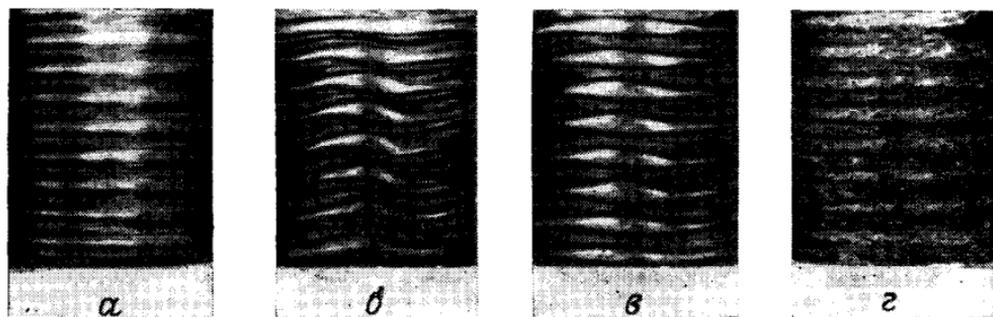
Когда числа Тейлора, продолжая возрастать, достигают второго критического значения, вихри Тейлора начинают осциллировать с одной основной частотой, а при еще более высоких числах Тейлора — с двумя основными частотами. Иногда наблюдаются еще более сложные структуры. Наконец, при дальнейшем увеличении числа Тейлора наступает хаотическое движение. Как видно из рис. 1.2.3, возникающие структуры можно наблюдать непосредственно. Кроме того, по рассеянию излучения лазера измерялись распределение скоростей и его спектр Фурье (рис. 1.2.4, а—в). В отдельных случаях при увеличении числа Тейлора наблюдалось появление серии новых частот, составляющих  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$  от основной частоты. Поскольку половинная частота соответствует удвоенному периоду, это явление получило название удвоения периода. Некоторые особенности, присущие образованию вихрей Тейлора, характерны для самоорганизующихся систем. Когда мы изменяем внешний параметр (в случае вихрей Тейлора — скорость вращения), система может образовывать иерархию структур, не

обусловленную внешними воздействиями. Кроме того, структуры могут усложняться во времени и в пространстве.

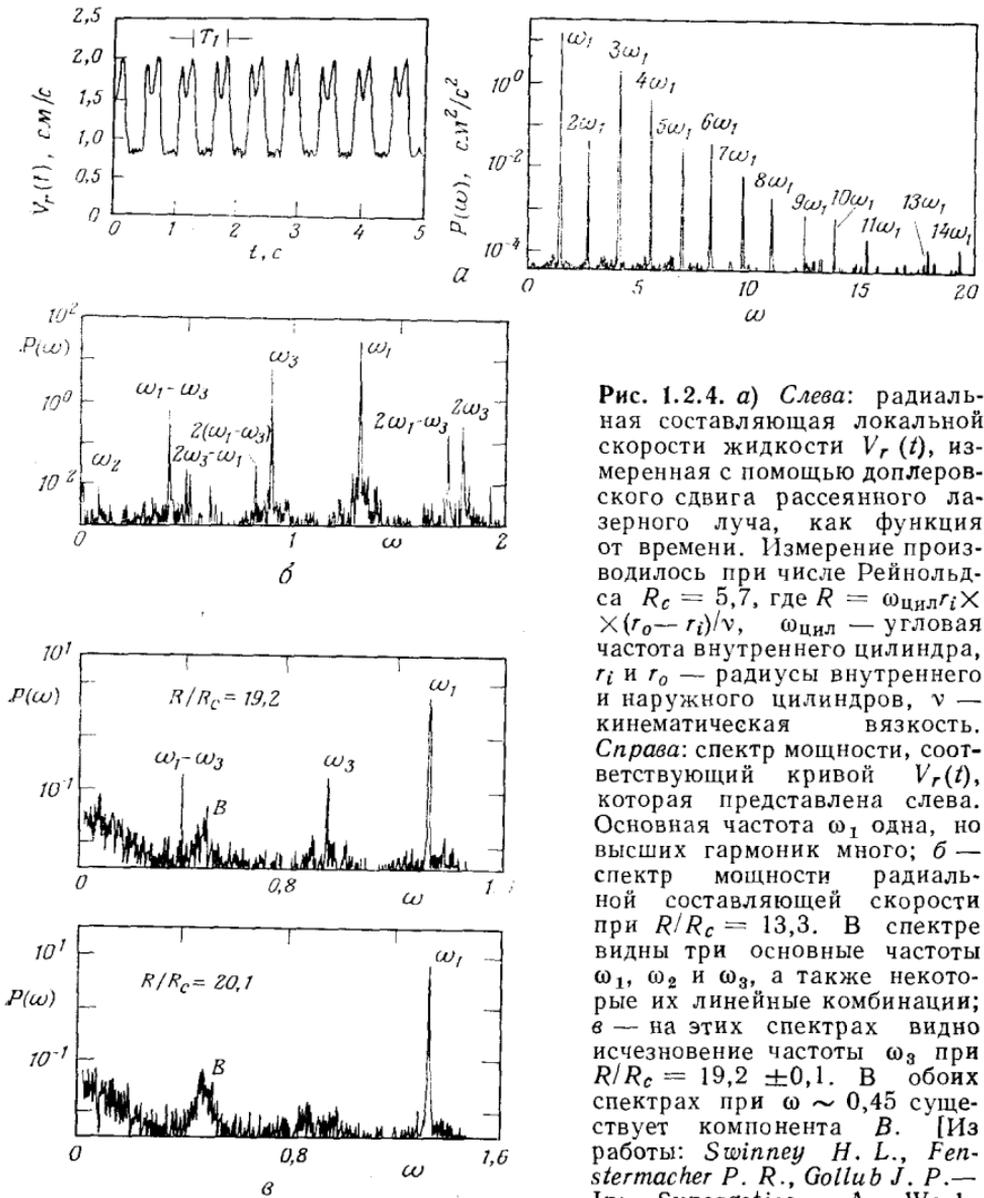
Другой стандартный тип экспериментов приводит к конвективной неустойчивости (или неустойчивости Бенара) и большому числу



**Рис. 1.2.2.** *a* — схема образования вихрей Тейлора; *б* — траектория частицы внутри вихрей Тейлора, рассчитанная на ЭВМ. В численном эксперименте образовались два вихря Тейлора, но графопостроитель изобразил траекторию частицы только внутри верхнего вихря. [Из дипломной работы К. Маркса (Штутгартский университет, 1982).]



**Рис. 1.2.3.** Иерархия неустойчивостей в неустойчивости Тейлора. *a* — образование вихрей Тейлора; *б* — появление волн на вихрях Тейлора; *в* — более сложное волновое движение на вихрях Тейлора; *г* — хаотическое движение на вихрях Тейлора. [Из работы: *Swinney H. L., Fenstermacher P. R., Gollub J. P.* — In: *Synergetics, A Workshop/Ed. by H. Haken. Springer Series in Synergetics, vol. 2.* — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1977, p. 60.]

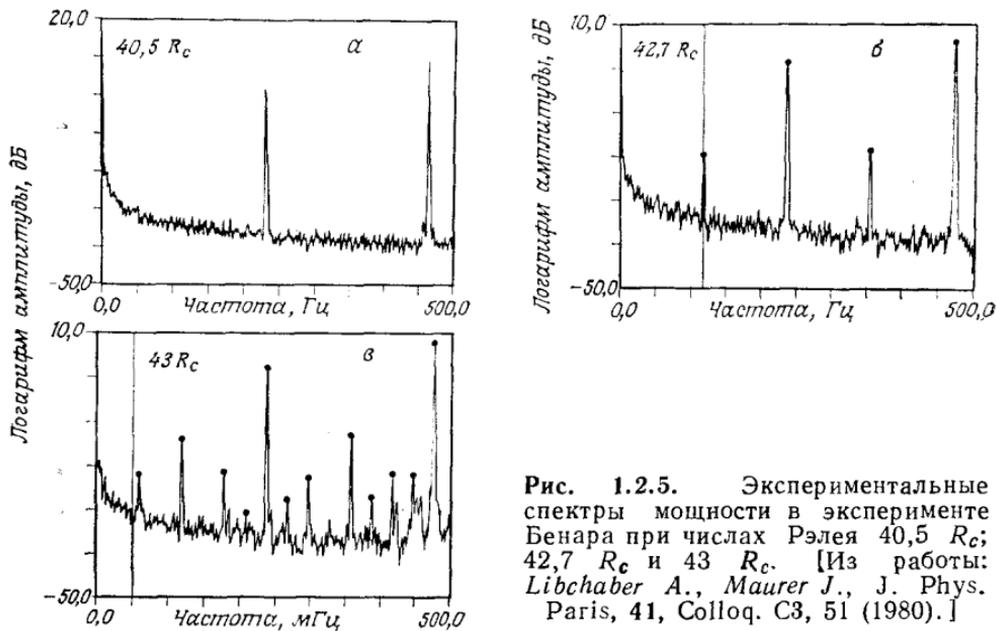


**Рис. 1.2.4.** а) Слева: радиальная составляющая локальной скорости жидкости  $V_r(t)$ , измеренная с помощью доплеровского сдвига рассеянного лазерного луча, как функция от времени. Измерение производилось при числе Рейнольдса  $R_c = 5,7$ , где  $R = \omega_{\text{цил}} r_i \times (r_o - r_i) / \nu$ ,  $\omega_{\text{цил}}$  — угловая частота внутреннего цилиндра,  $r_i$  и  $r_o$  — радиусы внутреннего и наружного цилиндров,  $\nu$  — кинематическая вязкость. Справа: спектр мощности, соответствующий кривой  $V_r(t)$ , которая представлена слева. Основная частота  $\omega_1$  одна, но высших гармоник много; б — спектр мощности радиальной составляющей скорости при  $R/R_c = 13,3$ . В спектре видны три основные частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , а также некоторые их линейные комбинации; в — на этих спектрах видно исчезновение частоты  $\omega_3$  при  $R/R_c = 19,2 \pm 0,1$ . В обоих спектрах при  $\omega \sim 0,45$  существует компонента  $B$ . [Из работы: Swinney H. L., Fenstermacher P. R., Gollub J. P. — In: Synergetics. A Workshop/Ed. by H. Haken. — Springer Series in Synergetics, vol. 9. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1977, p. 60.]

неустойчивостей более высокого порядка. В этих экспериментах слой жидкости находится в сосуде определенной геометрии (обычно используются сосуды круглой или прямоугольной формы). На жидкость действует сила тяжести. Если жидкость подогревать снизу, а ее верхнюю поверхность поддерживать при постоянной темпера-

неустойчивостей более высокого порядка. В этих экспериментах слой жидкости находится в сосуде определенной геометрии (обычно используются сосуды круглой или прямоугольной формы). На жидкость действует сила тяжести. Если жидкость подогревать снизу, а ее верхнюю поверхность поддерживать при постоянной темпера-

туре, то устанавливается некоторая разность температур. Эта разность температур (градиент температуры) порождает вертикальный поток тепла. Если градиент температуры мал, то перенос тепла происходит на микроскопическом уровне, и никакого макроскопического движения жидкости не наблюдается. Возрастая, градиент температуры достигает критического значения, и тогда внезапно устанавливается макроскопическое движение, образующее четко



**Рис. 1.2.5.** Экспериментальные спектры мощности в эксперименте Бенара при числах Рэлея  $40,5 R_c$ ;  $42,7 R_c$  и  $43 R_c$ . [Из работы: Libchaber A., Maurer J., J. Phys. Paris, 41, Colloq. C3, 51 (1980).]

выраженные структуры: на одних участках нагретая жидкость поднимается, охлаждается у верхней поверхности, на других — опускается, именно в результате чего и возникает движение в виде цилиндрических ячеек. Характерный размер ячеек сравним по порядку величины с толщиной слоя жидкости, которая в лабораторных системах может составлять от миллиметров до нескольких сантиметров. (То же явление наблюдается и в метеорологии, где хорошо известны «дорожки» в облаках, размеры которых достигают нескольких сот метров.)

В прямоугольной геометрии при увеличении градиента температуры, измеряемого в безразмерных единицах числом Рэлея, цилиндрические ячейки начинают осциллировать, при еще больших числах Рэлея наступают осцилляции с несколькими основными частотами, которые при дальнейшем возрастании числа Рэлея сменяются совершенно беспорядочным движением, называемым турбулентностью, или хаосом.

Переход от покоящегося слоя к турбулентности может происходить и по другим путям или сценариям; один из них осуществляется при удвоении периода. При возрастании числа Рэлея наступает весьма сложное движение, в котором период удваивается каждый

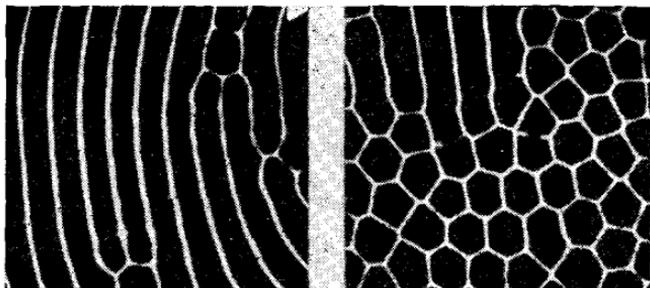


Рис. 1.2.6. Снимки поверхности жидкости, подогреваемой снизу. Отчетливо видно, что гексагональные ячейки сосуществуют с цилиндрическими. [Whitehead J., частное сообщение.]

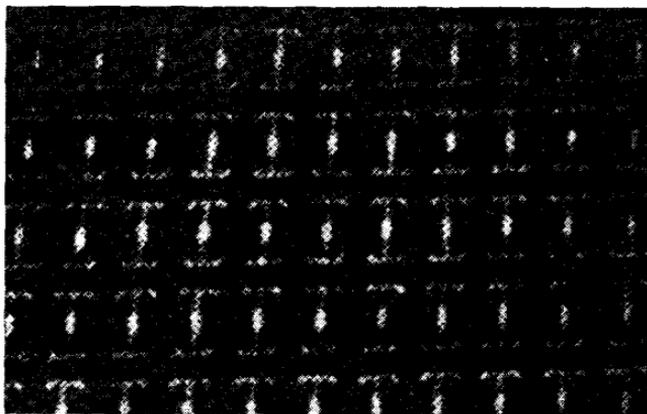
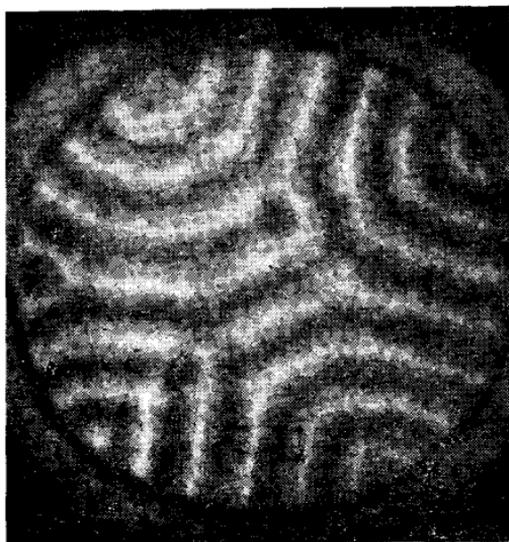


Рис. 1.2.7. Снимок поверхности жидкости, подогреваемой снизу. Отчетливо видна прямоугольная решетка, образуемая двумя системами цилиндрических ячеек. [Из работы: Whitehead J.— In: Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions/Ed. by T. Riste.— New York: Plenum, 1975.]

раз, когда число Рэлея достигает очередного критического значения (рис. 1.2.5, *a—e*). В цилиндрических контейнерах могут наблюдаться концентрические, или если нарушена симметрия относительно срединной горизонтальной плоскости, то шестиугольные ячейки. Кроме того, наблюдаются переходы между концентрическими и шестиугольными структурами и даже сосуществование

цилиндров и шестиугольников (рис. 1.2.6). Экспериментально наблюдались также семейства цилиндрических ячеек, расположенных под прямым углом друг к другу и образующих прямоугольную решетку (рис. 1.2.7). При более высоких числах Рэлея возникает структура, внешне напоминающая ковер. Во многих случаях наблюдаемые структуры обладают различными дефектами (рис. 1.2.8). Для получения наиболее четко выраженных структур



**Рис. 1.2.8.** Снимок поверхности жидкости, подогреваемой снизу в круглом сосуде. Системы цилиндрических ячеек развиты неполностью. В точках пересечения системы правильный характер чередования ячеек нарушается. [Из работы: *Bergé P.*— In: *Chaos and Order in Nature*/Ed. by H. Haken. Springer Series in Synergetics, vol. 11.— Berlin, Heidelberg, New York; Springer, 1981, p. 14. Имеется перевод: *Берже П.* Конвекция Рэлея—Бенара в жидкостях с высоким числом Прандтля.— В сб. *Синергетика: Пер. с англ./Под ред. Б. Б. Кадомцева.*— М.: Мир, 1984, с. 220—233.]

в современных экспериментах выбирают прямоугольные кюветы с малым аспектным отношением (т. е. отношением длины к ширине), обычно порядка единицы. При больших удлинениях отдельные переходы следуют один за другим очень быстро или даже сосуществуют. Другой класс экспериментов, в которых жидкость нагревается сверху, приводит к «неустойчивости Маренго». Кроме того, в атмосферах Земли и других планет множество различных структур образуется в результате совместного действия силы тяжести, вращения и нагревания.

Еще один класс структур, имеющих важное практическое значение, возникает при обтекании жидкостью или газом движущихся объектов: автомашин, самолетов и морских судов. И в этом случае

специфические структуры также приводят к возникновению различных эффектов. Обратимся теперь к совершенно другой области физики — к лазерам.

### 1.2.2. Лазеры; когерентные колебания

Лазеры по существу представляют собой особый тип ламп, способных испускать когерентное световое излучение. Подробно лазер как прототип синергетической системы рассмотрен в моей книге «Синергетика» [1], поэтому здесь я кратко опишу лишь те особенности лазера, которые имеют непосредственное отношение к возникновению иерархии неустойчивостей.

Типичный лазер состоит из кристаллического стержня или стеклянной трубки, заполненной газом, но конкретные детали схемы экспериментальной установки для нас сейчас не имеют значения. Существенно другое: атомы, из которых состоит рабочее тело лазера, если их возбудить или «накачать» извне, испускают световые волны. При малой мощности накачки эти волны некоррелированы, как в свете, испускаемом обычной лампой. Если бы мы могли воспринимать такой свет на слух, он звучал бы для нас как шум.

Но стоит повысить мощность накачки до критического значения, как шум исчезает и сменяется чистым тоном. Это означает, что атомы испускают чисто синусоидальную световую волну, что в свою очередь означает: отдельные атомы действуют строго коррелированным образом, т. е. самоорганизуются. Когда мощность накачки превышает второе критическое значение, лазер может начать периодически испускать очень интенсивные и короткие импульсы. При этом возникает следующая последовательность неустойчивостей (рис. 1.2.9, а—в):

$$\text{Шум} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Когерентные} \\ \text{колебания} \\ \text{с частотой } \omega_1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Периодические импульсы} \\ \text{с частотой } \omega_2, \text{ модулирующие} \\ \text{колебания с частотой } \omega_1 \end{array} \right\},$$

т. е.

Отсутствие колебаний  $\rightarrow$  1 частота  $\rightarrow$  2 частоты.

При различных условиях испускание света может становиться «хаотическим», или «турбулентным», т. е. совершенно беспорядочным. Линейчатый спектр частот при этом сменяется широкополосным.

Ряд интересных эффектов может возникнуть, если лазер не только накачивать, но и облучать светом другого лазера. Например, лазер может перейти в одно из двух внутренних состояний:

с высоким пропусканием падающего света и с низким пропусканием. Поскольку эти два состояния стабильны, такая система называется бистабильной. Бистабильные элементы находят применение в качестве запоминающих и логических устройств в вычислительных машинах.

Ряд различного рода неустойчивостей (бистабильность, импульсы, хаос) возникает в тех случаях, когда лазер связан с так



**Рис. 1.2.9.** *a* — зависимость напряженности поля  $E(t)$  от времени  $t$  для излучения, испущенного лампой; *b* — зависимость напряженности поля  $E(t)$  от времени  $t$  для излучения, испущенного лазером; *v* — зависимость напряженности поля  $E(t)$  от времени  $t$  для ультракоротких импульсов лазерного излучения.

называемым насыщающимся поглотителем, т. е. материалом, коэффициент пропускания которого становится очень большим при достаточно высокой интенсивности света.

По различным причинам лазер сыграл решающую роль в развитии синергетики. Немаловажное значение имело, в частности, то, что явления, происходящие в области перехода лампа  $\leftrightarrow$  лазер (в которых обнаружена удивительная и далеко идущая аналогия с фазовыми переходами в системах, находящихся в тепловом равновесии), поддаются теоретическому анализу и могут быть подробно исследованы экспериментально. Аналогия, которую мы имеем в виду, включает в себя неустойчивость, приводящую к нарушению симметрии, критическое замедление и критические флуктуации. Как показывают результаты исследований, вблизи точки перехода синергетической системы флуктуации могут иметь решающее значение. (Все затронутые здесь бегло понятия подробно рассмотрены в [1].)

### 1.2.3. Плазма; неисчерпаемое разнообразие неустойчивостей

Плазма состоит из газа, атомы которого частично или полностью лишены своего электронного облака, т. е. ионизованы. Соответственно плазму можно охарактеризовать как газ (или жидкость), состоящий из электрически заряженных частиц. Поскольку

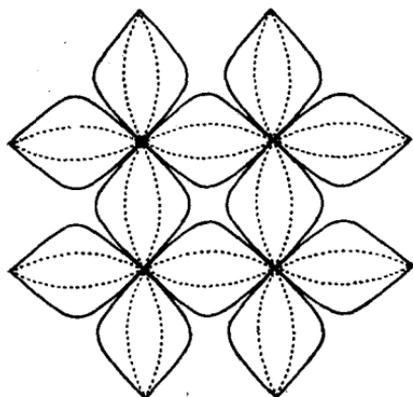


Рис. 1.2.10. Линии постоянной вертикальной скорости однокомпонентной плазмы, подогреваемой снизу, в вертикальном однородном магнитном поле (расчет). [Из работы: *Klenk H., Haken H., Acta Phys. Austriaca, 52, 187 (1980).*]

в жидкостях могут наблюдаться самые различные неустойчивости, неудивительно, что они существуют и в плазме. Заряды и их взаимодействие с электромагнитными полями могут порождать новые типы неустойчивостей, и действительно, в плазме наблюдается поистине неисчерпаемое множество разнообразных неустойчивостей. Например, на рис. 1.2.10 представлен результат теоретического расчета структуры распределения скоростей в плазме, находящейся в постоянном (вертикальном) магнитном поле и подогреваемой снизу. Перечисление возможных типов неустойчивостей в плазме выходит за рамки нашей книги. Плазма может не только переходить в упорядоченные состояния, но и мигрировать от одной

неустойчивости к другой; из-за сильной неустойчивости одни состояния могут вымирать, уступая место другим, и т. д. Исследование этих явлений имеет первостепенное значение для разработки термоядерных установок и других областей, например для астрофизики.

### 1.2.4. Физика твердого тела: мультистабильность, импульсы, хаос

Приведем лишь несколько примеров, в которых при изменении внешних условий происходят качественно новые явления.

а) *Осциллятор Ганна*. Если к образцу арсенида галлия ( $\text{GaAs}$ ) приложить относительно небольшое напряжение, возникает постоянный ток, подчиняющийся закону Ома. Когда же напряжение, возрастая, достигает некоторого критического значения, постоянный ток сменяется периодическими импульсами. При дальнейшем возрастании напряжения периодичность импульсов может нарушаться — наступает хаос.

б) *Туннельные диоды*. Их изготавливают из полупроводников, в которые, чтобы деформировать их энергетические зоны, внедрены

определенные примесные атомы. При наложении электрического поля возникает туннельный ток, и диод может переходить в различные рабочие состояния, как показано на рис. 1.2.11.

в) *Термоупругие неустойчивости.* Качественные изменения поведения в макроскопических масштабах наблюдаются и в механике, например в термоупругих неустойчивостях. Если к твердому телу приложить нагрузку, то за пределами упругости при некотором критическом значении напряжения могут возникнуть качественно новые явления, например акустическое излучение.

г) *Рост кристаллов.* Структуры в кристаллах могут наблюдаться при двух различных масштабах длины. На микроскопическом уровне атомы (или молекулы) образуют правильную решетку со строго заданными расстояниями между узлами. Порядок на микроскопическом уровне — правильное расположение атомов или молекул в решетке можно наблюдать с помощью дифракции рентгеновских лучей или электронов. Постоянная кристаллической решетки дает один масштаб длины. Другой масштаб длины связан с макроскопической формой кристалла, например с формой снежинки. Структуру кристаллической решетки по общепринятому мнению удастся объяснить, предположив, что атомы или молекулы находятся в состоянии с минимальной свободной энергией, которое в принципе может быть вычислено с помощью квантовой механики. Объяснение макроскопических форм кристаллов требует иного подхода. В этом случае необходимо исследовать процессы роста кристаллов. Изучением такого рода проблем занимается синергетика.

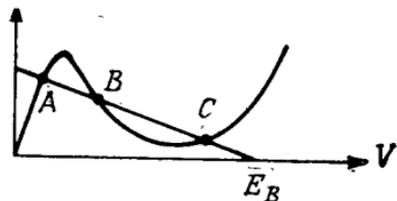
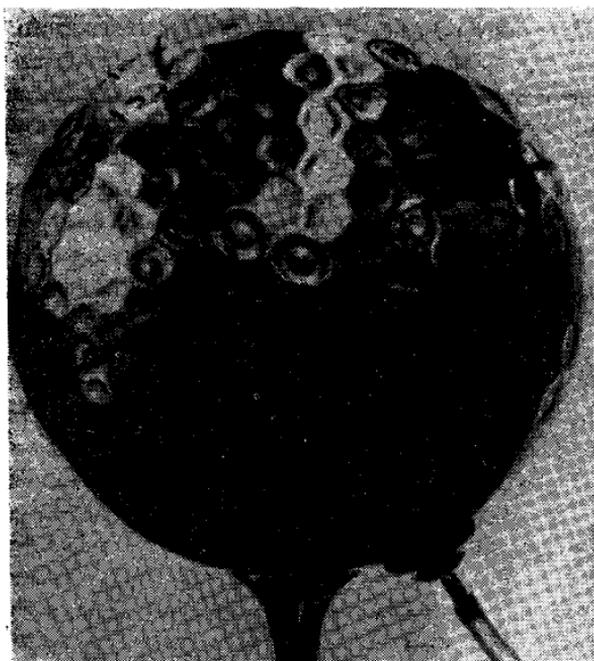


Рис. 1.2.11. Различные рабочие состояния  $A$ ,  $B$  и  $C$  туннельного диода на кривой  $I(V)$ , где  $I$  — ток,  $V$  — приложенное напряжение. Состояния  $A$  и  $C$  устойчивы, состояние  $B$  неустойчиво. Эта картина — типичный пример бистабильного устройства с устойчивыми точками  $A$  и  $C$ .

### 1.3. Техника

#### 1.3.1. Строительная механика, сопротивление материалов, авиа- и ракетостроение: выпучивание после «выхлопа», флаттер и т. д.

В технике хорошо известны случаи, когда изменение внешних параметров вызывает резкие макроскопические изменения систем. Примеры: изгиб стержня под действием нагрузки, исследованный в XVIII в. Эйлером; разрушение мостов при закритическом нагружении; деформации тонких оболочек под действием однородных нагрузок (рис. 1.3.1): в них после «выхлопа» возникают шести-



**Рис. 1.3.1.** Тонкая металлическая оболочка, находящаяся под низким внутренним давлением. На снимке видна образующаяся после «выхлопа» структура с хорошо различимыми шестиугольниками. [Из работы: *Carlson R. L., Sedelbeck R. L., Hoff N. J.*, *Experimental Mechanics*, 7, 281 (1967).]

угольные и другие структуры. Механические неустойчивости наблюдаются не только в статике, но и в динамике — таково, например, явление флаттера.

### 1.3.2. Электротехника и электроника: нелинейные колебания

Радиоволны генерируются электромагнитными осцилляторами, т. е. цепями, содержащими электронные лампы или транзисторы. Когерентные электромагнитные колебания этих устройств можно рассматривать как одно из проявлений самоорганизации. В неколебательном состоянии электроны движутся случайно, так как их движение связано с тепловым шумом, но при подходящих внешних условиях могут возникнуть незатухающие колебания, при которых макроскопический электрический ток в электронной цепи осциллирует с вполне определенной частотой. Если генераторы связаны между собой, то возникает ряд явлений, общих с наблюдаемыми в гидродинамике: появление комбинационных частот, удвоение или утроение периода (рис. 1.3.2) и хаос, т. е. беспорядочное излучение. Важное значение при этом имеет вопрос о том, может ли

система связанных генераторов действовать как набор элементов, каждый из которых колеблется со своей частотой, или возникают совершенно новые типы движения, например хаотическое движение.

### 1.4. Химия: макроскопические структуры

В этой области синергетика сосредоточивает свое внимание на тех явлениях, которые сопровождаются образованием макроскопических структур. Обычно если дать реагентам провзаимодействовать, интенсивно перемешивая реакционную смесь, то конечный продукт получается однородным. Но в некоторых реакциях могут возникать временные, пространственные или смешанные (пространственно-временные) структуры. Наиболее известным примером может служить реакция Белоусова—Жаботинского. В колбу сливают в определенных пропорциях  $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ ,  $\text{KBrO}_3$ ,  $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , добавляют несколько капель ферроина (индикатор окисления — восстановления) и перемешивают. В реакторе непрерывного перемешивания могут возникать концентрационные колебания, наблюдаемые непосредственно по изменению цвета от красного к синему (рис. 1.4.1). В замкнутой системе, т. е. без подвода новых веществ, эти колебания затем затухают. Но

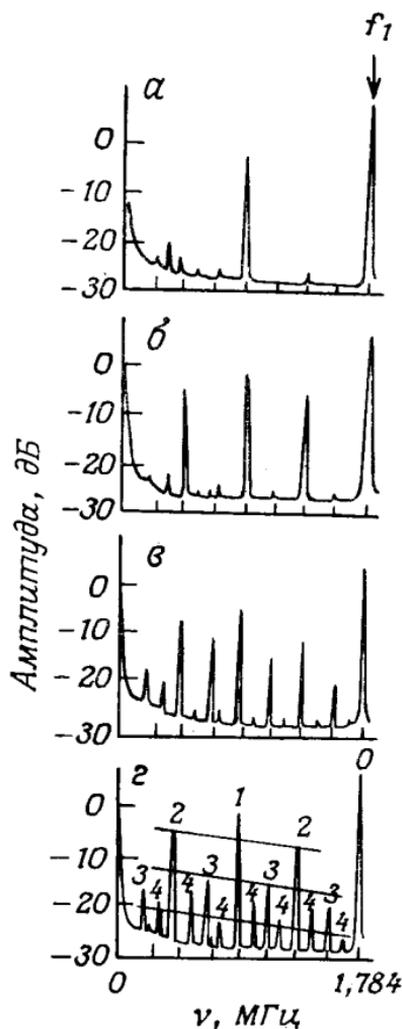


Рис. 1.3.2. Серия удвоений периода при увеличении управляющего параметра (сверху вниз) в спектрах мощности электронного устройства с нелинейной емкостью. [Из работы: *Linsay P.S.*, Phys. Rev. Lett., 47, 1349 (1981).]

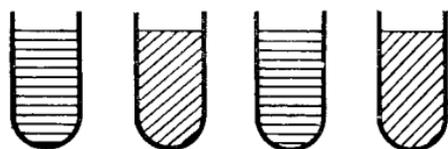
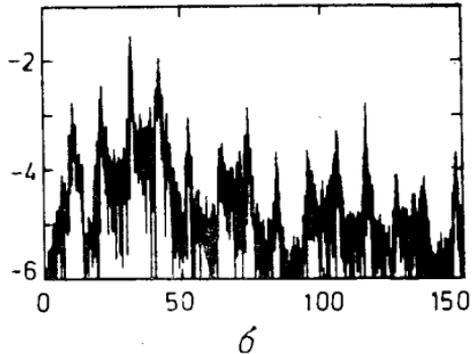
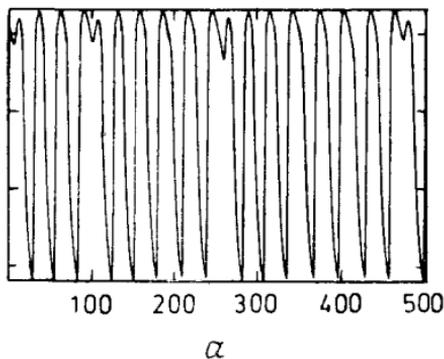
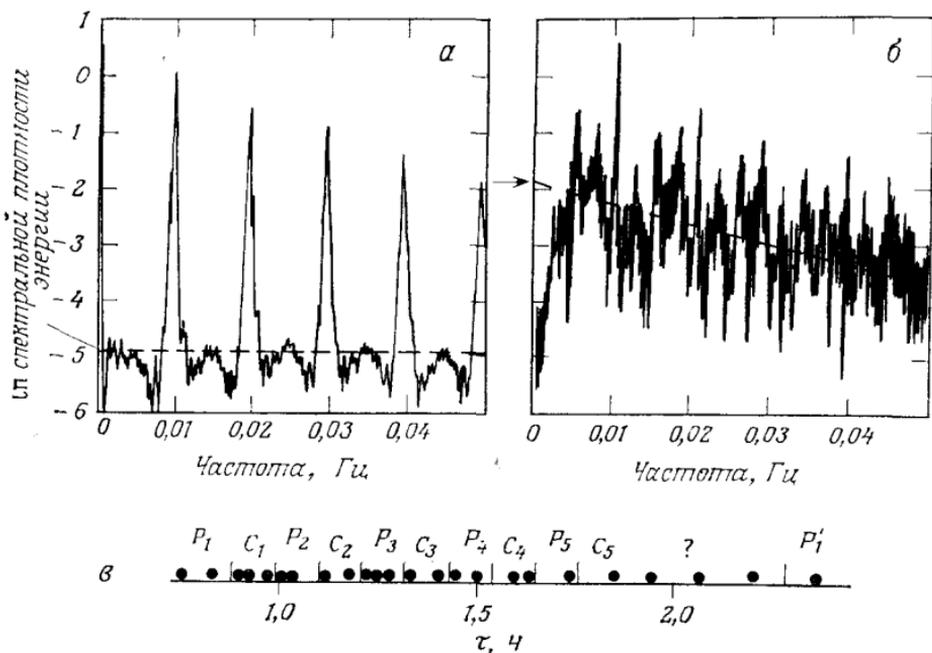


Рис. 1.4.1. Пример химических колебаний (схема).  
красный синий красный синий

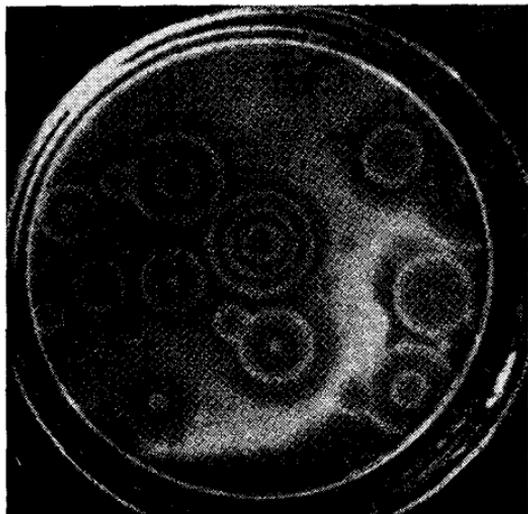


**Рис. 1.4.2.** Реакция Белоусова—Жаботинского в стадии хаоса. *a* — оптическая плотность раствора (в произвольных единицах) как функция времени (в с); *б* — соответствующая левой кривой спектральная плотность энергии как функция частоты в полулогарифмической шкале. [Из работы: Vidal C. — In: Chaos and Order in Nature/Ed. by H. Haken. Springer Series in Synergetics, vol. 11. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1981, p. 69. Имеется перевод: Видаль К. Динамические неустойчивости, наблюдаемые в системе Белоусова—Жаботинского. — В сб.: Синергетика: Пер. с англ. [Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М.: Мир, 1984, с. 109—125.]



**Рис. 1.4.3.** Динамика реакции Белоусова—Жаботинского в проточном реакторе идеального перемешивания. Энергетические спектры потенциала бромид-иона приведены для периодического (*a*) и хаотического (*б*) режимов при различных временах пребывания в реакторе  $\tau$ , где  $\tau$  — объем реактора/объемный расход потока. Все остальные параметры поддерживались постоянными. *в* — последовательная смена периодических и хаотических режимов при увеличении времени пребывания в реакторе. [Из работ: Turner J. S., Roux J. C., McCormick W. D., Swinney H. L., Phys. Lett., 85A, 9 (1981); In: Nonlinear Problems: Presence and Future/Ed. by A. R. Bishop. — Amsterdam: North-Holland, 1981.]

если непрерывно подводить реагенты и отводить конечные продукты, то колебания продолжают неограниченно долго. В настоящее время известны десятки систем, в которых наблюдаются химические колебания. Изменяя на входе концентрацию одного из реагентов, можно получить последовательность различных типов поведения, например периодические колебания, чередующиеся с хаотическим режимом (рис. 1.4.2, 1.4.3). Если реакционную смесь не перемешивать, то могут возникнуть пространственные структуры. Например, в реакции Белоусова—Жаботинского наблюдаются концентрические волны (рис. 1.4.4) или спирали. Некоторые колебательные реакции чувствительны к свету (фотохимия). Под воздействием света в них могут наблюдаться либо периодические концентрационные колебания, либо хаотические состояния. Совершенно иной класс макроскопических структур, возникающих при непрерывном подводе вещества, составляют пламена. Возможно, понятия синергетики позволят по-новому понять механизм этих явлений, известных с тех пор,



**Рис. 1.4.4.** Концентрические волны реакции Белоусова—Жаботинского. [Из работы: *Smoes M.L.*— In: *Dynamics of Synergetic Systems*/Ed. by H. Haken. Springer Series in Synergetics, vol. 6.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980, p. 80. Имеется перевод: *Смоэс М.* Химические волны в колебательной системе Жаботинского.— В сб.: *Синергетика: Пер. с англ./Под ред. Б. Б. Кадомцева.*— М.: Мир, 1984, с. 139—163.]

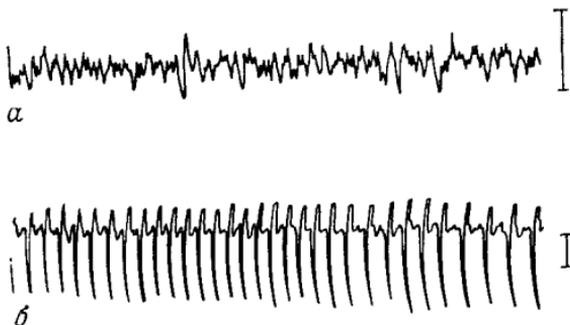
как люди увидели огонь. Наконец, следует ожидать, что методы и понятия синергетики окажутся применимыми [в химии и на молекулярном уровне, в частности, к поведению биологических молекул. Однако все эти области переживают стадию бурного развития и включать их в нашу книгу было бы преждевременно.

## 1.5. Биология

### 1.5.1. Несколько общих замечаний

Животный мир дает нам поистине необозримое множество высоко упорядоченных и великолепно функционирующих структур. По-видимому, в биологической системе ничто не происходит без

кооперации отдельных ее частей на высоком уровне. Синергетические процессы позволяют биологическим системам «трансформировать» энергию, предварительно преобразованную на молекулярном уровне, в ее макроскопические формы. Синергетические процессы проявляются в мышечном сокращении, приводящем к всевозможным движениям, электрических колебаниях в коре головного мозга (рис. 1.5.1, *a*, *б*), образовании заряда у электрических рыб, распознавании образов, речи и т. д. Все это объясняет, почему биология по праву считается наиболее важной областью исследований



**Рис. 1.5.1.** Два примера энцефалограмм. *a* — нормальная энцефалограмма; *б* — энцефалограмма, снятая во время эпилептического припадка. [По данным А. Качмарека и У. Р. Адея, приведенным в работе: Babloyantz A.— In: Dynamics of Synergetic Systems/Ed. by H. Haken. Springer Series in Synergetics, vol. 6.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980, p. 180.]

ля синергетики. В то же время не следует забывать и о чрезвычайной сложности биологических систем; поэтому мы поступим разумно, если сосредоточим внимание лишь на избранных проблемах, примеры которых будут приведены ниже.

### 1.5.2. Морфогенез

Основную проблему морфогенеза можно сформулировать следующим образом: откуда первоначально недифференцированные клетки знают, где и каким образом дифференцироваться? Как показывают эксперименты, такого рода информация не содержится в отдельных клетках. Клетка, находящаяся в ткани, получает информацию о своем положении от окружающих клеток, после чего происходит дифференциация. В экспериментах, произведенных на эмбрионах, клетка из центральной части тела после пересадки в головной отдел развивалась в глаз. Эти эксперименты показали, что клетки не располагают информацией о своем последующем развитии с самого начала (например, через ДНК), а извлекают ее из своего положения в клеточной ткани. Предполагается, что носителем позиционной информации служит химическая «праструк-

тура», возникающая аналогично структурам, описанным в разд. 1.4. Эти структуры обязаны своим возникновением совместному действию реакций и диффузии молекул.

Предполагается также, что при достаточно высокой локальной концентрации этих молекул, называемых морфогенами, включаются в работу гены, что и приводит к дифференциации клеток. В гидре удалось обнаружить ряд веществ, которые считаются хорошими кандидатами в активаторы или ингибиторы образования головы или щупалец. Если подробную «синергетическую» теорию развития органов, например глаза, еще предстоит разработать, то образование более простых структур, например полос на шкуре, узоров на крыльях бабочек, уже сейчас находит объяснение в рамках синергетического подхода.

### 1.5.3. Динамика популяций

К числу явлений, ожидающих здесь своего объяснения, относятся, например, множественность и распределение видов. Если различные виды поддерживаются общим пищевым ресурсом, то начинается межвидовая борьба, и тогда применим принцип Дарвина: *выживает наиболее приспособленный вид*. (Нельзя не отметить сильную аналогию, существующую между конкуренцией лазерных мод и межвидовой борьбой.) Если имеются разнотипные пищевые ресурсы, то становится возможным *сосуществование* видов.

Численность видов может быть подвержена *временным колебаниям*. В начале XX в. рыбаки на побережье Адриатического моря обратили внимание на периодические изменения численности популяций рыб. Эти колебания обусловлены «взаимодействием» между рыбами-хищниками и рыбами-жертвами. Если хищники поедали слишком много рыб-жертв, то численность жертв падала, что в конечном счете приводило к сокращению популяции хищников. В свою очередь уменьшение численности хищников способствовало росту популяции рыб-жертв, и таким образом возникали циклические изменения обеих популяций. У других популяций, например у популяций некоторых насекомых, численность может быть подвержена *хаотическим вариациям*.

### 1.5.4. Эволюция

Эволюцию можно рассматривать как образование все новых и новых макроскопических структур (а именно новых видов). Модели эволюции биомолекул основаны на математической формулировке принципа Дарвина, т. е. выживания наиболее приспособленного вида. Предполагается, что биомолекулы размножаются автокаталитически (или более сложным способом за счет циклического катализа в «гиперциклах») (рис. 1.5.2). Можно показать, что такой механизм обуславливает отбор, который в сочетании с мутациями может приводить к эволюционному процессу.

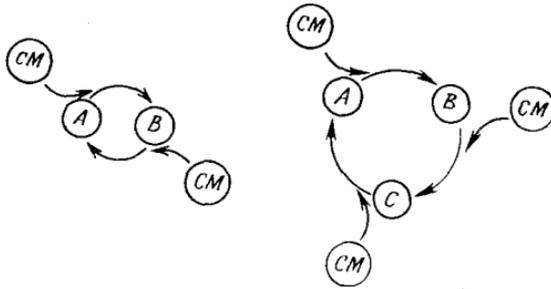


Рис. 1.5.2. Примеры гиперциклов Эйгена—Шустер. Молекулы *A* и *B* возникают в результате автокаталитической реакции. Молекулы *A* способствуют увеличению числа молекул *B*, и наоборот. *СМ* означает «строительный материал», из которого образуются молекулы *A* и *B*. Справа изображен цикл, в котором участвуют биомолекулы трех сортов *A*, *B* и *C*.

### 1.5.5. Иммунная система

Новую серию примеров поведения сложных систем в биологии дает нам кинетика ферментов и антител-антигенов. Так, в последнем случае были успешно разработаны новые типы антител, в которых антитела действуют как антигены, что приводит к очень сложной динамике всей системы.

## 1.6. Общая теория вычислительных систем

### 1.6.1. Самоорганизация вычислительных машин (в частности, параллельные вычисления)

Проблема состоит в том, чтобы построить сеть вычислительных машин, в которой распределение вычислений между отдельными компонентами осуществлялось бы на основе самоорганизации (рис. 1.6.1), а не управляющей машиной (рис. 1.6.2). Распределение заданий соответствует определенным структурам потока

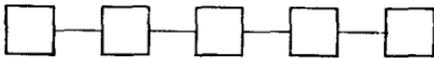


Рис. 1.6.1. Схема компьютерной системы, в которой отдельные ЭВМ связаны между собой и сами распределяют задания.

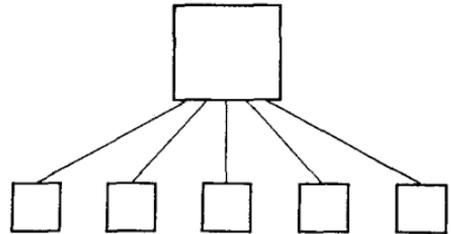


Рис. 1.6.2. Отдельные ЭВМ подчинены управляющему компьютеру.

информации. В то время как синергетические методы позволяют рассматривать непрерывные изменения общей задачи, выяснение

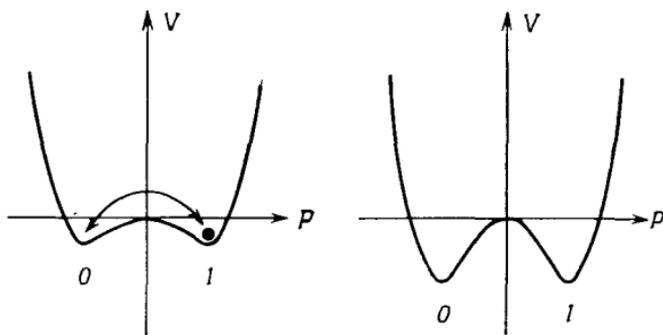
возможностей сети вычислительных машин (и в частности, ответ на вопрос, может ли такая сеть справиться с качественно новыми заданиями) требует серьезных дополнительных исследований.

### 1.6.2. Распознавание образов машинами

Для полноты упомянем как типично синергетический процесс распознавание образов. Математическая разработка этого круга проблем на основе методов синергетики находится еще в младенческом состоянии, поэтому мы не будем приводить здесь какие-либо подробности.

### 1.6.3. Надежные системы из ненадежных элементов

Обычно отдельные элементы системы, особенно на молекулярном уровне, могут быть ненадежными из-за дефектов, тепловых флуктуаций и по другим причинам. Существует предположение,



**Рис. 1.6.3.** Наглядная схема построения надежной системы из ненадежных элементов. *Слева:* плоское дно потенциальной ямы  $V$  отдельного элемента позволяет системе легко перескакивать из состояния 0 в состояние 1, и наоборот; *справа:* при связывании отдельных элементов дно эффективной потенциальной ямы может значительно углубиться, и перескоки системы из одного состояния в другое становятся маловероятными.

что к подобному типу относятся такие элементы нашего мозга, как нейроны. Природа справилась с проблемой построения надежных систем из столь ненадежных элементов. Что же касается элементов наших вычислительных машин, то они, становясь все меньше, становятся все менее надежными. Как можно было бы скомпоновать элементы вычислительной машины, чтобы система в целом функционировала надежно? Методы синергетики, с которыми мы познакомимся в дальнейшем, позволяют предложить системы, способные справиться с этой задачей. Вот, например, как можно построить надежную память из ненадежных элементов. Для того чтобы описать поведение отдельного элемента, воспользуемся понятием параметра порядка. Смысл его мы объясним позднее, а пока

нам достаточно интерпретировать параметр порядка с помощью частицы, движущейся в потенциале (и совершающей сильно затухающие колебания) (рис. 1.6.3). Два рабочих состояния 1 и 2 элемента памяти отождествим с двумя минимумами потенциала. Ясно, что если «ущелья» имеют плоское дно, то шум вынудит «частицу» двигаться туда и обратно, и рабочее состояние становится невозможным. Но если связать между собой несколько элементов, то получится потенциал с более глубокими ямами, и удержание станет более возможным. Связывая элементы в различной последовательности, можно получить несколько надежных рабочих состояний. Обратимся теперь к явлениям, изучаемым науками, не относящимися к числу наук о природе.

## 1.7. Экономика

Макроскопические изменения, происходящие в экономике, подчас носят драматический характер. Типичным примером может служить переход от полной занятости к неполной. Изменение некоторых параметров управления, такое, как переориентация капиталовложений с увеличения производства на совершенствование производства, может привести к новому состоянию экономики, т. е. к неполной занятости. Колебания между этими двумя состояниями наблюдались и могут быть объяснены методами синергетики. Другим примером развития макроскопических систем может служить эволюция общества от аграрного к индустриальному.

## 1.8. Экология

Резкие изменения в макроскопических масштабах наблюдаются в экологии и родственных ей областях. Например, в горных районах изменение климата с высотой над уровнем моря (управляющий параметр) может быть причиной существования различных растительных зон. Аналогичные наблюдения имеются и в отношении различных климатических поясов на Земле, также приводящих к существованию различных растительных зон. Другие примеры макроскопических изменений дает загрязнение окружающей среды: увеличение зараженности на несколько процентов может привести к вымиранию целой популяции, например к гибели всей рыбы в озере.

## 1.9. Социология

Исследования социологов убедительно свидетельствуют, что формирование «общественного мнения» (которое можно определять по-разному) — коллективное явление. Один из его механизмов, возможно имеющий фундаментальное значение, был обнаружен

в результате экспериментов С. Эша. Основная идея этих экспериментов заключалась в следующем. Группе, состоявшей примерно из десяти «испытуемых», предлагалось указать, с какой из трех различных по длине линий совпадает предъявляемый отрезок (рис. 1.9.1). За исключением одного настоящего испытуемого все остальные члены группы были помощниками экспериментатора, о чем испытуемый не знал. В первом опыте помощники давали правильный ответ (испытуемый также давал правильный ответ). В последующих опытах испытуемые давали неверные ответы, и примерно 60% испытуемых также давали неверные ответы. Это свидетельствует о том, что мнение остальных членов группы явно влияет на мнение индивидуумов. Результаты лабораторных экспериментов Эша подтверждаются натурными экспериментами Э. Ноэль-Неймана. Поскольку в процессе формирования общественного мнения индивидуумы оказывают друг на друга взаимное влияние, то и это явление может быть проанализировано методами синергетики. В частности, при некоторых внешних условиях (состояние экономики, высокие налоги) общественное мнение может резко измениться, что проявляется, например, в возникновении различного рода кризисных ситуаций (см. список литературы, приведенный в конце книги).



Рис. 1.9.1. Типичная схема эксперимента Эша, описанного в тексте.

### 1.10. Что общего между приведенными выше примерами?

Во всех случаях система состоит из очень большого числа под систем. При изменении определенных условий (управляющих параметров), даже если эти изменения ничем, казалось бы, не выделены, в системе образуются качественно новые структуры в макроскопических масштабах. Система обладает способностью переходить из однородного, недифференцированного состояния покоя в неоднородное, но хорошо упорядоченное состояние или даже в одно из нескольких возможных упорядоченных состояний. Такие системы могут находиться в различных устойчивых состояниях (бистабильность или мультистабильность) и могут быть использованы, например, в качестве элементов памяти (каждое устойчивое состояние соответствует определенному числу, например в случае бистабильной системы — нулю и единице) в вычислительных машинах. В упорядоченном состоянии могут происходить также колебания различных типов с одной частотой (периодические колебания) или с несколькими частотами (квазипериодические колебания). Система может совершать также случайные движения (хаос). Кроме

того, могут возникать пространственные структуры, например ячейки, напоминающие по внешнему виду пчелиные соты, концентрические волны или спирали. Такие структуры могут поддерживаться в динамике за счет непрерывного потока энергии (или вещества) через систему (с подобными ситуациями мы сталкиваемся, например, в гидродинамике). В других случаях структуры сначала возникают в динамике, а затем как бы «отвердевают»; с подобными ситуациями мы сталкиваемся, например, в процессах роста кристаллов или в морфогенезе. В более абстрактном плане можно утверждать, что в социальных, культурных или научных «системах» также возникают структуры — идеи, понятия, парадигмы. Таким образом, во всех случаях мы имеем дело с процессами самоорганизации, приводящими к возникновению качественно новых структур в макроскопических масштабах. Какие механизмы порождают эти новые структуры? Каким образом описать переходы из одного состояния в другое? Поскольку системы, о которых идет речь, могут состоять из подсистем самой различной природы (атомов, молекул, клеток или животных), на первый взгляд кажется, что поиск общих понятий и математических методов — дело безнадежное. Тем не менее именно в этом и состоит цель этой книги.

### 1.11. Какие уравнения нам нужны?

Как следует математически описывать все те (и многие другие) явления, с которыми мы успели, хотя и бегло, познакомиться? При выборе математического аппарата необходимо иметь в виду, что он должен быть применим к проблемам, с которыми сталкиваются физик, химик, биолог, электротехник и инженер-механик. Не менее безотказно он должен действовать и в области экономики, экологии и социологии. Во всех этих случаях нам придется рассматривать системы, состоящие из очень большого числа подсистем, относительно которых мы можем не располагать всей полнотой информации. Для описания таких систем нередко используют подходы, основанные на термодинамике и теории информации. Но за последние годы стало ясно, что такие подходы (в том числе и некоторые обобщения, например термодинамика необратимых процессов) не дают адекватного описания физических систем, находящихся далеко от теплового равновесия, или экономических процессов. Причина заключается в том, что эти подходы по своей природе статичны, в основе их лежит теория информации, позволяющая делать предположения о числе возможных состояний. В [1] было показано, как работает такой формализм и где присущие ему ограничения заведомо вводят в заблуждение. Во всех системах, представляющих интерес для синергетики, решающую роль играет динамика. Как и какие макроскопические состояния образуются, определяется скоростью роста (или распада) коллективных

«мод» (в дальнейшем это утверждение будет доказано с математической строгостью). Можно сказать, что в определенном смысле мы приходим к своего рода обобщенному дарвинизму, действие которого распространяется не только на органический, но и на неорганический мир: возникновение макроскопических структур обусловлено рождением коллективных мод под действием флуктуаций, их конкуренцией и, наконец, отбором «наиболее приспособленной» моды или комбинации таких мод.

Ясно, что решающую роль играет параметр «время». Следовательно, мы должны исследовать эволюцию систем во времени. Именно поэтому интересующие нас уравнения иногда называют «эволюционными». Рассмотрим структуру таких уравнений.

### 1.11.1. Дифференциальные уравнения

Начнем с одной переменной  $q$ , изменяющейся со временем. Такой переменной может быть число клеток в ткани, число молекул или координата частицы. Скорость изменения  $q$  со временем обозначим  $dq/dt = \dot{q}$ . Во многих случаях  $\dot{q}$  зависит от текущего состояния системы, например от числа имеющихся в данный момент времени клеток. В простейшем случае соответствующее уравнение имеет вид

$$\dot{q} = \alpha q. \quad (1.11.1)$$

Такие уравнения встречаются, например, в химии, если скорость образования некоторого вещества  $q$  пропорциональна его концентрации  $q$  («автокаталитическая реакция»), или в популяционной динамике, где  $q$  соответствует числу особей. Широкий класс проблем сводится к рассмотрению осцилляторов. Уравнение осциллятора в простейшем случае имеет вид

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0, \quad (1.11.2)$$

где  $\omega$  — частота колебания.

### 1.11.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение (1.11.2) в отличие от уравнения (1.11.1), содержащего производную первого порядка, содержит производную второго порядка  $\ddot{q}_1$ . Однако, вводя дополнительную переменную  $q_2$  с помощью соотношения

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad (1.11.3)$$

мы можем свести уравнение (1.11.2) к системе двух уравнений: (1.11.3) и

$$\dot{q}_2 = -\omega^2 q_1. \quad (1.11.4)$$

Эти два уравнения эквивалентны одному уравнению (1.11.2). Трюк с введением дополнительных переменных позволяет сводить уравнения с производными старших порядков к системе дифференциальных уравнений, содержащих производные только первого порядка. Долгое время в большинстве областей науки и техники рассматривались главным образом уравнения вида (1.11.1) — (1.11.4) и их обобщения, поскольку они линейны и могут быть решены стандартными методами. А теперь мы обсудим другие, дополнительные свойства уравнений, характерных для синергетических систем.

### 1.11.3. Нелинейность

Все уравнения синергетики *нелинейны*. Рассмотрим пример из химии. Пусть вещество 1, имеющее концентрацию  $q_1$ , образуется автокаталитически в результате взаимодействия с веществом 2, имеющим концентрацию  $q_2$ . Увеличение концентрации вещества 1 определяется уравнением

$$\dot{q}_1 = \beta q_1 q_2. \quad (1.11.5)$$

Ясно, что взаимодействие, т. е. синергетика, частей (в нашем примере — молекул) описывается нелинейным членом. В общем случае мы будем рассматривать уравнения типа (1.11.5), правая часть которых есть нелинейная функция переменных системы. Обычно приходится рассматривать систему уравнений для нескольких переменных  $q_j$ .

### 1.11.4. Управляющие параметры

Еще одна существенная особенность синергетических систем состоит в том, что ими можно управлять, изменяя действующие на них внешние факторы. В синергетике мы рассматриваем главным образом открытые системы. Поток энергии или вещества (или поток энергии и вещества) уводит физическую, химическую или биологическую систему далеко от состояния термодинамического равновесия. Изменяя температуру, уровень радиации и т. д., мы можем управлять системами извне. В тех случаях, когда внешние факторы управления поддерживаются постоянными, мы можем учитывать их в уравнениях, полагая постоянными соответствующие параметры, называемые управляющими параметрами. Примером таких параметров может служить параметр  $\alpha$  в уравнении (1.11.1). Например, скорость роста клеток мы можем регулировать извне, обрабатывая их соответствующими химическими веществами. Параметр  $\alpha$  можно интерпретировать как разность между скоростью продуцирования  $p$  и скоростью распада  $d$ , т. е. положить  $\alpha = p - d$ . Нетрудно видеть, что в зависимости от скорости продуцирования в системе могут возникать совершенно различные типы поведения

популяции: экспоненциальный рост, стационарное состояние, экспоненциальный распад. Управляющие параметры могут по-разному входить в эволюционные уравнения. Например, в уравнении

$$\dot{q}_1 = \alpha q_1 + \beta q_1 q_2 \quad (1.11.6)$$

постоянная  $\beta$  описывает связь между двумя системами  $q_1$  и  $q_2$ . Если силу связи регулировать извне, то  $\beta$  играет роль управляющего параметра.

### 1.11.5. Стохастичность

К числу отличительных свойств синергетических систем относится и стохастичность. Временная эволюция синергетических систем зависит от причин, не предсказуемых с абсолютной точностью. Эти причины можно учесть, если ввести «флуктуирующие» силы  $f(t)$ , которые в простейшем случае преобразуют уравнение (1.11.1) к виду

$$\dot{q} = \alpha q + f(t). \quad (1.11.7)$$

Иногда введение флуктуирующих сил порождает глубокие философские проблемы, которые мы кратко обсудим, хотя в дальнейшем займем более прагматическую позицию: будем считать, что в каждой рассматриваемой нами системе флуктуирующие силы заданы. До появления квантовой механики в мышлении не только физиков, но и представителей других наук доминировали чисто механистические представления. Считалось, что коль скоро начальное состояние системы задано, ее дальнейшая эволюция во времени точно предсказуема. Суть детерминизма наиболее полно выразил Лаплас в известном отрывке из «Аналитической теории вероятностей»: «Разумное существо, которое в каждый данный момент знало бы все движущие силы природы и имело бы полную картину состояния, в котором природа находится, могло бы (если бы только его ум был в состоянии проанализировать эти данные) выразить одним уравнением как движение самых больших тел мира, так и движение мельчайших атомов. Ничто не осталось бы для него неизвестным, и оно могло бы обозреть одним взглядом как будущее, так и прошлое». Иначе говоря, если бы такое существо знало начальные состояния всех индивидуальных частей системы (в частности, положения и скорости всех образующих систему частиц) и взаимодействия между ними, то оно могло бы предсказать состояние системы в любой момент в будущем. Со времен Лапласа появились три новые важные идеи.

а) *Статистическая механика*. Хотя в принципе положения и скорости частиц газа вполне предсказуемы, вычисление их либо нежелательно, либо практически неосуществимо. Для любых целей достаточно описывать газ статистически, т. е. делать вероятностные предсказания того или иного состояния газа, например

предсказать, какова вероятность найти  $n$  частиц со скоростью  $v'$ , заключенной в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . Приняв такую вероятностную точку зрения, мы тем самым включим в описание флуктуации. Наиболее известный пример — броуновское движение, в котором  $f(t)$  в (1.11.7) — воздействие всех частиц жидкости на более крупную частицу. Такие флуктуации встречаются всякий раз, когда мы переходим от микроскопического описания к описанию, использующему более или менее макроскопические переменные, например когда мы описываем жидкость не положениями отдельных молекул, а локальной плотностью и скоростью молекул.

б) *Квантовые флуктуации.* С возникновением в 20-х годах квантовой теории стало ясно, что предсказывать с абсолютной точностью положения и скорости частиц невозможно даже в принципе. Это со всей отчетливостью показал принцип неопределенности Гейзенберга, который гласит: скорость и положение частицы невозможно одновременно измерить с абсолютной точностью. Тем самым было в корне подорвано основное допущение относительно «разумного существа» Лапласа. Наиболее точную форму соотношение неопределенности Гейзенберга обрело в предложенной Борном вероятностной интерпретации волновой функции в квантовой механике. Поскольку квантовая теория лежит в основе всех явлений материального мира, неопределенности, обусловленные квантовыми флуктуациями, неизбежны. Это имеет особенно важное значение в тех случаях, когда микроскопические явления усиливаются настолько, что обретают макроскопические размеры. (Например, в биологии квантовые флуктуации могут вызывать мутации.)

в) *Хаос.* Существует и третья, появившаяся сравнительно недавно, идея, показывающая, что и без квантовых флуктуаций поведение системы в будущем не предсказуемо. Хотя уравнения, описывающие эволюцию системы во времени, вполне детерминистичны, система может эволюционировать по совершенно различным маршрутам. Связано это с тем, что эволюция некоторых систем весьма чувствительна к начальным условиям, в чем нетрудно убедиться на простом примере из механики. Когда стальной шарик падает на острие вертикально стоящего лезвия бритвы, дальнейшая траектория шарика весьма сильно зависит от его положения относительно острия перед тем, как он ударится о лезвие. Вся индустрия игровальных автоматов зависит от подобных явлений.

Если влияние флуктуаций на систему учитывается флуктуирующей силой такого типа, как в (1.11.7), то мы говорим об аддитивном шуме. Случайно флуктуирующая окружающая среда может порождать также шумы других типов. Например, скорость роста в (1.11.1) может флуктуировать. В этом случае мы получаем уравнение

$$\dot{q} = \alpha(t)q \quad (1.11.8)$$

и говорим о мультипликативном шуме.

### 1.11.6. Многокомпонентность и мезоскопический подход

До сих пор мы обсуждали главные «блоки» тех уравнений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Настала пора учесть, наконец, такую особенность синергетических систем, как то, что все они состоят из очень большого числа подсистем. Следовательно, в описание синергетических систем должно входить много переменных, которые мы обозначим  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Поскольку значения этих переменных при заданном  $t$  (времени) описывают состояние системы, условимся называть  $q_1, q_2, \dots, q_n$  «переменными состояниями». Все переменные  $q_1, q_2, \dots, q_n$  можно объединить в вектор состояния  $\mathbf{q}$ :

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) = \mathbf{q}. \quad (1.11.9)$$

Для практических целей важен адекватный выбор переменных  $q$ . Необходимо различать для этого микроскопический, мезоскопический и макроскопический уровни описания. Рассмотрим в качестве примера жидкость. В соответствии с нашим пониманием этих терминов на *микроскопическом* уровне мы рассматриваем отдельные атомы и молекулы, описываемые заданием их положений, скоростей и взаимодействий. На *мезоскопическом* уровне мы описываем жидкость как ансамбль, состоящий из многих атомов и молекул. Протяженность такого ансамбля по предположению велика по сравнению с межуатомными расстояниями, но мала по сравнению с характерными размерами возникающих макроскопических структур, например по сравнению с шестиугольниками в неустойчивости Бенара. При мезоскопическом описании переменные  $q_i$  относятся к ансамблям атомов или молекул. В случае жидкости  $q_i$  можно отождествить с плотностью и средней локальной скоростью. При образовании макроскопических структур плотность и скорость могут локально изменяться. Иначе говоря,  $q_i$  становится переменной, зависящей от времени и положения в *пространстве*. Наконец, образование пространственных структур желателен изучать и на *макроскопическом* уровне. При рассмотрении непрерывно протяженных систем (жидкостей, химических реакций и т. д.) мы выбираем за исходный *мезоскопический* уровень и разрабатываем методы, позволяющие предсказывать возникающие макроскопические структуры.

Мезоскопический уровень позволяет вводить понятия, которые относятся к ансамблям атомов, но не могут быть определены для отдельного атома. К числу таких понятий относится, например, температура. Другим примером могут служить фазы — жидкая или твердая. Соответственно мы можем вводить переменные двух типов  $q_1(\mathbf{x}, t)$  и  $q_2(\mathbf{x}, t)$ , где  $q_1$  относится к плотности молекул в жидкости, а  $q_2$  — к плотности в твердой фазе. Это позволяет, например, математически описать рост кристалла с помощью эволюционных уравнений.

В других областях науки мезоскопический уровень не обязательно отождествлять с атомами и молекулами. Например, при математическом описании клеточной ткани может оказаться достаточным рассматривать клетки как отдельные элементы на микроскопическом уровне, а их *плотность* (или *тип*) — как подходящую переменную на *мезоскопическом* уровне.

Во всех случаях  $q_j$  или вектор состояния  $\mathbf{q}$  становятся функциями пространства и времени:

$$(q_1(\mathbf{x}, t), q_2(\mathbf{x}, t), \dots, q_n(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t). \quad (1.11.10)$$

Помимо временных изменений нам необходимо теперь рассматривать пространственные изменения, учитываемые главным образом с помощью производных по пространственным координатам. Примером может служить уравнение диффузии вещества

$$\dot{\mathbf{q}} = D\Delta\mathbf{q}, \quad (1.11.11)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, который в декартовых координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.11.12)$$

$D$  — коэффициент диффузии.

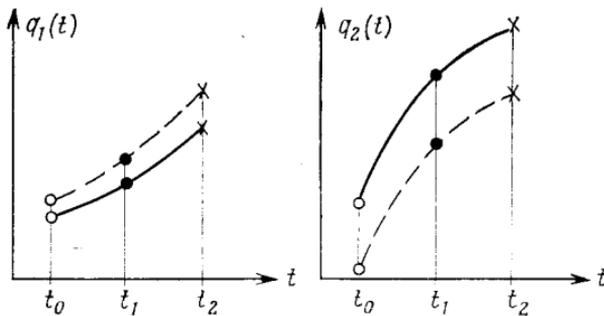
Все перечисленные выше индивидуальные особенности уравнений, взятые вместе, приводят нас к *нелинейному стохастическому дифференциальному уравнению в частных производных* общего типа

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\alpha, \mathbf{q}, \nabla, \mathbf{x}, t), \quad (1.11.13)$$

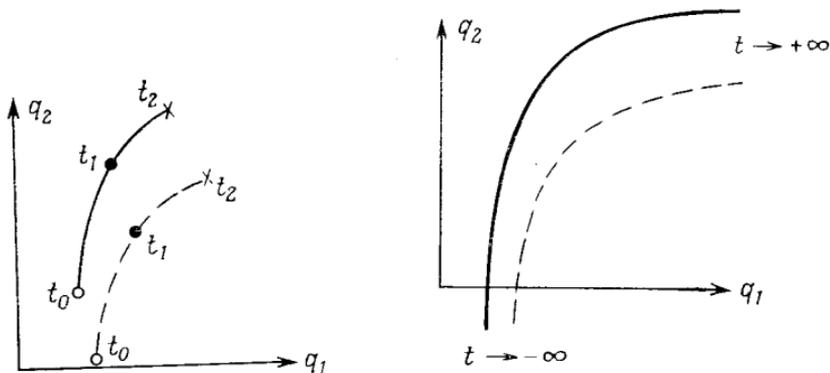
где  $\nabla$  — оператор  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ . Исследование таких уравнений — задача весьма сложная, и мы подойдем к ее решению в два этапа: сначала опишем, как выглядят решения таких уравнений хотя бы в простейших случаях, а затем сосредоточим внимание на явлениях, имеющих общую природу.

## 1.12. Как выглядят решения?

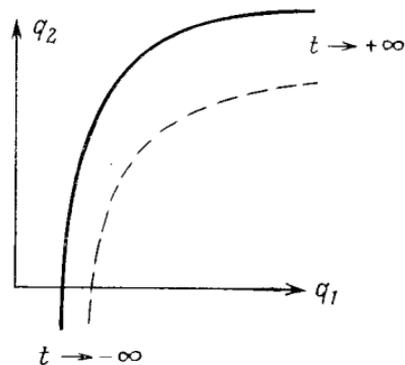
Решения  $\mathbf{q}(t)$  или  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ , по крайней мере в принципе, можно представить в виде графиков. Рассмотрим сначала переменные  $q_j$ , т. е.  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , не зависящие от  $\mathbf{x}$ , но зависящие от  $t$ . Временную эволюцию  $q_j(t)$  можно представить с помощью графиков (рис. 1.12.1). Во многих случаях желательно окинуть одним взглядом все переменные сразу. Для этого можно, например, рассматривать  $q_1, q_2, \dots, q_n$  как координаты точки в  $n$ -мерном пространстве и каждому значению  $t_1, t_2, \dots$  сопоставлять соответствующую точку  $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$  (рис. 1.12.2). Проследившая непрерывную последовательность точек от  $t \rightarrow -\infty$  к  $t \rightarrow +\infty$ , мы по-



**Рис. 1.12.1.** Временная эволюция переменных  $q_1$  и  $q_2$ . Значения переменных  $q_1$  и  $q_2$  в начальный момент времени  $t$  заданы. Их зависимость от времени при  $t > t_0$  показана сплошными кривыми. При других начальных данных зависимость  $q_1$  и  $q_2$  от времени описывается другими кривыми (например, штриховыми). Если в системе много переменных, то аналогичные кривые необходимо построить для каждой из них.



**Рис. 1.12.2.** Вместо того чтобы строить зависимости переменных от времени, как на рис. 1.12.1, можно строить траектории на плоскости  $q_1q_2$ , сопоставляя каждому значению  $t_j$  точку с координатами  $q_1(t_j)$ ,  $q_2(t_j)$ . Если система в начальный момент времени  $t_0$  находится в различных точках, то ее траектории также различны. В случае  $n$  переменных траектории приходится строить в  $n$ -мерном пространстве.



**Рис. 1.12.3.** В общем случае, когда желательно проследить за всей траекторией, приходится рассматривать и  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ .

лучаем траекторию (рис. 1.12.3). Выбрав другую начальную точку, мы окажемся, вообще говоря, на другой траектории (рис. 1.12.1—1.12.3). Вычерчивая соседние траектории, мы получим целый пучок траекторий (1.12.4). Так как эти траектории напоминают линии тока в жидкости, их иногда называют «линиями тока», а их совокупность — «поток».

Хорошо известно (см., например, [1]), что траектории отнюдь не всегда идут (в одном направлении) от  $q = -\infty$  до  $q = +\infty$ , а могут по-разному заканчиваться при конечных  $q$ . Например,

в двумерном случае траектории могут заканчиваться в узле (рис. 1.12.5) или в фокусе (рис. 1.12.6). Поскольку линии тока как бы притягиваются своими конечными точками, сами конечные

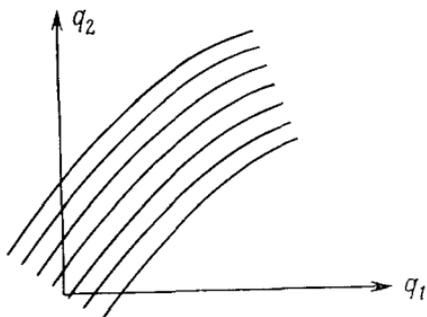


Рис. 1.12.4. Пример семейства траекторий.

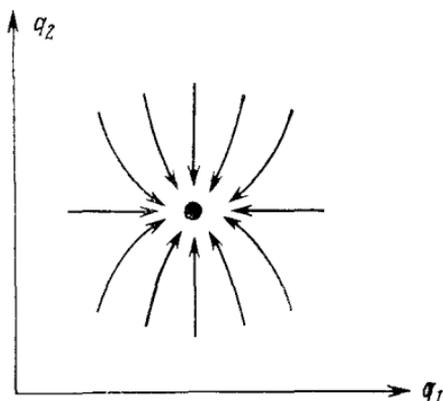


Рис. 1.12.5. Траектории, заканчивающиеся в (устойчивом) узле. Если обратить время, то траектории будут выходить из узла, который станет неустойчивым.

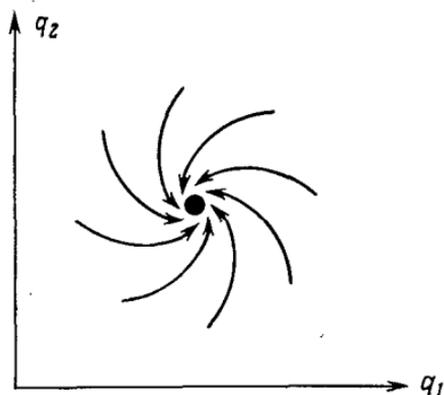


Рис. 1.12.6. Траектории, заканчивающиеся в (устойчивом) фокусе. Если обратить время, то траектории будут выходить из фокуса, который станет неустойчивым.

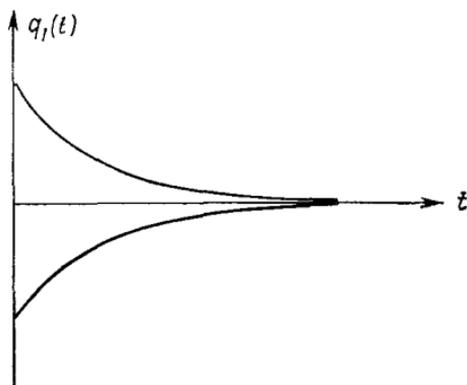
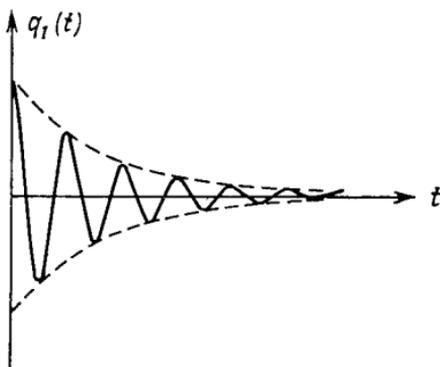


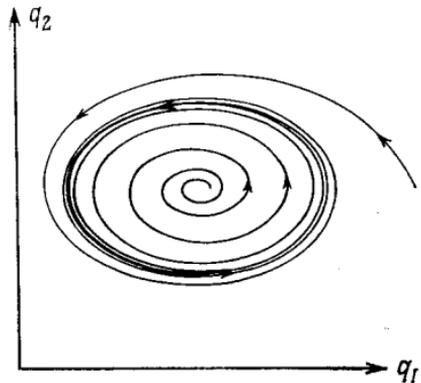
Рис. 1.12.7. Временная зависимость переменной  $q_1(t)$  в случае узла. Движение монотонно затухающее.

точки называются аттракторами. В случае узла временное поведение  $\mathbf{q}$  описывается графиком такого типа, как на рис. 1.12.7, в случае фокуса — графиком такого типа, как на рис. 1.12.8. На плоскости траектории помимо узлов, фокусов и седел могут заканчиваться, только навиваясь на предельный цикл (рис. 1.12.9). В случае, показанном на рис. 1.12.9, предельный цикл устойчи-

вый, так как притягивает к себе соседние траектории. Он также принадлежит к числу «аттракторов». Временная эволюция  $q_1$  при движении по предельному циклу представлена на рис. 1.12.10.

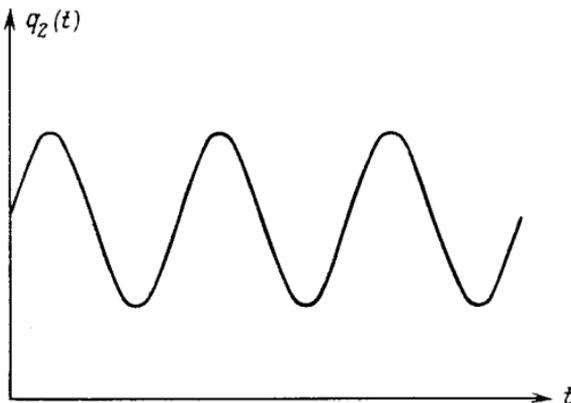


**Рис. 1.12.8.** Временная зависимость переменной  $q_1(t)$  в случае фокуса. Движение колебательное и затухающее.



**Рис. 1.12.9.** Устойчивый предельный цикл на плоскости. Траектории приближаются к предельному циклу снаружи и изнутри.

Это — незатухающие колебания. При числе размерностей больше двух могут возникнуть аттракторы других типов. К важному классу относятся аттракторы, лежащие на *многообразиях* или образующие



**Рис. 1.12.10.** Временная зависимость переменной, например  $q_2(t)$ , в случае предельного цикла.

многообразия. Поясним понятие многообразия несколько подробнее. Простым примером многообразия может служить предельный цикл, по которому происходит движение на рис. 1.12.9. Каждая точка многообразия может быть отображена в некоторую точку

отрезка, и наоборот (рис. 1.12.11). Все многообразие может быть разбито на сегменты, допускающие отображение на перекрывающиеся интервалы на прямой, и наоборот (рис. 1.12.12). Каждый сегмент на окружности соответствует определенному интервалу на прямой. Выбрав за полный интервал от 0 до  $2\pi$ , мы можем сопоставить каждой точке на окружности точку на отрезке оси  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ . Так как между точками на предельном цикле и на интервале от 0 до  $2\pi$  существует взаимно однозначное соответствие, мы можем ввести координату  $\varphi$  (систему координат) на самом пре-

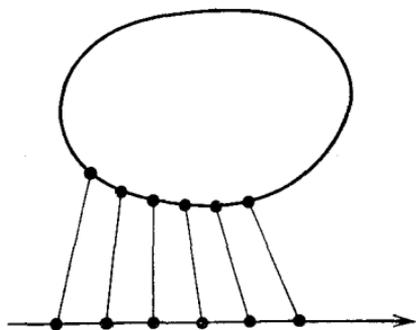


Рис. 1.12.11. Взаимно однозначное отображение отдельных точек предельного цикла на точки прямой.

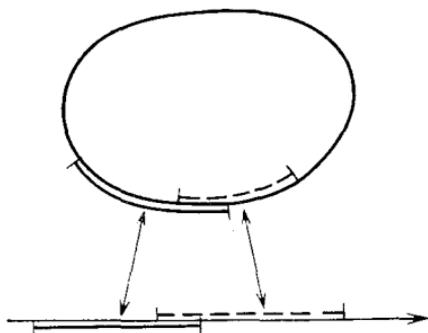


Рис. 1.12.12. Взаимно однозначное отображение перекрывающихся отрезков предельного цикла на перекрывающиеся отрезки прямой.

дельном цикле. Это система координат не зависит от системы координат на плоскости, в которую погружен предельный цикл.

Предельный цикл представляет собой дифференцируемое многообразие, поскольку когда мы используем, например, время как параметр, то при этом предполагаем, что существует  $\dot{\mathbf{q}}$ , или, если говорить геометрическим языком, что касательная существует в каждой точке предельного цикла.

Разумеется, в общем случае предельные циклы отнюдь не обязательно должны быть окружностями, они могут быть замкнутыми орбитами, движение по которым повторяется с периодом  $T = 2\pi/\omega$  ( $\omega$  — частота). Если  $\dot{\mathbf{q}}$  существует, то такая орбита также является дифференцируемым многообразием. В одномерном случае периодическое движение описывается рядом Фурье

$$q_1(\omega t) = \sum_n c_n e^{in\omega t}, \quad n \text{ — целые числа,} \quad (1.12.1)$$

в  $m$ -мерном случае — его аналогом

$$\mathbf{q}(\omega t) = \sum_n \mathbf{c}_n e^{in\omega t}, \quad n \text{ — целые числа,} \quad (1.12.2)$$

где вектор  $\mathbf{c}_n$  имеет  $m$  компонент

Еще один пример предельного цикла представлен на рис. 1.12.13, который надлежит рассматривать в пространстве размерности 3 и выше. Примером многообразия может служить тор (рис. 1.12.14). В этом случае между каждым элементом поверхности и элементом плоскости можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставив каждой точке элемента тора точку элемента плоскости, и наоборот. Тор можно полностью покрыть элементами, которые частично налегают один на другой.

При адекватной «сборке» элементов на плоскости получается квадрат (рис. 1.12.15). Склеив противоположные стороны квадрата, мы превратим его в трубу, а согнув трубу в кольцо и склеив концы, получим тор. Ясно поэтому, что каждую точку тора можно описывать в системе координат  $\varphi_1, \varphi_2$ . Так как касательная плоскость к тору существует в каждой точке  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , тор — дифференцируемое многообразие. Двумерные торы и их аналоги — многомерные торы — позволяют адекватным образом наглядно представить себе квазипериодические движения, которые происходят с несколькими частотами. Примером может служить движение

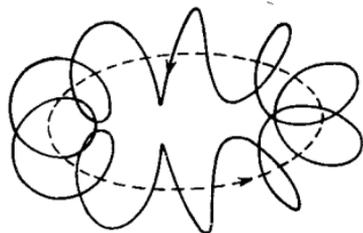


Рис. 1.12.13. Предельный цикл в трехмерном пространстве.

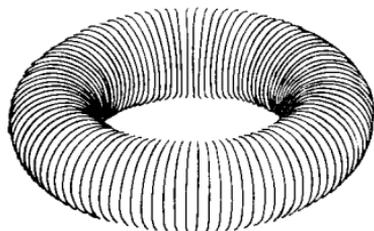


Рис. 1.12.14. Двумерный тор в трехмерном пространстве.

может служить движение

$$q = \sin \underbrace{(\omega_1 t)}_{\varphi_1} \sin \underbrace{(\omega_2 t)}_{\varphi_2}, \quad (1.12.3)$$

или, в более общем случае,

$$\mathbf{q} \underbrace{(\omega_1 t)}_{\varphi_1}, \underbrace{(\omega_2 t)}_{\varphi_2}. \quad (1.12.4)$$

Вектор  $\mathbf{q}$  допускает разложение в кратный ряд Фурье вида

$$\mathbf{q} = \sum c_n e^{i\mathbf{n} \cdot \omega t}, \quad (1.12.5)$$

где  $\mathbf{n} \cdot \omega = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \dots + n_N \omega_N$ ,  $n_j$  — целые числа.

Заполняет ли вектор-функция (1.12.4) тор полностью или нет, зависит от отношения частот. Если отношения частот рациональны, то траектории образуют только отдельные линии на торе. В этом нетрудно убедиться, взглянув на рис. 1.12.16, где  $\omega_2 : \omega_1 = 3 : 2$ . Какую бы начальную точку мы ни выбрали, она окажется на одной и той же замкнутой траектории на квадрате (см. подпись к рис. 1.12.16), которой соответствует замкнутая траектория на торе.

Примерами периодического движения по замкнутым траекториям могут служить также движения с  $\omega_2 : \omega_1 = 1 : 4$  и  $\omega_2 : \omega_1 = 5 : 1$  (рис. 1.12.17 и 1.12.18). С другой стороны, если отношение

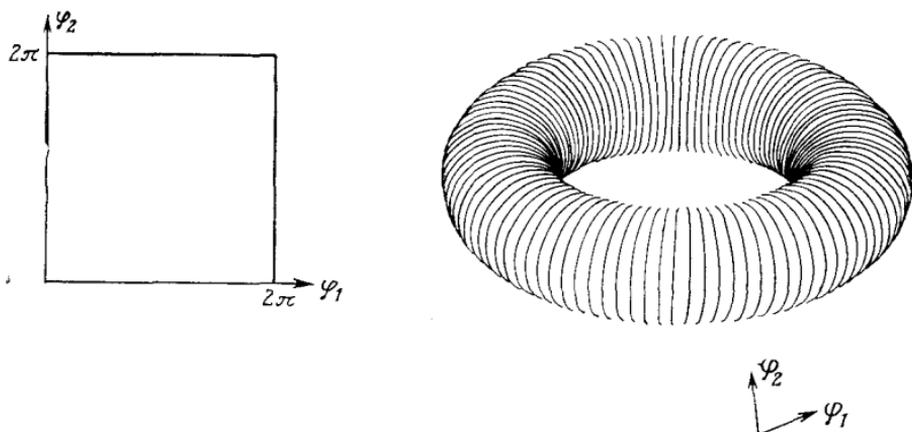


Рис. 1.12.15. Двумерный тор с локальными координатами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  может быть взаимно однозначно отображен на квадрат (показанный слева).

частот иррационально (например, если  $\omega_2 : \omega_1 = \pi : 1$ ), то траектория заполняет весь квадрат, или, что то же, весь тор (рис. 1.12.19), поскольку со временем подходит сколь угодно близко к любой заданной точке тора. (В этом случае говорят, что траектория образует всюду плотную обмотку тора.) Эти соображения без труда

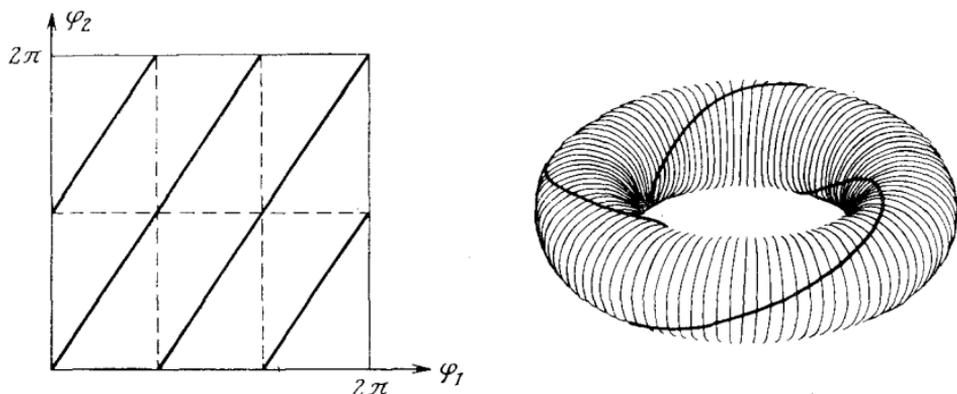


Рис. 1.12.16. Траектория на плоскости и ее образ на торе при  $\omega_2 : \omega_1 = 3 : 2$ . Траектория выходит из начальной точки  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ . Условие периодичности позволяет нам продолжать ее после того, как она достигнет уровня  $\varphi_2 = 2\pi$ , проектируя ее на ось  $\varphi_2 = 0$  (вертикальные штриховые линии). После того как траектория достигнет точки  $\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2 = \pi$ , мы, пользуясь периодичностью, проектируем ее в точку  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$  (горизонтальная штриховая линия), откуда она продолжается дальше (сплошная линия). В результате построения мы получаем замкнутую линию (противоположные края квадрата попарно отождествлены).

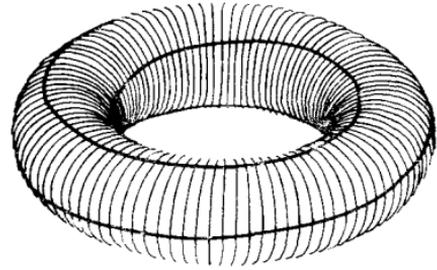
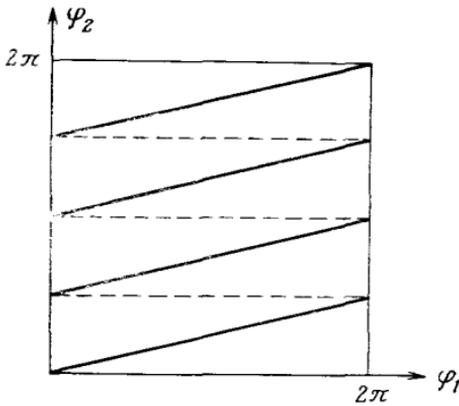


Рис. 1.12.17. Траектория на плоскости и ее образ на торе при  $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 4$ .

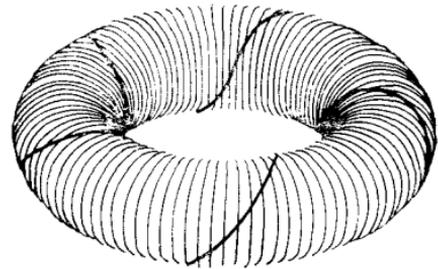
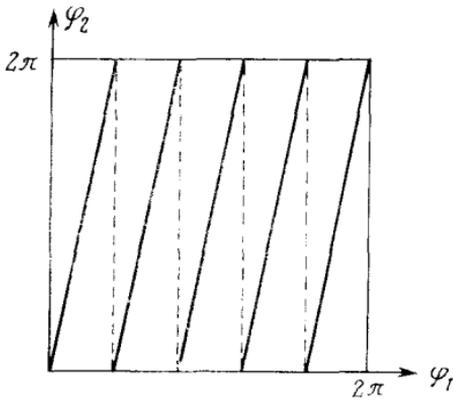


Рис. 1.12.18. Траектория на плоскости и ее образ на торе при  $\omega_2 : \omega_1 = 5 : 1$ .

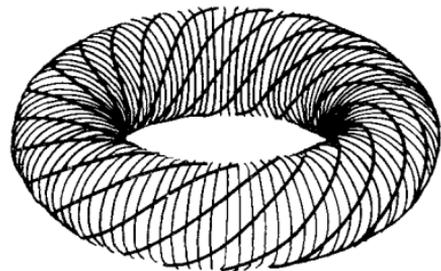
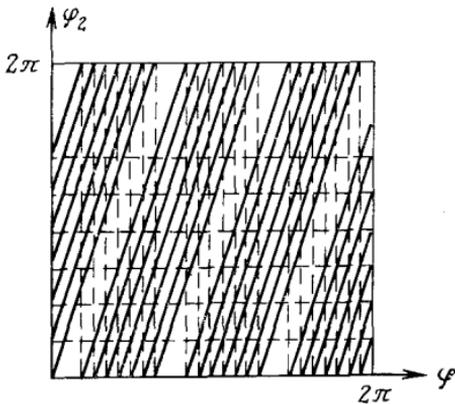


Рис. 1.12.19. Траектория на плоскости и ее образ на торе при иррациональном отношении частот:  $\omega_2 : \omega_1 = \pi : 1$ . Ни траектория на плоскости  $\varphi_1, \varphi_2$ , ни ее образ на торе не замыкаются и заполняют всю плоскость и весь тор. Мы показываем лишь несколько первых витков траектории, поскольку в противном случае она заполнила бы весь квадрат, а ее образ — весь тор.

обобщаются на торы в многомерных пространствах, которые можно отобразить на кубы с координатами  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ ,  $0 \leq \varphi_j \leq 2\pi$ . По-видимому, два приведенных нами явных примера (дифференцируемых) многообразий (окружность и тор) достаточно ясно показывают, что такое (дифференцируемое) многообразие. (Абстрактное определение читатель найдет в литературе, приведенной в конце книги.) В рассмотренном выше примере устойчивого предельного цикла все траектории, начинавшиеся в окрестности предельного цикла (многообразия), заканчивались на нем. Многообразия, обладающие таким свойством

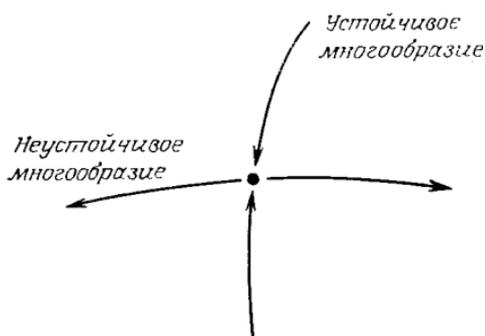


Рис. 1.12.20. Устойчивое и неустойчивое многообразия седла (см. текст).

«притягивать» достаточно близкие траектории, называются притягивающими.

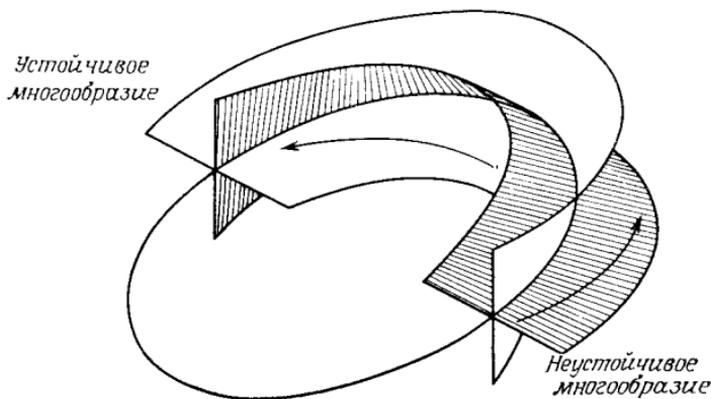


Рис. 1.12.21. Устойчивое и неустойчивое многообразия предельного цикла.

Попав на устойчивый предельный цикл, вектор  $\mathbf{q}(t)$ , описывающий эволюцию системы, остается там навсегда. В этом случае мы называем предельный цикл *инвариантным многообразием* потому, что такое многообразие (предельный цикл) остается неизменным при движении. Оно инвариантно относительно эволюции во времени. Такое определение инвариантного многообразия применимо и к многообразиям всех других типов.

Еще одно важное понятие знакомит нас с устойчивым и неустойчивым многообразием. Поясним кроющиеся за ним идеи на примерах. На рис. 1.12.20 показаны устойчивое и неустойчивое много-

образия для особой точки типа «седло на плоскости». Под устойчивым многообразием (особой точки) мы понимаем множество всех точек, которые являются начальными точками траекторий, заканчивающихся при  $t \rightarrow +\infty$  в данной особой точке. В нашем примере видно, что устойчивое многообразие имеет размерность вещественной прямой. Так происходит потому, что все траектории, выходящие из достаточно малой окрестности устойчивого многообразия, пройдут на конечном расстоянии от седла и затем отклонятся в сторону от него. Под неустойчивым многообразием (особой точки) мы понимаем множество начальных траекторий, заканчивающихся в пределе при  $t \rightarrow -\infty$  в данной особой точке. Подчеркнем, что оба типа многообразий — устойчивое и неустойчивое — обладают свойствами инвариантного многообразия. Рассмотрим еще один пример (рис. 1.12.21): устойчивое и неустойчивое многообразия предельного цикла погружены в трехмерное евклидово пространство. Эти многообразия построены локально по линеаризованным уравнениям движения. Вернемся еще раз к примеру с седлом (рис. 1.12.20). Обозначив через  $q = (q_1, q_2)$  отклонение от седла, мы получим систему уравнений

$$\dot{q}_1 = \alpha q_1 + N_1(q_1, q_2), \quad (1.12.6)$$

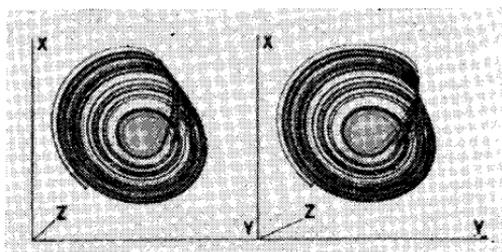
$$\dot{q}_2 = -\gamma q_2 + N_2(q_1, q_2), \quad (1.12.7)$$

где  $\alpha, \gamma > 0$  и  $N_j$  ( $j = 1, 2$ ) — нелинейные функции от  $q_j$ . Ограничиваясь малыми отклонениями  $q_j$ , мы можем спокойно пренебречь нелинейными членами в  $N_j$ , имеющими по предположению порядок  $O(|q|^2)$ . Произведя соответствующие упрощения, заметим, что малые возмущения  $q_1$  экспоненциально возрастают со временем. Это означает, что направление  $q_1$  — касательная к неустойчивому многообразию седла. Наоборот, малые возмущения  $q_2$  экспоненциально затухают со временем. Это означает, что направление  $q_2$  — касательная к устойчивому многообразию седла.

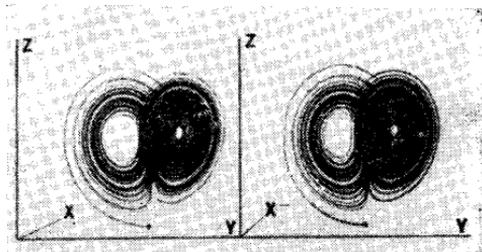
В общем случае могут существовать направления третьего типа, по которым возмущения не возрастают и не затухают, т. е. ведут себя нейтрально. Нейтральные направления — касательные к так называемому центральному многообразию. Примером может служить предельный цикл на рис. 1.12.21. Ясно, что возмущение, касательное к такому предельному циклу, не может со временем ни возрасти, ни затухнуть. Заметим, что в случае седла (рис. 1.12.20) центральное многообразие вырождается в точку.

Сравнительно недавно выяснилось, что могут существовать аттракторы, не являющиеся многообразиями. Такие аттракторы получили название «странных», или «хаотических», аттракторов. Считаю своим долгом предупредить читателя о некоторых математических тонкостях. Понятие «странный аттрактор» в настоящее время применяется главным образом в тех случаях, когда выпол-

няются определенные математические аксиомы. Неизвестно (по крайней мере пока), существуют ли в природе системы, удовлетворяющие этим аксиомам. Мы будем понимать термин «странный аттрактор» не столь узко. Попав в область странного аттрактора, вектор  $q(t)$  остается в ней навсегда. Но траектория  $q(t)$  не лежит на многообразии. Вектор  $q(t)$  напоминает скорее иглу, которой мы вновь



**Рис. 1.12.22.** Стереобразение аттрактора Рёсслера. Для получения объемного изображения поставьте лист бумаги перпендикулярно плоскости страницы и рассматривайте левый график левым глазом, а правый — правым. Подберите такое положение головы, при котором два плоскостных изображения сольются в одно объемное. Значения параметров:  $a = b = 0,2$ ;  $c = 5,7$ ;  $x(0) = y(0) = -0,7$ ;  $z(0) = 1$ . Переменные  $x$  и  $y$  изменяются от  $-14$  до  $+14$ , переменная  $z$  — от  $0$  до  $28$ . [Из работы: *Rössler O. E.* — In: *Synergetics, A Workshop*/Ed. by H. Haken. Springer Series in Synergetics, vol. 2.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1977, p. 184.]



**Рис. 1.12.23.** Стереобразение (модифицированного) аттрактора Лоренца. Значения параметров:  $a = 2,2$ ;  $\sigma = 4$ ;  $r = 80$ ;  $b = 8/3$ ;  $x(0) = 5,1$ ;  $y(0) = -13,72$ ;  $z(0) = 52$ . Переменная  $x$  изменяется от  $-50$  до  $+50$ , переменная  $y$  — от  $-70$  до  $+70$ , переменная  $z$  — от  $0$  до  $14$ . [Из работы: *Rössler O. E.* — In: *Synergetics, A Workshop*/Ed. by H. Haken. Springer Series in Synergetics, vol. 2.— Berlin, Heidelberg, New York, 1977, p. 184.]

и вновь протыкаем клубок ниток. Странные аттракторы встречаются в пространствах трех и большего числа измерений. Примеры таких аттракторов представлены на рис. 1.12.22 и 1.12.23.

Траектории странного аттрактора могут порождаться (при надлежащем выборе параметров) очень простыми дифференциальными уравнениями. Простейший из известных примеров — аттрактор Рёсслера. Его дифференциальные уравнения содержат лишь одну нелинейность и имеют вид

$$\dot{x} = -y - z, \quad (1.12.8)$$

$$\dot{y} = x + ay, \quad (1.12.9)$$

$$\dot{z} = b + z(x - c), \quad (1.12.10)$$

где  $a, b, c$  — постоянные параметры. На рис. 1.12.22 показано, как выглядит такой аттрактор.

Еще один пример простого (исторически более раннего) аттрактора—аттрактор Лоренца. Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (1.12.11)$$

$$\dot{y} = x(r - z) - y, \quad (1.12.12)$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (1.12.13)$$

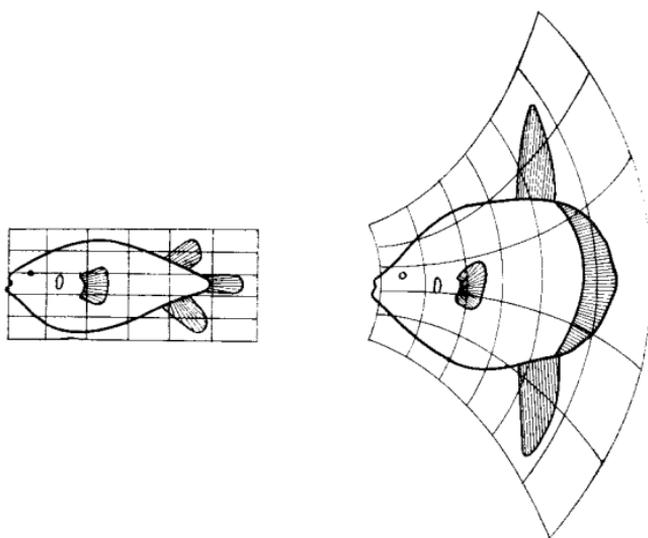
где  $\sigma, b, r$  — постоянные параметры. Эта модель была предложена для конвективной неустойчивости в гидродинамике. Одномодовый лазер описывается уравнениями, эквивалентными уравнениям Лоренца. Общий вид (модифицированного) аттрактора Лоренца показан на рис. 1.12.23. Модификация состоит во включении аддитивного параметра  $a$  в правую часть уравнения (1.12.11).

### 1.13. Качественные изменения: общий подход

Общее обсуждение нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных (1.11.13) лишено смысла, поскольку такие уравнения охватывают необычайно широкий, поистине необъятный круг явлений. С другой стороны, в синергетике нас интересуют общие свойства сложных систем. Мы можем существенно продвинуться к поставленной цели, сосредоточив внимание на тех ситуациях, в которых макроскопическое поведение системы изменяется резко. Попробуем придать этой идее математический вид. Обсудим для этого на одном примере из биологии понятие структурной устойчивости.

На рис. 1.13.1 изображены рыбы двух различных видов: еж-рыба и луна-рыба. Как показал в начале XX в. д'Арси Вентворт Томпсон, любой из этих двух видов рыб переходит в другой вид под действием простого преобразования сетки. В то время как с биологической точки зрения такое преобразование сетки представляет собой весьма интересное явление, с точки зрения математики мы имеем здесь дело с примером структурной устойчивости<sup>1</sup>).

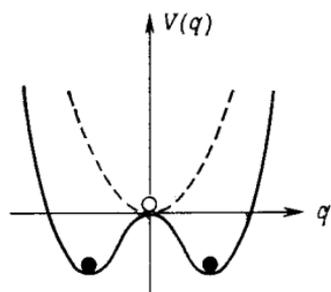
<sup>1</sup> Понятие структурной устойчивости, по-видимому, играет в биологии фундаментальную роль в более глубоком смысле, чем в образовании различных видов при деформации сетки (рис. 1.13.1). Насколько можно судить, в пределах вида организмы обладают четко выраженной инвариантностью функций относительно пространственных или временных деформаций. Это иногда затрудняет выполнение точных (и воспроизводимых) физических измерений на биологических объектах. Вероятнее всего, в таких случаях необходимо искать группы преобразований, относительно которых остается инвариантной функция органа (или животного). Свойством инвариантности, по-видимому, обладает даже самый сложный орган — человеческий мозг. Именно это свойство позволяет нам распознавать, например, букву  $a$ , даже



**Рис. 1.13.1.** Простым преобразованием сетки ежа-рыбу (слева) можно превратить в луну-рыбу (справа), и наоборот. [Из книги: *Thompson, D'Arcy, On Growth and Form*/Ed. by J. T. Bonner. — Cambridge: University Press, 1981.]

С точки зрения математика еж-рыба не отличается от луну-рыбы (и наоборот). Каждый из этих двух видов представляет собой лишь деформированную копию другого. Плавник при деформации переходит в плавник, глаз — в глаз и т. д. Иначе говоря, качественно новых анатомических (и прочих) особенностей, например нового плавника, при деформации не возникает.

В дальнейшем нас будут интересовать структурные изменения (в самом широком смысле). В отличие от примера с двумя видами рыб (рис. 1.13.1) нам придется рассматривать не статические структуры, а структуры, образуемые траекториями, т. е. потоки, с которыми мы познакомились в предыдущем разделе. Как известно, системой можно управлять извне — в математической форме этому соответствует изменение соответствующих управляющих параметров. Покажем, что даже при небольших изменениях управляющего параметра свойства системы могут изменяться весьма значительно. В [1] был приведен простой пример такого поведения. Представим себе шарик, который сос-



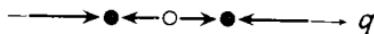
**Рис. 1.13.2.** Равновесное положение шарика в вазе двух типов (сечение одной вазы показано сплошной линией, сечение другой — штриховой).

если она сильно деформирована. Способности распознавать в широких пределах деформированные знаки мы обязаны искусству каллиграфии, получившему распространение в Китае (и в старой Европе).

кальзывает по стенке вазы. Если ваза имеет форму, показанную на рис. 1.13.2 штриховой линией, то шарик в конце концов остановится в точке  $q = 0$ . Но если ваза деформирована так, как показано сплошной линией, то шарик остановится либо при  $q = +a$ , либо при  $q = -a$ . Нетрудно начертить поток, отвечающий движе-

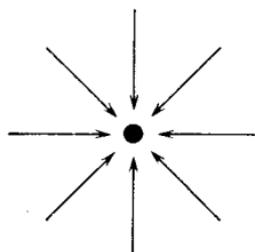


**Рис. 1.13.3.** Одномерное движение шарика с координатой  $q$ , заканчивающееся в одной устойчивой точке.

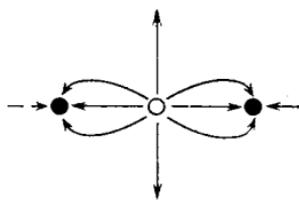


**Рис. 1.13.4.** Одномерное движение шарика, заканчивающееся в двух точках устойчивого равновесия (черные кружки) и в одной неустойчивой точке (светлый кружок).

нию шарика в первом и во втором случаях. Если потенциальная кривая имеет один минимум, мы получаем поток, представленный на рис. 1.13.3. Если же потенциальная кривая имеет два минимума,



**Рис. 1.13.5.** Траектории, заканчивающиеся в узле.



**Рис. 1.13.6.** Два устойчивых узла и один неустойчивый.

то движению шарика соответствует поток, представленный на рис. 1.13.4. Происходящий при деформации потенциальной кривой переход от одного аттрактора к двум аттракторам не требует пояснений: он вполне понятен из рис. 1.13.5 и 1.13.6. Попутно заметим, что из рис. 1.13.2 понятно, какую важную роль играют флуктуации: если шарик первоначально находится при  $q = 0$ , то свалится ли он в правую или в левую ямку, зависит всецело от флуктуаций.

Переходы от рис. 1.13.3 к рис. 1.13.4 или от рис. 1.13.5 к рис. 1.13.6 от примера с двумя видами рыб отличает следующее. Представим себе, что одна из рыб нарисована на резиновой пленке. Тогда от изображения ежа-рыбы к изображению луны-рыбы (или наоборот) мы можем перейти непрерывно, только растягивая или сжимая резиновую пленку. Однако рис. 1.13.5 никаким способом нельзя перевести к рис. 1.13.6 только с помощью растяжения и

сжатия, как это сделано с потоками на рис. 1.13.7. Иначе говоря, между линиями тока одного потока и линиями тока другого потока не существует взаимно однозначного соответствия (рис. 1.13.8). С математической точки зрения мы будем понимать под «структурной неустойчивостью» или «структурными изменениями» такие ситуации, в которых взаимно однозначное соответствие становится невозможным.

Обсудим теперь кратко, как проверить, приводит ли изменение параметра управления к структурной неустойчивости. В дальнейшем мы рассмотрим эту проблему более подробно. Продемонстри-

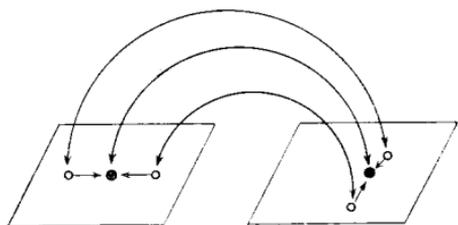


Рис. 1.13.7. Между этими двумя потоками можно установить взаимно однозначное отображение.



Рис. 1.13.8. Между этими двумя потоками невозможно установить взаимно однозначное отображение.

руем основной метод на простом примере. Уравнение, которое описывает соскальзывание шарика по стенке вазы, имеет вид

$$\dot{q} = -\alpha q - |k|q^3. \quad (1.13.1)$$

При  $\alpha > 0$  уравнение (1.13.1) допускает решение  $q = 0$ ; то же  $q = 0$  остается решением и при  $\alpha < 0$ . Взглянув на рис. 1.13.2, мы сразу же заметим, что положение  $q = 0$  при  $\alpha < 0$  неустойчиво. Однако во многих случаях, представляющих практический интерес, мы можем не опираться на существование потенциальной кривой (например, такой, как показано на рис. 1.13.2), а использовать другой подход — анализ устойчивости по линейному приближению. Введем для этого небольшое зависящее от времени возмущение  $u$  и запишем решение  $q$  уравнения (1.13.1) в виде

$$q = q_0 + u = u. \quad (1.13.2)$$

Подставляя (1.13.2) в (1.13.1) и удерживая только линейные члены, мы получаем уравнение (при  $\alpha < 0$ )

$$\dot{u} = |\alpha|u, \quad (1.13.3)$$

дающее решение

$$u(t) = u(0)e^{|\alpha|t}. \quad (1.13.4)$$

Так как  $|\alpha| = -\alpha > 0$ ,  $u(t)$  возрастает экспоненциально. Это свидетельствует о том, что состояние  $q_0 = 0$  неустойчиво. В гл. 2 и 3 мы изложим анализ устойчивости по линейному приближению в общем виде. В частности, мы рассмотрим случай, когда неустойчивым становится не только константа-решение  $q_0$ , но и движение по предельному циклу или по тору. Последняя проблема приводит нас в весьма странную область квазипериодических движений, где было сделано еще больше открытий (в число которых вносит свой вклад и эта книга). После того как анализ устойчивости произведен, возникает очередной вопрос: в какие новые состояния перейдет система. При ответе на него для синергетики наибольшее значение имеют два понятия: *параметр порядка* и *принцип подчинения*. Для того чтобы пояснить их, рассмотрим два дифференциальных уравнения

$$\dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 - q_1 q_2, \quad (1.13.5)$$

$$\dot{q}_2 = -\lambda_2 q_2 + q_1^2. \quad (1.13.6)$$

Уравнения такого типа встречаются в ряде наук, например в химии. Уравнение (1.13.5) описывает автокаталитическое производство вещества 1, присутствующего в концентрации  $q_1$  (член  $\lambda_1 q_1$ ), и расход вещества 1, вызванный взаимодействием его молекул с молекулами вещества 2, которое имеется в концентрации  $q_2$  (член  $-q_1 q_2$ ). Уравнение (1.13.6) описывает спонтанный распад молекул вещества 2 (член  $-\lambda_2 q_2$ ) и производство вещества 2 из молекул вещества 1 в результате бимолекулярной реакции (член  $q_1^2$ ). Для анализа математических свойств системы физический смысл членов, разумеется, не имеет значения, поэтому мы сосредоточим внимание на ее математических особенностях. Предположим, что коэффициент  $\lambda_1$  очень мал или чуть больше нуля. Тогда если величины  $q_1$  и  $q_2$  малы (что позволяет пренебречь в первом приближении квадратичным членом), то  $q_1$  изменяется очень медленно. Как видно из (1.13.6), прирост  $q_2$  обеспечивается членом  $q_1^2$ , а поскольку  $q_1$  изменяется очень медленно, можно ожидать, что и  $q_2$  изменяется очень медленно. Если коэффициент  $\lambda_2$  положителен и много больше  $\lambda_1$ , то  $\dot{q}_2$  можно пренебречь по сравнению с  $\lambda_2 q_2$ . Более подробно полученный результат выведен в [1]. Полагая

$$\dot{q}_2 \approx 0, \quad (1.13.7)$$

мы можем сразу же решить уравнение (1.13.6):

$$q_2 \approx q_1^2 / \lambda_2. \quad (1.13.8)$$

Этот подход, часто называемый *адиабатическим приближением*, позволяет явно выразить  $q_2$  через  $q_1$ . В таких случаях говорят, что переменная  $q_2$  *подчинена* переменной  $q_1$ . Подчинение перемен-

ной  $q_1$  очень большого числа переменных позволяет существенно упростить сложную задачу: вместо большого числа переменных для различных  $q$  мы можем рассматривать лишь одно уравнение для  $q_1$ , а затем воспользоваться *принципом подчинения* и выразить все  $q$  через  $q_1$ . В таких случаях переменная  $q_1$  называется *параметром порядка*. Разумеется, в действительности мы можем столкнуться с более сложной ситуацией. Тогда уравнения (1.13.5) и (1.13.6) нам придется заменить более сложными уравнениями. Коэффициенты таких уравнений могут зависеть от времени. Кроме того, они могут содержать флуктуирующие силы. Не следует забывать и о том, что уравнения (1.13.7) и (1.13.8) — не более чем аппроксимации. Следовательно, необходимо разработать общий метод, позволяющий выразить  $q_2$  через  $q_1$ . В гл. 7 мы покажем, что  $q_2(t)$  действительно можно выразить через  $q_1(t)$  при одном и том же  $t$  и что для широкого класса стохастических нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными существует метод, позволяющий найти функцию  $q_2(t) = f(q_1(t))$ . Между *потерей устойчивости* в линейном приближении, наличием *параметров порядка* и выполнимостью *принципа подчинения* существует весьма важная внутренняя взаимосвязь. При изменении параметров управления система может потерять устойчивость в линейном приближении. Как видно из (1.13.5) и (1.13.6),  $\text{Re}(\lambda_1)$  в таких случаях изменяет знак, т. е. становится очень малой величиной. В подобных ситуациях применим принцип подчинения. Следовательно, можно ожидать, что в тех точках, где происходят структурные изменения, поведение системы определяется только параметрами порядка. Как мы уже увидим, эта связь между тремя понятиями (потерей устойчивости в линейном приближении, параметром порядка и принципом подчинения) приводит нас к далеко идущим аналогиям между поведением весьма различных систем при макроскопических изменениях.

## 1.14. Качественные изменения: типичные явления

Дадим краткий обзор качественных изменений, вызываемых неустойчивостями. Существуют обширные классы систем, подпадающих под рассматриваемые ниже категории. Для того чтобы мы могли окинуть общим взглядом достаточно широкий круг систем, пренебрежем сначала влиянием шума. Начнем с уравнений вида (1.11.13)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha, \nabla, \mathbf{x}, t). \quad (1.14.1)$$

Предположим, что  $\mathbf{N}$  не зависит явно от времени, т. е. что (1.14.1) — *автономная система*. Пренебрегая зависимостью от пространственных координат, рассмотрим уравнения вида

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t), \alpha). \quad (1.14.2)$$

Пусть по предположению при некотором значении параметра управления  $\alpha$  (или при  $\alpha$ , изменяющемся в некотором диапазоне значений) существует устойчивое решение  $\mathbf{q}_0(\alpha, t)$  уравнений (1.14.2). Чтобы исследовать его устойчивость относительно изменений  $\alpha$ , положим

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{w}(t), \quad (1.14.3)$$

где  $\mathbf{w}(t)$  — по предположению малое возмущение. Подставляя (1.14.3) в (1.14.2) и удерживая только члены, линейные по  $\mathbf{w}$ , приходим к уравнениям вида

$$\dot{\mathbf{w}} = L\mathbf{w}, \quad (1.14.4)$$

где  $L$  зависит от  $\mathbf{q}_0$ . В разд. 1.14.6 будет показано в явном виде, как оператор  $L$  связан с  $\mathbf{N}$ . Пока же достаточно знать, что  $L$  зависит от времени так же, как  $\mathbf{q}_0$ .

Предположим, что  $\mathbf{q}_0$  не зависит от времени. Чтобы решить уравнения (1.14.4), положим

$$\mathbf{w}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} — \text{постоянный вектор}, \quad (1.14.5)$$

и, подставив (1.14.5) в (1.14.4), преобразуем наши уравнения к виду

$$L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (1.14.6)$$

Это — линейное алгебраическое уравнение для постоянного вектора  $\mathbf{v}$  и собственного значения  $\lambda$ .

Наиболее существенные особенности общего подхода станут более понятными, если ввести упрощающее предположение о том, что  $L$  — матрица конечного порядка  $n$ . В этом случае существует не более  $n$  различных собственных значений  $\lambda_j$ , вообще говоря, зависящих от управляющего параметра  $\alpha$ . Неустойчивость наступает, если вещественная часть по крайней мере одного собственного значения становится неотрицательной.

### 1.14.1. Бифуркация из одного узла (или фокуса) в два узла (или фокуса)

Рассмотрим случай, когда  $\text{Re}\{\lambda_j\} \geq 0$  лишь при одном  $j$ , например при  $j = 1$ , а при всех остальных  $j$  справедливо неравенство  $\text{Re}\{\lambda_j\} < 0$ . На этом примере отчетливо видны существенные особенности нашего подхода. В общем виде он излагается ниже. Поскольку наша конечная цель состоит в решении полного нелинейного уравнения (1.14.2), необходимо ввести подходящее предположение относительно его решения  $\mathbf{q}(t)$ . Представим  $\mathbf{q}(t)$  в виде

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum \xi_j(t) \mathbf{v}_j, \quad (1.14.7)$$

где  $\mathbf{v}_j$  — решения уравнения (1.14.6), а  $\xi_j$  — пока не известные коэффициенты, зависящие от времени. Подставляя (1.14.7) в (1.14.2), мы после преобразований (приводить которые здесь было бы не-

уместно, см. гл. 8) получаем уравнения для  $\xi_j$ . Рассмотрим, например, случай  $j = 1, 2$ . Соответствующие уравнения имеют вид

$$\dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1 + \hat{N}_1(\xi_1, \xi_2), \quad (1.14.8)$$

$$\dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2 + \hat{N}_2(\xi_1, \xi_2). \quad (1.14.9)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — собственные значения уравнения (1.14.6),  $\hat{N}_j$  — нелинейные функции от  $\xi_1, \xi_2$ , начинающиеся с квадратичных (или билинейных) членов по  $\xi_1, \xi_2$ . Вспомним теперь, что мы находимся близко к значению управляющего параметра  $\alpha$ , при котором система теряет устойчивость в линейном приближении, т. е.  $\text{Re} \{\lambda_1\}$  изменяет знак. Но это означает, что  $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$ , поэтому применим принцип подчинения. Следовательно, мы можем выразить  $\xi_2$  через  $\xi_1$  ( $\xi_2 = f(\xi_1)$ ) и свести задачу к решению одного уравнения вида

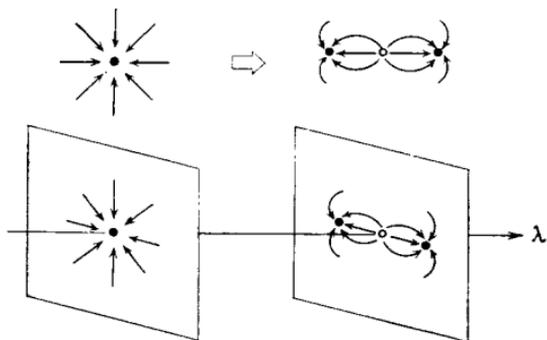


Рис. 1.14.1. Два представления бифуркации устойчивого узла в два устойчивых узла. Вверху два потока изображены на одной и той же плоскости. Внизу управляющий параметр  $\lambda$  отложен по абсциссе, а потоки до и после бифуркации изображены на двух отдельных плоскостях, перпендикулярных оси  $\lambda$ .

находимся близко к значению управляющего параметра  $\alpha$ , при котором система теряет устойчивость в линейном приближении, т. е.  $\text{Re} \{\lambda_1\}$  изменяет знак. Но это означает, что  $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$ , поэтому применим принцип подчинения. Следовательно, мы можем выразить  $\xi_2$  через  $\xi_1$  ( $\xi_2 = f(\xi_1)$ ) и свести задачу к решению одного уравнения вида

$$\dot{\xi}_1 = \lambda_2 \xi_1 + \tilde{N}_1(\xi_1), \quad (1.14.10)$$

где

$$\tilde{N}_1(\xi_1) = \hat{N}_1(\xi_1, f(\xi_1)). \quad (1.14.11)$$

Рассмотрим теперь малую окрестность точки  $\xi_1 = 0$ , в которой функцию  $\tilde{N}_1(\xi_1)$  можно аппроксимировать многочленом и при малых значениях  $\xi_1$  удерживать только его главный член. Если —  $\beta \xi_1^3$  — главный член функции  $N_1$ , то уравнение для параметра порядка имеет вид

$$\dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1 - \beta \xi_1^3, \quad \beta > 0. \quad (1.14.12)$$

Ограничив  $\lambda_1$  только вещественными значениями, мы получим уже встречавшееся нам уравнение (1.13.1), описывающее соскальзывание шарика по стенке вазы с одним ( $\lambda_1 < 0$ ) или с двумя ( $\lambda_1 > 0$ ) ямами в разрезе. Следовательно, единственный узел, существующий при  $\lambda_1 < 0$ , переходит в два узла при  $\lambda_1 > 0$  (рис. 1.13.5 и 1.13.6). Иначе говоря, происходит бифуркация из одного узла в два узла (рис. 1.14.1). Следует подчеркнуть, что (1.14.12) описывает не только новые положения равновесия, но и релаксацию

системы в эти положения, что позволяет проверить их устойчивость. Надеемся, что приведенный пример в какой-то мере убедил читателя в разрешимости нелинейного уравнения (1.14.2) и позволил увидеть, какого рода качественное изменение происходит в данном случае.

Вся остальная часть этого раздела посвящена классификации и качественному описанию явлений в точках неустойчивости. Математические подходы к адекватному анализу происходящих при этом явлений подробно излагаются в последующих главах. Например, в разд. 8.3 мы рассмотрим более сложные задачи, в которых положительными становятся несколько собственных (вещественных) значений.

### 1.14.2. Бифуркация из фокуса в предельный цикл (бифуркация Хопфа)

Наиболее известным примером бифуркации является *бифуркация Хопфа*. В этом случае два комплексно-сопряженных собственных значения

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda' + i\omega, \\ \lambda_2 &= \lambda' - i\omega,\end{aligned}\tag{1.14.13}$$

где  $\lambda'$ ,  $\omega$  вещественны и отличны от нуля, пересекают мнимую ось, так что  $\lambda' \geq 0$ . При этом возбуждаются *колебания* и происходит бифуркация первоначально устойчивого фокуса в предельный цикл (рис. 1.14.2). В этой связи уместно сделать одно общее замечание. Потеря устойчивости в линейном приближении отнюдь не гарантирует устойчивость *вновь возникших* состояний. Наоборот, необходимо разработать методы, позволяющие в явном виде проверять новые решения на устойчивость. Наш подход, излагаемый ниже, делает устойчивость новых состояний непосредственно очевидной.

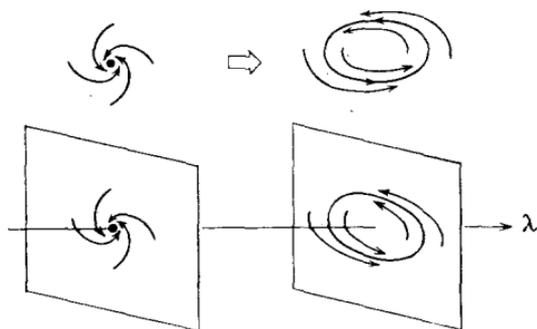
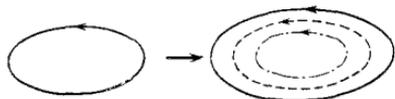


Рис. 1.14.2. Два представления бифуркации устойчивого фокуса в устойчивый предельный цикл, аналогичных представлениям бифуркации на рис. 1.14.1.

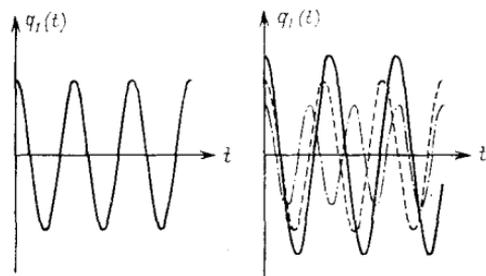
### 1.14.3. Бифуркация из предельного цикла

В ряде реалистических случаев дальнейшее изменение управляющего параметра может привести к неустойчивости предельного цикла. Учет этого явления требует обобщения анализа устойчиво-

сти по линейному приближению с помощью подстановки (1.14.5), так как движение по предельному циклу описывается вектором  $\mathbf{q}_0(t)$ , зависящим от времени. Следовательно, оператор  $L$  из (1.14.4) становится функцией от  $t$ , причем периодической. В этом случае мы можем исследовать устойчивость по показателям Флоке  $\lambda$ , входящим в (1.14.5), используя результаты, приведенные в разд. 2.7.

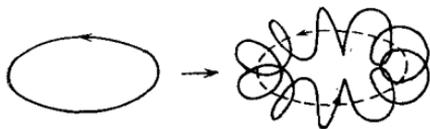


**Рис. 1.14.3.** Бифуркация предельного цикла на плоскости в два предельных цикла на той же плоскости. Старый предельный цикл, ставший неустойчивым, изображен справа штриховой линией.

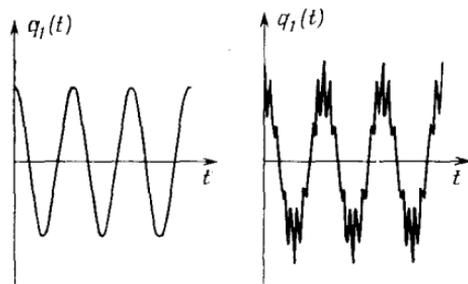


**Рис. 1.14.4.** Временная зависимость переменной  $q_1(t)$  предельного цикла до (слева) и после (справа) бифуркации. Переменные  $q_1$  новых устойчивых предельных циклов показаны сплошной и штрихпунктирной линиями. Неустойчивому предельному циклу соответствует штриховая линия.

Если один вещественный показатель  $\lambda$  становится положительным, то старый предельный цикл может распасться на новые предельные циклы (рис. 1.14.3 и 1.14.4). С другой стороны, если вещественная часть комплексного собственного значения (1.14.13) становится положитель-



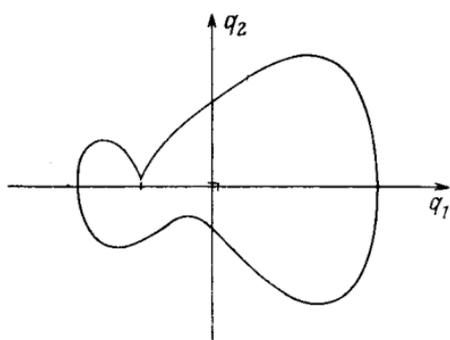
**Рис. 1.14.5.** Бифуркация двумерного предельного цикла в трехмерный предельный цикл. В зависимости от отношения частот вращения вокруг и вдоль штриховой линии при бифуркации могут возникать как незамкнутые, так и замкнутые траектории. Если траектория замкнута, то возникает новый предельный цикл. В остальных случаях траектория заполняет тор.



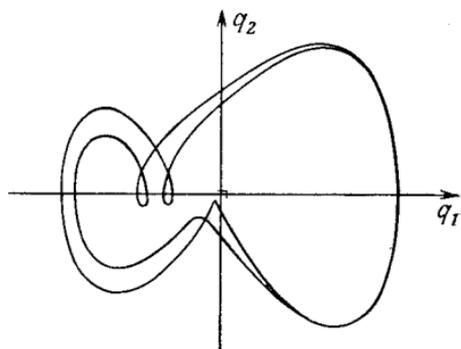
**Рис. 1.14.6.** Временная зависимость переменной  $q_1(t)$  предельного цикла до (слева) и после (справа) бифуркации.

ной, то новый предельный цикл накладывается на старый. Возникающее при этом движение вектора-решения  $\mathbf{q}(t)$  наглядно можно себе представить как движение по тору (рис. 1.14.5 и 1.14.6). Иначе говоря, движение становится квазипериодическим. Потеря устойчивости предельным циклом может

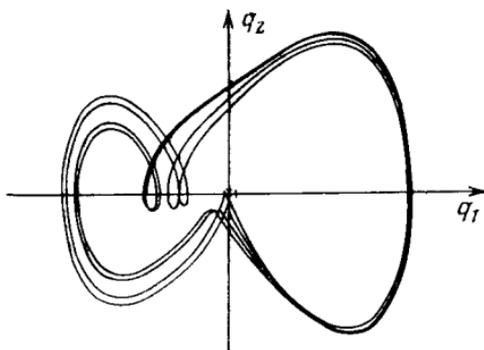
сопровождаться и другими явлениями. Старый предельный цикл, исчезая, может уступить место новому предельному циклу, при движении по которому системе, для того чтобы вернуться в исходное состояние, требуется вдвое больше времени, чем при движении



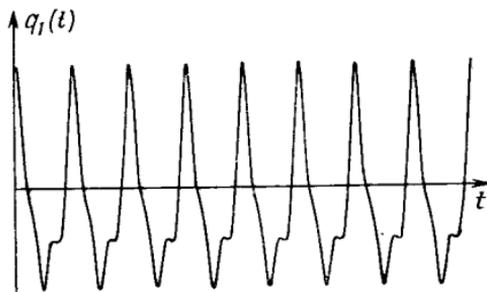
**Рис. 1.14.7.** Проекция (из пространства  $q_1, q_2, t$ ) решения уравнения Дуффинга  $\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = A \cos t$ , где  $q_1 \equiv x$ ,  $q_2 \equiv \dot{x}$  на плоскость  $q_1, q_2$  при значениях управляющих параметров  $k = 0,35$ ;  $A = 6,6$ . Возник предельный цикл.



**Рис. 1.14.8.** Решение уравнения Дуффинга при  $k = 0,35$ ;  $A = 8,0$ . Период стал вдвое больше, чем на рис. 1.14.7, но снова возникла замкнутая орбита (удвоение периода).



**Рис. 1.14.9.** Решение уравнения Дуффинга при  $k = 0,35$ ;  $A = 8,5$ . Период стал в 4 раза больше по сравнению с исходным предельным циклом на рис. 1.14.7.



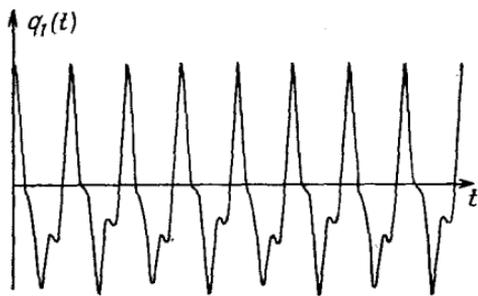
**Рис. 1.14.10.** Временная зависимость координаты  $q_1(t)$  в случае исходного предельного цикла (рис. 1.14.7).

по исходному предельному циклу. Иначе говоря, происходит *удвоение периода*, или генерация *субгармоники*. Известно много систем различной природы (от гидродинамики до электронных систем), претерпевающих при изменении управляющего параметра иерархию последовательных удвоений периода. Типичные режимы, возникающие при удвоении периода, показаны на рис. 1.14.7—1.14.12.

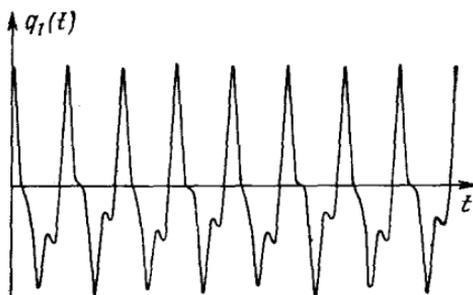
Явление удвоения периода, или, иначе, генерации субгармоники, давно известно в электронике. Например, некоторые электронные цепи описываются уравнением Дуффинга

$$\ddot{q} + \beta \dot{q} + \gamma q + \delta q^3 = \alpha_1 + \alpha_2 \sin(\omega_0 t), \quad (1.14.14)$$

соответствующим отклику нелинейного осциллятора на периодическую возмущающую силу. Даже это весьма простое уравнение



**Рис. 1.14.11.** Временная зависимость координаты  $q_1(t)$  после удвоения периода. Обратите внимание на то, что глубина двух последовательных минимумов различна.



**Рис. 1.14.12.** Временная зависимость координаты  $q_1(t)$  после учетверения периода. Как показывает более внимательное рассмотрение менее глубоких минимумов, весь цикл повторяется за время, в 4 раза большее, чем в случае исходного предельного цикла.

описывает множество явлений, связанных с удвоением и утроением периода. Другие субгармоники также могут присутствовать. Может наблюдаться целая последовательность удвоений или утроений периода. По-видимому, мы находимся здесь в самом начале новой теории, которая позволит изучать не только одну бифуркацию или несколько последовательных бифуркаций, но и всю иерархию бифуркаций. В этой связи уместно высказать одно предостережение: в то время как некоторые классы уравнений (некоторые «дискретные отображения», см. разд. 1.17) позволяют воспроизводить полную последовательность удвоений периода, реальные системы могут обладать более сложным поведением, например допускать режимы с удвоением и утроением периода или даже смешанные режимы.

#### 1.14.4. Бифуркации из тора в другие торы

Выше мы видели, что предельный цикл может при бифуркации переходить в тор. Недавно были открыты бифуркации из тора в другие торы той же или более высокой размерности. При исследовании бифуркаций этого типа возникают особые трудности. Как показывает математический анализ, решающую роль играет весьма

специфическое условие иррациональности отношений основных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots$  системы. Многие из последующих разделов будут посвящены выяснению теоретико-числовой природы частот. Некоторые аспекты такого рода задач известны в небесной механике, где соответствующие трудности были успешно преодолены лет двадцать назад. Но если в небесной механике рассматриваются гамильтоновы, т. е. недиссипативные, системы и основной интерес представляет устойчивость движения, то нас интересуют диссипативные системы с внешней накачкой и качественные изменения макроскопических свойств (в частности, бифуркации из тора в другие торы).

### 1.14.5. Странные аттракторы

Когда движение по тору становится неустойчивым из-за изменения управляющего параметра и не выполняются специфические условия иррациональности отношения частот, поток  $\mathbf{q}(t)$  может

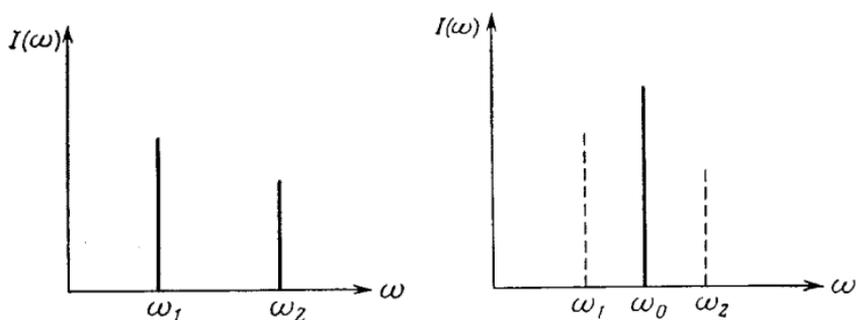


Рис. 1.14.13. Возникновение комбинационных частот в спектре мощности  $I(\omega)$ . Слева: спектр до перестройки. Система совершает колебания с двумя основными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Справа: спектр после перестройки. Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  исчезли (штриховые линии), появилась одна комбинационная частота  $\omega_0$ .

вести себя по-разному. Тор может снова вырождаться в предельный цикл, т. е. спектр может перестроиться: какие-то частоты могут исчезнуть, а вместо них могут появиться новые комбинационные частоты (рис. 1.14.13). Широкий класс явлений, представляющих для нас особый интерес, связан с хаотическими движениями, т. е. со странными аттракторами, о которых мы кратко упоминали.

Результаты проведенных исследований имеют важное значение для многих проблем, возникающих в естественных и других науках, поскольку «движение на торе» означает для конкретной системы, что она совершает движение с несколькими основными частотами и их подходящими линейными комбинациями. Во многих случаях такое движение обусловлено системой нелинейных осцилляторов,

что встречается в природе и в технических устройствах весьма часто. Важно знать, каким именно образом система реагирует на изменение управляющего параметра.

### 1.14.6. Показатели Ляпунова \*

Итак, мы убедились, что аттракторы могут быть самых различных типов: устойчивый фокус, предельный цикл, тор или, наконец, странный аттрактор. Было бы весьма желательно поэтому разработать критерии, позволяющие отличать аттракторы одного типа от аттракторов другого типа. Таким критерием служат показатели Ляпунова, к объяснению которых мы сейчас переходим.

Рассмотрим простейший пример: одну переменную, удовлетворяющую нелинейному дифференциальному уравнению

$$\dot{q} = N(q). \quad (1.14.15)$$

В этом случае единственно возможный аттрактор есть устойчивая неподвижная точка («одномерный узел»), а «траектория» этого аттрактора есть постоянная  $q = q_0$ , соответствующая положению особой точки. Для того чтобы доказать устойчивость точки  $q = q_0$ , выполним анализ устойчивости по линейному приближению, изложенный нами в общих чертах в разд. 1.13. Для этого подставим в (1.14.15)

$$q(t) = q_0 + \delta q(t), \quad (1.14.16)$$

линеаризуем уравнение (1.14.15) по  $\delta q$  и получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \delta q = L \delta q, \quad (1.14.17)$$

где  $L = \partial N / \partial q|_{q=q_0}$  — постоянная.

Ясно, что решение уравнения (1.14.17) имеет вид

$$\delta q(t) = \delta q(0) e^{Lt}. \quad (1.14.18)$$

Если  $L < 0$ , неподвижная точка устойчива. В нашем тривиальном примере  $L$  нетрудно получить непосредственно из (1.14.18). Но в более сложных случаях, о которых пойдет речь в дальнейшем, для того чтобы найти  $L$ , понадобилась бы быстродействующая вычислительная машина. Но даже и тогда  $L$  можно получить из (1.14.18) по следующему простому рецепту. Образует величину

$$\frac{1}{t} \ln |\delta q(t)|$$

и перейдем к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Нетрудно видеть, что

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta q(t)|. \quad (1.14.19)$$

Понятие показателя Ляпунова обобщает величину (1.14.19) в двух отношениях.

1) Траектории могут проходить в многомерном пространстве:  $\mathbf{q}(t)$  — радиус-вектор, конец которого движется по траектории, по мере того как идет время  $t$ .

2) Поведение системы исследуется на устойчивость в окрестности рассматриваемой траектории  $\mathbf{q}_0(t)$  (которая может, в частности, принадлежать аттрактору). Положим по аналогии с (1.14.16)

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t) + \delta\mathbf{q}(t). \quad (1.14.20)$$

Возмущение  $\delta\mathbf{q}(t)$  покажет, как ведет себя соседняя траектория  $\mathbf{q}(t)$ : приближается ли она к траектории  $\mathbf{q}_0(t)$  или удаляется от нее. Чтобы найти  $\delta\mathbf{q}(t)$ , подставим выражение (1.4.20) в нелинейное уравнение

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t)) \quad (1.14.21)$$

( $\mathbf{q}_0$  — решение этого уравнения) и линеаризуем  $\mathbf{N}$  по  $\delta\mathbf{q}(t)$ . Записывая уравнение (1.14.21) покомпонентно, получаем

$$\frac{d}{dt} \delta q_j(t) = \sum_k \partial N_j(\mathbf{q}(t)) / \partial q_k |_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \delta q_k(t). \quad (1.14.22)$$

Это — *линейные* дифференциальные уравнения с коэффициентами ( $\partial N_j / \partial q_k$ ), зависящими, вообще говоря, от времени.

Обобщая (1.14.19), трудно устоять перед искушением определить показатели Ляпунова как

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta\mathbf{q}(t)|. \quad (1.14.23)$$

Однако те, кто придерживается такого определения, хотя оно довольно часто встречается в научной литературе, поступают опрометчиво: предел в правой части (1.14.23) существует не всегда. Пусть, например,

$$\delta q = e^{\lambda_1 t} \sin(\omega t) + e^{\lambda_2 t} \cos(\omega t). \quad (1.14.24)$$

Если в (1.14.23) выбрать  $t = t_n = 2\pi n / \omega$ , где  $n$  — целое число, так, что  $\sin(\omega t)$  обращается в нуль, то  $\delta q$  ведет себя как  $\exp(\lambda_2 t_n)$ , и из (1.14.23) мы получаем  $\lambda = \lambda_2$ . С другой стороны, если положить  $t = t'_n = 2\pi(n + 1/2) / \omega$ , то  $\delta q$  ведет себя как  $\exp(\lambda_1 t'_n)$ , и из (1.14.23) мы получаем  $\lambda = \lambda_1$ . Ясно, что если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то предел (1.14.23) не существует. Следовательно, определение показателя Ляпунова нуждается в уточнении. Грубо говоря, необходимо выбрать наибольшее  $\lambda$  и тем самым заменить  $\lim$  в (1.14.23) на  $\lim \sup$  (верхний предел), т. е. положить

$$\lambda = \lim \sup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta\mathbf{q}(t)|. \quad (1.14.25)$$

Точное определение верхнего предела мы дадим в гл. 2, где будет доказана теорема о существовании показателей Ляпунова. В зависимости от различных начальных значений  $\delta\mathbf{q}$  при  $t = t_0$  могут

существовать различные показатели Ляпунова, но число их не превышает  $m$ , где  $m$  — размерность векторного пространства, которому принадлежит  $\mathbf{N}$  (или  $\mathbf{q}$ ).

Теперь мы уже достаточно подготовлены для того, чтобы сформулировать критерий, позволяющий различать различные типы аттракторов.

В одномерном случае существуют только устойчивые неподвижные точки, для которых показатели Ляпунова  $\lambda$  отрицательны ( $-$ ). В двумерном случае возможны, как строго доказано в математике, аттракторы лишь двух типов: устойчивые особые (неподвижные) точки и предельные циклы. Если аттрактор — устойчивая особая точка (фокус), то два показателя Ляпунова (которые могут, в частности, совпадать) отрицательны ( $-$ ,  $-$ ). Если аттрактор — устойчивый предельный цикл, то, как будет показано в дальнейшем, показатель Ляпунова, соответствующий возмущению  $\delta\mathbf{q}$ , которое трансверсально предельному циклу  $\mathbf{q}_0(t)$ , отрицателен (устойчивость!), в то время как показатель Ляпунова, соответствующий возмущению  $\delta\mathbf{q}$  в тангенциальном направлении, равен нулю. Следовательно,  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, 0)$ . Может представиться «патологический» случай, когда  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, 0)$ , но существует не предельный цикл, а линия, заполненная особыми точками.

Перечислим, наконец, типичные аттракторы в трехмерном случае. Будем предполагать всякий раз, что аттрактор  $\mathbf{q}_0$  (т. е.  $|\mathbf{q}_0|$ ) остается ограниченным при  $t \rightarrow \infty$ . Итак, возможны следующие типы аттракторов:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$  устойчивый фокус (особая точка),

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, 0)$  устойчивый предельный цикл.

Соседние траектории предельного цикла могут приближаться к нему по двум линейно независимым направлениям, трансверсальным предельному циклу, так, что  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, -)$ , в то время как третий показатель Ляпунова, соответствующий сдвигу траектории в тангенциальном направлении, равен нулю.

Далее

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, 0, 0)$  устойчивый тор.

Рассмотрение этого случая проводится по аналогии с случаем предельного цикла. (Существуют некоторые тонкости типа упоминавшегося выше патологического случая).

Если один из показателей Ляпунова положителен, то может возникнуть хаос. Во всяком случае, эта ситуация требует дополнительного обсуждения. Так,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, 0)$  может означать, что мы имеем дело с *неустойчивым тором* (не являющимся аттрактором). Если аттрактор обладает показателем  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ , то он считается *странным* («хаотическим»), показатели  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, 0)$  могут означать неустойчивый пре-

дельный цикл (не являющийся аттрактором) и т. д. Поскольку у странного аттрактора по крайней мере один показатель Ляпунова положителен, соседние траектории быстро расходятся. Но так как соседние траектории порождаются начальными условиями, которые хотя и отличаются, но весьма незначительно, мы заключаем, что явления, описываемые странным аттрактором, *чувствительны к изменениям начальных условий*. Следует особо подчеркнуть, что исследования, связанные с показателями Ляпунова (их значения для аттракторов, способы их определения), находятся в стадии разработки.

В заключение упомянем следующую полезную теорему: если  $q(t)$  — траектория, которая остается в ограниченной области (например, траектория аттрактора), и она не заканчивается в особой точке, то по крайней мере один из показателей Ляпунова равен нулю. Подробную формулировку этой теоремы и ее доказательство мы приведем в разд. 2.4.

## 1.15. Влияние флуктуаций (шумов). Неравновесные фазовые переходы

До сих пор мы рассмотрели ряд типичных явлений, пренебрегая шумами, т. е. влиянием флуктуаций на систему. Однако в последние годы стало ясно, что именно в критических точках, т. е. там, где система изменяет свое макроскопическое изменение, флуктуации играют решающую роль. Фундаментальные законы теоретической физики позволяют утверждать, что там, где происходит диссипация, должны быть и флуктуации. Следовательно, при рассмотрении физических, химических, биологических, механических или электрических систем пренебрегать флуктуациями не следует, по крайней мере если речь идет о системах, достаточно близких к критическим точкам. Для фазовых переходов систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, адекватный учет флуктуаций был давно стоявшей проблемой, разрешить которую удалось лишь недавно методом ренормгруппы. В этой книге нас интересуют неустойчивости физических и химических систем, находящихся *далеко от состояния термодинамического равновесия*, и некоторых других систем. В этом круге явлений флуктуации играют не менее важную роль и описание их требует новых подходов. Например, принцип подчинения, с которым мы познакомились в разд. 1.13, по-видимому, позволяет учесть флуктуации (см. гл. 7), и уравнения для параметров порядка следует решать при адекватном включении флуктуаций (гл. 10). Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что флуктуации превращают явления и проблемы *бифуркаций* (достаточно трудные сами по себе) в еще более сложные явления и соответственно еще более трудные проблемы *неравновесных фазовых переходов*.

Роль флуктуаций станет понятной, если мы приведем несколько относительно простых примеров. Рассмотрим переход одного устойчивого узла в два устойчивых узла и один неустойчивый узел (такой переход уже встречался нам на рис. 1.13.5 и 1.13.6). При наличии шумов представляющая точка системы  $\mathbf{q}(t)$  даже в стационарном состоянии все время совершает случайные движения то в одну, то в другую сторону. Следовательно, мы можем говорить лишь о *вероятности* найти вектор системы  $\mathbf{q}$  в некотором элементе

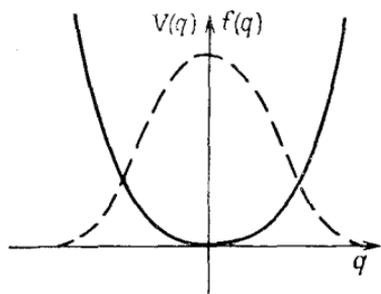


Рис. 1.15.1. Плотность вероятности  $f(q)$  (штриховая линия), соответствующая узлу. Сплошной линией показан потенциал, в котором движется «частица» с координатой  $q$ .

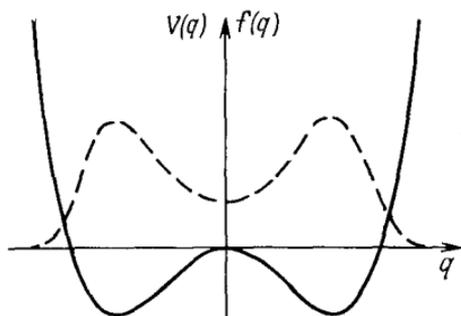


Рис. 1.15.2. Плотность вероятности  $f(q)$  (штриховая линия), соответствующая двум узлам и одному седлу (в одномерном случае). Сплошной линией показан потенциал, в котором движется «частица» с координатой  $q$ .

объема  $dV = dq_1 dq_2, \dots, dq_n$ . Эта вероятность описывается произведением функции распределения вероятности  $f(\mathbf{q})$  и  $dV$ . В точках перехода (рис. 1.15.1 и 1.15.2) форма кривой  $f(\mathbf{q})$  может резко изменяться. Вблизи точек перехода флуктуации параметров порядка становятся особенно большими («критические флуктуации»). При удалении от точки перехода  $\alpha = \alpha_0$  по другую сторону от нее на кривой распределения вероятности снова может образоваться четко выраженный двойной пик, свидетельствующий о том, что система с высокой вероятностью находится в одном из новых состояний. Другая особенность любой системы с шумом состоит в следующем. В начальный момент времени мы можем найти («измерить») систему в некотором состоянии  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$  или в окрестности состояния  $\mathbf{q}_0$ . Но флуктуации могут вывести систему из состояния  $\mathbf{q}_0$ . Уместно поэтому поставить вопрос, через какое время система впервые достигнет заданного состояния  $\mathbf{q}_1$ . Поскольку мы рассматриваем стохастические процессы, такое время перехода можно определить только в статистическом смысле. Проблема оценки времени перехода получила название *проблемы времени первого перехода*. Как ее частный случай возникает проблема оценки

времени, которое требуется системе, чтобы перейти из одного максимума функции распределения в другой.

Аналогичным образом эффекты, типичные для влияния шумов, возникают, когда фокус становится неустойчивым и уступает место предельному циклу. Если вновь возникшее решение  $q$  представить в виде  $\exp [i\omega t + i\varphi(t)] r(t)$  ( $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $r$  по предположению вещественны), то окажется, что фаза  $\varphi(t)$  претерпевает диффузионный процесс, а амплитуда  $r$  совершает флуктуации вблизи некоторого устойчивого значения  $r_0$ . Важные параметры, подлежащие определению, — время релаксации амплитуды  $r$  и коэффициент диффузии фазы. Другие явления, связанные с шумами, относятся к распаду состояний с комбинационными частотами. Шумы могут время от времени выводить систему из таких состояний, при этом иногда вместо одной комбинационной частоты вновь возникают две основные частоты. В последующих главах мы рассмотрим наиболее важные аспекты шумов более подробно, продемонстрируем общий метод на наглядных примерах и приведем несколько общих теорем, оказавшихся наиболее полезными в практических приложениях.

## 1.16. Эволюция пространственных структур

До сих пор мы рассматривали качественные изменения временного поведения систем: возбуждение колебаний, колебания с несколькими частотами, субгармонические колебания и т. д. Однако во многих физических, химических и биологических системах не следует пренебрегать пространственной зависимостью переменных системы. Например, в разд. 1.2.1 было показано, что пространственные структуры могут возникать в жидкости. В простейшем случае исходное состояние пространственно однородно. При некотором значении параметра управления однородное решение, как показывает анализ устойчивости по линейному приближению, может стать неустойчивым. Итак, требуется рассмотреть линейные уравнения вида

$$\dot{\mathbf{w}} = L\mathbf{w}. \quad (1.16.1)$$

Так как  $\mathbf{N}$  в (1.14.1) содержит производные по пространственным координатам,  $L$  также содержит такие производные. Чтобы продемонстрировать наиболее существенные особенности проблемы, представим  $L$  в виде

$$L = L_0 + D\Delta, \quad (1.16.2)$$

где  $L_0$  — постоянная матрица, а  $D$  — постоянная диагональная матрица. Матрица  $L_0$ , вообще говоря, зависит от управляющего параметра  $\alpha$ . Полагая  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \exp(\lambda t) \mathbf{v}(\mathbf{x})$ , преобразуем (1.16.1) к виду

$$(L_0 + D\Delta) \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (1.16.3)$$

Это — эллиптическое дифференциальное уравнение с частными производными. При заданных граничных условиях на  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  уравнение (1.16.3) допускает в качестве решений серию пространственных мод  $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$  с собственными значениями  $\lambda_j$ . При изменении  $\alpha$  одно или несколько собственных значений  $\lambda_j$  могут пересечь мнимую ось, т. е. соответствующие моды могут стать неустойчивыми. Метод решения нелинейных уравнений (1.14.1) по существу ничем не отличается от метода решения, приведенного в разд. 1.14, где мы пренебрегали любой зависимостью  $\mathbf{q}$  от пространственных координат  $\mathbf{x}$ . Итак, пусть

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_0 + \sum_j \xi_j(t) \mathbf{v}_j(\mathbf{x}). \quad (1.16.4)$$

Как и прежде, мы можем выделить параметры порядка  $\xi_j$ , для которых  $\text{Re}\{\lambda_j\} \geq 0$ . Воспользуемся принципом подчинения и запишем уравнение для параметров порядка. Удерживая в (1.16.4) главные члены, т. е. только параметры порядка  $\xi_j \equiv u_j$ , мы получаем скелет возникающих структур. Например если  $\text{Re}\{\lambda_j\} \geq 0$ , то «скелет» выглядит так:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \text{const} + u_1(t) \mathbf{v}_1(\mathbf{x}). \quad (1.16.5)$$

Поскольку  $u_1(t)$  во многих случаях удовлетворяет уравнению

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 - \beta u_1^3, \quad (1.16.6)$$

мы получаем следующий результат: при  $\lambda < 0$  решение  $u_1$  равно нулю, т. е.  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \text{const}$ , и *однородное распределение* устойчиво; при  $\lambda > 0$  решение  $u_1$  отлично от нуля, и возникает пространственно *неоднородное* распределение (1.16.5). Такой подход позволяет проследивать рост *пространственной структуры*. Если имеется несколько параметров порядка  $u_j \neq 0$ , то «скелет» определяется выражением

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \text{const} + \sum u_j \mathbf{v}_j(\mathbf{x}). \quad (1.16.7)$$

Но в отличие от линейных теорий параметры  $u_j$  не могут быть выбраны произвольно. Они удовлетворяют некоторым нелинейным уравнениям (мы выведем эти уравнения в дальнейшем). Тем самым эти нелинейные уравнения задают возможные скелеты и определяют их рост. В более высоких приближениях в формирование пространственных структур вносят вклад и подчиненные моды. Подчеркнем важное различие между описываемыми переходами и фазовыми переходами систем, находящихся в состоянии теплового равновесия, где достигается дальний порядок. За редкими исключениями существующая ныне теория фазовых переходов рассматривает бесконечно протяженные среды, поскольку только в них становятся заметными сингулярности некоторых термодинамических функций (энтропии, удельной теплоемкости и т. д.). С другой

стороны, в неравновесных фазовых переходах (а мы рассматриваем здесь именно такие переходы) решающую роль играет в общем случае конечность геометрии: возникающая структура зависит от формы границ (будет ли граница иметь форму квадрата, прямоугольника, окружности и т. д.). Кроме того, структуры зависят от размеров системы. Иначе говоря, возникающие структуры несут с собой свои собственные масштабы длины, которые должны соответствовать заданной геометрии.

В астрофизических и биологических приложениях нам приходится проследивать эволюцию структур не только на плоскости или в евклидовом пространстве, но и на сферах и еще более сложных многообразиях. Примерами могут служить начальные стадии развития эмбрионов или образование структур в атмосферах планет, например Юпитера. Разумеется, в менее реалистических («более модельных») ситуациях мы можем рассматривать и бесконечно протяженные среды. При этом мы обнаружим явления, хорошо известные из теории фазовых переходов, и можем применить к ним метод ренормгруппы.

В активных средах, таких, как распределенные химические реакции, взаимодействующие клетки ткани, нейронные сети и т. д., могут возникать смешанные пространственно-временные структуры. Методы, с которыми мы познакомимся в дальнейшем, позволяют математически описывать широкие классы таких явлений.

## 1.17. Дискретные отображения. Отображение Пуанкаре

В предыдущих разделах мы кратко рассмотрели методы, позволяющие моделировать многие процессы с помощью эволюционных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t)). \quad (1.17.1)$$

Временная эволюция системы, описываемой вектором  $\mathbf{q}(t)$ , известна, если мы знаем  $\mathbf{q}$  при любых  $t$ . Но, поскольку время непрерывно, нам необходимо для этого располагать бесконечным континуумом данных! Сбор столь обильной информации для человека задача заведомо непосильная. Из создавшегося затруднения существует несколько выходов. Можно искать стационарные состояния, в которых вектор  $\mathbf{q}$  не зависит от времени и может быть представлен конечным числом данных. Можно представить (точно или приближенно) вектор  $\mathbf{q}$  в аналитически замкнутом виде, например  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \sin(\omega t)$ .

Важно не столько то, что мы можем вычислить  $\sin(\omega t)$  при любом  $t$  со сколь угодно высокой точностью (по крайней мере в принципе), — аналитически замкнутое представление вектора позволяет наглядно представить характер эволюции системы ( $\sin(\omega t)$  соот-

ветствует периодическим колебаниям,  $\exp(\lambda t)$  — монотонному росту или убыванию (в зависимости от знака  $\lambda$ )).

Но существует и другой способ обойти проблему, требующую «бесконечной» информации: вектор  $\mathbf{q}$  можно рассматривать, как в цифровых вычислительных машинах, лишь в моменты времени  $t_n$ , образующие дискретную последовательность. Дифференциальное уравнение (1.17.1) перейдет при этом в соответствующую систему разностных уравнений. Еще более сильное упрощение достигается

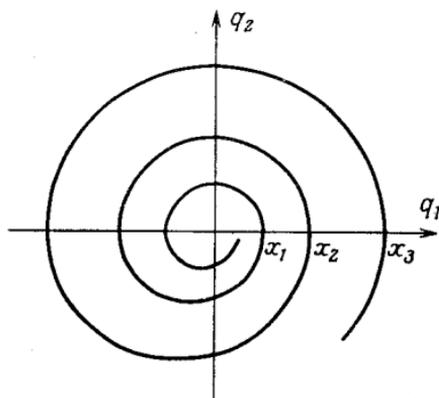


Рис. 1.17.1. Траектория пересекает ось  $q_1$  в точках  $x_1, x_2, x_3, \dots$ .

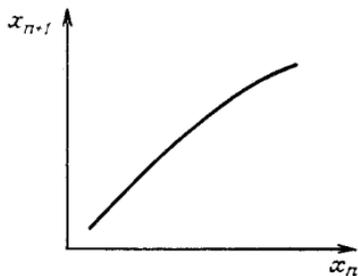


Рис. 1.17.2. Зависимость  $x_{n+1}$  от  $x_n$  на рис. 1.17.1, продолженная до непрерывной функции.

с помощью отображения Пуанкаре. В качестве примера рассмотрим траекторию на плоскости (рис. 1.17.1). Вместо того чтобы все время следить за траекторией, будем отмечать лишь точки ее пересечения с осью  $q_1$ . Обозначим их  $q_1(n) \equiv x_n$ . Поскольку точка  $(q_1 = x_n, q_2 = 0)$  при любом заданном  $n$  может служить начальным значением для полутраектории, пересекающейся с осью  $q_1$  в точке  $x_{n+1}$ , мы заключаем, что  $x_{n+1}$  однозначно определяется выбором  $x_n$ , т. е.

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.17.2)$$

Чтобы найти эту зависимость, уравнение (1.17.1) необходимо проинтегрировать по интервалу времени от  $t_n$  (когда траектория проходит через точку  $x_n$ ) до  $t_{n+1}$  (когда траектория проходит через точку  $x_{n+1}$ ). Никакого упрощения при этом не достигается. Более плодотворной оказывается следующая идея. Рассмотрим как модель уравнение (1.17.2) при заданной функции  $f$  и всех  $n$ . Поскольку необходимость в интегрировании уравнения (1.17.1) отпадает, можно надеяться на то, что нам удастся получить более полное представление о глобальном поведении  $x_n$ . Зависимость между  $x_{n+1}$  и  $x_n$  можно представить графически (рис. 1.17.2). Вероятно, простей-

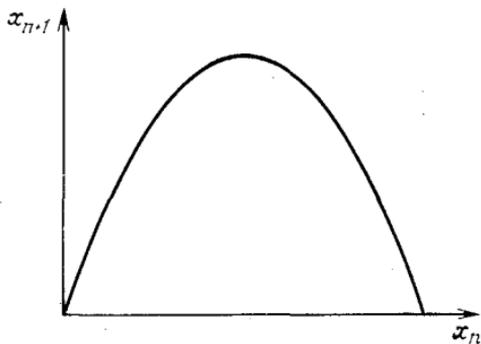


Рис. 1.17.3. Параболическая зависимость  $x_{n+1}$  от  $x_n$ , задаваемая уравнением (1.17.3).

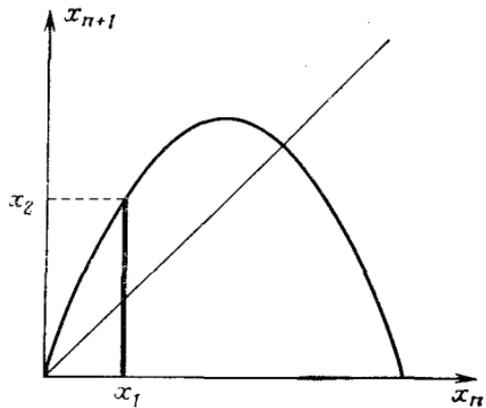


Рис. 1.17.4. На рис. 1.17.4—1.17.8 показано, как построить последовательность  $x_n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) по известному начальному значению  $x_1$ . Так как отображающая функция имеет вид квадратичной параболы, мы найдем  $x_2$ , восстановив перпендикуляр к оси  $x_n$  в точке  $x_1$  до пересечения с параболой.

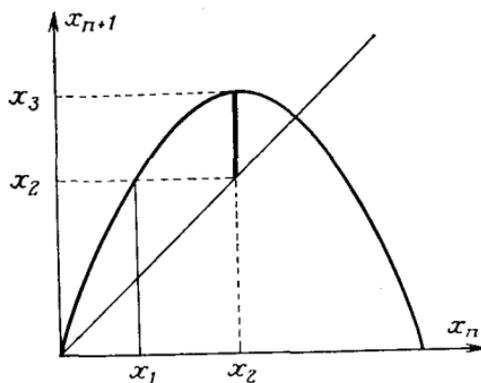


Рис. 1.17.5. Примем значение  $x_2$ , найденное на рис. 1.17.4, за начальное. Для этого проведем через точку  $x_2$  на оси  $x_{n+1}$  горизонтальную (штриховую) прямую до пересечения с биссектрисой угла между осями  $x_{n+1}$  и  $x_n$  и из точки пересечения опустим перпендикуляр на ось  $x_n$ . Абсцисса его основания даст нам новое начальное значение  $x_2$ . Новое значение  $x_3$  мы получим, восстановив из точки  $x_2$  перпендикуляр к оси  $x_n$  до пересечения с параболой.

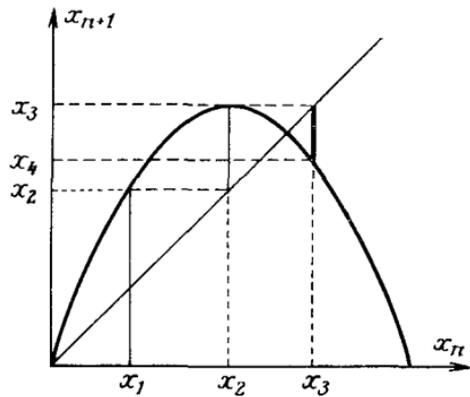


Рис. 1.17.6. Чтобы перейти от  $x_3$  к  $x_4$ , мы должны повторить еще раз уже проделанную процедуру: провести через точку  $x_3$  на оси  $x_{n+1}$  горизонтальную прямую до пересечения с биссектрисой угла между осями  $x_n$  и  $x_{n+1}$ , опустить из точки пересечения перпендикуляр на ось  $x_n$  и из полученной точки  $x_3$  восстановить перпендикуляр к оси  $x_n$  до пересечения с параболой.

шая кривая, приводящая к нетривиальным результатам, соответствует так называемому «логистическому» отображению:

$$x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n). \quad (1.17.3)$$

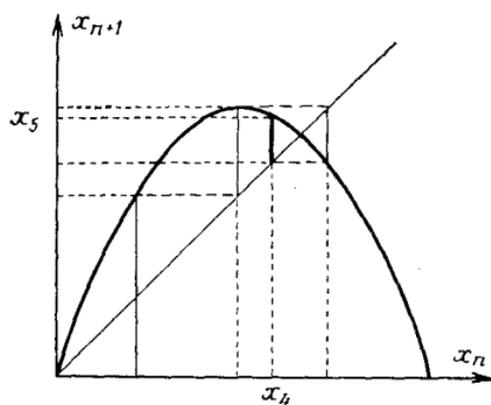


Рис. 1.17.7. Приняв  $x_4$  за исходное значение, мы получим  $x_5$ .

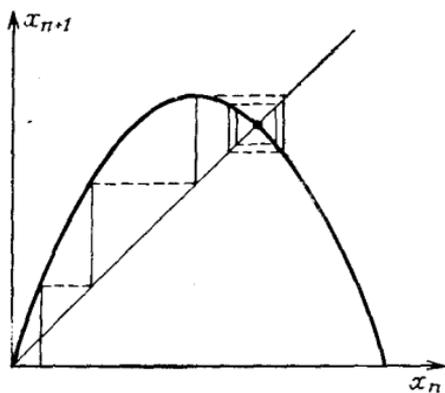


Рис. 1.17.8. Повторяя неоднократно описанную выше процедуру, мы все более приближаемся по спирали к предельной точке — пересечению параболы с биссектрисой угла между осями  $x_{n+1}$  и  $x_n$ .

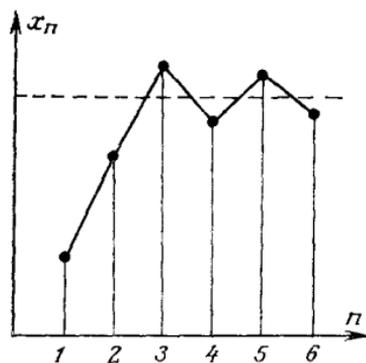


Рис. 1.17.9. Значения  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , построенные на предыдущих рисунках, располагаются в вершинах ломаной, все более приближающейся к штриховой линии.

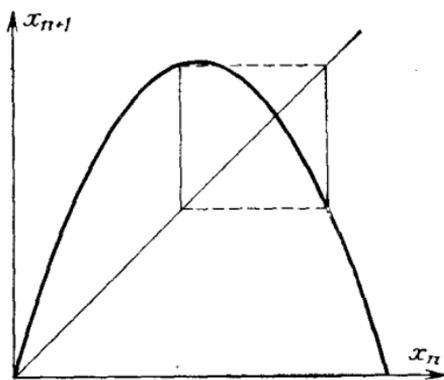


Рис. 1.17.10. При ином выборе параболы (парабола на рис. 1.17.10 выше, чем на рис. 1.17.8) вместо спирали возникает замкнутая кривая. Это означает, что последовательные приближения  $x_n$  принимают поочередно лишь два значения (см. рис. 1.17.11).

График этой зависимости представлен на рис. 1.17.3. Коэффициент  $\alpha$  в (1.17.3) служит параметром управления. Если  $\alpha$  пробегает интервал от 0 до 4, то любое значение  $0 \leq x_n \leq 1$  отображается в не-

которую точку  $0 \leq x_{n+1} \leq 1$  того же интервала. Задав начальное значение  $x_0$ , нетрудно вычислить последовательность  $x_1, x_2 \dots$  по формуле (1.17.3), например, с помощью микрокалькулятора.

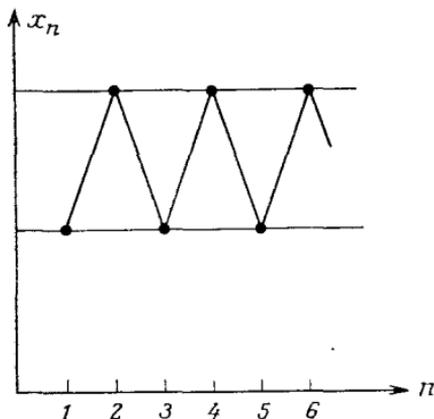


Рис. 1.17.11. Периодическая последовательность  $x_n$ , соответствующая замкнутой кривой на рис. 1.17.10.

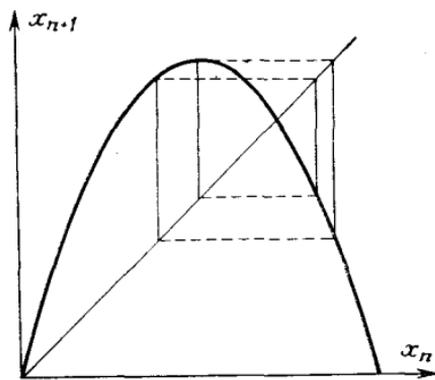


Рис. 1.17.12. Период 4.

Однако поведение решений разностного уравнения (1.17.3) более наглядно можно представить с помощью очень простого геометрического построения (рис. 1.17.4—1.17.9). Настоятельно рекомендуем читателю взять лист бумаги и повторить все построение шаг за шагом. По мере увеличения числа шагов в зависимости от величины  $\alpha$  возникают различные типы поведения  $\{x_n\}$ . При  $\alpha < 3$  последовательность  $\{x_n\}$  сходится к неподвижной точке. При  $3 < \alpha < \alpha_2$  последовательность  $\{x_n\}$  сходится к периодическим перескокам с периодом  $T = 2$  (рис. 1.17.10 и 1.17.11). При  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_3$  (и достаточно больших  $x_n$  и  $t_n$ )  $\{x_n\}$  возвращается к своим значениям при  $n + 4, n + 8$ , т. е. с периодом  $T = 4, T = 8, \dots$  (рис. 1.17.12 и 1.17.13). Если нанести на график значения, принимаемые  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$  и различных  $\alpha$ , то получится множество точек, показанное на рис. 1.17.14.

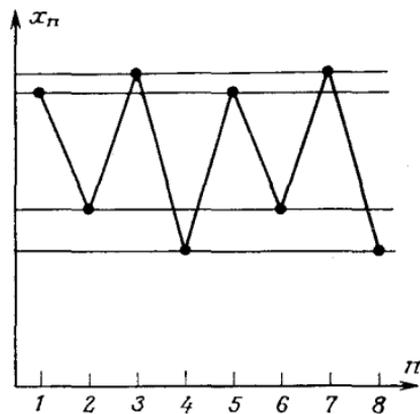


Рис. 1.17.13. Период 4. Зависимость  $x_n$  от  $n$ .

Хорошо видна последовательность удвоений периода, имеющая в  $\alpha = \alpha_\infty = 3,569945672 \dots$  точку накопления. Последователь-

ность  $\alpha_n$ , при которой происходит удвоение периода, удовлетворяет простому закону

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \right) = \delta, \quad \text{где} \quad \delta = 4,6692016609 \dots \dots \dots \quad (1.17.4)$$

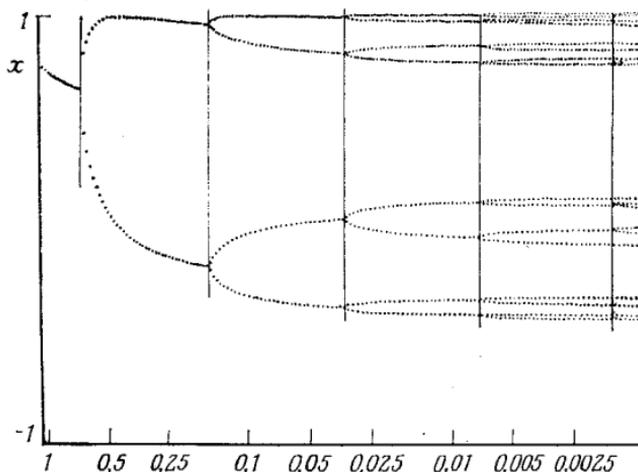


Рис. 1.17.14. Множество возможных значений  $x_n, n \rightarrow \infty$  (по оси координат) в зависимости от управляющего параметра  $\mu_\infty - \mu$  (по оси абсцисс) в логарифмическом масштабе. Логистическое уравнение линейным преобразованием приведено к виду  $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$ , где  $\mu_\infty$  соответствует критическому значению  $\alpha_\infty$ . [Из работы: Collet P., Eckmann J. P.— In: Progress in Physics, vol. I./Ed. by A. Jaffe, D. Ruelle.— Boston: Birkhäuser, 1980.]

Параметр  $\delta$  называется числом Фейгенбаума и носит «универсальный» характер, поскольку существует целый класс отображений (1.17.2), порождающих последовательности удвоений периода с этим числом  $\delta$ .

Хотя экспериментальные результаты (приведенные в разд. 1.2.1) качественно согласуются с теоретически предсказанным значением (1.17.4), не следует удивляться, если это согласие оказывается не слишком хорошим. Прежде всего число Фейгенбаума выведено при  $n \rightarrow \infty$ , тогда как экспериментальные данные получены при  $n = 2, 3, 4, 5$ . Кроме того, управляющий параметр, который описывает «реальный мир» и входит в (1.17.1), не обязательно пропорционален управляющему параметру  $\alpha$  в (1.17.3), а может быть связан с  $\alpha$  значительно более сложным соотношением.

За точкой накопления  $\alpha_\infty$  наблюдается хаос, т. е. беспорядочное «движение»  $x_n$ .

Логистическое отображение позволяет продемонстрировать еще одну важную особенность многих динамических систем: при даль-

нейшем возрастании  $\alpha$  за точкой накопления  $\alpha_\infty$ , зоны хаотического движения перемежаются с «окнами» периодического, т. е. регулярного движения. За последние годы были обнаружены некоторые закономерности, получившие название масштабно инвариантных, или скейлинговых, свойств, но в рамках нашей книги нас будут в большей мере интересовать основные подходы к дискретным отображениям.

Идея отображения Пуанкаре допускает более общую интерпретацию. Например, вместо того чтобы рассматривать траектории на

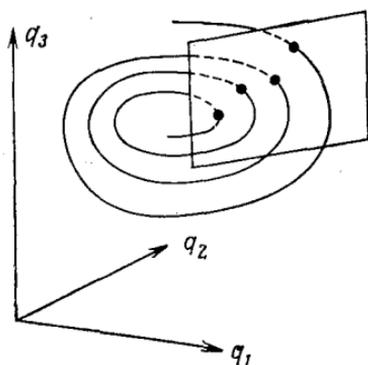


Рис. 1.17.15. Отображение Пуанкаре, соответствующее пересечению траектории с двумерной плоскостью в трехмерном пространстве.

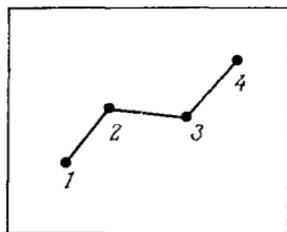


Рис. 1.17.16. Точки пересечения траектории с плоскостью на рис. 1.17.15.

плоскости, как это сделано на рис. 1.17.1, мы можем рассматривать траектории в  $n$ -мерном пространстве и изучать точки их пересечения с некоторой гиперповерхностью. Таковую картину можно наглядно представить себе в трехмерном пространстве (рис. 1.17.15). В ряде случаев, представляющих практический интерес, оказывается, что точки пересечения можно соединить гладкой кривой (рис. 1.17.16). Кривую можно растянуть в прямую и снова воспользоваться, например, графиком, изображенным на рис. 1.17.3. В общем случае мы приходим к необходимости рассматривать дискретные отображения вида

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (1.17.5)$$

где  $\mathbf{x}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — векторы в  $M$ -мерном пространстве. Вектор-функция  $\mathbf{f}$  здесь может зависеть от одного или нескольких управляющих параметров  $\alpha$ , позволяющих изучать качественные изменения «дискретной динамики»  $\mathbf{x}_n$  при изменении  $\alpha$ . В широком классе таких качественных изменений может быть усмотрена аналогия с неравновесными фазовыми переходами, рассматриваемыми с помощью традиционных эволюционных уравнений (1.17.1). Так,

мы вновь сталкиваемся с критическим замедлением и нарушением симметрии, применимостью принципа подчинения (для дискретных отображений) и т. д. Эти аналогии становятся еще более близкими, если рассматривать дискретные отображения *с шумом* (о которых пойдет речь далее). Уравнения (1.17.5) находят многочисленные приложения, которые до сих пор изучались лишь в отдельных частных случаях. Например, вектор состояния  $\mathbf{x}_n$  может символизировать различные пространственные структуры.

В заключение выясним, как можно определить *показатели Ляпунова* для дискретного отображения. Будем действовать по аналогии с разд. 1.14.6, в котором мы ввели понятие показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений.

Для дискретного отображения «траектория» состоит из последовательности точек  $\mathbf{x}_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть  $\mathbf{x}_n^0$  — траектория, в окрестности которой проводится рассмотрение. По предположению она удовлетворяет уравнению (1.17.5). Запишем соседнюю траекторию в виде

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n^0 + \delta\mathbf{x}_n \quad (1.17.6)$$

и, подставив ее в (1.17.5), разложим  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n^0 + \delta\mathbf{x}_n)$  в степенной ряд по компонентам возмущения  $\delta\mathbf{x}_n$ . Удерживая линейные члены, приходим к уравнению

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = L(\mathbf{x}_n^0) \delta\mathbf{x}_n, \quad (1.17.7)$$

где матрица  $L$  определяется по формуле

$$L \equiv (L_{lk}) = \left( \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_n^0} \right). \quad (1.17.8)$$

Уравнение (1.17.7) можно решить методом последовательных приближений (если вектор  $\mathbf{x}_n^0$  заранее известен). Выбирая за нулевое приближение  $\delta\mathbf{x}_0$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_1 &= L(\mathbf{x}_0^0) \delta\mathbf{x}_0, \\ \delta\mathbf{x}_2 &= L(\mathbf{x}_1^0) \delta\mathbf{x}_1, \\ &\vdots \\ \delta\mathbf{x}_n &= L(\mathbf{x}_{n-1}^0) \delta\mathbf{x}_{n-1}. \end{aligned} \quad (1.17.9)$$

Выражая  $\delta\mathbf{x}_n$  через  $\delta\mathbf{x}_{n-1}$ ,  $\delta\mathbf{x}_{n-1}$  — через  $\delta\mathbf{x}_{n-2}$ ,  $\dots$  и т. д., приходим к явной зависимости между  $\delta\mathbf{x}_n$  и  $\delta\mathbf{x}_0$ :

$$\delta\mathbf{x}_n = L(\mathbf{x}_{n-1}^0) L(\mathbf{x}_{n-2}^0) \dots L(\mathbf{x}_0^0) \delta\mathbf{x}_0 \quad (1.17.10)$$

(коэффициенты  $L$  умножаются как матрицы!). Показателями Ляпунова по определению называются величины

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\delta\mathbf{x}_n|. \quad (1.17.11)$$

В зависимости от направления  $\delta \mathbf{x}_0$  могут получаться различные  $\lambda$  (при многомерных отображениях).

Для одномерного отображения показатель Ляпунова  $\lambda$  допускает явное представление. В этом случае коэффициенты  $L$  и  $\delta \mathbf{x}_0$  — числа, поэтому из (1.17.10) следует, что

$$|\delta x_n| = |L(x_{n-1}^0), L(x_{n-2}^0) \dots L(x_0^0) \delta x_0| = \\ = |L(x_{n-1}^0)| \cdot |L(x_{n-2}^0)| \dots |\delta x_0|. \quad (1.17.12)$$

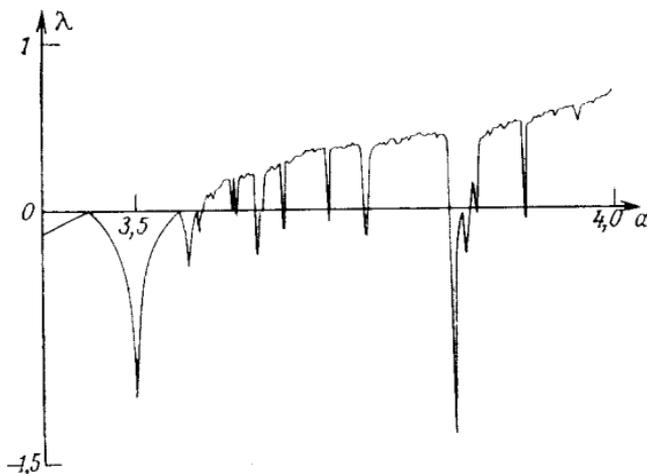


Рис. 1.17.17. Показатель Ляпунова, соответствующий уравнению (1.17.3), как функция параметра  $\alpha \equiv \alpha \in [3,4; 4]$ . [Из работы: Mayer-Kress G., Haken H., J. Stat. Phys. 26, 149 (1981).]

Подставляя последнее выражение в (1.17.11) и используя (1.17.8), получаем

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \ln |f'(x_m^0)|, \quad (1.17.13)$$

где  $f'$  — производная функции  $f$  по  $x$ .

В качестве нетривиального примера на рис. 1.17.17 показан показатель Ляпунова логистического отображения (1.17.3) как функция от  $\alpha$ . Положительные значения показателя соответствуют хаотическому движению, в то время как отрицательные значения указывают на регулярный (периодический) режим.

## 1.18. Дискретные отображения с шумом

Дискретные отображения позволяют легко моделировать влияние флуктуаций на динамику системы: каждое новое значение  $x_{n+1}$  определяется не только значением  $f(x_n)$ , но и некоторыми дополнительными флуктуациями  $\eta_n$ , так, что

$$x_{n+1} = f(x_n) + \eta_n. \quad (1.18.1)$$

Могут быть также построены и рассмотрены более сложные отображения, например отображения для векторов  $x_n$  и флуктуаций, зависящих от  $x_n$  (см. гл. 11).

## 1.19. Пути к самоорганизации

Во всех случаях, рассматриваемых в этой книге, временные, пространственные и пространственно-временные структуры возникают, а не накладываются на систему извне. Процессы, приводящие к такому возникновению структур, мы будем называть «самоорганизацией». Разумеется, в ходе эволюции или функционирования сложных (например, биологических) систем может происходить целая иерархия процессов самоорганизации. В этой книге мы стремимся выяснить, из каких блоков складывается самоорганизация. Но в отличие от других подходов (например, в отличие от молекулярной биологии, занимающейся изучением отдельных молекул и их взаимодействия) основной интерес для нас представляет взаимодействие многих молекул или многих подсистем. Самоорганизацию такого типа, который мы рассматриваем, можно вызвать различными способами. Мы можем изменить глобальное воздействие на систему окружающей среды (описываемое управляющими параметрами). Самоорганизацию может вызвать и одно лишь увеличение числа компонент системы. Совершенно новый тип поведения на макроскопическом уровне может возникнуть, даже если мы смешаем те же компоненты. Наконец, причиной самоорганизации может стать внезапное изменение управляющих параметров, происшедшее в то время, когда система релаксирует в новое состояние при новых условиях (связях). Этот аспект открывает перед нами возможность очень широкого подхода к эволюции структур, в том числе и к жизни во Вселенной. Вселенная находится в переходном состоянии, возникшем из «файербола», и расширяется, в ней могут образовываться упорядоченные структуры.

В этой книге строгие математические формулировки интересуют нас больше, чем философские обсуждения, поэтому мы кратко скажем о том, какие математические методы пригодны для описания перечисленных нами трех типов самоорганизации.

### 1.19.1. Самоорганизация через изменение управляющих параметров

Этот случай был подробно рассмотрен выше. При медленном изменении воздействия окружающей среды система в некоторых критических точках может переходить в новые состояния, отличающиеся более высоким порядком или структурой. В частности, могут возникнуть пространственные структуры, хотя действие окружающей среды на систему совершенно однородно.

### 1.19.2. Самоорганизация через изменение числа компонент

Начнем с двух несвязанных систем, описываемых векторами состояния  $\mathbf{q}^{(1)}$  и  $\mathbf{q}^{(2)}$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{q}}^{(1)} = \mathbf{N}^{(1)}(\mathbf{q}^{(1)}), \quad (1.19.1)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(2)} = \mathbf{N}^{(2)}(\mathbf{q}^{(2)}). \quad (1.19.2)$$

Предположим, что эти уравнения допускают устойчивые неактивные состояния

$$\mathbf{q}_0^{(j)} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2. \quad (1.19.3)$$

Введем связь между системами. Пусть ее описывают функции  $\mathbf{K}^{(j)}$ . Уравнения (1.19.1) и (1.19.2) при этом заменяются уравнениями

$$\dot{\mathbf{q}}^{(1)} = \mathbf{N}^{(1)}(\mathbf{q}^{(1)}) + \mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}), \quad (1.19.4)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(2)} = \mathbf{N}^{(2)}(\mathbf{q}^{(2)}) + \mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}). \quad (1.19.5)$$

Рассмотрим теперь полную систему 1 + 2, описываемую уравнением

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha), \quad (1.19.6)$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{(1)} \\ \mathbf{q}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (1.19.7)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^{(1)} + \alpha \mathbf{K}^{(1)} \\ \mathbf{N}^{(2)} + \alpha \mathbf{K}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.19.8)$$

Мы ввели параметр  $\alpha$ , изменяющийся от 0 до 1 и играющий роль управляющего параметра. При подходящих, но реалистических условиях изменения параметра  $\alpha$  вызывает неустойчивость нашего первоначального решения (1.19.3), и вектор  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  заменяется вектором

$$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}, \quad (1.19.9)$$

указывающим на какие-то новые структуры или активные состояния. Как показывает этот пример, самоорганизация такого типа допускает рассмотрение с помощью тех же методов, которые мы использовали, когда параметр  $\alpha$  был обычным управляющим параметром.

Ясно, что если даже изменение управляющих параметров  $\alpha$ , выбираемых по каким-то другим, не связанным с образованием структур соображениям, может приводить к возникновению структур, то специально подобранные управляющие параметры тем бо-

лее обладают этой способностью. Например, под влиянием их в цепи могут резко измениться связи между различными компонентами. Ясно, что это открывает новые перспективы в изучении функций мозга с помощью неравновесных фазовых переходов.

### 1.19.3. Самоорганизация через переходы

Структуры могут возникнуть в результате самоорганизации, когда система из некоторого начального (неупорядоченного или однородного) состояния переходит в другое, конечное состояние, которое не обязательно указывать (оно может даже не существовать). Это особенно наглядно видно на примере вектора состояния вида

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = u(t) \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (1.19.10)$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  описывает некоторый пространственный порядок, а

$$\dot{u} = \lambda u \quad (1.19.11)$$

— уравнение для параметра порядка. При быстром изменении управляющего параметра  $\alpha$ , когда неравенство  $\lambda < 0$  быстро переходит в неравенство  $\lambda > 0$ , появляется переходный вектор состояния вида

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (1.19.12)$$

Ясно, что он описывает некоторую структуру, но не стремится к новому устойчивому состоянию.

За описанным нами подходом кроется глубокая философская проблема (присущая всем случаям самоорганизации), поскольку для того, чтобы могло возникнуть решение (1.19.12), в системе должны существовать какие-то *флуктуации*. В противном случае решение  $u \equiv 0$  и, следовательно,  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{0}$  осталось бы неизменным навсегда.

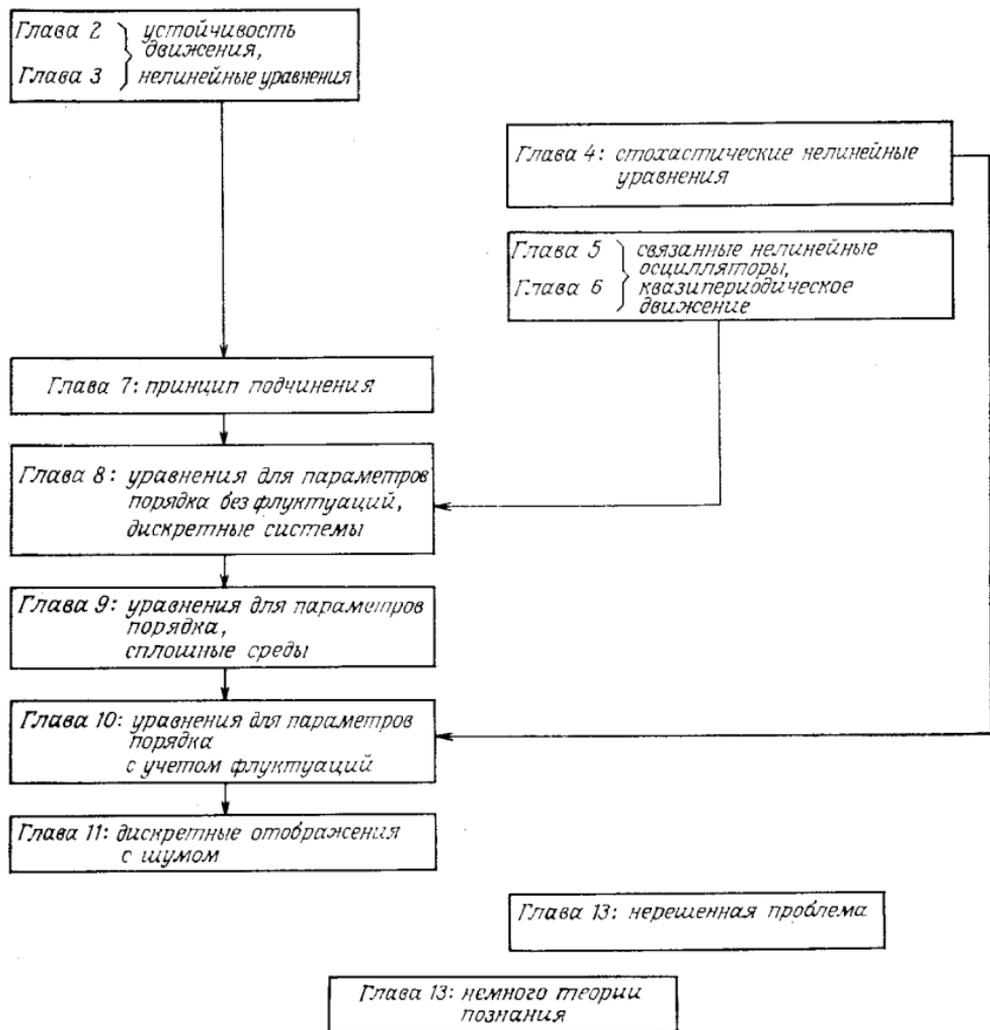
## 1.20. Как мы намереваемся действовать дальше?

В этой книге наше внимание сосредоточено на ситуациях, в которых системы претерпевают качественные изменения. Наша генеральная линия может быть разбита на следующие этапы:

- 1) изучение потерь устойчивости,
- 2) вывод принципа подчинения,
- 3) вывод и решение уравнений для параметров порядка.

Следуя этому плану (см. табл. 1.20.1), мы начинаем с изучения *потери устойчивости*, поэтому гл. 2 и 3 посвящены теории линейных дифференциальных уравнений. Если в гл. 2 собраны результаты, хорошо известные в математике (но, возможно, изложенные до некоторой степени по-новому), то гл. 3 содержит большей частью новые результаты. Возможно, она покажется несколько трудной, и при первом чтении ее можно опустить.

Таблица 1.20.1. Схема связей между главами книги.  
Обратите внимание на то, что слова в рамках  
не совпадают с названиями глав



В гл. 4 заложена основа для стохастических методов, используемых главным образом в гл. 10. В гл. 5 и 6 рассмотрены связанные нелинейные осцилляторы и квазипериодическое движение. Обе главы (5 и 6) содержат подготовительный материал к гл. 8 (в особенности, к разделам 8.8—11). В гл. 6 излагается важная теорема Мозера. Чтобы не перегружать основной текст, ее доказательство (принадлежащее Мозеру) вынесено в приложение. В гл. 7 подводятся итог нашего продвижения по основному направлению, начатого в гл. 2 и 3, и рассматривается принцип подчинения (для нелинейных дифференциальных уравнений с флуктуирующими силами и без них). В этой главе излагаются также новые результаты.

имеющие решающее значение для гл. 8 и 9, поскольку они позволяют резко уменьшить число степеней свободы. Гл. 8 и 9 посвящены в основном рассмотрению одной проблемы: выводу и решению *уравнений для параметров порядка*. В гл. 8 рассматриваются дискретные системы, в гл. 9 — непрерывно распределенные системы. Ряд результатов публикуется впервые. В гл. 10 исследуется влияние *флуктуаций* на системы в точках неустойчивости. Следующая глава посвящена некоторым общим подходам к *дискретным отображениям с шумом* и также в русле основного направления книги.

Гл. 12 выпадает из общего направления. В ней показано, что даже на сравнительно простые (на первый взгляд) вопросы, возникающие в теории динамических систем, ответов в принципе не существует. Наконец, гл. 13 резюмирует тему вводной главы: какое место занимает синергетика среди других наук. В некотором смысле эту главу можно рассматривать как своего рода краткий экскурс в теорию познания. В заключение замечу, что гл. 2—6 полезны при решении проблем и в тех случаях, когда системы находятся далеко от точек неустойчивости.

**ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

В этой главе мы основательно изучим решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие уравнения продолжают играть немаловажную роль во многих естественных, да и не только естественных науках (например, в экономике) и поэтому заслуживают особого рассмотрения. Не будем забывать и о том, что наша главная цель состоит в исследовании нелинейных уравнений; при построении их решений нам иногда придется обращаться к решениям линейных уравнений.

Материал этой главы расположен по следующему плану. Разд. 2.1 посвящен свойствам решений однородных дифференциальных уравнений различного типа. По характеру зависимости коэффициентов этих уравнений от времени они подразделяются на уравнения с постоянными, периодическими, квазипериодическими коэффициентами, а также на уравнения более общего типа. В разд. 2.2 мы покажем, как применить понятие инвариантности относительно групповых операций к уравнениям двух первых типов. В разд. 2.3 мы познакомимся с неоднородными дифференциальными уравнениями. Некоторые общие теоремы из алгебры и теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (связанные системы) приведены в разд. 2.4. В разд. 2.5 вводятся пространства дуальных решений. Общий вид решений для случая постоянных и периодических матриц коэффициентов рассмотрен соответственно в разд. 2.6—2.8. В разд. 2.8 и в начале разд. 2.7 мы затрагиваем некоторые аспекты теории групп, а из разд. 2.8 читатель сможет почерпнуть начальные сведения по теории представлений. В разд. 2.9 мы излагаем теорию возмущений, позволяющую получить явные решения для случая матриц периодических коэффициентов.

**2.1. Примеры линейных дифференциальных уравнений:  
случай одной переменной**

Рассмотрим переменную  $q$ , которая зависит от переменной  $t$ , т. е.  $q(t)$ , и предположим, что  $q$  непрерывно дифференцируема. Переменную  $t$  мы будем интерпретировать как время, хотя в неко-

торых приложениях она имеет другой смысл (например, под  $t$  иногда можно понимать пространственную координату). Если противное явно не оговорено, будем считать, что  $t$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Начнем с изучения различных наиболее типичных классов однородных дифференциальных уравнений.

### 2.1.1. Линейное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом

Рассмотрим уравнение

$$\dot{q} = aq, \quad (2.1.1)$$

где  $a$  — постоянный коэффициент. Решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = Ce^{\lambda t}, \quad (2.1.2)$$

где  $\lambda = a$ , в чем нетрудно убедиться, подставив (2.1.2) в (2.1.1). Постоянную  $C$  можно фиксировать, задав начальное условие, например потребовав, чтобы при  $t = 0$

$$q(0) = q_0, \quad (2.1.3)$$

где  $q_0$  — заранее заданное значение. Тогда

$$C = q_0 = q(0), \quad (2.1.4)$$

и (2.1.2) можно представить в виде

$$q(t) = q(0) e^{\lambda t}, \quad (\lambda = a). \quad (2.1.5)$$

Как показано в разд. 1.14 и 1.16, линейные дифференциальные уравнения играют важную роль в анализе устойчивости решений нелинейных уравнений, поэтому и здесь, и далее мы будем рассматривать временную зависимость решений (2.1.5) при больших временах  $t$ . Ясно, что при  $t > 0$  асимптотическое поведение решения (2.1.5) определяется знаком  $\operatorname{Re} \{\lambda\}$ . Если  $\operatorname{Re} \{\lambda\} > 0$ , то  $|q|$  возрастает экспоненциально. Если  $\operatorname{Re} \{\lambda\} = 0$ , то  $q(t)$  — постоянная. Наконец, если  $\operatorname{Re} \{\lambda\} < 0$ , то  $|q|$  экспоненциально затухает. Число  $\lambda$  называется *характеристическим показателем*.

### 2.1.2. Линейное дифференциальное уравнение с периодическим коэффициентом

В качестве следующего примера рассмотрим уравнение

$$\dot{q} = a(t)q, \quad (2.1.6)$$

где  $a(t)$  по предположению — непрерывная функция. Решение уравнения (2.1.6) имеет вид

$$q = q(0) \exp \left[ \int_0^t a(\tau) d\tau \right]. \quad (2.1.7)$$

Необходимо различать несколько типов зависимости  $a(t)$  от  $t$ . Если коэффициент  $a(t)$  — периодический и, например, непрерывно дифференцируемый, то его можно разложить в ряд Фурье:

$$a(t) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (2.1.8)$$

Выясним теперь асимптотическое поведение решения (2.1.7). Подставив для этого (2.1.8) в интеграл, входящий в (2.1.7), получим

$$\int_0^t a(\tau) d\tau = tc_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in\omega} (e^{in\omega t} - 1). \quad (2.1.9)$$

При  $n \neq 0$  сумма в (2.1.9) сходится по крайней мере в тех случаях, когда сходится сумма в (2.1.8). Следовательно, сумма в (2.1.9) есть периодическая функция, и асимптотическое поведение решения (2.1.7) определяется коэффициентом  $c_0$  в (2.1.8). В зависимости от того, будет его вещественная часть положительна, равна нулю или отрицательна, мы получим экспоненциальный рост, нейтральное решение или экспоненциальное затухание.

Объединяя формулы (2.1.7) — (2.1.9), запишем решение уравнения (2.1.6) в виде

$$q(t) = e^{\lambda t} u(t) \quad (2.1.10)$$

с характеристическим показателем  $\lambda = c_0$  и

$$u(t) = q(0) \exp \left[ \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in\omega} (e^{in\omega t} - 1) \right]. \quad (2.1.11)$$

Поскольку экспонента от периодической функции есть снова периодическая функция,  $u(t)$  периодична. Итак, мы установили, что решения дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами  $a(t)$  имеют вид (2.1.10), где  $u(t)$  — периодическая функция. Поскольку  $u(t)$  ограничена, асимптотическое поведение  $|q(t)|$  определяется показателем  $\text{Re} \{\lambda t\}$ , как и утверждалось.

### 2.1.3. Линейное дифференциальное уравнение с квазипериодическим коэффициентом

Возможно, кто-нибудь из читателей склонен считать наш перечень примеров скучным, но уже при рассмотрении следующего более сложного примера мы сталкиваемся со специфической трудностью. Предположим, что в уравнении

$$\dot{q} = a(t)q \quad (2.1.12)$$

коэффициент  $a(t)$  квазипериодический, т. е. допускает разложение в кратный ряд Фурье:

$$a(t) = c_0 + \sum_{\mathbf{m} \neq 0} c_{\mathbf{m}} \exp(i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} t), \quad (2.1.13)$$

где  $\mathbf{m}$  —  $n$ -мерный вектор с целочисленными компонентами,  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор той же размерности с компонентами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , так что

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_n \omega_n. \quad (2.1.14)$$

Будем считать, что (2.1.14) обращается в нуль только в том случае, если  $|\mathbf{m}| = 0$  (иначе мы могли бы выразить одну или несколько компонент  $\omega_j$  через остальные, и число «независимых» компонент вектора  $\boldsymbol{\omega}$  было бы меньше  $n$ ; если бы среди компонент  $\omega_j$  независимой была лишь одна, то коэффициент (2.1.13) был бы периодической функцией). Иначе говоря, мы исключаем все  $\boldsymbol{\omega}$ , которые представимы в виде линейных комбинаций других с рациональными коэффициентами. Формальное решение уравнения (2.1.12) снова имеет вид (2.1.7). Вычислим теперь интеграл, стоящий в показателе экспоненты в (2.1.7). Если ряд в (2.1.13) сходится абсолютно, то его можно интегрировать почленно:

$$\int_0^t a(\tau) d\tau = c_0 t + \sum_{\mathbf{m} \neq 0} \frac{c_{\mathbf{m}}}{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}} [\exp(i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} t) - 1]. \quad (2.1.15)$$

Для того чтобы сумма в (2.1.15) имела такой же вид, как в (2.1.13), т. е. была квазипериодической функцией, ее необходимо преобразовать следующим образом:

$$\sum_{\mathbf{m} \neq 0} \frac{c_{\mathbf{m}}}{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}} \exp(i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} t) + \text{const}. \quad (2.1.16)$$

Однако не зависящие от времени члены (2.1.15), формально равные

$$\text{const} = - \sum_{\mathbf{m} \neq 0} \frac{c_{\mathbf{m}}}{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}}, \quad (2.1.17)$$

и аналогично первый член (2.1.16) не обязательно сходятся. Почему? Дело в том, что среди чисел  $m$  могут быть отрицательные, поэтому при некоторых комбинациях

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} \rightarrow 0 \quad (2.1.18)$$

при

$$|\mathbf{m}| \rightarrow \infty. \quad (2.1.19)$$

[Условие (2.1.18) может выполняться даже при конечных  $m$ , если отношения частот  $\omega$  рациональны: в этом случае  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  при некотором  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ . Наше предположение относительно  $\boldsymbol{\omega}$  исклю-

чает подобную ситуацию.] Может показаться, что соотношения (2.1.18) удастся избежать, если отношения частот иррациональны. Доказано, однако, что и при иррациональных отношениях частот оба соотношения (2.1.18) и (2.1.19) могут выполняться. Так как  $\mathbf{m} \cdot \omega$  входит в знаменатель, ряд (2.1.18) не обязательно сходится, даже если сходится ряд  $\sum_m |c_m|$ . Возникает вопрос: при каких условиях ряд (2.1.17) все же сходится? Так как  $c_m$  и  $\mathbf{m} \cdot \omega$  входят вместе, это условие относится и к  $c_m$ , и к  $\omega_j$ . Нестрого можно сказать, что требуется найти такие  $c_m$ , которые бы стремились достаточно быстро к нулю при  $|\mathbf{m}| \rightarrow \infty$ , и такие  $\omega_j$ , при которых произведение  $|\mathbf{m} \cdot \omega|$  стремилось бы достаточно медленно к нулю при  $|\mathbf{m}| \rightarrow \infty$ . Тогда ряд (2.1.17) сошелся бы. И с математической, и с практической точек зрения условие на  $\omega_j$  представляет большой интерес, поэтому мы начнем с него.

Итак, требуется найти такие  $\omega_j$ , отношения которых, так сказать, «достаточно иррациональны». Математически это условие можно выразить по-разному. Часто ему придают вид неравенства

$$|(\mathbf{m} \cdot \omega)| \geq K \|\mathbf{m}\|^{-(n+1)}, \quad (2.1.20)$$

где

$$\|\mathbf{m}\| = |m_1| + |m_2| + \dots + |m_n|. \quad (2.1.21)$$

Здесь  $K$  — постоянная. При  $\|\mathbf{m}\| \rightarrow \infty$  левая часть (2.1.20) по-прежнему может стремиться к нулю, но достаточно медленно. Условие (2.1.20), (2.1.21) называется *условием Колмогорова—Арнольда—Мозера*, или сокращенно *условием КАМ*. Если задана реальная система, то возникает вопрос, удовлетворяют ли ее частоты условию КАМ (2.1.20), (2.1.21). С точки зрения математики такой вопрос разумен, однако ответить на него для реальных систем весьма трудно, если вообще возможно. Кроме того, поскольку системы подвержены флуктуациям, весьма сомнительно, чтобы условие КАМ выполнялось при любых  $t$ , даже если оно выполняется при каком-то  $t$ . Более разумен другой вопрос: какова вероятность того, что данные частоты удовлетворяют условию КАМ? Ответ на него дает следующая математическая теорема (которую мы приведем без доказательства): в пространстве  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  относительная мера тех  $\omega$ , которые не удовлетворяют условию КАМ, стремится к нулю как  $K$ . Следовательно, при достаточно малых  $K$  большинство  $\omega$  удовлетворяет неравенству (2.1.20).

Обсудим теперь вторую проблему, а именно скорость сходимости коэффициентов  $c_m$  в (2.1.13). Поскольку обычный (однократный) ряд Фурье более удобен в обращении, чем кратный ряд Фурье вида (2.1.13), попытаемся связать (2.1.13) с простым рядом Фурье. Достигается это с помощью следующего трюка. Введем вспомога-

тельные переменные  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  и заменим  $a(t)$  в (2.1.13) выражением

$$a(t, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) = c_0 + \sum_{\mathbf{m} \neq 0} c_{\mathbf{m}} \exp(im_1 \omega_1 \Phi_1 + \dots + im_n \omega_n \Phi_n + i\mathbf{m} \cdot \omega t), \quad (2.1.22)$$

т. е. функцией от  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  и  $t$ . Время  $t$  можно «исключить», введя  $\tilde{\Phi}_j = \Phi_j + t$ . Зафиксируем все переменные  $\tilde{\Phi}$ , кроме одной, например  $\tilde{\Phi}_j$ . Это позволит нам применить к (2.1.22) теоремы о простых рядах Фурье. Воспользуемся следующей теоремой (для простоты обозначений положим  $\omega_j \tilde{\Phi}_j = x$ ). Пусть функция

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m e^{imx} \quad (2.1.23)$$

имеет непрерывные производные до  $(h-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывные производные  $h$ -го порядка. Тогда

$$|\alpha_m| \leq \frac{C}{|m|^h}. \quad (2.1.24)$$

Обратимся к (2.1.22) и предположим, что производные коэффициента  $a$  удовлетворяют условиям теоремы при всех  $\tilde{\Phi}_j$ . Тогда

$$|c_{\mathbf{m}}| \leq \frac{C}{|m_1|^h \dots |m_n|^h}. \quad (2.1.25)$$

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы показать, как действует условие КАМ. Исследуем сходимость ряда, стоящего в правой части (2.1.17). Начнем с неравенства ( $\sum'$  означает суммирование по  $\mathbf{m} \neq 0$ )

$$\left| \sum'_{\mathbf{m}} \frac{c_{\mathbf{m}}}{i\mathbf{m} \cdot \omega} \right| \leq \sum'_{\mathbf{m}} \frac{|c_{\mathbf{m}}|}{|\mathbf{m} \cdot \omega|}, \quad (2.1.26)$$

которое, воспользовавшись соотношениями (2.1.21) и (2.1.25), преобразуем к виду

$$\left| \sum'_{\mathbf{m}} \frac{c_{\mathbf{m}}}{i\mathbf{m} \cdot \omega} \right| \leq \frac{C}{K} \sum'_{\mathbf{m}} \frac{(|m_1| + \dots + |m_n|)^{n+1}}{|m_1|^h \dots |m_n|^h}. \quad (2.1.27)$$

Для того чтобы получить достаточное условие сходимости (2.1.27), заменим все  $|m_j|$  в числителе их максимальным значением:

$$\left| \sum'_{\mathbf{m}} \frac{c_{\mathbf{m}}}{i\mathbf{m} \cdot \omega} \right| \leq \frac{C}{K} n^{n+1} \sum'_{\mathbf{m}} \frac{m_{\max}^{n+1}}{|m_1|^h \dots |m_n|^h}. \quad (2.1.28)$$

Из элементарного признака сходимости заключаем, что (2.1.28) сходится, если  $h \geq n + 3$  ( $h$  — целое число). Как показывает

проделанное нами упражнение из анализа, условие КАМ и сходимость ряда (2.1.17) связаны между собой.

Пусть коэффициенты  $c_m$  сходятся так быстро, что если выполняется условие КАМ (2.1.20), то первая сумма в (2.1.16) сходится абсолютно. Тогда решение уравнения (2.1.12) с квазипериодическим коэффициентом (2.1.13) можно представить в виде

$$q(t) = e^{\lambda t} u(t), \quad (2.1.29)$$

где характеристический показатель определяется равенством

$$\lambda = c_0, \quad (2.1.30)$$

$u(t)$  — квазипериодическая функция

$$u(t) = \tilde{q}(0) \exp \left[ \sum_{m \neq 0} \frac{c_m}{im \cdot \omega} \exp(im \cdot \omega t) \right], \quad (2.1.31)$$

$$\tilde{q}(0) = q(0) \exp \left( - \sum_{m \neq 0} \frac{c_m}{im \cdot \omega} \right). \quad (2.1.32)$$

Так как ряд в (2.1.31) сходится абсолютно, функция  $u(t)$  ограничена. Следовательно, асимптотическое поведение решения (2.1.29) определяется экспонентой  $\exp(\lambda t)$ .

Обратимся теперь к однородному уравнению общего типа.

#### 2.1.4. Линейное дифференциальное уравнение с вещественным ограниченным коэффициентом

Коэффициент  $a(t)$  дифференциального уравнения (2.1.6) на этот раз — непрерывная и ограниченная функция:

$$|a(t)| \leq B \quad (2.1.33)$$

при

$$0 \leq t < \infty, \quad (2.1.34)$$

$a$  в остальном произвольная функция времени. Будем считать, что  $a(t)$  принимает только вещественные значения. Общее решение уравнения (2.1.6) имеет в этом случае вид

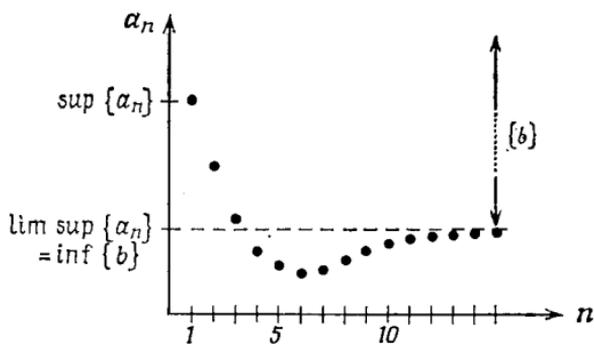
$$q(t) = q(0) \exp \left[ \int_0^t a(\tau) d\tau \right]. \quad (2.1.35)$$

Требуется исследовать поведение решения (2.1.35) при  $t \rightarrow \infty$ . В частности, нас интересует, может ли (2.1.35) возрасти или убывать экспоненциально. Прологарифмировав (2.1.35), получим

$$\ln |q(t)| = \ln |q(0)| + \int_0^t a(\tau) d\tau. \quad (2.1.36)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию асимптотического поведения интеграла в (2.1.36). Прежде всего нам необходимо

ввести понятие «супремума», или «наименьшей верхней грани». Пусть  $A$  — множество вещественных чисел  $\{a\}$ . Наименьшей верхней гранью множества  $A$  называется наименьшее вещественное число  $b$ , такое, что  $a < b$  при всех  $a \in A$ . Обозначается наименьшая верхняя грань символом  $\sup \{A\}$ . Аналогичным образом определяется инфимум, или наибольшая нижняя грань  $\inf \{A\}$ . Если  $A$  — бесконечное множество вещественных чисел, то символ  $\limsup \{A\}$  означает наибольшую нижнюю грань всех чисел  $b$ , таких, что только конечное множество элементов из  $A$  превосходит  $b$ . В частности, если  $A$  — последовательность  $\{a_n\}$ , то  $\limsup \{A\}$  обычно обозначают  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$ .



**Рис. 2.1.1.** Точками изображены члены некоторой последовательности  $\{a_1, a_2, \dots\}$ . Множество  $\{b\}$  содержит все те и только те вещественные числа, для каждого из которых существует лишь конечное подмножество членов последовательности  $\{a_n\}$ , больших или равных ему.

Наглядно введенные нами понятия показаны на рис. 2.1.1. Итак, нас интересует (2.1.36). Составим

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t a(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.1.37)$$

Для первого члена правой части (2.1.36) получаем

$$\frac{1}{t} \ln |q(0)| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.1.38)$$

Исходя из (2.1.34), мы можем построить для интеграла верхнюю и нижнюю грани, а именно

$$\int_0^t a(\tau) d\tau \leq \int_0^t B d\tau = Bt \quad (2.1.39)$$

и

$$\int_0^t a(\tau) d\tau \geq -Bt. \quad (2.1.40)$$

Из (2.1.39) и (2.1.40) следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t a(\tau) d\tau \right\} = \lambda \quad (2.1.41)$$

существует, если

$$|\lambda| < \infty. \quad (2.1.42)$$

Число  $\lambda$  называется *обобщенным характеристическим показателем*. Он содержит информацию об асимптотическом поведении решения (2.1.35) при больших положительных  $t$ . Смысл обобщенного характеристического показателя станет ясен, если воспользоваться монотонностью логарифмической функции и тем, что, как следует из (2.1.41) и (2.1.36), решение в любой момент времени  $t$  имеет верхнюю грань

$$C e^{\lambda t + f(t)}, \quad (2.1.43)$$

где

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} f(t) \right\} \rightarrow 0. \quad (2.1.44)$$

Таким образом, обобщенный характеристический показатель имеет тот же смысл, что и вещественная часть (характеристического) показателя  $\lambda$  в простейшем случае дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

## 2.2. Группы и инвариантность

Простейший пример дифференциального уравнения (2.1.6) позволяет объяснить некоторые фундаментальные понятия, связанные с группами и инвариантностью. Начнем с дифференциального уравнения для переменной  $q(t)$

$$\dot{q}(t) = a(t) q(t). \quad (2.2.1)$$

Свойства коэффициента  $a(t)$  (например, то, что он постоянный, периодический или квазипериодический) можно охарактеризовать и свойством инвариантности. Предположим, что коэффициент  $a(t)$  остается неизменным при сдвиге аргумента  $t$  на  $t_0$ , т. е. если

$$t \rightarrow t + t_0, \quad (2.2.2)$$

то

$$a(t + t_0) = a(t). \quad (2.2.3)$$

Если  $t_0$  можно выбирать произвольно, то из (2.2.3) следует, что  $a(t)$  не зависит от времени. Если же (2.2.3) выполняется лишь при некотором  $t_0$  (и его целых кратных), то коэффициент  $a(t)$  периодический. Как будет показано в гл. 3, наши соображения допускают обобщение на случай квазипериодического коэффициента

$a(t)$ , но для этого требуется более сложная математика. Подвергнув уравнение (2.2.1) преобразованию (2.2.2), получим

$$\dot{q}(t+t_0) = a(t)q(t+t_0). \quad (2.2.4)$$

Уравнение (2.2.4) имеет в точности такой же вид, как уравнение (2.2.1). Это — то же самое дифференциальное уравнение для переменной, которую мы можем обозначить

$$q_n(t) = q_{ст}(t+t_0), \quad (2.2.5)$$

( $n$  — новая,  $ст$  — старая). Но из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что решение уравнения (2.2.1) единственно с точностью до постоянного множителя. Обозначая этот постоянный множитель через  $\alpha$ , получаем соотношение

$$q_n(t) = \alpha q_{ст}(t),$$

т. е.

$$q_{ст}(t+t_0) = \alpha q_{ст}(t). \quad (2.2.6)$$

Покажем, что соотношение (2.2.6) позволяет построить решение уравнения (2.2.1). Для этого введем оператор сдвига  $T$ , определив его следующим образом. Однократное применение оператора  $T$  к функции  $f$  приводит к замене  $t$  в аргументе функции  $f$  на  $t+t_0$ :

$$Tf(t) = f(t+t_0). \quad (2.2.7)$$

Пользуясь свойством инвариантности (2.2.3), находим

$$Ta(t)q(t) = a(t+t_0)q(t+t_0) = a(t)Tq(t). \quad (2.2.8)$$

Так как это соотношение выполняется при произвольной  $q(t)$ , (2.2.8) можно представить в виде

$$Ta(t) = a(t)T, \quad (2.2.9)$$

т. е.  $T$  коммутирует с  $a(t)$ . Уравнение (2.2.6) запишем в виде

$$Tq = \alpha q. \quad (2.2.10)$$

Оно означает, что  $q$  — собственная функция оператора сдвига  $T$ , соответствующая собственному значению  $\alpha$ , и следует из инвариантности уравнения (2.2.1) относительно  $T$ . Оператор  $T$  позволяет нам объяснить, что такое «группа».

До сих пор мы связывали оператор  $T$  со сдвигом  $t \rightarrow t+t_0$ , так что  $Ta(t) = a(t+t_0)$ . При  $n$  сдвигах мы заменим  $t$  на  $t+nt_0$ , так что  $a(t) \rightarrow a(t+nt_0)$ . Такой сдвиг порождает  $n$ -кратное действие оператора  $T$  на  $a(t)$ , которое можно записать как  $T^n : T^n a(t) = a(t+nt_0)$ . Разумеется, сдвиг можно производить и в обратном направлении:  $t \rightarrow t-t_0$ . Ему соответствует «обратный» оператор  $T^{-1}$ , такой, что  $T^{-1}a(t) = a(t-t_0)$ . Наконец,  $t$  может оставаться без изменений. Сдвигу на  $t_0 = 0$  мы поставим в соответствие оператор  $T^0 : T^0 a(t) = a(t)$ . Он имеет специальное обозначение,  $T^0 \equiv E$  и называется тождественным, или единичным, оператором.

Все рассмотренные нами операции можно свести в таблицу ( $n > 0$  — целые числа):

Сдвиг	Оператор	Действие оператора
$t \rightarrow t + t_0$	$T$	$Ta(t) = a(t + t_0)$
$t \rightarrow t + nt_0$	$T^n$	$T^n a(t) = a(t + nt_0)$
-----		
$t \rightarrow t - t_0$	$T^{-1}$	$T^{-1}a(t) = a(t - t_0)$
$t \rightarrow t - nt_0$	$T^{-n}$	$T^{-n}a(t) = a(t - nt_0)$
-----		
$t \rightarrow t$	$T^0 = E$	$T^0 a(t) = a(t)$
-----		

Операции  $T^n$  ( $n < 0$ ,  $n = 0$ ,  $n > 0$ ) образуют (мультипликативную) группу, так как удовлетворяют следующим аксиомам (каждая из операций  $T^n$  при любом заданном  $n$  является элементом группы).

1) Умножив любые два элемента (образовав их композицию), мы получим новый элемент того же множества. Действительно,  $T^n \cdot T^m = T^{n+m}$  — новый элемент множества сдвигов, так как выполнив сначала сдвиг на  $nt_0$ , а затем сдвиг на  $mt_0$ , мы получим новый сдвиг на  $(n + m)t_0$ .

2) Существует (правый) единичный оператор  $E$ , такой, что  $T^n \cdot E = T^n$ .

3) Для каждого элемента  $T^n$  существует (левый) обратный элемент  $T^{-n}$ , такой, что  $T^{-n} \cdot T^n = E$ .

4) Групповое умножение ассоциативно:  $(T^n T^m) T^l = T^n (T^m T^l)$ .

Выполнимость аксиом 1—4 для операторов  $T^n$  очевидна, так как все соотношения без труда проверяются с помощью известных свойств сдвигов  $t \rightarrow t + nt_0$ . Убедившись после проверки, что операторы образуют группу, мы получаем возможность применять множество весьма ценных теорем и в дальнейшем воспользуемся некоторыми из них. Поскольку не существенно, произведем ли мы сначала  $n$  сдвигов на  $t_0$ :  $t \rightarrow t + nt_0$ , а затем  $m$  сдвигов, или сначала  $m$ , а затем  $n$  сдвигов, справедливо соотношение  $T^n T^m = T^m T^n$ . Иначе говоря, любые два элемента нашей группы коммутируют. Группы, любые два элемента которых коммутируют, называются абелевыми. Так как все элементы рассматриваемой нами группы — (положительные и отрицательные) степени оператора  $T$ , мы называем  $T$  генератором группы.

Построение решения с помощью соотношения [2.2.10]. Покажем, как с помощью соотношения (2.2.10) можно построить решение дифференциального уравнения (2.2.1). После  $n$ -кратного действия оператора  $T$  на (2.2.10), используя (2.2.10), получаем

$$T^n q(t) = \alpha^n q(t). \quad (2.2.11)$$

Поскольку действие оператора  $T^n$  сводится к  $n$ -кратной замене  $t$  на  $t + t_0$ , (2.2.11) можно представить в виде

$$q(t + nt_0) = \alpha^n q(t). \quad (2.2.12)$$

Это — уравнение для  $q(t)$ . Чтобы решить его, положим

$$q(t) = e^{\lambda t} u(t), \quad (2.2.13)$$

где  $u(t)$  — пока произвольная функция. Подставляя (2.2.13) в (2.2.12), получаем

$$e^{n\lambda t_0} u(t + nt_0) = \alpha^n u(t). \quad (2.2.14)$$

Полагая  $\alpha = \exp(\lambda t_0)$ , приходим к соотношению

$$u(t + nt_0) = u(t). \quad (2.2.15)$$

Из (2.2.15) следует, что  $u(t)$  — периодическая функция аргумента  $t$ . Итак, мы снова получили общий вид решения уравнения (2.1.6) с периодическим коэффициентом, не решая непосредственно само дифференциальное уравнение. Если коэффициент  $a(t)$  инвариантен относительно  $T$  при любом  $t_0$ , то, как нетрудно убедиться, функция  $u(t)$  должна быть постоянной. Рассмотренный нами пример позволил нам познакомиться с несколькими важными понятиями. В дальнейшем мы воспользуемся ими в более сложных случаях. Первое из этих понятий — инвариантность. Оно выражено соотношением (2.2.9), вытекающим из того, что коэффициент  $a(t)$  остается неизменным под действием преобразования  $T$ . Общий вид решения (2.2.13) нам удалось вывести, используя два факта:

1) решение уравнения (2.2.1) единственно с точностью до постоянного множителя;

2) дифференциальное уравнение (2.2.1) инвариантно относительно некоторой операции, представляемой оператором  $T$ .

Затем мы показали, что  $q$  — собственная функция оператора  $T$ . Операторы  $T^n$  образуют группу. Кроме того, из (2.2.11) видно, что число  $\alpha$  и его степени можно поставить в соответствие операторам левой части (2.2.11). Это соответствие оказывается следующим:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \alpha, & T^n &\rightarrow \alpha^n, \\ T^{-1} &\rightarrow \alpha^{-1}, & T^{-n} &\rightarrow \alpha^{-n}, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$T^0 \equiv E \rightarrow \alpha^0 = 1.$$

Соотношения (2.2.16) — один из простейших примеров представления группы. В основе представления (2.2.16) лежит решение  $q$  и числа  $\alpha^n$ , соответствующие операторам  $T^n$ , так, что  $\alpha^n$  подчиняются тем же правилам, которые следуют для операторов  $T^n$  из

аксиом группы (1) — (4), т. е.

$$\begin{aligned} T^n T^m &= T^{n+m} \rightarrow \alpha^n \alpha^m = \alpha^{n+m}, \\ T^n E &= T^n \rightarrow \alpha^n \cdot 1 = \alpha^n, \\ T^{-n} T^n &= E \rightarrow \alpha^{-n} \alpha^n = 1, \\ (T^n T^m) T^l &= T^n (T^m T^l) \rightarrow (\alpha^n \alpha^m) \alpha^l = \alpha^n (\alpha^m \alpha^l). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Как мы увидим из дальнейшего, введенные нами понятия допускают существенные обобщения и находят важные приложения.

### 2.3. Системы с вынуждающей силой

Рассмотрим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{q}(t) = \alpha(t) q(t) + b(t). \quad (2.3.1)$$

Как и прежде, мы хотим познакомиться с общими свойствами такого уравнения. Начнем с случая, когда  $a \equiv 0$ , и (2.3.1) сводится к уравнению

$$\dot{q} = b \quad (2.3.2)$$

с решением

$$q(t) = \int_{t_0}^t b(\tau) d\tau + c, \quad (2.3.3)$$

где  $c$  — постоянная, определяемая из начального условия  $q(t_0) = q_0$ :

$$c = q(t_0). \quad (2.3.4)$$

К интегралу в (2.3.3) применимы все те соображения, которые были развиты в разд. 2.1.1—2.1.3 по поводу интеграла, входящего, например, в (2.1.7). Если коэффициент  $b(t)$  постоянный, или периодический, то

$$q(t) = b_0 t + v(t), \quad (2.3.5)$$

где  $v(t)$  — соответственно постоянная или периодическая функция. Если коэффициент  $b(t)$  квазипериодический, то можно доказать, что  $v(t)$  также квазипериодическая функция (для этого должно выполняться условие КАМ и должны достаточно быстро сходиться коэффициенты ряда Фурье функции  $v(t)$  (см. разд. 2.1.3)).

Обратимся теперь к общему случаю уравнения (2.3.1), когда коэффициент  $a(t)$  не равен тождественно нулю. Будем искать решение уравнения (2.3.1) в виде

$$q(t) = q_0(t) c(t), \quad (2.3.6)$$

где  $q_0(t)$  по предположению есть решение однородного уравнения

$$\dot{q}_0(t) = a(t) q_0(t), \quad (2.3.7)$$

а  $c(t)$  — пока не известная функция, которая была бы постоянной, если бы мы решали однородное уравнение (2.3.7).

Подставляя (2.3.6) в (2.3.7), получаем

$$\dot{q}_0 c + q_0 \dot{c} = a q_0 c + b, \quad (2.3.8)$$

или с учетом (2.3.7)

$$\dot{c} = q_0^{-1}(t) b(t). \quad (2.3.9)$$

Уравнение (2.3.9) легко интегрируется:

$$c(t) = \int_{t_0}^t q_0^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau + \alpha. \quad (2.3.10)$$

Наша главная цель состоит в том, чтобы выяснить, какие типы решений уравнения (2.3.1) возникают при определенных типах зависимости  $a(t)$  и  $b(t)$  от времени. Подставляя (2.3.10) в (2.3.6) получаем общий вид решения уравнения (2.3.1):

$$q(t) = q_0(t) \int_{t_0}^t q_0^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau + \alpha q_0(t). \quad (2.3.11)$$

Рассмотрим сначала пример. Пусть

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv \lambda = \text{const} \neq 0, \\ b &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.12)$$

В этом случае

$$q(t) = \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} b d\tau + \alpha e^{\lambda t}, \quad (2.3.13)$$

или после интегрирования

$$q(t) = -\frac{b}{\lambda} + \beta e^{\lambda t}, \quad (2.3.14)$$

где

$$\beta = \alpha + \frac{b}{\lambda} e^{-\lambda t_0}. \quad (2.3.15)$$

При  $\lambda > 0$  асимптотическое поведение ( $t \rightarrow \infty$ ) решения (2.3.14) определяется в основном экспоненциальной функцией, и решение расходится, если только коэффициент  $\beta$  не равен нулю, в нуль же он может обратиться лишь при специально выбранном начальном условии. При  $\lambda < 0$  асимптотическое поведение решения (2.3.14) определяется первым членом, т. е.  $q(t)$  стремится к постоянной

$-b/\lambda$ . То же решение можно и непосредственно найти, подставляя  $\dot{q} = 0$  в (2.3.1):

$$q = -b/\lambda. \quad (2.3.16)$$

Полное зависящее от времени решение (2.3.14) называется переходным к стационарному решению (2.3.16). Случай  $\lambda = 0$  возвращает нас к уже рассмотренному решению (2.3.5).

В общем случае решение неоднородного уравнения (2.3.1) представимо в виде суммы частного решения неоднородного уравнения (в нашем примере — решения (2.3.16) и общего решения однородного уравнения (в нашем примере это  $\beta \exp(\lambda t)$ , где  $\beta$  — произвольная постоянная). Значение постоянной можно фиксировать, например, задав начальное значение  $q(t)$ .

Будем теперь считать коэффициенты  $a(t)$  и  $b(t)$  постоянными, периодическими или квазипериодическими. Если коэффициенты квазипериодические, то, имея в виду практические приложения, будем считать, что условие КАМ выполнено и ряд Фурье функции  $a(t)$  сходится достаточно быстро; тогда решение однородного уравнения (2.3.7) имеет вид

$$q_0(t) = e^{\lambda t} u(t), \quad (2.3.17)$$

где  $u(t)$  — постоянная, периодическая или квазипериодическая функция. Из явного вида  $u(t)$  и ограниченности квазипериодической функции под экспонентой в (2.3.17) мы заключаем, что  $|u|$  ограничен. Следовательно, для  $u(t)$  существует обратная функция.

Рассмотрим сначала частное решение неоднородного уравнения (2.3.1), которое с помощью (2.3.11) и (2.3.17) можно представить в виде

$$q(t) = e^{\lambda t} u(t) \int_{t_0}^t e^{-\lambda \tau} u^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau. \quad (2.3.18)$$

В дальнейшем мы рассмотрим случай

$$\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0, \quad (2.3.19)$$

позволяющий выбрать

$$t_0 \rightarrow -\infty. \quad (2.3.20)$$

Произведя замену переменной интегрирования

$$\tau = \tau' + t, \quad (2.3.21)$$

преобразуем (2.3.18) к виду

$$q(t) = u(t) \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda \tau'} u^{-1}(\tau' + t) b(\tau' + t) d\tau' \quad (2.3.22)$$

Нас интересует характер временной зависимости частного решения неоднородного уравнения (2.3.22). Пусть  $u(t)$  — квазипериодическая функция с основными частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Так как

функция  $u^{-1}$ , как показано выше, существует и квазипериодическая, мы можем представить ее в виде

$$u^{-1}(\tau) = \sum_m d_m e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} \tau}. \quad (2.3.23)$$

Коэффициент  $b(\tau)$  также разложим в кратный ряд Фурье

$$b(\tau) = \sum_n f_n e^{i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} \tau}. \quad (2.3.24)$$

Подставляя (2.3.23), (2.3.24) в (2.3.22), получаем

$$q(t) = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} d_m f_n \underbrace{[-\lambda + i[(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})]}_D^{-1} \times \\ \times \exp[(i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}) t]. \quad (2.3.25)$$

Так как

$$|D| \geq |\operatorname{Re}\{\lambda\}| > 0, \quad (2.3.26)$$

кратный ряд Фурье (2.3.25) сходится, если ряды (2.3.23) и (2.3.24) сходятся абсолютно. (Из квазипериодичности, как мы ее здесь понимаем, следует, что ряд Фурье сходится абсолютно.) Но тогда ряд Фурье (2.3.25) также сходится абсолютно. Отсюда и из общего вида (2.3.25) мы заключаем, что  $q(t)$  — квазипериодическая функция с основными частотами  $\omega_1, \dots, \omega_M, \Omega_1, \dots, \Omega_N$ . Так как  $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$ , решение однородного уравнения стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , и временное поведение решения  $q(t)$  неоднородного уравнения (2.3.1) при больших  $t$  определяется рассмотренным нами частным решением однородного уравнения, т. е.

$$q(t) \text{ — квазипериодическая функция с основными} \\ \text{частотами } \omega_1, \dots, \omega_M, \Omega_1, \dots, \Omega_N. \quad (2.3.27)$$

## 2.4. Общие теоремы об алгебраических и дифференциальных уравнениях

### 2.4.1. Вид уравнений

В этом разделе мы займемся повторением некоторых общих теорем алгебры и теории линейных дифференциальных уравнений. Излагая их, мы преследуем следующую цель. В дальнейшем нам придется заниматься рассмотрением систем обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= a_{11}q_1(t) + a_{12}q_2(t) + \dots + a_{1n}q_n(t), \\ \dot{q}_2(t) &= a_{21}q_1(t) + a_{22}q_2(t) + \dots + a_{2n}q_n(t), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n(t) &= a_{n1}q_1(t) + a_{n2}q_2(t) + \dots + a_{nn}q_n(t). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Неизвестные здесь  $q_j$ , коэффициенты  $a_{ik}$  предполагаются заданными. Они могут быть постоянными или функциями, зависящими от времени, различных типов, о которых пойдет речь в дальнейшем. Система уравнений (2.4.1) допускает компактную запись в матричных обозначениях:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = L\mathbf{q}(t), \quad (2.4.2)$$

где под вектором  $\mathbf{q}(t)$  понимается вектор

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad (2.4.3)$$

а под матрицей  $L$  — матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.4.4)$$

### 2.4.2. Жорданова нормальная форма

Представим себе, что нас пока не интересует временная зависимость элементов матрицы  $L$ , т. е. будем считать их постоянными или равными значению, принимаемому при заданном  $t$ . Рассмотрим квадратную матрицу  $L$  вида (2.4.4).

Максимальное число линейно независимых строк (или, что эквивалентно, столбцов) матрицы  $L$  называется рангом матрицы и обозначается  $\text{Rk}\{L\}$ . Квадратная матрица  $L$  из  $n$  строк называется невырожденной, если  $\text{Rk}\{L\} = n$ .

Две квадратные матрицы  $L$  и  $\tilde{L}$  из  $n$  строк каждая называются подобными, если существует невырожденная матрица  $S$ , такая, что  $\tilde{L} = S^{-1}LS$ . Напомнив кратко эти простые определения, сформулируем следующую важную теорему о жордановой нормальной форме.

Каждая квадратная матрица  $L$  с комплексными элементами подобна некоторой нормальной матрице вида

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}. \quad (2.4.5)$$

Квадратные подматрицы (блоки), стоящие на диагонали нормальной

матрицы, однозначно с точностью до перестановки определяются матрицей  $L$ . Блоки  $A_p$  устроены так:

$$\begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & & 0 \\ & \lambda_p & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

где  $\lambda_p$  — собственное значение матрицы  $L$ .

Теорему о жордановой нормальной форме можно сформулировать и без введенных выше определений, например, следующим образом: для каждой квадратной матрицы  $L$  с комплексными элементами найдется невырожденная матрица  $S$ , такая, что

$$\tilde{L} = S^{-1}LS, \quad (2.4.7)$$

где  $\tilde{L}$  — матрица вида (2.4.5). Так как матрица  $S$  невырождена, ее определитель отличен от нуля, поэтому  $S^{-1}$  существует.

### 2.4.3. Некоторые общие теоремы о линейных дифференциальных уравнениях

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение (2.4.2) (называемое также дифференциальной системой), где

$$L(t) = (a_{ij}(t)) \quad (2.4.8)$$

— комплекснозначная матрица  $n \times n$ , элементы которой  $a_{ij}$  — непрерывные функции переменной  $t$ , определенные на интервале  $I$ ,

$$-\infty < \alpha \leq t \leq \beta < \infty. \quad (2.4.9)$$

Решение уравнения (2.4.2) есть комплексный вектор-столбец  $\mathbf{q}(t) \in E^n$  ( $E^n$ :  $n$ -мерное комплексное векторное пространство), дифференцируемый и удовлетворяющий дифференциальной системе при любом  $t \in I$ . Теория линейных дифференциальных уравнений утверждает: для любого  $t_0 \in I$  и любого вектора-столбца  $\mathbf{q}_0 \in E^n$  существует единственное решение  $\mathbf{q}(t)$ , такое, что  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ .

Решения уравнения  $d\mathbf{q}/dt = L(t)\mathbf{q}$  образуют  $n$ -мерное комплексное линейное векторное пространство (рис. 2.4.1). Иначе говоря, существуют  $n$  линейно независимых решений уравнения (2.4.2), которые можно обозначить  $\mathbf{q}^{(1)}(t)$ ,  $\mathbf{q}^{(2)}(t)$ , ...,  $\mathbf{q}^{(n)}(t)$ . Любое решение  $\mathbf{q}(t)$  уравнения (2.4.2) представимо в виде линейной комбинации

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{q}^{(j)}(t), \quad (2.4.10)$$

где коэффициенты  $c_j$  не зависят от времени. Линейно независимые решения  $\mathbf{q}^{(j)}$  определены не однозначно, так как с помощью линейного преобразования (2.4.10) мы можем перейти от одного базиса  $\{\mathbf{q}^{(j)}\}$  к другому  $\{\tilde{\mathbf{q}}^{(j)}\}$ .

Часто бывает удобно объединить отдельные вектор-решения  $\mathbf{q}$  в матрицу решений  $Q$ :

$$Q = (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \dots, \mathbf{q}^{(n)}). \quad (2.4.11)$$

Записав матрицу  $Q$  поэлементно

$$Q = (Q_{ij}) \quad (2.4.12)$$

и сравнив ее с матрицей, стоящей в правой части (2.4.11), находим

$$Q_{ij} = q_i^{(j)}. \quad (2.4.13)$$

Матрица решений удовлетворяет уравнению

$$\dot{Q}(t) = LQ(t). \quad (2.4.14)$$

Приведенное выше утверждение о переходе от одного базиса  $\{q^{(j)}\}$  к другому может быть сформулировано точно в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.4.1.** Пусть  $Q(t)$  — невырожденная матрица решений, удовлетворяющих уравнению  $dQ/dt = L(t)Q$ . Тогда множество всех невырожденных матриц решений образуют матрицы  $Q(t)C$ , где  $C$  — любая невырожденная матрица  $n \times n$ . При любом  $t_0 \in I$  и любой комплексной постоянной матрице  $Q_0$  существует единственная матрица решений  $Q(t)$ , такая, что  $Q(t_0) = Q_0$ . Множество вектор-решений  $\mathbf{q}^{(1)}(t), \mathbf{q}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{q}^{(n)}(t)$  уравнения  $d\mathbf{q}/dt = L(t)\mathbf{q}$  образуют базис в пространстве решений в том и только в том случае, если они образуют столбцы матрицы, удовлетворяющей уравнению  $dQ/dt = L(t)Q$  и соответствующей невырожденной начальной матрице  $Q_0$ .

Дифференциальная система  $d\mathbf{q}/dt = L(t)\mathbf{q}$ , где  $\alpha < t < \beta = \infty$ , называется устойчивой, если каждое решение остается ограниченным при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. если

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \|\mathbf{q}(t)\| \} < \infty. \quad (2.4.15)$$

Иногда бывает полезна следующая теорема. Пусть  $Q(t)$  — матрица-решение, удовлетворяющая уравнению  $dQ/dt = L(t)Q$ . Тогда  $(d/dt) \det \{Q(t)\} = \text{Sp} \{L(t)\} \det \{Q(t)\}$  в каждой точке  $t \in I$ , где  $Q(t)$  — невырожденная матрица, а  $\text{Sp} \{L(t)\}$  — так называе-

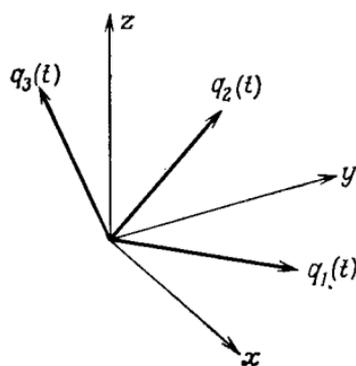


Рис. 2.4.1. Трехмерное вещественное линейное векторное пространство.

мый след матрицы  $L(t)$ , т. е. сумма элементов, стоящих на ее главной диагонали. Матрица решений невырождена хотя бы в одной точке интервала  $I$ .

В разд. 2.1 мы рассмотрели асимптотическое поведение решения дифференциального уравнения  $\dot{q} = a(t)q$ . Это привело нас к понятию характеристического показателя и обобщенного характеристического показателя  $\lambda$ . Аналогичное утверждение справедливо и в общем случае — относительно системы (2.4.2).

#### 2.4.4. Обобщенные характеристические показатели и показатели Ляпунова

Пусть  $L(t)$  — непрерывная матрица и

$$\sup \{ |a_{ij}(t)| \} < B \text{ при всех } a < t < \infty \quad (2.4.16)$$

и некоторой постоянной  $B$ . Тогда для любого вектор-решения,  $q^{(i)}(t)$  уравнения  $dq/dt = L(t)q$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{ t^{-1} \ln |q^{(i)}(t)| \} = \lambda_i, \quad |\lambda_i| < Bn. \quad (2.4.17)$$

Получающиеся при этом действительные числа  $\lambda_i$  называются обобщенными характеристическими показателями. Существует не более  $n$  различных обобщенных характеристических показателей. Дифференциальная система устойчива, если все  $\lambda_i$  отрицательны.

Частным случаем обобщенных характеристических показателей являются показатели Ляпунова.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим нелинейные уравнения вида

$$\dot{q}(t) = N(q(t)), \quad (2.4.18)$$

где  $N$  — нелинейная вектор-функция вектора  $q$ . Пусть  $q_0$  — решение уравнения (2.4.18). Линеаризуем уравнение (2.4.18) в окрестности решения  $q_0$ , т. е. подставим  $q = q_0 + \delta q$  и удержим только линейные члены

$$\delta \dot{q} = L(q_0(t)) \delta q, \quad (2.4.19)$$

где  $L(q_0(t))$  — матрица  $L \equiv (L_{kl})$ ,

$$L_{kl} = \frac{\partial N_k(q_0(t))}{\partial q_{0,l}(t)}. \quad (2.4.20)$$

В таких случаях обобщенные характеристические показатели возмущения  $\delta q$  называются показателями Ляпунова решения  $q_0(t)$ .

В заключение этого раздела наметим доказательство следующей теоремы: если траектория автономной системы остается в ограниченной области при  $t \rightarrow \infty$  и не содержит особой точки, то по крайней мере один показатель Ляпунова равен нулю.

Для доказательства этой теоремы примем такие предположения относительно  $N(q(t))$  в (2.4.18):  $N(q(t))$  — непрерывная

функция от  $\mathbf{q}(t)$  и имеет лишь конечное число нулей (соответствующих особым точкам дифференциального уравнения (2.4.18)).

Идея доказательства этой теоремы очень проста. Положив для краткости  $\delta\mathbf{q} \equiv \mathbf{u}$  и отбросив индекс 0 у  $\mathbf{q}_0$ , получим для  $\mathbf{u}$  из (2.4.19) уравнение

$$\dot{\mathbf{u}} = L(\mathbf{q}(t)) \mathbf{u}. \quad (2.4.21)$$

Показатель Ляпунова определяется по формуле

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |u(t)|. \quad (2.4.22)$$

Построим решение уравнения (2.4.21) с нулевым показателем Ляпунова. Дифференцируя по времени правую и левую части уравнения (2.4.18), нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{q}} \quad (2.4.23)$$

— решение уравнения (2.4.21). Так как вектор-функция  $\mathbf{N}$  непрерывна, а вектор  $\mathbf{q}(t)$  ограничен при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{N}$  также ограничена; т. е.

$$|\mathbf{N}(\mathbf{q}(t))| < D, \quad D > 0. \quad (2.4.24)$$

Из (2.4.18) и (2.4.23) получаем, что

$$|\mathbf{u}| < D. \quad (2.4.25)$$

Итак, мы приходим к неравенству

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |u(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln D, \quad (2.4.26)$$

из которого заключаем, что

$$\lambda \leq 0. \quad (2.4.27)$$

Предположим теперь, что

$$\lambda < 0. \quad (2.4.28)$$

По определению  $\limsup$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует некоторое  $t_0$ , такое, что при любом  $t > t_0$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{t} \ln |\dot{\mathbf{q}}| < \lambda + \varepsilon. \quad (2.4.29)$$

Выберем  $\varepsilon$  столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda' \equiv \lambda + \varepsilon < 0, \quad (2.4.30)$$

и функцию

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-|\lambda'|t}, \quad (2.4.31)$$

мажорирующую  $\dot{\mathbf{q}}$  так, что

$$|\dot{\mathbf{q}}| \leq |\mathbf{v}_0| e^{-|\lambda'| t} \text{ при всех } t > t_0. \quad (2.4.32)$$

Тогда

$$|\dot{\mathbf{q}}| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (2.4.33)$$

откуда с учетом (2.4.18) мы заключаем, что

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}) \rightarrow 0. \quad (2.4.34)$$

Так как функция  $\mathbf{N}$  непрерывна, обращается в нуль лишь в конечном числе точек  $\mathbf{q}$  и стремится к нулю, траектория  $\mathbf{q}(t)$  должна стремиться к одной из особых точек

$$\mathbf{q}_j = \text{const}, \quad (2.4.35)$$

т. е. заканчиваться в особой точке. Следовательно, если траектория  $\mathbf{q}(t)$  не заканчивается в особой точке, то остается единственная возможность: соответствующий показатель Ляпунова равен нулю, что и требовалось доказать.

## 2.5. Прямые и обратные уравнения: дуальные пространства решений

Имея в виду задачи, которые нам предстоит рассматривать в дальнейшем, изменим слегка наши обозначения и будем вместо  $\mathbf{q}^{(i)}$  писать  $\omega^{(k)}$ . Уравнения (2.4.14) и (2.4.11) в новых обозначениях имеют вид

$$\dot{\mathbf{w}}^{(k)}(t) = L(t) \mathbf{w}^{(k)}(t), \quad (2.5.1)$$

где

$$\mathbf{w}^{(k)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(k)} \\ \omega_2^{(k)} \\ \vdots \\ \omega_n^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (2.5.2)$$

Различные вектор-решения мы отличаем по верхнему индексу и предполагаем, что они образуют полное множество, т. е. что совокупность всех линейных комбинаций этих векторов, называемая также их линейной оболочкой, совпадает с пространством решений. Матрица  $L$ , где

$$L = (L_{jj'}), \quad (2.5.3)$$

может зависеть от времени произвольным образом. Разумеется,

уравнение (2.5.1) можно представить в несколько более наглядном виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{\dot{\mathbf{w}}} \\ L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phantom{\dot{\mathbf{w}}} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}. \quad (2.5.4)$$

Как известно из алгебры, можно построить дуальное к  $\mathbf{w}^{(k)}(0)$  пространство с базисом  $\bar{\mathbf{w}}^{(k')}(0)$ , таким, что

$$\langle \bar{\mathbf{w}}^{(k')}(0) \mathbf{w}^{(k)}(0) \rangle = \delta_{kk'}, \quad \text{при всех } k, k', \quad (2.5.5)$$

где

$$\delta_{kk'} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = k' \\ 0 & \text{при } k \neq k'. \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Скалярное произведение  $\langle \dots \rangle$  векторов  $\bar{\mathbf{w}}$  и  $\mathbf{w}$  мы определяем следующим образом:

$$\langle \mathbf{w}^{(k')} \mathbf{w}^{(k)} \rangle = \sum_j \bar{\mathbf{w}}_j^{(k')} \mathbf{w}_j^{(k)}. \quad (2.5.7)$$

Все наши соображения без труда обобщаются на случай дифференциальных уравнений в частных производных, когда оператор  $L$  действует на пространственные координаты. Сумма, стоящая в правой части (2.5.7), заменяется при этом суммой по  $j$  и интегралом по пространству

$$\sum_j \rightarrow \sum_j \int d^3x. \quad (2.5.8)$$

Вясним теперь, всегда ли можно найти уравнение для базисных векторов дуального пространства (см. (2.5.5)), которое гарантировало бы, что при всех  $t$  (как  $t \geq 0$ , так и  $t \leq 0$ ) его решения ортогональны базисным решениям (2.5.2) исходного уравнения (2.5.1). Чтобы ответить на этот вопрос, определим  $\bar{\mathbf{w}}^{(k')}$  как вектор

$$\bar{\mathbf{w}}^{(k')} = (\omega_1^{(k')}, \omega_2^{(k')}, \dots, \omega_n^{(k')}), \quad (2.5.9)$$

удовлетворяющий уравнению

$$\dot{\bar{\mathbf{w}}}^{(k')} = \bar{\mathbf{w}}^{(k')} \bar{L}. \quad (2.5.10)$$

Потребуем, чтобы элементы матрицы  $\bar{L}$  были связаны с элементами матрицы  $L$  соотношением

$$\bar{L}_{ij'} = -L_{ij'}. \quad (2.5.11)$$

или, в матричном виде, чтобы

$$\bar{L} = -L. \quad (2.5.12)$$

По аналогии с (2.5.4) уравнение (2.5.10) можно представить в виде

$$\dot{\bar{\mathbf{w}}} = \bar{\mathbf{w}} \left( \bar{L} \right). \quad (2.5.13)$$

Покажем, что условие ортогональности (2.5.5) выполняется при всех  $t$ , если  $\bar{\mathbf{w}}$  удовлетворяет уравнениям (2.5.10). Продифференцировав скалярное произведение (2.5.7) (векторы  $\bar{\mathbf{w}}^{(k')}$  и  $\mathbf{w}^{(k)}$  выбраны в момент времени  $t$ ), получим

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\mathbf{w}}^{(k')} (t) \mathbf{w}^{(k)} (t) \rangle = \langle \dot{\bar{\mathbf{w}}}^{(k')} (t) \mathbf{w}^{(k)} (t) \rangle + \langle \bar{\mathbf{w}}^{(k')} (t) \dot{\mathbf{w}}^{(k)} (t) \rangle. \quad (2.5.14)$$

Уравнения (2.5.10) и (2.5.1) позволяют преобразовать (2.5.14) к виду

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\mathbf{w}}^{(k')} (t) \mathbf{w}^{(k)} (t) \rangle = \langle \bar{\mathbf{w}}^{(k')} (t) \bar{L} (t) \mathbf{w}^{(k)} (t) \rangle + \langle \bar{\mathbf{w}}^{(k')} (t) L (t) \mathbf{w}^{(k)} (t) \rangle. \quad (2.5.15)$$

Из (2.5.12) следует, что правая часть уравнения (2.5.15) равна нулю. Это означает, что условие ортогональности (2.5.5) выполняется при всех последующих  $t$  (или, если идти по  $t$  в обратном направлении, при всех предыдущих  $t$ ). Наш окончательный результат можно записать в виде

$$\langle \bar{\mathbf{w}}^{(k')} (t) \mathbf{w}^{(k)} (t) \rangle = \delta_{kk'}. \quad (2.5.16)$$

В последующих разделах мы покажем, что для некоторых классов матриц  $L (t)$  векторы  $\mathbf{w}^{(k)}$  допускают разложение

$$\mathbf{w}^{(k)} = e^{\lambda_k t} \mathbf{v}^{(k)} (t), \quad (2.5.17)$$

где векторы  $\mathbf{v}^{(k)}$  обладают специальными свойствами. В этом разделе мы воспользуемся разложением (2.5.17), никак не специализируя его, т. е. не предполагая особых свойств векторов  $\mathbf{v}^{(k)}$ . Пока нам хотелось бы лишь показать, что всякий раз, когда мы используем разложение (2.5.17) для вектора  $\bar{\mathbf{w}}^{(k')}$  и аналогичное разложение

$$\bar{\mathbf{w}}^{(k')} = e^{-\lambda_{k'} t} \bar{\mathbf{v}}^{(k')} (t) \quad (2.5.18)$$

для вектора  $\bar{\mathbf{w}}^{(k')}$ , вектора  $\mathbf{v}$  удовлетворяет соотношению ортогональности (2.5.16). Числа  $\lambda_k$  совершенно произвольны. Подставляя (2.5.17), (2.5.18) в (2.5.16), получаем

$$\exp [(\lambda_k - \lambda_{k'}) t] \langle \mathbf{v}^{(k')} \mathbf{v}^{(k)} \rangle = \delta_{kk'}. \quad (2.5.19)$$

Используя определение символа Кронекера, соотношение (2.5.19)

можно представить в виде

$$\langle \mathbf{v}^{(k')} \mathbf{v}^{(k)} \rangle = \delta_{kk'}. \quad (2.5.20)$$

Соотношения (2.5.16) и (2.5.20) понадобятся нам в следующих главах.

## 2.6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Выясним теперь, какой вид имеют решения уравнения (2.5.1), когда  $L$  — постоянная матрица. Если вектор  $\mathbf{q}$  задан при  $t = 0$ , то формальное решение уравнения (2.5.1) с постоянной матрицей  $L$  представимо в виде

$$\mathbf{q}(t) = e^{Lt} \mathbf{q}(0), \quad (2.6.1)$$

формально аналогичном решению (2.1.5). Заметим, однако, что  $L$  — матрица, поэтому формальное решение (2.6.1) требует некоторых пояснений. Оно обретает смысл, если воспользоваться определением экспоненциальной функции от оператора с помощью разложения в степенной ряд

$$e^{Lt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (Lt)^{\nu}. \quad (2.6.2)$$

Поскольку степень матрицы определена, правая часть (2.6.2) также определена. В частности, ряд (2.6.2) сходится в том смысле, что каждый элемент матрицы  $\exp(Lt)$  конечен для любого конечного  $t$ . Подставляя (2.6.2) в (2.6.1), нетрудно убедиться в том, что (2.6.1) удовлетворяет уравнению (2.5.1), так как

$$\dot{\mathbf{q}} = L e^{Lt} \mathbf{q}(0). \quad (2.6.3)$$

Решения вида (2.6.1) полезны при обсуждении некоторых вопросов, однако вектор  $\mathbf{q}$  нам бы хотелось получить в более явном виде. В зависимости от различных начальных векторов  $\mathbf{q}^{(j)}(0)$  решения  $\mathbf{q}^{(j)}(t)$  получаются различными. Если начальные векторы  $\mathbf{q}^{(j)}(0)$  линейно независимы, то векторы  $\mathbf{q}^{(j)}$  также линейно независимы при любом  $t$ .

Докажем следующую теорему: решения  $\mathbf{q}^{(j)}(t)$  можно выбрать так, чтобы они имели вид

$$\mathbf{q}^{(j)}(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{v}^{(j)}(t). \quad (2.6.4)$$

Показатели  $\lambda_j$ , часто называемые характеристическими показателями, — собственные значения матрицы  $L$ . Векторы  $\mathbf{v}^{(j)}(t)$  имеют вид

$$\mathbf{v}^{(j)}(t) = \mathbf{v}_0^{(j)} + \mathbf{v}_1^{(j)} t + \dots + \mathbf{v}_m^{(j)} t^m. \quad (2.6.5)$$

т. е. являются многочленами по  $t$ , степень которых  $m_j$  не превосходит степень вырождения собственного значения  $\lambda_j$ . Если все  $\lambda_j$  различны, то вектор  $\mathbf{v}^{(j)}(t)$  вырождается в постоянный вектор. Если несколько собственных значений  $\lambda_j$  совпадают, то вектор  $\mathbf{v}^{(j)}$  может (но необязательно) содержать степени  $t$ . В дальнейшем мы увидим, как установить по построению, в какой степени  $t$  входит в (2.6.5). Перейдем к доказательству высказанных утверждений. Начнем с формального решения уравнения  $\dot{Q} = LQ$ , а именно с матрицы

$$Q(t) = e^{Lt}Q(0) \quad (2.6.6)$$

(вопрос о выборе начальной матрицы  $Q(0)$  оставим пока открытым). С помощью невырожденной матрицы  $S$  приведем  $L$  к жордановой нормальной форме  $\tilde{L}$ :

$$S^{-1}LS = \tilde{L}. \quad (2.6.7)$$

Умножая равенство (2.6.7) слева на  $S$ , а справа на  $S^{-1}$ , получаем

$$L = S\tilde{L}S^{-1}. \quad (2.6.8)$$

Соотношение (2.6.6) при этом переходит в соотношение

$$Q(t) = e^{S\tilde{L}S^{-1}t}Q(0). \quad (2.6.9)$$

Разложение экспоненты в степенной ряд (2.6.2) позволяет привести (2.6.9) к виду

$$Q(t) = Se^{\tilde{L}t}S^{-1}Q(0). \quad (2.6.10)$$

Особенно простым решение  $Q(t)$  получается при специальном выборе начальной матрицы  $Q(0)$ :

$$Q(0) = S. \quad (2.6.11)$$

Анализировать получающуюся при таком выборе матрицу решений

$$Q(t) = Se^{\tilde{L}t} \quad (2.6.12)$$

удобнее, если воспользоваться явным видом жордановой нормальной формы  $\tilde{L}$ :

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{3} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.6.13)$$

Каждый блок есть либо один матричный элемент

$$|j| = \lambda_j, \quad (2.6.14)$$

либо квадратная матрица  $m_j \times m_j$

$$|j| = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & 0 \\ & & \lambda_j & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda_j \end{bmatrix}. \quad (2.6.15)$$

Все числа  $\lambda_j$ , стоящие на главной диагонали такого блока, равны; над главной диагональю идет диагональ из единиц, а все остальные элементы матрицы  $|j|$  равны нулю.

Покажем прежде всего, что  $\exp(\bar{L}t)$  имеет вид блочно-диагональной матрицы (2.6.13). Из правил матричного умножения следует, что

$$\bar{L}^2 = \begin{bmatrix} \boxed{1}^2 & & & \\ & \boxed{2}^2 & & 0 \\ & & \boxed{3}^2 & \\ & 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.6.16)$$

и вообще при любой степени  $m$

$$\bar{L}^m = \begin{bmatrix} \boxed{1}^m & & & \\ & \boxed{2}^m & & 0 \\ & & \boxed{3}^m & \\ & 0 & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.6.17)$$

Умножив обе части равенства (2.6.17) на  $t^m/m!$  и просуммировав, мы получим матрицу  $e^{\bar{L}t}$  блочно-диагонального вида (2.6.13), а именно

$$e^{\bar{L}t} = \begin{bmatrix} \boxed{H_1} & & 0 \\ & \boxed{H_2} & \\ & 0 & \ddots \end{bmatrix} \equiv H. \quad (2.6.18)$$

Итак, наша задача об установлении структуры решения уравнения (2.6.1) сводится к рассмотрению каждой из матриц  $H_j$  вида

$$H_j = e^{M_j t}, \quad (2.6.19)$$

где через  $M_j$  обозначен блок  $j$ . Условимся в дальнейшем использовать обозначение

$$e^{\bar{L}t} = \tilde{Q}(t) \quad (2.6.20)$$

всякий раз, когда нам понадобится нормальная форма (2.6.13). Отбрасывая индекс  $j$ , запишем матрицу (2.6.15) в виде

$$M = \lambda \cdot I + K. \quad (2.6.21)$$

Под  $I$  мы понимаем здесь единичную матрицу  $m_j \times m_j$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6.22)$$

а под  $K$  — квадратную матрицу

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6.23)$$

Так как матрица  $I$  коммутирует со всеми матрицами, мы можем разложить экспоненту  $e^{Mt}$  в произведение экспонент

$$e^{Mt} = e^{\lambda t} \cdot e^{Kt}. \quad (2.6.24)$$

Разложим  $\exp(Kt)$  в ряд по степеням  $Kt$ :

$$e^{Kt} = 1 + Kt + \frac{1}{2!} K^2 t^2 + \dots \quad (2.6.25)$$

То, что при этом происходит, нетрудно понять из примеров. Если  $K$  — одномерная матрица, т. е. если

$$K = 0, \quad (2.6.26)$$

то (2.6.25) вырождается в постоянную. Если  $K$  — двумерная матрица, т. е. если

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6.27)$$

то, возводя ее в квадрат по правилам матричного умножения, мы получаем

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6.28)$$

поэтому разложение (2.6.25) содержит только постоянный и линейный члены, т. е. имеет вид

$$e^{Kt} = 1 + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.29)$$

Если  $K$  — матрица третьего порядка, т. е. если

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6.30)$$

то, возводя ее в квадрат и куб, мы получаем

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6.31)$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6.32)$$

поэтому разложение (2.6.25) обрывается на квадратичном члене, т. е. имеет вид

$$e^{Kt} = 1 + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.33)$$

После этой предварительной подготовки для нас уже не составит особого труда найти  $\tilde{Q}$  (2.6.20). Структура матрицы  $\tilde{Q}(t)$  станет более понятной, если мы предположим для примера, что  $\lambda_1$  принадлежит блоку  $1 \times 1$ ,  $\lambda_2$  — блоку  $2 \times 2$  и т. д. Ясно, что тогда

$$\tilde{Q}(t) \equiv e^{\tilde{L}t} \equiv H = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & t e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}. \quad (2.6.34)$$

Чтобы найти  $\tilde{\mathbf{q}}^{(i)}$ , разложим (2.6.34) на вектор-столбцы  $\tilde{\mathbf{q}}^{(i)}$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(1)} = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}}^{(2)} = e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}}^{(3)} = e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.6.35)$$

Из приведенных выше соображений теперь уже ясно, как можно построить матрицу  $Q$ . Чтобы найти матрицу-решение  $Q(t)$ , необходимо составить произведение (2.6.12). Его мы получим, умножив по правилам матричного умножения  $S$  на  $\tilde{Q}$ :

$$S\tilde{Q} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ S_{n1} & & & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.6.36)$$

Обратившись к нашему примеру, мы сразу же найдем

$$\mathbf{q}^{(1)} = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} S_{12} \\ S_{22} \\ S_{32} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (2.6.37)$$

$$\mathbf{q}^{(3)} = e^{\lambda_2 t} \left[ \begin{pmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} S_{12} \\ S_{22} \\ S_{32} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right].$$

Ясно, что все  $\mathbf{q}^{(i)}$  имеют вид (2.6.4) (с множителем  $\mathbf{v}^{(i)}(t)$ , имеющим вид (2.6.5)). Именно это и утверждалось в теореме, приведенной

в начале данного раздела. Способ доказательства позволяет в явном виде построить все решения  $\mathbf{q}^{(j)}$ . Изложенный нами метод допускает обобщение на случай периодической (по времени) матрицы  $L$ , к рассмотрению которого мы сейчас переходим.

## 2.7. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами

Выведем общий вид решений уравнения

$$\dot{\mathbf{q}} = L(t) \mathbf{q}, \quad (2.7.1)$$

где  $L(t)$  — матрица с периодическими элементами. Иначе говоря, матрица  $L$  инвариантна относительно сдвига

$$T: t \rightarrow t + t_0, \quad (2.7.2)$$

т. е. коммутирует с оператором (2.7.2):

$$TL = LT. \quad (2.7.3)$$

Умножая правую и левую части уравнения

$$\dot{Q} = LQ \quad (2.7.4)$$

слева на  $T$  и используя (2.7.3), получаем

$$(TQ)' = L(TQ). \quad (2.7.5)$$

Из него видно, что  $TQ$  есть решение уравнения (2.7.4). По теореме 2.4.1 (разд. 2.4.3), эта матрица-решение выражается через старую матрицу-решение  $Q(t)$  с помощью постоянной матрицы преобразования  $C$ :

$$TQ \equiv Q(t + t_0) = Q(t) C. \quad (2.7.6)$$

Предположим, что матрица преобразования  $C$  известна <sup>1)</sup>. Вместо того чтобы решать уравнение (2.7.4), рассмотрим более подробно решение уравнения (2.7.6). Прежде всего заметим, что по теореме 2.4.1  $C$  — невырожденная матрица. Как доказывается в математике и будет показано в явном виде далее, мы всегда можем найти мат-

<sup>1)</sup> Поскольку в большинстве случаев уравнение (2.7.4) не удается решить аналитически, можно обратиться к численным методам. Выбрав за  $Q(0)$  единичную матрицу, будем вычислять  $Q(t)$  на ЭВМ методом последовательных приближений, пока не достигнем  $t = t_0$ . Соотношение (2.7.6) дает в этом случае

$$Q(t_0) = C. \quad (2.7.7)$$

Следовательно, прямые вычисления позволяют получить матрицу преобразования  $C$ .

рицу  $\Lambda$ , такую, что

$$e^{\Lambda t_0} = C. \quad (2.7.8)$$

Чтобы решить уравнение (2.7.6), положим

$$Q(t) = U(t) e^{\Lambda t}. \quad (2.7.9)$$

Подставляя (2.7.9) в (2.7.6), сразу же получаем

$$U(t + t_0) \exp[\Lambda(t + t_0)] = U(t) e^{\Lambda t} C. \quad (2.7.10)$$

или с учетом (2.7.8)

$$U(t + t_0) = U(t). \quad (2.7.11)$$

Соотношение (2.7.11) означает, что матрица-решение  $U(t)$  периодическая.

Введем теперь матрицу  $S$ , приводящую  $\Lambda$  к жордановой нормальной форме

$$\Lambda = S \tilde{\Lambda} S^{-1}. \quad (2.7.12)$$

Это позволит нам решить интересующую нас задачу, шаг за шагом воспроизводя рассуждения, которые позволили нам решить аналогичную задачу в предыдущем разделе. Действительно, из (2.7.12) получаем

$$e^{\Lambda t} = S e^{\tilde{\Lambda} t} S^{-1}. \quad (2.7.13)$$

Подставляя (2.7.13) в (2.7.9), получаем матрицу-решение

$$Q(t) = \underbrace{U(t) S e^{\tilde{\Lambda} t} S^{-1}}_{\tilde{Q}(t)}. \quad (2.7.14)$$

которую можно представить в виде

$$Q(t) = \tilde{Q}(t) (S)^{-1}. \quad (2.7.15)$$

По теореме 2.4.1 (в которой  $S^{-1} \equiv C$ )  $\tilde{Q}$  — матрица решений, если  $Q(t)$  — матрица решений. Поскольку матрица  $\tilde{Q}$  имеет более простой вид, чем матрица  $Q(t)$ , мы начнем рассмотрение с матрицы  $\tilde{Q}$ .

Обозначим для краткости

$$\tilde{U}(t) = U(t) S, \quad (2.7.16)$$

тогда

$$\tilde{Q}(t) = \tilde{U}(t) e^{\tilde{\Lambda} t}. \quad (2.7.17)$$

Это решение по виду сильно напоминает решение (2.6.12) дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Единственное различие состоит в том, что вместо матрицы  $S$ , входящей в решение (2.6.12), решение (2.7.17) содержит матрицу  $\tilde{U}$  с периодическими по времени элементами. Это позволяет нам, повторив шаг за шагом все рассуждения, изложенные в разд. 2.6, получить стан-

дартный вид векторов-решений:

$$\mathbf{q}^{(j)}(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{v}^{(j)}(t), \quad (2.7.18)$$

где

$$\mathbf{v}^{(j)}(t) = \mathbf{v}_0^{(j)}(t) + \mathbf{v}_1^{(j)}(t)t + \dots + \mathbf{v}_{m_j}^{(j)}(t)t^{m_j}. \quad (2.7.19)$$

Характеристические показатели  $\lambda_j$  в (2.7.18) называются *показателями Флоке*. Они являются собственными значениями матрицы  $\Lambda$  (см. (2.7.12)).

Коэффициенты  $\mathbf{v}_i^{(j)}(t)$  — периодические функции времени с периодом  $t_0$ . Степени  $m_j$  многочленов по  $t$  удовлетворяют неравенствам

$$m_j \ll \text{Степень вырождения показателя Флоке } \lambda_j. \quad (2.7.20)$$

Это — последний из результатов, приведенных в разд. 2.7. Для тех читателей, кого интересуют все подробности, мы рассмотрим вопрос о том, как определить матрицу  $\Lambda$  в (2.7.8), если  $C$  известна. Для этого введем матрицу  $V$ , приводящую  $C$  к нормальной жордановой форме. Используя (2.7.8), получаем

$$V^{-1}e^{\Lambda t_0}V = V^{-1}CV = \tilde{C}. \quad (2.7.21)$$

Вводя сокращенное обозначение

$$V^{-1}\Lambda V = \tilde{\Lambda}, \quad (2.7.22)$$

преобразуем левую часть равенства (2.7.21) к виду

$$e^{\tilde{\Lambda} t_0} = \tilde{C}. \quad (2.7.23)$$

Для того чтобы удовлетворить соотношению (2.7.23), где матрица  $\tilde{C}$  имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \boxed{\tilde{C}_1} & & \\ & \boxed{\tilde{C}_2} & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.7.24)$$

достаточно предположить, что матрица  $\hat{\Lambda}$ , которая пока не известна (и проистекает от матрицы  $\Lambda$ ), также имеет блочно-диагональный вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boxed{\hat{\Lambda}_1} & & \\ & \boxed{\hat{\Lambda}_2} & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.7.25)$$

(см. шаги (2.6.16) — (2.6.18)). Тем самым наша задача сводится к рассмотрению аналогичной задачи для любой из подматриц (2.7.24) или (2.7.25), т. е. к решению уравнения

$$\exp(\square t_0) = \begin{bmatrix} \mu & 1 & & \\ & \mu & 1 & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (2.7.26)$$

где знак  $\square$  в левой части означает все еще неизвестную матрицу, которую требуется определить.

Так как  $\bar{C}$  — невырожденная матрица, то числа  $\mu$  в (2.7.26) отличны от нуля:

$$\mu \neq 0. \quad (2.7.27)$$

Положим

$$e^{\Lambda t_0} = \mu \quad (2.7.28)$$

и введем разложение

$$\square = \lambda \cdot 1 + \square' / t_0. \quad (2.7.29)$$

Оно позволяет преобразовать (2.7.26) к виду

$$\mu \exp(\square') = \begin{bmatrix} \mu & 1 & & \\ & \mu & 1 & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (2.7.30)$$

или

$$\exp(\square') = 1 + \mu^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7.31)$$

Хотя мы имеем здесь дело с матрицами, разложения в степенные ряды позволяют, как было показано выше, обращаться с функциями от матриц так же, как с функциями от обычных чисел. Поскольку

логарифм может быть задан своим разложением в степенной ряд, возьмем логарифм от обеих частей равенства

$$\square' = \ln(1 + \mu^{-1}K), \quad (2.7.32)$$

где  $K$  — матрица (2.6.23). Разлагая в степенной ряд логарифм в правой части (2.7.32), получаем

$$\square' = \mu^{-1}K - \frac{1}{2} \mu^{-2}K^2 + \frac{1}{3} \mu^{-3}K^3 - \dots \quad (2.7.33)$$

К счастью, нам не нужно заботиться о сходимости ряда в правой части (2.7.33). Она следует из формул (2.6.28), (2.6.32) и их обобщения: утверждения о том, что степени матрицы  $K$  выше некоторой равны нулевой матрице. Итак, соотношение (2.7.33) дает явное решение нашей задачи об определении матрицы  $\square$  в (2.7.29). Мы показали, каким образом можно вычислить  $\Lambda$ , если матрица  $C$  известна.

## 2.8. Теоретико-групповая интерпретация

Результаты разд. 2.2 и 2.7 могут служить иллюстрацией основных понятий теории представлений групп. Оператор  $T$  в полной аналогии с разд. 2.2 порождает абелеву группу с элементами  $T^n$ , где  $n$  — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). А что происходит с установленным нами соответствием  $T \rightarrow \alpha$  (см. (2.2.16))? Исходным пунктом для его установления послужило соотношение (2.2.10), т. е.

$$Tq(t) = \alpha q(t). \quad (2.8.1)$$

В рассматриваемом нами теперь случае его аналогом служит соотношение

$$TQ(t) = Q(t)C, \quad (2.8.2)$$

т. е. соотношение (2.7.6), где  $C$  — матрица. Действуя на обе части равенства (2.8.2) оператором  $T$  слева и учитывая равенство (2.8.2), получаем

$$T^2Q(t) = TQ(t)C = (Q(t)C)C = Q(t)C^2 \quad (2.8.3)$$

и аналогично

$$T^nQ(t) = Q(t)C^n. \quad (2.8.4)$$

Ясно, что

$$T^0Q(t) = Q(t)C^0, \quad (2.8.5)$$

если  $C_0$  определить как единичную матрицу. Умножая обе части равенства (2.8.2) слева на  $T^{-1}$ , приходим к соотношению

$$Q(t) = T^{-1}Q(t)C. \quad (2.8.6)$$

По теореме 2.4.1 (разд. 2.4.3)  $C$  — невырожденная матрица. Следовательно, существует обратная матрица  $C^{-1}$  и, умножив обе части равенства (2.8.6) слева на  $C^{-1}$ , мы преобразуем его в равенство

$$T^{-1}Q(t) = Q(t)C^{-1}. \quad (2.8.7)$$

Аналогично из (2.8.4) следует, что

$$T^{-n}Q(t) = Q(t)C^{-n}. \quad (2.8.8)$$

Совершенно очевидно поэтому, что аналог соотношений (2.2.16) в матричном варианте выглядит так:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow C, \\ T^n &\rightarrow C^n, \\ T^0 &\rightarrow I, \\ T^{-n} &\rightarrow C^{-n}, \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

а матричные обобщения соотношений (2.2.17) — как

$$\begin{aligned} T^n T^m &= T^{n+m} \rightarrow C^n C^m = C^{n+m}, \\ T^n E &= T^n \rightarrow C^n I = C^n, \\ T^{-n} T^n &= E \rightarrow C^{-n} C^n = I, \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

$$(T^n T^m) T^l = T^n (T^m T^l) \rightarrow (C^n C^m) C^l = C^n (C^m C^l).$$

Фундаментальное различие между соотношениями (2.2.16), (2.2.17) и (2.8.9), (2.8.10) состоит в том, что  $\alpha$  — число, в то время как  $C$  — матрица. Абстрактные преобразования  $T^n$  теперь представлены матрицами  $C^n$ , а умножению элементов группы  $\{T^n\}$  соответствует умножение матриц  $C^n$ . Поскольку в математике хорошо известно, как обращаться с матрицами, их удобно использовать для изучения свойств абстрактных групп (в нашем случае группы, порожденной оператором  $T$ ). Это — одна из основных идей теории представлений групп.

В предыдущем разделе было показано, что преобразование (2.7.14), т. е.

$$Q(t) = \tilde{Q}(t) S^{-1}, \quad (2.8.11)$$

приводит  $L$  к жордановой нормальной форме

$$S^{-1}LS = \tilde{L}, \quad (2.8.12)$$

где  $\tilde{L}$  — матрица блочно-диагонального вида (2.6.13). Подставим

теперь (2.8.11) в (2.8.2) и умножим обе части получившегося равенства справа на  $S$ :

$$T\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}(t) \underbrace{S^{-1}CS}_{\tilde{C}}. \quad (2.8.13)$$

Равенство (2.8.13) означает, что при переходе от базиса, образующего матрицу решений  $Q$ , к базису, образующему матрицу решения  $\tilde{Q}$ , матрица  $C$  в (2.8.2) преобразуется в матрицу

$$\tilde{C} = S^{-1}CS. \quad (2.8.14)$$

Но

$$C = e^{\Lambda t_0} \quad (2.8.15)$$

(см. (2.7.8)), поэтому

$$\tilde{C} = S^{-1}e^{\Lambda t_0}S = e^{S^{-1}\Lambda S t_0} = e^{\tilde{\Lambda} t_0}. \quad (2.8.16)$$

Поскольку матрица  $\tilde{\Lambda}$  приведена к жордановой нормальной форме, матрица  $\tilde{C}$  (см. разд. 2.6) также приведена к жордановой нормальной форме. Итак, при подходящем выборе матрицы  $\tilde{Q}$  матрица  $\tilde{C}$  — генератор представления группы  $\{T^n\}$  — приводится к блочно-диагональному виду

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{2} & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.8.17)$$

Так как отдельные блоки (подматрицы) не допускают дальнейшего приведения к блочно-диагональному виду (из-за своих алгебраических свойств), каждый из блоков называется неприводимым представлением. При возведении матрицы  $\tilde{C}^n$  в степень по правилам матричного умножения каждый из блоков умножается на себя, поэтому

$$\tilde{C}^n = \begin{pmatrix} \boxed{1}^n & & \\ & \boxed{2}^n & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.8.18)$$

Таким образом, оператору  $T$  мы можем поставить в соответствие

отдельный блок  $k$ , или неприводимое представление:

$$T \rightarrow [k], \quad (2.8.19)$$

$$T^n \rightarrow [k]^n. \quad (2.8.20)$$

Одна из главных задач теории представлений групп состоит в нахождении неприводимых представлений абстрактной группы (в нашем случае — группы  $\{T^n\}$ ).

## 2.9. Теория возмущений \*

Поскольку в общем случае невозможно решить в явном виде систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, во многих случаях может оказаться полезен приближенный подход, основанный на использовании теории возмущений. Разложим матрицу  $L$  дифференциального уравнения

$$\dot{Q} = LQ \quad (2.9.1)$$

в сумму

$$L = L_0 + L_1, \quad (2.9.2)$$

где  $L_0$  — постоянная матрица, в то время как матрица  $L_1$  не содержит постоянных элементов. Проще всего для этого разложить элементы матрицы  $L$  в ряд Фурье, свободный член которого однозначно определен.

Произведем теперь в (2.9.1) подстановку

$$Q = S\tilde{Q}, \quad (2.9.3)$$

где  $S$  — постоянная невырожденная матрица, и, умножив обе части уравнения слева на  $S^{-1}$ , получим

$$\dot{\tilde{Q}} = S^{-1}LS\tilde{Q}. \quad (2.9.4)$$

Матрицу  $S$  выберем так, чтобы она приводила матрицу  $L_0$  к жордановой нормальной форме, т. е.

$$S^{-1}L_0S = J. \quad (2.9.5)$$

Для упрощения последующих рассуждений предположим, что  $J$  содержит только диагональные элементы. Кроме того, пусть

$$S^{-1}L_1S = M, \quad (2.9.6)$$

так что

$$\dot{\tilde{Q}} = (J + \tilde{M}) \tilde{Q}. \quad (2.9.7)$$

Подставляя в (2.9.7)

$$\tilde{Q} = e^{tJ} \hat{Q}, \quad (2.9.8)$$

получаем после дифференцирования по  $t$

$$\dot{\tilde{Q}} = e^{-tJ} \underbrace{\tilde{M} e^{tJ}}_M \hat{Q}. \quad (2.9.9)$$

Можно показать, что элементы  $M_{kl}$  матрицы  $M$  имеют вид

$$M_{kl} = \exp [-(J_k - J_l) t] \tilde{M}_{kl}, \quad (2.9.10)$$

где  $J_i$  — диагональные элементы матрицы  $J$ . До сих пор все преобразования были точными. Обратимся теперь к теории возмущений. Предположим, что периодическая часть  $L_1$  матрицы  $L$ , или матрица  $M$  в (2.9.9), — малая величина. Чтобы подчеркнуть эту малость, введем (малый) параметр  $\varepsilon$ . Кроме того, разложим дифференциальное уравнение (2.9.9), которому удовлетворяет матрица решений, на уравнения для отдельных вектор-решений:

$$\dot{\hat{q}} = \varepsilon M \hat{q}, \quad (2.9.11)$$

где  $M$  — матрица вида

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots & \dots \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & \dots & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.9.12)$$

и, в частности,

$$\overline{M}_{jj} = 0, \quad \overline{M}_{jj} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{jj} d\varphi, \quad \varphi = \omega t. \quad (2.9.13)$$

Недиагональные элементы можно представить в виде

$$M_{ij} = e^{\Delta_{ij} t} D_{ij}^{(0)}(t), \quad \Delta_{ij} = -(J_i - J_j), \quad (2.9.14)$$

где  $P_{ij}^{(0)}$  — периодические функции времени.

Предположим также, что

$$\Delta_{ij} + im\omega \neq 0 \quad \text{при} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.9.15)$$

Чтобы решить уравнение (2.9.11), положим  $\hat{\mathbf{q}}$  равным

$$\exp[t(a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \dots)] \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n^{(1)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n^{(2)} \end{pmatrix} + \dots \right], \quad (2.9.16)$$

где  $\mathbf{A}^{(\infty)}$  — векторы, зависящие от времени. При  $\varepsilon = 0$  вектор (2.9.16) вырождается в единичный вектор

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9.17)$$

Так как компоненты вектора  $\hat{\mathbf{q}}$  можно нумеровать в любом порядке, наш подход ничуть не умаляет общности. Подставляя (2.9.16) в (2.9.11), дифференцируя и деля обе части получающегося уравнения на  $\exp[t(a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \dots)]$ , приходим к разложению

$$\hat{\mathbf{q}} \equiv (a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4 + \dots) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n^{(1)} \end{pmatrix} + \dots \right] +$$

$$+ \varepsilon \begin{pmatrix} \dot{A}_1^{(1)} \\ \dot{A}_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{A}_n^{(1)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \dot{A}_1^{(2)} \\ \dot{A}_2^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{A}_n^{(2)} \end{pmatrix} + \dots = \varepsilon \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{n1} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{c} \sum_{l=1}^n M_{1l} A_l^{(1)} \\ \\ \\ \sum_{l=1}^n M_{nl} A_l^{(1)} \end{array} \right) + \varepsilon^2 \left( \begin{array}{c} \sum_{l=1}^n M_{2l} A_l^{(1)} \\ \\ \\ \sum_{l=1}^n M_{nl} A_l^{(1)} \end{array} \right) + \dots + \varepsilon^{k+1} \left( \begin{array}{c} \sum_{l=1}^n M_{1l} A_l^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n M_{nl} A_l^{(k)} \end{array} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.9.18}$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в правой и левой частях уравнения (2.9.18), мы приходим к системе дифференциальных уравнений. Рассмотрим ее подробнее.

В низшем порядке по  $\varepsilon$  первая строка матричного уравнения имеет вид

$$\varepsilon: \dot{A}_1^{(1)} = M_{11} \equiv \sum_{m \neq 0} c_m^{(11)} e^{im\omega t}.
 \tag{2.9.19}$$

Уравнению (2.9.19) удовлетворяет

$$A_1^{(1)} = \sum_{m \neq 0} \frac{c_m^{(11)}}{im\omega} e^{im\omega t}.
 \tag{2.9.20}$$

Выбирать <sup>1)</sup>  $\bar{A}_1^{(1)} \neq 0$  не обязательно, так как это сказалось бы только на нормировке. В том же порядке по  $\varepsilon$ , но в других строках (т. е. при  $l \neq 1$ ), мы получим уравнения

$$\dot{A}_l^{(1)} = M_{l1}, \quad l = 2, 3, \dots
 \tag{2.9.21}$$

Проинтегрировав (2.9.21), мы найдем  $A_l^{(1)}$ . Чрезвычайно важно правильно выбрать постоянную интегрирования, так как мы намереваемся развить теорию возмущений, порождающую решения вида

$$\mathbf{q}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}(t),
 \tag{2.9.22}$$

где  $\mathbf{v}(t)$  — периодический вектор. Специальный выбор постоянной

<sup>1)</sup> Черта над  $A_1^{(1)}$  означает усреднение (2.9.13).

интегрирования означает, что мы специальным образом выбираем начальные условия. Так как

$$M_{l1} = e^{\Delta_{l1}t} \sum_{m \neq 0} c_m^{(11)} e^{im\omega t}, \quad (2.9.23)$$

мы можем выбрать  $A_l^{(1)}$  в виде

$$A_l^{(1)}(t) = e^{\Delta_{l1}t} \sum_{m \neq 0} \frac{c_m^{(11)}}{\Delta_{l1} + im\omega} e^{im\omega t}, \quad (2.9.24)$$

т. е. в виде произведения экспоненциальной функции  $\exp(\Delta_{l1}t)$  и периодической функции. Как будет показано ниже, такой выбор  $A_l^{(1)}$  обеспечивает представление  $\mathbf{q}(t)$  в виде (2.9.12).

Рассмотрим теперь следующий порядок по  $\varepsilon$  — коэффициенты при  $\varepsilon^2$ . В качестве первой строки нашего матричного уравнения мы получаем уравнение

$$\varepsilon^2 : a_2 + \dot{A}_1^{(2)} = \sum_{l=1}^n M_{l1} A_l^{(1)}. \quad (2.9.25)$$

Чтобы исследовать структуру его правой части более подробно, воспользуемся явным видом  $M_{ij}$  (см. (2.9.14)) и  $A_l^{(1)}$  (см. (2.9.20), (2.9.24)).

Разложив периодические функции, входящие в  $M$  и  $A_l^{(1)}$ , в ряды Фурье, мы столкнемся с произведениями вида

$$\exp(i\omega mt + i\omega m't). \quad (2.9.26)$$

При

$$m + m' \neq 0 \quad (2.9.27)$$

это — периодические функции, действительно зависящие от времени  $t$ , при

$$m + m' = 0 \quad (2.9.28)$$

— постоянные. Следовательно, правая часть уравнения (2.9.25) представима в виде

$$\exp[(\Delta_{l1} + \Delta_{l1})t] (P_1^{(2)} + C_1^{(2)}). \quad (2.9.29)$$

Так как экспоненциальные функции выпадают, (2.9.29) состоит из суммы постоянной  $C_1^{(2)}$  и периодической функции  $P_1^{(2)}$ , разложение которой в ряд Фурье не содержит постоянного члена. Выберем

$$a_2 = C_1^{(2)} = \sum_{l=1}^n \sum_{m \neq 0} \frac{c_m^{(11)} c_m^{(11)}}{\Delta_{l1} + im\omega}, \quad (2.9.30)$$

тогда постоянные члены в правой и левой частях уравнения (2.9.25) взаимно уничтожатся.

Уравнение, которое при этом получается для  $A_1^{(2)}$ , имеет решение, аналогичное (2.9.20), т. е.  $A_1^{(2)}$  может быть выбрано в виде периодической функции, не содержащей постоянного члена. В том же порядке  $\epsilon^2$  получаем в качестве остальных строк, т. е. при  $k \neq 1$ , уравнения

$$\dot{A}_k^{(2)} = \sum_{l=1}^n M_{kl} A_l^{(1)}, \quad (2.9.31)$$

правые части которых можно преобразовать к виду

$$\exp [(\Delta_{kl} + \Delta_{l1}) t] (P_k^{(2)} + C_k^{(2)}), \quad (2.9.32)$$

или

$$e^{\Delta_{kl} t} (P_k^{(2)} + C_k^{(2)}). \quad (2.9.33)$$

Уравнение (2.9.31) допускает решение вида

$$A_k^{(2)} = e^{\Delta_{kl} t} (\hat{P}_k^{(2)} + \hat{C}_k^{(2)}), \quad (2.9.34)$$

где  $\hat{P}_k^{(2)}$  — периодическая функция, не содержащая постоянного члена, а  $\hat{C}_k^{(2)}$  — постоянная. Теперь структура возникающих уравнений уже достаточно ясна для того, чтобы мы могли рассмотреть общий случай — со степенями  $\nu \geq 3$  по  $\epsilon$ . При  $\nu \geq 3$  в качестве первой строки получается уравнение ( $A^{(\kappa)} \equiv 0$  при  $\kappa \leq 0$ ,  $a_\kappa = 0$  при  $\kappa \leq 1$ )

$$\begin{aligned} \epsilon^\nu : a_\nu + a_2 A_1^{(\nu-2)} + a_3 A_1^{(\nu-3)} + \dots + a_{\nu-2} A_1^{(2)} + a_{\nu-1} A_1^{(1)} + \\ + \dot{A}_1^{(\nu)} = \sum_{l=1}^n M_{1l} A_l^{(\nu-1)}. \end{aligned} \quad (2.9.35)$$

Постоянная  $a_\nu$  и функция  $A_1^{(\nu)}$  в (2.9.35) пока не известны. Все остальные функции, включая  $A_1^{(\kappa)}$ ,  $1 \leq \kappa \leq \nu-2$ , определены на предыдущих этапах решения (в предположении, что по доказанному все  $A$  — периодические функции, не содержащие постоянных членов). Подставляя эти ранее найденные  $A$  в правую часть уравнения (2.9.35), нетрудно убедиться в том, что приводится к виду

$$\exp [(\Delta_{1l} + \Delta_{l1}) t] P_{1l}^{(0)} (P_l^{(\nu-1)} + C_l^{(\nu-1)}) = P_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}, \quad (2.9.36)$$

т. е. допускает разложение в сумму постоянной и чистой периодической функции, не содержащей постоянного члена. Коэффициент  $a_\nu$  можно выбрать равным этой постоянной, а функцию  $A_1^{(\nu)}$  считать чисто периодической. Чтобы найти  $A_1^{(\nu)}$ , достаточно проинтегрировать уравнение (2.9.35).

Рассмотрим теперь в том же порядке по  $\nu$  другие строки (2.9.18):

$$a_2 A_k^{(\nu-2)} + a_3 A_k^{(\nu-3)} + \dots + a_{\nu-1} A_k^{(1)} + \dot{A}_k^{(\nu)} = \sum_{l=1}^n M_{kl} A_l^{(\nu-1)}. \quad (2.9.37)$$

Функция  $A_k^{(v)}$  в (2.9.37) не известна. Все остальные  $A_l$  определены на предыдущих этапах решения и имеют вид произведений

$$A_l \sim e^{\Delta l t} \times \text{Периодическая функция.} \quad (2.9.38)$$

Следовательно, правая часть уравнения (2.9.37) представима в виде

$$\exp[(\Delta_{kl} + \Delta_{l1}) t] P_{kl}^0 (P_l^{(v-1)} + C_l^{(v-1)}), \quad (2.9.39)$$

или, если записать ее более компактно,

$$e^{\Delta_{kl} t} (P_k^{(v)} + C_k^{(v)}). \quad (2.9.40)$$

Таким образом, решение уравнения (2.9.37) можно записать в виде

$$A_k^{(v)} = e^{\Delta_{kl} t} (\hat{P}_k^{(v)} + \hat{C}_k^{(v)}), \quad (2.9.41)$$

где  $\hat{P}_k^{(v)}$  — периодическая функция, не содержащая постоянного члена, а  $\hat{C}_k^{(v)}$  — постоянная.

Приведенные выше соображения говорят нам о нескольких вещах. Прежде всего существует итерационная процедура, позволяющая, как мы убедились, определять последовательные вклады в сдвиг показателя  $\lambda$ , т. е. величины  $a_2, a_3, \dots$ . Кроме того, выражения, стоящие в (2.9.16) в квадратных скобках, могут быть построены в явном виде и всякий раз оказываются периодической функцией. Собирая эти составные части вместе, мы получаем общую структуру решения

$$\hat{\mathbf{q}} = e^{\mathbf{v}t} \begin{pmatrix} P_1 + C_1 \\ e^{\Delta_{21} t} (P_2 + C_2) \\ \vdots \\ e^{\Delta_{n1} t} (P_n + C_n) \end{pmatrix}. \quad (2.9.42)$$

Все члены допускают явное построение с помощью итерационной процедуры. От вектор-решения (2.9.42) уравнения (2.9.11) мы можем через (2.9.8) вернуться к (2.9.4). Пройдя этот путь, мы обнаружим, что первый столбец матрицы решений имеет вид

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(1)} = e^{Jt} e^{\mathbf{v}t} \begin{pmatrix} P_1 + C_1 \\ P_2 + C_2 \\ \vdots \\ P_n + C_n \end{pmatrix}, \quad (2.9.43)$$

где  $C_j$  — постоянные,  $P_j$  — периодические функции (без аддитивных постоянных).

Аналогичным образом, переставив соответствующим образом индексы, определим остальные вектор-столбцы. На последнем этапе мы можем, используя (2.9.3), вернуться к матрице  $Q$ . Как было показано в разд. 2.6 (см. (2.6.36)) и 2.7, такое преобразование не изменяет *структуру* вектор-решения (2.9.22). Изложенный нами метод допускает обобщение на случай вырожденных  $\lambda$ , когда, (2.9.43) содержит не только периодические функции, но и периодические функции, умноженные на конечные степени  $t$ . Для практических целей и низших порядков по  $\varepsilon$  нашего метода вполне достаточно. С другой стороны, судить о сходимости получающихся разложений довольно трудно потому, что с каждой последующей итерацией число членов возрастает. В разд. 3.9 мы введем новый метод, несколько более сложный, но быстро сходящийся (и действующий даже в квазипериодическом случае).

## ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### 3.1. Постановка задачи и теорема 3.1.1.

В этом разделе мы исследуем общий вид матрицы решений  $Q(t)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\dot{Q}(t) = M(t)Q(t), \quad (3.1.1)$$

где  $M$  — комплекснозначная матрица  $m \times m$ , представимая в виде ряда Фурье

$$M(t) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} M_{n_1, n_2, \dots, n_N} \exp(i\omega_1 n_1 t + i\omega_2 n_2 t + \dots + i\omega_N n_N t). \quad (3.1.2)$$

Каждый коэффициент Фурье  $M_{n_1, n_2, \dots}$  этого ряда представляет собой матрицу  $m \times m$ . После того что мы узнали из предыдущих разделов, естественно спросить, нельзя ли привести вектор-решение  $q(t)$  к виду

$$q(t) = e^{\lambda t} v(t), \quad (3.1.3)$$

где  $v(t)$  — квазипериодическая функция от  $t$  или многочлен от  $t$  с квазипериодическими коэффициентами. Хотя в литературе неоднократно предпринимались попытки решить эту задачу, ни одна из них не увенчалась полным успехом. Иначе говоря, можно ожидать появления вектор-решений другого вида. Таким образом, в этом и в последующих разделах мы оказываемся на переднем крае математических исследований. Матрицы решений  $Q(t)$  мы будем классифицировать по их трансформационным свойствам. Принадлежность  $Q(t)$  к одному из классов, как будет показано, влечет за собой представимость вектор-решений в виде (3.1.3). Чтобы исследовать трансформационные свойства, введем оператор сдвига  $T$ .

Нетрудно убедиться, что оператор сдвига  $T$ , о котором мы говорили в гл. 2, неприменим непосредственно к рассматриваемому нами случаю, но следующая процедура приводит к желаемому результату. Рассмотрим уравнение (3.1.1) как частный случай более широкой системы уравнений, в которую вместо матрицы (3.1.2) входит матрица

$$M(t, \varphi) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} M_{n_1, n_2, \dots, n_N} \exp[i\omega_1 n_1 (-\varphi_1 + t) + i\omega_2 n_2 (-\varphi_2 + t) + \dots + i\omega_N n_N (-\varphi_N + t)], \quad (3.1.4)$$

содержащая фазы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ . Иначе говоря, решение матричного уравнения (3.1.1) мы заменяем решением более общего матричного уравнения

$$\dot{Q}(t, \varphi) = M(t, \varphi)Q(t, \varphi). \quad (3.1.5)$$

Введем оператор сдвига

$$T_\tau: \begin{cases} t \rightarrow t + \tau \\ \varphi \rightarrow \varphi + \tau, \quad \tau = \tau e, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

где  $\tau$  — произвольный сдвиг, а  $e$  — вектор  $(1, 1, \dots, 1)$  в  $\varphi$ -пространстве. Ясно, что матрица  $M$  инвариантна относительно (3.1.6), или, что то же, коммутирует с  $T_\tau$ :

$$T_\tau M = M T_\tau. \quad (3.1.7)$$

Из (3.1.7) следует, что

$$T_\tau Q(t, \varphi) \quad (3.1.8)$$

— решение уравнения (3.1.5) (если  $Q(t, \varphi)$  удовлетворяет этому уравнению). Следовательно, должно выполняться соотношение

$$T_\tau Q(t, \varphi) = Q(t, \varphi) C(\tau, \varphi) \quad (3.1.9)$$

(см. теорему (2.4.1), где  $C(\tau, \varphi)$  — матрица, не зависящая от  $t$ . Трудность состоит в том, что матрица  $C$  зависит от  $\tau$  и  $\varphi$ . Записывая левую часть уравнения (3.1.9) в более подробном виде, приходим к соотношению

$$Q(t + \tau, \varphi + \tau) = Q(t, \varphi) C(\tau, \varphi). \quad (3.1.10)$$

После этих предварительных замечаний сформулируем теорему 3.1.1, доказательство которой будет приведено ниже.

**Теорема 3.1.1.** Примем относительно (3.1.4) и (3.1.5) следующие предположения.

1) Отношения частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  иррациональны (в противном случае мы могли бы выбрать меньший базис частот).

2) Матрица  $M(t, \varphi) = M(0, \varphi - t)$  является  $T_j$ -периодической по  $\varphi_j$  ( $T_j = 2\pi/\omega_j$ ) и принадлежит классу  $C^k$  по  $\varphi$  ( $k \geq 0$ ) (т. е.  $k$  раз непрерывно дифференцируемая по  $\varphi$ ).

3) При некотором  $\varphi = \varphi_0$  все обобщенные характеристические показатели  $\lambda_j$  вектор-решения  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi_0)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) различны. Будем считать, что  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ .

4) Вектор-решение  $\mathbf{q}^{(j)}$  можно представить в виде

$$\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi_0) = \exp[z_j(t)] \mathbf{u}^{(j)}(t), \quad (3.1.11)$$

где  $|\mathbf{u}^{(j)}(t)| = 1$ ;  $z_j$  — вещественнозначные функции времени ( $j = 1, \dots, m$ ) и связаны  $\lambda_j$  соотношением

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} z_j(t) \right\} = \lambda_j. \quad (3.1.12)$$

Потребуем, чтобы при всех  $t$  выполнялось неравенство

$$|\det \mathbf{u}^{(j)}(t)| > d_0 > 0. \quad (3.1.13)$$

Из него следует, что минимальные углы между единичными векторами  $\mathbf{u}(t)$  сохраняются при всех  $t$ , т. е. векторы  $\mathbf{u}$  ни при каком  $t$  не становятся линейно зависимыми.

5) Функции  $z_j(t)$  обладают следующими свойствами: существует последовательность  $t_n$  ( $t_n \rightarrow \infty$ ), такая, что

$$\left| \frac{1}{t_n + \tau} z_j(t_n + \tau) - \lambda_j \right| < \delta_1 \quad (3.1.14)$$

и

$$\frac{1}{t_n + \tau} [z_j(t_n + \tau) - z_j(\tau)] > \frac{1}{t_n + \tau} [z_{j+1}(t_n + \tau) - z_{j+1}(\tau)] + \delta_2, \quad (3.1.15)$$

где

$$\delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad \text{и} \quad \tau \geq 0. \quad (3.1.16)$$

(Условия (3.1.14) и (3.1.15) выполняются, в частности, для любой последовательности  $t_n$ , если

$$z_j(t) = \lambda_j t + \omega_j(t) \quad (3.1.17)$$

при условии, что функции  $\omega_j(t)$  ограничены.)

6) Частоты  $\omega$  удовлетворяют условию КАМ (см. (2.1.20)); число  $k$  в предположении (2) надлежащим образом выбрано.

Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Если выполнены предположения (1) — (4) при  $k \geq 0$ , матрицу  $Q(t, \varphi)$  можно выбрать так, что матрица  $C$  в

$$T_\tau Q(t, \varphi) = Q(t, \varphi) C(\tau, \varphi) \quad (3.1.18)$$

будет треугольной, т. е.

$$C^\tau = \begin{pmatrix} \text{треугольник} \\ 0 \end{pmatrix},$$

с коэффициентами, квазипериодическими по  $\tau$ .

б) Если выполнены предположения (1) — (5), то элементы матрицы  $C$  принадлежат классу  $C^k$  по  $\varphi$  и являются  $T_j$ -периодическими по  $\varphi_j$  ( $T_j = 2\pi/\omega_j$ ).

в) Если выполнены предположения (1) — (6), то матрицу  $C$  можно привести к диагональному виду, а решения  $\mathbf{q}^{(j)}$  выбрать так, чтобы

$$\mathbf{q}^{(j)} = e^{\hat{\lambda}_j t} \mathbf{v}^{(j)}(t, \varphi), \quad \text{Re} \{ \hat{\lambda}_j \} = \lambda_j, \quad (3.1.20)$$

где  $\mathbf{v}^{(j)}$  — вектор, квазипериодический по  $t$  и  $T_j$ -периодический по  $\varphi_j$ , принадлежащий классу  $C^k$  по  $\varphi$ .

В частности,

$$T_\tau \mathbf{v}^{(j)}(t, \varphi) = \mathbf{v}^{(j)}(t, \varphi), \quad (3.1.21)$$

т. е. вектор  $\mathbf{v}^{(j)}$  инвариантен относительно  $T_\tau$ .

В разд. 3.8 мы приведем обобщение теоремы 3.1.1 на случай, когда некоторые из  $\lambda$  совпадают.

Доказательство теоремы 3.1.1 разбито на ряд этапов. Им посвящены разд. 3.2—3.5 и 3.7. (В разд. 3.6 мы излагаем приближенные методы построения решений  $\mathbf{q}^{(j)}$ , связанные с идеями доказательства.) Сформулировав и доказав в разд. 3.2 несколько вспомогательных теорем (лемм), мы сначала доказываем, что матрица  $C$  приводима к треугольному виду (для случая матрицы  $2 \times 2$  — в разд. 3.3, для случая матрицы  $m \times m$  — в разд. 3.5). Это позволяет выбрать  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi)$  так, чтобы при всех  $\varphi$  выполнялись неравенства  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ . Затем мы доказываем, что элементы треугольной матрицы  $C$  можно выбрать в соответствии с утверждениями «а» и «б» теоремы 3.1.1 (для случая матрицы  $2 \times 2$  — в разд. 3.4, для случая матрицы  $m \times m$  — в разд. 3.5). Наконец, в разд. 3.7 мы доказываем утверждение «в».

## 3.2. Леммы

**Лемма 3.2.1.** Если матрица  $M$ , имеющая вид (3.1.4), принадлежит классу  $C^k$  ( $k \geq 0$ ) по  $\varphi$ , то она ограничена при всех  $t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) и всех  $\varphi$ . Следовательно, мы можем воспользоваться выводами, к которым пришли в разд. 2.4.4, и определить обобщенные характеристические показатели.

*Доказательство.* Так как матрица  $M$  периодическая по каждому  $\varphi_j$ , или, что эквивалентно, по каждому  $\varphi_j^1 = \varphi_j + t$ , она непрерывна на замкнутых интервалах  $0 \leq \varphi_j^1 \pmod{2\pi/\omega_j} \leq 2\pi/\omega_j$ , следовательно, ограничена при всех  $t$  и  $\varphi$ .

**Лемма 3.2.2.** Если матрица  $M$ , имеющая вид (3.1.4), и начальная матрица решений  $Q(0, \varphi)$  принадлежат классу  $C^k$  по  $\varphi$ , то матрица решений  $Q(t, \varphi)$  также принадлежит классу  $C^k$  по  $\varphi$  при  $-\infty < t < +\infty$ .

*Доказательство.* Будем исходить из матричного уравнения (3.1.5), в котором матрица  $M$  имеет вид (3.1.4). Решение уравнения (3.1.5) формально представимо в виде

$$Q(t, \varphi) = \hat{T} \exp \left[ \int_0^t M(s, \varphi) ds \right] Q(0, \varphi), \quad (3.2.1)$$

где  $\hat{T}$  — оператор хронологического упорядочения. Экспоненци-

альная функция в правой части (3.2.1) определяется соотношением

$$\hat{T} \exp \left[ \int_0^t M(s, \Phi) ds \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{T} \left[ \int_0^t M(s, \Phi) ds \right]^n. \quad (3.2.2)$$

Оператор  $\hat{T}$  упорядочивает стоящие справа от него произведения матриц так, что матрицы, соответствующие бóльшим (более «поздним») значениям  $t$ , стоят слева от матриц, соответствующих меньшим (более «ранним») значениям  $t$ . В частности, это означает, что

$$I^{(n)} \equiv \frac{1}{n!} \hat{T} \left[ \int_0^t M(s, \Phi) ds \right]^n = \int_0^t ds_n M(s_n, \Phi) \int_0^{s_n} ds_{n-1} M(s_{n-1}, \Phi) \dots \int_0^{s_2} ds_1 M(s_1, \Phi), \quad (3.2.3)$$

Так как  $M$  — матрица с элементами  $M_{jk}$ , матричное соотношение (3.2.3) можно записать поэлементно:

$$I_{jk}^{(n)} \equiv \frac{1}{n!} \hat{T} \left\{ \left[ \int_0^t M(s, \Phi) ds \right]^n \right\}_{jk} = \sum_{l_1, \dots, l_{n-1}} \int_0^t ds_n M_{j, l_{n-1}}(s_n, \Phi) \times \\ \times \int_0^{s_n} ds_{n-1} M_{l_{n-1}, l_{n-2}}(s_{n-1}, \Phi) \dots \int_0^{s_2} ds_1 M_{l_1, k}(s_1, \Phi). \quad (3.2.4)$$

По лемме 3.2.1 матрица  $M$  ограничена:

$$|M_{jk}| \leq \bar{M}. \quad (3.2.5)$$

Следовательно, для элементов матрицы  $I^{(n)}$  справедлива оценка

$$|I_{jk}^{(n)}| \leq \underbrace{\sum_{l_1, \dots, l_{n-1}}}_{m^{n-1}} \bar{M}^n \underbrace{\int_0^t ds_n \int_0^{s_n} ds_{n-1} \dots \int_0^{s_2} ds_1}_{t^n/n!}. \quad (3.2.6)$$

Так как (см. (3.2.1)) хронологически упорядоченную экспоненциальную функцию (3.2.2) нам предстоит умножить на начальный вектор-решение  $\mathbf{q}_k$  при  $t = 0$ , необходимо знать норму вектора

$$I^{(n)} \mathbf{q}_k(0, \Phi). \quad (3.2.7)$$

Предположим, что каждая компонента вектора  $\mathbf{q}_k$  ограничена:

$$|\mathbf{q}_k(0, \Phi)| \leq \bar{q}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.2.8)$$

Тогда

$$|I^{(n)} \mathbf{q}_k(0, \Phi)| \leq m^{n-1} \frac{t^n}{n!} \bar{M}^n m \bar{q}, \quad (3.2.9)$$

откуда

$$|q_k(t, \Phi)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \overline{M}^{(n)} m^{(n)} \bar{q} = e^{t \overline{M} m} \bar{q}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2.10)$$

Ясно, что ряд в правой части (3.2.10) сходится при любых  $-\infty < t < +\infty$ .

Полученные нами оценки без труда обобщаются и позволяют доказать дифференцируемость (3.2.1) по  $\Phi$ . Обозначая производную по  $\Phi_j$  штрихом:

$$Q'_{\Phi_j}(t, \Phi) \equiv \frac{\partial}{\partial \Phi_j} Q(t, \Phi), \quad (3.2.11)$$

и отбрасывая индекс  $\Phi_j$ , получаем следующее выражение для производной матричного элемента  $jk$  члена ряда (3.2.2):

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Phi_j} I^{(n)} \right\}_{jk} &\equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial \Phi_j} \frac{1}{n!} \hat{T} \left[ \int_0^t M(s, \Phi) ds \right]^n \right\}_{jk} = \sum_{l_1, \dots, l_{n-1}} \times \\ &\times \left\{ \int_0^t ds_n M'_{j, l_{n-1}}(s_n, \Phi) \int_0^{s_n} \dots + \int_0^t ds_n M_{j, l_{n-1}} \int_0^{s_n} ds_{n-1} M'_{l_{n-1}, l_{n-2}} \dots + \dots \right\}_{jk}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Пусть

$$|M'| \leq K, \quad (3.2.13)$$

тогда

$$\left| \left\{ \frac{\partial}{\partial \Phi_j} I^{(n)} \right\}_{jk} \right| \leq nm^{n-1} \overline{M}^{n-1} K. \quad (3.2.14)$$

Рассмотрим производную (3.2.11) более подробно. Обозначив производные по  $\Phi_j$  штрихами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Phi_j} Q(t, \Phi)|_{ik} &= \left[ \hat{T} \exp \int_0^t \dots \right]' Q(0, \Phi)|_{ik} + \\ &+ \underbrace{\left[ \hat{T} \exp \int_0^t \dots \right]}_{\text{существует при всех } t} Q'(0, \Phi)|_{ik}, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

воспользуемся оценкой (3.2.14) и получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \Phi_j} Q(t, \Phi) \right|_{ik} &\leq K \exp(m \overline{M} t) m \bar{q} + \left| \left[ \hat{T} \exp \int_0^t \dots \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial \Phi_j} Q(0, \Phi) \right|_{ik}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Второй член в правой части можно оценить с помощью неравенства, аналогичного неравенству (3.2.9). Следовательно, если  $M \in C^1$  по  $\Phi$  (см. (3.2.13)), то (3.2.11) существует при  $-\infty < t < +\infty$ . Аналогичным образом доказывается сходимость (и существование)  $k$ -й производной матрицы решения  $Q(t, \Phi)$ , если матрица  $M$  достаточное число раз непрерывно дифференцируема по  $\Phi$ .

**Лемма 3.2.3.** Если начальная матрица  $Q(0, \Phi)$  периодическая по  $\Phi$  с периодами  $T_j = 2\pi/\omega_j$ , то  $Q(t, \Phi)$  также  $T_j$ -периодическая матрица по  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

*Доказательство.* В (3.2.1) и (3.2.2) каждый член обладает  $T_j$ -периодичностью по  $\Phi_j$ .

**Лемма 3.2.4.** Эта лемма относится к случаю, когда за начальную матрицу решений выбрана единичная матрица. Обозначим через  $Q$  (невырожденную) начальную матрицу (матрицу решений при  $\Phi = \Phi_0$ ):

$$Q(0, \Phi_0) = \hat{Q}(0, \Phi_0). \quad (3.2.17)$$

Предположим, что при всех остальных  $\Phi$  матрица решений при  $t = 0$  переходит в ту же начальную матрицу

$$Q(0, \Phi_0) = \hat{Q}(0, \Phi_0) \equiv Q_0. \quad (3.2.18)$$

Для дальнейшего удобно преобразовать решения к такому виду, чтобы начальная матрица решений (3.2.17) трансформировалась в единичную матрицу. Для этого запишем матрицу решения (опуская для краткости аргумент  $\Phi$ ) в виде

$$Q(t) = U(t) Q_0, \quad \text{где } U(0) = 1. \quad (3.2.19)$$

Из (3.2.19) следует, что

$$\dot{Q} = \dot{U}(t) Q_0, \quad \text{причем } \dot{U} = MU. \quad (3.2.20)$$

Подставляя (3.2.19) в (3.2.20) и умножая обе части уравнения слева на  $Q_0^{-1}$ , получаем

$$Q_0^{-1} \frac{d}{dt} U Q_0 = \underbrace{Q_0^{-1} M Q_0}_{\tilde{M}} \underbrace{Q_0^{-1} U Q_0}_Q. \quad (3.2.21)$$

Введем новую матрицу решений

$$Q_0^{-1} Q = \tilde{Q}. \quad (3.2.22)$$

Тогда (3.2.21) можно записать в виде (см. (3.1.1))

$$\dot{\tilde{Q}}(t) = \tilde{M} \tilde{Q}, \quad (3.2.23)$$

где  $\tilde{Q}$  удовлетворяет начальному условию

$$\tilde{Q}(0) = 1. \quad (3.2.24)$$

Так как каждое из выполненных нами преобразований обратимо, достаточно рассмотреть новую задачу — о решении матричного уравнения (3.2.23) с начальным условием (3.2.24). Можно доказать (доказательство полностью аналогично проведенному в разд. 2.7), что новые вектор-решения  $\tilde{\mathbf{q}}^{(j)}$  также представимы в виде (3.1.11) с такими же обобщенными характеристическими показателями, как и старые вектор-решения.

В дальнейшем мы будем рассматривать только преобразованную систему (3.2.23) и (3.2.24), поэтому тильду можно опустить.

**Лемма 3.2.5.** Матрица преобразования  $C$  (см. (2.7.7)) системы (3.2.23), (3.2.24) задается соотношением

$$C(\tau, \varphi) = Q(\tau, \varphi + \tau). \quad (3.2.25)$$

*Доказательство.* Воспользовавшись определением оператора  $T_\tau$ , запишем (3.1.19) в виде

$$Q(t + \tau, \varphi + \tau) = Q(t, \varphi) C(\tau, \varphi). \quad (3.2.26)$$

Выбрав  $t = 0$  и воспользовавшись (3.2.24), получим (3.2.25). Так как по теореме 2.4.1 матрица  $Q(t, \varphi)$  невырожденная, обратная матрица

$$C^{-1}(\tau, \varphi) = Q^{-1}(\tau, \varphi + \tau) \quad (3.2.27)$$

существует при всех  $\tau$  и  $\varphi$ .

Соотношение (3.2.25) позволяет представить (3.2.26) в виде

$$Q(t + \tau, \varphi + \tau) = Q(t, \varphi) Q(\tau, \varphi + \tau). \quad (3.2.28)$$

Подставив всюду  $\varphi - \tau$  вместо  $\varphi$ , получим после несложных преобразований

$$Q(t, \varphi - \tau) = Q(t + \tau, \varphi) Q^{-1}(t, \varphi). \quad (3.2.29)$$

В частном случае при  $\varphi = \varphi_0$  введем для  $C(\tau, \varphi_0)$  специальное обозначение

$$C(\tau, \varphi_0) = C(\tau). \quad (3.2.30)$$

**Лемма 3.2.6.** Введем матрицу  $\Gamma$  — транспонированную обратную матрицу  $Q(\tau, \varphi)$ :

$$\Gamma = (Q^{-1})^T. \quad (3.2.31)$$

Тогда (3.2.29) при  $\varphi = \varphi_0$  можно представить в виде

$$\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}(\tau) \mathbf{q}^{(k)}(t + \tau, \varphi_0), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2.32)$$

Пусть

$$\Gamma_{jk}(\tau) \equiv \Gamma_{jk}(\tau, \varphi_0) = e^{-z_k(\tau)} D_{jk}(\tau). \quad (3.2.33)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $|D_{jk}(\tau)| < d_1$ ,  $d_1$  не зависит от  $\tau$ ;
- 2)  $D_{jk}(\tau) \in C^1$  по  $\tau$ .

*Доказательство.* Утверждение (1) следует непосредственно из определения обратной матрицы, соотношений (3.2.30), (3.2.25) и предположения (3) теоремы 3.1.1. Утверждение (2) следует из разложения вектора  $\mathbf{q}^{(j)}$  (принадлежащего по крайней мере классу  $C^1$  по  $\tau$ ) в произведение действительного множителя  $\exp(z_j t)$  и единичного вектора  $\mathbf{u}_j(t)$ .

### 3.3. Доказательство утверждения «а» теоремы 3.1.1: построение треугольной матрицы (на примере матрицы $2 \times 2$ )

Так как все основные идеи и существенные этапы доказательства особенно наглядно прослеживаются в простом случае, когда  $M$  и, следовательно,  $Q$  — матрицы  $2 \times 2$ , мы начнем с этого примера и положим

$$Q(t, \varphi_0) = \{e^{z_1(t)} \mathbf{u}_1(t), e^{z_2(t)} \mathbf{u}_2(t)\}. \quad (3.3.1)$$

Разложение (3.2.32) примет вид

$$\mathbf{q}^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau) = \Gamma_{11}(\tau) \mathbf{q}^{(1)}(t + \tau, \varphi_0) + \Gamma_{12}(\tau) \mathbf{q}^{(2)}(t + \tau, \varphi_0), \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{q}^{(2)}(t, \varphi_0 - \tau) = \Gamma_{21}(\tau) \mathbf{q}^{(1)}(t + \tau, \varphi_0) + \Gamma_{22}(\tau) \mathbf{q}^{(2)}(t + \tau, \varphi_0). \quad (3.3.3)$$

Рассмотрим разложения (3.3.2), (3.3.3) более подробно. Векторы  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau)$  в левой части образуют подмножество вектор-функций  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi)$ , периодических по  $\varphi_j$  и принадлежащих классу  $C^k$  по  $\varphi$ . В частности, в левой части уравнений (3.3.2) и (3.3.3) стоят функции, квазипериодические по  $\tau$ . Так как отношения частот  $\omega$  по предположению иррациональны, векторы  $\varphi_0 - \tau$  всюду плотны в пространстве  $\varphi$ , или, точнее, величины

$$(\varphi_{0,j} - \tau) \left( \text{mod } \frac{2\pi}{\omega_j} \right) \text{ всюду плотны в } \varphi_j, \quad 0 \leq \varphi_j \leq \frac{2\pi}{\omega_j}. \quad (3.3.4)$$

Из (3.3.4) и из  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi) \in C^k$  следует, что векторы  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau)$  — всюду плотны в пространстве  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi)$ . Асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$  векторов  $\mathbf{q}^{(j)}$  в правой части уравнений (3.3.2) и (3.3.3) известно. По предположению векторы  $\mathbf{q}^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) имеют различные обобщенные характеристические показатели  $\lambda_j$ . Мы хотим построить теперь новые решения уравнения (3.1.5)  $\hat{\mathbf{q}}^{(1)}$  и  $\hat{\mathbf{q}}^{(2)}$ , которые сочетали бы в себе оба свойства, а именно: обладали бы

известным асимптотическим поведением ( $\hat{q}^{(j)}$  должен иметь обобщенный характеристический показатель  $\lambda_j$ ) и квазипериодичностью по аргументу  $\varphi_0 - \tau$ . Выберем  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Начнем с построения вектора  $\hat{q}^{(2)}$ . Умножим (3.3.2) на  $\alpha(\tau)$ , а (3.3.3) на  $\beta(\tau)$  и образуем линейную комбинацию

$$\hat{q}^{(2)}(t, \varphi_0 - \tau, \tau) = \alpha(\tau) q^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau) + \beta(\tau) q^{(2)}(t, \varphi_0 - \tau). \quad (3.3.5)$$

Мы хотим, чтобы  $\hat{q}^{(2)}$  не содержал обобщенный характеристический показатель  $\lambda_1$ . Потребуем для этого, чтобы

$$\alpha(\tau) \Gamma_{11}(\tau) q^{(1)}(t + \tau, \varphi_0) + \beta(\tau) \Gamma_{21}(\tau) q^{(1)}(t + \tau, \varphi_0) = 0. \quad (3.3.6)$$

Это условие вполне выполнимо, так как вектор  $q^{(2)}$  из него выпадает.

С помощью величин  $D$ , определяемых формулой (3.2.33) (лемма 3.2.6), преобразуем (3.3.6) к виду

$$\alpha(\tau) u_1(t + \tau) D_{11}(\tau) + \beta(\tau) u_1(t + \tau) D_{21}(\tau) = 0, \quad (3.3.7)$$

где коэффициенты  $D$  ограничены.

Решение уравнения (3.3.7) представимо в виде

$$\alpha(\tau) = -D_{21}(\tau) [|D_{11}(\tau)|^2 + |D_{21}(\tau)|^2]^{-1/2}, \quad (3.3.8)$$

$$\beta(\tau) = -D_{11}(\tau) [|D_{11}(\tau)|^2 + |D_{21}(\tau)|^2]^{-1/2}, \quad (3.3.9)$$

где ввиду произвольности решения однородных уравнений выписывать знаменатель можно, но не нужно. Поскольку решения линейно независимы, знаменатель отличен от нуля.

Используя те же  $\alpha(\tau)$  и  $\beta(\tau)$ , мы можем построить  $\hat{q}_1$  по формуле

$$\hat{q}^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau, \tau) = \beta^*(\tau) q^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau) - \alpha^*(\tau) q^{(2)}(t, \varphi_0 - \tau). \quad (3.3.10)$$

Подставляя (3.3.8), (3.3.9) и (3.3.2), (3.3.3) с (3.2.33), получаем вектор  $\hat{q}^{(1)}$  в явном виде:

$$\hat{q}^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau, \tau) = (|D_{11}(\tau)|^2 + |D_{21}(\tau)|^2)^{1/2} e^{-z_1(\tau)} q^{(1)}(t + \tau, \varphi_0) + \text{Члены, содержащие } q^{(2)}(t + \tau, \varphi_0). \quad (3.3.11)$$

(И в этом случае  $D_{11}(\tau)$  и  $D_{21}(\tau)$  не могут обращаться в нуль одновременно, так как в противном случае векторы-решения  $q^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau)$  вопреки предположению стали бы линейно зависимыми. Следовательно, коэффициент перед  $q^{(1)}(t + \tau, \varphi_0)$  отличен от нуля.) Итак, выбор вектора  $\hat{q}^{(1)}$  в виде (3.3.10) обеспечивает принадлежность ему характеристического показателя  $\lambda_1$ . Тем самым мы построили два новых решения  $\hat{q}_1, \hat{q}_2$ , соответствующие обобщенным характеристическим показателям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

При переходе от старых решений  $q_1, q_2$  к новым решениям  $\hat{q}_1, \hat{q}_2$  матрица  $C$  (3.1.18), как нетрудно доказать и в чем мы убедимся непосредственно в разд. 3.7, приводится к треугольному виду.

### 3.4. Доказательство квазипериодичности элементов треугольной матрицы $C$ по $\tau$ , а также периодичности по $\varphi_j$ и принадлежности классу $C^k$ по $\varphi$ (на примере матрицы $2 \times 2$ )

Докажем, что функции  $\alpha(\tau)$  и  $\beta(\tau)$  можно приблизить (быть может, с точностью до общего множителя) асимптотически со сколь угодно малой погрешностью функциями, квазипериодическими по  $\tau$ . Для этого мы с помощью (3.3.2) запишем коэффициенты  $\alpha(\tau)$  в (3.3.6) или (3.3.7) в виде

$$\Gamma_{11}(\tau) q^{(1)}(t + \tau, \varphi_0) = q^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau) - \Gamma_{12}(\tau) q^{(2)}(t + \tau, \varphi_0). \quad (3.4.1)$$

Аналогичным образом поступим с коэффициентами  $\beta(\tau)$  в (3.3.6). Для дальнейшего достаточно рассмотреть в качестве примера, как проводится доказательство для коэффициента  $\alpha(\tau)$ . Для того чтобы коэффициенты  $\alpha(\tau)$  и  $\beta(\tau)$  оставались ограниченными при всех положительных  $t$  и  $\tau$ , образуем вместо (3.4.1) выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(t, \varphi_0 - \tau) \Gamma_{11}(\tau) q^{(1)}(t + \tau, \varphi_0) &= \mathcal{N}^2(t, \varphi_0 - \tau) q^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau) - \\ &- \mathcal{N}^2(t, \varphi_0 - \tau) \Gamma_{12}(\tau) q^{(2)}(t + \tau, \varphi_0), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

где

$$\mathcal{N}^2(t, \varphi_0 - \tau) = [ |q^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau)|^2 + |q^{(2)}(t, \varphi_0 - \tau)|^2 ]^{-1/2}. \quad (3.4.3)$$

Изложим сначала общий ход доказательства, проводимого со всей строгостью в дальнейшем. Предположим, что при  $t \rightarrow \infty$  функция  $z_2(t + \tau)$  зависит от времени как  $\lambda_2 \cdot (t + \tau)$ , а вектор  $q^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau)$  — как  $\exp(\lambda_1 t)$ . Пусть  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$  второй член в (3.4.2) обращается в нуль. Это означает, что коэффициент  $\alpha(\tau)$  в (3.3.7) и соответственно коэффициент  $\beta(\tau)$  в (3.3.7) можно аппроксимировать выражениями, содержащими только  $q^{(1)}(t, \varphi_0 - \tau)$  и  $q^{(2)}(t, \varphi_0 - \tau)$ . Но так как векторы  $q^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau)$  всюду плотны в пространстве  $q^{(j)}(t, \varphi)$ , коэффициенты  $\alpha(\tau)$  и  $\beta(\tau)$  с любой степенью точности можно приблизить функциями, квазипериодическими по  $\tau$  и даже принадлежащими классу  $C^k$  по  $\varphi$ . Следовательно,  $\alpha(\tau)$  и  $\beta(\tau)$  мы можем вложить в множество функций  $\alpha(\varphi)$  и  $\beta(\varphi)$  ( $\varphi = \varphi_0 - \tau$ ), квазипериодических по  $\tau$  и  $T_j$ -периодических и принадлежащих классу  $C^k$  по  $\varphi$ .

Сформулируем это более точно. Пользуясь соотношениями (3.1.11) и (3.2.33), запишем (3.3.2) и (3.3.3) в виде

$$\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau) = \exp[z_1(t + \tau) - z_1(\tau)] \mathbf{u}^{(1)}(t + \tau) D_{j_1}(\tau) + \\ + \exp[z_2(t + \tau) - z_2(\tau)] \mathbf{u}^{(2)}(t + \tau) D_{j_2}(\tau) \quad (j = 1, 2). \quad (3.4.4)$$

Выберем  $\tau$  в интервале

$$\tau_1 < \tau < \tau_2. \quad (3.4.5)$$

Используя (3.4.3), образуем

$$N^\circ(t, \varphi_0 - \tau) \mathbf{q}^{(j)}$$

и соответствующие выражения в правой части (3.4.4).

Разделив числитель и знаменатель правой части получившегося выражения на

$$\exp[z_1(t + \tau) - z_1(\tau)], \quad (3.4.6)$$

мы увидим, что коэффициенты  $D_{j_2}(\tau)$  в (3.4.4) входят с множителями

$$\exp[z_2(t + \tau) - z_2(\tau) - z_1(t + \tau) + z_1(\tau)]. \quad (3.4.7)$$

Напомним определение обобщенного характеристического показателя, согласно которому

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} z_j(t) \right] = \lambda_j. \quad (3.4.8)$$

Следовательно, можно выбрать последовательность  $t_n \rightarrow \infty$ , такую, что

$$\frac{1}{t_n} z_1(t_n) > \lambda_1 - \delta, \quad \delta > 0. \quad (3.4.9)$$

При каждом  $\tau$  из интервала  $\tau_1 < \tau < \tau_2$  ей соответствует последовательность, такая, что

$$\frac{1}{t_n} [z_1(t_n + \tau) - z_1(\tau)] > \lambda_1 - \delta', \quad \delta' > 0. \quad (3.4.10)$$

При достаточно больших  $t_n$  величину  $\delta'$  можно выбрать сколь угодно малой. С другой стороны, так как

$$\limsup \left\{ \frac{1}{t} z_2(t) \right\} = \lambda_2, \quad (3.4.11)$$

найдется число  $\delta'' > 0$ , такое, что при той же последовательности  $t_n$  и  $\tau_1 < \tau < \tau_2$

$$\frac{1}{t_n} [z_2(t + \tau) - z_2(\tau)] < \lambda_2 + \delta'', \quad (3.4.12)$$

причем при достаточно больших  $t_n$  величину  $\delta''$  можно выбрать сколь угодно малой. Сопоставляя (3.4.10) и (3.4.12), мы заключаем, что (3.4.7) стремится к нулю при  $t_n \rightarrow \infty$ .

Следовательно, всюду в (3.3.7) при  $\tau_1 < \tau < \tau_2$  мы можем заметить

$$u_1(t + \tau) D_{j1}(\tau) \quad (3.4.13)$$

на величину

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \mathcal{N}(t, \varphi_0 - \tau) q^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau) \}, \quad (3.4.14)$$

которая квазипериодична по  $\tau$ . Это позволяет построить  $\alpha$  и  $\beta$  как квазипериодические функции с помощью соответствующих замен  $D_{j1}$  в (3.3.8) и (3.3.9) и последующего предельного перехода  $\tau_2 \rightarrow \infty$ .

Если выполняется предположение (5) теоремы 3.1.1, то мы можем снова заменить (3.4.13) на (3.4.14), вкладывая одновременно  $\mathcal{N}(t, \varphi_0 - \tau) q^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau)$  в множество вектор-функций  $\mathcal{N}(t, \varphi) \times \times q^{(j)}(t, \varphi)$ . Поскольку последнее выражение периодическое и принадлежит классу  $C^k$  по  $\varphi$ , то же можно сказать и о  $\alpha(\tau) \rightarrow \alpha(\varphi)$ , а также о  $\beta(\tau) \rightarrow \beta(\varphi)$ .

Итак, подведем итоги. В предположениях (1) — (4) теоремы (3.1.1) мы построили полную систему решений уравнения (3.1.5)

$$\tilde{q}^{(j)}(t, \varphi_\tau), \quad \varphi_\tau \equiv \varphi_0 - \tau, \quad (3.4.15)$$

обладающих следующим свойством: вектор-решение  $\tilde{q}^{(j)}$  принадлежит (по крайней мере) классу  $C^1$  по  $t$  и  $\tau$  и квазипериодично по  $\tau$ .

В предположениях (1) — (5) мы построили полную систему решений уравнения (3.1.5)

$$\tilde{q}^{(j)}(t, \varphi), \quad (3.4.16)$$

обладающих следующим свойством: вектор-решение  $\tilde{q}^{(j)}$  принадлежит (по крайней мере) классу  $C^1$  по  $t$ ,  $T_j$ -периодично по  $\varphi_j$  и принадлежит классу  $C^k$  по  $\varphi$ . Множество  $\tilde{q}^{(j)}(t, \varphi_\tau)$  всюду плотно в множестве  $\tilde{q}^{(j)}(t, \varphi)$ . В (3.4.15) и в (3.4.16) обобщенные характеристические показатели (при  $t \rightarrow +\infty$ ) векторов  $\tilde{q}^{(j)}$  равны  $\lambda_j$ .

### 3.5. Построение треугольной матрицы $C$ и доказательство

**квазипериодичности ее элементов по  $\tau$ ,  
а также их периодичности по  $\varphi_j$   
и принадлежности классу  $C^k$  по  $\varphi$   
(для матрицы  $m \times m$  все  $\lambda$  различны)**

До сих пор мы рассматривали частный случай, когда матрица  $2 \times 2$ . Обратимся теперь к общему случаю, когда  $M$  — матрица  $m \times m$ , по-прежнему предполагая, что все характеристические по-

казатели различны:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m. \quad (3.5.1)$$

Требуется построить линейные комбинации векторов  $\mathbf{q}^{(i)}(t, \Phi_0 - \tau)$  вида

$$\hat{\mathbf{q}}^{(l)}(t, \Phi_0 - \tau, \tau) = \sum_j \alpha_j^{(l)}(\tau) \mathbf{q}^{(j)}(t, \Phi_0 - \tau), \quad l = 1, \dots, m, \quad (3.5.2)$$

такие, что лишь одна из них имеет обобщенный характеристический показатель  $\lambda_1$ , а  $m-1$  остальных линейных комбинаций имеют самое большее обобщенный характеристический показатель  $\lambda_2$ .

Кроме того, докажем, что в качестве  $\alpha_j^{(l)}$  можно выбрать квазипериодическую функцию от  $\tau$ , или, точнее, что  $\alpha_j^{(l)}(\tau)$  можно вложить в множество функций  $\alpha_j^{(l)}(\Phi)$ ,  $T_j$ -периодических по  $\Phi_j$  и принадлежащих классу  $C^k$  по  $\Phi$ . Для простоты условимся в дальнейшем отбрасывать индекс  $l$ . Введем нормирующий множитель

$$\mathcal{N}(t, \Phi_0 - \tau) = \left[ \sum_{j=1}^m |\mathbf{q}^{(j)}(t, \Phi_0 - \tau)|^2 \right]^{-1/2} \quad (3.5.3)$$

и образуем векторы

$$\chi^{(j)}(t, \Phi_0 - \tau) = \mathcal{N}(t, \Phi_0 - \tau) \mathbf{q}^{(j)}(t, \Phi_0 - \tau). \quad (3.5.4)$$

Используя соотношения (3.1.11), (3.2.32), (3.2.33), мы можем заменить правую часть в (3.5.4) выражением

$$\sum_k \mathcal{N}(t, \Phi_0 - \tau) D_{jk}(\tau) \exp [z_k(t + \tau) - z_k(\tau)] \mathbf{u}^k(t + \tau). \quad (3.5.5)$$

Обратимся вновь к последовательности  $t_n \rightarrow \infty$ , заданной соотношением (3.4.10). Обозначим такую последовательность  $\text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty}$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} [\chi^{(j)}(t, \Phi_0 - \tau)] = \text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{D_{j1}(\tau) \mathbf{u}^{(1)}(t + \tau)}{\left[ \sum_{j=1}^m |D_{j1}(\tau)|^2 \right]^{1/2}} \right\}, \quad (3.5.6)$$

которое можно представить также в виде

$$\xi^{(j)} = \frac{D_{j1}(\tau)}{\left[ \sum_{j=1}^m |D_{j1}(\tau)|^2 \right]^{1/2}} \text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{ \mathbf{u}^{(1)}(t + \tau) \}. \quad (3.5.7)$$

Если коэффициенты  $\alpha_j(\tau)$  линейной комбинации (3.5.2) удовлетворяют уравнению

$$\sum_j \alpha_j \xi^{(j)} = 0, \quad (3.5.8)$$

где все векторы  $\xi^{(j)}$ , как следует из (3.5.7), параллельны, то мы можем определить  $m-1$  линейно независимых векторов-решений

$$\alpha^{(l)} = (\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)}, \dots, \alpha_m^{(l)}), \quad l = 2, \dots, m \quad (3.5.9)$$

(каждый из которых удовлетворяет уравнению (3.5.8)).

Если в линейные комбинации (3.5.2) входят  $\alpha$  из (3.5.9), то вектор  $q^{(l)}$  в (3.5.2) имеет обобщенный характеристический показатель, заведомо не превышающий  $\lambda_2$ . Выбирая  $\sum_j \alpha_j \xi^{(j)} \neq 0$  в качестве любой отличной от нуля компоненты вектора  $\xi^{(j)}$ , мы можем построить  $\hat{q}^{(l)}$  с обобщенным характеристическим показателем  $\lambda_1$ .

Покажем теперь, что в качестве  $\alpha_j(\tau)$  можно выбрать квазипериодическую функцию параметра  $\tau$  или что  $\alpha_j(\tau)$  можно даже вложить в  $\alpha_j(\varphi)$ . Заметим, что по построению (см. (3.5.6)) вектор-функции  $\xi^{(j)}$  квазипериодичны по  $\tau$  и могут быть вложены в множество вектор-функций  $\xi^{(j)}(\varphi)$ ,  $T_j$ -периодических по  $\varphi_j$  и принадлежащих классу  $C^k$  по  $\varphi$ . В предположении (5) теоремы 3.1.1  $\text{Lim Sup}$  сходится равномерно по  $\tau$  к правой части (3.5.7), что делает взаимозаменяемыми операции  $\text{Lim Sup}$  и вложение всюду плотным образом  $\xi^{(j)}(\tau)$  в  $\xi^{(j)}(\varphi)$ . Линейная алгебра позволяет построить вектор  $\alpha^{(l)}$  так, чтобы он обладал такими же свойствами дифференцируемости и периодичности, как и коэффициенты  $\xi^{(j)}$ .

Поскольку подробное изложение этого построения увело бы нас слишком далеко в сторону от нашей основной линии, мы ограничимся лишь тем, что укажем, как наглядно представить себе все производимые операции. Рассмотрим одну компоненту векторного уравнения (3.5.8) (в котором (см. (3.5.7)) все векторы  $\xi^{(j)}$  параллельны). Образует вектор  $\hat{\xi} = (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(m)})$ , где индекс  $k$  выбран таким образом, чтобы  $\hat{\xi} \neq 0$  (такой выбор всегда возможен). Тогда соответствующую компоненту векторного уравнения (3.5.8) можно представить в виде

$$\alpha \hat{\xi} = 0, \quad (3.5.10)$$

т. е. как скалярное произведение вектора  $\hat{\xi}$  и вектора  $\alpha$ , или  $\alpha^{(l)}$ , определяемого равенством (3.5.9). Иначе говоря, мы хотим найти  $m-1$  векторов  $\alpha^{(l)}$ ,  $l = 2, \dots, m$ , линейная оболочка которых образует линейное векторное пространство, ортогональное вектору  $\hat{\xi}$ . Непрерывно («плавно») изменяя направление вектора  $\hat{\xi}$ , мы можем непрерывно изменять векторы из пространства, ортогонального вектору  $\hat{\xi}$ . (Непрерывное (оно же плавное, или гладкое)

преобразование, изменяющее направление вектора  $\xi$ , можно заменить преобразованием класса  $C^k$ .) Простой пример алгебраической конструкции приводится ниже.

Из педагогических соображений необходимо добавить одно замечание: представляется весьма соблазнительным разделить (3.5.8) на общий «множитель»  $\text{Lim Sup} \{u^{(1)}(t_n + \tau)\}$ . Однако наша попытка осуществить такое намерение наталкивается на препятствие: не доказано, что  $D_{j_1}(\tau)$  и множитель  $\text{Lim Sup}$  в отдельности обладают требуемыми свойствами дифференцируемости по  $\tau$  (или  $\varphi$ ). Итак, делить уравнение (3.5.8), в которое через  $\xi^{(j)}$  входит (3.5.7), на  $\text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{u^{(1)}(t_n + \tau)\}$  не следует. Если требуется исключить  $u^{(1)}$ , то можно составить величины

$$\underbrace{\text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{\chi^{(j)}(t, \varphi_0 - \tau) \chi^{(k)*}(t, \varphi_0 - \tau)\}}_{C^k \text{ по } \varphi} = \eta_{jk}(\tau), \quad (3.5.11)$$

где  $\eta_{jk}(\tau) \in C^k$  по  $\tau$ , если  $M \in C^k$  по  $\varphi$ . Если множество  $\varphi_0 - \tau$  всюду плотно на торе, то (3.5.11) можно вложить в множество функций, принадлежащих классу  $C^k$  по  $\varphi$  и  $T_j$ -периодических по  $\varphi_j$ . Тогда, вычисляя (3.5.11) по аналогии с (3.5.6), мы получаем

$$\frac{D_{j_1}(\tau)}{\left(\sum_{j=1}^m |D_{j_1}(\tau)|^2\right)} \underbrace{D_{k_1}^*(\tau) |u^{(1)}(t + \tau) u^{(1)*}(t + \tau)|}_{=1}. \quad (3.5.12)$$

Векторы  $u^{(1)}$  выпадают. Нам нужно построить новые линейные комбинации (3.5.2) с характеристическим показателем, не превышающим  $\lambda_2$ . Потребуем для этого, чтобы при  $k = 1, \dots, m$

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j(\tau) \eta_{jk}(\tau) = 0. \quad (3.5.13)$$

Введем векторы

$$\eta_k = (\eta_{1k}, \eta_{2k}, \dots, \eta_{mk}) \quad (k = 1, \dots, m). \quad (3.5.14)$$

Из (3.5.11) видно, что в пределе при  $t \rightarrow \infty$  все эти векторы параллельны.

Кроме того, введем (3.5.9), чтобы (3.5.13) можно было представить в виде

$$\alpha \eta_k = 0. \quad (3.5.15)$$

Так как все векторы  $\eta_k$  параллельны, условию ортогональности (3.5.15) могут удовлетворять  $m-1$  различных (линейно независимых) векторов  $\alpha$ . Выбирая их, мы получаем  $m-1$  новых решений (3.5.2), или, в более общем плане, можем осуществить вложение

$$\tilde{q}^{(j)}(t, \varphi) = \sum \alpha_j^{(l)} q^{(j)}(t, \varphi). \quad (3.5.16)$$

Хотя при некоторых или даже всех  $\tau$  часть векторов  $\eta_k$  могут обращаться в нуль, в силу принятых нами допущений по крайней мере один вектор  $\eta_k$  должен быть отличен от нуля.

Как уже упоминалось, векторы  $\alpha$  из (3.5.15) всегда можно выбрать так, чтобы они обладали такими же свойствами дифференцируемости по параметрам, как и векторы  $\eta_k$ . Проиллюстрируем это утверждение на простом примере при четном  $m$ . Пусть

$$\alpha_j = \prod_{l:j} \eta_{lk} (-1)^j. \quad (3.5.17)$$

Как нетрудно убедиться прямой подстановкой, вектор  $\alpha$  с такими компонентами удовлетворяет условию ортогональности (3.5.15) и обладает такими же свойствами дифференцируемости, как  $\eta_k$ . Если один из векторов  $\eta_k$  обращается в нуль, то, умножая  $\alpha_j$  на определенный множитель, мы можем перейти к другому вектору  $\eta_k$ .

**Краткие выводы.** Мы показали, как построить новые решения  $\hat{q}$  исходного уравнения (3.1.5), обладающие следующими свойствами. Одно из решений имеет обобщенный характеристический показатель  $\lambda_1$ , все остальные  $m-1$  решений имеют обобщенный характеристический показатель  $\lambda_2$  или еще меньше. Прделав аналогичную процедуру с оставшимися  $m-1$  решениями, мы можем выделить одно решение с обобщенным характеристическим показателем  $\lambda_2$  и  $m-2$  решениями с обобщенным характеристическим показателем, не превышающим  $\lambda_3$ . Продолжая отщеплять по одному решению, мы в конце концов придем к треугольной матрице  $C$  (более строго это утверждение будет доказано в разд. 3.7).

Так как исходные вектор-решения  $q^{(i)}$  принадлежат классу  $C^k$  по  $\varphi$  и  $T_j$ -периодичны по  $\varphi_j$ , а коэффициенты  $\alpha$  можно построить так, чтобы и они разделяли эти свойства, полученные нами новые решения принадлежат классу  $C^k$  по  $\varphi$  и  $T_j$ -периодичны по  $\varphi$ .

## 3.6. Приближенные методы. Сглаживание

Сделаем два замечания относительно возможных приближенных методов.

### 3.6.1. Вариационный метод

Вместо условия ортогональности (3.5.15) мы можем потребовать также, чтобы

$$\sum_{k=1}^m |\alpha \eta_k|^2 = 0. \quad (3.6.1)$$

Если в схеме аппроксимации предельный переход  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Sup}$

осуществляется не полностью, а лишь до  $t = t_n$ , то

$$\eta_{jk}(\tau) \rightarrow \eta_{jk}(\tau, t_{n_0}), \quad (3.6.2)$$

и мы не можем удовлетворять условию (3.6.1) точно, поскольку векторы (3.6.2) не строго параллельны. Однако вполне допустимо потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{k=1}^m |\alpha \eta_k|^2 = \text{Минимум!} \quad |\alpha|^2 = \text{Заданное значение.} \quad (3.6.3)$$

Задаваемый ограничениями (3.6.3) вариационный принцип приводит к системе уравнений на собственные значения

$$\sum_{k=1}^m \eta_{jk}^*(\alpha \eta_k) = \lambda \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.6.4)$$

линейных по  $\lambda$ . Умножая (3.6.4) на  $\alpha_j^*$  и суммируя по  $j$ , получаем

$$\sum_{k=1}^m (\alpha^* \eta_k^*) (\alpha \eta_k) = \lambda |\alpha|^2. \quad (3.6.5)$$

Таким образом, собственные значения  $\lambda$  могут служить своего рода мерой отклонения от точного уравнения (3.6.1).

### 3.6.2. Сглаживание

Так как векторы  $\xi_k$ , или, что эквивалентно,  $\eta_k$  (при фиксированном  $k$ ), в (3.5.15) могут иногда обращаться в нуль при некоторых  $\tau$ , возникает необходимость перехода к другому соотношению ортогональности, записанному для другого вектора  $\eta_j$  (или  $\xi_j$ ). Если в  $\text{Lim Sup}$  мы не выполним предельный переход  $t_n \rightarrow \infty$ , то старый и новый векторы  $\eta$  могут не вполне совпадать. Это в свою очередь означает, что при тех  $\tau$ , в которых мы вынуждены совершать переход от одного вектора  $\eta$  к другому, вектор  $\alpha$  перестает быть непрерывным и дифференцируемым. Покажем, что разрыв в точке перехода легко можно сгладить. Введем для этого новый вектор

$$\hat{\eta}_k = [1 - \beta(\tau)] \eta_k + \beta(\tau) \eta_j(\tau), \quad (3.6.6)$$

где  $\beta(\tau)$  — функция, график которой качественно представлен на рис. 3.6.1, и заменим (3.5.15) условием ортогональности

$$\alpha \hat{\eta}_k = 0. \quad (3.6.7)$$

Так как решения линейно независимы, все векторы  $\eta_j$  не могут обращаться в нуль при одном и том же значении  $\tau$ , поэтому существует индекс  $j$ , при котором (3.6.6) не обращается в нуль там, где обращается в нуль  $\eta_k$ . Определим переменную  $x$  как отношение

$$x = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}, \quad (3.6.8)$$

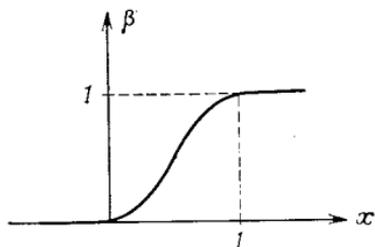
тогда при  $\tau = \tau_0$

$$x = 0, \quad (3.6.9)$$

а при  $\tau = \tau_1$

$$x = 1. \quad (3.6.10)$$

Выберем  $\tau_0$  и  $\tau_1$  так, чтобы вектор  $\eta_k$  перешел в  $\eta_j$  до того, как  $\eta_k$  обратится в нуль. С другой стороны, выберем  $\tau_0$  и  $\tau_1$  так, чтобы модуль вектора  $|\eta_k|$  был меньше  $|\eta_j|$  и правая часть (3.6.6) не могла обратиться в нуль из-за взаимной компенсации векторов  $\eta$ . Определим сглаживающую функцию  $\beta$  следующим образом:



$$\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq 0, \\ h(x) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq x < \infty. \end{cases} \quad (3.6.11)$$

Рис. 3.6.1. Сглаживающая функция  $\beta(x)$ .

Кроме того, «сплайн-функция» (3.6.6) должна быть достаточное число раз непрерывно дифференцируемой по  $\tau$ .

Потребуем для этого, чтобы при заданном  $n$

$$\beta^{(m)} = 0, \quad 1 \leq m \leq n-1, \quad (3.6.12)$$

при  $x=0$  и  $x=1$ .

Здесь и далее верхний индекс ( $m$ ) означает  $m$ -ю производную.

Так как точки  $\tau$ , в которых нам приходится производить сглаживание, обладают такими же свойствами квазипериодичности, как векторы  $\eta_k$ ,  $\eta_j$ , вновь построенные функции  $\beta$  также обладают этими свойствами. По построению сглаживающие функции  $\beta$  остаются в классе  $C^k$  и квазипериодическими и при  $t \rightarrow \infty$ .

Следующие краткие соображения показывают, как явно построить функцию  $\beta$ , задаваемую соотношениями (3.6.11), (3.6.12), но для дальнейшего наш экскурс не имеет особого значения. Итак, чтобы удовлетворить условию (3.6.12), положим

$$h(x) = x^n f(x), \quad (3.6.13)$$

где  $f$  — многочлен степени  $n$ :

$$f(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l. \quad (3.6.14)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$a_0 = 1. \quad (3.6.15)$$

Чтобы определить функцию  $f$ , введем переменную

$$x = 1 + \xi \quad (3.6.16)$$

и положим

$$f(1 + \xi) = g(\xi), \quad (3.6.17)$$

где  $g$  — снова многочлен, который можно представить в виде

$$g(\xi) = \sum_{l=0}^n b_l \xi^l. \quad (3.6.18)$$

Выберем теперь коэффициенты  $a$  или  $b$  так, чтобы

$$h(1) = 1 \quad (3.6.19)$$

и

$$h^{(m)}(1) = 0, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad (3.6.20)$$

где верхний индекс  $(m)$  в (3.6.20) означает  $m$ -ю производную по  $x$ .

Из (3.6.19) получаем, что

$$g(0) = 1 \quad (3.6.21)$$

и

$$b_0 = 1, \quad (3.6.22)$$

а из (3.6.20) при  $m = 1$

$$ng(0) + g'(0) = 0 \quad (3.6.23)$$

и

$$b_1 = -n. \quad (3.6.24)$$

Соотношение (3.6.20) позволяет последовательно определить все коэффициенты  $b_l$ . Таким образом, многочлен, обладающий требуемыми свойствами, действительно можно найти. Нам остается убедиться в том, что построенное решение (3.6.13) всюду на интервале  $[0, 1]$  имеет положительную производную, т. е. что функция  $h(x)$  монотонно, без «извигов» возрастает. Так как  $h$  — многочлен степени  $2n$ , он может иметь не более  $2n-1$  различных экстремумов, которые являются нулями его первой производной  $h^{(1)}$ . По построению  $n-1$  экстремумов совпадают с точкой  $x = 0$ , а  $n-1$  других экстремумов совпадают с точкой  $x = 1$ . Следовательно, остается не более одного экстремума. Нетрудно показать, что при малом

$$h'(0 + \varepsilon) > 0 \quad (3.6.25)$$

и

$$h'(1 - \varepsilon) > 0. \quad (3.6.26)$$

Из неравенств (3.6.25) и (3.6.26) следует, что извилистая (немонотонная) кривая должна иметь внутри отрезка  $[0, 1]$  по крайней мере два экстремума (рис. 3.6.2), что противоречит нашим результатам, предсказывающим существование самое большее одного дополнительного экстремума внутри интервала  $[0, 1]$ . Следова-

тельно, случай, представленный на рис. 3.6.2, не реализуется, и кривая (3.6.13) может иметь только такой вид, как показано на рис. 3.6.1. На этом наш небольшой экскурс завершается.

До сих пор мы обсуждали, каким образом можно преодолеть разрывы, возникающие в тех случаях, когда  $\eta_k$  обращается в нуль как функция  $\tau$ . Покажем, что аналогичная процедура остается в силе и в том случае, если вектор  $\eta_k$  через вложение рассматривать как функцию от  $\varphi$ . Рассмотрим сдвиг  $\varphi \leftrightarrow \varphi_0 - \tau$ , при котором  $D_{k1}^*(\tau) \neq 0$  (индекс  $k$  фиксирован). Так как  $q^{(j)}(t, \varphi) \in C^k$  ( $k \geq 0$ ),

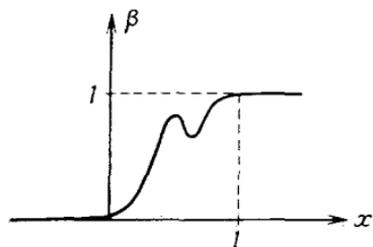


Рис. 3.6.2. Вопреки принятому нами предположению функция  $\beta(x)$  имеет два экстремума.

существует целая окрестность  $S(\varphi)$  вектора  $\varphi$ , каждая точка которой допускает аппроксимацию последовательностями  $\varphi - \tau_n \pmod{\mathbf{T}}$ ,  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ ,  $T_j = 2\pi/\omega_j$  и в которой, кроме того (при фиксированном индексе  $k$ ), выполняется неравенство  $D_{k1}^*(\tau_n) \neq 0$ . Таким образом, весь тор оказывается покрытым перекрывающимися областями («картами») с отличными от нуля  $D_{j1}^*(\tau)$ . В каждой из этих областей существует по крайней мере один отличный от нуля вектор  $\eta_k$ . Нам остается лишь сгладить переходы при переходе от одной области к другой, соседней.

Размеры областей, задаваемые  $D_{j1}^*(\tau) \neq 0$ , не зависят от  $t$  и, следовательно, фиксированы, в то время как рассогласование векторов  $\eta_k$  по направлению стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  сглаживающая функция остается достаточное число раз дифференцируемой.

### 3.7. Треугольная матрица $C$ и приведение ее к блочно-диагональному виду

Так как  $Q(t, \varphi)$  (или  $\tilde{Q}(t, \varphi)$  из (3.5.16)) — решения уравнения (3.1.5), мы можем воспользоваться общим соотношением (3.1.10). Записывая его в явном виде для вектор-решений, получаем ( $G = C^T$ )

$$\tilde{q}^{(j)}(t + \tau, \varphi + \tau) = \sum_k G_{jk}(\tau, \varphi) \tilde{q}^{(k)}(t, \varphi), \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.7.1)$$

где обобщенные характеристические показатели  $\lambda_j$ , соответствующие  $\tilde{q}^{(j)}$ , упорядочены так, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots > \lambda_m. \quad (3.7.2)$$

Так как матрица решений не вырождена, из свойств  $\tilde{Q}(t, \varphi)$ , о ко-

торых шла речь в разд. 3.5, можно вывести следующие свойства матричных элементов  $G_{jk}$ .

Если выполняются предположения (1) — (5) теоремы 3.1.1, то элементы  $G_{jk}(t, \varphi)$  дифференцируемы по  $\tau$ ,  $T_j$ -периодичны по  $\varphi_j$  и принадлежат классу  $C^k$  по  $\varphi$ . При более слабых предположениях (1) — (4) теоремы 3.1.1 матричные элементы имеют вид  $G_{jk}(\tau, \varphi_0 - \tau)$ , принадлежат (по крайней мере) классу  $C^1$  по  $\tau$ , классу  $C^0$  по аргументу  $\varphi_\tau (= \varphi_0 - \tau)$  и квазипериодичны по  $\tau$ . Асимптотическое поведение левой части (3.7.1) должно быть таким же, как поведение правой части (3.7.1) при  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что

$$G_{jk} = 0 \text{ при } k < j. \quad (3.7.3)$$

Доказательство этого утверждения проводится по аналогии с приведенным выше и основано на исследовании асимптотического поведения вектора  $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Докажем теперь, что векторы  $\tilde{\mathbf{q}}$  допускают такое преобразование, при котором матрица  $G_{jk}$  приводится к диагональному виду. Для этого нам необходимо знать асимптотическое поведение вектора  $\tilde{\mathbf{q}}$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Чтобы получить необходимую информацию, будем постепенно решать уравнения (3.7.1), начав с уравнения при  $j = m$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t + \tau, \varphi + \tau) = G_{mm}(\tau, \varphi) \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.4)$$

Предположим, что  $\tau$  — бесконечно малая величина. Так как матричный элемент  $G_{mm}$  дифференцируем по  $\tau$  и при  $\tau = 0$  векторы  $\mathbf{q}$  в правой и левой частях (3.7.4) совпадают, мы можем записать

$$G_{mm}(\tau, \varphi) = 1 + a_m(\varphi)\tau. \quad (3.7.5)$$

Подставляя  $t + \tau$  вместо  $t$  и  $\varphi + \tau$  вместо  $\varphi$ , получаем вместо (3.7.4)

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t + 2\tau, \varphi + 2\tau) = G_{mm}(t, \varphi + \tau) \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t + \tau, \varphi + \tau). \quad (3.7.6)$$

Подставляя вместо  $\tilde{\mathbf{q}}$  в правую часть соотношения (3.7.6) правую часть равенства (3.7.4), преобразуем (3.7.6) к виду

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t + 2\tau, \varphi + 2\tau) = G_{mm}(\tau, \varphi + \tau) G_{mm}(t, \varphi) \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.7)$$

Повторяя эту процедуру  $N$  раз, приходим к соотношению

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t + \underbrace{N\tau}_{t_1}, \varphi + \underbrace{N\tau}_{\varphi_0}) = \prod_{l=1}^N G_{mm}(t, \varphi + (l-1)\tau) \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.8)$$

Используя разложение (3.7.5) и то, что  $\tau$  — бесконечно малая величина, произведение по  $l$  можно заменить экспоненциальной функцией:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t + t_0, \varphi + \varphi_0) = \exp \left\{ \sum_{l=1}^N \tau a(\varphi + (l-1)\tau) \right\} \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.9)$$

Переходя, наконец, к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , заменим сумму в (3.7.9) интегралом

$$\tilde{q}^{(m)}(t+t_0, \varphi+t_0) = \exp \left[ \int_0^{t_0} d\sigma a_m(\varphi+\sigma) \right] \tilde{q}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.10)$$

Произведем теперь сдвиг

$$t=0, \quad t_0 \rightarrow t, \quad \varphi \rightarrow \varphi-t, \quad (3.7.11)$$

который после замены переменных в интеграле позволит нам записать (3.7.10) в виде

$$\tilde{q}^{(m)}(t, \varphi) = \exp \left[ \int_0^t d\sigma a_m(\varphi-\sigma) \right] \tilde{q}^{(m)}(0, \varphi-t). \quad (3.7.12)$$

Уравнение (3.7.12) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно  $\tilde{q}^{(m)}$ . Чтобы решить его, положим

$$\tilde{q}^{(m)}(t, \varphi) = \exp \left[ \int_0^t d\sigma a_m(\varphi-\sigma) \right] \mathbf{w}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.13)$$

Подставляя (3.7.13) в (3.7.12), получаем соотношение

$$\mathbf{w}^{(m)}(t, \varphi) = \mathbf{w}^{(m)}(0, \varphi-t). \quad (3.7.14)$$

Так как (3.7.13) принадлежит классу  $C^k$  по  $\varphi_j$  и  $T_j$ -периодично по  $\varphi_j$ , мы заключаем, что

$$\mathbf{w}^{(m)}(t, \varphi) \text{ — квазипериодическая функция по } t. \quad (3.7.15)$$

Итак, явное решение уравнения (3.7.12) имеет вид

$$\tilde{q}^{(m)}(t, \varphi) = \exp \left[ \int_0^t d\sigma a_m(\varphi-\sigma) \right] \mathbf{w}^{(m)}(0, \varphi-t). \quad (3.7.16)$$

Заметим, что  $a_m$  в (3.7.16) — квазипериодическая функция от  $\sigma$ .

Обратимся теперь к решению следующего уравнения относительно  $\tilde{q}^{(m-1)}$ . Поясним общую идею на примере  $m=2$ . В двумерном случае (3.7.1) имеет вид

$$\tilde{q}^{(1)}(t+\tau, \varphi+\tau) = G_{11}(\tau, \varphi) \tilde{q}^{(1)}(t, \varphi) + G_{12}(\tau, \varphi) \tilde{q}^{(2)}(t, \varphi), \quad (3.7.17)$$

$$\tilde{q}^{(2)}(t+\tau, \varphi+\tau) = G_{22}(\tau, \varphi) \tilde{q}^{(2)}(t, \varphi). \quad (3.7.18)$$

Покажем, что можно построить новое решение исходного уравнения (3.1.5) с вектор-решением  $\hat{q}^{(1)}$ , при котором матрица уравнений (3.7.17) и (3.7.18) будет диагональной. Заметим, что любая линейная комбинация векторов  $\tilde{q}^{(1)}$  и  $\tilde{q}^{(2)}$  есть снова решение уравнения (3.1.5), если коэффициенты не зависят от времени. Положим поэтому

$$\tilde{q}^{(1)}(t, \varphi) = \hat{q}^{(1)}(t, \varphi) + h(\varphi) \tilde{q}^{(2)}(t, \varphi). \quad (3.7.19)$$

Подставляя (3.7.19) в (3.7.17), получаем

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{q}}^{(1)}(t + \tau, \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\tau}) + h(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\tau}) \tilde{\mathbf{q}}^{(2)}(t + \tau, \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\tau}) = \\ & = \underbrace{G_{11}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{q}}^{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi})}_{\text{подчеркнутое}} + G_{11}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) h(\boldsymbol{\varphi}) \tilde{\mathbf{q}}^{(2)}(t, \boldsymbol{\varphi}) + G_{12}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) \tilde{\mathbf{q}}^{(2)}(t, \boldsymbol{\varphi}). \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

Так как подчеркнутые выражения те самые, которые мы хотим сохранить в окончательном результате, потребуем, чтобы остальная часть обратилась в нуль. Используя (3.7.18), приходим к уравнению

$$h(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\tau}) G_{22}(t, \boldsymbol{\varphi}) = G_{11}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) h(\boldsymbol{\varphi}) + G_{12}(\tau, \boldsymbol{\varphi}). \quad (3.7.21)$$

Покажем, что этому уравнению действительно можно удовлетворить, что отнюдь не очевидно заранее, так как  $G_{jk}$  — функции от  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$ , в то время как  $h$  зависит только от  $\boldsymbol{\varphi}$ . Как будет показано структура матричных элементов  $G$  позволяет выбрать  $h$  функцией только от  $\boldsymbol{\varphi}$ .

Имея в виду эту задачу, обратимся к соответствующему преобразованию уравнений (3.7.1). Начнем со второго уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(m-1)}(t + \tau, \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\tau}) &= G_{m-1, m-1}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) \tilde{\mathbf{q}}^{(m-1)}(t, \boldsymbol{\varphi}) + \\ &+ G_{m-1, m}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) \tilde{\mathbf{q}}_1^{(m)}(t, \boldsymbol{\varphi}). \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

Это уравнение рассматривается в пределе при  $\tau \rightarrow 0$ . При  $\tau = 0$  диагональный элемент обращается в единицу:  $G_{m-1, m-1} = 1$ . Так как  $G_{m-1, m-1}$  дифференцируем по  $\tau$ , при малых  $\tau$  его можно представить в виде

$$G_{m-1, m-1}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) = 1 + a_{m-1}(\boldsymbol{\varphi}) \tau. \quad (3.7.23)$$

Так же как и в случае последнего ( $j = m$ ) уравнения (3.7.1), получаем из (3.7.23) для конечного  $\tau$

$$G_{m-1, m-1}(\tau, \boldsymbol{\varphi}) = \exp \left[ \int_0^\tau d\sigma a_{m-1}(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\sigma}) \right]. \quad (3.7.24)$$

Чтобы решить неоднородное уравнение (3.7.22), положим, как при решении обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m-1)}(t, \boldsymbol{\varphi}) = \exp \left[ \int_0^t d\sigma a_{m-1}(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\sigma}) \right] \mathbf{g}^{(m-1)}(t, \boldsymbol{\varphi}), \quad (3.7.25)$$

где вектор-функция  $\mathbf{g}^{(m-1)}$  пока не известна. Подставляя (3.7.25) в (3.7.22), получаем

$$\exp \left[ \int_0^{t+\tau} d\sigma a_{m-1}(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \right] \mathbf{g}^{(m-1)}(t + \tau, \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\tau}) =$$

$$= \exp \left[ \int_0^{\tau} d\sigma a_{m-1}(\varphi + \sigma) \right] \exp \left[ \int_0^{\tau} d\sigma a_{m-1}(\varphi - \sigma) \right] \times \\ \times \mathbf{g}^{(m-1)}(t, \varphi) + G_{m-1, m}(\tau, \varphi) \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.26)$$

Разделив уравнение (3.7.26) на экспоненту, стоящую в его левой части, мы приходим к уравнению

$$\mathbf{g}^{(m-1)}(t + \tau, \varphi + \tau) = \mathbf{g}^{(m-1)}(t, \varphi) + \mathbf{f}(t, \tau, \varphi), \quad (3.7.27)$$

где мы для краткости обозначили

$$\mathbf{f}(t, \tau, \varphi) = G_{m-1, m}(\tau, \varphi) \times \\ \times \exp \left[ - \int_0^{\tau} d\sigma a_{m-1}(\varphi + \tau - \sigma) \right] \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.28)$$

Чтобы определить вид матричного элемента  $G_{m-1, m}$  при конечных  $\tau$ , начнем с бесконечно малых  $\tau$ , так как матрица  $G$  дифференцируема по  $\tau$  и элемент  $G_{m-1, m}$  должен обращаться в нуль при  $\tau = 0$ . Из (3.7.22) следует, что при  $\tau \rightarrow 0$

$$G_{m-1, m} = \tau b(\varphi). \quad (3.7.29)$$

Чтобы избавиться от индексов, введем временно обозначение

$$\mathbf{g}^{(m-1)}(t, \varphi) = \mathbf{y}(t, \varphi) \quad (3.7.30)$$

и рассмотрим (3.7.27) при  $\tau$ , образующих последовательность  $\tau, 2\tau, \dots$ . Запишем возникающую последовательность уравнений:

$$\mathbf{y}(t + \tau, \varphi + \tau) - \mathbf{y}(t, \varphi) = \mathbf{f}(t, \tau, \varphi), \quad (3.7.31)$$

$$\mathbf{y}(t + 2\tau, \varphi + 2\tau) - \mathbf{y}(t + \tau, \varphi + \tau) = \mathbf{f}(t + \tau, \tau, \varphi + \tau), \quad (3.7.32)$$

$$\mathbf{y}(t + N\tau, \varphi + N\tau) - \mathbf{y}(t + (N-1)\tau, \varphi + (N-1)\tau) = \\ = \mathbf{f}(t + (N-1)\tau, \tau, \varphi + (N-1)\tau). \quad (3.7.33)$$

Суммируя эти уравнения, получаем

$$\mathbf{y}(t + \underbrace{N\tau}_{t_0}, \varphi + \underbrace{N\tau}_{\varphi_0}) = \mathbf{y}(t, \varphi) + \sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{f}(t + l\tau, \tau, \varphi + l\tau), \quad (3.7.34)$$

или, переходя к бесконечно малым  $\tau$ ,

$$\mathbf{y}(t + t_0, \varphi + \varphi_0) = \mathbf{y}(t, \varphi) + \int_0^{t_0} ds \mathbf{f}(t + s, \tau, \varphi + s). \quad (3.7.35)$$

Используя определение (3.7.28) вектор-функции  $\mathbf{f}$  и переходя снова к  $\mathbf{g}^{(m-1)}$  (с помощью (3.7.30)), преобразуем (3.7.35) к виду

$$\mathbf{g}^{(m-1)}(t + t_0, \varphi + \varphi_0) = \mathbf{g}^{(m-1)}(t, \varphi) + \mathbf{K}(t, t_0, \varphi), \quad (3.7.36)$$

где

$$K(t, t_0, \varphi) = \int_0^{t_0} dsb(\varphi + s) \exp \left[ - \int_0^{t+s} d\sigma a_{m-1}(\varphi + s - \sigma) + \int_{-s}^0 a_m(\varphi - \sigma) d\sigma \right] \tilde{q}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.37)$$

При подходящем выборе начальных условий решение уравнения (3.7.36) примет вид

$$g^{(m-1)}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^0 dsb(\varphi + s) \exp \left[ - \int_{-s}^t d\sigma a_{m-1}(\varphi - \sigma) + \int_{-s}^0 a_m(\varphi - \sigma) d\sigma \right] \cdot \tilde{q}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.38)$$

Подставляя (3.7.38) в (3.7.36) и производя несложные сдвиги переменных интегрирования  $s$  и  $\sigma$  в левой части (3.7.36), нетрудно убедиться в том, что (3.7.38) действительно удовлетворяет уравнению (3.7.36). Решение (3.7.38) можно представить в более удобном виде:

$$g^{(m-1)}(t, \varphi) = \exp \left[ - \int_0^t a_{m-1}(\varphi - \sigma) d\sigma \right] J \tilde{q}^{(m)}(t, \varphi), \quad (3.7.39)$$

где

$$J = \int_{-\infty}^0 dsb(\varphi + s) \exp \left\{ - \int_0^s [a_{m-1}(\varphi + \sigma) - a_m(\varphi + \sigma)] d\sigma \right\}. \quad (3.7.40)$$

Свойства интеграла  $J$  удобнее изучать, если произвести разложение

$$a_j(\varphi - \sigma) = \hat{\lambda}_j + \hat{a}_j(\varphi - \sigma). \quad (3.7.41)$$

Из (3.7.23) и доказанных нами свойств матрицы  $G(\tau, \varphi)$  следует, что  $\hat{a}_{m-1}(\varphi)$  —  $T_j$ -периодическая функция по  $\varphi_j$  и принадлежит классу  $C^k$  по  $\varphi$ . Если, кроме того, мы воспользуемся предположением (6) теоремы 3.1.1, то принадлежность к классу  $C^k$  по  $\varphi$  и условие КАМ гарантируют, что интегралы от  $\hat{a}_j$  в (3.7.38) останутся конечными при  $\sigma \rightarrow \pm \infty$  и что они квазипериодичны по  $s$ . Так как вектор  $\mathbf{b}$  также квазипериодичен, а квазипериодические функции ограничены и

$$\hat{\lambda}_m - \hat{\lambda}_{m-1} < 0, \quad (3.7.42)$$

мы без особого труда убеждаемся в том, что интеграл  $J$  сходится.

Вспомним, что решение неоднородного уравнения (3.7.22) мы первоначально намеревались искать в виде (3.7.25). Чтобы полу-

чить решение типа (3.7.25), необходимо умножить (3.7.38) на

$$\exp \left[ \int_0^t d\sigma a_{m-1}(\varphi - \sigma) \right]. \quad (3.7.43)$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m-1)}(t, \varphi) = J(\varphi) \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}(t, \varphi). \quad (3.7.44)$$

Нетрудно видеть, что решение (3.7.44) имеет требуемый вид: второй сомножитель в правой части (3.7.19) можно отождествить со вторым сомножителем в правой части (3.7.44), а  $J$  — с  $h$ . Итак, мы действительно можем выбрать  $h(\varphi)$ , или  $J(\varphi)$ , так, чтобы они зависели только от  $\varphi$ , а это позволяет привести матрицу (3.7.22) к диагональному виду.

Рассмотрим теперь подробно вид произведения

$$G_{m-1, m} \tilde{\mathbf{q}}^{(m)}. \quad (3.7.45)$$

Сравнивая (3.7.22) и (3.7.36), мы заключаем, что (3.7.37) (с учетом (3.7.26)) необходимо умножить на

$$\exp \left[ \int_0^{t+\tau} d\sigma a_{m-1}(\varphi + \tau - \sigma) \right]. \quad (3.7.46)$$

После несложных преобразований интегралов получаем

$$\begin{aligned} G_{m-1, m}(\tau, \varphi) &= \exp \left[ \int_0^{\tau} d\sigma a_{m-1}(\varphi + \sigma) \right] \int_0^{\tau} ds b(\varphi + s) \times \\ &\times \exp \left\{ \int_0^s d\sigma [a_m(\varphi + \sigma) - a_{m-1}(\varphi + \sigma)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.7.47)$$

Итак,  $G_{m-1, m}$  — действительно функция от  $\tau$  и  $\varphi$  (но не от  $t$ ), как и должно быть.

Наша процедура допускает очевидное обобщение на систему всех уравнений (3.7.1): полагая

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(i)}(t, \varphi) = \hat{\mathbf{q}}^{(i)}(t, \varphi) + \sum_{k>j} h_k(\varphi) \tilde{\mathbf{q}}^{(k)}(t, \varphi), \quad (3.7.48)$$

мы можем определить коэффициенты  $h_k(\varphi)$ , так, чтобы на вектор-решениях  $\hat{\mathbf{q}}$  матрица  $G$  была диагональной, т. е. можем выбрать векторы (3.7.1) в виде

$$\hat{\mathbf{q}}^{(i)}(t + \tau, \varphi + \tau) = G_{ij}(\tau, \varphi) \hat{\mathbf{q}}^{(j)}(t, \varphi). \quad (3.7.49)$$

Соотношение (3.7.49) можно рассматривать как функциональное уравнение для  $\hat{\mathbf{q}}^{(j)}$ . Такое уравнение нам уже приходилось решать (см. (3.7.16)). Его решение имеет вид

$$\hat{\mathbf{q}}^{(j)}(t, \varphi) = \exp \left[ \int_0^t d\sigma a_j(\varphi - \sigma) \right] \mathbf{w}^{(j)}(0, \varphi + t). \quad (3.7.50)$$

Если предположения (1) — (6) теоремы 3.1.1 выполнены, решение (3.7.50) представимо в виде

$$\hat{\mathbf{q}}^{(j)}(t, \varphi) = \exp(\hat{\lambda}_j t) \mathbf{v}^{(j)}(\varphi + t), \quad (3.7.51)$$

где вектор  $\mathbf{v}^{(j)}$   $T_j$ -периодичен по  $\varphi_j$ , принадлежит классу  $C^k$  по  $\varphi$  и, следовательно, квазипериодичен по  $t$ . Решение (3.7.51) имеет в точности такой вид, как утверждалось (см. (3.1.20)). (Ясно, что  $\text{Re} \{\hat{\lambda}_j\}$  — обобщенный характеристический показатель  $\lambda_j$ .)

### 3.8. Общий случай: некоторые обобщенные характеристические показатели совпадают

В этом разделе мы изложим две теоремы. Первая теорема относится к приведению матрицы  $C$  из (3.1.18) к треугольному виду для случая, когда обобщенные характеристические показатели совпадают. Вторая теорема показывает, что матрицу  $C$  можно привести даже к диагональному виду, если все характеристические показатели совпадают и принято дополнительное предположение о скорости роста  $|\mathbf{q}^{(j)}|$ . Первая из этих теорем формулируется следующим образом.

**Теорема 3.8.1.** В предположениях (1), (2), (4) теоремы 3.1.1 при подходящем выборе вектор-решений  $\mathbf{q}^{(j)}(t, \varphi)$  матрица  $C$  приводится к треугольному виду (см. (3.7.1)):

$$C^T = G = \begin{pmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \square \\ & 0 & & \dots \end{pmatrix}, \quad (3.8.1)$$

где блоки соответствуют обобщенным характеристическим показателям  $\lambda_j$ , которые различны. Каждый блок имеет размеры не более  $m_j \times m_j$ , где  $m_j$  — степень вырождения  $\lambda_j$ . Элементы матрицы  $C(\tau, \varphi)$  дифференцируемы по  $\tau$ ,  $T_j$ -периодичны по  $\varphi_j$  и принадлежат (по крайней мере) классу  $C^0$  по  $\varphi$ . Если помимо предположений (1), (2) и (4) выполняется также предположение (5) теоремы 3.1.1 (при  $\lambda_j \neq \lambda_k$ ), то элементы матрицы  $C(\tau, \varphi)$  принадлежат (по крайней мере) классу  $C^1$  по  $\tau$ ,  $T_j$ -периодичны по  $\varphi_j$  и принадлежат классу  $C^k$  по  $\varphi$ .

Наметим общий ход построения матрицы  $C$ .

Пусть обобщенные характеристические показатели  $\lambda_j$  перенумерованы в такой последовательности, что

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m. \quad (3.8.2)$$

Если

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \geq \lambda_{k+1}, \quad (3.8.3)$$

то по крайней мере вплоть до  $\lambda_k$  мы можем придерживаться нашей предыдущей схемы приведения матрицы  $S$  к стандартному виду.

Перейдем к случаю, когда несколько обобщенных характеристических показателей совпадают. Предположим, что  $\lambda_1$  имеет степень вырождения  $l$ , т. е.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_l. \quad (3.8.4)$$

Как и прежде, будем считать, что все векторы  $\mathbf{q}$  линейно независимы и углы между ними отличны от нуля даже при  $t \rightarrow +\infty$ . Введем нормирующий множитель (см. (3.5.3), (3.5.4))

$$\mathcal{N}^2 = \left[ \sum_j |\mathbf{q}^{(j)}(t, \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\tau})|^2 \right]^{-1/2} \quad (3.8.5)$$

и образуем векторы

$$\boldsymbol{\chi}^{(j)}(t, \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{N} \mathbf{q}^{(j)}(t, \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\tau}). \quad (3.8.6)$$

Определим

$$\text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty}. \quad (3.8.7)$$

Выберем для этого последовательность  $t = t_n$ ,  $t_n \rightarrow \infty$ , такую, чтобы по крайней мере для одного из векторов  $\mathbf{q}^{(j)}$  и некоторого положительного  $\varepsilon$  выполнялось неравенство

$$\frac{1}{t_n} \ln |\mathbf{q}^{(j)}(t_n, \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\tau})| \geq \lambda_1 - \varepsilon > \lambda_{l+1}. \quad (3.8.8)$$

Поскольку излагаемая сейчас процедура представляет собой непосредственное обобщение процедуры, рассмотренной выше для случая невырожденных  $\lambda$ , опишем лишь общий ход ее, не останавливаясь на деталях. Не претендуя на строгость, можно сказать, что при  $t_n > t_{n_c}$  величиной

$$\mathcal{N}^2 \sum_{k=l+1}^m D_{jk} \mathbf{q}^{(k)}(t + \tau, \boldsymbol{\varphi}_0) \exp[-z_k(\tau)] \quad (3.8.9)$$

допустимо пренебречь по сравнению с величиной

$$\mathcal{N}^2 \sum_{k=1}^l D_{jk} \mathbf{q}^{(k)}(t + \tau, \boldsymbol{\varphi}_0) \exp[-z_k(\tau)], \quad (3.8.10)$$

или, точнее,

$$\text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{ \boldsymbol{\chi}^{(j)}(t, \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\tau}) \} = \sum_{k=1}^l D_{jk}(\tau) \text{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{ \mathcal{N}^2(t + \tau) \exp[z_k(t + \tau) - z_k(\tau)] \mathbf{u}^{(k)}(t + \tau) \}. \quad (3.8.11)$$

В  $\text{Lim Sup}$  мы выбираем все последовательности  $t_n$  такими, чтобы по крайней мере один из векторов  $\mathbf{q}^{(j)}$  удовлетворял неравенству

(3.8.8). Заметим, что такие последовательности могут зависеть от  $\tau$ . Образует

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j(\tau) \operatorname{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{ \chi^{(j)}(t, \varphi_0 + \tau) \} \quad (3.8.12)$$

и выберем коэффициенты  $\alpha_j$  так, чтобы выражение (3.8.12) обращалось в нуль.

Используя явный вид векторов  $\chi^{(j)}$  и 3.8.12, получаем

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \alpha_j(\tau) D_{jk}(\tau) \operatorname{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{ \mathcal{N}^2(t + \tau) \exp [z_k(t + \tau) - z_k(\tau)] \times \\ \times \mathbf{u}^{(k)}(t + \tau) \} = 0, \quad (3.8.13)$$

а так как векторы  $\mathbf{u}^{(k)}$  линейно независимы, мы получаем

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j(\tau) D_{jk}(\tau) \operatorname{Lim Sup}_{t \rightarrow \infty} \{ \mathcal{N}^2(t + \tau) \exp [z_k(t + \tau) - z_k(\tau)] \mathbf{u}^{(k)}(t + \tau) \} = 0. \quad (3.8.14)$$

Индекс  $k$  в (3.8.14) принимает значения от 1 до  $l$ .

Итак, мы нашли  $l$  уравнений для  $m$  неизвестных  $\alpha_j$ . В этом проще всего убедиться, если заметить, что уравнениям (3.8.14) можно удовлетворить в том и только в том случае, если

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j(\tau) D_{jk}(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, l. \quad (3.8.15)$$

Из (3.8.15) следует, что  $\alpha_j$  могут быть выбраны независимо от  $t$ . С другой стороны, свойства дифференцируемости элементов матрицы  $D(\tau)$  неизвестны, поэтому предпочтительнее вернуться к (3.8.12) с хорошо известными свойствами дифференцируемости коэффициентов  $\alpha_j(\tau)$ . Существует (по крайней мере)  $m-l$  линейно независимых вектор-решений  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  уравнений (3.8.15).

Для того чтобы условие разрешимости выполнялось даже при конечных  $t_n$ , мы можем взять первые  $l$  строк матрицы (3.8.12), если не все коэффициенты  $\alpha_j$  тождественно равны нулю. В противном случае мы можем выбрать другие  $l$  строк и воспользоваться процедурой, описанной в разд. 3.6.2.

Кроме того, мы можем взять  $l'$  ( $l' \leq l$ ) векторов

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad (3.8.16)$$

таких, что (3.8.12) не обращается в нуль. Рассмотрим случай наименьшей редукции ( $l = l'$ ). Обозначив векторы (3.8.16), для которых величина (3.8.12) остается отличной от нуля, через

$$\alpha^{(k)}, \quad k = 1, \dots, l, \quad (3.8.17)$$

а векторы, для которых (3.8.12) обращается в нуль, — через

$$\alpha^{(k)}, \quad k = l+1, \dots, m, \quad (3.8.18)$$

образуем совершенно новые решения уравнения (3.1.5)

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} = \sum \alpha_j^{(k)} \mathbf{q}^{(j)}. \quad (3.8.19)$$

По построению новые решения  $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$  ( $k = l + 1, \dots, m$ ) имеют обобщенные характеристические показатели, не превышающие  $\lambda_2$ . Как показывают рассуждения, аналогичные приведенным в разделах 3.1—3.7, матрица  $C^T = (G_{jk})$  (см. рис. 3.7.1)) приводится к виду

	$l$	$m-l$	
$l$			(3.8.20)
$m-l$	0		

Как и прежде, нетрудно показать, что  $\alpha_i(\tau)$  обладают такими же свойствами дифференцируемости, как в (3.8.12). Теми же свойствами дифференцируемости коэффициентов в (3.8.12) обладают и в том случае, если рассматривать их как функции не  $\tau$ , а  $\Phi$  (см. предыдущие разделы). Следовательно, определяемые соотношением (3.8.19) векторы  $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$  обладают теми же свойствами дифференцируемости, что и исходные вектор-решения  $\mathbf{q}^{(j)}$  ( $t, \Phi$ ). Приведя матрицу  $C^T$  к виду (3.8.20), мы можем продолжить нашу процедуру и привести матрицу (3.8.20) к треугольному виду

$$\left[ \begin{array}{ccc} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \\ & 0 & \dots \end{array} \right]. \quad (3.8.21)$$

Возникает вопрос, допускает ли матрица (3.8.21) дальнейшее упрощение, и в частности нельзя ли ее привести к блочно-диагональному виду, в котором отличные от нуля блоки стояли бы только на главной диагонали

$$\left[ \begin{array}{ccc} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \\ & 0 & \dots \end{array} \right]. \quad (3.8.22)$$

Приведение к блочно-диагональному виду возможно при различных обстоятельствах, например, если при  $t \rightarrow -\infty$  обобщенные характеристические показатели  $\lambda_j^i$  удовлетворяют соотношениям, обратным соответствующим соотношениям (3.8.2). Однако треугольную матрицу (3.8.21) можно привести к одному из видов (3.8.22), если каждый из блоков приводится к диагональному виду. Но даже если матрица (3.8.21) не приводится к блочно-диагональному и тем более к диагональному виду, относительно вида матрицы решений  $Q(t, \varphi)$  все же можно высказать некоторые общие утверждения, а именно: если известны матрицы решений, соответствующие квадратным блокам  $Q_j$  в (3.8.21), то всю матрицу  $Q(t, \varphi)$  можно найти последовательно методом вариации произвольной постоянной. Процедура аналогична изложенной в разд. 3.7, но вместо матриц  $\tilde{\mathbf{q}}^{(i)}$  необходимо брать подматрицы  $\tilde{Q}^{(i)}$  и т. д.

В заключительной части этого раздела мы хотим изложить теорему для случая, когда все  $\lambda_k$  равны.

**Теорема 3.8.2.** Примем следующие предположения:

1) матрица  $M$  (см. (3.1.4)) принадлежит по крайней мере классу  $C^k$  по  $\varphi$ ;

2)  $\lambda_k = \lambda$ ;  $k = 1, \dots, m$ ;

3)  $e^{-\lambda n\tau} \|T_\tau^n \mathbf{q}\|$  и  $e^{\lambda n\tau} \|T_\tau^{-n} \mathbf{q}\|$

ограничены при  $n \rightarrow \infty$ , произвольном действительном  $\tau$  и всех векторах  $\mathbf{q}$  пространства решений уравнения  $\dot{Q} = M(t, \varphi)Q$ ,  $\mathbf{q}$ , принадлежащих классу  $C^1$  по  $\varphi$  ( $\|\dots\|$  означает норму в гильбертовом пространстве).

Тогда существует новый базис  $\tilde{\mathbf{q}}$ , в котором оператор  $T_\tau \rightarrow \hat{T}_\tau$  становится диагональным:

$$\hat{T}_\tau \tilde{\mathbf{q}} = e^{\hat{\lambda}\tau} \tilde{\mathbf{q}}, \quad \hat{\lambda} \text{ мнимые}, \quad (3.8.23)$$

если спектр оператора  $T_\tau$ , действующего на пространстве  $\mathbf{q}(t, \varphi)$ , точечный.

В случае непрерывного спектра оператор  $T_\tau$  эквивалентен оператору  $\hat{T}_\tau$  «скалярного типа», т. е.  $\hat{T}_\tau$  допускает представление

$$\hat{T}_\tau = \int e^{\hat{\lambda}\tau} E(d\hat{\lambda}), \quad (3.8.24)$$

где  $E$  — разложение единицы для  $\hat{T}_\tau$ .

Доказательство теоремы 3.8.2 следует из нескольких теорем теории линейных операторов. Мы приведем лишь формулировки этих теорем (см. ссылки) и укажем, каким образом они позволяют доказать теорему 3.8.2. Из предположения (1) теоремы 3.8.2 и леммы 3.2.2 следует, что  $\mathbf{q}(t, \varphi)$  принадлежит по крайней мере классу  $C^1$  по  $\varphi$  при  $-\infty < t < +\infty$ . Следовательно, множество решений есть гильбертово пространство при  $-\infty < t < +\infty$ .

Операторы  $T_\tau$  образуют абелеву группу. Как показано в разд. 3.7, представление группы  $G$  операторов  $T_\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$  до-

пускает разложение  $1 + \tau A$  ( $\varphi$ ). Это означает, что и оператор  $T_\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$  можно записать в виде  $T_\tau = 1 + A\tau$ , где  $A$  — инфинитезимальный генератор группы. Зная оператор  $A$ , мы можем восстановить оператор  $T_\tau$  при конечных  $\tau$ :  $T_\tau = \exp(A\tau)$ . Воспользуемся следующей леммой. Пусть  $\hat{G}$  — абелева группа ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда существует ограниченный самосопряженный оператор в  $H$  с всюду определенным обратным оператором, такой, что для каждого  $\hat{A}$  из  $\hat{G}$  оператор  $BT_\tau B^{-1}$  унитарный.

Следовательно, введенная выше группа ограниченных операторов  $\exp(A\tau)$  эквивалентна группе унитарных операторов. По теореме Стоуна последняя группа обладает инфинитезимальным оператором  $i\tilde{A}$ , где  $\tilde{A}$  — самосопряженный оператор. Итак, оператор  $A$  эквивалентен оператору  $i\tilde{A}$ , причем матрицей преобразования служит  $B$ . Поскольку в рассматриваемом случае  $A$  и, следовательно,  $\tilde{A}$  не зависит от  $t$  и  $\tau$ ,  $B$  также не зависит от  $t$  и  $\tau$ . Следовательно,  $B$  описывает не зависящее от  $t$  и  $\tau$  преобразование векторов  $\mathbf{q}$  в другие векторы, также являющиеся решениями уравнения (3.1.5).

На заключительной стадии нашего анализа напомним, что  $T_\tau$  становится унитарным оператором и, следовательно, по теории линейных операторов спектральным оператором скалярного типа, поэтому  $\tilde{A}$  и  $\tilde{T}_\tau$  представимы в виде

$$\tilde{A} = - \int \{\hat{\lambda} E(d\hat{\lambda}) \quad (3.8.25)$$

и

$$T_\tau \rightarrow \tilde{T}_\tau = \int e^{\hat{\lambda}\tau} E(d\hat{\lambda}), \quad (3.8.26)$$

где  $E$  — разложение единицы для  $\tilde{A}$  и  $(\tilde{T}_\tau)$ . Если спектр точечный, то из (3.8.26) следует, что

$$\tilde{T}_\tau \tilde{\mathbf{q}} = e^{\hat{\lambda}\tau} \tilde{\mathbf{q}}.$$

Это уравнение решается так же, как уравнение (3.7.9).

В заключение заметим, что еще один класс решений удастся построить, если  $\|T_\tau^{\pm n} \mathbf{q}\|$  возрастает как  $n^m$ . В этом случае решения имеют вид многочленов по  $t$  (степени не выше  $m$ ) с квазипериодическими коэффициентами.

### 3.9. Решение уравнения (3.1.1) методом последовательных приближений

В разд. 2.9, рассматривая дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, мы разработали процедуру, позволяющую получать решения с помощью теории возмущений. К сожалению, попытки непосредственного обобщения нашей про-

цедуры на случай уравнений с квазипериодическими коэффициентами наталкиваются на трудности, связанные со сходимостью получающихся разложений. Решение уравнений с квазипериодическими коэффициентами удастся построить с помощью быстро сходящегося метода последовательных приближений (сходимость которых строго доказана). Основная идея метода состоит в разложении матрицы  $M$  коэффициентов уравнения  $\dot{Q} = M\tilde{Q}$  на сумму постоянной матрицы  $A$  и матрицы  $\tilde{M}$ , квазипериодически зависящей от времени  $t$  ( $M = A + \tilde{M}$ ). Матрица  $\tilde{M}$  считается малым возмущением.

Сформулируем сначала основную теорему, а затем покажем, как можно построить решение.

**Теорема 3.9.1.** Пусть матрицы  $A$  и  $\tilde{M}$  удовлетворяют следующим условиям.

1) Матрица  $\tilde{M}$  периодична по  $\varphi_j$  и аналитична в области

$$|\operatorname{Im} \{\varphi\}| \equiv \sup_j \{|\operatorname{Im} \{\varphi_j\}|\} \leq \rho_0, \quad \rho_0 > 0 \quad (3.9.1)$$

и вещественна при вещественных  $\varphi_j$ .

2) Матрица  $\tilde{M}$  не содержит постоянных членов.

3) При некоторых положительных  $\omega_j$  и  $d$  выполняется неравенство

$$|(\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega})| \geq \varepsilon \|\mathbf{n}\|^{-(m+1)}, \quad \|\mathbf{n}\| \neq 0, \quad (3.9.2)$$

т. е. для любого вектора

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (3.9.3)$$

с целочисленными компонентами  $n_j$  выполняется условие Колмогорова—Арнольда—Мозера.

4) Вещественные части собственных значений  $\lambda$  матрицы  $A$  не совпадают.

Тогда найдется достаточно малая положительная постоянная  $K$ , такая, что при

$$\sum_{k=1}^m |\tilde{M}_{jk}| \leq K \quad (3.9.4)$$

можно построить решение вида

$$V(\omega t + \boldsymbol{\varphi}_0) e^{\Lambda t}, \quad (3.9.5)$$

где  $V$  — квазипериодическая матрица, аналитическая и имеющая обратную аналитическую матрицу в области

$$|\operatorname{Im} \{\varphi_j\}| \leq \rho_0/2, \quad (3.9.6)$$

$\Lambda$  — постоянная матрица.

Чтобы показать, как построить матрицы  $V$  и  $\Lambda$ , начнем с уравнения

$$\dot{\tilde{Q}} = [A + \tilde{M}(t)]\tilde{Q}(t), \quad (3.9.7)$$

где матрицы  $A$  и  $\tilde{M}$  удовлетворяют предположениям теоремы. С помощью постоянной матрицы  $C$  приведем  $A$  к жордановой нормальной форме

$$J = C^{-1}AC. \quad (3.9.8)$$

Поскольку по предположению вещественные части собственных значений матрицы  $A$  различны, все собственные значения матрицы  $A$  различны. Следовательно,  $J$  имеет чисто диагональный вид. Подставим

$$\tilde{Q}(t) = CQ(t) \quad (3.9.9)$$

в (3.9.7). После умножения (3.9.7) слева на  $C^{-1}$  получаем

$$\dot{Q} = [J + M_0(t)]Q, \quad (3.9.10)$$

где мы для краткости обозначили произведение

$$C^{-1}\tilde{M}C \quad (3.9.11)$$

через  $M_0$ . Итак, требуется решить уравнение (3.9.10). Пусть

$$Q(t) = [1 + U_1(t)]Q_1(t), \quad (3.9.12)$$

где  $1$  — единичная матрица. Так как требуется построить решение вида (3.9.5), матрицу  $U_1$  необходимо выбирать квазипериодической, а матрицу  $Q_1$  экспоненциальной функцией времени.

Реально матрицу  $U_1$  вычислить точно невозможно, поэтому мы обратимся к методу последовательных приближений, но будем по-прежнему требовать, чтобы  $U_1$  была квазипериодической. Для  $Q_1$  мы получим тогда новое уравнение. Оказывается, что при подходящем выборе уравнения для  $U_1$  уравнение для  $Q_1$  имеет такой же вид, как уравнение (3.9.10), с одним существенным отличием: в новом уравнении матрица  $M_0$  заменяется другой квазипериодической матрицей  $M_1$ , элементы которой меньше элементов матрицы  $M_0$ . Основная идея метода состоит в неоднократном повторении подстановки (3.9.12).

Исходное уравнение (3.9.10) при этом приводится к виду, в котором роль квазипериодической матрицы  $M(t)$  становится все менее ощутимой. Все этапы вычислений станут более ясными, если мы проделаем их в явном виде. Итак, подставляя (3.9.12) в (3.9.10), получаем

$$\dot{U}_1 Q_1 + [1 + U_1(t)]\dot{Q}_1 = JQ_1 + JU_1 Q_1 + M_0 Q_1 + M_0 U_1 Q_1. \quad (3.9.13)$$

По причинам, которые станут понятными из дальнейшего, прибавим к правой и левой части уравнения (3.9.13) по

$$U_1 J Q_1 - J U_1 Q_1 \quad (3.9.14)$$

и, кроме того, к правой части добавим нуль, записанный в виде

$$0 \equiv D_1 Q_1 - D_1 Q_1. \quad (3.9.15)$$

Матрицу  $D_1$  определим как постоянную часть главной диагонали матрицы  $M_0$ . Мы делаем это по чисто формальным причинам, поскольку матрицу  $M_0$  всегда можно построить так, чтобы ее постоянная часть была равна нулю. Однако при последующих итерациях могут возникнуть отличные от нуля постоянные члены. Матрица  $D_1$  задается выражением

$$D_1 = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} M_{0,11} & & & 0 \\ & M_{0,22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{0,mm} \end{pmatrix} d\varphi_1 \dots d\varphi_N. \quad (3.9.16)$$

С помощью только что описанных манипуляций уравнение (3.9.13) приводится к виду

$$\dot{U}_1 Q_1 + U_1 J Q_1 - J U_1 Q_1 + (1 + U_1) \dot{Q}_1 = J Q_1 + U_1 J Q_1 + M_0 Q_1 + M_0 U_1 Q_1 + D_1 Q_1 - D_1 Q_1. \quad (3.9.17)$$

Для упрощения этого уравнения предположим, что подчеркнутые члены выпадают при любой матрице  $Q$ . Прежде чем выписывать получающееся уравнение для  $U_1$ , воспользуемся тем, что  $U_1$  — квазипериодическая матрица, т. е. представима в виде

$$U_1 = \sum U_{1,n} \exp [in (\omega t + \varphi)]. \quad (3.9.18)$$

Выражение (3.9.18) позволяет представить производную от  $U_1$  по времени как скалярное произведение

$$\dot{U}_1 = \sum_{l=1}^N \frac{\partial U_1}{\partial \varphi_l} \omega_l = \left( \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \omega \right). \quad (3.9.19)$$

В этих обозначениях уравнение для  $U_1$  имеет вид

$$\left( \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \omega \right) + U_1 J - J U_1 = M_0 - D_1. \quad (3.9.20)$$

С учетом (3.9.20) уравнение (3.9.17) переходит в следующее уравнение для  $Q_1$ :

$$(1 + U_1) \dot{Q}_1 = \frac{JQ_1 + U_1 JQ_1}{(1 + U_1) JQ_1} + M_0 U_1 Q_1 + D_1 Q_1. \quad (3.9.21)$$

Добавляя к правой части нуль в виде

$$\frac{U_1 D_1 Q_1}{U_1 D_1 Q_1} - U_1 D_1 Q_1, \quad (3.9.22)$$

преобразуем (3.9.21) к виду

$$(1 + U_1) \dot{Q}_1 = (1 + U_1) JQ_1 + \frac{(1 + U_1) D_1 Q_1}{U_1 D_1 Q_1} + (M_0 U_1 - U_1 D_1) Q_1. \quad (3.9.23)$$

После умножения уравнения (3.9.23) слева на

$$(1 + U_1)^{-1} \quad (3.9.24)$$

получаем

$$\dot{Q}_1 = JQ_1 + D_1 Q_1 + (1 + U_1)^{-1} (M_0 U_1 - U_1 D_1) Q_1. \quad (3.9.25)$$

Если обозначить для краткости

$$J + D_1 = J_1 \quad (3.9.26)$$

и

$$(1 + U_1)^{-1} (M_0 U_1 - U_1 D_1) = M_1, \quad (3.9.27)$$

то

$$\dot{Q}_1 = J_1 Q_1 + M_1 Q_1. \quad (3.9.28)$$

Здесь  $J_1$  — диагональная, не зависящая от времени матрица,  $M_1$  — квазипериодическая матрица. На первый взгляд кажется, что никаких преимуществ мы не достигли, поскольку пришли к уравнению для  $Q_1$ , имеющему такой же вид, как и исходное уравнение (3.9.10). Однако даже грубая оценка показывает, что матрица  $M_1$  по порядку величины много меньше, чем  $M_0$ . Действительно, введем малый параметр  $\epsilon$ , такой, что

$$M_0 \sim \epsilon. \quad (3.9.29)$$

Так как матрица  $D_1$  получается из матрицы  $M_1$  с помощью преобразования (3.9.16),

$$D_1 \sim \epsilon. \quad (3.9.30)$$

С другой стороны, мы предполагаем, что  $J$  по сравнению с  $M_0$  есть матрица порядка единицы, т. е.

$$J \sim 1. \quad (3.9.31)$$

Из (3.9.30), (3.9.31) следует, что правая часть уравнения (3.9.20) порядка  $\varepsilon$ . Отсюда мы заключаем, что

$$U_1 \sim \varepsilon. \quad (3.9.32)$$

Из соотношения (3.9.27) видно, что

$$M_1 \sim \varepsilon^2, \quad (3.9.33)$$

в то время как

$$J_1 \sim 1 + \varepsilon. \quad (3.9.34)$$

Таким образом, уравнение (3.9.28), если выписать входящие в него  $\varepsilon$ , примет следующий вид:

$$\dot{Q}_1 = J_1 Q_1 + \varepsilon^2 \dots Q_1. \quad (3.9.35)$$

Это означает, что нам удалось значительно понизить величину квазипериодической составляющей в правой части. Подчеркнем, что наша оценка носит весьма поверхностный характер и что сходимость метода доказана строго математически (см. ниже). Наши дальнейшие действия очевидны: мы продолжаем последовательные приближения, принимая на втором шаге

$$Q_1 = (1 + U_2) Q_2, \quad (3.9.36)$$

а на  $\nu$ -м

$$Q_\nu = (1 + U_{\nu+1}) Q_{\nu+1}. \quad (3.9.37)$$

На каждом шаге матрица  $Q_\nu$  предполагается квазипериодической. Одновременно мы полагаем

$$J_{\nu+1} = J_\nu + D_{\nu+1}, \quad (3.9.38)$$

где  $D_{\nu+1}$  — главная диагональ матрицы  $\bar{M}_{\nu+1}$

$$\bar{M}_{\nu+1} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \dots \int M_{\nu+1} d\varphi_1 \dots d\varphi_N. \quad (3.9.39)$$

Обозначая для краткости

$$M_{\nu+1} = (1 + U_{\nu+1})^{-1} (M_\nu U_{\nu+1} - U_{\nu+1} D_{\nu+1}), \quad (3.9.40)$$

мы можем записать уравнение для  $Q_{\nu+1}$  в виде

$$\dot{Q}_{\nu+1} = J_{\nu+1} Q_{\nu+1} + M_{\nu+1} Q_{\nu+1}. \quad (3.9.41)$$

Чтобы получить соотношения (3.9.38) — (3.9.41), необходимо лишь заменить в предыдущих соотношениях (3.9.26) — (3.9.28) величины с индексом 0 или без индекса величинами с индексом  $\nu$ , а индекс 1 — индексом  $\nu + 1$ . Выполняя последовательно преобразования (3.9.36), (3.9.37), мы получаем решение в виде

$$Q = (1 + U_1) (1 + U_2) \dots (1 + U_l) Q_l. \quad (3.9.42)$$

В пределе при  $l \rightarrow \infty$  уравнение (3.9.41) переходит в уравнение

$$\dot{Q}_l = I_l Q_l + O(\varepsilon^l) Q_l \Rightarrow J_l Q_l. \quad (3.9.43)$$

Уравнение (3.9.43) легко решается. Его общее решение имеет вид

$$Q_l = e^{J_l t} Q_l(0), \quad (3.9.44)$$

где  $J_l$  — диагональная матрица.

В качестве начальных условий можно выбрать, например,

$$Q_l(0) = 1. \quad (3.9.45)$$

Итак, нам остается лишь построить матрицу  $U_{v+1}$  ( $v = 0, 1, \dots$ ) и доказать, что в качестве  $U$  можно выбирать квазипериодическую функцию. Следуя (3.9.20), запишем уравнение для  $U$  в виде

$$\left( \frac{\partial U_{v+1}}{\partial \varphi}, \omega \right) + U_{v+1} J_v - J_v U_{v+1} = M_v - D_{v+1}. \quad (3.9.46)$$

Отбросим для простоты индексы  $v$  и  $v + 1$ . Кроме того, введем матрицу

$$M - D = M', \quad (3.9.47)$$

которую можно разложить в кратный ряд Фурье

$$M'(\varphi) = \sum_{\mathbf{n}} M'_n \exp(i\mathbf{n} \cdot \varphi). \quad (3.9.48)$$

Чтобы решить уравнение (3.9.46), разложим  $U(\varphi)$  в такой же ряд:

$$U(\varphi) = \sum_{\mathbf{n}} U_n \exp(i\mathbf{n} \cdot \varphi). \quad (3.9.49)$$

Подставляя (3.9.48) и (3.9.49) в (3.9.46), получаем для коэффициентов Фурье соотношения

$$U_n (J + i(\mathbf{n}, \omega)) - J U_n = M'_n. \quad (3.9.50)$$

Введем теперь элементы матриц  $U_n$ ,  $J$  и  $M'_n$ :

$$U_n = (U_{jk}^{(n)}), \quad (3.9.51)$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & J_m \end{pmatrix}, \quad (3.9.52)$$

$$M'_n = (M'_{jk}{}^n). \quad (3.9.53)$$

Это позволит записать матричное уравнение (3.9.50) поэлементно:

$$U_{jk}^{(n)} (J_k + i(\mathbf{n}, \omega)) - J_j U_{jk}^{(n)} = M'_{jk}{}^n. \quad (3.9.54)$$

Решение уравнения (3.9.54) находится без труда:

$$U_{jk}^{(n)} = [J_k - J_j + i(\mathbf{n}, \omega)]^{-1} M'_{jk}{}^n, \quad (3.9.55)$$

если знаменатель (стоящий в квадратных скобках) не обращается в нуль. Нетрудно убедиться, однако, что знаменатель действительно не обращается в нуль. При  $k \neq j$  вещественные части собственных значений исходной матрицы  $A$  (или  $J$ ) различны. Если матрица  $M$  достаточно мала, то  $D_{v+1}$  также достаточно малы, поэтому и последовательные сдвиги матриц  $J$  по формуле (3.9.38) достаточно малы для того, чтобы условие (3.9.56) выполнялось во всех приближениях. Итак, при

$$\operatorname{Re} \{J_k\} \neq \operatorname{Re} \{J_j\}, \quad (3.9.56)$$

$$|J_k - J_j + i(\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega})| > 0. \quad (3.9.57)$$

При  $k = j$

$$|(\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega})| > 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{n}| > 0, \quad (3.9.58)$$

но при  $\mathbf{n} = 0$  по построению

$$M'_{ij}{}^{(0)} = 0. \quad (3.9.59)$$

Для того чтобы матрица решения  $U_{\mathbf{n}}$  была единственной, положим  $U'_{ij}{}^{(0)} = 0$ .

Итак, подставляя (3.9.55) в (3.9.49), мы на  $v$ -м шаге получаем в качестве единственного и явного решения (индекс  $v$  у матриц  $J_k$  и  $J_j$  опущен)

$$U_{v+1, jk}(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{\mathbf{n}} (J_k - J_j + i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})^{-1} M'_{v, jk}{}^{(\mathbf{n})} \exp(i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}). \quad (3.9.60)$$

Его можно представить также в виде

$$U_{v+1} = -\sigma \int_0^t \exp[(J_k - J_j)\tau] M'_v(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\tau}) d\tau. \quad (3.9.61)$$

Знак  $\sigma \int \dots$  указывает на то, что при  $J_k - J_j > 0$  интеграл берется от  $t = -\infty$ , а при  $J_k - J_j < 0$  — от  $t = \infty$ .

Итак, суть полученных нами результатов сводится к следующему. Предложен метод последовательных приближений, позволяющий в явном виде построить квазипериодическую матрицу решений

$$V = \prod_{v=1}^l (1 + U_v), \quad l \rightarrow \infty, \quad (3.9.62)$$

а

$$\Lambda = \lim_{v \rightarrow \infty} J_v. \quad (3.9.63)$$

В практических приложениях для построения достаточно малой квазипериодической матрицы  $\tilde{M}$  достаточно весьма небольшого числа шагов. В литературе значительная часть математических работ отводится доказательству сходимости предложенной выше

процедуры. Поскольку изложенная выше схема последовательных приближений не позволяет нам проникнуть глубже в суть проблемы сходимости, мы отсылаем тех из читателей, кого это интересует, к разд. 5.3 (гл. 6) и приложению А, где проблема сходимости рассмотрена подробно. Пока же ограничимся чисто качественным замечанием относительно того, сколь широк круг сходимости. Из (3.9.60) видно, что матрица  $U$  получается из матрицы  $M$ , по существу, делением на  $J_k - J_j$ . Для того чтобы бесконечное произведение в (3.9.62) сходилось, матрицы  $U_\nu$  должны достаточно быстро стремиться к нулю. Это по крайней мере отчасти достигается, если исходная матрица  $M$  достаточно мала, а разность между исходными собственными значениями  $J$  достаточно велика.

## СТОХАСТИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы изложим некоторые наиболее существенные особенности стохастических и дифференциальных уравнений. Тем, кто захочет узнать о них больше, мы рекомендуем обратиться к книге Гардинера (см. литературу в конце книги).

Во многих проблемах естественных и других наук нам приходится иметь дело с макроскопическими свойствами систем, например с макроскопическими свойствами жидкостей, электрических цепей, макроскопической активностью коры больших полушарий, фиксируемой на электроэнцефалограммах, и т. д. Макроскопические свойства вполне естественно описывать макроскопическими величинами (например, если речь идет об электрических цепях, то такими параметрами могут служить макроскопические электрические заряды и токи). Не следует забывать, однако, что любой из таких макроскопических процессов есть результат многих более или менее когерентных микроскопических процессов. Например, носителями тока в электрических цепях в конечном счете являются отдельные электроны, а электрические волны в коре больших полушарий порождаются в конечном счете отдельными нейронами. Микроскопические степени свободы проявляются в виде флуктуаций, которые можно описать, вводя дополнительные аддитивные члены в уравнения для макроскопических величин (если не считать вводимых членов, то в остальных уравнениях вполне детерминистичны). Поскольку в общем случае микроскопические процессы разыгрываются в гораздо меньших масштабах времени, чем макроскопические процессы, флуктуации, отражающие «внутренний мир» отдельных составных частей системы, происходят в существенно более коротких временных масштабах, чем макроскопические процессы. Теория стохастических дифференциальных уравнений описывает флуктуации в определенной математической идеализации, о которой пойдет речь в дальнейшем.

В практических приложениях не следует забывать о необходимости проверки, имеет ли данная идеализация смысл. Если получаемые результаты противоречат здравым физическим рассуждениям, то следует тщательно выяснить, не нарушены ли условия, при которых верны идеализированные предположения.

## 4.1. Пример

Рассмотрим сначала один пример, на котором наглядно продемонстрируем основные идеи избранного нами подхода: одну переменную  $q$ , зависящую от времени  $t$ . Из непрерывной временной последовательности мы выберем дискретную последовательность  $t_i$ , предположив для простоты, что интервалы между  $t_i$  и  $t_{i-1}$  равны. Изменение переменной  $q$ , когда система переходит из состояния  $t_{i-1}$  в состояние  $t_i$ , обозначим

$$\Delta q(t_i) \equiv q(t_i) - q(t_{i-1}). \quad (4.1.1)$$

Изменение переменной состояния  $q$  вообще говоря, обусловлено макроскопическими, или когерентными, силами  $K$ , которые могут зависеть от  $q$ , и, кроме того, флуктуациями, приходящими в рассматриваемый интервал времени

$$\Delta t = t_i - t_{i-1}. \quad (4.1.2)$$

Воздействие когерентных вынуждающих и флуктуирующих сил можно описать уравнением

$$\Delta q(t_i) = K(q(t_{i-1})) \Delta t + \Delta \omega(t_i), \quad (4.1.3)$$

где  $\Delta \omega(t_i) = \omega(t_i) - \omega(t_{i-1})$ . Так как  $\Delta \omega$  учитывает влияние микроскопических процессов на макроскопический процесс, описываемый переменной  $q$ , мы вправе ожидать, что  $\Delta \omega$  зависит от очень многих степеней свободы «внутреннего мира». Как обычно в статистической механике, это огромное число степеней свободы мы описываем с помощью статистики. Следовательно, мы вводим статистическое усреднение, характеризуемое двумя свойствами.

1) Среднее от  $\Delta \omega$  по предположению равно нулю:

$$\langle \Delta \omega(t_i) \rangle = 0. \quad (4.1.4)$$

В противном случае приращение  $\Delta \omega$  содержала бы часть, действующую на систему когерентно, и эту часть можно было бы включить в  $K$ .

2) Флуктуации по предположению происходят в очень малом временном масштабе. Следовательно, при рассмотрении корреляционной функции между  $\Delta \omega$  в различные моменты времени  $t_i$  и  $t_j$  соответствующие флуктуации можно считать некоррелированными. Таким образом, мы постулируем, что

$$\langle \Delta \omega(t_i) \Delta \omega(t_j) \rangle = \delta_{t_i t_j} Q \Delta t. \quad (4.1.5)$$

Величина  $Q$  есть мера величины флуктуаций; символ Кронекера  $\delta_{t_i t_j}$  выражает статистическую независимость  $\Delta \omega$  в различные моменты времени  $t_i$  и  $t_j$ . Интервал времени  $\Delta t$  входит в (4.1.5) потому, что, определяя флуктуирующие силы, мы хотели бы охватить как частный случай и броуновское движение. В том, что это дейст-

вительно так, нетрудно убедиться на простом примере, а именно когда

$$K = 0. \quad (4.1.6)$$

В этом случае решение разностного уравнения (4.1.3) находится без труда суммированием правой и левой частей по  $t_i$ :

$$q(t) - q(t_0) = \sum_{j=1}^N \Delta\omega(t_j), \quad t - t_0 = N\Delta t. \quad (4.1.7)$$

Время окончания наблюдения над системой мы обозначили через  $t$ . Пусть  $q(t_0) = 0$ . Тогда из (4.1.4) следует, что

$$\langle q(t) \rangle = 0. \quad (4.1.8)$$

Чтобы понять, каким образом значительные отклонения  $q(t)$  могут быть в среднем вызваны флуктуациями, образуем средний квадрат

$$\langle q^2(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \Delta\omega(t_i) \Delta\omega(t_j) \rangle, \quad (4.1.9)$$

который с учетом (4.1.5) приводится к виду

$$Q \sum_{j=1}^N \Delta t = Qt. \quad (4.1.10)$$

Этот результат хорошо известен из теории броуновского движения: средний квадрат смещения (координаты) частицы, совершающей броуновское движение, линейно возрастает со временем  $t$ . Формула (4.1.10) следует из постулата (4.1.5).

Вернемся к (4.1.3). Как мы увидим из дальнейшего, амплитуды флуктуаций  $\Delta\omega$  нередко зависят от переменной  $q$ , т. е. возникает необходимость в рассмотрении уравнений вида

$$\Delta q(t_i) = K(q(t_{i-1})) \Delta t + g(q) \Delta\omega(t_i). \quad (4.1.11)$$

Возникает важный вопрос: при каких  $t$  следует брать значения переменной  $q$ , входящей в качестве аргумента в функцию  $g$ ? Оказывается, что различный выбор временной зависимости  $q$  приводит к различным процессам. Это означает, в частности, что время нельзя выбирать произвольно. В литературе известны два выбора временной зависимости переменной  $q$ . Один из них восходит к Ито: значения  $q$  в  $g$  берутся при  $t_{i-1}$ . В уравнении (4.1.11) необходимо произвести подстановку

$$g(q) \Delta\omega(t_i) = g(q(t_{i-1})) \Delta\omega(t_i). \quad (4.1.12)$$

Сначала система достигает  $q(t_{i-1})$ , затем происходят флуктуации и переводят систему в новое состояние  $q(t_i)$ . Поскольку флуктуа-

ции  $\Delta w$  происходят после того, как система достигает при  $t = t_{i-1}$  состояния  $q$ ,  $q(t_{i-1})$  и  $\Delta w(t_i)$  некоррелированы, т. е.

$$\langle g(q(t_{i-1})) \Delta w(t_i) \rangle = \langle g(q(t_{i-1})) \rangle \underbrace{\langle \Delta w(t_i) \rangle}_{=0} = 0. \quad (4.1.13)$$

Как мы увидим, эта особенность оказывается весьма удобной при выполнении всякого рода математических преобразований. С другой стороны, во многих приложениях выбор временной зависимости переменной  $q$  в виде (4.1.12) недостаточно хорошо описывает реально происходящий процесс: флуктуации происходят все время, в частности и тогда, когда система переходит от одного дискретного значения времени к другому. Второй выбор временной зависимости, предложенный Стратоновичем, требует подставлять в (4.1.12) значения  $q$ , взятые посередине между  $t_{i-1}$  и  $t_i$ . Таким образом, по Стратоновичу в (4.1.12) необходимо положить

$$g(q) \Delta w(t_i) = g\left(q\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\right) \Delta w(t_i). \quad (4.1.14)$$

Подстановка Стратоновича обладает важным преимуществом: она позволяет преобразовывать переменные так, как это принято в теории дифференциальных уравнений.

Так как переменную  $q$  мы рассматривали при дискретных значениях времени  $t_i$ , может показаться странным, что теперь нам понадобилось вводить новые значения  $t$  между членами старой последовательности. В ответ на это мы ограничимся пока замечанием о том, что и в процедуре Ито, и в процедуре Стратоновича следует иметь в виду предельный переход, при котором  $\Delta t$  (см. (4.1.2)) стремится к нулю. При таком переходе середины интервалов также оказываются включенными в общую схему аппроксимации.

## 4.2. Дифференциальное уравнение Ито и уравнение Ито — Фоккера — Планка

В этом разделе мы рассмотрим общий случай, когда состояние системы описывается вектором  $\mathbf{q}$  с компонентами  $q_l$ . Требуется исследовать стохастический процесс, в котором в отличие от (4.1.3) или (4.1.11) временной интервал стремится к нулю. Обобщая уравнение (4.1.11), рассмотрим стохастическое уравнение вида

$$dq_l(t) = K_l(\mathbf{q}(t)) dt + \sum_m g_{lm}(\mathbf{q}(t)) dw_m(t). \quad (4.2.1)$$

Постулируем, что

$$\langle dw_m \rangle = 0 \quad (4.2.2)$$

и

$$\langle dw_m(t) dw_l(t) \rangle = \delta_{lm} dt. \quad (4.2.3)$$

В отличие от (4.1.5) мы выбираем  $Q = 1$ , так как любое  $Q \neq 1$  можно учесть с помощью подходящего выбора  $g_{lm}$ . Для того чтобы мы могли судить о порядках величин, полезно иметь в виду следующее. Из (4.2.3) напрашивается оценка

$$d\omega_m \sim \sqrt{dt}. \quad (4.2.4)$$

Хотя ее нельзя считать доказанной строго математически, она оказывается весьма полезной при определении правильных порядков величин различных степеней  $d\omega$ . Из (4.2.1) мы можем вывести уравнение для среднего значения  $q_l$ , взяв статистические средние от правой и левой части уравнения (4.2.1). Так, для суммы, стоящей в правой части уравнения (4.2.1), получаем

$$\sum_m \langle g_{lm}(\mathbf{q}(t)) d\omega_m(t) \rangle = \sum_m \langle g_{lm}(\mathbf{q}(t)) \rangle \langle d\omega_m(t) \rangle. \quad (4.2.5)$$

Действуя в рамках предположения Ито о том, что вектор  $\mathbf{q}$ , служащий аргументом функции  $g$ , и  $d\omega_m$  в (4.2.1) статистически некоррелированы, мы разлагаем среднее значение последнего члена в произведение двух членов. Из (4.2.2) находим

$$d\langle q_l(t) \rangle = \langle K_l(\mathbf{q}(t)) \rangle dt. \quad (4.2.6)$$

Формально разделив (4.2.6) на  $dt$ , мы приходим к уравнению Ито в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \langle q_l(t) \rangle = \langle K_l(\mathbf{q}(t)) \rangle. \quad (4.2.7)$$

Вместо того чтобы следить за индивидуальной траекторией  $q_l(t)$  каждого члена статистического ансамбля, мы можем попытаться определить вероятность найти переменную  $q_l$  в заданном интервале  $[q_l \dots q_l + dq_l]$  в заданный момент времени  $t$ . Выведем уравнение для соответствующей функции распределения вероятности. Пусть

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}) \quad (4.2.8)$$

— произвольная функция, не зависящая явно от времени. Образует дифференциал от  $u_j$ , т. е.  $du_j$ , с точностью до членов, линейных по  $dt$ . Вспомним для этого, что  $dq_l$  содержит две части:

$$dq_l = dq_{l,1} + dq_{l,2}, \quad \text{где } dq_{l,1} = O(dt), \quad dq_{l,2} = O(\sqrt{dt}), \quad (4.2.9)$$

первая из которых происходит от когерентной силы  $\mathbf{K}$ , а вторая — от флуктуирующей силы. Следовательно,  $du_j$  необходимо вычислить до членов второго порядка:

$$du_j = \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial q_k \partial q_l} dq_k dq_l. \quad (4.2.10)$$

Подставляя (4.2.1) в (4.2.10), получаем

$$du_j = \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \left[ K_k(\mathbf{q}) dt + \sum_m g_{km} d\omega_m(t) \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial q_k \partial q_l} \left[ \sum_{m,n} g_{km} g_{ln} d\omega_m d\omega_n + \underbrace{O(d\omega dt)}_{=O((dt)^{3/2})} \right] \quad (4.2.11)$$

(мы опустили члены порядка  $(dt)^{3/2}$ ). Заметим, что

$$g_{km} \equiv g_{km}(\mathbf{q}), \quad (4.2.12)$$

где вектор  $\mathbf{q}$  не коррелирован с  $d\mathbf{w}$ . Попытаемся теперь определить функцию распределения. Схема наших действий станет более ясной, если предположить, что мы выбираем дискретные значения времени  $t_i$ . Рассмотрим отдельную траекторию, описываемую последовательностью переменных  $\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_j$  при  $t = t_j, j = 0, 1, \dots, i$ . Вероятность (плотность вероятности) найти эту траекторию в совершенно общем случае определяется совместной вероятностью

$$P(\mathbf{q}_i, \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}, t_i; \mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{w}_{i-1} - \mathbf{w}_{i-2}, t_{i-1}; \dots, \mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, t_0). \quad (4.2.13)$$

Интегрируя  $P$  по всем переменным  $\mathbf{q}_j$  и  $\mathbf{w}_j$  при всех промежуточных значениях времени  $k = 1, \dots, i-1$  и по  $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_0$ , мы получаем распределение вероятности  $f(\mathbf{q}, t_i | \mathbf{q}_0, t_0), \mathbf{q} = \mathbf{q}_i$ . Это та самая функция, которую требуется найти. Выведем для нее уравнение. Усредним (4.2.11). Усреднение  $\langle \dots \rangle$  означает, что обе части (4.2.11) мы умножаем на (4.2.13) и интегрируем по всем переменным  $\mathbf{q}_k, \mathbf{w}_k$ , кроме  $\mathbf{q}_0$ . Кратное интегрирование значительно упрощается, если учесть, что мы рассматриваем марковский процесс, в чем нетрудно убедиться, взглянув на (4.2.1), если дискретные моменты времени выбраны по правилу Ито. Действительно, значения  $\mathbf{q}_i$  определяются только значениями  $\mathbf{q}_{i-1}$  и  $d\mathbf{w}_i$ . Это свойство «марковости» позволяет нам записать вероятность  $P$  из (4.2.13) в виде

$$P = P_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i, t_i | \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{q}_{i-1}, t_{i-1}) \cdot P_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}, t_{i-1}) \times \\ \times P(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{w}_{i-1} - \mathbf{w}_{i-2}, t_{i-1}, \dots, \mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, t_0). \quad (4.2.14)$$

В этом соотношении  $P_{\mathbf{q}}$  — условная вероятность найти  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_i$  при  $t = t_i$ , если  $\Delta \mathbf{w} = \Delta \mathbf{w}_i$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{i-1}$  при  $t = t_{i-1}$ , а  $P_{\mathbf{w}}(\Delta \mathbf{w}_i, t_i)$  — распределение вероятности  $\Delta \mathbf{w}$  при  $t = t_i$ . Последний множитель есть совместное распределение вероятности. Нам понадобятся обычные свойства нормировки:

$$\int P_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_k, t_k | \Delta \mathbf{w}_k, \mathbf{q}_{k-1}, t_{k-1}) d^n q_k = 1 \quad (4.2.15)$$

и

$$\int P_{\mathbf{w}}(\Delta \mathbf{w}_k, t_k) d^n \omega_k = 1, \quad (4.2.16)$$

где  $n$  — размерность векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{w}$ . Теперь мы уже располагаем

всем необходимым для того, чтобы получить и обсудить средние от отдельных членов в (4.2.11). Так как  $u_j$  зависит только от  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_i$ , кратный интеграл по всем  $\mathbf{q}_k$ ,  $d\mathbf{w}_k$  (кроме  $\mathbf{q}_0$ ) сводится к

$$\langle u_j \rangle = \int d^n \mathbf{q} u_j(\mathbf{q}) f(\mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0), \quad (4.2.17)$$

где мы воспользовались введенным выше определением  $f$ . Меняя последовательность усреднения и описываемой оператором  $d$  временной эволюции системы, с учетом (4.2.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{1} = & \underbrace{\sum_k \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial q_k} K_k(\mathbf{q}) \right\rangle dt}_{2} + \underbrace{\sum_{k,m} \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial q_k} g_{km} \right\rangle \langle dw_m \rangle}_{3} + \\ & + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k,l} \left\langle \frac{\partial^2 u_j}{\partial q_k \partial q_l} \sum_{m,n} g_{km} g_{ln} \right\rangle \langle dw_m dw_n \rangle}_{4}, \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

где нумерация членов введена для удобства последующего обсуждения. Статистическая независимость  $\mathbf{q}_{i-1}$  и  $\Delta \mathbf{w}_i$ , нашедшая отражение и в разложении (4.2.14), позволила нам разложить средние  $\langle \dots \rangle$  в правой части в произведения (см. члены 3 и 4). Средние, содержащие  $\mathbf{q}$ , имеют точно такую же структуру, как (4.2.17): они содержат переменную  $\mathbf{q}$  при единственном значении времени  $i = 1$ . Как показывает беглый прямой анализ, среднее можно опять заменить интегралом по  $\mathbf{q}$ . Взяв производную от (4.2.18) по времени  $t$ , мы опять получим из (4.2.17)

$$\frac{d \langle u_j \rangle}{dt} = \int d^n \mathbf{q} u_j(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0). \quad (4.2.19)$$

Выражения, стоящие в (4.2.18) под знаком суммы в члене 2, перейдут в

$$\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial q_k} K_k(\mathbf{q}) \right\rangle = \int d^n \mathbf{q} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial q_k} K_k(\mathbf{q}) \right] f(\mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0). \quad (4.2.20)$$

Проинтегрировав по частям по координате  $q_k$ , преобразуем (4.2.20) в

$$- \int d^n \mathbf{q} u_j(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q_k} [K_k(\mathbf{q}) f(\mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0)] \quad (4.2.21)$$

(внешнеинтегральный член равен нулю, так как по предположению функция распределения  $f$  и ее производные на границе обращаются в нуль). Член 3 равен нулю, поскольку  $\mathbf{q}$  и  $d\mathbf{w}$  некоррелированы (что позволяет факторизовать среднее) и  $\langle dw_m \rangle = 0$  в силу (4.2.2). Последний член в правой части (4.2.18) (член 4) можно преобразовать по аналогии с тем, как мы преобразовали член, (4.2.20), но дважды интегрируя по частям. Каждое слагаемое под

знаком суммы в члене 4 переходит при этом в

$$\left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial q_k \partial q_l} g_{km} g_{lm} \right\rangle = \frac{1}{2} \int d^n q u_j(\mathbf{q}) \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} [g_{km} g_{lm} f(\mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0)]. \quad (4.2.22)$$

Сравнивая выражения, получившиеся после преобразований из членов 1, 2 и 4 в (4.2.18), нетрудно заметить, что все они однотипны, а именно имеют вид

$$\int d^n q u_j(\mathbf{q}) [ \dots ] f(\mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0), \quad (4.2.23)$$

где квадратные скобки могут содержать дифференциальные операторы. Поскольку эти выражения входят в обе части уравнения (4.2.18) и  $u_j$  — произвольная функция, мы заключаем, что уравнение (4.2.18), в котором члены 1, 2 и 4 заменены соответствующими выражениями, должно выполняться, даже если отбросить интегрирование по  $d^n q$  и множитель  $u_j(\mathbf{q})$ . Так мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} [K_k(\mathbf{q}) f] + \frac{Q}{2} \sum_{k, l} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} \left[ \sum_m g_{km} g_{lm} f \right]. \quad (4.2.24)$$

Это уравнение типа Фоккера—Планка связано со стохастическим уравнением Ито (4.2.1).

### 4.3. Исчисление Стратоновича

В этом исчислении вектор  $\mathbf{q}$ , входящий в качестве аргумента в функцию  $g$ , берется в серединах временных интервалов  $[t_{i-1}, t_i]$ , т. е. рассматриваются выражения вида

$$g_{lm} \left( \mathbf{q} \left( \frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \right) d\omega_m(t_i). \quad (4.3.1)$$

(Здесь и далее по немym индексам проводится суммирование.)

Правило Стратоновича без труда обобщается на случай, когда функция  $g$  явно зависит от времени  $t$ : вместо  $t$  в нее следует подставить середины интервалов  $[t_{i-1}, t_i]$ . Необходимо иметь в виду два обстоятельства.

1) Подстановка определения (4.3.1) в исходное уравнение Ито порождает новый стохастический процесс.

2) Тем не менее процессы Ито и Стратоновича тесно взаимосвязаны, и от одного из них к другому можно переходить с помощью простого преобразования. Проинтегрируем формально уравнение Ито (4.2.1), суммируя отдельные шаги и переходя затем к интегралу. Тогда из (4.2.1) мы получим

$$q_l(t) = q_l(t_0) + \int_{t_0}^t K_l(\mathbf{q}) dt' + \int_{t_0}^t g_{lm}(\mathbf{q}) d\omega_m(t'). \quad (4.3.2)$$

В (4.2.3) интеграл Ито означает, что аргумент  $\mathbf{q}$  функции  $g_{lm}$  берется при  $t$  непосредственно перед флуктуацией  $d\omega_m$ . Интеграл Ито мы обозначили

$$\int. \quad (4.3.3)$$

Рассмотрим теперь процесс, приводящий к такой же функции  $q_l(t)$ , как и в (4.3.2), но по определению Стратоновича:

$$q_l(t) = q_l(t_0) + \int_{t_0}^t K_l(\mathbf{q}) dt' + \int_{t_0}^t \tilde{g}_{lm}(\mathbf{q}) d\omega_m(t'). \quad (4.3.4)$$

Покажем, что к (4.3.4) приводит надлежащий выбор новой вынуждающей силы  $\tilde{\mathbf{K}}$  и новых множителей  $\tilde{g}_{lm}$  (в действительности, как мы увидим, нам понадобится ввести только новую силу  $\tilde{\mathbf{K}}$ , а  $\tilde{g}$  можно выбрать по-старому:  $\tilde{g} = g$ ). Под интегралом Стратоновича

$$\int. \quad (4.3.5)$$

мы понимаем здесь предел суммы членов (4.3.1), т. е.

$$\int. \tilde{g}_{lm}(\mathbf{q}) d\omega_m(t') = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_i \tilde{g}_{lm}\left(\mathbf{q}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) [\omega_m(t_i) - \omega_m(t_{i-1})], \quad (4.3.6)$$

где  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$  так, что  $N\Delta t = t - t_0$ . Вводя дополнительный член, содержащий

$$\omega_m\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right), \quad (4.3.7)$$

мы получаем в правой части (4.3.6) (до перехода к пределу)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \tilde{g}_{lm}\left(\mathbf{q}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) [\omega_m(t_i) - \omega_m\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)] + \\ & + \sum_{i=1}^N \tilde{g}_{lm}\left(\mathbf{q}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) [\omega_m\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - \omega_m(t_{i-1})]. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Пусть

$$\mathbf{q}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) = \mathbf{q}\left(t_{i-1} + \frac{t_i - t_{i-1}}{2}\right) = \mathbf{q}(t_{i-1}) + d\mathbf{q}(t_{i-1}) \quad (4.3.9)$$

и

$$dt = \frac{t_i - t_{i-1}}{2}. \quad (4.3.10)$$

Так как  $\mathbf{q}(t)$  удовлетворяет уравнению Ито, получаем для (4.3.9)

$$\mathbf{q}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) = \mathbf{q}(t_{i-1}) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t_{i-1}) \frac{t_i - t_{i-1}}{2} + \mathbf{g}[\mathbf{q}(t_{i-1})] \times \\ \times \left[ \mathbf{w}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - \mathbf{w}(t_{i-1}) \right]. \quad (4.3.11)$$

Разлагая  $\tilde{\mathbf{g}}_{lm}$  по (4.3.10) и удерживая только члены порядка  $dt$ , получаем

$$\tilde{\mathbf{g}}_{lm}\left(\mathbf{q}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) = \tilde{\mathbf{g}}_{lm}(\mathbf{q}(t_{i-1})) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_{lm}(\mathbf{q}(t_{i-1}))}{\partial t} \frac{t_i - t_{i-1}}{2} + \\ + \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_{lm}(\mathbf{q}(t_{i-1}))}{\partial q_k} K_k(\mathbf{q}(t_{i-1})) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{g}}_{lm}(\mathbf{q}(t_{i-1}))}{\partial q_k \partial q_l} g_{kp}(\mathbf{q}(t_{i-1})) \times \right. \\ \times \left. g_{ip}(\mathbf{q}(t_{i-1})) \right] \frac{t_i - t_{i-1}}{2} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_{lm}(\mathbf{q}(t_{i-1}))}{\partial q_k} g_{kp}(\mathbf{q}(t_{i-1})) \times \\ \times \left[ \omega_p\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - \omega_p(t_{i-1}) \right]. \quad (4.3.12)$$

Второй член в правой части встречается в том случае, если  $\tilde{\mathbf{g}}_{lm}$  зависит явно от времени. С помощью подстановки (4.3.12) преобразуем интеграл (4.3.6) к виду

$$\int \dots = \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{g}}_{lm}\left(\mathbf{q}\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) \left[ \omega_m(t_i) - \omega_m\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \right] + \\ + \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{g}}_{lm}(\mathbf{q}(t_{i-1})) \left[ \omega_m\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - \omega_m(t_i) \right] + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_{lm}(\mathbf{q}(t_{i-1}))}{\partial q_k} \times \\ \times g_{kp}(\mathbf{q}(t_{i-1})) \left[ \omega_m\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - \omega_m(t_{i-1}) \right]^2 \delta_{mp} + O(\Delta t \Delta \omega). \quad (4.3.13)$$

Взглянув на (4.3.13), можно заметить, что первые две суммы, взятые вместе, определяют интеграл Ито. В этом нетрудно убедиться следующим образом. Первая сумма описывает вклад от  $d\omega_m$  за интервал времени от  $(t_{i-1} + t_i)/2$  до  $t_i$ , а вторая — за интервал времени от  $t_{i-1}$  до  $(t_{i-1} + t_i)/2$ . Следовательно, взяв оба интервала и просуммировав по  $i$ , мы получим полный временной интервал. Третья сумма по  $i$  также типа сумм Ито. Здесь нам придется воспользоваться результатом из теории стохастических процессов: квадрат выражения, стоящего в квадратных скобках, сходится к  $dt/2$  по вероятности. Таким образом, вся сумма сходится к обычному интегралу. Полученные результаты позволяют нам записать соотношение между интегралами Стратоновича и Ито в виде

$$\int \tilde{\mathbf{g}}_{lm} d\omega_m(t') = \int \tilde{\mathbf{g}}_{lm} d\omega_m(t') + \int \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_{lm}}{\partial q_k} g_{km} dt. \quad (4.3.14)$$

Теперь мы уже в состоянии сравнить процессы Ито и Стратоновича, описываемые соотношениями (4.3.2) и (4.3.4), подробно. Как и должно быть, оба процесса приводят к одному и тому же результату (в чем мы уже убедились), если установить соответствие между следующими величинами:

процесс Стратоновича		процесс Ито
$\tilde{g}_{lm}$	$=$	$g_{lm}$
$\tilde{K}_l$	$=$	$K_l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial q_k} g_{km}$

(4.3.15)

Иначе говоря, мы получим один и тот же результат, если воспользуемся стохастическим уравнением Стратоновича, но вместо  $g$  и  $K$ , входящих в уравнение Ито, подставим  $\tilde{g}$  и  $\tilde{K}$ , задаваемые формулами (4.3.15). В частности, полученные результаты позволяют вывести уравнение Стратоновича—Фоккера—Планка. Если стохастическое уравнение Стратоновича записать в виде

$$dq_l = K_l(q) dt + g_{lm}(q) dw_m(t) \tag{4.3.16}$$

и вычислить  $g_{lm} dw_m$  по правилу (4.3.1), то соответствующее уравнение Фоккера—Планка примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial q_l} \left\{ \left[ K_l(q) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lj}}{\partial q_k} g_{kj} \right] f \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_l \partial q_m} (g_{li} g_{mi} f) \tag{4.3.17}$$

Напомним, что мы приняли соглашение о суммировании по немym индексам. Поскольку в других разделах книги мы не придерживаемся этого соглашения, запишем уравнение Фоккера—Планка еще раз, явно указывая все суммы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & - \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left\{ \left[ K_l(q) + \frac{1}{2} \sum_{kj} \frac{\partial g_{lj}}{\partial q_k} g_{kj} \right] f \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{lm} \frac{\partial^2}{\partial q_l \partial q_m} (\sum_i g_{li} g_{mi} f) \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

### 4.4. Уравнения Ланжевена и уравнение Фоккера — Планка

Для полноты упомянем об уравнениях Ланжевена, представляющих собой частные случаи уравнений (4.2.1), поскольку входящие в них флуктуирующие силы не зависят от переменной  $q$  и времени  $t$ . Следовательно, соответствующее уравнение Фоккера—Планка одно и то же и в исчислении Ито, и в исчислении Стратоновича.

**Упражнения.** 1) Почему при вычислении правой части (4.2.18) необходимы соотношения (4.2.14), (4.2.15)? *Указание:*  $u_j$  зависит

от значения, принимаемого  $\mathbf{q}$  при  $t = t_i$ , а  $K_k$  и  $g_{km}$  — от значения  $\mathbf{q}$ , принимаемого при  $t = t_{i-1}$ .

2) Как выглядит явное выражение для совместной вероятности (4.2.13)? *Указание:* условная вероятность  $P_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}, t | \mathbf{w}' = \mathbf{0}, 0)$  определяется по формуле

$$P_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}, t | 0, 0) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w}}{2t}\right). \quad (4.4.1)$$

**МИР СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

Когда речь заходит об осцилляторах, большинство из нас, по-видимому, прежде всего представляет себе механические осцилляторы, такие, как пружины. Еще один не менее известный пример механического осциллятора — маятник. Если амплитуда колебаний достаточно мала, то маятник можно рассматривать как линейный осциллятор, но при больших амплитудах это — нелинейный осциллятор. Во многих случаях, представляющих значительный интерес для практических приложений, нам приходится иметь дело со связанными осцилляторами. Достаточно взять какое-нибудь упругое тело: математической моделью его служит система связанных между собой конечных элементов, каждый из которых может быть представлен осциллятором. Такого рода математические модели играют важную роль в механике, например при расчете вибрации двигателей или высотных сооружений или флаттера крыла самолета. Разумеется, иногда мы рассматриваем предельные случаи, в которых конечные элементы аппроксимируют непрерывное распределение, соответствующее нашему исходному представлению о сплошной среде. Колебания встречаются не только в механике, но и в электро- и радиотехнике. Здесь нам приходится иметь дело не только с колебательными контурами на старых электронных лампах, но и с новыми устройствами с колебательными контурами на транзисторах и других электронных приборах.

В оптике лазер можно считать состоящим из большого числа связанных квантовомеханических осцилляторов — электронов рабочего тела лазера. Согласованное действие этих осцилляторов приводит к генерации лазерного излучения в виде когерентных колебаний электромагнитного поля. Во многих экспериментах, выполненных на жидкостях, наблюдаемые явления можно интерпретировать как обусловленные взаимодействием специфических осцилляторов, описывающих сложные движения жидкости. Химические колебания, о которых мы упоминали во введении, также можно рассматривать как примеры поведения связанных осцилляторов. Даже в физике элементарных частиц мы встречаемся с полями, которые так или иначе можно рассматривать как совокупность равномерно распределенных связанных осцилляторов.

Как хорошо известно, наблюдаемые макроскопические электрические колебания в коре больших полушарий обусловлены ко-

герентным возбуждением и торможением нейронов. По этим и многим другим причинам поведение связанных осцилляторов представляет первостепенный интерес и имеет фундаментальное значение.

## 5.1. Связанные линейные осцилляторы

Рассмотрим теперь поведение связанных осцилляторов с более математических позиций: нас будут интересовать в первую очередь математические свойства решений соответствующих уравнений безотносительно к физической природе осцилляторов. Для дальнейшего важно различать линейный и нелинейный осцилляторы, так как они ведут себя по-разному.

### 5.1.1. Линейные осцилляторы с линейной связью

Линейный осциллятор можно описать уравнением вида

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0, \quad (5.1.1)$$

где  $x_1$  — переменная, зависящая от времени,  $\omega_1$  — собственная частота. Такой осциллятор может быть линейно связан с другим осциллятором, т. е. в уравнения линейных осцилляторов могут входить аддитивные члены, линейные соответственно по  $x_2$  и  $x_1$ :

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \alpha x_2, \quad (5.1.2)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \beta x_1. \quad (5.1.3)$$

Вводя дополнительные переменные, называемые в гамильтоновой механике импульсами,

$$p_1 = \dot{x}_1 / \omega_1 \quad (5.1.4)$$

и

$$p_2 = \dot{x}_2 / \omega_2, \quad (5.1.5)$$

мы можем записать уравнение (5.1.2) в виде дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{p}_1 = -\omega_1 x_1 + (\alpha / \omega_1) x_2, \quad (5.1.6)$$

$$\dot{x}_1 = \omega_1 p_1 \quad (5.1.7)$$

и аналогичную операцию проделать с уравнением (5.1.3). Образовав из переменных  $x_1, p_1, x_2, p_2$  вектор

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ x_1 \\ p_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{q}, \quad (5.1.8)$$

представим уравнения (5.1.6), (5.1.7) и соответствующие уравнения с индексом 2 в матричном виде

$$\dot{\mathbf{q}} = L\mathbf{q}, \quad (5.1.9)$$

где  $L$  — матрица с элементами, не зависящими от времени. Ясно, что к виду (5.1.9) приводятся уравнения для любого числа линейно связанных линейных осцилляторов. Решение уравнения этого типа было получено нами в разд. 2.6, поэтому все проблемы, связанные с такими осцилляторами, полностью решены. Как будет показано в дальнейшем, уравнения такого же типа, как и полученные в разд. 2.6, остаются в силе, если переменные  $x_j$  считаются непрерывно распределенными в пространстве.

### 5.1.2. Линейные осцилляторы с нелинейной связью

#### Пример. Сдвиги частот

В качестве примера линейных осцилляторов с нелинейной связью рассмотрим уравнения

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \alpha x_1 x_2, \quad (5.1.10)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \beta x_1 x_2, \quad (5.1.11)$$

где квадратичные члены в правых частях описывают связь.

Исследовать математические особенности решений уравнений такого типа удобнее в новых переменных. Пусть

$$p_j = \dot{x}_j / \omega_j. \quad (5.1.12)$$

Тогда уравнение (5.1.10) запишется в виде системы уравнений

$$\dot{p}_1 = \ddot{x}_1 / \omega_1 = -\omega_1 x_1 + (\alpha / \omega_1) x_1 x_2, \quad (5.1.13)$$

$$\dot{x}_1 = \omega_1 p_1, \quad (5.1.14)$$

и аналогичную систему уравнений мы получим для второго осциллятора. Комплексные переменные

$$b_j = x_j + ip_j, \quad b_j^* = x_j - ip_j \quad (5.1.15)$$

позволяют представить систему уравнений (5.1.13), (5.1.14) в виде одного уравнения. Для этого мы умножим уравнение (5.1.13) на  $i$  и прибавим к нему уравнение (5.1.14). В переменных (5.1.15) суммарное уравнение запишется в виде

$$\dot{b}_1 = -i\omega_1 b_1 + i\gamma (b_1 + b_1^*) (b_2 + b_2^*), \quad \gamma = \alpha / 4\omega_1. \quad (5.1.16)$$

Подставляя

$$b_j = r_j \exp(-i\varphi_j), \quad (5.1.17)$$

где  $r_j, \varphi_j$  — вещественные числа, в (5.1.16), деля правую и левую

части на  $\exp(-i\varphi_j)$  и разделяя вещественную часть и мнимую, получаем два уравнения:

$$\dot{r}_1 = -2\gamma r_1 r_2 \sin(2\varphi_1) \cos(\varphi_2), \quad (5.1.18)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 - 4\gamma r_2 \cos^2(\varphi_1) \cos(\varphi_2). \quad (5.1.19)$$

Аналогичные уравнения можно вывести и для  $r_2$ ,  $\varphi_2$ . Эти уравнения представляют собой не что иное, как уравнения движения для радиусов  $r_j$  и фаз  $\varphi_j$ . Объединяя переменные в векторы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}, \quad (5.1.20)$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}, \quad (5.1.21)$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \mathbf{r} \quad (5.1.22)$$

и записывая правые части уравнений для  $\boldsymbol{\varphi}$  в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}, \quad (5.1.23)$$

а уравнений для  $\mathbf{r}$  в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{g}, \quad (5.1.24)$$

мы приходим к уравнениям общего вида

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}), \quad (5.1.25)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}). \quad (5.1.26)$$

Ясно также, каким образом мы могли бы вывести аналогичные уравнения для любого числа  $n$  линейных осцилляторов с нелинейными связями. Характер решений уравнений линейных осцилляторов с нелинейными связями может существенно отличаться от характера решений уравнений линейных осцилляторов с линейными связями. Как видно из (5.1.19), в случае нелинейной связи  $\varphi_1 = \omega_1 t$  не удовлетворяет уравнениям. Возникает проблема: можно ли говорить о периодических колебаниях (и если можно, то как), если на линейные осцилляторы наложена нелинейная связь?

Еще более простой, но весьма важный эффект наблюдается при изменении характера связи, например при переходе от квадратичной связи к кубической:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \alpha x_1 x_2^2. \quad (5.1.27)$$

Уравнение для фазы  $\varphi_1$  имеет в этом случае вид

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 - 4\gamma r_2^2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2. \quad (5.1.28)$$

Предположим, что в рассматриваемой модели  $r_2$  — постоянная, не зависящая от времени. Чтобы учесть влияние члена в правой части уравнения (5.1.28), содержащего  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , мы можем в первом приближении усреднить его по достаточно большому интервалу времени. Так как при таком усреднении

$$\langle \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \rangle = 1/4, \quad (5.1.29)$$

мы вместо уравнения (5.1.28) получаем новое уравнение для  $\varphi_1$  в нулевом приближении, т. е.  $\varphi_1^{(0)}$

$$\dot{\varphi}_1^0 = \omega_1 - \gamma r_2^2. \quad (5.1.30)$$

Из него видно, что в низшем приближении действие нелинейных членов в правой части уравнения (5.1.28) сводится к сдвигу частот. Следовательно, всякий раз, когда нам встречается нелинейная связь между осцилляторами, мы вправе ожидать сдвиг частот (и, возможно, другие эффекты). В дальнейшем мы рассмотрим осцилляторы с нелинейными связями различных типов. В одном из типов мы исследуем условия, при которых поведение связанных осцилляторов удастся воспроизвести с помощью набора несвязанных осцилляторов (возможно, различных). Как будет показано, этот класс осцилляторов играет важную роль во многих практических приложениях. С другой стороны, недавно были обнаружены обширные классы осцилляторов, обладающих поведением совершенно иного типа. Решения, описывающие хаотическое поведение (см. разд. 8.11.2), служат одним из важных примеров качественно нового типа поведения осцилляторов.

## 5.2. Возмущения квазипериодического движения в случае амплитуд, не зависящих от времени (квазипериодическое движение сохраняется)

Суть некоторых из основных трудностей, возникающих при анализе систем осцилляторов с нелинейными связями, и способы их преодоления удобнее всего пояснить на частном примере — уравнении вида (5.1.25), где  $\mathbf{r}$  — по предположению постоянная, не зависящая от времени.

Если между осцилляторами нет связи, их фазы удовлетворяют уравнениям вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (5.2.1)$$

Так как осцилляторы обычно колеблются с различными частотами

$\omega_1, \dots, \omega_n$ , их движение в целом можно назвать квазипериодическим. Включим связь между осцилляторами и дадим ей возрасти до некоторого порогового значения. Система уравнений, описывающих набор осцилляторов с нелинейными связями, имеет в данном случае вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon f(\varphi). \quad (5.2.2)$$

Предполагается, что  $f$  — функция, периодическая по  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , представимая рядом Фурье

$$f(\varphi) = \sum_m f_m e^{im \cdot \varphi}, \quad (5.2.3)$$

где

$$m \cdot \varphi = m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + \dots + m_n \varphi_n. \quad (5.2.4)$$

Малая величина  $\varepsilon$  в (5.2.2) указывает на малость дополнительной силы  $f$ .

Предположим, что наложенная связь не нарушает квазипериодического характера решений. Как было показано в предыдущем разделе на примерах (5.1.28), (5.1.30), дополнительный член  $f$  может приводить к сдвигу частот. С другой стороны, мы покажем, что адекватный учет возмущения  $\varepsilon f$  возможен только в том случае, если оно не приводит к сдвигу частот  $\omega_j$ . Ситуация, с которой мы здесь сталкиваемся, полностью аналогична ситуации, описанной нами в разд. 2.1.3, где сходимость ряда Фурье определялась условиями иррациональности отношений частот  $\omega_j$ . Оказывается, что и в рассматриваемом случае мы возвращаемся в точности к тем же условиям иррациональности. Для выполнения их необходимо, чтобы основные частоты  $\omega_j$  все время оставались неизменными. Достичь этого можно с помощью формального трюка: одновременно с возмущением  $f$  ввести в (5.2.1) контрчлен  $\Delta(\varepsilon)$ , компенсирующий в каждом порядке по  $\varepsilon$  сдвиг частот, вызываемый возмущением  $f$ . Следовательно, вместо уравнения (5.2.2) мы должны рассматривать уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta(\varepsilon) + \varepsilon f(\varphi), \quad (5.2.5)$$

где  $\Delta(\varepsilon)$  — пока не известная функция от  $\varepsilon$ , которую требуется найти. (Введение контрчленов — прием, отнюдь, не новый для физиков, занимающихся квантовой электродинамикой или квантовой теорией поля, где частоты  $\omega$  соответствуют наблюдаемым энергиям частицы, а сдвиг энергетических уровней обусловлен полем аналогом  $f$  — связью частицы с полем. Для получения правильных значений наблюдаемых энергий в гамильтониан вводятся контрчлены. Соответствующая процедура называется перенормировкой массы, электрического заряда и т. д.)

Для упрощения обозначений произведем подстановку

$$\varepsilon \mathbf{f}(\varphi) \rightarrow \mathbf{f}(\varphi). \quad (5.2.6)$$

Для решения уравнения (5.2.5) мы изложим метод последовательных приближений. Предложенный Колмогоровым и Арнольдом и усовершенствованный Боголюбовым и другими авторами, этот метод сходится очень быстро. Сначала мы будем действовать, не особенно заботясь об обосновании (на «эвристическом» уровне строгости). Усреднив в низшем приближении уравнение (5.2.5) по достаточно большому интервалу времени, получим

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \omega + \Delta + \bar{\mathbf{f}}. \quad (5.2.7)$$

Выберем в этом приближении

$$\Delta = \Delta_0 = -\bar{\mathbf{f}} \quad (5.2.8)$$

так, чтобы решение, которое мы обозначим

$$\bar{\varphi} \equiv \varphi^{(0)}, \quad (5.2.9)$$

имело вид

$$\varphi^{(0)} = \omega t + \varphi_0. \quad (5.2.10)$$

Констрктен  $\Delta$  мы выбрали так, чтобы приближенное решение  $\varphi^{(0)}$  сохранило старые частоты  $\omega_j$ . В обычной теории возмущений мы, подставив (5.2.10) в правую часть уравнения (5.2.5), получили бы следующее, улучшенное приближение к решению  $\hat{\varphi}^{(1)}$ :

$$\frac{d\hat{\varphi}^{(1)}}{dt} = (\omega + \Delta + \bar{\mathbf{f}}) + \sum_{m \neq 0} \mathbf{f}_m \exp [im(\omega t + \varphi_0)]. \quad (5.2.11)$$

Решение  $\hat{\varphi}^{(1)}$  мы получим, проинтегрировав правую часть уравнения (5.2.11):

$$\hat{\varphi}^{(1)} = \omega t + \varphi_0 + \sum_{m \neq 0} (\mathbf{f}_m / (im \cdot \omega)) \exp [im \cdot (\omega t + \varphi_0)]. \quad (5.2.12)$$

С разложением, стоящим в правой части (5.2.12), а именно с

$$\tilde{\mathbf{f}}(\Psi) = \sum_{m \neq 0} (\mathbf{f}_m / (im \cdot \omega)) \exp (im \cdot \Psi), \quad \Psi \equiv \omega t + \varphi_0, \quad (5.2.13)$$

нам уже приходилось встречаться в разд. 2.1.3. Было показано, что со сходимостью выражения (5.2.13) возникают немалые трудности. Их удастся обойти, если частоты  $\omega$  удовлетворяют условию

Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ), которое мы запишем в виде

$$|\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}| \geq K \|\mathbf{m}\|^{-(n+1)}, \quad (5.2.14)$$

$$\|\mathbf{m}\| = |m_1| + |m_2| + \dots + |m_n|.$$

Ниже мы наложим на  $\mathbf{f}$  условие (функция  $\mathbf{f}$  должна быть аналитической в некоторой области), гарантирующее сходимость разложения (5.2.13) при выполнении условия (5.2.14). Решение (5.2.12) можно представить в виде

$$\varphi = \boldsymbol{\omega}t + \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}t + \varphi_0). \quad (5.2.15)$$

Действуя по обычной схеме теории возмущений, мы должны были бы подставить (5.2.15) в правую часть (5.2.5) в надежде получить более точное приближение. Однако, поскольку сходимость традиционной процедуры вызывала сомнения, был предложен быстро сходящийся метод последовательных приближений. Основная идея его состоит в следующем.

Выберем соотношение (5.2.15) за отправной пункт последовательности преобразований переменным: вместо переменной  $\varphi$ , которую требуется найти, введем другую неизвестную переменную  $\varphi^{(1)}$ , задав ее соотношением

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \tilde{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)}), \quad (5.2.16)$$

где  $\tilde{\mathbf{f}}$  совпадает с функцией, входящей в (5.2.15). Подставляя (5.2.16) в (5.2.5), мы получаем весьма сложное уравнение для  $\varphi^{(1)}$ . Казалось бы, новый метод не дает никаких преимуществ. Но стоит лишь перегруппировать члены уравнения для  $\varphi^{(1)}$ , как становится заметно, что оно имеет в точности такой же вид, как (5.2.5), с единственным важным отличием: в его правую часть входят члены, которые меньше соответствующих членов уравнения. Вместо параметра малости  $\varepsilon$  в новое уравнение входит параметр  $\varepsilon^2$ . Продолжая последовательные приближения, мы построим уравнения с параметрами малости  $\varepsilon^4$ ,  $\varepsilon^8$  и т. д. Это свидетельствует (по крайней мере на эвристическом уровне строгости), что метод последовательных приближений быстро сходится. Как будет показано в этом разделе, строгие результаты приводят к такому же заключению.

Итак, подставим (5.2.16) в правую и левую части уравнения (5.2.5). Незвестная переменная  $\varphi^{(1)}$  — функция времени. Следовательно, дифференцировать  $\tilde{\mathbf{f}}$  по времени мы должны как сложную функцию: сначала дифференцировать  $\tilde{\mathbf{f}}$  по  $\varphi^{(1)}$ , а затем  $\varphi^{(1)}$  по времени  $t$ .

Введем менее громоздкие обозначения: пусть

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \varphi_l^{(1)}} v_l \\ \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \varphi_l^{(1)}} v_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_N}{\partial \varphi_l^{(1)}} v_l \end{pmatrix}, \quad (5.2.17)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор с компонентами  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , левая часть равенства (5.2.17) определяется его правой частью. Полагая  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$ , получаем из (5.2.17) тождество

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\varphi^{(1)}) - \bar{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)}). \quad (5.2.18)$$

Оно означает, что, продифференцировав (5.2.13) по  $\varphi^{(1)}$  и умножив производную на  $\boldsymbol{\omega}$ , мы с точностью до постоянного члена ( $\tilde{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)}) = \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_0$ ) восстановим функцию  $\mathbf{f}$ .

После этих предварительных замечаний мы можем сразу же написать результат подстановки (5.2.16) в (5.2.5):

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}} \frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \boldsymbol{\omega} + \Delta + \tilde{\mathbf{f}}[\varphi^{(1)} + \tilde{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)})]. \quad (5.2.19)$$

Как нетрудно проверить, это уравнение можно записать в несколько ином виде: уравнение

$$\left(1 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}}\right) \left(\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} - \boldsymbol{\omega}\right) = \Delta + \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}[\varphi^{(1)} + \tilde{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)})] - \mathbf{f}(\varphi^{(1)}) \quad (5.2.20)$$

с учетом тождества (5.2.19) совпадает с уравнением (5.2.18). Разделив обе части уравнения (5.2.20) на

$$\left(1 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}}\right), \quad (5.2.21)$$

получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + \bar{f} + \left[ \left( 1 + \frac{df(\varphi)}{d\varphi^{(1)}} \right)^{-1} - 1 \right] (\Delta + \bar{f}) + \left( 1 + \frac{\partial \tilde{f}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}} \right)^{-1} \{ f[\varphi^{(1)} + \tilde{f}(\varphi^{(1)})] - f(\varphi^{(1)}) \}. \quad (5.2.22)$$

Покажем теперь, что уравнение (5.2.22) имеет такой же вид, как уравнение (5.2.5). Пусть для краткости

$$\Delta^{(1)} = \Delta + \bar{f}(\varphi), \quad (5.2.23)$$

а остальные члены в правой части уравнения (5.2.22) обозначим  $f^{(1)}$ , т. е. положим

$$f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}) = \left[ \left( 1 + \frac{\partial \tilde{f}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}} \right)^{-1} - 1 \right] \Delta^{(1)} + \left( 1 + \frac{\partial \tilde{f}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}} \right)^{-1} \{ f[\varphi^{(1)} + \tilde{f}(\varphi^{(1)})] - f(\varphi^{(1)}) \}. \quad (5.2.24)$$

В таких обозначениях уравнение (5.2.22) представимо в виде

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \omega + \Delta^{(1)} + f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}), \quad (5.2.25)$$

т. е., как мы и предсказывали, в таком же виде, который имеет уравнение (5.2.5) (только вместо  $\Delta$  теперь стоит  $\Delta^{(1)}$ , а вместо  $f$  (или  $ef$ ) —  $f^{(1)}$ ).

Убедимся (по крайней мере на эвристическом уровне строгости), что  $f^{(1)}$  и  $\Delta^{(1)}$  на порядок  $\varepsilon$  меньше соответствующих членов в уравнении (5.2.5). Так как член  $f$  пропорционален  $\varepsilon$  (см. (5.2.6)), получаем оценку

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi^{(1)}} \sim \varepsilon, \quad (5.2.26)$$

а из (5.2.23) —

$$\Delta^{(1)} \sim \varepsilon. \quad (5.2.27)$$

Из (5.2.26) следует, что при достаточно малых  $\varepsilon$

$$\left( 1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi^{(1)}} \right)^{-1} - 1 \sim \varepsilon, \quad (5.2.28)$$

а поскольку  $\tilde{f} \sim \varepsilon$ ,  $f \sim \varepsilon$ ,

$$f(\varphi^{(1)} + \tilde{f}) - f(\varphi^{(1)}) \sim \varepsilon^2. \quad (5.2.29)$$

Собирая все эти оценки воедино, мы приходим к выводу, что

$\mathbf{f}^{(1)} \sim \varepsilon^2$ . Продолжим наши последовательные приближения. Для этого произведем подстановки

$$\mathbf{f}^{(1)} \rightarrow \mathbf{f}^{(2)}, \quad (5.2.30)$$

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}^{(0)} \rightarrow \mathbf{f}^{(1)}, \quad (5.2.31)$$

$$\Delta^{(1)} \rightarrow \Delta^{(2)} \quad (5.2.32)$$

и, в частности,

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)} + \mathbf{f}^{(1)}(\Phi^{(2)}). \quad (5.2.33)$$

Ясно, как продолжить итерации:

$$\Phi^{(s)} = \Phi^{(s+1)} + \mathbf{f}^{(s)}(\Phi^{(s+1)}). \quad (5.2.34)$$

Поскольку последние два члена в правой части уравнения (5.2.25) с каждым приближением становятся все меньше и меньше, можно ожидать, что в конечном счете мы придем к решению исходного уравнения (5.2.5) в виде

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial \Phi^{(s)}}{dt} \right) = \omega. \quad (5.2.35)$$

Продемонстрируем метод последовательных приближений «в действии» для тех из читателей, которых в первую очередь интересуют приложения. Выпишем в явном виде три первых приближения:

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \tilde{\mathbf{f}}(\Phi^{(1)}), \quad (5.2.36)$$

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)} + \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}(\Phi^{(2)}), \quad (5.2.37)$$

$$\Phi^{(2)} = \Phi^{(3)} + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\Phi^{(3)}). \quad (5.2.38)$$

Если вектор-функция  $\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$  достаточно мала, то вполне допустимо считать, что

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{dt} \equiv \omega, \quad (5.2.39)$$

тогда решение будет иметь вид

$$\Phi^{(2)} = \omega t + \Phi_0, \quad (5.2.40)$$

где для простоты можно выбрать  $\Phi_0 = 0$ .

Подставляя (5.2.40) в (5.2.37), получаем решение исходного уравнения (5.2.5)

$$\Phi = \omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}(\omega t) + \tilde{\mathbf{f}}[\omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}(\omega t)]. \quad (5.2.41)$$

Если достаточно мала вектор-функция не  $\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$ , а  $\tilde{\mathbf{f}}^{(3)}$ , то

$$\frac{\partial \Phi^{(3)}}{dt} = \omega, \quad (5.2.42)$$

и, следовательно,

$$\varphi^{(3)} = \omega t, \quad (5.2.43)$$

откуда

$$\varphi^{(2)} = \omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\omega t). \quad (5.2.44)$$

Подставляя (5.2.44) в (5.2.37), получаем

$$\varphi^{(1)} = \omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\omega t) + \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}[(\omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\omega t))], \quad (5.2.45)$$

а возвращаясь еще на один шаг назад, приходим к окончательному результату

$$\varphi = \omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\omega t) + \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}[\omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\omega t)] + \tilde{\mathbf{f}}[\omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\omega t)] + \tilde{\mathbf{f}}^{(1)}[\omega t + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}(\omega t)]. \quad (5.2.46)$$

На нем отчетливо видна структура решения  $\varphi$ . Оно содержит член, линейно возрастающий со временем  $t$ . Следующие члены — квазипериодические функции времени. Например, второй из них ( $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$ ) зависит от частоты, которая в свою очередь является квазипериодической функцией времени. Ясно, что, продолжая выполнять такого рода подстановки, мы в конце концов получим решение  $\varphi$  в виде разложения в ряд по  $\tilde{\mathbf{f}}^{(s)}$ . Кроме того, аргументы функций  $\tilde{\mathbf{f}}^{(s)}$  также будут рядами. Сходимость последовательных приближений будет доказана, если нам удастся убедиться в том, что при достаточно малой начальной вектор-функции  $\mathbf{f}$  ряд по  $\tilde{\mathbf{f}}^{(s)}$  сходится. В следующем разделе мы рассмотрим некоторые из наиболее интересных аспектов свойств сходимости вектор-функций  $\tilde{\mathbf{f}}^{(s)}$ .

### 5.3. Некоторые соображения о сходимости метода последовательных приближений

Полное доказательство сходимости метода последовательных приближений, описанного в предыдущем разделе, здесь не приводится, поскольку подробное доказательство сходимости решения более общей проблемы можно найти в приложении.

Мы ставим перед собой более скромную цель: дать читателю общее представление об основных идеях метода. Как будет показано, сущность его сводится к поддержанию тонкого равновесия между двумя конкурирующими процессами, один из которых способствует установлению сходимости, а другой стремится ее нарушить. Начнем с леммы.

**Лемма 5.3.1.** Пусть  $\mathbf{f}(\varphi)$  — функция, аналитическая в области

$$|\operatorname{Im}\{\varphi_j\}| \leq \rho, \quad (5.3.1)$$

где  $\rho$  — некоторая положительная постоянная. В области (5.3.1) функция  $\mathbf{f}$  ограничена сверху постоянной  $M$ :

$$|\mathbf{f}(\varphi)| \leq M. \quad (5.3.2)$$

Тогда для функции

$$\tilde{\mathbf{f}}(\varphi) = \sum_{m \neq 0} (\mathbf{f}_m / im \cdot \omega) \exp(im \cdot \varphi) \quad (5.3.3)$$

в области

$$|\operatorname{Im} \{\varphi_j\}| \leq \rho - 2\delta \quad (5.3.4)$$

справедливо неравенство

$$|\tilde{\mathbf{f}}(\varphi)| \leq \frac{MC}{K} \frac{1}{\delta^{2n+1}}. \quad (5.3.5)$$

Здесь  $C$  — скалярная постоянная, зависящая от размерности  $n$  вектора  $\varphi$ :

$$C = \left( \frac{n+1}{e} \right)^{n+1} (1+e)^n. \quad (5.3.6)$$

Функция (5.3.3) аналитична в области (5.3.4). Постоянная  $M$  вводится в (5.3.2), постоянная  $K$  входит в условие КАМ (5.2.14),  $\delta$  — положительная постоянная, о выборе которой будет сказано ниже. Аналогичным образом выводится неравенство

$$\sum_k \left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\varphi)}{\partial \varphi_k} \right| \leq \frac{MC'}{K} \frac{1}{\delta^{2n+2}}, \quad (5.3.7)$$

где постоянная  $C'$  определяется выражением

$$C' = \left( \frac{n+2}{e} \right)^{n+2} (1+e)^n. \quad (5.3.8)$$

Покажем, каким образом можно доказать неравенства (5.3.5), (5.3.6). Те, для кого это не представляет особого интереса, могут пропустить наши объяснения и перейти сразу к формуле (5.3.30). Разложим функцию  $\mathbf{f}(\varphi)$  в ряд Фурье. Коэффициенты Фурье определяются по хорошо известной формуле:

$$\mathbf{f}_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\Theta) e^{-im \cdot \Theta} d\Theta_1 \dots d\Theta_n. \quad (5.3.9)$$

Интегрирование по углам  $\Theta$  можно интерпретировать, как интегрирование по комплексной плоскости, где  $z = r \exp(i\Theta)$ ,  $r = 1$ .

Из теории аналитических функций (а  $\mathbf{f}$  — аналитическая функция) известно, что контур интегрирования можно как угодно деформировать, лишь бы он оставался в области, в которой функция

$\mathbf{f}$  аналитична. Это позволяет заменить правую часть в (5.3.9) выражением

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\Theta + i\Phi) \exp[-i\mathbf{m}(\Theta + i\Phi)] d\Theta_1 \dots d\Theta_n. \quad (5.3.10)$$

Выберем теперь отдельные компоненты  $\varphi_j$  вектора  $\Phi$  следующим образом:

$$\varphi_j = -\rho \operatorname{sign}\{m_j\}. \quad (5.3.11)$$

Тогда

$$\mathbf{m} \cdot \Phi = -\rho \|\mathbf{m}\|, \quad (5.3.12)$$

где

$$\|\mathbf{m}\| = |m_1| + |m_2| + \dots + |m_n|. \quad (5.3.13)$$

Коэффициенты Фурье (5.3.9) удовлетворяют неравенству (см. (5.3.2))

$$|f_{\mathbf{m}}| \leq M \exp(-\rho \|\mathbf{m}\|). \quad (5.3.14)$$

Выберем мнимую часть  $\varphi_j$  так, чтобы

$$|\operatorname{Im}\{\varphi_j\}| < \rho - 2\delta. \quad (5.3.15)$$

Исходя из разложения (5.3.3), получаем для  $\tilde{\mathbf{f}}(\varphi)$  оценку

$$|\tilde{\mathbf{f}}(\varphi)| \leq \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \frac{|f_{\mathbf{m}}|}{|\mathbf{m} \cdot \omega|} \exp[\|\mathbf{m}\|(\rho - 2\delta)] \quad (5.3.16)$$

(каждый член ряда мы заменили его абсолютной величиной и воспользовались неравенством (5.3.15)). Из условия КАМ (5.2.14) и неравенства (5.3.14) мы заключаем, что

$$|\tilde{\mathbf{f}}(\varphi)| \leq \frac{M}{K} \sum_{\mathbf{m}} \|\mathbf{m}\|^{n+1} \exp(-2\delta \|\mathbf{m}\|). \quad (5.3.17)$$

Сумму по  $\mathbf{m}$  нетрудно оценить следующим образом. Запишем

$$\sum_{\mathbf{m}} \|\mathbf{m}\|^{\nu} \exp(-2\delta \|\mathbf{m}\|), \quad (5.3.18)$$

где

$$0 < \delta < 1, \quad \nu > 1, \quad (5.3.19)$$

и обозначим для краткости

$$\|\mathbf{m}\| = z. \quad (5.3.20)$$

Максимум

$$\nu \ln z - \delta z \quad (5.3.21)$$

при  $z \geq 1$  (т. е. при  $\|\mathbf{m}\| > 1$ ) достигается при

$$z = \frac{\nu}{\delta} \geq 1. \quad (5.3.22)$$

Неравенство (5.3.22) позволяет получить для (5.3.21) оценку

$$v \ln z - \delta z \leq v \left( \ln \frac{v}{\delta} - 1 \right). \quad (5.3.23)$$

Взяв экспоненты от обеих частей неравенства (5.3.23), получим после несложных преобразований

$$z^v \leq e^{\delta z} e^{v(\ln v \delta - 1)} = \left( \frac{v}{e} \right)^v \frac{e^{\delta z}}{\delta^v}. \quad (5.3.24)$$

Подставляя неравенство (5.3.24) в (5.3.18), получаем

$$\sum_{\mathbf{m}} \exp(-2 \|\mathbf{m}\| \delta) \|\mathbf{m}\|^v \leq \left( \frac{v}{e} \right)^v \frac{1}{\delta^v} \sum_{\mathbf{m}} \exp(-|m_1| \delta - |m_2| \delta - \dots - |m_n| \delta) \equiv S. \quad (5.3.25)$$

Сумму по  $\mathbf{m}$  можно записать в виде  $n$ -й степени бесконечной суммы по одной переменной  $q$  так, что величина  $S$  в правой части (5.3.25) преобразуется к виду

$$S = \left( \frac{v}{e} \right)^v \frac{1}{\delta^v} \left( 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\delta q} \right)^n, \quad (5.3.26)$$

или после суммирования геометрической прогрессии

$$S = \left( \frac{v}{e} \right)^v \frac{1}{\delta^v} \left( \frac{1 + e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} \right)^n. \quad (5.3.27)$$

Так как

$$1 - e^{-\delta} \geq \delta e^{-\delta} \quad (5.3.28)$$

и, следовательно,

$$\frac{1 + e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} \leq \frac{1}{\delta} (1 + e^{-\delta}) < \frac{1 + e}{\delta}, \quad (5.3.29)$$

приходим к окончательному результату

$$\sum_{\mathbf{m}} \exp(-2 \|\mathbf{m}\| \delta) \|\mathbf{m}\|^v < \left( \frac{v}{e} \right)^v \frac{1}{\delta^{v+n}} (1 + e)^n. \quad (5.3.30)$$

Комбинируя неравенство (5.3.30) с (5.3.17), получаем оценку (5.3.5) (где  $C$  определяется выражением (5.3.6)), которую требовалось доказать. Поскольку каждый член бесконечной суммы (5.3.3) аналитичен и сама сумма ограничена (см. (5.3.5)) в области (5.3.4), вся сумма (5.3.3) также аналитична в области (5.3.4).

Проделав это несложное упражнение, вернемся к нашей главной теме: рассмотрим метод последовательных приближений, описанный в разд. 5.2, и выясним, как обстоит дело с его сходимостью. Так как вектор-функция  $\mathbf{f}^{(1)}$  в (5.2.24) построена из функций  $\mathbf{f}$ ,

$\tilde{f}$  и их производных (см. (5.3.2), (5.3.5), (5.3.7)), нетрудно вывести оценки для функции  $f^{(1)}$ . Поскольку эти оценки несколько громоздки и в приложении мы еще вернемся к их выводу в более общем случае, приведем сначала результат оценки. Будет показано, что вектор-функция

$$f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}) \quad (5.3.31)$$

аналитична в области

$$|\operatorname{Im} \{\varphi_j^{(1)}\}| \leq \rho - 2\delta \quad (5.3.32)$$

и удовлетворяет неравенству

$$|f^{(1)}| \leq M_1, \quad (5.3.33)$$

где

$$M_1 = \frac{C''}{K} \frac{M^2}{\delta^{2n+2}}. \quad (5.3.34)$$

Здесь  $C''$  — скалярная постоянная, обладающая такой же структурой, как (5.3.6), (5.3.8),  $M$  — постоянная из неравенства (5.3.2),  $K$  — постоянная, входящая в условие КАМ,  $\delta$  — постоянная из (5.3.4) или (5.3.32).

Рассмотрим теперь, как ведут себя два конкурирующих («противоборствующих») процесса. Продолжая последовательные приближения, мы переходим от  $M_1$  к  $M_2$  и т. д. Для того чтобы обеспечить сходимость, постоянную  $\delta$  необходимо выбирать достаточно большой. С другой стороны, мы не можем выбирать  $\delta$  сколь угодно большой, так как при каждой итерации нам приходится соответствующим образом изменять оценку (5.3.4). На первом шаге область определяется постоянной

$$\rho_1 = \rho - 2\delta, \quad (5.3.35)$$

на втором — постоянной

$$\rho_2 = \rho_1 - 2\delta_1 = \rho - 2\delta - 2\delta_1 \quad (5.3.36)$$

и т. д.

Так как каждая постоянная  $\rho_k$  должна быть положительной, сумма по  $\delta$  не может быть сколь угодно большой. Более удобно, однако, потребовать, чтобы  $\rho_k$  были ограничены снизу. Это позволит в любом приближении с гарантией получать разумные оценки. Итак, нам все время приходится лавировать между двумя противоречивыми требованиями: с одной стороны, постоянные  $\delta$  должны быть достаточно большими, чтобы  $M_j$  (см. (5.3.34)) сходились, с другой — постоянные  $\delta$  должны быть не слишком большими и даже стремиться к нулю. Привлекательная особенность изложенного выше подхода и состоит в том, что заведомо противоречивым требо-

ваниям удастся удовлетворить и построить сходящиеся последовательные приближения. Действительно, пусть ( $\gamma < 1$ )

$$\delta = \gamma, \quad \delta_1 = \gamma^2, \quad \dots, \quad \delta_s = \gamma^{s+1}. \quad (5.3.37)$$

Выберем  $\gamma$  так, чтобы  $\rho_k \rightarrow \rho/2$  при  $k \rightarrow \infty$ , например

$$2(\gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^s + \dots) = \frac{\rho}{2}. \quad (5.3.38)$$

Суммируя геометрическую прогрессию в левой части (5.3.8), получаем

$$\delta = \gamma = \frac{\rho}{4 + \rho} (< 1). \quad (5.3.39)$$

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы вывести оценки для следующих  $M_j$ .

Пусть  $P = C''/K$ . Тогда неравенство (5.3.33) (с постоянной  $M$ , задаваемой выражением (5.3.34)) запишется в виде

$$|f^{(1)}| \leq M_1 = P \cdot \frac{M^2}{\delta^{2n+2}}. \quad (5.3.40)$$

Переходя от  $M_1$  к  $M_2$ , необходимо заменить  $M$  постоянной  $M_1$ , а  $\Delta$  — величиной  $\Delta_1$ , после чего мы приходим к оценке

$$|f^{(2)}| \leq M_2 = P \frac{M_1^2}{\delta_1^{2n+2}}. \quad (5.3.41)$$

Дальнейшее продолжение очевидно:

$$|f^{(3)}| \leq M_3 = P \frac{M_2^2}{\delta_2^{2n+2}}, \quad (5.3.42)$$

⋮

$$|f^{(s+1)}| \leq M_{s+1} = P \frac{M_s^2}{\delta_s^{2n+2}}. \quad (5.3.43)$$

Используя наш выбор постоянных  $\delta_s$  (см. (5.3.37)), оценку (5.3.43) можно представить в виде

$$M_{s+1} = P \frac{M_s^2}{\gamma^{(s+1)(2n+2)}}. \quad (5.3.44)$$

Обозначим для краткости

$$N = \frac{1}{\gamma^{2n+2}}, \quad (5.3.45)$$

тогда

$$M_{s+1} = PN^{s+1}M_s^2. \quad (5.3.46)$$

Выберем постоянную  $M$  достаточно малой для того, чтобы выполнялось неравенство

$$PN^2M \leq r_0 < 1. \quad (5.3.47)$$

Кроме того, потребуем, чтобы  $P \geq 1$  (как видно из (5.3.40), для этого постоянную  $K$ , входящую в условие КАМ, следует выбирать достаточно малой). Тогда для рекуррентных формул (5.3.40) — (5.3.43) справедливо соотношение

$$M_s \leq \frac{r_0^{2s}}{N^{s+2}}. \quad (5.3.48)$$

Оно говорит нам о том, что при достаточно малых  $r_0$  постоянные  $M_s$  сходятся быстро — как  $(r_0^2)^s$  в степени  $s$ . Поскольку постоянная  $M$  связана с  $r_0$  неравенством (5.3.47), тем самым доказано, что при достаточно малых  $M$  последовательные приближения сходятся, как геометрическая прогрессия. На этом наши соображения пока завершаются.

## ОСЦИЛЛЯТОРЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ: СЛУЧАЙ, КОГДА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ СОХРАНЯЕТСЯ

В этой главе мы изложим теорему, впервые доказанную Мозером и обобщающую более ранние результаты Колмогорова и Арнольда. Задача, о которой идет речь, включает в себя в качестве частных случаев задачи, рассмотренные в разд. 3.9, 5.2 и 5.3. Как мы уже знаем, система линейно связанных гармонических осцилляторов может совершать колебания на нескольких основных частотах так, что совместное движение всей системы оказывается частным случаем квазипериодического движения. В этой главе мы попытаемся ответить на важный вопрос: могут ли *нелинейно* связанные осцилляторы также совершать квазипериодическое движение? Сами осцилляторы при этом могут быть не только линейными, но и нелинейными.

### 6.1. Постановка задачи

Поясним основную идею на простейшем примере одного осциллятора, описываемого амплитудой  $r$  и фазой  $\varphi$ . В случае линейного (гармонического) осциллятора уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\varphi} = \omega, \quad (6.1.1)$$

$$\dot{r} = 0. \quad (6.1.2)$$

Во многих практических приложениях, например в радиотехнике или гидродинамике, приходится рассматривать осциллятор, совершающий незатухающие колебания. Амплитуда  $r$  такого осциллятора удовлетворяет нелинейному уравнению, например

$$\dot{r} = \alpha r - \beta r^3. \quad (6.1.3)$$

Если уравнение (6.1.2) допускает решения с произвольной не зависящей от времени амплитудой  $r$ , то уравнение (6.1.3) допускает лишь вполне определенное решение с амплитудой, не зависящей от времени:

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (6.1.4)$$

вместо неустойчивого решения  $r = 0$ ).

Как хорошо известно [1], уравнения (6.1.1) и (6.1.3) могут описывать движение частицы в потенциале, образующемся при вращении плоской кривой с частотой  $\omega$ , с сильным затуханием по радиусу  $r$ . Из рис. 6.1.1 видно, что амплитуда  $r(t)$  движения частицы всегда будет релаксировать к значению  $r_0$ , определяемому по формуле (6.1.4).

Если нас интересуют малые отклонения  $r$  от  $r_0$ , то удобно ввести переменную  $\xi$ :

$$r = r_0 + \xi \quad (6.1.5)$$

и вывести для  $\xi$  линейризованное уравнение

$$\dot{\xi} = -2\alpha\xi + O(\xi^2). \quad (6.1.6)$$

В дальнейшем мы будем отбрасывать член  $O(\xi^2)$ , указывающий на функцию от  $\xi$  порядка  $\xi^2$  и выше. Решения уравнений (6.1.1) и (6.1.3), (6.1.6) можно наглядно представить себе с помощью плоской потенциальной кривой — осевого сечения тела вращения, изображенного на рис. 6.1.1. В полярной системе координат на плоскости

Рис. 6.1.1. Физический смысл решения уравнений (6.1.1) и (6.1.3): частица движется с сильным затуханием по радиусу в потенциальной яме, имеющей форму тела вращения. Стенки ямы вращаются с угловой частотой  $\omega$ .

траектории частиц выглядят так, как показано на рис. 6.1.2. На рис. 6.1.2, а движение частицы стационарно. На рис. 6.1.2, б видно, что если начальное значение  $\xi$  выбрано отличным от нуля, то система релаксирует к  $\xi = 0$ .

Приведенные выше элементарные соображения допускают обобщение на систему осцилляторов и на более общий случай, когда число частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  отличается от числа смещений по амплитуде  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . Уравнения (6.1.1), (6.1.6) переходят при этом в уравнения

$$\dot{\Phi}^{(0)} = \omega, \quad (6.1.7)$$

$$\dot{\xi}^{(0)} = \Lambda \xi^{(0)}, \quad (6.1.8)$$

где мы воспользовались очевидными векторными обозначениями. Матрица  $\Lambda$  по предположению диагонализуема, но, поскольку вектор  $\xi^{(0)}$  мы считаем вещественным, в общем случае нельзя предполагать, что матрица  $\Lambda$  полностью диагонализирована. Обратим внимание на то, что уравнение (6.1.7) имеет такой же вид, как невозмущенное (при  $\varepsilon = 0$ ) уравнение (5.2.1), в то время как уравне-

ние (6.1.8) по виду совпадает с невозмущенным (при  $M_0 = 0$ ) уравнением (3.9.10).

Введем теперь нелинейную связь между частотами  $\omega$  и отклонениями амплитуд  $\xi$ , т. е. рассмотрим уравнения вида

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \omega + \varepsilon f(\varphi^{(1)}, \xi^{(1)}, \varepsilon), \quad (6.1.9)$$

$$\dot{\xi}^{(1)} = \Lambda \xi^{(1)} + \varepsilon g(\varphi^{(1)}, \xi^{(1)}, \varepsilon), \quad (6.1.10)$$

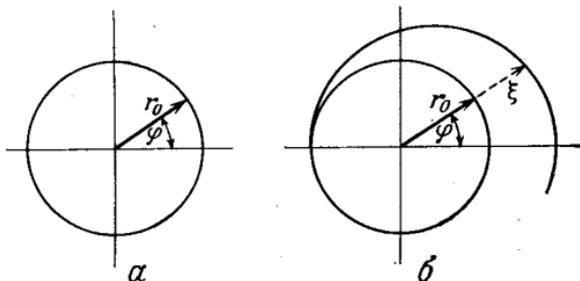


Рис. 6.1.2. *a* — стационарное решение уравнений (6.1.1), (6.1.3); *b* — переходное решение тех же уравнений:  $\xi$  релаксирует к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

где  $f$  и  $g$  — функции, периодические по  $\varphi_j^{(1)}$  с периодом  $2\pi$ . По причинам математического характера мы будем предполагать в дальнейшем, что функции  $f$  и  $g$  — вещественнозначны и аналитичны по  $\varphi^{(1)}$ ,  $\xi^{(1)}$  и  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр.

Как показано в разд. 5.2, дополнительный член  $f$  может приводить к изменению основных периодов  $T_j = 2\pi/\omega_j$ . По тем же причинам, о которых говорилось в разд. 5.2, в уравнение (6.1.9) необходимо ввести контрчлен — постоянный вектор, гарантирующий неизменность основных периодов даже при учете возмущающего действия члена  $f$ . Тем самым мы приходим к уравнениям вида

$$\dot{\varphi} = \omega + \varepsilon f(\varphi, \xi, \varepsilon) + \Delta, \quad (6.1.11)$$

где  $\Delta$  — добавленный нами контрчлен.

Кроме того, мы хотим, чтобы матрица  $\Lambda$  оставалась неизменной при учете возмущения  $\varepsilon g$ . Оказывается, что для этого в уравнение (6.1.10) необходимо ввести другой контрчлен, который надлежит выбирать в виде  $d + D\xi$ , где  $d$  — постоянный вектор,  $D$  — постоянная матрица. В результате уравнение (6.1.10) перейдет в уравнение

$$\dot{\xi} = \Lambda \xi + \varepsilon g(\varphi, \xi, \varepsilon) + d + D\xi. \quad (6.1.12)$$

Из последующих математических преобразований будет видно, что на  $\mathbf{d}$  и  $D$  можно наложить требования

$$\Lambda \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (6.1.13)$$

$$\Lambda D = D \Lambda. \quad (6.1.14)$$

Попробуем наглядно представить себе, к чему приводит включение в уравнения возмущений  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  и членов  $\Lambda$ ,  $\mathbf{d}$  и  $D$ . Начнем с рассмотрения случая, когда  $n = m = 1$ .

Нас интересует ситуация, в которой квазипериодическое или, как в данном частном случае, периодическое движение сохраняется

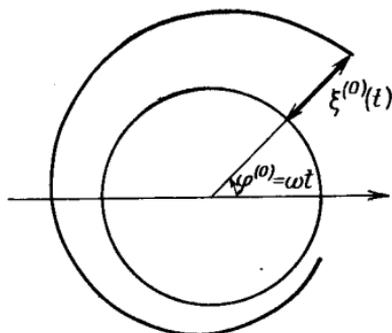


Рис. 6.1.3. Решение невозмущенных уравнений  $\dot{\varphi}^{(0)} = \omega$ ,  $\dot{\xi}^{(0)} = -\lambda \xi^{(0)}$ .

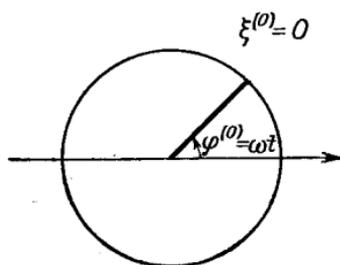


Рис. 6.1.4. Стационарное решение невозмущенных уравнений (см. рис. 6.1.3).

и после введения возмущений. Напомним (см. уравнения (6.1.7) и (6.1.8)), что невозмущенные уравнения имеют вид

$$\dot{\varphi}^{(0)} = \omega, \quad (6.1.15)$$

$$\dot{\xi}^{(0)} = -\lambda \xi^{(0)}. \quad (6.1.16)$$

Они описывают равномерное вращение по углу  $\varphi^{(0)}$  ( $\varphi^{(0)} = \omega t$ ) и релаксацию отклонения  $\xi^{(0)}$  к нулю, т. е. движение по спирали (рис. 6.1.3). В частном случае при  $\varphi^{(0)} = \omega t$ ,  $\xi^{(0)} = 0$  оно вырождается в движение по окружности (рис. 6.1.4). При включении дополнительных членов  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  в уравнения (6.1.9) и (6.1.10) оба движения возмущаются и переходят в

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \omega + \varepsilon f(\varphi^{(1)}, \xi^{(1)}, \varepsilon), \quad (6.1.17)$$

$$\dot{\xi}^{(1)} = -\lambda \xi^{(1)} + \varepsilon g(\varphi^{(1)}, \xi^{(1)}, \varepsilon), \quad (6.1.18)$$

где функции  $f$  и  $g$   $2\pi$ -периодичны по  $\varphi^{(1)}$ . Рассмотрим сначала случай  $\xi^{(0)} = 0$ , т. е. движение по окружности (рис. 6.1.4). Для того чтобы представить себе наглядно, как происходит движение, воспользуемся адиабатическим приближением, о котором говорилось в разд. 1.13. Положим в уравнении (6.1.18)  $\dot{\xi}^{(1)} = 0$ . При достаточно малых  $\varepsilon$  величину  $\xi^{(1)}$  можно однозначно выразить через  $\varphi^{(1)}$ , т. е. получить соотношение

$$\xi^{(1)} \equiv \xi_0^{(1)} = F(\varphi^{(1)}). \quad (6.1.19)$$

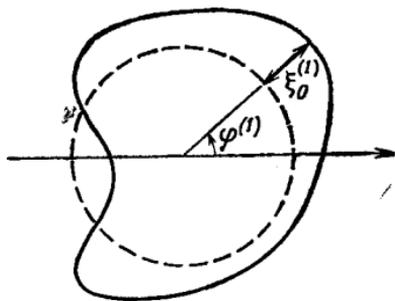


Рис. 6.1.5. Стационарное решение возмущенных уравнений (6.1.17), (6.1.18) (качественная картина).

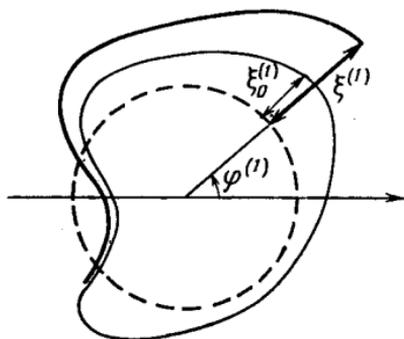


Рис. 6.1.6. Переходное решение возмущенных уравнений (6.1.17), (6.1.18) (качественная картина).

(В действительности, как будет показано ниже, соотношение (6.1.19) может быть получено и без адиабатического приближения, но для наших целей это несущественно.) Соотношение (6.1.19) говорит нам о том, что окружность, изображенная на рис. 6.1.4, деформируется в какую-то другую замкнутую кривую (рис. 6.1.5). Следовательно, старая орбита  $\xi^{(0)}$  деформируется в какую-то новую орбиту (6.1.19). Подставляя выражение (6.1.19) в уравнение (6.1.17), получаем уравнение вида

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \omega + \varepsilon \hat{f}(\varphi^{(1)}, \varepsilon). \quad (6.1.20)$$

Оно говорит нам о том, что скорость вращения  $\dot{\varphi}^{(1)}$  зависит от угла  $\varphi^{(1)}$ . Следовательно, по крайней мере в общем случае период движения по замкнутой траектории на рис. 6.1.5 отличен от периода движения по окружности на рис. 6.1.4. Вводя подходящий член  $\Delta$  в уравнение

$$\dot{\varphi} = \omega + \varepsilon \hat{f}(\varphi, \varepsilon) + \Delta, \quad (6.1.21)$$

мы можем добиться, чтобы период возмущенного движения совпадал с периодом невозмущенного движения (6.1.5) (рис. 6.1.4).

Рассмотрим аналог движения, представленного на рис. 6.1.3 (начальное состояние несколько смещено относительно стационарного состояния  $\xi^{(0)} = 0$ , при  $t \rightarrow \infty$  траектория стремится к  $\xi^{(0)} = 0$ ). Если величина  $\epsilon$  достаточно мала, то дополнительный член  $g$  в уравнении (6.1.18) деформирует спираль, изображенную на рис. 6.1.3, в спираль, представленную на рис. 6.1.6, но качественно траектория  $\xi^{(1)}$  будет вести себя так же, как траектория  $\xi^{(0)}$ , т. е. релаксировать к стационарному состоянию. Однако скорость релаксации может измениться. Если мы хотим, чтобы реше-

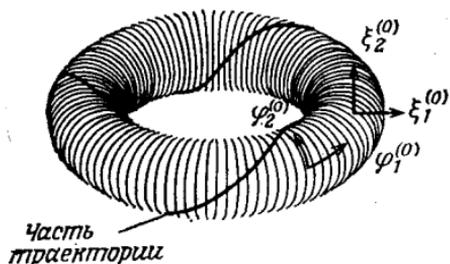


Рис. 6.1.7. Локальные координаты относительно тора (схема). Мы различаем координаты двух типов: 1) локальные координаты на торе (например,  $\varphi_j^{(0)}$ ); 2) координаты, отсчитываемые от тора (например,  $\xi_j^{(0)}$ ). На нашем рисунке (двумерный тор в трехмерном пространстве) было бы достаточно одной координаты  $\xi$ . Мы умышленно взяли две координаты  $\xi$ , чтобы наглядно продемонстрировать ситуацию, возникающую в пространстве большого числа измерений с двумя линейно независимыми направлениями, ведущими от тора.

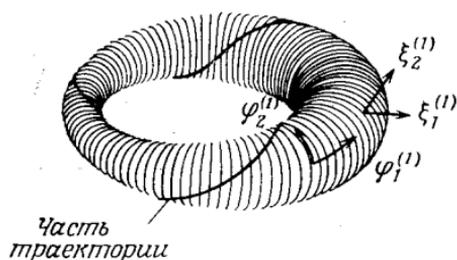


Рис. 6.1.8. Деформированный тор с новой системой координат.

ние  $\xi^{(1)}$  (по крайней мере при достаточно малых  $\xi^{(1)}$ ) релаксировало с такой же скоростью, что и  $\xi^{(0)}$ , необходимо ввести контрчлен  $D\xi$ , о котором уже говорилось выше.

Основная идея метода, к описанию которого мы сейчас переходим, состоит в следующем. Вместо  $\varphi$  и  $\xi$  мы хотим ввести новые переменные  $\psi$  и  $\chi$  так, чтобы зависимости  $\xi$  от  $\varphi$ , представленные на рис. 6.1.5 и 6.1.6, снова перешли в зависимости, представленные на рис. 6.1.4 и 6.1.3. Прежде чем мы обсудим, как построить такое преобразование, рассмотрим, что произойдет при этом, когда  $n \geq 2$  и (или)  $m \geq 2$ . Все существенные особенности отчетливо видны в случае  $n = 2$  и (при надлежащей интерпретации)  $m = 2$  (или  $m = 3$ ). Как и прежде, начнем с невозмущенного движения, описываемого уравнениями 6.1.7 и 6.1.8. В стационарном состоянии  $\dot{\xi}^{(0)} = \xi^{(0)} = 0$ , и решения уравнения (6.1.7) можно представить наглядно, построив их «график» в координатах  $\varphi_1, \varphi_2$ . Последние можно рассматривать как систему координат на торе (рис. 6.1.7).

Вместо  $\varphi$  и  $\xi$  мы хотим ввести новые переменные  $\psi$  и  $\chi$  так, чтобы зависимости  $\xi$  от  $\varphi$ , представленные на рис. 6.1.5 и 6.1.6, снова перешли в зависимости, представленные на рис. 6.1.4 и 6.1.3. Прежде чем мы обсудим, как построить такое преобразование, рассмотрим, что произойдет при этом, когда  $n \geq 2$  и (или)  $m \geq 2$ . Все существенные особенности отчетливо видны в случае  $n = 2$  и (при надлежащей интерпретации)  $m = 2$  (или  $m = 3$ ). Как и прежде, начнем с невозмущенного движения, описываемого уравнениями 6.1.7 и 6.1.8. В стационарном состоянии  $\dot{\xi}^{(0)} = \xi^{(0)} = 0$ , и решения уравнения (6.1.7) можно представить наглядно, построив их «график» в координатах  $\varphi_1, \varphi_2$ . Последние можно рассматривать как систему координат на торе (рис. 6.1.7).

При  $\dot{\xi}^{(0)} \neq 0$ , если матрица  $\Lambda$  диагональна, т. е. имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_j > 0, \quad (6.1.22)$$

уравнение (6.1.8) описывает релаксацию движения системы к тору. Изменения, вызываемые введением в уравнение (6.1.10) дополнительного члена  $\mathbf{g}$ , станут более понятными, если воспользоваться адиабатическим приближением, позволяющим выразить  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\xi_2^{(1)}$  через  $\varphi_1^{(1)}$ ,  $\varphi_2^{(1)}$ :

$$\xi_1^{(1)} \equiv \xi_{1,0}^{(1)} = F_1(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}), \quad (6.1.23)$$

$$\xi_2^{(1)} \equiv \xi_{2,0}^{(1)} = F_2(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}).$$

Ясно, что первоначальный тор при этом деформируется в некоторую новую поверхность (рис. 6.1.8). На этой поверхности равномерное вращение по параллелям  $\varphi_1^{(0)}$  и меридианам  $\varphi_2^{(0)}$  заменяется неравномерным движением по координатам  $\varphi_1^{(1)}$ ,  $\varphi_2^{(1)}$ , обусловленным появлением в уравнении (6.1.9) дополнительного члена  $\mathbf{f}$ . Это означает, что соответствующие периоды  $T_1$  и  $T_2$ , вообще говоря, изменятся. Чтобы компенсировать изменения периодов и сохранить их первоначальные значения, необходимо ввести контрчлены  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ . Рассмотрим теперь релаксацию  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\xi_2^{(1)}$  к деформированной поверхности. Если первоначально прямоугольная система координат  $\xi_1^{(0)}$ ,  $\xi_2^{(0)}$  по построению (или наглядному представлению нашей системы как точки, движущейся по поверхности тора) равномерно вращалась по  $\varphi_1^{(0)}$  и  $\varphi_2^{(0)}$  при обходе тора, то  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\xi_2^{(1)}$  могут образовывать новую систему координат, которая не будет ортогональной. Скорости релаксации  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\xi_2^{(1)}$  отличны от  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  из-за дополнительного члена  $\mathbf{g}$  в уравнении (6.1.10). Контрчлен  $D\xi$  позволяет исправить локально деформированную систему координат  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\xi_2^{(1)}$ : сделать ее снова ортогональной и восстановить первоначальные скорости релаксации. Если матрица  $\Lambda$  имеет комплексные (или чисто мнимые) собственные значения, то матрица  $D$  позволяет сохранить неизменной первоначальную матрицу  $\Lambda$ , в то время как вектор  $\mathbf{d}$  позволяет исправить (в смысле среднего) деформацию тора. Таким образом, дополнительные члены  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  и контрчлены деформируют траектории тремя способами:

- 1) искажается локальная система координат  $\varphi$  на торе (рис. 6.1.9, а);
- 2) изменяются радиальные перемещения, или, более общо, положения, элементов поверхности тора (6.1.9, б);
- 3) изменяется направление осей системы координат  $\xi$  (рис. 6.1.9, в).

Естественно попытаться ввести преобразование координат, которое учитывало бы все три типа деформации и позволяло перехо-

дуть от деформированных траекторий, описываемых уравнениями (6.1.11), (6.1.12), к недеформируемым траекториям, описываемым уравнениями (6.1.7) и (6.1.8). Для этого выразим  $\Phi$  и  $\xi$  через новые координаты  $\Psi$  и  $\chi$ . Рассматривая движение по координате  $\xi_0$ , выберем  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \Psi + \varepsilon u(\Psi, \varepsilon). \quad (6.1.24)$$

Выражение (6.1.24) учитывает, что скорость вращения не равномерна, а изменяется по мере вращения. Коэффициент  $\varepsilon$  перед  $u$  указывает в явном виде, что второй член в правой части (6.1.24) стремится к 0, и, следовательно,  $\Phi$  совпадает в пределе с  $\Psi$ , если стремится к нулю  $\varepsilon$  в уравнениях (6.1.11), (6.1.12). Что касается  $\xi$ , то необходимо иметь в виду следующее: деформированная траектория отличается от недеформированной (рис 6.1.7) растяжением в радиальном направлении и поворотом локальной системы координат. Следовательно, мы можем предположить, что

$$\xi = \chi + \varepsilon v(\Psi, \varepsilon) + \varepsilon V(\Psi, \varepsilon) \chi, \quad (6.1.25)$$

где  $v$  — учитывает растяжение в радиальном направлении, а член  $V \cdot \chi$  описывает поворот локальной системы координат. Так как  $\Psi$  — угловая переменная, потребуем, чтобы  $u$ ,  $v$  и  $V$  были периодическими по  $\Psi$  с периодом  $2\pi$ . Кроме того, функции  $u$ ,  $v$  и  $V$  должны быть аналитическими по  $\Psi$ ,  $\xi$  и  $\varepsilon$ . Покажем, что при подходящем выборе  $u$ ,  $v$ ,  $V$  и контрчленов  $\Delta$ ,  $d$ ,  $D$  уравнения (6.1.11), (6.1.12) можно преобразовать в уравнения относительно новых переменных  $\Psi$  и  $\chi$ , описывающие «недеформированные траектории» (рис. 6.1.7) и имеющие вид

$$\dot{\Psi} = \omega + O(\chi), \quad (6.1.26)$$

$$\dot{\chi} = \Lambda \chi + O(\chi^2), \quad (6.1.27)$$

Члены  $O$  содержат те величины, которыми мы пренебрегаем,  $O(\chi^k)$  означает аналитическую функцию от  $\Psi$ ,  $\chi$ ,  $\varepsilon$ , обращающуюся в нуль при  $\chi = 0$  вместе с производными по  $\chi$  до порядка  $k-1 \geq 0$ . Короче говоря, нас интересует преобразование, переводящее уравнения (6.1.11), (6.1.12) в уравнения (6.1.26), (6.1.27) с точностью

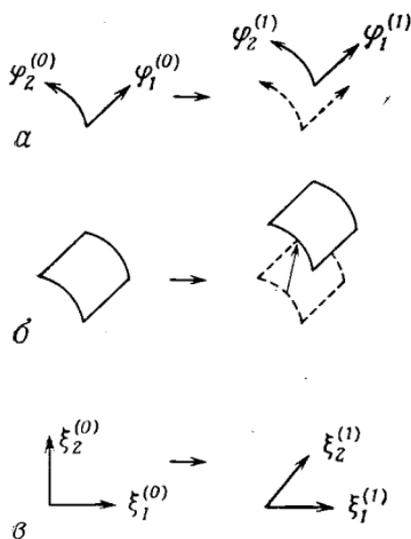


Рис. 6.1.9. Локальные изменения, вызванные деформацией тора. а — новые координаты на торе; б — смещение элементов тора; в — изменение системы координат, отсчитываемых от тора.

до членов, обозначенных через  $O$ . В частности, при

$$\chi = 0 \quad (6.1.28)$$

решение уравнения (6.1.26) имеет вид

$$\psi = \omega t \quad (6.1.29)$$

(с точностью до произвольной постоянной  $\psi_0$ ). Подставляя выражения (6.1.18), (6.1.29) в (6.1.24), (6.1.25), получаем

$$\varphi = \omega t + \varepsilon u(\omega t, \varepsilon), \quad (6.1.30)$$

$$\xi = \varepsilon v(\omega t, \varepsilon), \quad (6.1.31)$$

т. е. приходим к квазипериодическому решению.

## 6.2. Теорема Мозера (теорема 6.2.1)<sup>1</sup>

Итак, мы наметили общий ход доказательства. Для того чтобы воспроизвести доказательство полностью, необходимо принять некоторые допущения. Перечислим их. Нас будут интересовать уравнения (6.1.11), (6.1.12). Предположим, что матрица  $\Lambda$  в уравнении (6.1.12) диагонализуема, и обозначим через  $\Lambda_\mu$  ее собственные значения.

1) Рассмотрим выражения

$$i \sum_{\nu=1}^n j_\nu \omega_\nu + \sum_{\mu=1}^m k_\mu \Lambda_\mu \quad (6.2.1)$$

при

$$\sum |k_\mu| \leq 2 \quad (6.2.2)$$

и

$$\sum |k_\mu| \leq 1 \quad (6.2.3)$$

с целочисленными компонентами

$$(j_1, j_2, \dots, j_n) = \mathbf{j}, \quad (k_1, k_2, \dots, k_m) = \mathbf{k}. \quad (6.2.4)$$

Потребуем, чтобы в нуль обращалось лишь конечное число выражений (6.2.1), а именно те, для которых  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ . Тогда, как нетрудно понять, частоты  $\omega_1, \dots, \omega_n$  рационально независимы.

2) Потребуем, чтобы при некоторых постоянных  $K$  и  $\tau$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < K \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (6.2.5)$$

неравенство

$$\left| i \sum_{\nu=1}^n j_\nu \omega_\nu + \sum_{\mu=1}^m k_\mu \Lambda_\mu \right| \geq K (\|\mathbf{j}\|^\tau + 1)^{-1} \quad (6.2.6)$$

<sup>1</sup>) Приводимая нами формулировка теоремы несколько отличается от первоначальной формулировки Мозера.

выполнялось при всех целых числах, упоминавшихся в п. 1, для которых его левая часть обращается в нуль. Условие (6.2.6) можно рассматривать как обобщение условия КАМ. Подчеркнем, что под  $\|j\|$  мы в данном случае понимаем сумму

$$\|j\| = |j_1| + |j_2| + \dots + |j_n|.$$

3) Потребуем, чтобы  $f$  и  $g$  в уравнениях (6.1.11) и (6.1.12) были  $2\pi$ -периодическими по  $\varphi$  и вещественнозначными и аналитическими по  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\varepsilon$ . Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы сформулировать теорему Мозера.

**Теорема 6.2.1.** Если условия (1) — (3) выполнены, то существуют единственные аналитические степенные ряды  $\Delta(\varepsilon)$ ,  $d(\varepsilon)$ ,  $D(\varepsilon)$ , удовлетворяющие требованиям (6.1.13), (6.1.14), и такие, что уравнения (6.1.11), (6.1.12) обладают квазипериодическим решением с такими же характеристическими числами  $\omega_1, \dots, \omega_n$ ,  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ , как невозмущенное решение. Таким образом, теорема Мозера утверждает, что существует преобразование координат вида (6.1.24), (6.1.25), аналитическое по  $\psi$ ,  $\chi$  и  $\varepsilon$ , которое переводит уравнения (6.1.11), (6.1.12) в уравнения вида (6.1.26), (6.1.27). В частности, формулы (6.1.30), (6.1.31) задают квазипериодическое решение с характеристическими числами  $\omega_1, \dots, \omega_n$ ,  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ . Все ряды  $\Delta$ ,  $d$ ,  $D$  обладают ненулевым радиусом сходимости по  $\varepsilon$ . В то время как  $\Delta$ ,  $d$ ,  $D$  определяются однозначно,  $u$ ,  $v$ ,  $V$  определяются лишь с точностью до определенного класса преобразований (которые мы рассмотрим подробнее в приложении А).

Далее наше изложение строится по следующему плану. В разд. 6.3 мы покажем, каким образом контрчлены  $\Delta$ ,  $d$ ,  $D$ , а также  $u$ ,  $v$  и  $V$  можно определить с помощью вполне алгоритмичного метода последовательных приближений. Этот раздел представляет интерес в основном для тех, кто намеревается применять излагаемый нами формализм к задачам, возникающим в различных конкретных приложениях. В приложении А желающие могут найти строгое доказательство теоремы Мозера. Решающее значение имеет то место доказательства, где речь идет о сходимости метода последовательных приближений, описанного в разд. 6.3.

### 6.3. Метод последовательных приближений

Исходным пунктом наших рассуждений являются уравнения (6.1.11), (6.1.12), которые мы для удобства выпишем еще раз:

$$\dot{\varphi} = \omega + \varepsilon f(\varphi, \xi, \varepsilon) + \Delta, \quad (6.3.1)$$

$$\dot{\xi} = \Lambda \xi + \varepsilon g(\varphi, \xi, \varepsilon) + d + D\xi. \quad (6.3.2)$$

Эти уравнения с помощью преобразований

$$\varphi = \psi + \varepsilon \mathbf{u}(\psi, \varepsilon), \quad (6.3.3)$$

$$\xi = \chi + \varepsilon(\mathbf{v}(\psi, \varepsilon) + V(\psi, \varepsilon)\chi) \quad (6.3.4)$$

требуется перевести в уравнения (6.1.26), (6.1.27).

Разложим  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $V$ ,  $\Delta$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $D$  в степенные ряды по  $\varepsilon$  и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в правых и левых частях уравнений (6.3.1), (6.3.2). Для наших целей достаточно проанализировать уравнения, получающиеся при приравнивании коэффициентов при первой степени  $\varepsilon$ , поскольку коэффициенты при старших степенях  $\varepsilon$  порождают уравнения того же вида. Как хорошо известно из других вариантов метода последовательных приближений, уравнения в более высоких приближениях содержат коэффициенты более низких порядков.

Выписывая в явном виде величины не выше первого порядка по  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi + \varepsilon \mathbf{u}' + O(\varepsilon^2), \\ \Delta &= \varepsilon \Delta' + O(\varepsilon^2), \\ \xi &= \chi + \varepsilon(\mathbf{v}' + V'\chi) + O(\varepsilon^2), \\ \mathbf{d} &= \varepsilon \mathbf{d}' + O(\varepsilon^2), \\ D &= \varepsilon D' + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Подставим выражения (6.3.3), (6.3.4) в уравнение (6.3.1) и, используя разложения (6.3.5), сохраним только члены первого порядка по  $\varepsilon$ . Так как уравнения (6.3.1), (6.3.2) векторные и некоторые вектор-функции, например  $\mathbf{u}$ , необходимо дифференцировать по параметру  $\varphi$ , который сам является вектором, необходимо соблюдать особую осторожность с обозначениями. Начнем с компонент векторов. Из уравнения (6.3.1) следует, что

$$\dot{\psi}_\mu + \varepsilon \sum_{\nu} (\partial u'_\mu / \partial \psi_\nu) \dot{\psi}_\nu = \omega_\mu + \varepsilon f'_\mu(\psi, \chi, 0) + \varepsilon \Delta'_\mu. \quad (6.3.6)$$

Потребуем теперь, чтобы

$$\dot{\psi}_\mu = \omega_\mu \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0, \quad (6.3.7)$$

и введем для краткости следующее обозначение: будем рассматривать

$$(\partial u'_\mu / \partial \psi_\nu) \quad (6.3.8)$$

как элемент с индексами  $\mu$ ,  $\nu$  матрицы

$$\mathbf{u}'_\psi. \quad (6.3.9)$$

Нас будет интересовать частный случай соотношения (6.3.6), когда  $\chi = 0$ . Имея в виду уравнения (6.1.26), (6.1.27), потребуем, чтобы

уравнение  $\dot{\psi}_\mu = \omega_\mu$  выполнялось при  $\chi = 0$  с точностью до членов порядка  $\varepsilon$ . Уравнения (6.3.6) нетрудно записать в виде одного векторного уравнения:

$$u'_\psi \omega - \Delta' = f(\psi, 0, 0). \quad (6.3.10)$$

Подставим теперь с учетом соотношений (6.3.5) разложения (6.3.3), (6.3.4) в уравнение (6.3.2) и, сохранив только члены с точностью до  $\varepsilon$ , вернемся к покомпонентной записи уравнений. По правилу дифференцирования сложной функции получаем для левых частей уравнений (6.3.2)

$$\dot{\chi}_\mu + \varepsilon \sum (\partial v'_\mu(\psi)/\partial \psi_\nu) \dot{\psi}_\nu + \sum_{\nu, \lambda} (\partial V'_{\mu\nu}(\psi)/\partial \psi_\lambda) \dot{\psi}_\lambda \chi_\nu + \sum V'_{\mu\nu}(\psi) \dot{\chi}_\nu. \quad (6.3.11)$$

Правые части уравнений (6.3.2) имеют вид

$$\varepsilon g_\mu(\psi, \chi, 0) + \varepsilon \sum (\partial g_\mu(\psi, \chi, 0)/\partial \chi_\nu) \chi_\nu + \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} \chi_\nu + \\ + \varepsilon \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} v'_\nu(\psi) + \varepsilon \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} \sum_\nu V'_{\nu\nu} \chi_\nu + \varepsilon d \mu' + \varepsilon \sum_\nu D'_{\mu\nu} \chi_\nu. \quad (6.3.12)$$

Так как мы намереваемся вывести для  $\chi$  уравнение (6.1.27), потребуем, чтобы

$$\dot{\chi}_\mu = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} \chi_\nu, \quad (6.3.13)$$

или в векторных обозначениях

$$\dot{\chi} = \Lambda \chi. \quad (6.3.14)$$

Кроме того, производную

$$\partial v'_\mu(\psi)/\partial \psi_\nu \quad (6.3.15)$$

мы будем рассматривать как элемент с индексами  $\mu, \nu$  матрицы

$$v'_\psi. \quad (6.3.16)$$

Приравняем члены, не зависящие от  $\chi$ , в выражениях (6.3.11) и (6.3.12). С учетом условия (6.3.13) и введенной нами матричной интерпретации (6.3.16) производных (6.3.15) получаем для частного случая при  $\chi = 0$

$$v'_\psi \omega - \Lambda v' = g(\psi, 0, 0) + d. \quad (6.3.17)$$

Приравняем теперь члены выражений (6.3.11) и (6.3.12), линейные по  $\chi$ . Обозначим матрицу, элементы которой с индексами  $\mu, \nu$  равны

$$\sum (\partial V'_{\mu\nu}(\psi)/\partial \psi_\lambda) \omega_\lambda, \quad (6.3.18)$$

через

$$V_{\psi}\omega. \quad (6.3.19)$$

Кроме того, будем рассматривать производные

$$\partial g_{\mu}/\partial \chi_{\nu} \quad (6.3.20)$$

как элементы с индексами  $\mu, \nu$  матрицы

$$g_{\chi}. \quad (6.3.21)$$

Члены первого порядка по  $\chi$  приводят к матричному уравнению

$$V'_{\psi}\omega + V'\Lambda = g_{\chi} + \Lambda V' + D'. \quad (6.3.22)$$

Собирая уравнения (6.3.10), (6.3.17), (6.3.22), приходим к следующей системе уравнений ( $\chi = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} u'_{\psi}\omega - \Delta' &= f(\psi, 0, 0), \\ v'_{\psi}\omega - \Lambda v' - d' &= g(\psi, 0, 0), \\ V'_{\psi}\omega - V'\Lambda - \Lambda V' - D' &= g_{\chi}(\psi, 0, 0) \end{aligned} \right\}. \quad (6.3.23)$$

В этих уравнениях функции  $f, g, g_{\chi}$  заданы, равно как и постоянные  $\omega$  и  $\Lambda$ . Величины  $\psi$  в данном случае можно рассматривать как независимые переменные, в то время как функции  $u', v', V$  требуется найти. Уравнения (6.3.23) нетрудно привести к виду, обычно используемому в линейной алгебре. Для этого преобразуем матрицу  $V'$  в вектор путем перенумерации ее элементов, например матрицу

$$V' = \begin{pmatrix} V'_{11} & V'_{12} \\ V'_{21} & V'_{22} \end{pmatrix} \quad (6.3.24)$$

можно представить в виде вектора

$$v' = \begin{pmatrix} V'_{11} \\ V'_{12} \\ V'_{21} \\ V'_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.3.25)$$

Построим вектор

$$U = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ v' \end{pmatrix}. \quad (6.3.26)$$

Аналогичным образом заменим матрицу  $g_{\chi}$  вектором  $G$  и введем вектор

$$F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ G \end{pmatrix}. \quad (6.3.27)$$

Проделав такие же операции над  $\Delta'$ ,  $\mathbf{d}'$ ,  $\mathbf{D}'$ , построим вектор

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta' \\ \mathbf{d}' \\ \mathbf{D}' \end{pmatrix}. \quad (6.3.28)$$

Кроме того, у нас имеется матрица

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & & 0 \\ & L_2 & \\ 0 & & L_3 \end{pmatrix}, \quad (6.3.29)$$

подматрицы которой имеют размерность  $n$ ,  $m$  и  $m^2$  соответственно. Из уравнений (6.3.23) нетрудно видеть, что матрицы  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  должны иметь вид

$$L_1 = \sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu} \partial / \partial \psi_{\nu}, \quad (6.3.30)$$

$$L_2 = \sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu} \partial / \partial \psi_{\nu} - \Lambda, \quad (6.3.31)$$

$$L_3 = \sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu} \partial / \partial \psi_{\nu} - \underbrace{(\Lambda' - \Lambda'')}_{\hat{\Lambda}}, \quad (6.3.32)$$

где  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$  — матрицы, получающиеся из матрицы  $\Lambda$  при перенумерации индексов. В обозначениях (6.3.26) — (6.3.29) уравнения (6.3.23) представимы в виде

$$L\mathbf{U} = \mathbf{F} + \hat{\Lambda}. \quad (6.3.33)$$

Это — неоднородное уравнение для вектора  $\mathbf{U}$ . Определим прежде всего собственные значения оператора  $L$ . Для этого проще всего разложить решение  $\tilde{\mathbf{U}}$  уравнения

$$L\tilde{\mathbf{U}} = \lambda\tilde{\mathbf{U}} \quad (6.3.34)$$

в ряд Фурье

$$\tilde{\mathbf{U}}(\psi) = \sum_j \tilde{\mathbf{U}}_j \exp [i(j, \psi)]. \quad (6.3.35)$$

Введение оператора  $L$  может показаться излишним, однако, как станет ясно из дальнейшего, оно вполне целесообразно. Подставляя разложение (6.3.35) в уравнение (6.3.34), получаем

$$i(j, \omega) \tilde{\mathbf{u}}_j = \lambda \tilde{\mathbf{u}}_j, \quad (6.3.36)$$

$$[i(j, \omega) - \Lambda] \tilde{\mathbf{v}}_j = \lambda \tilde{\mathbf{v}}_j, \quad (6.3.37)$$

$$i(j, \omega) \tilde{\mathbf{V}}'_j - \hat{\Lambda} \tilde{\mathbf{V}}'_j = \lambda \tilde{\mathbf{V}}'_j. \quad (6.3.38)$$

В обозначениях уравнения (6.2.23) при исходной нумерации индексов уравнение (6.3.38) имеет вид

$$i(j, \omega) \tilde{V}'_j - \Lambda \tilde{V}'_j + \tilde{V}'_j \Lambda = \lambda \tilde{V}'_j. \quad (6.3.39)$$

Из полученных нами уравнений ясно видно, чему равны собственные значения матрицы  $L$ : так как уравнения для  $\tilde{u}'_j$ ,  $\tilde{v}'_j$ ,  $\tilde{V}'_j$  не связаны между собой, каждое из них можно решать независимо от остальных. Из уравнения (6.3.36) мы получаем собственное значение

$$i(j, \omega); \quad (6.3.40)$$

диагонализуя уравнение (6.3.37), приходим к собственным значениям

$$i(j, \omega) - \Lambda_\mu, \quad (6.3.41)$$

а диагонализуя уравнение (6.3.38) — к собственным значениям

$$i(j, \omega) - \Lambda_\mu + \Lambda_{\mu'}, \quad (6.3.42)$$

в чем особенно просто убедиться, если уравнение (6.3.38) привести к виду (6.3.39).

Как известно из линейной алгебры, нулевое пространство образуют векторы  $\tilde{U}_j$  с нулевыми собственными значениями. Из предположения (1) (см. разд. 6.2) следует, что собственные значения (6.3.40) — (6.3.42) обращаются в нуль только при  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ . После этих замечаний мы можем воспользоваться хорошо известной теоремой линейной алгебры о разрешимости неоднородных уравнений (6.3.33). Для этого разложим  $\mathbf{F}$  в ряд Фурье вида (6.3.35) и приравняем коэффициенты при  $\exp[i(j, \omega)]$  в правой и левой частях уравнения (6.3.33). При  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$  получаем

$$i(j, \omega) \mathbf{u}'_j = \mathbf{f}_j, \quad (6.3.43)$$

$$[i(j, \omega) - \Lambda] \mathbf{v}'_j = \mathbf{g}_j, \quad (6.3.44)$$

$$[i(j, \omega)] \mathbf{V}'_j - \Lambda \mathbf{V}'_j + \mathbf{V}'_j \Lambda = \mathbf{g}_{\chi, j}, \quad (6.3.45)$$

или, записывая уравнение (6.3.45) покомпонентно (для случая, когда матрица  $\Lambda$ , например, диагональна),

$$i(j, \omega) V'_{i(\mu, \nu)} - (\Lambda_\mu - \Lambda_\nu) V'_{i(\mu, \nu)} = \mathbf{g}_{\chi, i(\mu, \nu)}. \quad (6.3.46)$$

Так как собственные значения отличны от нуля, выписанные нами уравнения могут быть однозначно разрешены относительно неизвестных  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{V}'$ .

Обратимся теперь к собственным векторам  $\tilde{U}_j$  с нулевыми собственными значениями. По предположению (1) (см. разд. 6.2), они могут быть получены только при  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ . Итак, собственные векторы

нулевого пространства удовлетворяют уравнениям

$$0 \cdot \mathbf{u}'_0 = 0, \quad (6.3.47)$$

$$\Lambda \cdot \mathbf{v}'_0 = 0, \quad (6.3.48)$$

$$\Lambda \mathbf{V}'_0 - \mathbf{V}'_0 \Lambda = 0, \quad (6.3.49)$$

вытекающим из уравнений (6.3.36) — (6.3.38) и условий обращения в нуль собственных значений (6.3.40) — (6.3.42).

Рассмотрим неоднородные уравнения, соответствующие уравнениям (6.3.43) — (6.3.45) при  $\mathbf{j} = 0$ . Они имеют вид

$$-\Delta' = \mathbf{f}_0, \quad (6.3.50)$$

$$-\Lambda \mathbf{v}'_0 - \mathbf{d}' = \mathbf{g}_0. \quad (6.3.51)$$

$$-\Lambda \mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}'_0 \Lambda - \mathbf{D}' = \mathbf{g}_{\chi, 0}. \quad (6.3.52)$$

Ясно, что уравнение (6.3.50) однозначно определяет  $\Delta'$ . Из условия (6.3.48), т. е. из соотношения

$$\Lambda \mathbf{v}'_0 = 0, \quad (6.3.53)$$

следует, что  $\mathbf{d}'$  однозначно определяется уравнением (6.3.51). Аналогично из (6.3.49) мы заключаем, что  $\mathbf{D}'$  однозначно определяется уравнением (6.3.52). А что можно утверждать о коэффициентах  $\mathbf{u}'_0$ ,  $\mathbf{v}'_0$ ,  $\mathbf{V}'_0$ ? Как известно из линейной алгебры, при ограничениях, выражаемых уравнениями (6.3.47) — (6.3.49), векторы нулевого пространства могут быть выбраны произвольно. В дальнейшем мы будем полагать их равными нулю, т. е. попросту «выбросим» нулевое пространство. Здесь уместно остановиться и подвести итог тому, что нам уже удалось достичь. Мы описали первый этап метода последовательных приближений: приведение уравнений (6.3.1), (6.3.2) к виду (6.1.26), (6.1.27) с помощью преобразований (6.3.3), (6.3.4). С этой задачей мы справились, определив в низшем приближении  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{V}$  и контрчлены  $\Delta$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{D}$ . Было показано в явном виде, каким образом можно получить формальные решения выведенных нами уравнений. Продолжая выполнять последовательные приближения, мы можем найти неизвестные величины с точностью до любого заранее заданного порядка по  $\epsilon$ . Как будет ясно из дальнейшего, вычислять  $\Delta$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{D}$  особенно удобно, и те из читателей, которые интересуются главным образом практическими приложениями излагаемого метода, могут ограничиться приведенным выше алгоритмом.

С математической точки зрения необходимо ответить еще на следующие вопросы.

1. В каждом приближении уравнения решались с помощью рядов Фурье. Сходятся ли эти ряды? Вопрос о сходимости отнюдь

не тривиален, так как, например, из уравнения (6.3.43) следует, что

$$u_j' = [i(j, \omega)]^{-1} f_j, \quad (6.3.54)$$

т. е. мы сталкиваемся с проблемой малых знаменателей (см. разд. 2.1.3 и 2.5.2). В приложении А мы вернемся снова к этой проблеме и рассмотрим ее на основе предположения об аналитичности функций  $f$  и  $g$  по  $\varphi$  и  $\xi$ .

2. Необходимо доказать сходимость избранного нами метода последовательных приближений в целом. Это позволит пролить свет на выбор векторов нулевого пространства в каждом приближении. Оказывается, что любой выбор векторов нулевого пространства приводит к допустимому решению, если  $\varepsilon$ -сумма по векторам нулевого пространства сходится. В этой связи мы покажем, что существуют классы допустимых преобразований (6.3.3), (6.3.4), которые взаимосвязаны между собой. К рассмотрению всех этих проблем мы также вернемся в приложении А.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИНЦИП ПОДЧИНЕНИЯ

Основная цель этой книги состоит в изучении резких макроскопических изменений систем. Как было показано во введении, такие изменения могут наступить, когда система теряет устойчивость по линейному приближению. В точке, где происходит потеря устойчивости, становится возможным исключить очень большое число степеней свободы, поэтому макроскопическое поведение системы зависит лишь от весьма небольшого числа степеней свободы. В этой главе мы хотим показать в явном виде, каким образом вблизи точки, в которой происходит потеря устойчивости по линейному приближению, можно исключить большинство переменных. Такие точки потери устойчивости называются критическими. Предлагаемый вниманию читателя метод прост и охватывает большинство практически важных случаев. Основные идеи метода мы покажем на простом примере (разд. 7.1), после чего изложим наш метод для нелинейных уравнений в общем случае (разд. 7.2—7.5). Основные предположения и допущения перечислены в разд. 7.2, окончательные результаты приведены в разд. 7.4 (до формулы (7.4.5) включительно). Разд. 7.3 и конец разд. 7.4 посвящены вопросам, носящим более технический характер. Остальную часть этой главы мы отводим обобщению принципа подчинения на случай дискретных отображений с шумом и на стохастические дифференциальные уравнения типа Ито (и Стратоновича) (разд. 7.6—7.9).

## 7.1. Пример

Рассмотрим следующие нелинейные уравнения относительно двух переменных  $u$  и  $s$ :

$$\dot{u} = \alpha u - us, \quad (7.1.1)$$

$$\dot{s} = -\beta s + u^2. \quad (7.1.2)$$

Предположим, что

$$\alpha \geq 0, \quad (7.1.3)$$

$$\beta > 0. \quad (7.1.4)$$

Если пренебречь нелинейными членами  $u \cdot s$  и  $u^2$ , то мы получим систему двух не связанных уравнений, встречавшихся нам при ана-

лизе устойчивости по линейному приближению. Ясно, что  $u$  — мода, нейтральная или неустойчивая по линейному приближению, а  $s$  — устойчивая мода. Именно поэтому мы и выбрали такие обозначения<sup>1)</sup>. Покажем, что переменную  $s$  можно выразить через  $u$ , исключив тем самым  $s$  из уравнений (7.1.1), (7.1.2). Уравнение (7.1.2) легко интегрируется в квадратурах:

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} u^2(\tau) d\tau \quad (7.1.5)$$

(такая запись решения означает, что мы выбрали начальное условие  $s = 0$  при  $t = -\infty$ ). Интеграл в правой части (7.1.5) существует, если величина  $|u(\tau)|^2$  ограничена при всех  $\tau$  или расходится при  $\tau \rightarrow -\infty$  медленнее, чем  $\exp(|\beta\tau|)$ . Это — условие самосогласованности, которое подлежит проверке.

Интеграл в (7.1.5), как мы сейчас покажем, можно преобразовать так, чтобы величина  $s$  в момент времени  $t$  зависела только от  $u$  при том же значении  $t$ .

### 7.1.1. Адиабатическое приближение

Вычислим интеграл в (7.1.5) по частям, т. е. по правилу

$$\int \dot{v} w d\tau = v w - \int v \dot{w} d\tau, \quad (7.1.6)$$

отождествив  $v$  с  $\exp[-\beta(t-\tau)]$ , а  $w$  — с  $u^2$ . Интегрируя по частям, преобразуем (7.1.5) к виду

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} 2(u\dot{u})_{\tau} d\tau. \quad (7.1.7)$$

Рассмотрим случай, когда  $u$  изменяется столь медленно, что  $\dot{u}$  допустимо считать малой величиной. Тогда интегральным членом в (7.1.7) можно пренебречь. Это и есть *адиабатическое приближение*, в котором

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t). \quad (7.1.8)$$

Решение (7.1.8) можно получить из (7.1.2), полагая просто

$$\dot{s} = 0 \quad (7.1.9)$$

в левой части уравнения (7.1.2). Выясним, при каких условиях интегралом в (7.1.7) можно пренебречь по сравнению с первым членом. Заменяв величину  $(u\dot{u})_{\tau}$  в подынтегральном выражении на

$$(|u \dot{u}|)_{\max}, \quad (7.1.10)$$

<sup>1)</sup> По начальным буквам английских слов unstable (неустойчивая) и stable (устойчивая) мода.— *Прим. перев.*

вынесем максимальное значение (7.1.10) из-под знака интеграла. Оставшаяся экспонента легко интегрируется, и мы получаем условие

$$\frac{(|u| \|\dot{u}\|)_{\max}}{\beta^2} \ll \frac{|u|^2}{\beta}. \quad (7.1.11)$$

Оно выполняется, если

$$|\dot{u}|_{\max} \ll \beta |u|. \quad (7.1.12)$$

Неравенство (7.1.12) раскрывает смысл адиабатического приближения: мы требуем, чтобы величина  $u$  изменялась достаточно медленно по сравнению с изменением, предписываемым постоянной затухания  $\beta$ .

Покажем теперь, как  $s(t)$  можно выразить через  $u(t)$ .

### 7.1.2. Исключение переменной

Чтобы наглядно продемонстрировать наиболее существенные особенности нашего подхода, положим  $\alpha = 0$ . Тогда уравнение (7.1.1) примет вид

$$\dot{u} = -us. \quad (7.1.13)$$

Воспользуемся пока еще точным соотношением (7.1.7) и подставим в него вместо  $\dot{u}$  произведение  $-us$  из уравнения (7.1.13):

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (u^2 s)_{\tau} d\tau. \quad (7.1.14)$$

Это — интегральное уравнение относительно  $s(t)$ , так как  $s$  входит не только в левую часть, но и в правую — в подынтегральное выражение при  $t = \tau$ . Чтобы решить уравнение (7.1.14), воспользуемся методом последовательных приближений, который в рассматриваемом случае сводится к представлению неизвестной  $s$  степенями  $u$ . В первом приближении величину  $s$ , входящую в правую часть интегрального уравнения (7.1.14), можно заменить величиной  $u^2$  из приближенного соотношения (7.1.8). При этом уравнение (7.1.14) будет иметь вид

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{1}{4} u^4(\tau) d\tau. \quad (7.1.15)$$

Чтобы получить следующее приближение, проинтегрируем по частям выражение, стоящее в (7.1.15) под знаком интеграла, по формуле (7.1.6), в которой функцию  $v$  отождествим с экспонентой в (7.1.15):

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2(t) + \frac{2}{\beta^3} u^4(t) - \underbrace{\frac{8}{\beta^3} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (u^3 \dot{u})_{\tau} d\tau}_I. \quad (7.1.16)$$

Производную  $\dot{u}$  под интегралом мы можем заменить на  $-us$  из уравнения (7.1.13). Тогда

$$I = \frac{8}{\beta^3} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} u^4 \left( \frac{1}{\beta} u^2 + \frac{2}{\beta^2} u^4 \right) d\tau. \quad (7.1.17)$$

Разобьем (7.1.17) на интеграл, содержащий  $u^6$ , и другую часть, содержащую члены еще более высокого порядка (ч. в. п.):

$$I = \frac{8}{\beta^4} \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} u^6 d\tau + \text{ч. в. п.} \quad (7.1.18)$$

Интегрируя по частям, приходим к разложению

$$s(t) = \frac{1}{\beta} u^2 + \frac{2}{\beta^3} u^4 + \frac{8u^6}{\beta^5} + \dots \quad (7.1.19)$$

Итак, мы видим, что наш метод последовательных приближений позволяет, неоднократно повторяя интегрирование по частям, представить  $s(t)$  в виде разложения по степеням  $u(t)$  (значения функций  $s(t)$  и  $u(t)$  берутся при одних и тех же  $t$ ). При достаточно малых  $u$  можно надеяться, что ряд сходится быстро и несколько первых его членов дают очень хорошее приближение. Прежде чем мы приступим к выяснению сходимости нашего метода, необходимо вывести несколько точных соотношений. Введем для удобства следующие обозначения: запишем исходные уравнения (7.1.13), (7.1.2) в виде

$$\dot{u} = -us = Q(u, s), \quad (7.1.20)$$

$$\dot{s} = -\beta s + u^2 = -\beta s + P(u, s). \quad (7.1.21)$$

Заметим, что в рассматриваемом нами частном случае функция  $P$  зависит только от  $u$ :

$$P = P(u). \quad (7.1.22)$$

Как видно из изложенного выше метода, величину  $s$  действительно можно выразить через  $u$ :

$$s = s(u), \quad (7.1.23)$$

поэтому в дальнейшем мы, не ограничивая общности, будем предполагать, что такая подстановка произведена. Выведем для  $s(u)$  формальное разложение в степенной ряд. Начнем с выражения (7.1.5), которое запишем в виде

$$s(u(t)) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} P(u)_\tau d\tau. \quad (7.1.24)$$

Как и прежде, проинтегрируем подынтегральное выражение по частям, отождествив  $P(u)$  с  $\omega$ . Дифференцирование  $P(u)$  по времени выполняется по правилу дифференцирования сложной функции: сначала  $P(u)$  дифференцируется по  $u$ , а затем  $u$  дифференцируется по времени. Но уравнение (7.1.20) позволяет нам заменить производную  $\dot{u}$  функцией  $Q(u, s)$ , в которой переменную  $s$  по крайней мере в принципе можно считать функцией от  $u$ . Интегрируя по частям снова и снова и используя каждый раз уравнение (7.1.20), приходим к разложению

$$s(u) = \frac{1}{\beta} P(u) - \frac{1}{\beta} Q \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\beta} P + \\ + \frac{1}{\beta} Q \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\beta} Q \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\beta} P + \dots \quad (7.1.25)$$

В следующем разделе нам понадобится сокращенное обозначение

$$\left( \frac{\partial}{dt} \right)_{\infty} = Q(u, s(u)) \frac{\partial}{\partial u} \quad (7.1.26)$$

(правая часть равенства служит определением обозначения, вводимого в левой части равенства). Ясно, что если ряд (7.1.25) рассматривать как формальную геометрическую прогрессию относительно оператора (7.1.26), то, «суммируя» ее, мы получаем

$$s(t) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{d}{dt} \right)_{\infty} \right)} P, \quad (7.1.27)$$

или в исходных обозначениях

$$s(t) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left( 1 + Q \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\beta} \right)} P. \quad (7.1.28)$$

Умножая обе стороны равенства (7.1.28) слева на оператор

$$\left( 1 + Q \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\beta} \right), \quad (7.1.29)$$

приходим к равенству

$$\left( \beta + Q \frac{\partial}{\partial u} \right) s = P(u, s), \quad (7.1.30)$$

которое после очевидных преобразований приводится к виду

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{P(u, s) - \beta s}{Q(u, s)}. \quad (7.1.31)$$

Наконец, подставляя явный вид функций  $P$  и  $Q$ , запишем соотношение (7.1.31) в виде

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{u^2 - \beta s}{-us}. \quad (7.1.32)$$

Итак, мы получили для  $s(u)$  обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

В следующем разделе мы покажем, каким образом можно существенно обобщить все эти соотношения и получить уравнения гораздо более общего вида, чем (7.1.1), (7.1.2). В практических приложениях возникает необходимость суммировать такие ряды, как (7.1.25), но, разумеется, бесконечный ряд мы будем аппроксимировать его конечным отрезком. Используя конечную аппроксимацию, мы заодно обходим различного рода трудности, возникающие при попытке доказать сходимость формальных рядов типа (7.1.25).

В практических задачах нередко бывает необходимо оценить остаточный член ряда. Чтобы получить такую оценку, разобьем бесконечный ряд (7.1.25) следующим образом:

$$s(t) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^m \left( -Q \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\beta} \right)^n P(u, s) + \underbrace{\frac{1}{\beta} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left( -Q \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\beta} \right)^n P(u, s)}_r. \quad (7.1.33)$$

Суммируя остаточный член

$$r = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -Q \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\beta} \right)^{n+m+1} P(u, s(u)), \quad (7.1.34)$$

получаем

$$r = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left( 1 + Q \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\beta} \right)} \left( -Q \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\beta} \right)^{m+1} P. \quad (7.1.35)$$

Оценить остаточный член нетрудно, выбрав его в форме (7.1.35) или в эквивалентной форме

$$\left( \beta + Q \frac{\partial}{\partial u} \right) r = \left( -Q \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\beta} \right)^{m+1} P. \quad (7.1.36)$$

Член  $Q$  приводит к появлению степеней не ниже, чем  $u^3$ , в то время как дифференцирование понижает порядок на единицу. Следовательно, каждая скобка, стоящая перед  $P$  в правой части равенства (7.1.36), приводит к появлению множителя  $u^2$  в нашем конкретном

примере. Вместе с множителем  $u^2$  возникает и соответствующая степень величины  $1/\beta$ . Это означает, что остаточный член становится малым, если величина  $u^2/\beta$  много меньше единицы. С другой стороны, из-за повторных дифференцирований, входящих в формулы (7.1.35) и (7.1.36), число членов возрастает, как  $m!$ . Следовательно, при выборе остаточного члена необходимо следить за тем, чтобы число  $m$  не было слишком большим, или, иначе говоря, при заданном  $m$  величина  $u$  должна быть достаточно малой. Такая процедура несколько отличается от более традиционных критериев сходимости, но свидетельствует о том, что, выбрав величину  $u$  достаточно малой, мы можем выразить  $s$  через  $u$  сколь угодно точно.

Вернемся снова к нашему примеру (7.1.32). Покажем, что, исходя из уравнения (7.1.32),  $s$  можно явно выразить через  $u$ . Потребуем, чтобы правая часть уравнения (7.1.32), которое мы выпишем еще раз:

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{u^2 - \beta s}{-us}, \quad (7.1.37)$$

оставалась регулярной при одновременном выполнении предельных переходов  $s \rightarrow 0$  и  $u \rightarrow 0$ . Решение уравнения (7.1.37) будем искать в виде

$$s = u^2 [c_1 + f_1(u)]. \quad (7.1.38)$$

Подставляя (7.1.38) в уравнение (7.1.37), получаем

$$2u(c_1 + f_1) + u^2 f_1' = \frac{u^2 - \beta u^2(c_1 + f_1)}{-uu^2(c_1 + f_1)}. \quad (7.1.39)$$

Так как правая часть должна оставаться регулярной, необходимо положить

$$c_1 = \frac{1}{\beta}, \quad (7.1.40)$$

после чего правая часть тождества (7.1.39) перейдет в

$$\frac{-u^2 f_1 \beta}{-u^3(c_1 + f_1)}. \quad (7.1.41)$$

Для того чтобы  $s \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow 0$ , функцию  $f_1$  следует выбрать в виде

$$f_1 = u^2(c_2 + f_2), \quad (7.1.42)$$

тогда

$$\frac{2u}{\beta} + 2u^3 c_2 + 2u^3 f_2 + u^2 2u(c_2 + f_2) + u^4 f_2' = \frac{u(c_2 + f_2)\beta}{1/\beta + u^2(c_2 + f_2)}. \quad (7.1.43)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $u$  в правой и левой частях тождества (7.1.43), мы обнаруживаем, что

$$c_2 = \frac{2}{\beta^3}. \quad (7.1.44)$$

Итак, мы приходим к разложению

$$s = \frac{u^2}{\beta} + \frac{2u^4}{\beta^3} + \dots, \quad (7.1.45)$$

которое согласуется с ранее полученным нами разложением (7.1.19).

Исходя из уравнений (7.1.1), (7.1.2) (включающих в себя рассмотренный нами случай  $\alpha = 0$ ), мы можем прийти к уравнению (7.1.37) гораздо проще, а именно записав уравнения (7.1.1), (7.1.2) в виде

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta s} \right) \equiv \dot{u} = \alpha u - us, \quad (7.1.46)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \equiv \dot{s} = -\beta s + u^2. \quad (7.1.47)$$

Левую часть уравнения (7.1.46) мы можем разделить на левую часть уравнения (7.1.47), а правую часть — на правую. Величина  $\Delta t$  при этом сократится, и мы получим уравнение

$$\frac{ds}{du} = -\frac{\beta s + u^2}{\alpha u - us}. \quad (7.1.48)$$

Это — хорошо известное уравнение из теории автономных дифференциальных уравнений на плоскости [1]. Предлагаемый нами метод разложения в ряд может показаться излишне громоздким, но стоит лишь нам столкнуться с проблемами обобщения уравнения (7.1.48) на случай неавтономных дифференциальных уравнений с большим числом переменных, как полезность нашего метода станет очевидной: довольно быстро выясняется, что других методов, кроме намеченного нами выше, практически не существует.

В следующем разделе мы обобщим изложенный нами метод в нескольких отношениях. В практических приложениях иногда встречаются уравнения с управляющим параметром  $\alpha$ , отличным от нуля, поэтому представляется желательным рассмотреть уравнения вида

$$\dot{u} = \alpha u - us. \quad (7.1.49)$$

Уравнения могут иметь и более сложную структуру, например уравнения для исключаемых переменных могут иметь вид

$$\dot{s} = -\beta s + u^2 + us + \dots \quad (7.1.50)$$

Правая часть таких уравнений может иметь еще более сложный вид, например содержать многочлены по  $u$  и  $s$ . Кроме того, встречаются в приложениях и неавтономные уравнения, т. е. уравнения с коэффициентами, явно зависящими от времени  $t$ :

$$\dot{s} = -\beta s + a(t)u^2. \quad (7.1.51)$$

Во многих случаях приходится рассматривать системы дифференциальных уравнений относительно нескольких переменных  $u$  и  $s$ .

Существуют и другие типы уравнений, также подлежащие анализу, например уравнения

$$\dot{\varphi} = \omega + \Phi(u, s, \varphi), \quad (7.1.52)$$

где  $\Phi$  — функция, периодическая по  $\varphi$ . В приложениях встречаются уравнения вида (7.1.52), содержащие несколько переменных  $\varphi$ . Наконец, немаловажную роль играют стохастические дифференциальные уравнения

$$\dot{s} = -\beta s + u^2 + F_s(t), \quad (7.1.53)$$

где  $F_s(t)$  — случайная вынуждающая сила. Включение ее делает уравнения неоднородными. Дополнительные трудности возникают в том случае, если функция  $F_s(t)$  разрывна. Еще большие трудности приходится преодолевать, если случайная вынуждающая сила зависит от переменных  $s$  и  $u$ . Чтобы не перегружать изложение, разобьем его на две части: сначала рассмотрим флуктуирующие силы, допускающие аппроксимацию непрерывными функциями, а затем (в разд. 7.9) перейдем к общему классу уравнений, содержащих случайные вынуждающие силы, не поддающиеся такой аппроксимации.

## 7.2. Общая формулировка принципа подчинения. Основные уравнения

Рассмотрим набор зависящих от времени переменных  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, s_1, s_2, \dots, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots$ , объединенных в векторы  $\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ . Знак тильды позволяет отличать эти переменные от аналогичных переменных, возникающих ниже после некоторых преобразований. Смысл обозначений  $\tilde{\mathbf{u}}$  и  $\tilde{\mathbf{s}}$  станет ясен из дальнейшего:  $\tilde{\mathbf{u}}$  означает неустойчивую (unstable) или незатухающую (undamped), а  $\mathbf{s}$  — устойчивую (stable) моду. Переменные  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  играют роль фазовых углов. В этом мы также убедимся из дальнейших глав. Предположим, что переменные  $\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  удовлетворяют следующей системе

обыкновенных дифференциальных уравнений <sup>1)</sup>:

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \tilde{\Lambda}_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t) + \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}}(t), \quad (7.2.1)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{s}}} = \tilde{\Lambda}_{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t) + \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}(t), \quad (7.2.2)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}} = \boldsymbol{\omega} + \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t) + \tilde{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\varphi}}(t). \quad (7.2.3)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что  $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{s}}$  — матрицы, а  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор, не зависящие от времени. Нетрудно, однако, обобщить наш подход на случай, когда все эти величины зависят от времени. Примем следующие предположения. Введем малый параметр  $\delta$  и будем считать вектор  $\tilde{\mathbf{u}}$  величиной порядка  $\delta$ . Предположим, что матрица  $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{u}}$  приведена к жордановой нормальной форме и допускает разложение вида

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbf{u}} = \Lambda'_{\mathbf{u}} + i\Lambda''_{\mathbf{u}} + \Lambda'''_{\mathbf{u}} \equiv \Lambda'_{\mathbf{u}} + \hat{\Lambda}_{\mathbf{u}}, \quad (7.2.4)$$

где  $\Lambda'_{\mathbf{u}}$ ,  $\Lambda''_{\mathbf{u}}$  — вещественные диагональные матрицы. Относительно элементов матрицы  $\Lambda''_{\mathbf{u}}$  никаких предположений не делается, элементы матрицы  $\Lambda'_{\mathbf{u}}$  должны быть величинами порядка  $\delta$ . Матрица  $\Lambda'''_{\mathbf{u}}$  содержит недиагональные элементы жордановой нормальной формы матрицы  $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{u}}$  (см. разд. 2.4.2). Матрица  $\Lambda_{\mathbf{s}}$  по предположению также приведена к жордановой нормальной форме и допускает разложение на вещественную ( $\Lambda'_s$ ) и мнимую ( $\Lambda''_s$ ) части:

$$\Lambda_{\mathbf{s}} = \Lambda'_s + i\Lambda''_s. \quad (7.2.5)$$

Здесь  $\Lambda''_s$  — диагональная матрица, элементы которой могут быть произвольной величины. Относительно диагональных элементов  $\gamma_i$  матрицы  $\Lambda'_s$  предполагается, что они удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_i \leq \beta < 0, \quad (7.2.6)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\varphi}} \quad (7.2.7)$$

— величины порядка  $\delta^2$  или ниже, а  $\tilde{\mathbf{Q}}$  и  $\tilde{\mathbf{P}}$  не должны содержать членов, линейных по  $\tilde{\mathbf{u}}$  или  $\tilde{\mathbf{s}}$  (но могут содержать произведение  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}$ ). Функции

$$\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{R}} \quad (7.2.8)$$

—  $2\pi$ -периодичны по  $\boldsymbol{\varphi}$ . Функции (7.2.7) по предположению ограничены при  $-\infty < t < +\infty$  и любых фиксированных значениях  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$ . Функции  $\tilde{\mathbf{F}}$  — вынуждающие силы. Они могут, в частности,

<sup>1)</sup> В действительности излагаемый нами формализм допускает обобщение на уравнения с частными производными при надлежаще выбранной норме (например, в банаховом пространстве).

описывать стохастические силы. Однако в этом разделе мы будем предполагать, что функции  $\tilde{\mathbf{F}}$  непрерывны по своим аргументам.

В следующих разделах мы рассмотрим стохастические силы, представимые в виде

$$\tilde{\mathbf{F}}_i(t) \equiv \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t) = G(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t) \cdot \mathbf{F}_0(t), \quad (7.2.9)$$

где  $\mathbf{F}_0$  — винеровский процесс. В этом случае с матрицей  $G$  необходимо обращаться осторожно, поскольку в точках разрыва следует брать соответствующие пределы функций  $\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ , например,

$$\tilde{G}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t) = \alpha G_{t+0} + \beta G_{t-0}. \quad (7.2.10)$$

Эту проблему мы обсудим в следующих разделах, а пока предположим, что функции (7.2.9) можно рассматривать так же, как функции  $\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{R}}$ . Хотя некоторые из приводимых ниже соотношений выполняются и в более общих случаях, для большинства приложений достаточно предположить, что  $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{R}}$  допускают разложение в степенные ряды по  $\tilde{\mathbf{u}}$ , и  $\tilde{\mathbf{s}}$ , это означает, что, например, функция  $\tilde{\mathbf{P}}$  представима в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t) = & \tilde{A}_{suu} : \tilde{\mathbf{u}} : \tilde{\mathbf{u}} + 2\tilde{A}_{sus} : \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{s} + \tilde{A}_{sss} : \mathbf{s} : \mathbf{s} + \\ & + \tilde{B}_{suuu} : \tilde{\mathbf{u}} : \tilde{\mathbf{u}} : \tilde{\mathbf{u}} + 3\tilde{B}_{suus} : \tilde{\mathbf{u}} : \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{s} + \dots \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

Обозначения, введенные в (7.2.11), имеют следующий смысл. Запишем  $\tilde{\mathbf{P}}$  как вектор-столбец:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = (\tilde{P}_j). \quad (7.2.12)$$

Определим

$$\tilde{A}_{suu} : \tilde{\mathbf{u}} : \tilde{\mathbf{u}} \quad (7.2.13)$$

как вектор,  $j$ -я компонента которого равна

$$\sum_{k_1, k_2} \tilde{A}_{jk_1 k_2} \tilde{u}_{k_1} \tilde{u}_{k_2}. \quad (7.2.14)$$

Коэффициент  $\tilde{A}_{jk_1 k_2}$  здесь может быть  $2\pi$ -периодической функцией по  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  и вместе с тем непрерывной функцией времени  $t$ :

$$\tilde{A}_{suu} = \tilde{A}_{suu}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}, t). \quad (7.2.15)$$

Функция  $\tilde{\mathbf{Q}}$  по предположению допускает разложение, аналогичное разложению (7.2.11). Разложение функции  $\tilde{\mathbf{R}}$  по предположе-

нию имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{s}, \varphi, t) = R_0(\tilde{\varphi}, t) + \mathbf{R}_1(\tilde{\varphi}, t) : \tilde{\mathbf{u}} + \\ + \tilde{\mathbf{R}}_2(\tilde{\varphi}, t) : \mathbf{s} + \text{Члены, аналогичные (7.2.11)}. \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

Пусть  $\mathbf{R}_0$  — величина порядка  $\delta^2$ , а  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  — величины порядка  $\delta$ . С помощью преобразований <sup>1)</sup>

$$\tilde{\mathbf{u}} = \exp(\hat{\Lambda}_u t) \mathbf{u}, \quad (7.2.17)$$

$$\tilde{\varphi} = \omega t + \varphi \quad (7.2.18)$$

перейдем к новым переменным  $\mathbf{u}, \varphi$ , зависящим от времени. Под действием преобразований (7.2.17), (7.2.18) исходные уравнения (7.2.1) — (7.2.3) переходят в уравнения

$$\dot{\mathbf{u}} = \Lambda_u \mathbf{u} + \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t) + \mathbf{F}_u(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t), \quad (7.2.19)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \Lambda_s \mathbf{s} + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t) + \mathbf{F}_s(t) = \Lambda_s \mathbf{s} + \mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t), \quad (7.2.20)$$

$$\dot{\varphi} = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t) + \mathbf{F}_\varphi(t) = \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t). \quad (7.2.21)$$

Выражения, стоящие справа от второго знака равенства в каждой строке, — не более чем сокращенные обозначения. Что касается выражений, стоящих между знаками равенства (в среднем столбце), то они расшифровываются следующим образом:

$$\Lambda_u \equiv \Lambda'_u. \quad (7.2.22)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t) = \exp(-\hat{\Lambda}_u t) \tilde{\mathbf{Q}}(\exp(\hat{\Lambda}_u t) \mathbf{u}, \mathbf{s}, \omega t + \varphi, t), \quad (7.2.23)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t) = \tilde{\mathbf{P}}(\exp(\hat{\Lambda}_u t) \mathbf{u}, \mathbf{s}, \omega t + \varphi, t), \quad (7.2.24)$$

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t) = \tilde{\mathbf{R}}(\exp(\hat{\Lambda}_u t) \mathbf{u}, \mathbf{s}, \omega t + \varphi, t), \quad (7.2.25)$$

$$\mathbf{F}_u = \exp(-\hat{\Lambda}_u t) \tilde{\mathbf{F}}_u(\exp(\hat{\Lambda}_u t) \mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi + \omega t, t), \quad (7.2.26)$$

$$\mathbf{F}_s = \exp(-\hat{\Lambda}_s t) \tilde{\mathbf{F}}_s(\exp(\hat{\Lambda}_u t) \mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi + \omega t, t), \quad (7.2.27)$$

$$\mathbf{F}_\varphi = \tilde{\mathbf{F}}_\varphi(\exp(\hat{\Lambda}_u t) \mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi + \omega t, t). \quad (7.2.28)$$

Входящую в уравнения (7.2.19) — (7.2.21) вектор-функцию вре-

<sup>1)</sup> При умножении на матрицу  $\exp(\hat{\Lambda}_u t) \equiv \exp[(i\Lambda'_u + \Lambda''_u) t]$  вектор преобразуется следующим образом: диагональная матрица  $\Lambda''_u$  приводит к умножению каждой компоненты вектора на  $\exp(i\omega_j t)$ , где  $\omega_j$  — элемент матрицы  $\Lambda'_u$ , а матрица  $\Lambda''_u$  перепутывает компоненты вектора, образуя их линейные комбинации с коэффициентами, содержащими конечные степени  $t$ . Все интегралы, которые встретятся нам в этой главе, существуют, так как степени  $t$  умножаются на убывающие экспоненциальные функции от  $t$ .

мени  $\mathbf{s}(t)$  требуется выразить через  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  (и  $t$ ). Но прежде чем мы приступим к выводу явных зависимостей  $\mathbf{s}$  от  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$ , заметим следующее. Как было показано в гл. 2, нелинейная связь между переменными может привести к сдвигу частот, т. е. в данном случае — к изменению значений элементов матрицы  $\Lambda_{\mathbf{u}}$  в разложении (7.2.4) и частот  $\boldsymbol{\omega}$  в уравнении (7.2.3). Чтобы как можно раньше учесть этот эффект, полезно выполнить преобразования (7.2.17), (7.2.18) со сдвинутыми частотами  $\Lambda_{\mathbf{u},r}''$  и  $\boldsymbol{\omega}_e$ . В физике эти частоты принято называть *перенормированными частотами*. Заранее они не известны и должны быть определены *самосогласованным образом* в конце вычислений, проводимых для того, чтобы найти решения  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$ . Избранный нами подход обладает важным преимуществом: во многих практически важных случаях первые же шаги процедуры исключения (переменной  $\mathbf{s}$ ) дают очень хорошие результаты для переменных  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$ . Предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения вывести уравнения (7.2.19) — (7.2.21) уже с перенормированными частотами и выяснить, какие предположения относительно малости разностей  $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_r$  и  $\Lambda_{\mathbf{u}} - \Lambda_{\mathbf{u},r}''$  необходимо принять для того, чтобы новые функции  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  удовлетворяли первоначальным требованиям малости. Настоятельно рекомендуем читателю в последующих главах повторять все начальные выкладки, используя уравнения (7.2.19) — (7.2.21) с перенормированными частотами. Мы же при изложении метода будем исходить из первоначальных уравнений (7.2.19) — (7.2.21).

### 7.3. Формальные соотношения

Как показано на примере в разд. 7.1,  $\mathbf{s}$  можно выразить через  $\mathbf{u}$  при том же  $t$ . Предположим теперь, что аналогичное соотношение с надлежащими обобщениями можно получить и в общем случае, т. е. для уравнений (7.2.19) — (7.2.21). Итак, предположим, что переменную  $\mathbf{s}$  можно выразить через  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  и что она кроме того явно зависит от  $t$ :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi}(t), t). \quad (7.3.1)$$

Позднее мы покажем, что соотношение (7.3.1) действительно удается построить, а пока предположим, что оно выполняется. Это предположение позволит нам вывести ряд важных соотношений (причем не приближенных, а точных). Так как  $\mathbf{s}$  зависит от  $t$ , во-первых, через  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  и, во-вторых, непосредственно, при дифференцировании (7.3.1) по  $t$  мы получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{s} + \dot{\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \quad (7.3.2)$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} S_1 \\ \nabla_{\mathbf{u}} S_2 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{u}} S_n \end{pmatrix}, \quad (7.3.3)$$

и аналогичным образом надлежит понимать обозначение  $\partial \mathbf{s} / \partial \varphi$ .

Из уравнения (7.2.20) следует, что производная  $ds/dt$ , стоящая в левой части соотношения (7.3.2), равна

$$\Lambda_s \mathbf{s} + \mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varphi, t). \quad (7.3.4)$$

Производные  $\dot{\mathbf{u}}$  и  $\dot{\varphi}$  также допускают замену правыми частями уравнений (7.2.19) и (7.2.21). Это позволяет преобразовать соотношения (7.3.2), (7.3.4) к виду

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s + \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \mathbf{s} = \mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u}, \varphi, t), \varphi, t). \quad (7.3.5)$$

Выражение, стоящее в круглых скобках в левой части уравнения (7.3.5), представляет собой оператор, действующий на  $\mathbf{s}$ . Формальное решение уравнения (7.3.5) представимо в виде

$$\mathbf{s} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s + \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u}, \varphi, t), \varphi, t). \quad (7.3.6)$$

Здесь уместно вспомнить некоторые результаты, полученные нами в разд. 7.1, где было показано, что величину  $\mathbf{s}$  удобно представлять в виде ряда по обратным степеням величины  $\beta$ , которой соответствует  $\Lambda_s$ . Как станет вскоре ясно, требуемое разложение мы получим, обозначив для краткости

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right) = A, \quad (7.3.7)$$

$$\mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} = B \quad (7.3.8)$$

и воспользовавшись формальным разложением в степенной ряд

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B A^{-1} + \dots = A^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-B A^{-1})^{\nu}, \quad (7.3.9)$$

справедливым (при некоторых предположениях относительно  $A$

и  $B$ ) для операторов. В разложении (7.3.9) мы положили по определению

$$(BA^{-1})^0 = 1. \quad (7.3.10)$$

Доказательство разложения (7.3.9) мы приводим в качестве упражнения для читателя в конце этого раздела.

Разложение (7.3.9) с расшифровкой обозначений  $A$  и  $B$  (см. (7.3.7), (7.3.8)) позволяет записать решение (7.3.6) в виде

$$s = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1} \sum_{v=0}^{\infty} \left[ - \left( Q \frac{\partial}{\partial u} + R \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1} \right]^v P. \quad (7.3.11)$$

В практических приложениях вместо бесконечного ряда обычно бывает достаточно взять его конечный отрезок. К тому же сходимость формального ряда отнюдь не гарантирована. С другой стороны, для практических приложений мы даем оценку остаточного члена, для чего выведем здесь несколько полезных формул. Чтобы получить оценку остаточного члена, разложим  $s$  по формуле (7.3.9):

$$s = \left[ A^{-1} \sum_{v=0}^m (-BA^{-1})^v + A^{-1} \sum_{v=m+1}^{\infty} (-BA^{-1})^v \right] P, \quad (7.3.12)$$

откуда

$$s = A^{-1} \sum_{v=0}^m (BA^{-1})^v P + r, \quad (7.3.13)$$

где  $r$  — остаточный член, задаваемый выражением

$$r = (A + B)^{-1} (-BA^{-1})^{m+1} P \quad (7.3.14)$$

(доказательство см. в упражнениях, помещенных в конце этого раздела).

Для практических приложений важно, что оператор

$$Q \frac{\partial}{\partial u} + R \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (7.3.15)$$

коммутирует с  $\Lambda_s$ . Матрица  $\Lambda_s$  преобразует компоненты вектора  $P$ , в то время как оператор (7.3.15) действует на все компоненты одинаково. Связь с примером, рассмотренным в разд. 7.1, и смысл оператора, обратного оператору (7.3.7), станут яснее, если к переменной  $s$  подойти с несколько иной стороны. Вернемся к уравнению (7.2.20). Оно допускает формальное решение

$$s = \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] P(u, s, \varphi, \tau) d\tau, \quad (7.3.16)$$

где

$$s = s(u, \varphi, \tau). \quad (7.3.17)$$

По аналогии с (7.1.7) произведем интегрирование по частям. Для этого предположим, что вектор-функция  $\mathbf{P}$  представима в виде (7.2.11). Интегрируя по частям, воспользуемся тем, что каждый член разложения (7.2.11) имеет вид

$$\mathbf{g}(t) h(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}). \quad (7.3.18)$$

Отождествим  $\mathbf{g}(t)$  с  $v$ , а  $h$  — с  $w$  в хорошо известном соотношении

$$\int v' w dt = v w - \int v w' dt. \quad (7.3.19)$$

Подставляя вместо производных по времени  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$  правые части уравнений (7.2.19), (7.2.21), запишем решение (7.3.16) в новом виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = & \exp(\Lambda_s t) \int_{-\infty}^t \exp(-\Lambda_s \tau) \mathbf{P}(\mathbf{u}(t), \mathbf{s}(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi}(t), t), \boldsymbol{\varphi}(t), \tau) d\tau - \\ & - \exp(\Lambda_s t) \int_{-\infty}^t \left( \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right)_{\tau'} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} \exp(-\Lambda_s \tau) \mathbf{P}(\mathbf{u}(\tau'), \dots, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.3.20)$$

Так как оператор (7.3.15) коммутирует с  $\Lambda_s$ , то во второй член правой части в (7.3.20) можно подставить

$$1 \equiv \exp(\Lambda_s \tau' - \Lambda_s \tau'), \quad (7.3.21)$$

после чего (7.3.20) перейдет в

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = & \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] \mathbf{P}(\mathbf{u}(t), \dots, \tau) d\tau - \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau')] \times \\ & \times \left( \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right)_{\tau'} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} \exp[\Lambda_s(\tau'-\tau)] \mathbf{P}(\mathbf{u}(\tau'), \dots, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

Первый член в правой части (7.3.22) можно рассматривать как формальное решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{s} = \Lambda_s \mathbf{s} + \mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, t), \quad (7.3.23)$$

где  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  в правой части служат своего рода заданными параметрами. В этом предположении формальное решение уравнения (7.3.23) представимо в виде

$$\mathbf{s} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1} \mathbf{P}. \quad (7.3.24)$$

Следовательно, первый член в правой части (7.3.22) раскрывает

смысл обратного оператора  $A^{-1}$  и, пользуясь им, мы можем записать решение (7.3.22) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{u}(t), \dots, t) - \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau')] \times \\ & \times \left( \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_{\tau'} \left( \frac{\partial}{\partial \tau'} - \Lambda_s \right)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{u}(\tau'), \dots, \tau') d\tau'. \end{aligned}$$

$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{u}(\tau'), \dots, \tau')$

(7.3.25)

Продолжая интегрировать по частям и используя повторно интерпретацию обратного оператора  $A^{-1}$ , мы можем представить решение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1} \mathbf{P} - \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1} \left( \mathbf{Q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times \\ & \times \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1} \mathbf{P} + \dots \end{aligned}$$

(7.3.26)

Нетрудно видеть, что это решение совпадает с полученным ранее решением (7.3.11).

**Упражнения.** 1а) Докажите соотношение (7.3.9). Указание: умножьте правую и левую части соотношения (7.3.9) слева на  $A + B$  и переставьте надлежащим образом члены бесконечной суммы. 1б) Докажите аналогичным образом соотношение для остатка ряда (см. (7.3.12), (7.3.14))

$$A^{-1} \sum_{v=m+1}^{\infty} (-BA^{-1})^v = (A+B)^{-1} \cdot (-BA^{-1})^{m+1}, \quad (7.3.27)$$

2) Докажите соотношение (7.3.9) повторным применением тождества

$$(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}(A+B-B)A^{-1} = A^{-1} + (A+B)^{-1}(-BA^{-1}). \quad (7.3.28)$$

## 7.4. Итерационный метод

До сих пор мы предполагали, что переменная  $\mathbf{s}$  представима в виде функции от  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$  и  $t$  (см. (7.3.1)), и, приняв такое допущение, выводили некое формальное соотношение. В этом разделе мы хотим показать, как можно построить  $\mathbf{s}$  с помощью итерационного метода. Воспользуемся для этого ранее введенным малым параметром  $\delta$ . Пусть

$$\mathbf{s}^{(n)}(\mathbf{u}, \varphi, t) = \sum_{m=2}^n \mathbf{C}^{(m)}(\mathbf{u}, \varphi, t) \quad (7.4.1)$$

(где порядок каждого члена  $\mathbf{C}^{(m)}$  строго равен  $\delta^m$ ) — аппроксимация  $n$ -го порядка величины  $\mathbf{s}$ .

Введем по определению величины

$$\mathbf{P}^{(l)}(\mathbf{u}, \Phi, t) \equiv \mathbf{P}^{(l)}(\mathbf{u}, \{\mathbf{s}^{(k)}\}, \Phi, t) \quad (\text{порядка, строго равного } \delta^l), \quad (7.4.2)$$

$$\mathbf{Q}^{(l)}(\mathbf{u}, \Phi, t) \equiv \mathbf{Q}^{(l)}(\mathbf{u}, \{\mathbf{s}^{(k)}\}, \Phi, t) \quad (\text{порядка, строго равного } \delta^l), \quad (7.4.3)$$

$$\mathbf{R}^{(l)}(\mathbf{u}, \Phi, t) \equiv \mathbf{R}^{(l)}(\mathbf{u}, \{\mathbf{s}^{(k)}\}, \Phi, t) \quad (\text{порядка, строго равного } \delta^l), \quad (7.4.4)$$

предполагая, что  $\mathbf{s}$  мы можем аппроксимировать до некоторого порядка  $k$  (как указано в (7.4.2) — (7.4.4)), обеспечивающего правильный суммарный порядок  $\delta^l$  соответствующего выражения.

Как показано ниже, выражения  $\mathbf{s}^{(n)}$  можно строить последовательно. Чтобы получить правильные выражения для  $\mathbf{C}^{(n)}$ , необходимо обратиться к соотношению (7.3.11). Выбирая из его правой части члены, порядок которых строго равен  $\delta^n$ , разлагая вектор  $\mathbf{P}$  на члены порядка  $n-m$ , а стоящий перед  $\mathbf{P}$  оператор — на члены порядка  $m$  ( $m \leq n-2$ ), получаем

$$\mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{u}, \Phi, t) = \sum_{m=0}^{n-2} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(m)}^{-1} \mathbf{P}^{(n-m)}(\mathbf{u}, \Phi, t). \quad (7.4.5)$$

Сравнивая с соотношением (7.3.11), находим, что оператор, стоящий перед  $\mathbf{P}^{(n-m)}$ , можно определить как

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(m)}^{-1} &= \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \times \\ &\times \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{произведениям } \Sigma i=m}} \prod_{i>1} \left[ \left( -\frac{d}{dt} \right)_{(i)} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \right], \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

где мы обозначили

$$\left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_s \right)^{-1}, \quad (7.4.7)$$

воспользовались соотношением

$$\left( -\frac{d}{dt} \right)_{(i)} = -\left( \frac{d}{dt} \right)_{(i)} \quad (7.4.8)$$

и положили по определению

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{(i)} f(\mathbf{u}, \Phi, t) \equiv \left( \mathbf{Q}^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{R}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \Phi} \right) f(\mathbf{u}, \Phi, t). \quad (7.4.9)$$

Переход от соотношения (7.3.11) к разложению (7.4.1) с соответствующими определениями проделывается без труда, если порядок каждого члена указывать в явном виде. Разумеется, мы исходим из предположения, что  $\mathbf{Q}^{(i+1)}$  и  $\mathbf{R}^{(i)}$  представимы в виде функций от  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$  и  $t$ . Кроме того, из наших предыдущих предположений, принятых в разд. 7.2, следует, что должны выполняться соотношения

$$\mathbf{Q}^{(0)} \equiv \mathbf{Q}^{(1)} \equiv 0, \quad (7.4.10)$$

$$\mathbf{R}^{(0)} \equiv \mathbf{R}^{(1)} \equiv 0. \quad (7.4.11)$$

В практических приложениях наиболее полезной оказывается формула

$$\mathbf{C}^{(n)} = \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \left[ \mathbf{P}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-2} \left( \frac{d}{dt} \right)_{(m)} \mathbf{C}^{(n-m)} \right], \quad (7.4.12)$$

поскольку она позволяет выразить последующие  $\mathbf{C}^{(n)}$  через предыдущие. Доказательство ее носит более технический характер, и мы приводим его здесь только для полноты. Итак, докажем формулу (7.4.12). Подставим для этого в ее левую и правую части вместо величин  $\mathbf{C}$  с соответствующим индексом их выражения из (7.4.5):

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(m)}^{-1} \mathbf{P}^{(n-m)} &= \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \mathbf{P}^{(n)} - \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_0^{-1} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{n-2} \left( \frac{d}{dt} \right)_{(m)} \sum_{l=0}^{n-2-m} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(l)}^{-1} \mathbf{P}^{(n-m-l)}. \end{aligned} \quad (7.4.13)$$

Нетрудно видеть, что член с  $m = 0$  выпадает, поэтому достаточно доказать соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-2} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(m)}^{-1} \mathbf{P}^{(n-m)} &= - \sum_{m'=1}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-2-m'} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \times \\ &\times \left( \frac{d}{dt} \right)_{(m')} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(l)}^{-1} \mathbf{P}^{(n-m'-l)} \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

Изменим порядок суммирования в (7.4.14). Нетрудно убедиться в том, что индексы суммирования изменяются в следующих пределах:

$$\left. \begin{aligned} m' + l &= m, \\ 0 \leq l &\leq n-2-m', \\ 1 \leq m' &\leq n-2, \end{aligned} \right\} m' \leq m \leq n-2. \quad (7.4.15)$$

Следовательно, правую часть соотношения (7.4.14) можно записать в виде

$$- \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{m'=1}^m \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \right)_{(m')} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(m-m')}^{-1} \mathbf{P}^{(n-m)}. \quad (7.4.16)$$

Сравнив при фиксированном  $m$  каждый член в левой части соотношения (7.4.13) с членами правой части, мы придем к соотношению

$$\left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(m)}^{-1} = \sum_{m'=1}^m \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \left( - \frac{d}{dt} \right)_{(m')} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(m-m')}^{-1}, \quad (7.4.17)$$

которое необходимо доказать. Используя определение (7.4.6), преобразуем правую часть соотношения (7.4.17) к виду

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \sum_{m'=1}^m \left( - \frac{d}{dt} \right)_{(m')} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \times \\ & \times \sum_{\Sigma i=m-m} \prod \left( - \frac{d}{dt} \right)_{(i)} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

В свою очередь выражение (7.4.18) можно записать как

$$\left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \sum_{\Sigma i=m} \prod \left[ \left( - \frac{d}{dt} \right)_{(i)} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \right], \quad (7.4.19)$$

что совпадает с (7.4.6). На этом доказательство соотношения (7.4.12) завершается.

## 7.5. Оценка остаточного члена. Проблема дифференцируемости

Как упоминалось в разд. 7.1.2, в практических приложениях обычно бывает достаточно нескольких первых членов ряда (7.3.11). Обрывая ряд на каком-то члене, важно знать величину остаточного члена. Не вдаваясь в подробное обсуждение оценки остаточного члена, приведем лишь один пример.

Остаточный член можно представить следующим образом:

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-t')] \left[ \left( \frac{d}{dt} \right)_{\infty}^m \mathbf{P} \right] \quad (7.5.1)$$

(см. (7.1.26)). Рассмотрим случай, когда вектор  $\mathbf{P}$  зависит только от переменной  $u$  (и не зависит от  $s$ ), и предположим, что

$$\mathbf{P}(u) \sim \mathbf{g}(t) u^k, \quad (7.5.2)$$

где

$$|\mathbf{g}| < M, \quad u > 0 \quad (7.5.3)$$

Ясно, что если матрица  $\Lambda_s$  диагональна и  $|\gamma_i|_{\min}$  — наименьшая из абсолютных величин отрицательных диагональных элементов матрицы  $\Lambda_s$ , то выполняется неравенство

$$\left| \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \mathbf{g}(t) \right| < |\gamma_i|_{\min}^{-1} M. \quad (7.5.4)$$

Кроме того, пусть

$$\mathbf{Q} \sim \mathbf{h}(t) u^k, \quad (7.5.5)$$

где

$$|\mathbf{h}| < M. \quad (7.5.6)$$

Тогда мы без труда получаем неравенство

$$\left| \left( \frac{d}{dt} \right)_{\infty} \mathbf{P} \right| < \frac{M}{|\gamma_i|_{\min}} |\mathbf{h}(t)| k u^k u^{k-1}. \quad (7.5.7)$$

Аналогичным образом доказывается оценка

$$\left| \left( \frac{d}{dt} \right)_{\infty}^2 \mathbf{P} \right| \sim |\mathbf{h}(t)| \left( \frac{M}{|\gamma_i|_{\min}} \right)^2 k u^k (2k-1) u^{2k-2}. \quad (7.5.8)$$

После  $m$ -кратного применения оператора  $(d/dt)_{\infty}$  получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right)_{\infty}^m \mathbf{P} \sim |\mathbf{h}(t)| \left( \frac{M}{|\gamma_i|_{\min}} \right)^m k (2k-1) (3k-2) \dots \\ \dots (mk - (m-1)) u^{(m+1)k-m}. \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

Поскольку нас интересуют большие значения  $m$ , правую часть соотношения (7.5.9) можно аппроксимировать выражением

$$|\mathbf{h}(t)| \left( \frac{M}{|\gamma_i|_{\min}} \right)^m k^m m! u^{(m+1)k-m}. \quad (7.5.10)$$

Аналогичные оценки можно вывести и для более сложных выражений, содержащих  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  (и  $\mathbf{R}$ ). Не останавливаясь на них подробнее, приведем лишь окончательные выводы, к которым приводит анализ этих оценок. Остаточный член пропорционален некоторой степени  $u$ . Показатель степени содержит множитель  $m$ . Следовательно, выбрав достаточно малую величину  $u$ , мы можем добиться, чтобы вклад от остаточного члена стал сколь угодно малым. С другой стороны, множитель  $m!$  при достаточно больших  $m$  приводит к

увеличению остаточного члена. В строго математическом смысле мы имеем дело не со сходящимся, а с асимптотическим рядом. Как хорошо известно из многочисленных приложений в физике и других областях науки, асимптотические разложения нередко оказываются весьма полезными.

В рассматриваемом нами случае это означает, что достаточно малые  $u$  дают очень хорошее приближение. Высокая точность достигается в том случае, если мы ограничимся несколькими первыми членами, но при слишком больших  $m$  учет старших членов приводит к ухудшению результата.

В заключение кратко обсудим свойства дифференцируемости вектор-функции  $s(u, \varphi, t)$  по переменным  $u$  и  $\varphi$ . Как уже упоминалось, выбрав величину  $\delta$  в (7.4.1) достаточно малой, мы можем аппроксимировать  $s$  сколь угодно точно степенными рядами по  $u$  с коэффициентами, зависящими от  $\varphi$  (и  $t$ ). Если правые части уравнений (7.2.19) — (7.2.21) — многочлены (и аналитичны) по  $u$  и аналитичны по  $\varphi$  в некоторой области, то любая конечная аппроксимация  $s^{(n)}$  (7.4.1) величины  $s$  обладает теми же свойствами (аналитичности). Из-за свойств остаточного члена, о которых говорилось выше, с увеличением числа дифференцирований  $\partial/\partial\varphi_j$ ,  $\partial/\partial u_k$  остаточный член, содержащий производную высокого порядка, может все более возрасти, а область значений  $u$ , в которой справедливо рассматриваемое приближение, все более сужаться, обращаясь иногда в пустое множество. Такого рода трудности обычно преодолевают, вводя так называемое сглаживание. Следуя этой традиции, рассмотрим  $s^{(n)}$  (остаточный член для простоты отбросим) как «сглаженную» аппроксимацию многообразия  $s(u, \varphi, t)$ . Тогда  $s^{(n)}$  обладает всеми перечисленными выше свойствами дифференцируемости (или аналитичности). В дальнейшем, если нет специальных оговорок, мы будем понимать под  $s^{(n)}$  сглаженную аппроксимацию.

## 7.6. Принцип подчинения для дискретных отображений с шумом

Во введении было показано, что при описании сложных систем мы можем использовать не только дифференциальные уравнения, но и отображения для моментов времени, образующих дискретную последовательность. Исследование таких отображений обретает все большее значение для современной математики и теоретической физики. В этом разделе мы хотим показать, как принцип подчинения можно обобщить на случай дискретных отображений. Затем с помощью соответствующего предельного перехода мы распространим принцип подчинения на стохастические дифференциальные уравнения (разд. 7.9).

Рассмотрим динамическую систему, описываемую вектором состояния  $\mathbf{q}_l$ , который задан в дискретной последовательности равноотстоящих временных точек  $l$ . Эволюция системы — переход из одной дискретной временной точки  $l$  в следующую точку  $l + 1$  — описывается уравнением, имеющим в общем случае вид

$$\mathbf{q}_{l+1} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_l, l) + G(\mathbf{q}_l, l) \boldsymbol{\eta}_l, \quad (7.6.1)$$

где  $\mathbf{f}$  и  $G$  — нелинейные функции вектора состояния  $\mathbf{q}_l$ , которые могут зависеть явно от индекса  $l$ ,  $\boldsymbol{\eta}_l$  — случайный вектор, распределение вероятности которого может (но не обязательно должно) зависеть от индекса  $l$ . Во многих случаях, представляющих физический интерес,  $\mathbf{f}_l$  — величина порядка  $O(\mathbf{q}_l)$ , т. е.

$$|\mathbf{f}(\mathbf{q}_l)| = O(\mathbf{q}_l). \quad (7.6.2)$$

При рассмотрении дифференциальных уравнений нами было показано, что в тех точках, где система теряет устойчивость, становится выполнимым преобразование от исходных переменных к новым коллективным модам, которые можно разделить на незатухающие, или неустойчивые, моды  $\mathbf{u}$  и на затухающие, или подчиненные моды  $\mathbf{s}$ .

Предположим, что аналогичное преобразование осуществимо и для дискретных отображений. Чтобы продемонстрировать наиболее существенные особенности, отбросим фазовые переменные  $\boldsymbol{\varphi}$ . Запишем уравнения, аналогичные уравнениям (7.2.1), (7.2.2) в следующем виде (через  $dl$  мы обозначили конечный интервал времени):

$$\mathbf{u}_{l+1} - \mathbf{u}_l = \Lambda_u \mathbf{u}_l dl + d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, l), \quad (7.6.3)$$

$$\mathbf{s}_{l+1} - \mathbf{s}_l = \Lambda_s \mathbf{s}_l dl + d\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, l). \quad (7.6.4)$$

Матрица  $\Lambda_s$  по предположению приведена к жордановой нормальной форме с отрицательными диагональными элементами. Для простоты мы будем считать также, что матрица  $\Lambda_u$  диагональна и имеет малость  $\delta$ , хотя используемый нами метод без труда обобщается на матрицы  $\Lambda_u$  более общего вида.

Заметим, что  $d\mathbf{Q}$ ,  $d\mathbf{P}$  могут содержать  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}$  с запаздыванием по времени  $l$ , т. е. могут быть функциями от  $\mathbf{u}_l$ ,  $\mathbf{u}_{l-1}$ , ... и  $\mathbf{s}_l$ ,  $\mathbf{s}_{l-1}$ , ... Как станет ясно из наших результатов,  $d\mathbf{Q}$  и  $d\mathbf{P}$  могут содержать  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}$  с опережением по времени  $l$ , т. е. могут зависеть, например, от  $\mathbf{u}_{l+1}$ . Наша цель состоит в разработке метода, позволяющего выразить  $\mathbf{s}$  единственным и однозначно определенным образом только через  $\mathbf{u}$  и  $l$ . Предположим, что такой метод найден. Это позволит вывести ряд формальных соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

### 7.7. Формальные соотношения

Итак, предположим, что  $s$  можно выразить как функцию только переменных  $u$  и  $l$ . Тогда  $dP$  в (7.6.4) также можно считать функцией только переменных  $u$  и  $l$ :

$$s_{l+1} - s_l = \Lambda_s s_l dl + dP(u_l, u_{l-1}, \dots, l). \quad (7.7.1)$$

Решение уравнения (7.7.1) можно представить в виде

$$s_{l+1} = \sum_{m=-\infty}^l (1 + \Lambda_s dm)^{l-m} dP(u_m, u_{m-1}, \dots, m). \quad (7.7.2)$$

Покажем, что (7.7.2) действительно удовлетворяет уравнению (7.7.1). Подставляя в (7.7.1) вместо  $s_{l+1}$  и  $s_l$  выражения, стоящие в правой части соотношения (7.7.2), получаем

$$s_{l+1} - s_l = \sum_{m=-\infty}^l (1 + \Lambda_s dm)^{l-m} dP(u_m, u_{m-1}, \dots, m) - \sum_{m=-\infty}^{l-1} (1 + \Lambda_s dm)^{l-m-1} dP(u_m, u_{m-1}, \dots, m). \quad (7.7.3)$$

Выделим из первой суммы член с  $m = l$

$$s_{l+1} - s_l = dP(u_l, u_{l-1}, \dots, l) + (1 + \Lambda_s dl) \sum_{m=-\infty}^{l-1} (1 + \Lambda_s dm)^{l-1-m} \times \\ \times dP(u_m, u_{m-1}, \dots, m) - \sum_{m=-\infty}^{l-1} (1 + \Lambda_s dm)^{l-1-m} \times \\ \times dP(u_m, u_{m-1}, \dots, m). \quad (7.7.4)$$

Вычисляя разность двух оставшихся сумм, преобразуем (7.7.4) к виду

$$s_{l+1} - s_l = dP(u_l, u_{l-1}, \dots, l) + \Lambda_s dl \sum_{m=-\infty}^{l-1} (1 + \Lambda_s dm)^{l-1-m} dP(u_m, u_{m-1}, \dots, m). \quad (7.7.5)$$

По определению сумма во втором члене (см. (7.7.2)) есть не что иное, как  $s_l$ , поэтому правая часть тождества (7.7.5) совпадает с правой частью уравнения (7.7.1).

Выясним теперь, что можно утверждать относительно сходимости суммы по  $m$ . Множитель

$$(1 + \Lambda_s dl)^{l-m} \quad (7.7.6)$$

будем считать ограниченным. Так как матрица  $\Lambda_s$  по предположению приведена к жордановой нормальной форме, поведение множителя (7.7.6) достаточно исследовать для случая, когда  $\Lambda_s$  имеет

вид жорданова блока. Это позволяет нам рассматривать вместо (7.7.6) матрицу

$$(1 + \lambda' + M_k dl)^l, \quad (7.7.7)$$

где  $1$  — единичная,  $\lambda' = \lambda dl$  — диагональная матрицы,  $M_k$  — квадратная матрица  $k \times k$  вида

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.7.8)$$

Над главной диагональю матрицы  $M_k$  стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Мы рассматриваем случай, когда  $l > 0$  (и, разумеется,  $l$  — целое число). Воспользуемся биномиальным разложением:

$$(1 + \lambda' + M_k dl)^l = \sum_{v=0}^l \binom{l}{v} (1 + \lambda')^{l-v} M_k^v (dl)^v. \quad (7.7.9)$$

Нетрудно проверить, что при  $v \geq k$

$$M_k^v = 0. \quad (7.7.10)$$

Это позволяет преобразовать биномиальное разложение (7.7.9) к виду

$$\sum_{v=0}^{k-1} \binom{l}{v} (1 + \lambda')^{l-v} M_k^v (dl)^v. \quad (7.7.11)$$

Так как величина показателя  $v$  ограничена сверху ( $v \leq k$ ), отдельные элементы матрицы (7.7.11) можно оценить, рассматривая величину множителя  $(1 + \lambda')^{l-v}$  или, что эквивалентно,  $(1 + \lambda')^l$ . При  $l \rightarrow \infty$  абсолютная величина этого множителя стремится к нулю, т. е.

$$|(1 + \lambda')|^l \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty, \quad (7.7.12)$$

если

$$|(1 + \lambda')| < 1. \quad (7.7.13)$$

Разлагая  $\lambda'$  на вещественную ( $\lambda_r$ ) и мнимую ( $\lambda_i$ ) части, приходим к необходимому и достаточному условию

$$(1 + \lambda_r)^2 + \lambda_i^2 < 1. \quad (7.7.14)$$

Неравенство (7.7.14) выполняется только при условии

$$\lambda_r < 0. \quad (7.7.15)$$

На протяжении всей остальной части этой главы мы будем считать, что условия (7.7.14) и (7.7.15) выполнены.

Чтобы вывести интересующие нас формальные соотношения, введем для краткости обозначение

$$\Delta_- \mathbf{s}_{l+1} = \mathbf{s}_{l+1} - \mathbf{s}_l \quad (7.7.16)$$

и с его помощью выразим  $\mathbf{s}_l$  через  $\mathbf{s}_{l+1}$ :

$$\mathbf{s}_l = (1 - \Delta_-) \mathbf{s}_{l+1}. \quad (7.7.17)$$

Соотношение (7.7.17) позволяет нам разностное уравнение (7.7.1) в виде

$$(\Delta_- - \Lambda_s dl (1 - \Delta_-)) \mathbf{s}_{l+1} = d\mathbf{P}(\mathbf{u}_l, l). \quad (7.7.18)$$

Напомним, что  $d\mathbf{P}$  может быть функцией от  $\mathbf{u}$  с различными временными индексами  $l, l-1, \dots$ :

$$d\mathbf{P}(\mathbf{u}_l, l) = d\mathbf{P}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l-1}, \dots, l). \quad (7.7.19)$$

Формальное решение уравнения (7.7.18) имеет вид

$$\mathbf{s}_{l+1} = (\Delta_- (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl)^{-1} d\mathbf{P}(\mathbf{u}_l, l). \quad (7.7.20)$$

Сравнивая решение (7.7.20) с ранее полученным решением (7.7.2), получаем соотношение

$$(\Delta_- (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl)^{-1} d\mathbf{P}(\mathbf{u}_l, l) = \sum_{m=-\infty}^l (1 + \Lambda_s dm)^{l-m} d\mathbf{P}(\mathbf{u}_m, m), \quad (7.7.21)$$

которое может служить определением оператора  $\Delta_-$ , стоящего в его левой части. Пусть

$$\Delta_- = \Delta_-^{(l)} + \Delta_-^{(u)} T_-^{(l)}, \quad (7.7.22)$$

где  $\Delta_-^{(l)}$ ,  $\Delta_-^{(u)}$  и  $T_-^{(l)}$  действуют на стоящие справа от них функции следующим образом:

$$\Delta_-^{(l)} f(\mathbf{u}_l, l) = f(\mathbf{u}_l, l) - f(\mathbf{u}_l, l-1), \quad (7.7.23)$$

$$\Delta_-^{(u)} f(\mathbf{u}_l, l) = f(\mathbf{u}_l, l) - f(\mathbf{u}_{l-1}, l), \quad (7.7.24)$$

$$T_-^{(l)} f(\mathbf{u}_l, l) = f(\mathbf{u}_l, l-1). \quad (7.7.25)$$

Используя операторное соотношение (7.3.9), нетрудно доказать тождество

$$\begin{aligned} \{\Delta_- (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl\}^{-1} &= \{\Delta_-^{(l)} (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl\}^{-1} - \\ &- \{\Delta_- (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl\}^{-1} \cdot [\dots], \end{aligned} \quad (7.7.26)$$

где квадратными скобками обозначено для краткости выражение

$$[\dots] = (1 + \Lambda_s dl) \Delta_-^{(u)} T_-^{(l)} \cdot \{\Delta_-^{(l)} (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl\}^{-1}. \quad (7.7.27)$$

Соотношение (7.7.21) позволяет думать, что выражение в фигурных

скобках обладает аналогом правой части соотношения (7.7.21). Нетрудно показать, что эта догадка верна.

Предположим, что  $d\mathbf{P}$  допускает разложение в сумму членов вида (см. (7.3.18))

$$h(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1}, \dots) d\mathbf{g}(m), \quad (7.7.28)$$

где  $h$  — функция только переменных  $\mathbf{u}$  и не зависит явно от  $m$ , в то время как вектор  $d\mathbf{g}$  зависит только от  $m$ . Тогда, как нетрудно проверить, выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^l (1 + \Lambda_s dm)^{l-m} h(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1}, \dots) d\mathbf{g}(m) = \\ = h(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l-1}, \dots) \sum_{m=-\infty}^l (1 + \Lambda_s dm)^{l-m} d\mathbf{g}(m) - \\ - \sum_{m=-\infty}^l (1 + \Lambda_s dm)^{l+1-m} \sum_{m'=-\infty}^{m-1} (1 + \Lambda_s dm)^{m-1-m'} \{ \dots \}_{m, m'}, \end{aligned} \quad (7.7.29)$$

где фигурными скобками обозначено выражение

$$\{ \dots \}_{m, m'} = \Delta_- h(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1}, \dots) d\mathbf{g}(m'). \quad (7.7.30)$$

Суть соотношения (7.7.29) сводится к следующему: в левую часть  $\mathbf{u}$  входит при всех предыдущих значениях временного индекса  $l$ , а в правую только при тех предыдущих значениях  $l$ , которые первоначально содержались в  $h(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l-1}, \dots)$ . Тем самым мы вместо бесконечной получаем лишь конечную регрессию. Сравнивая тождество (7.7.26) с соотношением (7.7.29), мы приходим к следующему определению оператора  $[\dots]^{-1}$ :

$$\begin{aligned} [\Delta_- (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl]^{-1} d\mathbf{P}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l-1}, \dots, l) = \\ = \sum_{m=-\infty}^l (1 + \Lambda_s dm)^{l-m} d\mathbf{P}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l-1}, \dots, m). \end{aligned} \quad (7.7.31)$$

Векторы  $\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l-1}$  и т. д. в правой части фиксированы, суммирование производится только по  $m$ . Тождество (7.7.26) (с пояснением (7.7.27)) допускает итерацию:

$$\{\Delta_- (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl\}^{-1} = \{\Delta_- (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl\}^{-1} \cdot (\dots), \quad (7.7.32)$$

где

$$(\dots) = \sum_{v=0}^{\infty} [\dots]^v, \quad (7.7.33)$$

а квадратные скобки определяются соотношением (7.7.27).

Как уже отмечалось, в практических приложениях суммирование проводится не до бесконечности. Во многих случаях оказывается достаточно нескольких первых членов. Ряд (7.7.33), вообще говоря, не сходится, так как принадлежит к числу так называемых асимптотических рядов, но, коль скоро мы ограничиваемся лишь конечной суммой, важно уметь оценивать остаточный член. Формулу остаточного члена ряда (7.7.32) нетрудно вывести из соотношения

$$\begin{aligned} \{ \dots \}^{-1} \sum_{v=n+1}^{\infty} [ \dots ]^v &= \{ \dots \}^{-1} \sum_{v=0}^{\infty} [ \dots ]^v [ \dots ]^{n+1} = \\ &= \{ \dots \}^{-1} (1 - [ \dots ])^{-1} [ \dots ]^{n+1}. \end{aligned} \quad (7.7.34)$$

Более подробный анализ остаточного члена вынудил бы нас входить в многочисленные математические детали и увел бы нас далеко в сторону от основной темы, поэтому мы опустим все детали.

Оператор  $[ \dots ]$ , содержащий  $\Delta_{-}^{(l)}$ , определяется соотношением (7.7.31). Что же касается оператора  $\Delta_{-}^{(u)}$ , то его действие необходимо пояснить более подробно. Оператор  $\Delta_{-}^{(u)}$  обладает следующими свойствами.

1. Он действует только на  $u_l, u_{l-1}, \dots$

2. Для любой функции  $f$  от  $u_l$  действие оператора  $\Delta_{-}^{(u)}$  определяется соотношением

$$\Delta_{-}^{(u)} f(u_l) = f(u_l) - f(u_{l-1}). \quad (7.7.35)$$

Если функция  $f$  зависит от переменных при нескольких «временах», то

$$\Delta_{-}^{(u)} f(\{u_l\}) = f(\{u_l\}) - f(\{u_{l-1}\}), \quad (7.7.36)$$

где

$$\{u_l\} = (u_l, u_{l-1}, \dots) \quad (7.7.37)$$

— набор переменных с различными индексами  $l$ .

3. Действие оператора  $\Delta_{-}^{(u)}$  на произведение функций  $v$  и  $w$ , как нетрудно доказать, сводится к следующему:

$$\begin{aligned} \Delta_{-}^{(u)} (v(\{u_l\}) w(\{u_l\})) &= w(\{u_l\}) \Delta_{-}^{(u)} v(\{u_l\}) + \\ &+ v(\{u_{l-1}\}) \Delta_{-}^{(u)} w(\{u_l\}). \end{aligned} \quad (7.7.38)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что функции  $f$  допустимо считать многочленами.

4. Соотношение (7.7.36) для «многовременных» функций  $f$  представимо в более явном виде, если воспользоваться соотношением

(7.7.38) и правилом

$$\Delta_{-}^{(u)} u_l^{(n)} = u_l^n - u_{l-1}^n = \left( \sum_{v_1 + v_2 = n-1} u_l^{v_1} u_{l-1}^{v_2} \right) \Delta_{-} u_l. \quad (7.7.39)$$

Правую часть последнего равенства можно записать в виде

$$\left( \mathcal{P} \frac{\partial u_l^n}{\partial u_l} \right) \Delta_{-} u_l, \quad (7.7.40)$$

где выражение в скобках — так называемая симметризованная производная, совпадающая с выражением, которое заключено в круглые скобки в (7.7.39).

5. Из соотношения (7.7.39) или (7.7.40) нетрудно вывести соотношение для функции  $f$ , зависящей только от  $\mathbf{u}_l$ :

$$\Delta_{-}^{(u)} f(u_l) = \left| \mathcal{P} \frac{\partial f(u_l)}{\partial u_l} \right| \cdot \Delta_{-}^{(u)} u_l, \quad (7.7.41)$$

или более общее соотношение

$$\Delta_{-}^{(u)} \mathbf{f}(\mathbf{u}_l, \dots, \mathbf{u}_{l'}) = \sum_{v=0}^{l'-l} g_v(\mathbf{u}_l, \dots, \mathbf{u}_{l'-1}) \Delta_{-} \mathbf{u}_{l'+v}. \quad (7.7.42)$$

Формула (7.6.3) позволяет записать  $\Delta_{-} \mathbf{u}_{l'+v}$  в виде

$$\Delta_{-} \mathbf{u}_{l'+v} = \Lambda_u d\mathbf{u}_{l'+v} + d\mathbf{Q}(\dots, l'+v-1). \quad (7.7.43)$$

Обозначив правую часть соотношения (7.7.43) через

$$d\bar{\mathbf{Q}}(\dots, l'+v), \quad (7.7.44)$$

преобразуем (7.7.42) к окончательному виду

$$\bar{\Delta}_{-}^{(u)} \mathbf{f}(\mathbf{u}_l, \dots, \mathbf{u}_{l'}) = \sum_{v=0}^{l'-l} g_v(\mathbf{u}_l, \dots, \mathbf{u}_{l'-1}) d\bar{\mathbf{Q}}(\dots, l'+v). \quad (7.7.45)$$

Для полноты выведем формулу для

$$\Delta_{-}^{(u)} \sum_{v_0 + \dots + v_\kappa = n} u_{m+\kappa+1}^{v_\kappa} \dots u_{m+1}^{v_0}. \quad (7.7.46)$$

По определению (7.7.35) действие оператора  $\Delta_{-}^{(u)}$  на сумму в (7.7.46) порождает выражение

$$\sum_{v_0 + \dots + v_\kappa = n} \left( u_{m+\kappa+1}^{v_\kappa} \dots u_{m+1}^{v_0} - u_{m+\kappa}^{v_\kappa} \dots u_m^{v_0} \right), \quad (7.7.47)$$

которое преобразуется к виду

$$\sum u_{m+\kappa}^{v_\kappa} u_{m+\kappa-1}^{v_{\kappa-1}} \dots u_m^{v_1} \left( u_{m+\kappa+1}^{v_0} - u_m^{v_0} \right). \quad (7.7.48)$$

Разность в скобках можно записать как

$$\sum u_{m+\kappa+1}^{v_0-1-\lambda} u_m^\lambda (u_{m+\kappa+1} - u_m). \quad (7.7.49)$$

Следовательно, выражение (7.7.46) представимо в виде

$$\sum_{v_0 + \dots + v_{\kappa+1} = n-1} u_{m+\kappa+1}^{v_{\kappa+1}} \cdot \dots \cdot u_m^{v_0} (u_{m+\kappa+1} - u_m), \quad (7.7.50)$$

где разность в скобках можно записать как

$$\begin{aligned} u_{m+\kappa+1} - u_m &= u_{m+\kappa+1} - u_{m+\kappa} + u_{m+\kappa} - \dots + u_{m+1} - u_m = \\ &= \sum_{v=0}^{\kappa} \Delta_{-} u_{m+1+v}. \end{aligned} \quad (7.7.51)$$

Сумму в (7.7.50), стоящую перед круглыми скобками, можно рассматривать как симметризованную производную, а разность в скобках выразить через разности  $u_{k+1} - u_k$ .

## 7.8. Итерационный метод для дискретного случая \*

Собирая вместе все выведенные выше формулы, мы получаем четкий алгоритм для представления  $s$  как функции от  $u$  и  $l$ , если  $dP$  — функция только от  $u$  и  $l$ . Однако в практических приложениях  $dP$  зависит еще и от  $s$ . Следовательно, необходимо разработать метод, позволяющий путем неоднократного повторения однообразных ходов индуктивно выражать  $s$  через  $u$  и  $l$ .

Введем для этого параметр малости  $\delta$ . В общем случае  $dQ$  и  $dP$  содержат нестохастическую и стохастическую части:

$$dQ = Q_0(u, s, l) dl + dF_u(u, s, l), \quad (7.8.1)$$

$$dP = P_0(u, s, l) dl + dF_s(u, s, l). \quad (7.8.2)$$

где стохастическая часть по предположению допускает разложение

$$dF_i(u, s, l) = M_i(u_l, u_{l-1}, \dots, s_l, s_{l-1}, \dots) dF_0(l), \quad i = u, s. \quad (7.8.3)$$

Будем считать также, что  $\Lambda_u$  в (7.6.3) имеет порядок  $\delta$  и что функции, входящие в разложения (7.8.1) и (7.8.2), представимы в виде многочленов по  $u$  и  $s$  с коэффициентами, зависящими от  $l$ . Эти коэффициенты — либо непрерывные функции (входящие в  $Q_0$  и  $P_0$ ), либо величины, описывающие винеровский процесс (в  $dF_0(l)$ ), задаваемый соотношениями (4.2.2), (4.2.3). По предположению, постоянные члены, не зависящие от  $u$  и  $s$ , имеют порядок  $\delta^2$ , коэффициенты при линейных членах — порядок  $\delta$ , а величины  $u$  и  $s$  —

соответственно порядка  $\delta$  и  $\delta^2$ . Чтобы разработать итерационный метод, представим  $s$  в виде

$$s(\mathbf{u}, l) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{C}^{(k)}(\mathbf{u}, l), \quad (7.8.4)$$

где член  $\mathbf{C}^{(k)}$  содержит выражения порядка, строго равного  $k$ :

$$\mathbf{C}^{(k)} \sim \delta^k. \quad (7.8.5)$$

Аналогичным образом введем разложения

$$d\mathbf{Q} = \sum_{k=2}^{\infty} d\mathbf{Q}^{(k)}, \quad (7.8.6)$$

$$d\mathbf{P} = \sum_{k=2}^{\infty} d\mathbf{P}^{(k)}. \quad (7.8.7)$$

Разобьем дальнейшие наши действия на два этапа. Применим соотношение (7.7.32) (с пояснениями (7.7.33) и (7.7.27)) к  $d\mathbf{P}$ , но удержим в правой и левой частях только по члену порядка  $\delta^k$ .

Приняв за исходное соотношение (7.7.45), определим  $g_v^{(k-k')}$  как функцию порядка, строго равного  $\delta^{k-k'}$ , а  $d\bar{Q}^{(k')}$  — как функцию порядка, строго равного  $k'$ . Пусть

$$\Delta_{-}^{(\mathbf{u})}{}^{(k)} \mathbf{f} = \sum_{k'=0}^k \sum_{v=0}^{l-l'} g_v^{(k-k')}(\mathbf{u}_l, \dots, \mathbf{u}_{l'-1}) d\bar{Q}^{(k')}(\dots, l'+v), \quad (7.8.8)$$

( $\Delta_{-}^{(\mathbf{u})}{}^{(k)}$  — величина порядка  $\delta^k$ ). После этих предварительных замечаний мы можем привести окончательную формулу:

$$\mathbf{C}^{(k)} = \left\{ \Delta_{-}^{(l)} (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl \right\}^{-1} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k'} \prod_{i=1}^v [\dots]_{k_i} d\mathbf{P}^{(k-k')}, \quad (7.8.9)$$

где

$$[\dots]_{k_i} = -(1 + \Lambda_s dm) \Delta_{-}^{(k)}{}^{(k_i)} T_{-}^{(l)} \left\{ \Delta_{-}^{(l)} (1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl \right\}. \quad (7.8.10)$$

Эта формула позволяет выразить  $s$  через  $\mathbf{u}$  и  $l$ , где  $\mathbf{u}$  берется при данном  $l$  и конечном числе запаздывающих временных индексов. Поясним изложенный нами метод на частных примерах.

1. Если  $d\mathbf{Q}$  и  $d\mathbf{P}$  не зависят явно от времени и флуктуирующие силы отсутствуют, то формула (7.8.9) вырождается в следующую:

$$\mathbf{C}^{(k)} = \{-\Lambda_s dl\} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k'} \prod_{i=1}^v [\dots]_{k_i} \mathbf{P}_0^{(k-k')} dl, \quad (7.8.11)$$

где

$$[\dots]_{k_i} = -(1 + \Lambda_s dm) \Delta_{-}^{(\mathbf{u})}{}^{(k_i)} T_{-}^{(l)} \{-\Lambda_s dl\}^{-1}. \quad (7.8.12)$$

2. Если  $l$  становится непрерывной переменной и флуктуирующие силы отсутствуют, то мы можем обратиться к результатам из разд. 7.4. Для большего удобства положим  $dl = \tau$ . В обозначениях разд. 7.4 сразу же получаем

$$\{\Delta_{-}(1 + \Lambda_s dl) - \Lambda_s dl\}^{-1} \rightarrow \frac{1}{\tau} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s + O(\tau) \right)_{(0)}^{-1}, \quad (7.8.13)$$

$$(1 + \Lambda_s dl) \Delta_{-}^{(u)}(k_i) T_{-}^{(l)} \rightarrow \tau \left( \dot{\mathbf{u}}^{(k_i+1)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) = \tau \left( \frac{d}{dt} \right)_{k_i}. \quad (7.8.14)$$

В пределе при  $\tau \rightarrow 0$  мы получаем

$$\mathbf{C}^{(k)} = \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \times$$

$$\times \sum_{k_1 + \dots + k_r = k'} \prod_{i=1}^r \left[ - \left( \frac{d}{dt} \right)_{(k_i)} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \right] \mathbf{P}_{(0)}^{(k-k')}. \quad (7.8.15)$$

## 7.9. Принцип подчинения для стохастических дифференциальных уравнений \*

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы вывести соответствующие соотношения для стохастических дифференциальных уравнений. Чтобы ввести последние, рассмотрим уравнения

$$d\mathbf{u} = \Lambda_s \mathbf{u} dt + d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, t), \quad (7.9.1)$$

$$d\mathbf{s} = \Lambda_s \mathbf{s} dt + d\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, t). \quad (7.9.2)$$

Проводимый нами анализ без труда распространяется на уравнения для  $\Phi$  (см. разд. 7.2, 7.4), а также на  $d\mathbf{Q}$  и  $d\mathbf{P}$ , зависящие от  $\Phi$ , но для простоты последующего изложения мы будем придерживаться лишь уравнений (7.9.1) и (7.9.2).

Винеровский процесс вынуждает нас с особой осторожностью выполнять предельный переход к непрерывной временной последовательности. Из-за скачков при переходе к непрерывному времени, необходимо проводить четкое различие между точно совпадающими моментами времени и моментами времени, разделенными бесконечно малыми промежутками. Фундаментальное регрессионное соотношение, которое нам надлежит использовать в дальнейшем, следует из соотношения (7.7.29) и может быть представимо в виде

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \mathbf{u}_{t-2dt}, \dots) dg(\tau) = \\ = \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] dg(\tau) h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \dots) -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau')] d_- h(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_{\tau-dt}, \dots) \times \\
& \quad \times \int_{-\infty}^{t-dt} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau'), \quad (7.9.3)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_- h(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_{\tau-dt}, \dots) &= h(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_{\tau-dt}, \dots) - \\
& - h(\mathbf{u}_{\tau-dt}, \mathbf{u}_{\tau-2dt}, \dots). \quad (7.9.4)
\end{aligned}$$

Рассмотрим подробно соотношения (7.9.3) и (7.9.4). Это позволит нам «перевести» на язык стохастических дифференциальных уравнений выведенные ранее соотношения (7.7.26) — (7.7.33).

Выясним, можно ли в первом интеграле, стоящем в правой части соотношения (7.9.3), заменить  $\mathbf{u}_{t-dt}$ ,  $\mathbf{u}_{t-2dt}$  и т. д. на  $\mathbf{u}_t$ .

Начнем с подстановки  $\mathbf{u}_t$  вместо  $\mathbf{u}_{t-dt}$  и скомпенсируем вызванные ею изменения добавлением соответствующих двух других членов:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{-t} \exp[\Lambda_s(t-\tau)] dg(\tau) h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \mathbf{u}_{t-2dt}, \dots) = \\
& = \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] dg(\tau) h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-2dt}, \dots) - \\
& - \int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] dg(\tau) [h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-2dt}, \dots) - \\
& \quad - h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \mathbf{u}_{t-2dt}, \dots)]. \quad (7.9.5)
\end{aligned}$$

Разность в правой части (7.9.5) формально можно записать в виде

$$d_{\mathbf{u}_{t-dt}} h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \dots). \quad (7.9.6)$$

Предположим, что флуктуирующие силы допускают представление

$$d\mathbf{F}_u(\mathbf{u}, \mathbf{s}, t) = \mathbf{F}_{u,i}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, t) d\omega_i(t) \quad (7.9.7)$$

(мы будем придерживаться исчисления Ито и соглашения о суммировании по повторяющимся дважды индексам;  $\omega_i$  — винеровский процесс).

Наш подход легко обобщается на случай, когда  $\mathbf{F}_{u,i}$  зависит от  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}$  при предыдущих значениях временного параметра и от временных интегралов по  $d\omega_j$  от  $-\infty$  до  $t$  (см. ниже). Мы предполагаем также, что  $d\omega_i d\omega_k$  сходится по вероятности к

$$d\omega_i(t) d\omega_k(t) = dt \delta_{ik}. \quad (7.9.8)$$

Воспользуемся правилом преобразования Ито для функции  $\varphi(\mathbf{u})$

по которому

$$d\varphi(\mathbf{u}) = dt \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial u_k} Q_{0k}(\mathbf{u}, \mathbf{s}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_k} F_{u_i, p} F_{u_k, p} \right] + \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial u_k} F_{u_k, m} d\omega_m. \quad (7.9.9)$$

Оно позволяет представить правую часть (7.9.6) равенства (7.9.5) в виде

$$d_{\mathbf{u}_{t-dt}} h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \dots) = \\ = \left\{ \frac{\partial h}{\partial u_{i, t-dt}} Q_{0k}(\mathbf{u}_{t-dt}, \mathbf{s}_{t-dt}, t-dt) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial u_{i, t-dt} \partial u_{k, t-dt}} F_{u_i, p} F_{u_k, p} \right\} dt + \\ + \frac{\partial h}{\partial u_{k, t-dt}} F_{u_k, m}(t-dt) d\omega_m(t-dt). \quad (7.9.10)$$

На следующем этапе выражение (7.9.10) аппроксимирует устойчивую моду в уравнении для неустойчивой моды. Необходимо различать два случая.

а)  $\mathbf{s}$  входит в

$$Q_0(\mathbf{u}, \mathbf{s}, t) dt. \quad (7.9.11)$$

Так как правая часть равенства (7.9.10) содержит члены порядка  $O(dt)$ ,  $O(d\omega)$ , мы получаем члены вида  $(dt)^2$  или  $dt d\omega$ , которыми можно пренебречь по сравнению с  $dt$ .

б)  $\mathbf{s}$  входит в

$$F_{\mathbf{u}, i}(\mathbf{u}(t), \mathbf{s}(t), t) d\omega_i(t), \quad (7.9.12)$$

что приводит к появлению членов  $dt d\omega$ , стремящихся к нулю быстрее, чем  $dt$ , и членов

$$d\omega_i(t) d\omega_m(t-dt) \rightarrow 0. \quad (7.9.13)$$

Приведенные выше соображения показывают, что

$$h(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \dots) \rightarrow h(\mathbf{u}_t). \quad (7.9.14)$$

Аналогичным образом мы можем действовать и дальше, что позволяет заменить все  $\mathbf{u}_{t-kdt}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , на  $\mathbf{u}_t$ .

Рассмотрим теперь второй член в правой части (7.9.3):

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] d_- h(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_{\tau-1}, \dots) \int_{-\infty}^{\tau-dt} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] d\mathbf{g}(\tau'). \quad (7.9.15)$$

Воспользуемся определением (7.9.4) оператора  $d_-$ , которое позволяет представить выражение (7.9.15) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] [h(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_{\tau-d\tau}, \dots) - h(\mathbf{u}_{\tau-d\tau}, \mathbf{u}_{\tau-2d\tau}, \dots)] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\tau-d\tau} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau'). \quad (7.9.16)$$

Используя соотношение

$$du_i = Q_{0i}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \dots, t) dt + \underbrace{F_{u_i, p}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-dt}, \dots, t) dw_p}_{dF_{u_i}} \quad (7.9.17)$$

и правило Ито, преобразуем выражение (7.9.16) к виду

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] \left\{ \sum_{n=1}^k \frac{\partial h(\mathbf{u}_{\tau-d\tau}, \mathbf{u}_{\tau-2d\tau}, \dots)}{\partial u_{i, \tau-nd\tau}} \times \right. \\ \times [Q_{0i}(\mathbf{u}_{\tau-nd\tau}, \dots, \tau-nd\tau) d\tau + \\ \left. + F_{u_{\tau, p}}(\mathbf{u}_{\tau-nd\tau}, \dots, \tau-nd\tau) dw_p(\tau-nd\tau)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \frac{\partial^2 h(\mathbf{u}_{\tau-d\tau}, \mathbf{u}_{\tau-2d\tau}, \dots)}{\partial u_{i, \tau-nd\tau} \partial u_{k, \tau-nd\tau}} F_{u_i p}(\mathbf{u}_{\tau-nd\tau}) \times \right. \\ \left. \times F_{u_k, p}(\mathbf{u}_{\tau-nd\tau}, \dots) d\tau \right\} \int_{-\infty}^{\tau-d\tau} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau'). \quad (7.9.18)$$

При замене  $\mathbf{u}_{\tau-nd\tau}$ ,  $n = 2, 3, \dots$  в первом члене выражения (7.9.18) на  $\mathbf{u}_{\tau-d\tau}$  мы получаем поправочные члены, которыми можно пренебречь, так как все выражение необходимо еще умножить на  $d\tau$ . Это позволяет заменить функцию  $h$ , зависящую от  $\mathbf{u}$  при различных значениях временного параметра, новой функцией, зависящей от  $\mathbf{u}$  лишь при одном значении временного параметра, равном  $\tau-d\tau$ . Если обозначить эту функцию через  $h(\{\mathbf{u}\})$ , то первый член выражения (7.9.18) примет вид

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] \frac{\partial h(\{\mathbf{u}\})}{\partial u_i} Q_{i0}(\{\mathbf{u}\}) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau'). \quad (7.9.19)$$

Поскольку последняя сумма в фигурных скобках понадобится нам в таком же виде, в каком она входит в (7.9.19), необходимо рассмотреть только второй член, линейный по  $F$ .

Итак, рассмотрим этот член:

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] \sum_{n=1}^k \frac{\partial h(\mathbf{u}_{\tau-d\tau}, \mathbf{u}_{\tau-2d\tau}, \dots)}{\partial u_i, \tau-ndt} \times \\ \times F_{u_i, p}(\mathbf{u}_{\tau-ndt}, \dots) dw_p(\tau-ndt) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\tau-dt} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau'). \quad (7.9.20)$$

Наша цель состоит в том, чтобы заменить все  $\mathbf{u}$ , входящие в  $h$  с различными значениями временных аргументов, через  $\mathbf{u}$ , зависящие только от одного значения временного аргумента. Все  $\mathbf{u}$ , стоящие перед  $\mathbf{u}_{\tau-ndt}$ , допускают замену на  $\mathbf{u}_{\tau-ndt}$ , а все  $\mathbf{u}$ , стоящие после  $\mathbf{u}_{\tau-ndt}$  — на  $\mathbf{u}_{\tau-(n+1)dt}$ . Аналогичным образом аргументы в  $\mathbf{F}$  можно заменить на  $\mathbf{u}_{\tau-ndt}$ . Все эти подстановки приводят к появлению дополнительных членов высокого порядка, и в пределе при  $dt \rightarrow 0$  ими можно пренебречь. В результате подстановок (7.9.20) преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] \sum_{n=1}^k \frac{\partial h(\{\mathbf{u}_{\tau-(n-1)dt}, \mathbf{u}_{\tau-ndt}, \{\mathbf{u}_{\tau-(n+1)dt}\})}{\partial u_i, \tau-ndt} \times \\ \times F_{u_i, p}(\{\mathbf{u}_{\tau-ndt}\}) dw_p(\tau-ndt) \int_{-\infty}^{\tau-dt} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau') + O(d\tau) + O(dw). \quad (7.9.21)$$

Следующий этап состоит в замене аргумента  $\mathbf{u}_{\tau-(n-1)dt}$  на  $\mathbf{u}_{\tau-(n+1)dt}$ . Чтобы компенсировать эту подстановку, необходимо учесть члены, содержащие  $dw_p$  в момент времени  $\tau-ndt$ . Эти  $dw_p$ , взятые вместе с  $dw_p$ , входящими в (7.9.20), порождают члены, пропорциональные  $d\tau$ . Если такие члены встречаются под интегралом, то в ходе вычисления их необходимо удерживать. При проведении вычислений выражение (7.9.20) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] \sum_{n=1}^k \left[ \frac{\partial h(\mathbf{u}_{\tau-ndt}, \{\mathbf{u}_{\tau-(n+1)dt}\})}{\partial u_i, \tau-ndt} \times \right. \\ \times F_{u_i, p}(\{\mathbf{u}_{\tau-ndt}\}) dw_p(\tau-ndt) + \\ \left. + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial^2 h(\mathbf{u}_{\tau-dt}, \mathbf{u}_{\tau-2dt}, \dots)}{\partial u_k, \tau-mdt \partial u_i, \tau-ndt} F_{u_i, p}(\{\mathbf{u}_{\tau-ndt}\}) \times \right. \\ \left. \times F_{u_k, p}(\{\mathbf{u}_{\tau-mdt}\}) d\tau \right] \int_{-\infty}^{\tau-dt} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau'). \quad (7.9.22)$$

Теперь мы уже в состоянии заменить аргументы функции  $h$  на один аргумент  $\mathbf{u}_{\tau-dt}$ . Второй член в (7.9.22) остается таким же, каким был, поэтому в результате подстановки мы получаем

$$\int_{-\infty}^t \exp[\Lambda_s(t-\tau)] \left\{ \frac{\partial h(\{\mathbf{u}_{\tau-dt}\})}{\partial \mathbf{u}_i} \times F_{u_i, \rho}(\{\mathbf{u}_{\tau-dt}\}) d\omega_\rho(\tau-dt) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial^2 h(\mathbf{u}_{\tau-dt}, \mathbf{u}_{\tau-2dt}, \dots)}{\partial u_k, \tau-mdt \partial u_i, \tau-ndt} F_{u_k, \rho}(\{\mathbf{u}_{\tau-ndt}\}) F_{u_k, \rho} \times \right. \\ \left. \times (\{\mathbf{u}_{\tau-mdt}\}) d\tau \int_{-\infty}^{\tau-dt} \exp[\Lambda_s(\tau-\tau')] dg(\tau'). \right. \quad (7.9.23)$$

Соберем теперь все члены, входящие в (7.9.18). Такого рода преобразования требуют изучения явного вида интеграла по  $dg$  (в действительности — кратного интеграла по  $d\omega$  и функциям времени).

Поскольку анализ членов достаточно громоздок и не приводит к каким-либо новым результатам, мы приведем лишь окончательную формулу, согласно которой оператор  $d_-$ , введенный с помощью соотношения (7.9.4), имеет вид

$$d_- = \left\{ Q_{0i}(\{\mathbf{u}_{t-dt}\}) \frac{\partial}{\partial u_i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} F_{u_i, \rho}(\{\mathbf{u}_{t-dt}\}) F_{u_k, \rho}(\{\mathbf{u}_{t-dt}\}) \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_k} \right\} dt + \\ + F_{u_i, \rho}(\{\mathbf{u}_{t-dt}\}) d\omega_\rho(t-dt) \frac{\partial}{\partial u_i}. \quad (7.9.24)$$

Далее мы можем действовать по аналогии с тем, как поступали в дискретном случае, когда разработали метод последовательных приближений, в котором требовалось собирать члены одного порядка величины, т. е. одной степени по  $\mathbf{u}$ . Введем для этого оператор

$$d_-^{(k_r)} = \left\{ \left( \frac{d}{dt} \right)_{(k_r)} (t-dt) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_r F_{u_i, \rho}^{(r+1)}(\{\mathbf{u}_{t-dt}\}) F_{u_k, \rho}^{(k_r-r+1)}(\{\mathbf{u}_{t-dt}\}) \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_k} \right\} dt + \\ + F_{u_i, \rho}^{(k_r+1)}(\{\mathbf{u}_{t-dt}\}) d\omega_\rho(t-dt) \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (7.9.25)$$

где первый оператор в правой части задан соотношением

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{(m)} = \left( \dot{\mathbf{u}}^{(m+1)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right), \quad (7.9.26)$$

а  $\dot{\mathbf{u}}^{(m+1)}$  означает, что из (7.9.17) следует выбрать только члены  $(m + 1)$ -й степени по  $\mathbf{u}$  (после замены  $\mathbf{s}$  на  $\mathbf{u}$ ). Теперь мы уже знаем достаточно для того, чтобы выписать окончательный результат. Итак,  $\mathbf{s}(t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{c}^{(k)}, \quad (7.9.27)$$

где

$$\mathbf{c}^{(k)} = \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1} \sum_{k_1 + \dots + k_v = k'} \prod_{i=1}^v [\dots]_{k_i} d\mathbf{P}^{(k-k')}, \quad (7.9.28)$$

$$[\dots]_{k_i} = d_{-}^{(k_i)} \left( \frac{d}{dt} - \Lambda_s \right)_{(0)}^{-1}. \quad (7.9.29)$$

Входящий в (7.9.29) обратный оператор означает интегрирование по временной переменной, входящей явно во все функции, кроме  $\mathbf{u}(t)$ .

Аналогичным образом проводится анализ стохастических дифференциальных уравнений на основе исчисления Стратоновича. Единственное отличие окончательного результата сводится к обычному определению оператора  $d_{-}$  (или  $d_{-}^{(k_i)}$ ).

## НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. КАЧЕСТВЕННЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ

Эту и следующую главу мы посвящаем основной проблеме синергетики — качественному макроскопическому изменению сложных систем. Хотя анализ различных неустойчивостей, возникающих под действием шума, допускает единый подход, мы из педагогических соображений будем рассматривать каждый частный случай в отдельности. По той же причине мы начнем с уравнений, не содержащих флуктуаций (шумов), а соответствующие проблемы с шумом рассмотрим лишь много позже. Общая философия нашего подхода изложена в разд. 1.14.

### 8.1. Бифуркации из узла или фокуса. Основные преобразования

Начнем с рассмотрения простейшего случая: бифуркации решений из узла. Исходным пунктом наших рассуждений является система нелинейных дифференциальных уравнений для вектора состояния  $\mathbf{q}(t)$ , а именно

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = N(\mathbf{q}(t), \alpha). \quad (8.1.1)$$

Мы предполагаем, что нелинейная функция  $N(\mathbf{q}(t), \alpha)$  зависит от управляющего параметра  $\alpha$ . Примем следующие допущения.

1. При  $\alpha = \alpha_0$  существует не зависящее от времени решение уравнения (8.1.1)

$$\mathbf{q}_0(\alpha_0). \quad (8.1.2)$$

2. При непрерывном изменении начального значения управляющего параметра  $\alpha = \alpha_0$ , например при непрерывном переходе к большему значению величины  $\alpha$ ,  $\mathbf{q}_0$  можно продолжить так, чтобы при новом значении управляющего параметра выполнялось равенство

$$N(\mathbf{q}_0(\alpha), \alpha) = 0. \quad (8.1.3)$$

Нас будет интересовать устойчивость решения  $\mathbf{q}_0$  при новом значении управляющего параметра  $\alpha$ , причем особое внимание мы уделим случаю, когда решение (8.1.2) становится неустойчивым.

Устойчивость мы будем исследовать по линейному приближению, предполагая что

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(\alpha) + \mathbf{w}(t). \quad (8.1.4)$$

Подставляя (8.1.4) в уравнение (8.1.1), получаем пока еще точное (не приближенное) соотношение

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = N(\mathbf{q}_0(\alpha) + \mathbf{w}(t), \alpha). \quad (8.1.5)$$

Предположим теперь, что  $\mathbf{w}$  — малая величина, позволяющая линеаризовать соотношение (8.1.5). Это означает, что правая часть соотношения (8.1.5) допускает разложение в ряд по степеням компонент  $w_l$  вектора отклонения  $\mathbf{w}$ . Так как при новом значении управляющего параметра выполняется равенство (8.1.3), первый член ряда обращается в нуль, а второй приводит к уравнению

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \sum_l \frac{\partial N(\mathbf{q}_0(\alpha), \alpha)}{\partial q_l} w_l(t), \quad (8.1.6)$$

Что же касается всех членов более высокого порядка, то ими мы, как уже говорилось, пренебрегли. Уравнение (8.1.6) можно записать в общем виде как уравнение

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = L(\alpha) \mathbf{w}(t), \quad (8.1.7)$$

где матрица  $L$  зависит только от управляющего параметра  $\alpha$ , но не от времени  $t$ . Из разд. 2.6 известно, что решения уравнения (8.1.7) представимы в виде

$$\mathbf{w}^{(k)}(t) = \exp(\lambda_k t) \mathbf{v}^{(k)}. \quad (8.1.8)$$

Если собственные значения  $\lambda_k(\alpha)$  матрицы  $L(\alpha)$  не вырождены, то векторы  $\mathbf{v}^{(k)}$  не зависят от времени. В случае же вырожденных значений  $\lambda_k(\alpha)$  векторы  $\mathbf{v}^{(k)}$  могут зависеть от степеней  $t$ .

Для простоты мы будем считать в дальнейшем, что векторы  $\mathbf{v}^{(k)}$  не зависят от времени. Наше предположение заведомо выполняется, например, в том случае, если все собственные значения  $\lambda_k$  различны, т. е. не вырождены. Так как векторы  $\mathbf{v}^{(k)}$  образуют полную систему в векторном пространстве решений  $\mathbf{q}$ , мы можем представить решение  $\mathbf{q}$ , которое требуется найти, в виде суперпозиции векторов  $\mathbf{v}^{(k)}$ . Следовательно, самое общее решение представимо в виде

$$\mathbf{q}(t, \alpha) = \mathbf{q}_0(\alpha) + \underbrace{\sum_k \xi_k(t) \mathbf{v}^{(k)}}_{\mathbf{w}(t)}, \quad (8.1.9)$$

где коэффициенты  $\xi_k(t)$  — пока неизвестные переменные, зависящие от времени. Прежде всего определим  $\xi_k$ . Подставим для

этого линейную комбинацию (8.1.9) базисных векторов  $\mathbf{v}^{(k)}$  с неопределенными коэффициентами в уравнение (8.1.1):

$$\sum_k \dot{\xi}_k(t) \mathbf{v}^{(k)} = N \left( \mathbf{q}_0(\alpha) + \underbrace{\sum_k \xi_k(t) \mathbf{v}^{(k)}}_{\mathbf{W}(t)}, \alpha \right). \quad (8.1.10)$$

Чтобы представить решение в явном виде, функцию  $N$  можно разложить в ряд по степеням  $\mathbf{W}$  и ограничиться лишь первыми членами. Из дальнейшего станет ясно, как действовать в общем случае, в котором приходится рассматривать многочлены относительно  $\mathbf{W}$  сколь угодно высокого порядка. Итак, разложим функцию  $N$  в ряд:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{q}_0(\alpha) + \mathbf{W}, \alpha) = & \underbrace{N(\mathbf{q}_0(\alpha), \alpha)}_1 + \underbrace{L\mathbf{W}}_2 + \underbrace{N^{(2)} : \mathbf{W} : \mathbf{W}}_3 + \\ & + \underbrace{N^{(3)} : \mathbf{W} : \mathbf{W} : \mathbf{W}}_4 + \dots, \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

где первый член обращается в нуль по условию (8.1.3)

$$N(\mathbf{q}_0(\alpha), \alpha) = 0. \quad (8.1.12)$$

Уравнение (8.1.6) (или (8.1.7)) и представление решения в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{v}^{(k)}$  (8.1.8) позволяют преобразовать второй член разложения к виду

$$L\mathbf{W} = \sum_k \dot{\xi}_k(t) L\mathbf{v}^{(k)} = \sum_k \xi_k(t) \lambda_k \mathbf{v}^{(k)}. \quad (8.1.13)$$

Третий член представляет собой своего рода «стенографическую» запись следующего громоздкого выражения:

$$N^{(2)} : \mathbf{W} : \mathbf{W} = \frac{1}{2} \sum_{k'k''} \xi_{k'}(t) \xi_{k''}(t) \underbrace{\sum_{j_1 j_2} (\partial^2 N / \partial q_{j_1} \partial q_{j_2}) v_{j_1}^{(k')} v_{j_2}^{(k'')}}_{2N_{k'k''}^{(2)}}. \quad (8.1.14)$$

Аналогичным образом определяются и члены более высокого порядка. Поскольку мы намереваемся вывести уравнения для  $\xi_k$ , нам необходимо исключить векторы  $\mathbf{v}^{(k)}$ . Воспользуемся для этого введенными в разд. 2.5 дуальными собственными векторами. Эти собственные векторы

$$\bar{\mathbf{v}}^{(k)}, \quad (8.1.15)$$

не зависящие в рассматриваемом нами случае от времени как векторы  $\mathbf{v}$ , обладают следующим свойством ортогональности:

$$\langle \bar{\mathbf{v}}^{(k)} \mathbf{v}^{(k')} \rangle = \delta_{kk'}. \quad (8.1.16)$$

Образую скалярное произведение векторов (8.1.10) и (8.1.15) и используя разложения (8.1.11), получаем уравнение

$$\dot{\xi}_k(t) = \lambda_k \xi_k(t) + \sum_{k'k''} \xi_{k'}(t) \xi_{k''}(t) \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_k N_{k'k''}^{(2)} \rangle}_{A_{kk'k''}^{(2)}} + \dots, \quad (8.1.17)$$

( $A^{(2)}$  — введенное нами сокращенное обозначение для коэффициента при  $\xi_{k'} \xi_{k''}$ ). Аналогичным образом определяются и старшие члены, и мы получаем окончательный результат — разложение

$$\dot{\xi}_k = \lambda_k \xi_k + \sum_{k'k''} A_{kk'k''}^{(2)} \xi_{k'} \xi_{k''} + \sum_{k'k''k'''} A_{kk'k''k'''}^{(3)} \xi_{k'} \xi_{k''} \xi_{k'''} + \dots \quad (8.1.18)$$

## 8.2. Простое вещественное собственное значение становится положительным

Перенумеруем собственные значения так, чтобы то из них, которое имеет наибольшую вещественную часть, получило индекс 1. Пусть это собственное значение вещественно и не вырождено, а управляющие параметры такие, что  $\lambda_1(\alpha)$  изменяет знак, переходя от отрицательного значения к положительному. Нас будет интересовать случай, когда выполняется неравенство

$$\lambda_1(\alpha) \geq 0, \quad (8.2.1)$$

а вещественные части всех остальных собственных значений еще отрицательны. Так как неравенство (8.2.1) в анализе устойчивости по линейному приближению свидетельствует о неустойчивости соответствующего решения, в то время как неравенства

$$\text{Re} \{ \lambda_2 \}, \dots \leq C_0 < 0 \quad (8.2.2)$$

указывают на то, что все остальные решения еще остаются устойчивыми, мы можем подчеркнуть это обстоятельство, выбрав более выразительные обозначения. Пусть для

$$\lambda_1(\alpha) : \xi_1(t) = u(t), \quad \lambda_1 = \lambda_u, \quad (8.2.3)$$

где  $u$  означает unstable (неустойчивое), а для

$$\lambda_{k'}, \quad k' \geq 2 : \xi_{k'}(t) = \underbrace{s_{k'-1}}_k(t), \quad \lambda_{k'-1} \Rightarrow \lambda_k, \quad (8.2.4)$$

где  $s$  означает stable (устойчивое). Необходимо подчеркнуть, что наши новые обозначения могут приводить к недоразумениям, которых следует всячески избегать. Дело в том, что говоря о «неустойчивых» и «устойчивых» решениях, мы имеем в виду решения неустойчивые или устойчивые лишь в линейном приближении. Как мы увидим дальше, во многих случаях моды, бывшие неустойчивыми в линейном приближении, стабилизируются при включении

нелинейности, и наша главная задача будет состоять в исследовании новых областей устойчивости решений  $u$ .

Итак, под  $u$  и  $s$  надлежит понимать моды, которые при анализе устойчивости по линейному приближению характеризуются свойствами (8.2.1), (8.2.2). После этих предварительных замечаний мы разобьем уравнение (8.1.18) по индексам 1, 2, ... на уравнения

$$\dot{u} = \lambda_u u + A_u^{(2)} u^2 + A_u^{(3)} u^3 + \dots + \sum_k A_{uk}^{(2)} \cdot s_k + \dots, \quad (8.2.5)$$

$$\dot{s}_k = \lambda_k s_k + A_s^{(2)} u^2 + A_s^{(3)} u^3 + \dots + \sum_k A_{sk}^{(2)} u s_k + \dots \quad (8.2.6)$$

В этом разделе и в разд. 8.3 мы будем считать решение  $u$  вещественным. Если  $u$  достаточно мало и выполняется неравенство, (8.2.2), то можно воспользоваться принципом подчинения. Это позволит выразить  $s_k$  как функцию от  $u$ , аппроксимируемую многочленом

$$s_k = s_k(u) = a_k u^2 + b_k u^3 + \dots \quad (8.2.7)$$

Подставляя разложение (8.2.7) в уравнение (8.2.5), мы получаем уравнение для параметра порядка

$$\dot{u} = \lambda_u u + A_u^{(2)} u^2 + (A_u^{(3)} + C) u^3 + \text{Остаточный член}, \quad (8.2.8)$$

где

$$C = \sum_k A_{uk}^{(2)} \alpha_k. \quad (8.2.9)$$

Остаточный член содержит степени  $u$ , начиная с четвертой. В практических приложениях величину остаточного члена необходимо оценивать. Здесь же мы предполагаем  $u$  достаточно малым для того, чтобы остаточным членом можно было пренебречь. Основные особенности уравнения (8.2.8) продемонстрируем на нескольких примерах. Запишем уравнение (8.2.8) в виде

$$\dot{u} = \lambda_u u + f(u) \quad (8.2.10)$$

и рассмотрим случай, когда

$$f(u) = -\beta u^3, \quad (8.2.11)$$

где  $\beta$  — действительное число, т. е. уравнение (8.2.10) сводится к уравнению

$$\dot{u} = \lambda_u u - \beta u^3. \quad (8.2.12)$$

Для тех читателей, кто сведущ в механике, заметим, что (8.2.12)

можно рассматривать как уравнение движения со сверхкритическим затуханием частицы в силовом поле с потенциалом  $V$ :

$$\dot{u} = - \frac{\partial V}{\partial u}. \quad (8.2.13)$$

В частном случае, когда

$$V = -\lambda_u \frac{u^2}{2} + \beta \frac{u^4}{4}, \quad (8.2.14)$$

Это позволяет наглядно представить, как ведет себя решение  $u$  нелинейного уравнения (8.2.12). Из вида потенциальной кривой  $V$  непосредственно следует, что в зависимости от знака  $\lambda_u$  могут представиться два совершенно различных случая. При  $\lambda_u < 0$  решение  $u = 0$  стационарно и устойчиво. При  $\lambda_u > 0$  решение  $u = 0$  существует, но становится неустойчивым. Появляются новые устойчивые решения

$$u = \pm \sqrt{\lambda_u/\beta}. \quad (8.2.15)$$

Заметим, что при  $\lambda_u < 0$  они становятся мнимыми и, следовательно, должны быть исключены для этой ветви  $\lambda_u$ .

Значения  $u$ , задаваемые квадратными корнями (8.2.15), и

$$u = 0 \quad (8.2.16)$$

позволяют разложить правую часть уравнения (8.2.12), имеющую вид кубического многочлена, в произведение линейных множителей

$$\dot{u} = -\beta \cdot u (u - \sqrt{\lambda_u/\beta}) (u + \sqrt{\lambda_u/\beta}). \quad (8.2.17)$$

Вводя для краткости специальные обозначения корней

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \sqrt{\lambda_u/\beta}, \quad u_2 = -\sqrt{\lambda_u/\beta}. \quad (8.2.18)$$

запишем уравнение (8.2.17) в более сжатом виде

$$\dot{u} = -\beta (u - u_0) (u - u_1) (u - u_2), \quad u_k = u_k(\alpha). \quad (8.2.19)$$

Так как собственные значения  $\lambda_u$  зависят от управляющего параметра, а иногда даже могут быть отождествлены с ним, корни  $u_k$  правой части уравнения (8.2.12) также зависят от управляющего параметра  $\alpha$ . Приведенные выше соображения непосредственно обобщаются на случай, когда  $f(u)$  — произвольный многочлен, т. е. когда

$$\dot{u} = \lambda_u u + f(u) \equiv P(u). \quad (8.2.20)$$

Уравнение (8.2.20) также удобно интерпретировать как движение частицы со сверхкритическим затуханием в поле с потенциалом

$V$ , производная от которого совпадает с правой частью уравнения (8.2.20):

$$\dot{u} = - \frac{\partial V}{\partial u}. \quad (8.2.21)$$

По аналогии с (8.2.19), многочлен (8.2.20) можно разложить в произведение линейных множителей

$$\dot{u} = C [u - u_1(\alpha)] [u - u_2(\alpha)] \dots [u - u_k(\alpha)], \quad (8.2.22)$$

где  $u_k$  — корни многочлена  $P(u)$ . Зная зависимость  $u_k$  от управляющего параметра  $\alpha$ , мы можем найти точки ветвления возможных стационарных решений в зависимости от значений, принимаемых управляющим параметром  $\alpha$ . Следить за тем, как возникают, сливаются или исчезают ветви решений, — занятие весьма увлекательное. Примеры того, как могут вести себя ветви решений в зависимости от управляющего параметра, читатель найдет в упражнениях.

Чтобы исследовать устойчивость ветвей решений, многочлен  $P(u)$  можно разложить в окрестности соответствующего корня  $u_k$ . Для этого мы выбираем достаточно малую окрестность корня  $u_k$ , полагаем

$$u = u_k + \delta u, \quad (8.2.23)$$

линеаризуем уравнение (8.2.20) в выбранной нами окрестности и исследуем интересующую нас ветвь на устойчивость с помощью линеаризованных уравнений

$$\delta \dot{u} = \left. \frac{\partial P(u)}{\partial u} \right|_{u=u_k} \delta u. \quad (8.2.24)$$

Уравнение (8.2.24) можно записать в общем виде

$$\delta \dot{u} = \gamma \cdot \delta u; \quad (8.2.25)$$

устойчивость или неустойчивость исследуемой ветви зависит от знака коэффициента  $\gamma$ , определяемого выражением

$$\gamma = \left. \frac{\partial P(u)}{\partial u} \right|_{u=u_k} \leq 0. \quad (8.2.26)$$

Временная эволюция в нелинейной области также поддается анализу, поскольку дифференциальное уравнение (8.2.20) допускает разделение переменных, и мы получаем

$$\int_{u_0}^u \frac{du'}{\lambda_u u' + f(u')} = t - t_0. \quad (8.2.27)$$

Разложение (8.2.22) многочлена  $P(u)$  в произведение линейных множителей позволяет разложить подинтегральное выражение (8.2.27) в сумму элементарных дробей и вычислить интеграл в явном виде.

**Упражнение.** Вычислить интеграл в (8.2.27) для кубического многочлена (8.2.19) и найти  $u(t)$ .

### 8.3. Кратное вещественное собственное значение становится положительным

Пусть  $M$  — число совпадающих собственных значений с наибольшей вещественной частью, все эти собственные значения — вещественные числа

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_M = \lambda_u(\alpha), \tag{8.3.1}$$

равные нулю или положительные, а все остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Обобщая случай, рассмотренный в предыдущем разделе, обозначим амплитуды мод, соответствующих собственным значениям (8.3.1), через

$$u_1, \dots, u_M. \tag{8.3.2}$$

Разделяя общую систему уравнений (8.1.18) на амплитуды мод (8.3.2) и остаточные члены и применяя принцип подчинения, получаем уравнения для параметра порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda_u u_1 + f_1(u_1, \dots, u_M, \lambda_u, \alpha), \\ &\vdots \\ \dot{u}_M &= \lambda_u u_M + f_M(u_1, \dots, u_M, \lambda_u, \alpha), \end{aligned} \right\} \tag{8.3.3}$$

или, в менее подробных обозначениях, не указывающих явную зависимость многочленов  $P(u)$  от  $\alpha$ ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= P_1(u, \lambda_u(\alpha)), \\ &\vdots \\ \dot{u}_M &= P_M(u, \lambda_u(\alpha)) \end{aligned} \right\} \tag{8.3.4}$$

По существу, уравнения (8.3.4) ничем не отличаются от исходных уравнений (8.1.1). Вместе с тем необходимо сделать два замечания. Во многих практически важных случаях число переменных в приведенных уравнениях гораздо меньше, чем в исходных уравнениях (8.1.1). Особенно заметное понижение числа степеней свободы достигается при переходе от уравнений (8.1.1) к уравнениям (8.3.3)

в случае сложных систем с большим числом степеней свободы. Кроме того, в случае вырожденных собственных значений иногда удается использовать свойства симметрии системы. Мы покажем, как можно решить систему уравнений (8.3.3) в частном случае, когда существуют стационарные решения

$$\dot{u}_j = 0: P_j(\mathbf{u}, \lambda_u(\alpha)) = 0. \quad (8.3.5)$$

Заметим, что уравнения (8.3.3) могут допускать помимо стационарных решений (8.3.5) и другие, например колеблющиеся решения. К уравнениям (8.3.3) мы еще вернемся, а пока сделаем несколько замечаний относительно того случая, когда выполняется условие (8.3.5).

Уравнения (8.3.4) сильно упрощаются, если их правые части представимы в виде градиента потенциала. Рассмотрением такого рода задач занимается теория катастроф (см. [1, гл. 5]; дополнительная литература приведена в конце нашей книги), и мы не будем останавливаться на ней более подробно. Другой класс уравнений вида (8.3.4) образуют уравнения с

$$P_j = u_j \left[ \sum a_{im}^{(j)} u_i u_m + \lambda_u(\alpha) \right]. \quad (8.3.6)$$

Многочлены (8.3.6) обращаются в нуль, если обращаются в нуль либо  $u_j$ , либо выражения, стоящие в квадратных скобках. Если в нуль обращаются  $u_j$  с индексами, например,  $k+1, k+2, \dots$ , то нам остается потребовать, чтобы в нуль обращались только квадратные скобки в уравнениях с номерами  $1, \dots, k$ , т. е.

$$\sum a_{im}^{(j)} u_i u_m + \lambda_u(\alpha) = 0 \quad (8.3.7)$$

при  $j = 1, \dots, k$ . Уравнения (8.3.7) описывают эллипсы, прямые или гиперболы на плоскости или их аналоги — гиперповерхности в  $n$ -мерном пространстве. Возможные стационарные решения (8.3.5) не что иное, как пересечения таких гиперповерхностей.

Продемонстрируем сказанное на простейшем примере — случае двух переменных, в котором одно из уравнений (8.3.7) имеет вид

$$u_1^2 + u_2^2 = \lambda_u(\alpha), \quad (8.3.8)$$

а другое —

$$\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = \lambda_u(\alpha). \quad (8.3.9)$$

В зависимости от постоянных  $a$  и  $b$  число пересечений может быть равно 0, 2 или 4. С увеличением  $\lambda_u(\alpha)$  переменные  $u_1$  и  $u_2$ , если пересечения возможны, возрастают. Каждое из пересечений соответствует одному из вновь возникающих решений.

**Упражнение.** Докажите, что по крайней мере в общем случае для многочленов (8.3.8) и (8.3.9) потенциал не существует.

### 8.4. Простое комплексное собственное значение пересекает мнимую ось. Бифуркация Хопфа

Начнем с системы дифференциальных уравнений (8.1.1). Предположим, что при некотором значении управляющего параметра  $\alpha = \alpha_0$  существует устойчивое, не зависящее от времени решение  $q_0$ . Будем считать, что это решение допускает продолжение на значения управляющего параметра, отличные от  $\alpha_0$ . Приступим к анализу устойчивости. Рассмотрим уравнение

$$\dot{w} = Lw, \tag{8.4.1}$$

совпадающее с уравнением (8.1.7). Подставляя, как обычно,

$$w = e^{\lambda t} v \tag{8.4.2}$$

в уравнение (8.4.1), приходим к задаче на собственные значения

$$Lv = \lambda v. \tag{8.4.3}$$

Предполагается, что собственное значение с наибольшей вещественной частью, которое мы обозначим  $\lambda_1$ , не вырождено и комплексно, т. е.

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + i\lambda''_1, \tag{8.4.4}$$

где

$$\lambda'_1 \geq 0. \tag{8.4.5}$$

Как и в предыдущем разделе, введем обозначение

$$\lambda_u = \lambda_1. \tag{8.4.6}$$

Пусть, кроме того, выполняются неравенства

$$\text{Re} \{ \lambda_j \} \leq C_0 < 0, \quad j = 2, \dots \tag{8.4.7}$$

Это позволит нам воспользоваться при достаточно малых  $u$  (новое обозначение для  $\xi_1$ ) принципом подчинения.

Так как собственное значение (8.4.4) комплексно, весьма вероятно, что и соответствующее ему решение  $u$  комплексно. Разлагая в ряд до членов 3-го порядка по  $u$ , получаем уравнение параметра порядка для  $u$ :

$$\begin{aligned} \dot{u} = & (\lambda'_u + i\lambda''_u) u + A_{uu}^{(2)} u^2 + 2A_{uu}^{(2)} u u^* + A_{uu}^{(2)} u^* u^2 + B_{uuu} u^3 + \\ & + 3B_{uuu} u^2 \cdot u^* + 3B_{uuu} u u^* u^2 + B_{uuu} u^* u^* u^3 + \text{Остаточный член.} \end{aligned} \tag{8.4.8}$$

В дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на важных частных случаях уравнения (8.4.8), неоднократно встречающихся в приложениях.

Начнем с случая ( $\lambda'_u, \lambda''_u$  — вещественные числа)

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\lambda''_u)u - bu |u|^2, \quad (8.4.9)$$

где коэффициент  $b$  предполагается вещественным и

$$b \equiv -B_{uuuu} > 0. \quad (8.4.10)$$

Уравнение (8.4.9) легко решается, если положить

$$u(t) = r(t) \exp [i\psi(t) + i\lambda''_u t], \quad (8.4.11)$$

где  $r \geq 0$ ,  $\psi$  — вещественнозначная функция. Подставляя (8.4.11) в уравнение (8.4.9), получаем

$$\dot{r} + (i\dot{\psi} + i\lambda''_u)r = (\lambda'_u + i\lambda''_u)r - br^3, \quad (8.4.12)$$

или, приравнивая отдельно вещественные и мнимые части,—

$$\dot{\psi} = 0, \quad (8.4.13)$$

$$\dot{r} = \lambda'_u r - br^3. \quad (8.4.14)$$

Уравнение (8.4.14) совпадает с уравнением (8.2.12). Единственное отличие состоит в том, что на  $r$  в (8.4.14) наложено дополнительное условие  $r \geq 0$ . Таким образом, стационарные решения уравнения (8.4.14) имеют следующий вид:

$$r_0 = 0 \quad \text{при} \quad \lambda'_u < 0, \quad (8.4.15)$$

$$r_0 = 0, \quad r_0 = + \sqrt{\lambda'_u/b} \quad \text{при} \quad \lambda'_u \geq 0. \quad (8.4.16)$$

Поскольку уравнение (8.4.13) выполняется как при  $\lambda''_u < 0$ , так и при  $\lambda''_u \geq 0$ , переходное решение нетрудно найти, решая уравнение (8.4.14) [1].

Стационарное решение имеет вид

$$u = r_0 \exp (i\psi_0 + i\lambda''_u t). \quad (8.4.17)$$

Оно показывает, что (при  $r_0 > 0$ ) система совершает гармонические колебания. Начертив решение  $u$  на фазовой плоскости, образуемой его вещественной и мнимой частями как прямоугольными координатами, мы обнаружим предельный цикл. Переходное решение говорит нам о том, что траектории, проходящие через любые точки плоскости, стремятся к этому предельному циклу, навиваясь на него либо изнутри, либо снаружи. Интересная модификация уравнения (8.4.9) возникает в том случае, если коэффициент  $b$  комплексный, т. е.

$$b = b' + ib'', \quad (8.4.18)$$

где  $b'$  и  $b''$  — вещественные числа. Пусть

$$b' > 0 \quad (8.4.19)$$

и интересующее нас уравнение имеет вид

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\lambda''_u)u - (b' + ib'')u|u|^2. \quad (8.4.20)$$

Будем искать его решение в виде

$$u = r(t)e^{i\varphi(t)}, \quad r \geq 0, \quad \varphi \text{ — вещественнозначная функция.} \quad (8.4.21)$$

Подставляя (8.4.21) в уравнение (8.4.20) и разделяя вещественную и мнимую части, получаем:

$$\dot{r} = \lambda'_u r - b' r^3, \quad (8.4.22)$$

$$\dot{\varphi} = \lambda''_u - b'' r^2. \quad (8.4.23)$$

Это система двух связанных дифференциальных уравнений, но связь между ними весьма простого типа. Мы можем сначала решить уравнение (8.4.22) и найти стационарное или переходное решение  $r(t)$ . Затем мы подставляем найденное решение  $r^2$  в уравнение (8.4.23) и находим  $\varphi(t)$ . Рассмотрение случая, когда  $r(t)$  — переходное решение, мы оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения. Если же  $r(t) = r_0$  — стационарное решение уравнения (8.4.22), то  $\varphi(t)$  имеет следующий вид:

$$\varphi = (\lambda''_u - b'' r_0^2)t + \varphi_0. \quad (8.4.24)$$

Это важный результат: он показывает, что частота колебаний зависит от амплитуды. Таким образом, при бифуркации Хопфа не только возникает новое значение  $r$ , т. е. предельный цикл ненулевого радиуса, но и происходит сдвиг частот. Полученный нами результат допускает весьма изящное обобщение, если от уравнения (8.4.20) мы перейдем к уравнению

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\lambda''_u)u + u[f(|u|^2) + ig(|u|^2)], \quad (8.4.25)$$

частным случаем которого является уравнение (8.4.20).

Предположим, что  $f$  и  $g$  — вещественнозначные функции своих аргументов и многочлены. Будем снова искать решение в виде (8.4.21). Подставляя (8.4.21) в уравнения (8.4.25) и разделяя вещественную и мнимую части, получаем уравнения

$$\dot{r} = \lambda'_u r - r[f(r^2)], \quad (8.4.26)$$

$$\dot{\varphi} = \lambda''_u - g(r^2), \quad (8.4.27)$$

Уравнение (8.4.26), по существу, встречалось нам раньше (см. уравнение (8.2.20)). После того как решение  $r(t)$  уравнения (8.4.26) найдено, дополнительное уравнение (8.4.27) легко решается в квадратурах.

### 8.5. Бифуркация Хопфа (продолжение)

Рассмотрим теперь часто встречающийся в практических приложениях случай, когда уравнение параметра порядка более общее, чем уравнение (8.4.25), имеет вид

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\lambda''_u)u - (b' + ib'')u|u|^2 + f(u, u^*), \quad (8.5.1)$$

где  $\lambda'_u$ ,  $\lambda''_u$ ,  $b'$  и  $b''$  — вещественные числа.

Относительно функции  $f$  мы предполагаем, что она имеет порядок  $|u^3|$ , но не содержит член  $u|u|^2$ , выделенный в уравнении (8.5.1) особо. Таким образом, специализация общего уравнения (8.4.8) состоит в предположении, что правая часть уравнения (8.5.1) не содержит членов, квадратичных или билинейных по  $u$ ,  $u^*$ . Полагая

$$u(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}, \quad (8.5.2)$$

$r \geq 0$ ,  $\varphi(t)$  — вещественнозначная функция, преобразуем уравнение (8.5.1) в систему двух уравнений

$$\dot{r} = \lambda'_u r - b' r^3 + g(r, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}), \quad (8.5.3)$$

$$\dot{\varphi} = \underbrace{\lambda''_u - b'' r^2}_{\omega} + h_1(r, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}). \quad (8.5.4)$$

где

$$g = \operatorname{Re} \{e^{-i\varphi} f\}, \quad (8.5.5)$$

$$h = \operatorname{Im} \{e^{-i\varphi} f\} / r. \quad (8.5.6)$$

Наш выбор функции  $f$  требует, чтобы функция  $g$  была порядка  $r^3$ , а функция  $h$  — порядка  $r^2$ . Функцию  $g$  можно представить в виде

$$g = g_1 + g_2(\varphi), \quad (8.5.7)$$

где  $g_1$  порядка  $r^4$  и не зависит от  $\varphi$ , а  $g_2$  удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} g_2 d\varphi = 0. \quad (8.5.8)$$

Кроме того, мы можем представить функцию  $h$  в виде

$$h = h_1 + h_2(\varphi), \quad (8.5.9)$$

где  $h_1$  порядка  $r^3$ , а  $h_2$  удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} h_2 d\varphi = 0. \quad (8.5.10)$$

По предположению  $b' > 0$ . При  $\lambda'_u < 0$  решение  $r = 0$  устойчиво, при  $\lambda'_u > 0$  оно становится неустойчивым. Положим

$$r = r_0 + \xi \quad (8.5.11)$$

и потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda''_u r_0 - b' r_0^3 = 0. \quad (8.5.12)$$

Это позволит нам преобразовать уравнение (8.5.3) в уравнение

$$\dot{\xi} = -2\lambda'_u \xi - 3b' r_0 \xi^2 - b' \xi^3 + g(r_0 + \xi, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}). \quad (8.5.13)$$

Так как нас интересует поведение решений уравнения (8.5.1) вблизи точки перехода  $\lambda'_u = 0$ , важное значение приобретает малость  $\lambda'_u$ . Параметр малости  $\varepsilon$  позволяет указывать эту характеристику величины  $\lambda'_u$  в явном виде:

$$\lambda'_u = \varepsilon^2 \tilde{\lambda}. \quad (8.5.14)$$

Из соотношения (8.5.12) следует, что

$$r_0 = \varepsilon \tilde{r}_0. \quad (8.5.15)$$

Соответствующие члены правильного порядка по  $\varepsilon$  в правой и левой частях уравнения (8.5.13) мы найдем, произведя масштабные преобразования амплитуды

$$\xi = \varepsilon \eta \quad (8.5.16)$$

и времени

$$t = \tau / \varepsilon^2. \quad (8.5.17)$$

Так как  $g$  зависит от  $r$  как  $r^3$ , то

$$g = \varepsilon^3 \tilde{g}. \quad (8.5.18)$$

Производя масштабные преобразования (8.5.14) — (8.5.18) величин, входящих в уравнение (8.5.13), получаем после деления на  $\varepsilon^3$  уравнение

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -2\tilde{\lambda}\eta - 3b'\eta^2 - b'\eta^3 + \tilde{g}(\tilde{r}_0 + \eta, \varepsilon, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}). \quad (8.5.19)$$

Производя соответствующие масштабные преобразования в уравнении (8.5.4) и полагая

$$h = \varepsilon^2 \tilde{h}, \quad (8.5.20)$$

преобразуем уравнение (8.5.4) к виду

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \underbrace{(\lambda''_u - b'' \varepsilon^2 \tilde{r}^2)}_{\tilde{\omega}} + \tilde{h}(\tilde{r}, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}). \quad (8.5.21)$$

Это уравнение показывает, что вместо первоначальной частоты  $\omega$ , входящей в уравнение (8.5.4), нам теперь придется иметь дело с перенормированной частотой  $\tilde{\omega}$ , связанной с частотой  $\omega$  соотношением

$$\tilde{\omega} = \omega / \varepsilon^2. \quad (8.5.22)$$

Так как  $\varepsilon$  — малая величина, в введенном нами новом масштабе времени  $\tau$  частота  $\tilde{\omega}$  очень велика. Покажем, что  $\tilde{g}$  и  $\tilde{h}$  в уравнениях (8.5.19) и (8.5.21) — малые величины. Исходя из уравнения (8.5.21), мы можем предположить, что в низшем приближении  $\exp(i\varphi) \approx \approx \exp(i\tilde{\omega}\tau)$  — быстро осциллирующая величина.

Рассмотрим теперь какую-нибудь функцию от такой величины, например  $\tilde{g}_2$  или  $\tilde{h}_2$ . Так как  $\tilde{g}_2$  и  $\tilde{h}_2$  — функции от  $\exp(i\varphi)$ , каждая из них представима в виде

$$\sum_{m \neq 0} c_m e^{im\omega\tau/\varepsilon^2}. \quad (8.5.23)$$

Предположим, что  $\tilde{g}$  и  $\tilde{h}$  — малые величины. Тогда разложение в ряд теории возмущений мы можем производить так же, как в квазипериодическом случае, рассмотренном в гл. 6.

Для этого, как было показано, необходимо вычислить неопределенный интеграл от ряда (8.5.23) по  $\tau$ , равный

$$\frac{\varepsilon^2}{i\omega} \sum_{m \neq 0} \frac{c_m}{m} e^{im\omega\tau/\varepsilon^2}. \quad (8.5.24)$$

Если ряд (8.5.23) сходится абсолютно, то и ряд (8.5.24) сходится абсолютно, так как

$$\left| \frac{c_m}{m} \right| \leq |c_m|. \quad (8.5.25)$$

Но множитель  $\varepsilon^2$  перед суммой в (8.5.24) может быть сколь угодно малым. Это означает, что функции  $\tilde{g}_2$  и  $\tilde{h}_2$  допустимо считать малыми величинами. Кроме того, из принятых нами предположений следует, что члены  $\tilde{g}_1$  и  $\tilde{h}_1$ , не зависящие от  $\varphi$ , имеют еще более высокий порядок и их также можно считать малыми величинами. Таким образом,  $\tilde{g}$  и  $\tilde{h}$  действуют как малые возмущения.

Малость членов  $\tilde{g}$  и  $\tilde{h}$  можно указать явно, если произвести еще одну серию масштабных преобразований, а именно

$$\tilde{g} = \varepsilon'^2 \hat{g}, \quad (8.5.26)$$

$$\tilde{h} = \varepsilon' \hat{h} \quad (8.5.27)$$

и

$$\eta = \varepsilon' \hat{\eta}. \quad (8.5.28)$$

Преобразования (8.5.26) — (8.5.28) позволяют перейти от уравнений (8.5.19), (8.5.21) к уравнениям

$$\frac{d\hat{\eta}}{d\tau} = -2\hat{\lambda}\hat{\eta} - 3b'\varepsilon'\hat{\eta}^2 - b'\varepsilon'^2\hat{\eta}^3 + \varepsilon'\hat{g}(\tilde{r}_0 + \varepsilon'\hat{\eta}, \varepsilon, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}). \quad (8.5.29)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon^2} \lambda_u'' - b'' (\tilde{r}_0 + \varepsilon' \hat{\eta})^2 + \varepsilon' \hat{h} (\tilde{r}_0 + \varepsilon' \hat{\eta}), \quad \varepsilon, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}. \quad (8.5.30)$$

Собирая вместе все величины, содержащие параметр малости  $\varepsilon'$ , запишем уравнения (8.5.29), (8.5.30) в окончательном виде

$$\frac{d\hat{\eta}}{d\tau} = -2\hat{\lambda}\hat{\eta} + \varepsilon' \bar{g}(\hat{\eta}, \varepsilon', e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}), \quad (8.5.31)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \omega_u + \varepsilon' \bar{h}(\hat{\eta}, \varepsilon', e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}), \quad (8.5.32)$$

где

$$\omega_u = \lambda_u''/\varepsilon^2 - b'' \tilde{r}_0^2. \quad (8.5.33)$$

По причине которая станет сейчас ясной, уравнения (8.5.31) и (8.5.32) удобно записать в виде

$$\dot{\eta} = -\dot{\lambda}_u \eta + \varepsilon g(\eta, \varphi, \varepsilon), \quad (8.5.34)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_u + \varepsilon h(\eta, \varphi, \varepsilon), \quad (8.5.35)$$

где  $g$  и  $h$  — функции  $2\pi$ -периодические по  $\varphi$  (их не следует путать с функциями  $g$  и  $h$ , входящими в уравнения (8.5.3), (8.5.4)).

Уравнения (8.5.34) и (8.5.35) записаны в таком виде, который позволяет нам воспользоваться результатами разд. 6.2. Напомним, что в этом разделе мы изложили теорему Мозера. Она-то и позволит нам проанализировать уравнения (8.5.34), (8.5.35) (см. для сравнения уравнения (6.1.9), (6.1.10)).

Следует подчеркнуть, что теорему Мозера мы используем «не в полную силу», так как она применима к квазипериодическому движению, в то время как нас сейчас интересует только периодическое движение (тем самым исключается проблема малых знаменателей). Заметим, что уравнения (8.5.34), (8.5.35) можно было бы решить и более прямыми методами, например по теории возмущений. В дальнейшем нам предстоит применить ту же схему рассуждений и к более сложному случаю квазипериодического движения, поэтому мы хотели бы предварительно продемонстрировать наиболее существенные особенности нашего подхода в более простом случае.

Сравним уравнения (8.5.34), (8.5.35) с уравнениями (6.1.9), (6.1.10). В гл. 6 наша задача состояла в том, чтобы ввести контрчлены  $D$  и  $\Delta$  (а в случае необходимости и  $d$ ), которые должны были воспрепятствовать изменению величины  $\Lambda$  и  $\omega$  при итерациях.

Производимые нами теперь итерации несколько отличаются от тех, с которыми мы встречались в разд. 6.1, так как уравнения (8.5.34), (8.5.35) не содержат контрчленов. Следовательно, возму-

щения  $g$  и  $h$  теперь будут приводить к изменению  $\Lambda$  и  $\omega$ , и это необходимо иметь в виду. Тем не менее результаты, изложенные в разд. 6.1, переносятся и на рассматриваемый нами сейчас случай. Обозначим для краткости —  $\hat{\lambda}_u$  через  $\lambda_u$  (новую величину  $\lambda_u = -\hat{\lambda}_u$  не следует путать с введенной ранее величиной  $\lambda_u$  (см. 8.4.6)) и запишем

$$\lambda_u = \underbrace{\lambda_u - D}_{\lambda_r} + D \quad (8.5.36)$$

и аналогично

$$\omega_u = \underbrace{\omega_u - \Delta}_{\omega_r} + \Delta \quad (8.5.37)$$

Подставляя правые части соотношений (8.5.36), (8.5.37) в уравнения (8.5.34), (8.5.35), мы преобразуем эти уравнения к тому самому виду, который требуется для того, чтобы была применима теорема Мозера. Используемый нами прием хорошо известен из физики, а именно из квантовой теории поля, где величины с индексом  $u$ , например  $\omega_u$ , принято называть неперенормированными, а величины типа  $\omega_r$ ,  $\lambda_r$  — перенормированными. По теореме Мозера мы можем вычислить  $D$  и  $\Delta$  из уравнений (8.5.34) и (8.5.35), если подставим в них разложения (8.5.36), (8.5.37). Члены  $D$  и  $\Delta$  становятся при этом функциями от  $\lambda_r$ ,  $\omega_r$  и  $\varepsilon$ , и мы получаем соотношения

$$\lambda_r = \lambda_u - D(\lambda_r, \omega_r, \varepsilon), \quad (8.5.38)$$

$$\omega_r = \omega_u - \Delta(\lambda_r, \omega_r, \varepsilon), \quad (8.5.39)$$

где  $D$  и  $\Delta$  — функции, аналитичные по  $\varepsilon$  и, как нетрудно убедиться, анализируя описанный в разд. 6.3 итерационный метод, непрерывные и даже дифференцируемые по  $\lambda_r$ ,  $\omega_r$ . Это позволяет нам разложить соотношения (8.5.38), (8.5.39) по крайней мере при малых  $\varepsilon$  по  $\lambda_r$  и  $\omega_r$ :

$$\lambda_r = F(\lambda_u, \omega_u, \varepsilon), \quad (8.5.40)$$

$$\omega_r = G(\lambda_u, \omega_u, \varepsilon). \quad (8.5.41)$$

Обратить соотношения (8.5.38), (8.5.39) (разрешить их относительно  $\lambda_r$ ,  $\omega_r$ ) позволяет следующий простой алгоритм: вместо величин  $\lambda_r$  и  $\omega_r$ , входящих в аргументы функций  $D$  и  $\Delta$  в правых частях соотношений (8.5.38), (8.5.39), надлежит последовательно подставлять соответствующие правые части в низшем порядке соотношений (8.5.38), (8.5.39). Так, в нулевом приближении мы получаем

$$\lambda_r = \lambda_u - D(\lambda_u, \omega_u, \varepsilon). \quad (8.5.42)$$

Для полноты заметим, что при  $\lambda_r = 0$  может возникнуть постоянный контрчлен  $d$ . В этом случае мы получаем уравнение

$$\dot{\eta} = d - \lambda_u \eta + \varepsilon q(\eta, \varphi, \varepsilon), \quad (8.5.43)$$

где

$$\lambda_u r_0 - b' r_0^3 = d. \quad (8.5.44)$$

Заметим лишь, что  $d$  можно задать соотношением (8.5.44) вместо соотношения (8.5.12).

Описав метод, позволяющий находить сдвинутую, т. е. перенормированную, частоту (8.5.39) и перенормированную постоянную релаксации (8.5.38), обратимся теперь к выяснению вида решений  $\eta$  и  $\varphi$ . Вместо уравнений (8.5.34), (8.5.35) рассмотрим уравнения более общего вида, частным случаем которых являются уравнения (8.5.34) и (8.5.35). Эти более общие уравнения записаны для фазовых углов  $\varphi$  и вещественных величин  $\xi$ . В разд. 6.3 было показано, что соответствующие уравнения для  $\varphi$  и  $\xi$  могут быть приведены к простому виду преобразованиями

$$\varphi = \psi + \varepsilon u(\psi, \varepsilon), \quad (8.5.45)$$

$$\xi = \chi + \varepsilon v(\psi, \varepsilon) + \varepsilon V(\psi, \varepsilon) \chi. \quad (8.5.46)$$

В разд. 6.3 был изложен и итерационный метод, позволяющий построить  $u$ ,  $v$  и  $V$ . В частности, функции  $u$ ,  $v$  и  $V$  были  $2\pi$ -периодическими по  $\psi$ . Уравнения для  $\psi$  и  $\chi$  представимы в виде

$$\dot{\psi} = \omega + O(\chi), \quad (8.5.47)$$

$$\dot{\chi} = \Lambda \chi + O(\chi^2) \quad (8.5.48)$$

и, если ограничиться низшими членами, допускают решения

$$\psi = \omega t, \quad (8.5.49)$$

$$\chi = e^{\Lambda t} \chi_0. \quad (8.5.50)$$

Подставляя функции (8.5.49), (8.5.50) в уравнения (8.5.45), (8.5.46), находим, как зависят от времени  $\varphi$  и  $\xi$ :

$$\varphi = \omega t + \varepsilon u(\omega t, \varepsilon), \quad (8.5.51)$$

$$\xi = e^{\Lambda t} \chi_0 + \varepsilon v(\omega t, \varepsilon) + \varepsilon V(\omega t, \varepsilon) e^{\Lambda t} \chi_0. \quad (8.5.52)$$

Нам осталось сделать последний шаг и специализировать полученный общий результат, приспособив его к интересующему нас частному случаю — уравнениям (8.5.34), (8.5.35). Переходя к новым обозначениям

$$\xi \rightarrow \eta, \quad (8.5.53)$$

$$\Lambda \rightarrow \lambda_r, \quad (8.5.54)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi, \quad (8.5.55)$$

$$\omega \rightarrow \omega_r, \quad (8.5.56)$$

запишем временные зависимости (8.5.51) и (8.5.52) в виде

$$\varphi = \omega_r t + \varepsilon u(\omega_r t, \varepsilon), \quad (8.5.57)$$

$$\eta = \chi_0 \exp(\lambda_r t) + \varepsilon v(\omega_r t, \varepsilon) + \varepsilon V(\omega_r t, \varepsilon) \chi_0 \exp(\lambda_r t), \quad \lambda_r < 0. \quad (8.5.58)$$

Формулы (8.5.57), (8.5.58) показывают, как ведет себя решение вблизи точки бифуркации. Так, из соотношения (8.5.58) следует, что решение устойчиво и релаксирует к стационарному состоянию

$$\eta = \varepsilon v(\omega_r t, \varepsilon). \quad (8.5.59)$$

Мы видим, в частности, что колебания происходят с перенормированной частотой  $\omega_r$ . Изложенный выше подход выходит далеко за рамки традиционных подходов, так как позволяет не только находить претерпевающее бифуркацию решение в стационарном состоянии, но и получать важные сведения о поведении такого решения вблизи стационарного состояния, т. е. определять релаксационные свойства. Вряд ли нужно говорить, сколь это необходимо, если мы собираемся исследовать устойчивость и, кроме того, учесть влияние флуктуации (о чем пойдет речь в дальнейшем).

## 8.6. Взаимная синхронизация двух осцилляторов

В качестве примера рассмотрим бифуркацию из фокуса, при которой *у двух* комплексных собственных значений вещественные части становятся положительными. В этом случае мы имеем два уравнения для двух комплексных параметров порядка  $u_1$  и  $u_2$ . Для демонстрации основных идей эти уравнения удобно привести к виду

$$\dot{u}_1 = (\lambda'_1 + i\omega_1) u_1 - b_1 u_1 |u_1|^2 + c_1 u_2 |u_2|^2, \quad (8.6.1)$$

$$\dot{u}_2 = (\lambda'_2 + i\omega_2) u_2 - b_2 u_2 |u_2|^2 + c_2 u_1 |u_1|^2. \quad (8.6.2)$$

Их решения будем искать в виде

$$u_j = r_j \exp[i\varphi_j(t)], \quad j = 1, 2. \quad (8.6.3)$$

В дальнейшем нам понадобится разложение

$$\varphi_j = \omega'_j t + \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \quad (8.6.4)$$

где постоянные частоты  $\omega'_j$  таковы, что  $\psi_j$ ,  $j = 1, 2$ , остаются ограниченными при любых  $t$ . Мы будем называть  $\omega'_j$  перенормированными частотами. Подставляя (8.6.3), например, в уравнение (8.6.1), получаем уравнение

$$\dot{r}_1 + i\dot{\varphi}_1 r_1 = (\lambda'_1 + i\omega_1) r_1 - b_1 r_1^3 + c_1 r_2^3 \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (8.6.5)$$

которое эквивалентно системе двух уравнений — для вещественной и мнимой частей:

$$\dot{r}_1 = \lambda_1 r_1 - b_1 r_1^3 + c_1 r_2^3 \operatorname{Re} \{ \exp [i (\varphi_2 - \varphi_1)] \}, \quad (8.6.6)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + c_1 (r_2^3 / r_1) \operatorname{Im} \{ \exp [i (\varphi_2 - \varphi_1)] \}. \quad (8.6.7)$$

Аналогичные уравнения получаются для  $r_2$ ,  $\varphi_2$ . Пусть  $c_1$  — малая величина. Тогда в первом приближении соответствующим членом в уравнении (8.6.6) можно пренебречь, что дает хорошее приближение к стационарному решению  $r_{1,0}$ :

$$r_{1,0} = \sqrt{\lambda_1 / b_1}. \quad (8.6.8)$$

Аналогичным образом мы получаем не зависящее от времени решение  $r_{2,0}$ .

Рассмотрим теперь более подробно уравнение (8.6.7) и аналогичное уравнение для  $\varphi_2$  в предположении, что  $r_1 = r_{1,0}$  (см. (8.6.8)) и  $r_2 = r_{2,0}$ . Чтобы нам было удобнее анализировать уравнения

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + c_1 (r_2^3 / r_1)_0 \sin (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (8.6.9)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 - c_2 (r_1^3 / r_2)_0 \sin (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (8.6.10)$$

введем новую переменную

$$\Psi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (8.6.11)$$

и разность частот

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1. \quad (8.6.12)$$

Вычитая уравнение (8.6.9) из уравнения (8.6.10), получаем

$$\dot{\Psi} = \Omega - \alpha \sin \Psi, \quad (8.6.13)$$

где

$$\alpha = c_2 (r_1^3 / r_2)_0 + c_1 (r_2^3 / r_1)_0. \quad (8.6.14)$$

Уравнение (8.6.13) легко решается методом разделения переменных:

$$t = \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi'}{\Omega - \alpha \sin \Psi'}, \quad (8.6.15)$$

где  $\Psi_0$  — начальное значение  $\Psi$  при  $t = 0$ . Интеграл в правой части равенства (8.6.15) ведет себя по-разному в зависимости от величины  $\alpha$  и  $\Omega$ . При

$$|\alpha| < |\Omega| \quad (8.6.16)$$

подынтегральное выражение в (8.6.15) заведомо не расходится.

В частности, мы можем разлагать тогда знаменатель в ряд по степеням  $\alpha$ . Интеграл в этом случае можно представить в виде

$$\int \dots = \frac{1}{\Omega} (\Psi - \Psi_0) + \text{Малые пульсации.} \quad (8.6.17)$$

Пренебрегая малыми пульсациями, мы получаем из (8.6.15) соотношение

$$\Psi - \Psi_0 = t\Omega = t(\omega_2 - \omega_1). \quad (8.6.18)$$

Из определений (8.6.11), (8.6.12) величин  $\Psi$  и  $\Omega$  и соотношений (8.6.4), (8.6.18) следует, что

$$(\omega_2' - \omega_1')t + \varphi_2 - \varphi_1 = t(\omega_2 - \omega_1) + \Psi_0, \quad (8.6.19)$$

или

$$\omega_2' - \omega_1' = \omega_2 - \omega_1. \quad (8.6.20)$$

Соотношение (8.6.20) означает, что интервал между перенормированными частотами  $\omega_i'$  остается таким же, как между частотами  $\omega_i$  до включения нелинейного взаимодействия. Совершенно другая ситуация возникает, если выполняется условие

$$|\alpha| > |\Omega|. \quad (8.6.21)$$

В этом случае интеграл расходится при конечном  $\Psi$  (иначе говоря, при этом значении  $\Psi$  временной параметр  $t$  обращается в бесконечность). Если исключить переходные режимы, то решение дифференциального уравнения (8.6.13) имеет вид

$$\Psi = \arcsin(\Omega/\alpha) = \text{const}, \quad (8.6.22)$$

откуда с учетом соотношений (8.6.11) и (8.6.4) следует, что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2' - \omega_1')t + \psi_2 - \psi_1 = \text{const}. \quad (8.6.23)$$

Соотношение (8.6.23) может выполняться только в том случае, если перенормированные частоты  $\omega_i'$  совпадают:

$$\omega_2' = \omega_1', \quad (8.6.24)$$

т. е. если частоты становятся равными по величине, или, как принято говорить, если происходит затягивание частот. Аналогичным образом ведут себя и фазы  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  (затягивание фаз обусловлено соотношением (8.6.22)).

Следует заметить, что затягивание частот присуще гораздо более общим классам уравнений, весьма простым частным случаем которых являются уравнения (8.6.1), (8.6.2).

**Упражнение.** Рассмотрите три связанных осциллятора и покажите, что если «разность разностей» частот

$$(\omega_2 - \omega_1) - (\omega_3 - \omega_2) \quad (8.6.25)$$

достаточно мала, то может происходить затягивание разностей частот  $\omega_2' - \omega_1'$  и  $\omega_3' - \omega_2'$ .

В качестве примера рассмотрите уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= (\lambda' + i\omega_1)u_1 - b_1 u_1 |u_1|^2 + c_1 u_2^2 u_3^* \\ \dot{u}_2 &= (\lambda' + i\omega_2)u_2 - b_2 u_2 |u_2|^2 + c_2 u_2^* u_1 u_3 \\ \dot{u}_3 &= (\lambda' + i\omega_3)u_3 - b_3 u_3 |u_3|^2 + c_3 u_2^2 u_1^* \end{aligned} \right\} \quad (8.6.26)$$

Указание: запишите решения в виде (8.6.3), (8.6.4) и введите новую переменную

$$\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 = \Psi. \quad (8.6.27)$$

Составьте соответствующую линейную комбинацию уравнения для  $\varphi_j$ , которая даст уравнение для переменной (8.6.27).

### 8.7. Бифуркация из предельного цикла

В предыдущей главе мы узнали, что при изменении управляющего параметра система, которая первоначально покоилась, может начать совершать когерентные колебания, т. е. перейти в режим, в котором траектория системы в соответствующем многомерном пространстве лежит на предельном цикле. При дальнейшем изменении внешнего управляющего параметра движение по предельному циклу может потерять устойчивость. Мы хотим сейчас исследовать некоторые из новых типов режимов, возникающих при потере устойчивости движения по предельному циклу.

Произведем сначала общий анализ с тем, чтобы отделить параметры порядка от амплитуд подчиненных мод, и определим число типичных уравнений для параметров порядка. Мы ограничимся рассмотрением автономных систем, описываемых нелинейными эволюционными уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha), \quad (8.7.1)$$

где  $\mathbf{q}(t)$  — вообще говоря, многомерный вектор состояния системы. Предположим, что при значениях управляющего параметра, принадлежащих некоторому интервалу мы нашли решение

$$\mathbf{q}_0(t, \alpha), \quad (8.7.2)$$

соответствующее движению по предельному циклу. Заметим, что вдали от решения (8.7.2) при том же значении управляющего параметра могут существовать другие решения, но мы их рассматривать не будем.

Изменим значение управляющего параметра  $\alpha$  и предположим, что решение  $\mathbf{q}_0$  допускает продолжение в новую область значений  $\alpha$ . Поскольку решение  $\mathbf{q}_0$  должно быть периодически, потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathbf{q}_0(t+T, \alpha) = \mathbf{q}_0(t, \alpha), \quad (8.7.3)$$

в котором  $T$  может зависеть от  $\alpha$ :

$$T = T(\alpha). \quad (8.7.4)$$

Исследуем решение (8.7.2) на устойчивость. Для этого мы, как обычно, воспользуемся подстановкой

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{w}(t), \quad (8.7.5)$$

и получим из уравнения (8.7.1) новое уравнение

$$\dot{\mathbf{q}}_0(t) + \dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}_0(t) + \mathbf{w}(t)). \quad (8.7.6)$$

Если возмущение  $\mathbf{w}(t)$  достаточно мало, то уравнение (8.7.6) можно линеаризовать по  $\mathbf{w}$ . В результате линеаризации мы придем к уравнению

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = L\mathbf{w}(t), \quad (8.7.7)$$

где

$$L = (L_{ij}) \quad (8.7.8)$$

— матрица с элементами

$$L_{ij} = \left. \frac{\partial N_i(\mathbf{q}, \alpha)}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0(t)}. \quad (8.7.9)$$

Так как  $\mathbf{N}$  содержит в качестве аргумента периодическую функцию  $\mathbf{q}_0$  и зависит от управляющего параметра  $\alpha$ , матрица  $L$  зависит от времени  $t$  и управляющего параметра  $\alpha$ :

$$L = L(t, \alpha). \quad (8.7.10)$$

Кроме того,  $L$  обладает такой же периодичностью по  $t$ , как и  $\mathbf{q}_0$ :

$$L(t+T, \alpha) = L(t, \alpha). \quad (8.7.11)$$

Из разд. 2.7 известно, что решения уравнения (8.7.7) можно представить в виде

$$\mathbf{w}_k(t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k(t). \quad (8.7.12)$$

Если значение  $\lambda_k$  не вырождено, то вектор  $\mathbf{v}_k$  периодичен с периодом  $T$ . В противном случае  $\mathbf{v}_k$  можно представить в виде многочлена по  $t$  с периодическими коэффициентами. Во избежание излишних подробностей мы будем предполагать, что все векторы  $\mathbf{v}_k$  периодичны по времени, хотя излагаемая ниже схема без труда обобщается. Поскольку  $\mathbf{q}_0$  удовлетворяет уравнению (8.7.1), воспользуемся соотношением

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{N}(\mathbf{q}_0) \quad (8.7.13)$$

и, продифференцировав обе части его по времени, получаем

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = L\dot{\mathbf{q}}_0. \quad (8.7.14)$$

Сравнивая уравнения (8.7.14) с уравнением (8.7.7), мы видим, что одно из решений уравнения (8.7.7) совпадает с  $\dot{\mathbf{q}}_0$ :

$$\mathbf{w}_1 \equiv \dot{\mathbf{q}}_0(t) \rightarrow \lambda_1 = 0. \quad (8.7.15)$$

Ясно, что вектор  $\mathbf{w}_1$  при любом  $t$  направлен по касательной к траектории в точке  $\mathbf{q}_0(t)$ . Так как линейная оболочка решений уравнения (8.7.7) совпадает со всем векторным пространством, мы заключаем, что при любом  $t$  вектор, касательный к траектории, и  $n-1$  линейно независимых векторов, трансверсальных к траектории, образуют базис всего векторного пространства. Так как мы хотим изучать новые траектории, в которые переходит при гладкой деформации предельный цикл, построим систему координат, используя в качестве координатных линий старый предельный цикл и линии, идущие в трансверсальных к нему направлениях. Мы ожидаем, что из-за нелинейностей, входящих в уравнение (8.7.6), новая траектория будет сдвинута по фазе относительно первоначального предельного цикла и будет находиться от него на некотором расстоянии (изменяющемся в зависимости от направления). В соответствии с нашими ожиданиями новое решение  $\mathbf{q}(t)$ , соответствующее деформированному предельному циклу, мы построим, используя фазовый угол  $\Phi(t)$  и отклонения  $\xi(t)$  от первоначального предельного цикла. Итак, пусть

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t + \Phi(t)) + \underbrace{\sum_k' \xi_k(t) \mathbf{v}_k(t + \Phi(t))}_{\mathbf{W}}. \quad (8.7.16)$$

Штрих у знака суммы означает, что из нее необходимо исключить решение (8.7.15), т. е. что

$$k \neq 1. \quad (8.7.17)$$

Действительно, направление отвечает за фазовый угол  $\Phi(t)$  и не входит в число трансверсальных направлений. Член  $\mathbf{W}$  в уравнении (8.7.16) зависит от отклонений  $\xi_k(t)$ , времени  $t$  и фазового угла  $\Phi(t)$ , т. е.

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\xi, t + \Phi(t)). \quad (8.7.18)$$

Подставляя в уравнение (8.7.1) вместо  $\mathbf{q}(t)$  правую часть соотношения (8.7.16), получаем (опуская у  $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}_k, \dot{\mathbf{v}}_k$  аргумент  $t + \Phi(t)$ )<sup>1)</sup>

$$\dot{\mathbf{q}}_0 + \dot{\mathbf{q}}_0 \dot{\Phi} + \sum_k' \dot{\xi}_k \mathbf{v}_k + \sum_k' \xi_k \dot{\mathbf{v}}_k (1 + \dot{\Phi}) = \mathbf{N}(\mathbf{q}_0 + \mathbf{W}), \quad (8.7.19)$$

<sup>1)</sup> Точка над буквой означает дифференцирование по всему аргументу (для  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v}$  — по  $t + \Phi(t)$ , для  $\Phi$  — по  $t$ ).

где правая часть допускает разложение в ряд по степеням вектора  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}_0 + \mathbf{W}) = \mathbf{N}(\mathbf{q}_0) + L\mathbf{W} + \mathbf{H}(\mathbf{W}), \quad (8.7.20)$$

где свободный член  $\mathbf{N}$  и матрица  $L$  были определены выше, а  $\mathbf{H}(\mathbf{W})$  можно рассматривать как степенной ряд по  $\mathbf{W}$ , начинающийся с членов второго порядка:

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}) = N^{(2)} : \mathbf{W} : \mathbf{W} + \dots \quad (8.7.21)$$

Так как  $\mathbf{W}$  зависит от  $\xi$  и  $t + \Phi$  (см. (8.7.18)), ряд (8.7.21) также можно считать функцией от  $\xi$  и  $t + \Phi$ , т. е.

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}) = \mathbf{H}(\xi, t + \Phi) + \sum'_{k, k'} \xi_k \xi_{k'} N^{(2)} : \mathbf{v}_k : \mathbf{v}_{k'} + \dots \quad (8.7.22)$$

Вспользуемся теперь тем, что вектор-функция (8.7.2) удовлетворяет уравнению (8.7.1), и из уравнения (8.7.7) и представления его решений в виде (8.7.12) получим

$$\dot{\mathbf{q}}_0 \dot{\Phi} + \sum'_k \dot{\xi}_k \mathbf{v}_k + \sum'_k \dot{\xi}_k \dot{\mathbf{v}}_k \dot{\Phi} = \sum'_k \dot{\xi}_k \lambda_k \mathbf{v}_k + \mathbf{H}(\xi, t + \Phi). \quad (8.7.23)$$

В разд. 2.5 было показано, что можно построить биортогональное семейство функций  $\bar{\mathbf{v}}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (см. 2.5.16)). Умножая обе части уравнения (8.7.23) на  $\bar{\mathbf{v}}_1$  и используя соотношение ортогональности, преобразуем уравнение (8.7.23) к виду

$$\dot{\Phi} + \sum'_k \dot{\xi}_k \langle \bar{\mathbf{v}}_1 \dot{\mathbf{v}}_k \rangle \dot{\Phi} = \langle \bar{\mathbf{v}}_1 \mathbf{H} \rangle. \quad (8.7.24)$$

Запишем  $\langle \bar{\mathbf{v}}_1 \mathbf{H} \rangle$  подробно:

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_1 \mathbf{H} \rangle \equiv \hat{H}_1 = \sum'_{k, k'} \dot{\xi}_k \dot{\xi}_{k'} \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_1 N^{(2)} : \mathbf{v}_k : \mathbf{v}_{k'} \rangle}_{A_{1kk'}(t + \Phi(t))} + \dots \quad (8.7.25)$$

Аналогичным образом, умножая (8.7.23) на  $\mathbf{v}_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ), мы приходим к уравнениям

$$\dot{\xi}_k = \lambda_k \dot{\xi}_k - \sum'_{k'} \dot{\xi}_{k'} \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_k \dot{\mathbf{v}}_{k'} \rangle}_{a_{kk'}(t + \Phi)} \dot{\Phi} + \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_k \mathbf{H} \rangle}_{\hat{H}_k}, \quad k, k' \neq 1, \quad (8.7.26)$$

где

$$\hat{H}_k = \sum'_{k', k''} A_{kk'k''}(t + \Phi) \dot{\xi}_{k'} \dot{\xi}_{k''} + \dots \quad (8.7.27)$$

Разрешив уравнение (8.7.24) относительно  $\dot{\Phi}$ :

$$\dot{\Phi} = \left[ 1 + \sum'_k \dot{\xi}_k(t) a_{1k}(t + \Phi) \right]^{-1} \hat{H}_1(\xi, t + \Phi) \equiv \tilde{f}(\xi, t + \Phi), \quad (8.7.28)$$

исключим  $\dot{\Phi}$  из уравнений (8.7.26):

$$\dot{\xi}_k = \lambda_k \xi_k - \sum_{k'} \xi_{k'} a_{kk'}(t + \Phi) \left[ 1 + \sum_{k''} \xi_{k''}(t) a_{1k''}(t + \Phi) \right]^{-1} \times \\ \times H_1(\xi, t + \Phi) + \hat{H}_k \equiv \lambda_k \xi_k + \hat{G}_k(\xi, t + \Phi). \quad (8.7.29)$$

Напомним, что  $\hat{H}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) через  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0 \equiv \mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_k$  зависят от  $t + \Phi$ . Исследуем эту зависимость более подробно. Так как  $\mathbf{q}_0$  — гладкая периодическая функция, ее можно разложить в ряд Фурье

$$\mathbf{q}_0(t) = \sum_m \mathbf{c}_m e^{im\omega t}, \quad (8.7.30)$$

где

$$\omega = 2\pi/T. \quad (8.7.31)$$

Аналогичным образом мы можем разложить в ряд Фурье  $\mathbf{v}_k$ :

$$\mathbf{v}_k(t) = \sum_m \mathbf{d}_m e^{im\omega t}. \quad (8.7.32)$$

Принятые нами предположения относительно  $\hat{H}_k$  позволяют представить эти функции в виде рядов Фурье по переменной  $t + \Phi$ :

$$\hat{H}_k(t + \Phi) = \sum_m \mathbf{c}_m^{(k)} e^{im\omega(t + \Phi)}. \quad (8.7.33)$$

Чтобы воспользоваться приведенными выше теоремами (в частности, теми, о которых шла речь в разд. 6.2), введем новую переменную

$$\varphi(t) \equiv \omega [t + \Phi(t)]. \quad (8.7.34)$$

Дифференцируя (8.7.34) по времени, получаем

$$\dot{\varphi}(t) = \omega + \omega \dot{\Phi}. \quad (8.7.35)$$

Подставляя вместо  $\dot{\Phi}$  правую часть уравнения (8.7.28), преобразуем уравнение (8.7.35) к виду

$$\dot{\varphi} = \omega + f(\xi, \varphi), \quad (8.7.36)$$

где

$$f(\xi, \varphi) = \omega \hat{f}(\xi, \varphi \omega^{-1}). \quad (8.7.37)$$

Аналогичным образом из уравнения (8.7.29) следует, что

$$\dot{\xi}_k(t) = \lambda_k \xi_k(t) + g_k(\xi, \varphi), \quad (8.7.38)$$

где

$$g_k(\xi, \varphi) = \hat{G}_k(\xi, \varphi \omega^{-1}). \quad (8.7.39)$$

Заметим, что  $f$  и  $g_k$  —  $2\pi$ -периодические функции по  $\varphi$ . Уравнения (8.7.38) удобнее записать в векторном виде:

$$\dot{\xi} = \Lambda \xi + G(\xi, \varphi). \quad (8.7.40)$$

Уравнения (8.7.36) и (8.7.40) — точные. Именно они и составляют окончательный результат этого раздела. Перейдем к рассмотрению частных случаев.

## 8.8. Бифуркация из предельного цикла: частные случаи

### 8.8.1. Бифуркация в два предельных цикла

Вспомним, что в обозначениях, которых мы придерживаемся теперь,  $\lambda_1 = 0$ . Предположим, что остальные собственные значения перенумерованы в таком порядке, при котором индекс 2 получает собственное значение с наибольшей вещественной частью. Будем считать собственное значение  $\lambda_2$  вещественным и невырожденным:

$$\lambda_2 — \text{вещественное неотрицательное число.} \quad (8.8.1)$$

Пусть, кроме того,

$$\operatorname{Re} \{\lambda_k\} \leq C < 0, \quad k = 3, 4, \dots \quad (8.8.2)$$

При достаточно малых  $\xi$  мы можем воспользоваться принципом подчинения (гл. 7), позволяющим исключить все подчиненные переменные с  $k = 3, 4, \dots$ , и вывести уравнения только для параметров порядка

$$\left. \begin{array}{l} \xi(t) \equiv u(t) — \text{вещественнозначная} \\ \text{функция времени,} \\ \varphi(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{параметры} \\ \text{порядка.} \end{array} \quad (8.8.3)$$

По принципу подчинения исходная система уравнений (8.7.36), (8.7.40) сводится к уравнениям

$$\dot{u} = \lambda_u u + g(u, \varphi), \quad (8.8.4)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + f(u, \varphi). \quad (8.8.5)$$

Функции  $f$  и  $g$  могут быть построены в виде степенных рядов по  $u$  с коэффициентами,  $2\pi$ -периодическими по  $\varphi$ . Функция  $g$  допускает разложение

$$\dot{g} = g_2 u^2 + g_3 u^3 + \dots \quad (8.8.6)$$

Каждый коэффициент  $g_j$  в свою очередь может быть разложен в сумму постоянной и члена,  $2\pi$ -периодического по  $\varphi$ , т. е. в виде

$$g_j = g_j(\varphi) = g_{j,1} + g_{j,2}(\varphi), \quad (8.8.7)$$

так что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi g_{j,2}(\varphi) = 0. \quad (8.8.8)$$

Функция  $f$  допускает разложение

$$f = f_1 u + f_2 u^2 + \dots, \quad (8.8.9)$$

где

$$f_j = f_j(\varphi) = f_{j,1} + f_{j,2}(\varphi), \quad (8.8.10)$$

причем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi f_{j,1}(\varphi) = 0. \quad (8.8.11)$$

Сосредоточим сначала внимание на частном случае, когда

$$g_2 = f_1 = 0, \quad g_3 \equiv -b < 0. \quad (8.8.12)$$

Уравнения (8.8.4), (8.8.5) имеют такой же вид, как уравнения, приведенные в разд. 8.4, но с одним отличием. Полагая

$$u = u_0 + \eta \quad (8.8.13)$$

и требуя, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_u u_0 - b u_0^3 = 0, \quad (8.8.14)$$

мы находим два решения

$$u_0 = \pm \sqrt{\lambda_u / b}, \quad (8.8.15)$$

которые отличаются знаком перед квадратным корнем. В случае бифуркации Хопфа следует выбирать знак «плюс», так как  $r_0$  — величина положительная. В рассматриваемом теперь случае мы выбираем оба знака. Каким бы мы не выбрали решение  $u_0$  — положительным или отрицательным, решения (8.8.4), (8.8.5) (в предположении, что условие (8.8.12) выполнено) приводят к уравнениям, с которыми мы уже встречались в разд. 8.4, поэтому необходимость в их рассмотрении отпадает. Приведем лишь окончательный результат.

Для этого удобнее всего обратиться к случаю, когда предельный цикл первоначально лежит в плоскости. Два решения (8.8.15) означают, что из исходного предельного цикла возникают два новых предельных цикла, один из которых расположен внутри исходного цикла, а другой — снаружи от него. Как было показано в разд. 8.7, движение по новым предельным циклам может происходить со сдвигом по фазе относительно движения по старому предельному циклу. Кроме того, фаза может накладываться на колебания стационарного движения, происходящие с перенормированной частотой. Отклонения от  $u_0$  также могут осциллировать с перенормированной частотой  $\omega_r$ . Если предельные циклы лежат не на плоскости,

а в пространстве большего числа измерений, то две траектории, образующиеся из предельного цикла, не обязательно лежат на плоскости: формированные кривые могут обладать ненулевым кручением.

### 8.8.2. Удвоение периода

Рассмотрим теперь случай, аналогичный предыдущему (см. разд. 8.8.1), но отличающийся тем, что собственное значение  $\lambda_2$  комплексно:

$$\lambda_2 = \lambda'_u + i\omega_2. \quad (8.8.16)$$

Мнимая часть  $\omega_2$  может обращаться в нуль, если вещественная часть  $\lambda'_u$  остается при этом дважды вырожденным собственным значением. Применяв принцип подчинения, мы снова получим уравнение для параметра порядка. Предположим, что оно имеет следующий вид:

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\omega_2)u - bu^3 e^{-i\omega t}. \quad (8.8.17)$$

Для простоты будем считать коэффициент  $b$  вещественным, хотя это предположение несущественно. В уравнение (8.8.17) могут входить и другие дополнительные члены. Предполагается, что они достаточно малы и их можно рассматривать как возмущение. Будем считать, что наряду с уравнением (8.8.17) выполняется следующее уравнение для  $\varphi$ :

$$\dot{\varphi} = \omega. \quad (8.8.18)$$

Покажем, что уравнение (8.8.17) допускает решение, осциллирующее с половинной частотой, т. е. с периодом, вдвое большим периода обращения по исходному предельному циклу. Для этого запишем  $u$  в виде

$$u = e^{i\omega t/2} y(t), \quad (8.8.19)$$

где  $y$  — комплексная переменная. Подставляя  $u$  из (8.8.19) в уравнение (8.8.17), получаем

$$\dot{y} = (\lambda'_u + i\omega_2 - i\omega/2)y - by^3. \quad (8.8.20)$$

Уравнение (8.8.20) допускает при  $\lambda'_u < 0$ , устойчивое, не зависящее от времени решение  $y_0 = 0$  и кроме него решения

$$\left. \begin{aligned} y_0^2 &= [\lambda'_u + i(\omega_2 - \omega)/2]/b = \lambda_0 e^{i\varphi_0}, \quad \text{т. е.} \\ y_0 &= \pm \sqrt{\lambda_0} e^{i\varphi_0/2}. \end{aligned} \right\} \text{при } \lambda'_u > 0. \quad (8.8.21)$$

Нетрудно убедиться в том, что решения (8.8.21) (при  $\lambda'_u > 0$ ) устойчивы. Тем самым существование устойчивого решения с удвоен-

ным периодом доказано. Разумеется, в общем случае необходимо учесть влияние старших членов и показать, что их можно рассматривать как возмущения.

### 8.8.3. Субгармоники

Покажем теперь, что удвоение периода представляет собой частный случай генерации субгармоник с частотой  $\omega$ , составляющей  $(1/n)$ -ю от частоты обращения по исходному предельному циклу. Для большей конкретности будем считать, что уравнение для параметра порядка имеет вид

$$\dot{u} = \lambda_u - bu^{n+1} e^{-i\omega t}. \quad (8.8.22)$$

Полагая

$$u = ye^{-i\omega t/n}, \quad (8.8.23)$$

где  $y$  — постоянная, получаем

$$y(\lambda - i\omega/n) - by^{n+1} = 0, \quad \lambda = \lambda_u. \quad (8.8.24)$$

Уравнение (8.8.24) допускает решения

$$y_0 = 0 \quad (8.8.25)$$

и

$$y_0^n = (\lambda - i\omega/n)/b = \lambda_0 e^{i\psi_0}, \quad (8.8.26)$$

или после извлечения корня  $n$ -й степени

$$y_0 = \exp(2\pi im/n) \sqrt[n]{\lambda_0} e^{i\psi_0/n}, \quad (8.8.27)$$

где  $m$  — целое число. Как показывает анализ по линейному приближению, решение (8.8.23), где  $y$  определяется выражением (8.8.27), устойчиво, если  $\lambda'_u > 0$ . Хотя мы предполагали, что собственное значение  $\lambda$  вещественно и положительно, проведенный нами анализ без труда обобщается на случай комплексных  $\lambda$  и  $b$ , если вещественная часть  $\lambda$  положительна.

Рассмотрим кратко примеры, в которых опущенные нами остальные члены допустимо считать возмущениями. Начнем с уравнения

$$\dot{u} = \lambda_u u - bu^3 e^{-i\omega t} + cu^5 + du|u|^4 + \dots, \quad (8.8.28)$$

где возмущающие члены порядка  $u^5$  или выше. Полагая

$$u = e^{i\omega t/2} y(t), \quad (8.8.29)$$

получаем

$$\dot{y} = (\lambda_u - i\omega/2)y - by^3 + cy^5 e^{i\omega t(5/2)} + de^{i\omega t/2} y|y|^4 + \dots \quad (8.8.30)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (8.5.1), мы видим, что дальнейший анализ уравнения (8.8.30) аналогичен проведенному в разд. 8.5. Итак, произведем преобразование

$$y = y_0 + \eta, \quad (8.8.31)$$

где  $y_0$  удовлетворяет соотношению

$$(\lambda_u - i\omega/2) - by_0^2 = 0. \quad (8.8.32)$$

Довести анализ до конца мы предоставляем читателю.

Перейдем теперь к другому примеру, показывающему, что в некоторых случаях априори далеко не очевидно, какие члены можно рассматривать как возмущения. Иногда встречаются бифуркации такого типа, что в зависимости от того, какое решение выделено, малыми считаются различные группы членов. Приведем в качестве примера уравнение

$$\dot{u} = \lambda_u u - bu^3 (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}), \quad (8.8.33)$$

где  $\lambda_u$  и  $b$  по предположению вещественны. В низшем приближении мы можем выбрать в качестве решения

$$u = e^{i(\omega/2)t} y \quad (8.8.34)$$

или

$$u = e^{-i(\omega/2)t} y. \quad (8.8.35)$$

В зависимости от того, какое из решений мы выберем, уравнение (8.8.33) переходит в уравнение

$$\dot{y} = (\lambda_u \pm i\omega/2) y - by^3 (1 + e^{\pm i\varphi}) \quad (8.8.36)$$

(с соответствующими знаками). Кроме того, выполняется дополнительное уравнение

$$\dot{\varphi} = 2\omega. \quad (8.8.37)$$

Уравнения (8.8.36), (8.8.37) того же типа, что и подробно рассмотренные нами уравнения (8.5.3), (8.5.4) ( $r$  теперь — комплексная величина). Следовательно, производя соответствующие преобразования масштаба, мы можем в явном виде показать, что члены, содержащие  $\exp(\pm i\varphi)$ , допустимо считать малыми возмущениями. Итак, уравнение (8.8.33) допускает два эквивалентных решения (8.8.34), (8.8.35) с постоянной  $y$ , на которую накладываются колебания с малой амплитудой и частотами  $m \cdot \omega/2$ . В физике приближение, в котором членом  $\exp(\pm i\varphi)$ , где  $\varphi = 2\omega t$ , пренебрегают по сравнению с единицей, называется *приближением вращающейся волны*.

## 8.8.4. Бифуркация в тор

В разд. 8.8.1 мы рассмотрели случай, когда  $\lambda_2$ , т. е. собственное значение с наибольшей вещественной частью, вещественно. Предположим теперь, что это собственное значение комплексно:

$$\lambda_2 = \lambda'_u + i\omega_2, \quad \lambda'_u \geq 0. \quad (8.8.38)$$

Относительно остальных собственных значений предположим, как и прежде, что

$$\operatorname{Re} \{\lambda_k\} \leq C < 0, \quad k = 3, 4, \dots \quad (8.8.39)$$

Принцип подчинения позволяет свести изучение интересующего нас случая к уравнению для параметра порядка — только для  $u$ . В качестве первого подготовительного шага рассмотрим уравнение для параметра порядка вида

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\omega_2)u - bu|u|^2, \quad (8.8.40)$$

где коэффициент  $b$  для простоты мы будем считать вещественным и не зависящим от дополнительного фазового угла  $\phi$ . С уравнением такого типа мы уже встречались при рассмотрении бифуркации Хопфа (разд. 8.4). Известно, что его решение представимо в виде

$$u = re^{i\omega_2 t}, \quad (8.8.41)$$

где  $r$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{r} = \lambda'_u r - br^3, \quad (8.8.42)$$

обладающему при  $\lambda'_u > 0$  отличным от нуля устойчивым стационарным решением  $r = r_0$ . Смысл соответствующего решения станет ясен, если вспомнить, что решение  $\mathbf{q}$  полной системы представимо в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0(t + \Phi) + u(t) \mathbf{v}_2(t + \Phi) + u^*(t) \mathbf{v}_2^*(t + \Phi) + \dots, \quad (8.8.43)$$

где многоточие означает амплитуды подчиненных переменных, которые меньше явно выписанных амплитуд, а  $\mathbf{v}_2$  и комплексно-сопряженный вектор — собственные решения уравнения (8.7.7) вида (8.7.12). Подставляя (8.8.41) в уравнение (8.8.43), получаем

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \cos(\omega_2 t) \cdot \operatorname{Re} \{\mathbf{v}_2\} + \sin(\omega_2 t) \cdot \operatorname{Im} \{\mathbf{v}_2\}. \quad (8.8.44)$$

Вещественная и мнимая части вектора  $\mathbf{v}_2$  линейно независимы и соответствуют двум векторам, движущимся по первоначальному предельному циклу. Решение (8.8.44) описывает вращательное движение в системе отсчета, образуемой двумя базисными векторами  $\operatorname{Re} \{\mathbf{v}_2\}$  и  $\operatorname{Im} \{\mathbf{v}_2\}$ , т. е. конец единичного вектора движется по спирали вокруг предельного цикла, в то время как его начало

(и начало системы отсчета) совмещено с концом вектора  $\mathbf{q}_0$ . Если частоты  $\omega_2$  и  $\omega_1 \equiv \omega = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$  несоизмеримы, то траектория заполняет весь тор. Следовательно, в рассматриваемом случае мы имеем простой пример бифуркации предельного цикла в двумерный тор. В проблемах, представляющих наибольший практический интерес, уравнение для параметра порядка  $u$  имеет не столь простой вид, как уравнение (8.8.40). Усложнения могут быть нескольких типов. В частности, уравнение для параметра порядка может содержать дополнительные члены, вводящие зависимость коэффициента  $b$  от  $\varphi_1$ . Простым примером возникновения такой зависимости может служить уравнение

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\omega_2)u - bu|u|^2 - c \underbrace{(\omega_1 t)}_{\varphi_1} |u|^2, \quad (8.8.45)$$

где  $c$  — функция,  $2\pi$ -периодическая по  $\varphi_1$ . Подставляя (8.8.41) в уравнение (8.8.45), преобразуем его в систему уравнений

$$\dot{r} = \lambda'_u r - br^3 - r^3 c(\varphi_1), \quad (8.8.46)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1 t, \quad (8.8.47)$$

имеющих такой же вид, как и уравнения, возникающие в случае бифуркации Хопфа. Из приведенного анализа ясно, что и в этом случае бифуркация из предельного цикла в тор, как правило, существует.

Существенно более сложный случай возникает при рассмотрении уравнения для параметра порядка  $u$  вида

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\omega_2)u - bu|u|^2 + g(u, u^*, \varphi_1) \quad (8.8.48)$$

и уравнения для фазового угла  $\varphi \equiv \varphi_1$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + f(u, u^*, \varphi_1), \quad (8.8.49)$$

где  $g$  и  $f_1$  — функции,  $2\pi$ -периодические по  $\varphi_1$ . Полагая

$$u = r(t) e^{i\varphi_2(t)}, \quad (8.8.50)$$

преобразуем уравнения (8.8.48), (8.8.49) в систему уравнений

$$\dot{r} = \lambda'_u r - br^3 + \hat{g}(r, \varphi_1, \varphi_2), \quad (8.8.51)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \hat{f}_2(r, \varphi_1, \varphi_2), \quad (8.8.52)$$

к которой необходимо присовокупить уравнение

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \hat{f}_1(r, \varphi_1, \varphi_2), \quad (8.8.53)$$

которое следует из уравнения (8.8.49). Здесь  $\hat{f}_1$  (так же, как  $\hat{g}$  и  $\hat{f}_2$ ) — функции,  $2\pi$ -периодические функции по  $\varphi_1, \varphi_2$ . Анализ ре-

шений уравнений (8.8.51) — (8.8.53) требует привлечения довольно тонких соображений (по крайней мере в общем случае), так как разложение функций  $\hat{g}$ ,  $\hat{f}_1$  и  $\hat{f}_2$  в ряд по теории возмущений имеет смысл только в предположении, что частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  удовлетворяют условию КАМ. Поскольку вся теория оказывается частным случаем теории бифуркации из тора в другие торы, мы отложим ее рассмотрение до конца разд. 8.10.2.

## 8.9. Бифуркация из тора (квазипериодическое движение)

Как и в предыдущих главах, начнем с уравнения

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}(t), \alpha), \quad (8.9.1)$$

записанного в уже известных обозначениях. Предположим, что при управляющем параметре  $\alpha$ , принимающем значения из некоторого интервала, уравнение (8.9.1) допускает квазипериодические решения  $\mathbf{q}_0$ , представимые в виде

$$\mathbf{q}_0(t, \alpha) = \sum_{\mathbf{m}} c_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} t}, \quad (8.9.2)$$

где

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_M \omega_M, \quad (8.9.3)$$

и коэффициентами  $m$  могут быть любые целые числа. В разд. 1.12 и 8.8. было показано, что движение такого рода наглядно можно представить как движение по тору. В дальнейшем мы будем предполагать, что траектории всюду плотно лежат на торе. Тор можно параметризовать с помощью фазовых углов  $\Phi_j$  ( $j = 1, \dots, M$ ). В таких координатах вектор  $\mathbf{r}$ , конец которого лежит на торе, можно представить в виде

$$\mathbf{r}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M). \quad (8.9.4)$$

Поскольку траектории лежат на торе всюду плотно<sup>1)</sup>, мы можем выбрать в качестве начального условия

$$\mathbf{q}_0(0, \alpha) = \mathbf{r}. \quad (8.9.5)$$

<sup>1)</sup> Сформулируем наше утверждение более точно. Мы предполагаем что если (8.9.2) удовлетворяет уравнению (8.9.1), то

$$\mathbf{q}_0(t, \alpha, \Phi) = \sum_{\mathbf{m}} c_{\mathbf{m}} \exp [i\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\omega} t + \hat{\Phi})], \quad (8.9.6)$$

также удовлетворяет уравнению (8.9.1), причем  $\mathbf{q}_0$  принадлежит классу  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) по  $\Phi$ , а индекс  $k$  будет определен в дальнейшем. Иногда мы будем требовать, чтобы решение  $\mathbf{q}_0(t, \alpha, \Phi)$  было аналитическим по  $\Phi$  в некоторой области.

Это позволит нам построить решения (8.9.2), удовлетворяющие начальному условию (8.9.5), в виде

$$\mathbf{q}_0(t, \alpha, \Phi) = \sum_{\mathbf{m}} c_{\mathbf{m}} \exp[i\mathbf{m} \cdot (\omega t + \hat{\Phi})], \quad (8.9.6)$$

где

$$\hat{\Phi} = (\omega_1 \Phi_1, \omega_2 \Phi_2, \dots, \omega_M \Phi_M), \quad (8.9.7)$$

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M). \quad (8.9.8)$$

Первые этапы последующей процедуры хорошо известны из предыдущих глав. Будем считать, что и при дальнейшем увеличении управляющего параметра  $\alpha$ , в частности, когда  $\alpha$  оказывается в области, где старый тор теряет устойчивость по линейному приближению, решение представимо в виде (8.9.6).

Итак, исследуем устойчивость по линейному приближению. Для этого рассмотрим уравнение

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = L(t) \mathbf{w}(t), \quad (8.9.9)$$

где элементы матрицы

$$L = (L_{jk}) \quad (8.9.10)$$

определяются соотношением

$$L_{jk} = \left. \frac{\partial N_j(\mathbf{q}, \alpha)}{\partial q_k} \right|_{\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0(t, \alpha, \Phi)}. \quad (8.9.11)$$

Так как решение  $\mathbf{q}_0$  представимо в виде ряда Фурье (8.9.6), элементы матрицы  $L$  также представимы в виде ряда Фурье

$$L_{jk} = L_{jk}(t, \alpha, \Phi) = \sum_{\mathbf{m}} L_{jk; \mathbf{m}} \exp[i\mathbf{m} \cdot (\omega t + \Phi)]. \quad (8.9.12)$$

Условимся в дальнейшем отбрасывать параметр  $\alpha$ . Ясно, что матричный элемент  $L_{jk}$ , задаваемый рядом Фурье, — квазипериодическая функция. Обратимся к результатам, полученным в гл. 3 (в особенности в разд. 3.7). Мы исследовали там общий вид решения уравнения (8.9.9) с квазипериодическими коэффициентами и показали, что при некоторых условиях на обобщенные характеристические показатели и при других, более специальных, ограничениях решение уравнения (8.9.9) представимо в виде

$$\mathbf{w}_k(t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k(t). \quad (8.9.13)$$

В частности, такой вид решение имеет, если характеристические (или обобщенные характеристические) показатели различны, если матрица  $L$  достаточное число раз дифференцируема по  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) и если частоты  $\omega$  удовлетворяют условию КАМ. В этом случае  $\mathbf{v}_k$  — квазипериодические функции времени, зависимость которых от  $\Phi$  и  $\hat{\Phi}$  определяется рядом Фурье в правой части (8.9.6).

Нам понадобится вариант теоремы, несколько отличный от приведенного выше: не вырождены все собственные значения  $\lambda_k$ , кроме нулевого. Построим векторы  $\mathbf{v}_k$ , отвечающие  $\lambda_k = 0$ . Продифференцируем для этого обе части тождества

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{N}(\mathbf{q}_0, \alpha) \quad (8.9.14)$$

до  $\Phi_l$ . Определение (8.9.11) матричных элементов  $L_{ij}$  позволяет записать полученное соотношение в виде

$$-\frac{d}{dt}(\partial \mathbf{q}_0 / \partial \Phi_l) = L(\partial \mathbf{q}_0 / \partial \Phi_l). \quad (8.9.15)$$

Из него следует, что

$$\partial \mathbf{q}_0 / \partial \Phi_l = \mathbf{w}_l, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (8.9.16)$$

— решения уравнения (8.9.9). Так как производные в левой части равенств (8.9.16) квазипериодичны, мы получаем решения в виде (8.9.13) при  $\lambda_l = 0$ . Обозначим все остальные решения через

$$\mathbf{w}_k, \quad k = M + 1, \dots \quad (8.9.17)$$

Приступим теперь к построению решений, которые возникают при бифуркации из старого тора, теряющего устойчивость. Воспользуемся обобщением той схемы, которую мы применяли в случае бифуркации из предельного цикла. Примем «самосогласованное» предположение о том, что новый тор или новые торы расположены вблизи от старого тора. Иначе говоря, векторы, начало которых лежит на старом, а конец на новом торе, невелики по длине. Вместе с тем необходимо иметь в виду, что когда происходит бифуркация, соответствующие точки на старой и на новой траекториях со временем могут разойтись сколь угодно далеко.

Чтобы учесть оба этих факта, введем следующую систему координат. В качестве локальных координат на старом торе воспользуемся фазовыми углами и введем векторы  $\mathbf{v}$ , направленные из каждой точки старого тора в соответствующую точку нового тора, возникающего при бифуркации. Локальные координаты, трансверсальные старому тору, задаются вектором (8.9.17). Такого рода соображения наводят на мысль искать возникающие при бифуркации решения в следующем виде (штрих у знака суммы означает, что значения с  $k = 1, 2, \dots, M$  исключаются):

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t, \Phi) + \underbrace{\sum' \xi_k \mathbf{v}_k(t, \Phi)}_{\mathbf{w}} \quad (8.9.18)$$

где

$$\Phi = \Phi(t) \quad (8.9.19)$$

— функция времени, которую требуется определить. Векторы  $\mathbf{v}_k$  — также функции времени:

$$\mathbf{v}(t, \Phi(t)). \quad (8.9.20)$$

Подставляя  $q(t)$  из (8.9.18) в уравнение (8.9.1), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_0 + \sum_l \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \Phi_l} \dot{\Phi}_l + \sum_k' \xi_k \dot{\mathbf{v}}_k + \sum_{k,l}' \xi_k \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \Phi_l} \dot{\Phi}_l + \sum_k' \xi_k \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} = \\ = \mathbf{N}(\mathbf{q}_0) + L \sum_k' \xi_k \mathbf{v}_k + \mathbf{H}(\mathbf{W}) \end{aligned} \quad (8.9.21)$$

(правую часть уравнения мы разложим в ряд по степеням  $\mathbf{W}$ ). Функция  $\mathbf{H}$  определяется разложением вида

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}) = N^{(2)} : \sum_k \xi_k \mathbf{v}_k : \sum_{k'} \xi_{k'} \mathbf{v}_{k'} + \dots, \quad (8.9.22)$$

где многоточием указаны члены более высокого порядка. Разумеется, выписать их так же, как мы выписали квадратичный член, не составило бы особого труда.

Воспользуемся теперь результатами из разд. 2.5, где мы построили систему векторов  $\bar{\mathbf{v}}$ , ортогональных решениям  $\mathbf{v}$  уравнения (8.9.13). Умножая уравнение (8.9.21) на

$$\bar{v}_l, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (8.9.23)$$

получаем уравнение для  $\Phi_l$ :

$$\dot{\Phi}_l + \sum_j' \sum_{l'} \xi_j \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_l \cdot \partial \mathbf{v}_j / \partial \Phi_{l'} \rangle}_{a_{jll'}} \dot{\Phi}_{l'} = \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_l \mathbf{H} \rangle}_{\hat{H}_l}, \quad (8.9.24)$$

а умножая уравнения (8.9.21) на векторы

$$\bar{\mathbf{v}}_k, \quad k = M+1, \dots, \quad (8.9.25)$$

— уравнение для  $\xi_k$ :

$$\dot{\xi}_k = \lambda_k \xi_k - \sum_j' \sum_{l'} \xi_j \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_k \cdot \partial \mathbf{v}_j / \partial \Phi_{l'} \rangle}_{a_{jkl'}} \dot{\Phi}_{l'} + \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_k \mathbf{H} \rangle}_{\hat{H}_k}. \quad (8.9.26)$$

Вводя матрицу  $K$  с элементами

$$K_{ll'} = \delta_{ll'} + \sum_j' \xi_j a_{jll'} \quad (8.9.27)$$

и рассматривая  $\Phi$  и  $\hat{\mathbf{H}}$  как вектор-столбцы, запишем систему уравнений (8.9.24) в виде

$$K \dot{\Phi} = \hat{\mathbf{H}}. \quad (8.9.28)$$

Так как  $\xi_j$  по предположению — малая величина, матрица  $K$  легко обращается, и мы получаем (см. (8.9.24))

$$\dot{\Phi} = K^{-1} \hat{\mathbf{H}} \equiv \hat{f}(\xi, t, \Phi) \quad (8.9.29)$$

(последний член равенства — определение  $\hat{f}$ ). Подставляя вместо  $\dot{\Phi}_{l'}$ , входящих в уравнение (8.9.26), правые части соответствующих

компонент уравнения (8.9.29), преобразуем уравнение (8.9.26) к виду

$$\dot{\xi}_k = \lambda_k \xi_k + \widehat{G}_k(\xi, t, \Phi). \quad (8.9.30)$$

Заметим, что аргументы  $t$  и  $\Phi$  встречаются в правых частях уравнений (8.9.29), (8.9.30) только в комбинации

$$\omega_j t + \omega_j \Phi_j = \varphi_j. \quad (8.9.31)$$

Введем  $\varphi_j$  в качестве новой переменной. Это позволит записать уравнение (8.9.29) в виде

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \widetilde{f}_j(\xi, \varphi), \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (8.9.32)$$

где

$$\widetilde{f}_j(\xi, \varphi) = \omega_j \widehat{f}_j(\xi, 0, \{\varphi_l \omega_l^{-1}\}). \quad (8.9.33)$$

Уравнения (8.9.30) аналогичным образом приводятся к виду

$$\dot{\xi}_k = \lambda_k \xi_k + \widetilde{g}_k(\xi, \varphi), \quad (8.9.34)$$

где

$$\widetilde{g}_k(\xi, \varphi) = \widehat{G}_k(\xi, 0, \{\varphi_l \omega_l^{-1}\}). \quad (8.9.35)$$

Функции  $\widetilde{f}$  и  $\widetilde{g}$   $2\pi$ -периодичны по  $\varphi_j$ .

В рамках предположения о представимости решений линеаризованных уравнений (8.9.9) в виде (8.9.13) уравнения (8.9.32), (8.9.34) обладают достаточной общностью. При другом подходе мы могли бы «забыть» о том, что уравнения (8.9.32), (8.9.24) выведены из уравнения (8.9.1), и принять их за исходные. При  $\widetilde{f} = \widetilde{g} = \xi = 0$  уравнения (8.9.32), (8.9.34) описывают движение по старому тору. Наша задача состоит в том, чтобы найти новые траектории при  $\widetilde{f}$  и  $\widetilde{g}$ , отличные от нуля.

## 8.10. Бифуркация из тора: частные случаи

### 8.10.1. Простое вещественное собственное значение становится положительным

Перенумеруем собственные значения  $\lambda_k$  так, чтобы  $\lambda_{M+1}$  имело наибольшую вещественную часть. Пусть

$$\lambda_{M+1} \geq 0, \quad \lambda_{M+1} \text{ — вещественное число}, \quad (8.10.1)$$

$$\operatorname{Re} \{\lambda_k\} \leq C < 0, \quad k = M+2, \dots \quad (8.10.2)$$

и пусть

$$\lambda_{M+1} = \lambda_u, \quad \xi_{M+1} = u. \quad (8.10.3)$$

Величина  $u$  играет роль параметра порядка, а  $\xi_k$  при  $k \geq M + 2$  — подчиненные переменные. Применяя принцип подчинения, мы сводим систему уравнений (8.9.32), (8.9.34) к уравнениям вида

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda_u u + g(u, \varphi), \\ \varphi &= \omega + f(u, \varphi). \end{aligned} \quad (8.10.4)$$

Нас будет интересовать случай, когда функция  $g$  представима в виде

$$g(u, \varphi) = -bu^3 + u^3 h(u, \varphi), \quad b > 0, \quad (8.10.5)$$

где коэффициент  $h$  допускает разложение в сумму двух слагаемых

$$h = h_1(u) + h_2(u, \varphi), \quad (8.10.6)$$

обладающих следующими свойствами:

$$h_1(u) = O(u), \quad (8.10.8)$$

$$h_2(u, \varphi) = O(1), \quad (8.10.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots d\varphi_M h_2 = 0. \quad (8.10.10)$$

Кроме того, мы предполагаем, что

$$f(u, \varphi) = f_1(u) + f_2(u, \varphi), \quad (8.10.11)$$

где

$$f_1(u) = O(u^3), \quad (8.10.12)$$

$$f_2(u) = O(u^2), \quad (8.10.13)$$

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots d\varphi_M f_2 = 0, \quad (8.10.14)$$

Эти условия нетрудно ослабить, например, потребовав, чтобы  $f_1(u) = O(u^2)$  и  $f_2(u) = O(u)$  (см. разд. 8.8.1).

С аналогичными свойствами мы встречались при рассмотрении бифуркации из предельного цикла. Но продолжим наше рассмотрение. Выберем область, расположенную несколько выше точки перехода, и предположим, что

$$\lambda_u = \lambda_0 \varepsilon^2 \quad (8.10.15)$$

и

$$u = \varepsilon(u_0 + \eta). \quad (8.10.16)$$

Величину  $u_0$  определим из соотношения

$$u_0^2 = \lambda_0/b, \quad (8.10.17)$$

так что

$$u_0 = \pm \sqrt{\lambda_0/b}. \quad (8.10.18)$$

Соотношение (8.10.18) означает, что от старого тора отщепились

два новых тора, находящиеся от него на среднем расстоянии  $u_0$ . Вводя помимо преобразований (8.10.15) и (8.10.16) новый масштаб времени

$$t = \tau/\varepsilon^2 \quad (8.10.19)$$

(используя для этого соотношение (8.10.17)), преобразуем уравнение (8.10.4) к виду

$$d\eta/d\tau = -2\lambda_0\eta - 3bu_0\eta^2 - b\eta^3 + (u_0 + \eta)^3 - [\varepsilon\tilde{h}_1(u_0 + \eta, \varepsilon) + \tilde{h}_2(\varepsilon, u_0 + \eta, \varphi)], \quad (8.10.20)$$

где

$$\varepsilon\tilde{h}_1(u_0 + \eta, \varepsilon) = h_1(\varepsilon(u_0 + \eta)), \quad (8.10.21)$$

$$\tilde{h}_2(\varepsilon, u_0 + \eta, \varphi) = h_2(\varepsilon(u_0 + \eta), \varphi). \quad (8.10.22)$$

Из предположения (8.10.8) следует, что  $\tilde{h}_1 \sim O(1)$ , поэтому  $\varepsilon\tilde{h}_1$  можно рассматривать как малое возмущение. Поскольку  $\tilde{h}_2$  зависит от быстрых осцилляций  $\varphi$  через масштабное преобразование времени, член  $\tilde{h}_2$  с формальной точки зрения также можно считать возмущением порядка  $\varepsilon$ . Заметим, что в рассматриваемом случае квазипериодического движения такого рода аргумент остается в силе, только если частоты  $\omega$  удовлетворяют условию КАМ. То же масштабное преобразование переводит уравнение (8.10.5) в уравнение

$$d\varphi/dt = \omega/\varepsilon^2 + \varepsilon\tilde{f}_1(u_0 + \eta, \varepsilon) + \tilde{f}_2(u_0 + \eta, \varepsilon, \varphi), \quad (8.10.23)$$

где

$$\varepsilon\tilde{f}_1(u + \eta, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} f_1(\varepsilon(u + \eta)) \quad (8.10.24)$$

— величина порядка  $O(\varepsilon)$ , а

$$\tilde{f}_2(u_0 + \eta, \varepsilon, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon^2} f_2(\varepsilon(u_0 + \eta), \varphi) \quad (8.10.25)$$

— величина порядка 1, но из-за зависимости от  $\varphi$  она действует как возмущение порядка  $\varepsilon$ .

На первый взгляд кажется, что с уравнениями (8.10.20), (8.10.23) нам уже приходилось встречаться в разд. 8.7, 8.8, но такое впечатление неверно. Считаем своим долгом предупредить читателя о том, что изложенная выше теория не применима к уравнениям (8.10.20), (8.10.23) непосредственно. Анализ этих уравнений требует привлечения дополнительных соображений. Основное различие между уравнениями (8.10.20), (8.10.23) и уравнениями, приведенными в разд. 8.7, 8.8, состоит в том, что сейчас нас интересует квазипериодическое движение, а разд. 8.7 и 8.8 посвящены рас-

смотрению только периодического движения. Здесь уместно напомнить о некоторых тонкостях, связанных с теоремой Мозера. Прежде чем мы продолжим обсуждение нашей проблемы, рассмотрим случай, когда собственное значение  $\lambda_{M+1}$  комплексно. Покажем, что и в этом случае мы приходим к уравнениям вида (8.10.20), (8.10.23), поэтому решения этих уравнений можно рассматривать для обоих случаев одновременно.

### 8.10.2. Комплексное невырожденное собственное значение пересекает мнимую ось

Начальные этапы процедуры уже хорошо известны читателю: мы полагаем

$$\lambda_{M+1} = \lambda'_u + i\omega_{M+1}, \quad (8.10.26)$$

$$\xi_{M+1} = u \quad (8.10.27)$$

и предполагаем, что

$$\operatorname{Re} \{\lambda_k\} \leq C < 0, \quad k = M+2, \dots \quad (8.10.28)$$

Принцип подчинения позволяет свести исходную систему уравнений (8.9.32), (8.9.34) к двум уравнениям:

$$\dot{u} = (\lambda'_u + i\omega_{M+1})u + g(u, \varphi), \quad (8.10.29)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + f(u, \varphi) \quad (8.10.30)$$

для параметра порядка  $u$  и фазового угла  $\varphi$ . Пусть, например,

$$g(u, \varphi) = -bu|u|^2 + m(u, \varphi), \quad b = b' + ib'', \quad b' > 0, \quad (8.10.31)$$

где функция  $m(u, \varphi)$  пока не определена.

Полагая

$$u = r(t) \exp[i\varphi_{M+1}(t)], \quad (8.10.32)$$

преобразуем уравнение (8.10.29) к виду

$$\dot{r} = \lambda'_{ur} - br^3 + \operatorname{Re} \{ \exp(-i\varphi_{M+1}) m(r \exp[i\varphi_{M+1}], \varphi) \}. \quad (8.10.33)$$

Введем новый вектор  $\hat{\varphi}$ , содержащий дополнительную фазу  $\varphi_{M+1}$ :

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{M+1} \end{pmatrix}. \quad (8.10.34)$$

Это позволит представить уравнение (8.10.33) в виде

$$\dot{r} = \lambda'_u r - b' r^3 + \hat{g}(r, \hat{\varphi}). \quad (8.10.35)$$

Аналогичным образом получаем из (8.10.29) уравнение

$$\dot{\varphi}_{M+1} = \omega_{M+1} - b'' r^2 + \text{Im} \left\{ \underbrace{\exp(-i\varphi_{M+1}) m(r \exp(i\varphi_{M+1}), \varphi) r^{-2}}_{f_{M+1}} \right\}, \quad (8.10.36)$$

или в векторном виде —

$$d\hat{\varphi}/dt = \hat{\omega} + \hat{f}, \quad (8.10.37)$$

где

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{M+1} \end{pmatrix}, \quad (8.10.38)$$

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{M+1} \end{pmatrix}. \quad (8.10.39)$$

С формальной точки зрения уравнения (8.10.35), (8.10.37) обладают такой же структурой, как уравнения (8.9.32), (8.9.34) и, следовательно, могут быть преобразованы в уравнения (8.10.20), (8.10.23).

К уравнениям (8.10.20), (8.10.23) масштабные преобразования применимы именно так, как о том говорилось в разд. 8.10.1. Нетрудно сформулировать условия, которым должны удовлетворять  $\hat{g}$  и  $\hat{f}$  (и, следовательно,  $m(u, \varphi)$ ), аналогичные условиям (8.10.7) — (8.10.14). Масштабные преобразования позволят нам в явном виде указать порядок малости возмущающих членов и представить уравнения (8.10.35), (8.10.37) в виде

$$\dot{\eta} = -\hat{\lambda}_u \eta + \varepsilon g(\varepsilon \eta, \varphi), \quad (8.10.40)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_u + \varepsilon h(\varepsilon \eta, \varphi). \quad (8.10.41)$$

Функции  $g$  и  $h$   $2\pi$ -периодичны по  $\varphi$ .

Чтобы применить теорему Мозера, будем рассуждать так же, как в разд. 8.5. Положим —  $\hat{\lambda}_u = \lambda_u$  (величину  $\lambda_u$ , стоящую в правой части этого равенства, не следует путать с величиной  $\lambda_u$ , входящей в уравнение (8.10.4)) и подвергнем  $\lambda_u$  тождественному преобразованию

$$\lambda_u = \underbrace{\lambda_u - D}_{\lambda_r} + D \quad (8.10.42)$$

Аналогичным образом преобразуем  $\omega_u$ :

$$\omega_u = \underbrace{\omega_u - \Delta}_{\omega_r} + \Delta. \quad (8.10.43)$$

Соотношения (8.10.42) (8.10.43) позволяют записать уравнения (8.10.40), (8.10.41) в таком виде, который имеют уравнения в теореме Мозера. Отложим пока вопрос о том, выполняются ли условия этой теоремы в рассматриваемом нами случае, и будем считать, что все условия выполнены. Приняв такое предположение, мы получаем возможность воспользоваться процедурой, описанной в разд. 8.5 (после формул (8.5.36), (8.5.37)). В частности, мы можем, по крайней мере в принципе, вычислить  $D$  и  $\Delta$  так, что будут выполняться соотношения

$$\lambda_r = \lambda_u - D(\lambda_r, \omega_r, \varepsilon), \quad (8.10.44)$$

$$\omega_r = \omega_u - \Delta(\lambda_r, \omega_r, \varepsilon). \quad (8.10.45)$$

Кроме того, по аналогии с процедурой, изложенной после формулы (8.5.45), мы можем построить стационарные и переходные решения уравнений (8.10.40), (8.10.41). Так, в окрестности претерпевающего бифуркацию тора переходные решения имеют вид

$$\varphi = \omega_r t + \varepsilon \mathbf{u}(\omega_r t, \varepsilon), \quad (8.10.46)$$

$$\eta = \chi_0 \exp(\lambda_r t) + \varepsilon v(\omega_r t, \varepsilon) + \varepsilon V(\omega_r t, \varepsilon) \chi_0 \exp(\lambda_r t), \quad \lambda_r < 0, \quad (8.10.47)$$

где  $\mathbf{u}$ ,  $v$  и  $V$  —  $2\pi$ -периодические функции по каждой компоненте вектора  $\omega_r t$ . Стационарные решения имеют вид

$$\varphi = \omega_r t + \varepsilon \mathbf{u}(\omega_r t, \varepsilon), \quad (8.10.48)$$

$$\eta = \varepsilon v(\omega_r t, \varepsilon). \quad (8.10.49)$$

Заключительную часть этого раздела мы посвятим выяснению того, при каких обстоятельствах выполняются условия теоремы Мозера и, в частности, в каких случаях частоты  $\omega_r$  удовлетворяют условию КАМ<sup>1)</sup>. Прежде всего выясним, при каких предположениях

<sup>1)</sup> С чисто математической точки зрения мы требуем, чтобы функции  $g$  и  $\mathbf{h}$  в уравнениях (8.10.40), (8.10.41) были аналитическими по  $\eta$  и  $\varphi$ . Следует заметить, что введенный в гл. 7 принцип подчинения отнюдь не гарантирует такой аналитичности, даже если правые части исходных уравнений (т. е. уравнений, взятых в таком виде, какой они имели до применения принципа подчинения) содержали только функции, аналитические по  $\eta$  и  $\varphi$ . Следовательно, необходимо либо произвести сглаживание (см. разд. 7.5), либо ввести уравнения (8.10.40), (8.10.41) с помощью модели (правдоподобной с точки зрения физика или инженера), либо принять более ограничительные предположения относительно исходных уравнений, которые бы позволили более строго сформулировать принцип подчинения (такой подход привлекателен для математика). Еще одна возможность заключается в ослаблении исходных предположений теоремы Мозера (в некоторых случаях, например, если задача обладает определенной симметрией, условия теоремы Мозера действительно удается ослабить).

мы вывели уравнения (8.10.29), (8.10.30). Если мы используем эти уравнения или уравнения (8.10.40), (8.10.41) как модель, то необходимость в дополнительных предположениях относительно  $\omega_u$  отпадает. В этом случае мы можем получить бифуркацию из тора, если при данных  $\lambda_u$  и  $\omega_u$  нам удастся найти такие  $\lambda_r$  и  $\omega_r$ , при которых выполняются соотношения (8.10.44), (8.10.45) и  $\omega_r$  удовлетворяет условию КАМ. С другой стороны, если мы вывели уравнения (8.10.40), (8.10.41) из исходных автономных уравнений (8.9.1), то нам необходимо учитывать те предположения, которые были приняты при выводе. Основное предположение было сделано относительно структуры функций (8.9.13), чтобы обеспечить квазипериодичность векторов  $v_k$ . Из него, в частности, следовало, что частоты  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$  удовлетворяют условию КАМ.

Перед нами возникает весьма важная проблема: можно ли проверить, удовлетворяют ли частоты  $\omega_r$  и  $\omega_u$  условию КАМ? Если такая проверка возможна, то числа  $\omega_j$  (за исключением каких-нибудь частных случаев) мы могли бы определять с абсолютной точностью. К сожалению, интересующая нас проблема неразрешима, и дальнейшее обсуждение зависит от подхода — от того, будем ли мы рассматривать ее с позиции математика, физика или химика.

Математик избрал бы следующий план действий. Для того чтобы проверить, реализуется ли «в действительности» бифуркация из одного тора в другой, необходимо исследовать, с какой вероятностью произвольно заданный набор частот  $\omega$  удовлетворяет условию КАМ. Математики доказали, что если постоянная  $K$  в неравенстве (6.2.6) достаточно мала, то условие КАМ выполняется с большой вероятностью. Следует заметить, однако, что постоянная  $K$  входит в комбинации с множителем  $\varepsilon^2$ , в чем нетрудно убедиться с помощью следующих рассуждений.

Начнем с условия КАМ (6.2.6). При изменении масштаба времени частоты  $\omega_r$  и  $\Lambda_\mu$  переходят соответственно в  $\omega_r/\varepsilon^2$  и  $\Lambda_\mu/\varepsilon^2$ . Условие КАМ при этом переходит в неравенство

$$\left| i \sum_{\nu=1}^n j_\nu \omega_\nu + \sum_{\mu=1}^m k_\mu \Lambda_\mu \right| \geq \varepsilon K (\|j\|^r + 1)^{-1}. \quad (8.10.50)$$

С математической точки зрения мы приходим к заключению, что вероятность найти набор частот, удовлетворяющий условию (8.10.50), очень велика, или что бифуркация из одного тора в другой сосредоточена в пространстве частот на множестве ненулевой меры.

С физической точки зрения весьма сомнительно, чтобы природа проводила резкое различие между частотами  $\omega$ , удовлетворяющими условию КАМ, и частотами, не удовлетворяющими этому условию. Флуктуации, непрерывно происходящие на микроскопическом уровне, влияют на реально наблюдаемые частоты. Следовательно,

обсуждение бифуркации из тора в тор без учета флуктуаций не имеет смысла. Один из возможных подходов к проблеме изложен в следующей главе, пока мы лишь заметим, что флуктуации (по крайней мере в общем случае) приводят к расплыванию фазовых углов по всему тору, и установить, выполняется ли условие КАМ, вообще говоря, весьма трудно. Наблюдаемая картина соответствует усреднению тем или иным способом по различным частотам.

Не следует, однако, упускать из виду некоторые другие важные случаи. Один из них — взаимное затягивание частот, о котором шла речь в разд. 8.6. Если происходит взаимная синхронизация двух осцилляторов, то тор стягивается в предельный цикл. Флуктуации могут играть заметную роль и в этом случае.

Наконец, нельзя не упомянуть о том, что, комбинируя методы, изложенные в разд. 8.5—8.10, мы получаем возможность анализировать и другие явления, например удвоение периода.

## **8.11. Иерархии неустойчивостей, сценарии и пути к турбулентности**

Как было показано во введении, при изменении управляющего параметра система может, последовательно теряя устойчивость, переходить из одного состояния в другое. Структуры, возникающие после того, как предыдущее состояние становится неустойчивым, могут быть различного типа. Если мы ограничимся только временными структурами, то речь может идти о стационарном состоянии, периодическом движении, квазипериодическом движении, хаосе и различных переходах между этими состояниями в точках, где происходит потеря устойчивости. Такие переходы приводят, например, к затягиванию или захвату частоты, удвоению периода (генерации субгармоники с вдвое меньшей частотой). Весьма важен вопрос о том, какая последовательность переходов характерна для той или иной конкретной системы. Такого рода последовательности принято называть путями, в особенности если они ведут к турбулентности, или хаосу («путь к турбулентности»). Теоретическое обсуждение пути обычно называют сценарием, или картиной.

### **8.11.1. Картина Ландау—Хопфа**

Для некоторых систем, например для жидкостей, характерен следующий путь: стационарное (пространственно однородное) состояние после бифуркации <sup>1)</sup> переходит в другое стационарное (но

<sup>1)</sup> Хотя в дальнейшем речь пойдет о бифуркациях, имея в виду роль флуктуаций, правильнее было бы говорить о неравновесных фазовых переходах. Мы будем придерживаться математического подхода и пренебрегать флуктуациями.

пространственно неоднородное) состояние. В свою очередь новое состояние после бифуркации сменяется осциллирующим состоянием, т. е. возникает предельный цикл (бифуркация Хопфа). После следующей бифуркации вместо одной возникают две основные частоты колебаний, т. е. предельный цикл переходит в тор. Ландау высказал гипотезу, что переходы такого рода продолжаются неограниченно, т. е. система претерпевает бифуркации к торами все более высокой размерности. После каждой бифуркации набор основных частот (квазипериодических) колебаний системы пополняется новой частотой  $\omega_j$ . Если же гипотеза верна, то турбулентность соответствует движению по бесконечномерному тору. Такой сценарий называется *картиной Ландау—Хопфа*.

### 8.11.2. Картина Рюэля—Такенса

Совершенно иной сценарий был предложен Рюэлем и Такенсом. Чтобы объяснить основную идею разработанного ими математического подхода, необходимо сказать несколько слов о том, как следует понимать слово «общность», часто используемое в современной математике.

Рассмотрим класс дифференциальных уравнений  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\mathbf{q})$ , где  $\mathbf{N}$  удовлетворяет определенным условиям дифференцируемости. Нас могут интересовать такие свойства решений  $\mathbf{q}(t)$ , которые являются правилом, а не исключением. Такие свойства называются общими (для данного класса уравнений). Вместо того чтобы пытаться уточнить определение «общего», поясним его на простом примере из физики. Рассмотрим непрерывные центральные силы. Если обозначить через  $r$  расстояние от центра, то семейство функций  $K(r)$ , где  $K$  есть непрерывная функция, — общее для интересующего нас класса сил. С другой стороны, сила, описываемая законом Кулона  $K \sim 1/r^2$ , не является общей. Это — весьма специальный, частный случай<sup>1)</sup>. Рюэль и Такенс исследовали, как происходят в общем случае бифуркации торов в торы более высокой размерности.

Проведенный Рюэлем и Такенсом анализ показал, что после того, как возникает двумерный тор, следующая бифуркация не обязательно должна приводить к трехмерному тору, т. е. к квазипериодическому движению с тремя основными частотами. Обычно при бифуркации двумерного тора возникает аттрактор нового типа, так называемый странный аттрактор.

Описать странный аттрактор можно следующим образом. Все траектории такого аттрактора лежат в некоторой области  $\mathbf{q}$ -про-

<sup>1)</sup> В приведенном нами почти тривиальном примере отчетливо виден еще один важный аспект: применение понятия «общности» в физике (и других естественных науках) требует осторожности. Дело в том, что из-за симметрии, законов сохранения или по каким-нибудь другим причинам явления могут соответствовать «необщим» решениям (как в случае закона Кулона).

странства. Траектории, проходящие вне этой области, но в ее достаточно малой окрестности, притягиваются к аттрактору. Траектории, лежащие в самой области, остаются в ней навсегда. «Странность» аттрактора, о котором идет речь, состоит в том, что он не является ни особой точкой, ни предельным циклом, ни тором, ни даже многообразием. Ясно, что при таком определении странного аттрактора может существовать не один аттрактор, а множество странных аттракторов различного типа. Классификация странных аттракторов — важная задача, которую предстоит решить в будущем. Один из вариантов такой классификации (поддержанный, в частности, Рюэлем) основан на использовании показателей Ляпунова, но он далеко не исчерпывает все возможности. Для дальнейшего важно отметить, что в своем подходе Рюэль и Такенс исходят из предположения о близости основных частот к рациональным числам.

### 8.11.3. Бифуркации торов. Квазипериодические движения

До сих пор мы подробно исследовали свойства квазипериодического движения и в особенности бифуркации из одного тора в другой, в том числе бифуркации из двумерных торов в трехмерные. Причина, по которой мы уделяли столько внимания этому подходу, заключается в том, что, как экспериментально установлено, возможны переходы от двумерного тора не только к хаосу, но и к трехмерному тору. В связи с этим естественно возникает задача выяснить, почему картина Рюэля и Такенса наблюдается в одних и не наблюдается в других случаях. Из соображений, подробно изложенных в предыдущем разделе, следует, что бифуркация двумерного тора в трехмерный возможна, если выполняется условие КАМ, т. е. если отношения частот аномально хорошо аппроксимируются рациональными числами. Из сказанного можно сделать вывод о разумности привлечения вероятностных соображений при оценке возможности бифуркации двумерного тора в трехмерный у данной реальной системы. Наш подход позволяет решить «загадку» — ответить на вопрос, почему у некоторых систем наблюдается бифуркация двумерного тора в трехмерный, несмотря на то, что соответствующие решения не являются «общими» в смысле Рюэля и Такенса. Оказалось, что у реальной системы в некоторых интервалах значений управляющих или каких-то других параметров может осуществляться сценарий последовательных бифуркаций торов, но по мере увеличения размерности торов вероятность переходов быстро убывает, картина Ландау—Хопфа становится неадекватной, и наступает хаос.

Для путей, ведущих к турбулентности, существуют по крайней мере еще два сценария. Их мы кратко обсудим в следующих разделах.

#### 8.11.4. Путь к хаосу через удвоение периода. Последовательность Фейгенбаума

В некоторых экспериментах может происходить взаимная синхронизация осцилляторов, и в результате взаимного затягивания двух частот возникает одна общая частота. Соответствующий предельный цикл может затем претерпевать серию бифуркаций удвоения, приводящую в конечном счете к хаосу. Согласно интерпретации, предложенной автором этой книги, поведение системы в таких случаях определяется небольшим числом параметров порядка, и последовательные удвоения периода происходят в пространстве небольшой размерности соответствующих параметров порядка, число которых не меньше трех. Во введении уже говорилось о том, что такие удвоения периода удобно описывать дискретными отображениями. Но существует и другое описание — с помощью дифференциальных уравнений, например уравнения Дуффинга (1.14.14). Разумеется, в автономных системах вынуждающая сила в уравнении Дуффинга соответствует моде, которая осциллирует с вынуждающей частотой и управляет двумя другими нелинейно связанными модами (или одним нелинейным осциллятором). Вопрос о том, может ли бесконечная последовательность Фейгенбаума осуществляться в реальных системах, остается пока открытым, поскольку экспериментально наблюдались лишь несколько первых бифуркаций примерно до  $n = 6$ . Наблюдению бифуркаций более высокого порядка препятствуют шумы. Экспериментально наблюдались также бифуркации высокого порядка с частотами, отличными от  $(1/2^n)$ -й исходной частоты, например бифуркации утроения периода.

#### 8.11.5. Путь через перемежаемость

Последний путь к турбулентности, о котором мы хотели бы особо упомянуть, называется путем через *перемежаемость*. Его принято связывать с именами Пома и Манневиля. Суть этого пути состоит в том, что всплески турбулентности чередуются с участками, на которых устанавливаются регулярные режимы. Подробное рассмотрение перемежаемости с помощью так называемого логистического отображения см. в моей предыдущей книге [1].

Аналогичные пути к хаосу обнаружены не только в жидкостях, но и в других системах. Например, в лазерах порог генерации соответствует бифуркации Хопфа, а распад лазерных импульсов в ультракороткие импульсы — бифуркации предельного цикла в тор. При других условиях периодическое движение по предельному циклу может сменяться хаотическим режимом или, точнее, периодическими колебаниями, модулированным хаотическим движением. Исследование сценариев для широких классов систем и разработка методов построения общей картины — важная задача будущего.

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ

Во введении мы познакомились с системами самой различной природы, в которых в результате самоорганизации возникают пространственные структуры. Такие структуры могут возникать в сплошных средах, например в жидкостях или скоплениях биологических клеток. В этой главе мы хотим показать, как методы, развитые в предыдущих главах, позволяют описывать образование пространственных структур. Заметим, что пространственные структуры не обязательно должны быть стационарными: они могут быть связаны с колебаниями или еще более сложными движениями, зависящими от времени. На протяжении этой главы мы будем рассматривать непрерывные среды или проблемы, в которых допустима аппроксимация дискретной среды, например скопления клеток, той или иной моделью сплошной среды.

## 9.1. Основные дифференциальные уравнения

Обозначим через  $\mathbf{x}$  радиус-вектор точки  $(x, y, z)$  пространства. Состояние системы определяется вектором состояния

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad (9.1.1)$$

который зависит от точки пространства и времени.

Рассмотрим, например, реакцию, протекающую в химическом реакторе. Вектор  $\mathbf{q}$  в этом случае состоит из компонент  $q_1(\mathbf{x}, t)$ ,  $q_2(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dots$ , где  $q_j \equiv n_j(\mathbf{x}, t)$  — концентрация  $j$ -го вещества в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ . Поскольку в непрерывно распределенных средах обычно приходится учитывать диффузию, распространение волн или поток, в уравнение должны входить производные по пространственным координатам. Обозначим их с помощью оператора «набла»:

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z). \quad (9.1.2)$$

Временную эволюцию системы описывают уравнения вида

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \nabla, \alpha, x, t). \quad (9.1.3)$$

Правая часть этих уравнений нелинейно зависит от  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ . Уравнения (9.1.3) (по крайней мере в общем случае) содержат простран-

ственные производные. Влияние внешней среды описывается управляющим параметром. В пространственно неоднородных средах правые части уравнений (9.1.3) могут явно зависеть от радиус-вектора  $\mathbf{x}$  и, кроме того, от времени. Явную зависимость правых частей от времени следует включать даже в случае стационарного процесса, если система подвержена действию внутренних или внешних флуктуаций.

С математической точки зрения уравнения (9.1.3) представляют собой систему нерасцепляющихся нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Разумеется, такие уравнения охватывают необычайно широкий класс процессов, и нас будут интересовать такие ситуации, в которых описываемая ими система резко изменяет свои макроскопические свойства, приобретая какой-то новый качественный элемент или утрачивая существовавший ранее. Приведем несколько примеров систем, описываемых уравнениями (9.1.3). В химии находят широкое применение уравнения «реакций с диффузией» вида

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) + D\Delta\mathbf{q}(\mathbf{x}, t). \quad (9.1.4)$$

Первый член ( $\mathbf{R}$ ) правой части описывает реакции между химическими веществами. В общем случае  $\mathbf{R}$  — многочлен относительно  $\mathbf{q}$  или сумма отношений многочленов (например, если в уравнения входит член Михаэлиса—Ментен (см. [1]). В однородных средах коэффициенты при отдельных степенях  $\mathbf{q}$  могут зависеть от пространственных координат  $\mathbf{x}$ , и, если управляющие параметры изменяются со временем, правая часть  $\mathbf{R}$  также может зависеть от времени  $t$ . Однако в большинстве случаев коэффициенты при степенях  $\mathbf{q}$  вполне допустимо считать не зависящими от пространственных переменных и времени. Во втором члене правой части уравнения (9.1.4)

$$\nabla^2 \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9.1.5)$$

— оператор Лапласа, описывающий диффузию,  $D$  — матрица диффузии

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & D_N \end{pmatrix}. \quad (9.1.6)$$

Она учитывает, что различные вещества могут диффундировать с различными постоянными диффузии.

Другой широкий класс нелинейных уравнений вида (9.1.3) встречается в гидродинамике. Уравнения гидродинамики содержат нелинейные члены, чаще всего учитывающие течение жидкости. Возникают нелинейные члены при описании течения в локальных

ординатах. К такому описанию мы приходим, преобразуя скорость частицы из системы координат, связанной с частицами жидкости, в локальную систему координат, связанную с пространством. Если  $\mathbf{x}(t)$  — радиус-вектор частицы и

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \quad (9.1.7)$$

то указанное преобразование осуществляется по формуле

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (9.1.8)$$

Аргумент  $\mathbf{x}$  в правой части равенства (9.1.8) означает радиус-вектор фиксированной точки пространства, не движущейся более вместе с жидкостью. Правая часть равенства (9.1.8) и есть тот нелинейный по  $\mathbf{v}$  член, который описывает (в локальной системе координат) влияние течения. Уравнения гидродинамики могут содержать и другие нелинейности. Например, плотность, входящая в уравнения гидродинамики, может зависеть от температуры, а температура является одной из компонент вектора состояния  $\mathbf{q}$ . Заметим, что в уравнениях гидродинамики скорость  $\mathbf{v}$  есть также одна из компонент вектора состояния  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{q}(\mathbf{x}, t). \quad (9.1.9)$$

Как хорошо известно из математики, решения уравнения (9.1.3) односторонне определены только в том случае, если заданы надлежащим образом выбранные начальные и граничные условия. В дальнейшем мы будем предполагать, что уравнения (9.1.3) такого типа, при котором эволюция во времени определяется начальными условиями, а зависимость от пространственных координат — граничными условиями. Перечислим несколько наиболее типичных крайних условий, хотя приводимый нами перечень отнюдь не претендует на полноту и не избавляет от необходимости решать, каким из условий надлежит воспользоваться, и не следует ли ввести условия какого-нибудь другого типа, не входящего в число названных нами. Выбор подходящих граничных условий, вообще говоря, следует производить, исходя из физических соображений, хотя общие теоремы, доказанные на уровне современной математической строгости, могут быть весьма полезны.

Итак, приведем примеры граничных условий.

1) Вектор состояния  $\mathbf{q}$  должен обращаться в нуль на граничной поверхности, т. е.

$$\mathbf{q}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (9.1.10)$$

( $\mathbf{s}$  от англ. surface — поверхность). Обобщение условия этого типа см. ниже.

2) Нормальная производная к поверхности должна обращаться в нуль. Это условие иногда называют условием отсутствия потока через границу:

$$\frac{\partial q_j(\mathbf{s})}{\partial n} = 0. \quad (9.1.11)$$

3) Еще одно граничное условие носит несколько искусственный характер, но весьма полезно, в особенности если мы не располагаем другими граничными условиями,— это периодическое граничное условие

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x} + \mathbf{L}). \quad (9.1.12)$$

Решение задачи с периодическим граничным условием должно быть периодическим по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с периодами  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ .

4) Если нет граничного условия в конечной части пространства, то, как правило, от решения требуется, чтобы оно было ограничено на бесконечности, т. е.

$$|\mathbf{q}| \leq C < \infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (9.1.13)$$

Различные компоненты вектора состояния  $\mathbf{q}$  могут удовлетворять различным граничным условиям, например условию, представляющему собой комбинацию условий (9.1.10), (9.1.11). Если одно граничное условие, служащее обобщением условия (9.1.10), задается соотношением

$$\mathbf{q}(\mathbf{s}) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{s}), \quad (9.1.14)$$

где  $\bar{\mathbf{q}}$  — известная функция, заданная на граничной поверхности (например, оно может означать, что концентрации каких-то химических веществ поддерживаются постоянными на границе).

Существуют и другие, менее очевидные граничные условия, например, когда  $\mathbf{q}(\mathbf{s})$  — функция на каком-нибудь многообразии, например на сфере или на торе. Условия такого рода возникают в биологии (эволюция морулы, бластулы, гастролы и, возможно, во многих других структурах) и в астрофизике. В этих случаях мы требуем, чтобы функция  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  была однозначно определена на многообразии, т. е. при обходе многообразия, например по меридиану, мы по возвращении в исходную точку должны возвращаться к тому значению  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ , которое было в самом начале.

## 9.2. Общий метод решения

С формальной точки зрения излагаемый нами метод решения уравнений является непосредственным обобщением тех методов, с которыми мы уже успели познакомиться в предыдущих разделах. Предположим, что в некотором диапазоне значений управляющего параметра мы нашли устойчивое решение  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t)$ :

$$\dot{\mathbf{q}}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t), \nabla, \alpha, \mathbf{x}, t). \quad (9.2.1)$$

Решение  $q_0$  допускает продолжение в область значений управляющего параметра, лежащую за пределами этого диапазона, но при этом теряет устойчивость по линейному приближению. Чтобы исследовать устойчивость решений уравнения (9.1.3), мы полагаем

$$q(\mathbf{x}, t) = q_0(\mathbf{x}, t) + w(\mathbf{x}, t) \quad (9.2.2)$$

и подставляем в уравнение (9.1.3). Предположим, что возмущение  $w$  удовлетворяет линеаризованному уравнению

$$\dot{w}(\mathbf{x}, t) = L(q_0(\mathbf{x}, t), \nabla, \alpha, \mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}, t). \quad (9.2.3)$$

Правую часть уравнения (9.2.3) иногда называют линеаризацией правой части уравнения (9.1.3), а оператор  $L$  — производной Фреше. Если  $\mathbf{N}$  — функционал от  $q_j$  (представимый в виде интегралов от функций, аргументами которых служат значения  $q_j$  в различных точках пространства), то элементы матрицы  $L$  — функциональные производные от  $\mathbf{N}$ :

$$L_{ij} = \delta N_i / \delta q_j(\mathbf{x}, t). \quad (9.2.4)$$

Чтобы не перегружать изложение, мы не будем входить в подробности абстрактного, чисто математического определения производной Фреше, а вместо этого продемонстрируем, как она выводится на нескольких примерах. В случае уравнения реакции с диффузией (9.1.4) матрица  $L$  представима в виде

$$L = L^{(1)} + L^{(2)}, \quad (9.2.5)$$

где

$$L_{ik}^{(1)} = \left. \frac{\partial R_i}{\partial q_k} \right|_{q=q_0} \quad (9.2.6)$$

— обычная производная,

$$L^{(2)} = D\Delta. \quad (9.2.7)$$

Производимые нами сейчас вычисления — еще один пример линеаризации уравнения (9.2.3). Рассмотрим член, учитывающий течение (такой член может входить в  $\mathbf{N}$ ):

$$q_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} q_l(\mathbf{x}). \quad (9.2.8)$$

Производя подстановку (9.2.2), преобразуем его к виду

$$[q_{0,j}(\mathbf{x}) + \omega_j(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial x_k} [q_{0,l}(\mathbf{x}) + \omega_l(\mathbf{x})]. \quad (9.2.9)$$

Раскрывая скобки и удерживая только члены, линейные по  $\omega_j$ , получаем

$$q_{0,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \omega_l(\mathbf{x}) + \omega_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} q_{0,l}(\mathbf{x}). \quad (9.2.10)$$

Рассмотрим решения уравнения (9.2.3) более подробно. Так как  $L$  зависит от  $\mathbf{q}_0$ , нам необходимо всякий раз указывать, о каком векторе  $\mathbf{q}_0$  идет речь. Мы начинаем с постоянного, т. е. не зависящего от пространственных переменных и времени, вектора  $\mathbf{q}_0$ . Возвращаясь к примеру с уравнениями типа «реакция с диффузией», напомним, что матрица  $L$  допускает в этом случае разложение (9.2.5), где  $L^{(1)}$  (см. (9.2.6)) — постоянная матрица, а матрица  $L^{(2)}$  определяется выражением (9.2.7).

Чтобы решить уравнение

$$L\mathbf{w} = [L^{(1)} + D\Delta]\mathbf{w} \equiv \dot{\mathbf{w}}, \quad (9.2.11)$$

произведем разделение переменных

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_1(t) \chi_k(\mathbf{x}). \quad (9.2.12)$$

Если предположить, что  $\chi_k(\mathbf{x})$  удовлетворяют уравнению

$$\Delta\chi_k = -\lambda'_k \chi_k \quad (9.2.13)$$

(и заданным граничным условиям), то уравнение

$$\dot{\mathbf{w}} = L(\nabla, \alpha)\mathbf{w} \quad (9.2.14)$$

подстановкой (9.2.12) преобразуется к виду

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = [L^{(1)} - D\lambda'_k]\mathbf{w}_1. \quad (9.2.15)$$

Векторное уравнение (9.2.15) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Из разд. 2.6 мы знаем, что решение такого векторного уравнения представимо в виде

$$\mathbf{w}_1(t) = e^{\lambda'_k t} \mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t), \quad (9.2.16)$$

где векторы  $\mathbf{v}_k$  не зависят от времени, если характеристические показатели  $\lambda'_k$  не вырождены. При вырожденных  $\lambda'_k$  векторы  $\mathbf{v}_k$  могут содержать конечное число различных степеней  $t$ . При некоторых геометриях решения уравнения (9.2.13) хорошо известны. Например, в прямоугольной геометрии они имеют вид плоских или стоячих волн, в сферической геометрии — функций Бесселя, умноженных на сферические гармоники.

Рассмотрим случай, когда вектор  $\mathbf{q}_0$  не зависит от пространственных переменных, но является периодической или квазипериодической функцией времени. Ограничимся уравнениями реакции с диффузией. Матрица  $L^{(1)}$  зависит от времени так же, как  $\mathbf{q}_0$ . Подстановка (9.2.12) по-прежнему остается в силе. Требуется найти решения уравнений (9.2.15). Такие уравнения были подробно рассмотрены в гл. 2 и 3.

Перейдем к классу задач, в которых вектор  $\mathbf{q}_0$  зависит от пространственных координат  $\mathbf{x}$ . Получить аналитические простран-

венно неоднородные решения уравнения (9.2.3) удается лишь в исключительно редких случаях. Обычно приходится довольствоваться приближенными решениями, вычисляемыми на ЭВМ. Пока численными методами не удалось получить сколько-нибудь значительных результатов, но, по мнению автора, вычислительный подход остается весьма перспективным, поскольку проблему получения пространственно неоднородных решений уравнения (9.2.3) невозможно обойти или преодолеть с помощью того или иного аналитического трюка, например с помощью специального варианта теории сингулярностей. Несмотря на то что проблема получения решений, зависящих от пространственных переменных в общем случае остается открытой, существуют более узкие классы задач, в рамках которых можно высказать общие утверждения.

Пусть  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  — вектор, периодический по  $\mathbf{x}$  с периодами

$$(a_1, a_2, a_3). \quad (9.2.17)$$

Если  $\mathbf{N}$  не зависит от  $\mathbf{x}$ , то  $L(\mathbf{x})$  обладает такой же периодичностью по  $\mathbf{x}$ , как и  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ . Полагая

$$\mathbf{w} = e^{\lambda t} \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (9.2.18)$$

преобразуем уравнение (9.2.14) в следующее:

$$L(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}), \nabla, \alpha) \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (9.2.19)$$

Так как матрица  $L(\mathbf{x})$  периодична по каждой компоненте вектора  $\mathbf{x}$ , мы можем воспользоваться результатами разд. 2.7. Если граничное условие требует ограниченности вектора  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , то решение  $\mathbf{v}$  в общем случае представимо в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{z}(\mathbf{x}), \quad (9.2.20)$$

где  $\mathbf{k}$  — вещественный вектор, а вектор  $\mathbf{z}$  периодичен по  $\mathbf{x}$  с периодами (9.2.17). В случае других граничных условий в конечных геометриях решение (9.2.20) при соответствующих граничных условиях может порождать стоячие волны. Предполагается, что граничные условия согласуются с условием периодичности матрицы  $L(\mathbf{x})$  по  $\mathbf{x}$  с периодами (9.2.17).

### 9.3. Анализ бифуркаций для конечных геометрий

Покажем теперь, как решать уравнения типа (9.1.3). Исследуем бифуркацию из узла или фокуса, устойчивых в некотором интервале значений управляющего параметра  $\alpha$  и теряющих устойчивость, когда  $\alpha$  превышает критический порог  $\alpha_c$ . Пусть

$$\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) \quad (9.3.1)$$

— соответствующее старое решение. Мы предполагаем, что решения линеаризованных уравнений (9.2.3) представимы в виде

$$\mathbf{w}_k(\mathbf{x}, t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k(\mathbf{x}). \quad (9.3.2)$$

Как известно, при рассмотрении граничных условий не на бесконечности, а в конечной части пространства, характеристические показатели  $\lambda_k$  (по крайней мере в стандартных задачах) и индекс  $k$  допустимо считать дискретными. Разложим решение уравнения (9.1.3), которое требуется найти, в уже хорошо знакомую нам суперпозицию векторов  $\mathbf{q}_0$  и  $\mathbf{v}_k$ :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_k \xi_k(t) \mathbf{v}_k(\mathbf{x})}_{\mathbf{W}}. \quad (9.3.3)$$

Существенное различие между методом, излагаемым в этой главе, и процедурой, с которой мы познакомились в гл. 8 (см. разд. 8.1—8.5), состоит в том, что теперь индекс  $k$  принимает бесконечное множество значений, в то время как в предыдущих главах множество допустимых значений  $k$  было конечным. Имеется и еще одно различие: зависимость векторов  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}_0$  и  $\mathbf{v}$  от пространственных переменных. Подставим разложение (9.3.3) в уравнение (9.1.3), заменив функцию  $\mathbf{N}$  в правой части степенным рядом по  $\mathbf{W}$ . Если вектор (9.3.3) удовлетворяет уравнению (9.1.3), то

$$\sum_k \dot{\xi}_k(t) \mathbf{v}_k(\mathbf{x}) = \sum_k \xi_k(t) L \mathbf{v}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{W}), \quad (9.3.4)$$

где

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}) = \sum_{k', k''} \xi_{k'} \xi_{k''} \widehat{\mathbf{N}}^{(2)}(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_{k'}(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_{k''}(\mathbf{x}) + \dots \dots \quad (9.3.5)$$

Умножим уравнение (9.3.4) на  $\overline{\mathbf{v}}_k(\mathbf{x})$  и проинтегрируем по пространству в заданных границах. Из определения векторов  $\overline{\mathbf{v}}_k$  следует соотношение ортогональности

$$\int d^3x \overline{\mathbf{v}}_k(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{k'}(\mathbf{x}) = \delta_{kk'}. \quad (9.3.6)$$

Воспользуемся тем, что

$$L \mathbf{v}_k(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad (9.3.7)$$

и преобразуем уравнение (9.3.4) к виду

$$\dot{\xi}_k = \lambda_k \xi_k + \langle \overline{\mathbf{v}}_k \mathbf{H}(\mathbf{W}) \rangle, \quad (9.3.8)$$

где

$$\langle \overline{\mathbf{v}}_k \mathbf{H}(\mathbf{W}) \rangle = \sum_{k', k''} \xi_{k'} \xi_{k''} \int \underbrace{d^3x (\overline{\mathbf{v}}_k(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{N}}^{(2)}(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) : \overline{\mathbf{v}}_{k'}(\mathbf{x}) : \overline{\mathbf{v}}_{k''}(\mathbf{x}))}_{A_{kk'k''}^{(2)}} + \dots \dots \quad (9.3.9)$$

Если  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{q}_0$  не зависят от пространственных переменных, то входящие в правую часть соотношения (9.3.9) коэффициенты упрощаются:

$$A_{kk'k''}^{(2)} = \sum_{l, l', l''} \widehat{\mathbf{N}}_{ll'l''}^{(2)} \int \underbrace{d^3x \overline{\mathbf{v}}_{k, l}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{k, l'}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{k, l''}(\mathbf{x})}_I. \quad (9.3.10)$$

Оставшийся интеграл  $I$  зависит только от решений линеаризованного уравнения (9.3.7). Если оператор  $L$  инвариантен относительно преобразований симметрии, то векторы  $\mathbf{v}$  можно выбрать в качестве представления соответствующей группы преобразований. Как доказывается в теории групп, учет трансформационных свойств векторов  $\mathbf{v}$  и  $\bar{\mathbf{v}}$  приводит к правилам отбора для интеграла  $I$  в (9.3.10). Применение теоретико-групповых идей и методов позволяет существенно упростить решение уравнений (9.3.8). С формальной точки зрения система уравнений (9.3.8) ничем не отличается от уравнений (8.1.17), а это означает, что вблизи критической точки мы можем воспользоваться принципом подчинения, позволяющим систему уравнений (9.3.8) привести к системе, состоящей из конечного (и, как правило, весьма небольшого) числа уравнений. Главные члены в уравнении (9.3.3) те, которые вместо всех  $\xi_k$  содержат параметры порядка  $u_k$ . Вблизи критической точки, в которой старое решение теряет устойчивость, все остальные члены относительно малы и порождают лишь незначительные поправки. Таким образом, вблизи критических точек возникающая структура определяется суперпозицией конечного числа членов вида

$$u_k(t) \mathbf{v}_k(\mathbf{x}). \quad (9.3.11)$$

Какие именно комбинации членов (9.3.11) следует выбирать, зависит только от решений уравнений параметра порядка. Могут представиться случаи, когда в результате конкуренции мод выживает только один параметр порядка  $u$ , и возникающая структура определяется только одним вектором  $\mathbf{v}_{k_0}$ . В других случаях в результате кооперативного действия мод происходит взаимная стабилизация некоторых комбинаций параметров порядка  $u$ . Примером конкурентного взаимодействия мод может служить образование конвективных валов при возникновении неустойчивости Бенара, примером кооперативного взаимодействия мод — образование шестиугольных ячеек при той же неустойчивости.

## 9.4. Обобщенные уравнения Гинзбурга — Ландау

В бесконечно протяженной среде без граничных условий спектр оператора  $L$ , вообще говоря, непрерывен. Рассмотрим частный случай, когда  $\mathbf{q}_0$  зависит от пространственных координат и времени. Пусть линейный оператор  $L$  имеет вид (9.2.11) (и зависит от пространственных координат и времени). Как видно из (9.2.13),  $\chi$  можно выбрать в виде плоских волн

$$\chi_k(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (9.4.1)$$

Подстановка (9.2.12) позволяет опять свести задачу к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (9.2.15). Если  $\mathbf{w}_1$  — конечномерный вектор, то

собственные решения  $\mathbf{w}_1$  характеризуются дискретным набором индексов, который мы обозначим  $j$ . С другой стороны,  $\mathbf{k}$  — непрерывная переменная. Если пренебречь вырождением собственных значений в (9.2.15), то решения линеаризованных уравнений (9.2.14) представимы в виде

$$\exp(\lambda_{\mathbf{k}, j} t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}) = \exp(\lambda_{\mathbf{k}, j} t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(0) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (9.4.2)$$

Заметим, что собственные значения можно записать в виде

$$\lambda_{\mathbf{k}, j} \equiv \lambda_j(i\mathbf{k}). \quad (9.4.3)$$

Решение  $\mathbf{q}$  можно искать в виде, аналогичном (9.3.3), но, учитывая непрерывность  $\mathbf{k}$ , с интегралом под знаком суммы:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \sum_j \int \xi_{\mathbf{k}, j}(t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}) d^3k. \quad (9.4.4)$$

Применяя принцип подчинения в случае непрерывного спектра, мы сталкиваемся с определенными трудностями, поэтому воспользуемся подходом, хорошо известным из квантовой механики и связанным с формированием волновых пакетов. Разложим вектор  $\mathbf{k}$  в сумму дискретного набора векторов  $\mathbf{k}'$  и непрерывного остаточного вектора  $\hat{\mathbf{k}}$ :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \hat{\mathbf{k}}. \quad (9.4.5)$$

Рассмотрим выражение

$$\int \xi_{\mathbf{k}, j}(t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \quad (9.4.6)$$

и разложим интеграл в сумму по  $\mathbf{k}'$ :

$$\sum_{\mathbf{k}} \underbrace{\int_{k_x - \delta/2}^{k_x + \delta/2} \int_{k_y - \delta/2}^{k_y + \delta/2} \int_{k_z - \delta/2}^{k_z + \delta/2} d^3\hat{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}' + \hat{\mathbf{k}}, j}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}' + \hat{\mathbf{k}}, j}(0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}_{\xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t)}. \quad (9.4.7)$$

Вводя величину  $\xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t)$ , как указано в выражении (9.4.7), и аппроксимируя каждый волновой пакет по схеме

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(0) \rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{k}', j}(0), \quad (9.4.8)$$

преобразуем выражение (9.4.7) к виду

$$\sum_{\mathbf{k}'} \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}). \quad (9.4.9)$$

В рамках принятых нами предположений решение (9.4.4) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{k}, j} \xi_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}). \quad (9.4.10)$$

Изменяется и соотношение ортогональности: теперь его следует записывать в виде

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}) \rangle = \int d^3x \sum_l \bar{v}_{\mathbf{k}', j', l}(\mathbf{x}) v_{\mathbf{k}, j, l}(\mathbf{x}). \quad (9.4.11)$$

Интегрирование производится по области пространства, в которой содержится много осциллирующих вектор-функций  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , но  $\xi_{\mathbf{k}}$  изменяется незначительно. При этих предположениях выполняются соотношения

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}', j'} \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j} \rangle_{\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \delta_{j'j}, \quad (9.4.12)$$

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}', j'}(\mathbf{x}) \xi_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x}} \approx \xi_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t) \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \delta_{j'j}. \quad (9.4.13)$$

Для дальнейшего нам необходимо выполнить некоторые предварительные преобразования. Рассмотрим выражение

$$\int \lambda_j(i\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}, j}(t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k, \quad (9.4.14)$$

представимое в виде

$$\lambda_j(\nabla) \int \xi_{\mathbf{k}, j}(t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k. \quad (9.4.15)$$

Оператор  $\lambda_j(\nabla)$ , действуя на  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ , переводит экспоненту в  $\lambda_j(i\mathbf{k})$ . Интеграл, стоящий в (9.4.15) справа от оператора  $\lambda_j(\nabla)$ , можно разложить, как и прежде, в сумму (9.4.9):

$$\lambda_j(\nabla) \sum_{\mathbf{k}'} \int \xi_{\mathbf{k}' + \hat{\mathbf{k}}, j}(t) e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}} d^3k \mathbf{v}_{\mathbf{k}', j}(0) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t). \quad (9.4.16)$$

Выясним теперь, во что переходит  $\xi$  под действием оператора  $\lambda_j(\nabla)$ . Для этого рассмотрим выражение

$$\lambda_j(\nabla) \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}}. \quad (9.4.17)$$

Дифференцируя множитель  $\exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})$ , получаем из (9.4.17)

$$e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \lambda_j(i\mathbf{k}' + \nabla) \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t) \quad (9.4.18)$$

(мы воспользовались формулами, хорошо известными из квантовой механики). Из определения (9.4.7) величины  $\xi_{\mathbf{k}', j}$  следует, что она содержит только малые векторы  $\mathbf{k}'$ . Это позволяет нам разложить  $\lambda_j$  в ряд по степеням оператора  $\nabla$ . Нетрудно проверить, что

$$\lambda_j(i\mathbf{k}' + \nabla) \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t) = \lambda_j(i\mathbf{k}') \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t) + \lambda_j^{(1)}(i\mathbf{k}') : \nabla \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t) + \lambda_j^{(2)}(i\mathbf{k}') : \nabla : \nabla \xi_{\mathbf{k}', j}(\mathbf{x}, t) + \dots \quad (9.4.19)$$

Наконец, вычисляя

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}', j'}(\mathbf{x}) \lambda_j(i\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x}}, \quad (9.4.20)$$

мы приходим к выражению вида

$$\lambda_j(i\mathbf{k} + \nabla) \xi_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t) \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \delta_{j'j} \quad (9.4.21)$$

(в ходе вычислений нам понадобится соотношение (9.4.13)). Теперь

мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы приступить к анализу нелинейного уравнения (9.1.3). Записав предполагаемое решение в виде (9.4.10), подставим его в уравнение (9.1.3), разложим правую часть  $\mathbf{N}$  уравнения в ряд по степеням  $\mathbf{q}$  и воспользуемся линеаризованным уравнением (9.2.3). В результате мы получим уравнение

$$\dot{\xi}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t) = \lambda_j (i\mathbf{k} + \nabla) \xi_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t) + H_{\mathbf{k}, j}(\xi_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t)), \quad (9.4.22)$$

где

$$H_{\mathbf{k}, j} = \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{k}'' \\ j', j''}} \xi_{\mathbf{k}', j'}(\mathbf{x}, t) \xi_{\mathbf{k}'', j''}(\mathbf{x}, t) \langle \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{v}_{\mathbf{k}', j'}(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_{\mathbf{k}'', j''}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x}} + \dots \quad (9.4.23)$$

Если не считать того, что  $\lambda_j$  — оператор, уравнение (9.4.22) имеет такой же вид, как все уравнения, которые мы получали в аналогичных случаях прежде.

Для того чтобы мы могли применить принцип подчинения, необходимо провести различие между неустойчивыми и устойчивыми модами. Для этого разделим все  $\lambda$  на две группы (неустойчивые « $u$ » и устойчивые « $s$ ») в зависимости от того, какому из двух неравенств они удовлетворяют:

$$\lambda_u = \text{Re} \{ \lambda_j (i\mathbf{k}) \} > -|C| \quad (9.4.24)$$

или

$$\lambda_s = \text{Re} \{ \lambda_j (i\mathbf{k}) \} \leq C < 0. \quad (9.4.25)$$

Определяя таким образом устойчивые и неустойчивые моды, необходимо иметь в виду, что индексы  $j$  и  $\mathbf{k}$  не являются независимыми. Моды, удовлетворяющие неравенству (9.4.24), обозначим  $u_{\mathbf{k}, j}$ , а моды, удовлетворяющие неравенству (9.4.25), обозначим  $s_{\mathbf{k}, j}$ . Подчеркнем, что в дальнейшем при суммировании индексы  $j$  и  $\mathbf{k}$  принимают ограниченные множества значений, неявно задаваемые неравенствами (9.4.24), (9.4.25). Непрерывность спектра осложняет задачу, так как подчиненные моды непрерывно переходят в незатухающие или неподчиненные. Поскольку принцип подчинения требует, чтобы у вещественной части спектра  $\lambda_s$  существовала верхняя грань (см. (9.4.25)), мы можем при некотором  $C$  провести сечение, разделяющее одну область от другой. Следовательно, в некотором интервале отрицательных вещественных частей  $\lambda_j$  моды необходимо рассматривать как неустойчивые. При рассматриваемых нами условиях принцип подчинения, как нетрудно убедиться, остается в силе, если амплитуды  $u_{\mathbf{k}, j}$  достаточно малы.

Так как  $\lambda$  — операторы, соответствующие  $\lambda_u$  и  $\lambda_s$  также являются операторами по пространственным координатам. Нетрудно показать, что принцип подчинения выполняется и в более общем случае, если амплитуды  $\xi$  — единственные медленно меняющиеся

функции пространственных координат, вследствие чего  $\lambda_s(\mathbf{k} + \nabla)$  мало отличается от  $\lambda_s(\mathbf{k})$ . После этих замечаний нетрудно применить в рассматриваемом нами случае принцип подчинения. Удерживая в правой части  $\mathbf{N}$  исходного уравнения (9.1.3) члены до третьего порядка по  $\mathbf{q}$ , получаем следующую систему уравнений для параметра порядка  $u_{\mathbf{k}, j} = u_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\left[ \frac{d}{dt} - \lambda_{u, j}(i\mathbf{k} + \nabla) \right] u_{\mathbf{k}, j} = \sum_{\substack{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \\ j', j''}} A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', j', j''} u_{\mathbf{k}', j'} u_{\mathbf{k}'', j''} + \\ + \sum_{\substack{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''' \\ j', j'', j'''}} B_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''', j', j'', j'''} u_{\mathbf{k}', j'} u_{\mathbf{k}'', j''} u_{\mathbf{k}''', j'''} + \dots (+ F_{\mathbf{k}, j}(t)). \quad (9.4.26)$$

Строго говоря, коэффициенты  $A$  и  $B$  могут содержать производные по пространственным координатам. Но в большинстве задач, представляющих практический интерес, операторы  $\lambda_s(i\mathbf{k} + \nabla)$ , входящие в знаменатели, можно аппроксимировать операторами  $\lambda_s(i\mathbf{k})$ , лишь слабо зависящими от пространственных координат  $\mathbf{x}$ , т. е. знаменатели ограничены снизу. Если исходное уравнение (9.1.3) содержало флуктуации, то соответствующие флуктуирующие силы вновь появляются в уравнении (9.4.26) в виде аддитивного члена  $F_{\mathbf{k}, j}$ . Уравнения (9.4.26) были выведены некоторое время назад автором книги и названы обобщенными уравнениями Гинзбурга—Ландау, так как если выбрать  $\lambda_j$  в приближении (9.4.19) и отбросить индексы и суммы по  $\mathbf{k}$  и  $j$ , то уравнения (9.4.26) перейдут в уравнения, впервые полученные Гинзбургом и Ландау в теории равновесных фазовых переходов, в частности для сверхпроводимости. Помимо того, что уравнения (9.4.26) отличаются большей общностью, следует отметить два обстоятельства: они выведены из первых принципов и применимы к системам не только равновесным, но и находящимся далеко от теплового равновесия.

## 9.5. Упрощение обобщенных уравнений Гинзбурга — Ландау. Образование структур в конвекции Бенара

В нескольких случаях, представляющих практический интерес, выведенные нами обобщенные уравнения Гинзбурга—Ландау (9.4.26) удастся упростить. Поясним основную идею и ход вычислений на примере конвективной неустойчивости Бенара, известном из гидродинамики (соответствующие экспериментальные результаты приведены в разд. 1.2.1). Предполагаемая нами процедура легко обобщается и на другие случаи. В проблеме Бенара параметры порядка зависят от двух горизонтальных пространственных координат  $x$  и  $y$ , которые мы объединим в вектор  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Соответственно с этим плоские волны в горизонтальной плоскости будем описывать волновым вектором  $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ . Тогда собственные значения неустойчивых мод представимы в виде (см. [1], разд. 8.13)

$$\lambda = a - (k_0^2 - k_\perp^2)^2. \quad (9.5.1)$$

Связь с  $\lambda$ , входящими в уравнение для параметра порядка (9.4.26), мы установим, преобразовав (9.5.1) с помощью

$$e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}} \quad (9.5.2)$$

(где  $\mathbf{k}_c$  соответствует вектору  $\mathbf{k}$  в уравнении (9.4.26)). Кроме того, чтобы учесть возбуждения с конечной шириной полосы, необходимо ввести производные, как в предыдущем разделе. В результате мы получим для  $\lambda$  (см. уравнение (9.4.26)) выражение

$$\lambda = a - (k_0^2 + (i\mathbf{k}_c + \nabla)^2)^2. \quad (9.5.3)$$

В дальнейшем нам понадобятся уравнения для параметров порядка (9.4.26) следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\mathbf{k}_c}(\mathbf{x}) = & [a - (k_0^2 + (i\mathbf{k}_c + \nabla)^2)^2] u_{\mathbf{k}_c} + \\ & + \sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c} A_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c} \delta_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c} u_{\mathbf{k}'_c}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}''_c}(\mathbf{x}) - \\ & - \sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c, \mathbf{k}'''_c} B_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c, \mathbf{k}'''_c} \delta_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c} u_{\mathbf{k}'_c}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}''_c}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'''_c}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

где  $\delta$ -символы Кронекера под знаками сумм обеспечивают сохранение волновых чисел. Так обстоит дело в том случае, если мы не задаем граничные условия на горизонтальной плоскости и используем в качестве векторов  $\mathbf{v}_{\mathbf{k}, j}(\mathbf{x})$  плоские волны. Ясно, что  $\lambda$ , задаваемые в виде (9.5.1) или (9.5.3), учитывают в большей мере те  $|\mathbf{k}_\perp|$ , которые меньше отличаются от  $|\mathbf{k}_c|$ . Введем теперь новую функцию  $\psi$ :

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}_c} e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}} u_{\mathbf{k}_c}(\mathbf{x}). \quad (9.5.5)$$

Суммирование проводится по критическим векторам  $\mathbf{k}$ , имеющим одну и ту же абсолютную величину  $k_0$ , но различные направления в горизонтальной плоскости. Примем теперь наше основное предположение: будем считать, что для векторов  $\mathbf{k}$ , отобранных с помощью  $\delta$ -функций и условия  $|\mathbf{k}_c| = k_0$ , выполняются приближенные соотношения

$$A_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c} \approx A, \quad (9.5.6)$$

$$B_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c, \mathbf{k}'''_c} \approx B. \quad (9.5.7)$$

Умножим уравнение (9.5.4) на  $\exp(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x})$  и просуммируем по  $\mathbf{k}_c$ . Наши дальнейшие действия обретут особую наглядность, если мы начнем с выражения, которое получается в результате всех преобразований из последнего члена в правой части уравнения (9.5.4), и, следовательно, рассмотрим выражение

$$\sum_{\mathbf{k}_c} e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c, \mathbf{k}'''_c} \delta_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c} u_{\mathbf{k}'_c}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}''_c}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'''_c}(\mathbf{x}). \quad (9.5.8)$$

Так как

$$-\mathbf{k}_c + \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c = 0, \quad (9.5.9)$$

мы можем ввести в (9.5.8) множитель

$$\exp[i\{-\mathbf{k}_c + \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c\} \cdot \mathbf{x}] \equiv 1. \quad (9.5.10)$$

Изменяя в (9.5.8) порядок суммирования, получаем

$$\sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c, \mathbf{k}'''_c} \exp[i\{\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c\} \cdot \mathbf{x}] u_{\mathbf{k}'_c}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}''_c}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'''_c}(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{k}_c} \delta_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c}. \quad (9.5.11)$$

Заметим, что последнюю сумму можно отбросить, так как

$$\sum_{\mathbf{k}_c} \delta_{\mathbf{k}_c, \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c} = 1. \quad (9.5.12)$$

Определение (9.5.5) функции  $\psi$  позволяет записать оставшиеся члены выражения (9.5.11) в виде монома

$$\psi^3(\mathbf{x}). \quad (9.5.13)$$

Аналогичным образом упрощается сумма с коэффициентом  $A$ .

Наконец, произведем преобразование

$$e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}} (k_0^2 + (i\mathbf{k}_c + \nabla)^2)^2 = (k_0^2 + \nabla^2)^2 e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}}. \quad (9.5.14)$$

Так как в результате всех произведенных операций мы получаем в левой части уравнения (9.5.4)  $\dot{\psi}(\mathbf{x})$ , новое уравнение имеет вид

$$\dot{\psi}(\mathbf{x}) = \{a - (k_0^2 + \nabla^2)^2\} \psi(\mathbf{x}) + A\psi^2(\mathbf{x}) - B\psi^3(\mathbf{x}). \quad (9.5.15)$$

При  $A = 0$  численные решения уравнения (9.5.15) были получены Гринсайдом, Кокреном-мл. и Шрайером. Типичный результат представлен на рис. 9.1. Обращает на себя внимание сходство кривых на рис. 9.1 и 1.2.6, 1.2.8. Различие состоит в том, что на рис. 9.1 не наблюдаются шестиугольники. Как показывают собственные результаты автора книги, шестиугольники удается воспроизвести при  $A \neq 0$ .

На рис. 9.2 и 9.3 показано несколько типичных примеров в случае круглой и более сложной геометрии. Отчетливо видны структуры шестиугольной формы.

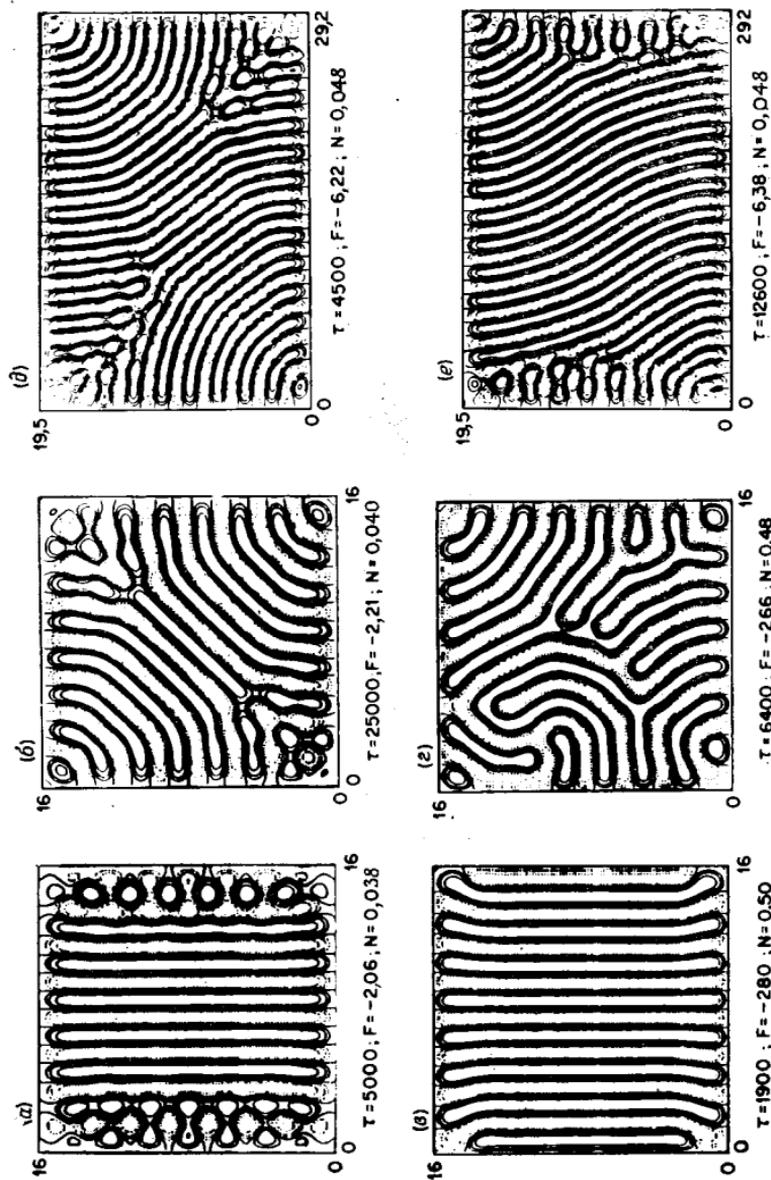


Рис. 9.1. Линии равных амплитуд  $\Phi(x, y, t)$  при различных  $t \equiv \tau$  и  $a = 0, 10$  (a, б, в, д, е),  $a = 90$  (в, е),  $A = 0, B = 1$ . Отношение длины к ширине у ячейк  $a - \epsilon$  равно 16, у ячейк  $\delta, \epsilon - 29, 2$  и 19,5. В качестве начальных условий были выбраны параллельные цилиндрические ячейки для  $a, \epsilon$  и случайные области противоположных знаков для  $\delta, \delta$ . Сплошными и пунктирными линиями показаны положительные и отрицательные значения при максимуме амплитуды, равном  $1/2, 1/4, 1/8$  и  $1/16$ . Полученные кривые соответствуют линиям равной вертикальной скорости в оптических экспериментах. Указаны время, за которое достигается равновесие ( $\tau$ ), функционал Ляпунова ( $F$ ) и число Нуссельта ( $N$ ). Состояние  $\delta$  не достигло равновесия. Оно продолжает эволюционировать в равновесное состояние  $\epsilon$ . Равновесие считается достигнутым, когда  $d \ln(f)/dt < 10^{-8}$ . [Из работы: Greenside H. S., Coughran, Jr. W. M., Schryer N. L., Phys. Rev. Lett., 49, 726 (1982).]

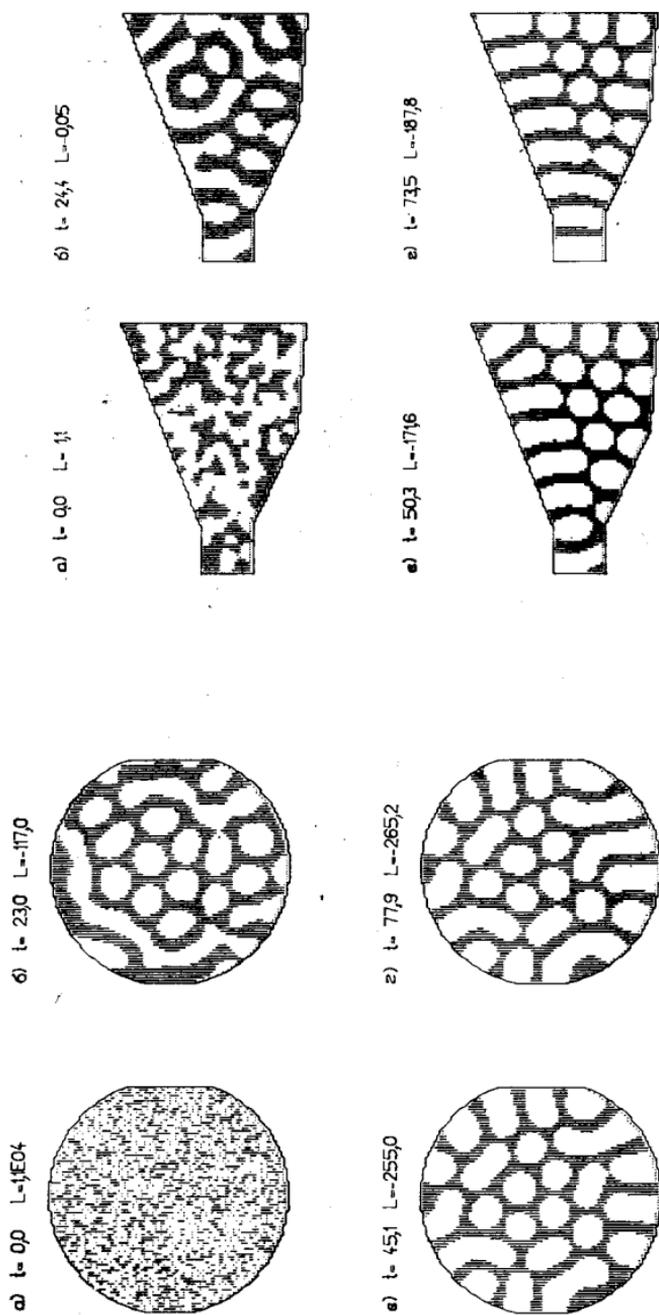


Рис. 9.2. Численное интегрирование уравнения (9.5.15) с безразмерными единицами, выбранными так, чтобы  $k_0 = 1$ ;  $B = 1$  и  $a \rightarrow \varepsilon$ ;  $A \rightarrow \delta$ ;  $\varepsilon = 0,0$ ;  $\delta = 2,0$ . Параметр  $t$  — безразмерное время,  $L$  — функционал Ляпунова, соответствующий уравнению (9.5.15). В качестве начальной выбрана случайная структура, изображенная точками. Структуры, возникающие из нее в процессе эволюции, получены в результате численного интегрирования уравнения (9.5.15). Структуры на рис. 9.2 обладают некоторым сходством с экспериментально наблюдавшимися структурами на рис. 1.2.8.

Рис. 9.3. То же, что на рис. 9.2, при весьма специальной геометрии. Видно, что шестиугольники существуют лишь на достаточно большом расстоянии от боковых стенок.

## ВЛИЯНИЕ ШУМА

Во введении мы уже отмечали, что в критических точках, там, где система теряет устойчивость, влияние шумов может иметь решающее значение. В этой главе мы покажем, каким образом это влияние удастся учесть в рамках подхода, развитого в предыдущих главах. В синергетике мы обычно начинаем с уравнений, описывающих систему на мезоскопическом уровне. Такое описание пренебрегает микроскопическим движением. Например, атомов или молекул. Одним из многочисленных примеров описания на мезоскопическом уровне могут служить уравнения гидродинамики. В них входят такие макроскопические величины, как плотность, макроскопические скорости и т. д. Аналогичным образом в биологии при изучении морфогенеза мы пренебрегаем процессами, протекающими на субклеточном уровне, например метаболизмом. С другой стороны, мы не можем полностью исключить из рассмотрения микроскопические процессы, так как именно они порождают флуктуирующие вынуждающие силы в уравнениях для вектора состояния  $\mathbf{q}$  исследуемой системы. Мы не будем выводить члены, описывающие источники шумов. Для такого вывода необходимо в каждом отдельном случае выяснить природу шума. Далеко не безразлично, о каком шуме идет речь: о шуме квантового происхождения, шуме, обусловленном тепловыми флуктуациями, или о внешнем шуме, производимом резервуарами, с которыми связана система. Мы хотим лишь наметить общий подход к рассмотрению случаев, когда источники шумов заданы. Основные идеи предлагаемого подхода мы поясним на примерах.

## 10.1. Общий подход

Уравнения

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha) + \mathbf{F}(t) \quad (10.1.1)$$

(которые будем называть уравнениями Ланжевена) мы получим из исходных уравнений, вводя соответствующие флуктуирующие силы  $\mathbf{F}$ . Если флуктуирующие силы зависят от вектора состояния, то мы приходим к стохастическим дифференциальным уравнениям вида

$$d\mathbf{q} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha) dt + d\mathbf{F}(t, \mathbf{q}). \quad (10.1.2)$$

Их можно рассматривать и решать в рамках исчисления Ито или Стратоновича (гл. 4). Мы хотим проанализировать влияние флуктуирующих сил на поведение системы вблизи критических точек, в которых система теряет устойчивость. Будем предполагать, что член  $\mathbf{F}$  достаточно мал и не вносит существенных изменений в характер перехода. Это означает, что нас будут интересовать в основном проблемы, в которых неустойчивость обусловлена не флуктуациями, а детерминистской составляющей  $\mathbf{N}$ . Качественные изменения могут происходить в случае мультипликативного шума при некоторых типах зависимости  $\mathbf{F}$  от  $\mathbf{q}$ . Мы не будем затрагивать этот круг вопросов, так как он подробно рассмотрен в монографии Хорстхемке и Лефеве.

Итак, приступим к анализу уравнения (10.1.1). Отбросим флуктуирующую силу, т. е. пренебрежем членом  $\mathbf{F}$  или  $d\mathbf{F}$ . Предположим, что, когда управляющий параметр  $\alpha$  принимает значения из некоторого интервала, решение уравнения

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \alpha) \quad (10.1.3)$$

существует. Как и прежде, нас будет интересовать устойчивость решения

$$\mathbf{q}_0(t, \alpha). \quad (10.1.4)$$

Полагая

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{w}, \quad (10.1.5)$$

приходим к хорошо известным линеаризованным уравнениям

$$\dot{\mathbf{w}}_k(t) = L(t, \alpha) \mathbf{w}_k(t), \quad (10.1.6)$$

решения которых представимы в виде

$$\mathbf{w}_k(t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k(t). \quad (10.1.7)$$

Как и прежде, мы можем ввести амплитуды  $\xi_k$  и фазовые углы  $\varphi_k$ . Если вещественная часть одного или нескольких собственных значений  $\lambda_k$  из (10.1.7) становится положительной, то можно воспользоваться принципом подчинения. В разд. 7.6 было показано, что принцип подчинения вполне применим к стохастическим дифференциальным уравнениям типа Ланжевена—Ито или Стратоновича. Принцип подчинения позволяет свести исходную систему уравнений (10.1.2) к системе уравнений для параметров порядка — соответствующих  $\xi_k$  и  $\varphi_k$ . Уравнения параметра порядка оказываются уравнениями типа (10.1.2), но с измененными  $\mathbf{N}$  и  $d\mathbf{F}$ . Влияние флуктуаций и наш подход к его описанию продемонстрируем сначала на примере.

## 10.2. Простой пример

Рассмотрим уравнение для параметра порядка

$$\dot{u} = \lambda u - bu^3 + F(t). \quad (10.2.1)$$

Относительно флуктуирующих сил будем предполагать, что они обладают следующими свойствами:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad (10.2.2)$$

$$\langle F(t) F(t') \rangle = Q\delta(t-t'). \quad (10.2.3)$$

Если мы находимся далеко от критической точки  $\lambda = 0$ , в которой происходит потеря устойчивости, то уравнение (10.2.1) достаточно решить приближенно с помощью линеаризации. При  $\lambda < 0$  уравнение (10.2.1) можно аппроксимировать уравнением

$$\dot{u} \approx \lambda u + F(t), \quad (10.2.4)$$

так как  $u$  — малое отклонение от стационарного состояния. При  $\lambda > 0$  произведем замену

$$u = u_0 + \eta, \quad \text{где } \lambda - bu_0^2 = 0, \quad (10.2.5)$$

преобразующую уравнения (10.2.1) в уравнение

$$\dot{\eta} \approx -2\lambda\eta + F(t) \quad (10.2.6)$$

(более высокими степенями  $\eta$  мы пренебрегаем). Поскольку уравнение (10.2.6) имеет такой же вид, как и уравнение (10.2.4), а величина  $\eta$  мала, достаточно исследовать решения уравнения (10.2.6), представимые в виде

$$\eta = \int_0^t \exp[-2\lambda(t-\tau)] F(\tau) d\tau. \quad (10.2.7)$$

(Решение однородного уравнения мы опускаем, поскольку оно выпало бы при производимом далее предельном переходе.) Соотношение (10.2.3) позволяет без труда вычислить корреляционную функцию. При  $t \geq t'$  из него непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \eta(t') \rangle &= \int_0^t \int_0^{t'} \exp[-2\lambda(t-\tau) - 2\lambda(t'-\tau')] Q\delta(\tau-\tau') d\tau d\tau' = \\ &= \int_0^{t'} \exp[-2\lambda(t+t') + 4\lambda\tau'] Q d\tau' = \exp[-2\lambda(t+t')] Q \frac{(e^{4\lambda t'} - 1)}{4\lambda}. \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

Если  $t$  и  $t'$  достаточно велики, а разность  $t-t'$  конечна, то (10.2.8) сводится к стационарной корреляционной функции

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \frac{Q}{4\lambda} \exp(-2\lambda|t-t'|). \quad (10.2.9)$$

Формула (10.2.9) верна при  $t < t'$ ,  $t = t'$  и  $t > t'$ .

Вблизи критической точки  $\lambda = 0$  линеаризация становится неприменимой. В этом нетрудно убедиться, взглянув на корреляционную функцию (10.2.9): при  $\lambda \rightarrow 0$  правая часть расходится. Такого рода эффекты хорошо известны в теории фазовых переходов и называются критическими флуктуациями. Однако в физических системах, находящихся достаточно далеко от теплового равновесия, и во многих других системах такие флуктуации ограничены, что с математической точки зрения обусловлено членом  $-bu^3$  в уравнении (10.2.1). Наиболее изящный подход, позволяющий учесть этот член, основан на использовании уравнения Фоккера—Планка. Пусть  $F(t)$  обладает свойствами (10.2.2), (10.2.3) и имеет гауссово распределение (см. [1]). Из разд. 4.2 известно, что уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности  $f$ , соответствующей уравнению Ланжевена (10.2.1), имеет вид

$$\dot{f} = -\frac{\partial}{\partial u} [(\lambda u - bu^3)f] + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} f, \quad (10.2.10)$$

где

$$\langle F(t) F(t') \rangle = Q\delta(t-t'). \quad (10.2.11)$$

Как показано в [1], уравнения (10.2.10) допускают стационарное решение

$$f_0(u) = \mathcal{N} \exp \left[ \frac{2}{Q} (\lambda u^2/2 - bu^4/4) \right], \quad (10.2.12)$$

где  $\mathcal{N}$  — нормировочный множитель. Ветвлению решения детерминистского уравнения с  $F(t) \equiv 0$  из  $u = 0$  при  $\lambda \leq 0$  в  $u_{\pm} = \pm \sqrt{\lambda/b}$  при  $\lambda > 0$  теперь соответствует изменение формы функции распределения (10.2.12): при  $\lambda < 0$  она имеет один пик, при  $\lambda > 0$  два пика. При интерпретации этого факта необходимо соблюдать осторожность, так как  $f_0$  — распределение вероятности: в действительности система может находиться в любой точке  $u$ , но с вероятностью, задаваемой распределением (10.2.12). Ясно, что при  $\lambda > 0$  вероятность достигает максимума при  $u_{\pm} = \pm \sqrt{\lambda/b}$ . Но в любой заданный момент система может находиться только в одном состоянии. Возникает важный вопрос. Предположим, что при  $t = 0$  мы приготовили (или измерили) систему в некотором начальном состоянии  $u = u_i$ . Какова вероятность при  $t > 0$  найти систему в другом, конечном состоянии  $u_f$ ? Ответ на этот вопрос позволяет дать зависящее от времени решение  $f(u, t)$  уравнения Фоккера—Планка с начальным условием  $f(u, 0) = \delta(u - u_i)$ . Если дрейфовые коэффициенты линейны по переменным, а коэффициенты диффузии постоянные, то такие решения могут быть найдены в явном виде даже для уравнений Фоккера—Планка в случае нескольких переменных. В конце этого раздела мы приведем результаты для уравнения Фоккера—Планка в случае одной переменной, а в разд. 10.4.1 сформулируем общую теорему. Если же дрейфовые

коэффициенты нелинейны, то даже в случае одной переменной уравнение Фоккера—Планка приходится решать на ЭВМ численными методами. Краткий перечень результатов численных расчетов приведен в разд. 10.3.

Еще одна важная проблема состоит в следующем. Предположим, что система первоначально приготовлена в состоянии  $u_+$ . Сколько времени потребуется системе, чтобы впервые перейти в состояние  $u_-$ ? Это частный случай так называемой задачи о времени первого выхода на границу, допускающей строгое аналитическое решение. Мы рассмотрим задачу о времени первого выхода на границу в разд. 11.6 при рассмотрении более общего уравнения Чепмена—Колмогорова для дискретных отображений. Обратимся к задаче о построении приближенных зависящих от времени решений уравнения (10.2.1) с помощью *линеаризации*. Достаточно рассмотреть случай  $\lambda > 0$  (случай  $\lambda < 0$  рассматривается аналогично). Используя подстановку

$$u = u_0 + \eta \quad (10.2.13)$$

и пренебрегая нелинейными членами, преобразуем уравнение (10.2.10) к виду

$$\dot{\tilde{f}} = - \frac{\partial}{\partial \eta} (-2\lambda \eta \tilde{f}) + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{f}, \quad (10.2.14)$$

где  $\tilde{f} = \tilde{f}(\eta) = f(u_0 + \eta)$ .

Выбирая начальное условие

$$\tilde{f}(t=0) = \delta(\eta - \eta_0), \quad (10.2.15)$$

получаем решение [1]

$$\tilde{f}(\eta, t) = [\pi a(t)]^{-1/2} \exp\{-[\eta - b(t)]^2/a(t)\}, \quad (10.2.16)$$

где

$$a(t) = \frac{Q}{2\lambda} [1 - \exp(-4\lambda t)], \quad (10.2.17)$$

$$b(t) = b(0) \exp(-2\lambda t). \quad (10.2.18)$$

### 10.3. Численное решение уравнения Фоккера — Планка для комплексного параметра порядка

В этом разделе мы рассмотрим ветвление не зависящего от времени решения для случая, когда вещественная часть комплексного собственного значения становится положительной (см. разд. 8.4, в особенности (8.4.9)). Подстановкой

$$u(t) \rightarrow u(t) e^{i\omega t}, \quad \omega \equiv \lambda'', \quad (10.3.1)$$

приводим уравнение для параметра порядка к виду

$$\dot{u} = \beta (\bar{n} - |u|^2) u + F(t), \quad (10.3.2)$$

где  $F(t)$  удовлетворяет условиям (10.2.2) и (10.2.3). Вводя полярные координаты

$$u = r e^{-i\varphi}, \quad (10.3.3)$$

мы можем получить следующее уравнение Фоккера—Планка:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(\bar{n} - r^2) r W] = Q \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (10.3.4)$$

(Для этого лучше всего записать уравнение Фоккера—Планка для вещественной и мнимой части параметра порядка  $u$  и преобразовать полученное уравнение к полярным координатам по формуле (10.3.3).)

Чтобы избавиться от лишних постоянных, введем новые переменные и постоянную, определив их следующим образом:

$$\hat{r} = \sqrt[4]{\beta/Q} r, \quad \hat{t} = \sqrt{\beta/Q} t, \quad a = \sqrt{\beta/Q} \bar{n}. \quad (10.3.5)$$

В результате такой подстановки уравнение Фоккера—Планка (10.3.4) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} [(a - \hat{r}^2) \hat{r} W] = \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r} \frac{\partial W}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}. \quad (10.3.6)$$

Функция

$$W(\hat{r}) = \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\hat{r}^4}{4} + a \frac{\hat{r}^2}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}} = \int_0^{\infty} \hat{r} \exp\left(-\frac{\hat{r}^4}{4} + a \frac{\hat{r}^2}{2}\right) d\hat{r} \quad (10.3.7)$$

( $\mathcal{N}$ —нормировочный коэффициент), как нетрудно проверить, есть стационарное решение уравнения (10.3.6).

Для того чтобы получить корреляционные функции, например, типа (10.2.8), необходимы нестационарные решения уравнения Фоккера—Планка. Поскольку в общем случае аналитические выражения, которые удовлетворяли бы уравнениям Фоккера—Планка, неизвестны, для получения решений приходится прибегать либо к приближенным (например, вариационным) методам, либо к довольно утомительным численным расчетам на ЭВМ. Последние позволяют получать решения с высокой точностью. Результаты некоторых из таких расчетов мы сейчас приведем.

Заметим, что уравнение (10.3.6) сводится к одномерному уравнению Шредингера. Действительно, полагая

$$\Psi(\hat{r}, \varphi, \hat{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{nm} \left[ \frac{1}{V\hat{r}} \exp\left(\frac{\hat{r}^4}{8} + a\frac{\hat{r}^2}{4}\right) \Psi_{nm}(\hat{r}) \right] \times \\ \times \exp(in\varphi - \lambda_{nm}\hat{t}), \quad (10.3.8)$$

получаем уравнение

$$\Psi_{nm}'' + [\lambda_{nm} - V_n(\hat{r})] \Psi_{nm} = 0 \quad \left( \Psi'' \equiv \frac{d^2}{d\hat{r}^2} \Psi \right) \quad (10.3.9)$$

для собственных функций  $\Psi_{nm} = \Psi_{-nm}$  и собственных значений  $\lambda_{nm} = \lambda_{-nm}$ . Численные значения  $\lambda$  приведены в табл. 10.3.1.

Таблица 10.3.1. Собственные значения и матричные элементы при различных значениях параметра накачки  $a$

$a$	$\lambda_{01}$	$M_1$	$\lambda_{02}$	$M_2$	$\lambda_{03}$	$M_3$	$\lambda_{04}$	$M_4$
10	19,1142	0,4614	19,1237	0,4885	34,5184	0,0212	35,3947	0,0226
8	14,6507	0,4423	14,9666	0,4622	23,6664	0,0492	28,3894	0,0344
7	12,0787	0,4085	13,0891	0,4569	20,0129	0,0895	26,4382	0,0354
6	9,4499	0,4061	11,5823	0,4459	18,0587	0,1132	25,6136	0,0287
5	7,2368	0,4717	10,6059	0,4095	17,3876	0,0980	25,8079	0,0179
4	5,6976	0,5925	10,2361	0,3344	17,6572	0,0634	26,9004	0,0086
3	4,8564	0,7246	10,4763	0,2387	18,6918	0,0330	28,7914	0,0033
2	4,6358	0,8284	11,2857	0,1553	20,3871	0,0151	31,3963	0,0011
0	5,6266	0,9370	14,3628	0,0601	25,4522	0,0028	38,4621	0,0001

Потенциал  $V_n(\hat{r})$  (рис. 10.3.1) определяется выражением

$$V_n(\hat{r}) = \frac{n^2}{\hat{r}^2} + \frac{\Psi_{00}'}{\Psi_{00}} = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\hat{r}^2} + a + \\ + \left(\frac{a^2}{4} - 2\right) \hat{r}^2 - \frac{a}{2} \hat{r}^4 + \frac{\hat{r}^6}{4}. \quad (10.3.10)$$

Нетрудно видеть (см. (10.3.7) и (10.3.8)), что

$$\Psi_{00} = \sqrt{\hat{N}r} \exp(-\hat{r}^4/8 + a\hat{r}^2/4) \quad (10.3.11)$$

— собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_{00} = 0$ . Первые пять собственных функций, вычисленных на ЭВМ, представлены на рис. 10.3.2. Зависимость собственных значений от параметра накачки  $a$  показана на рис. 10.3.3.

Из уравнения Шредингера (10.3.9) следует, что собственные функции  $\Psi_{nm}$  при различных  $m$  ортогональны. Если  $\Psi_{nm}$  нормированы на единицу, то

$$\int_0^{\infty} \Psi_{nm}(\hat{r}) \Psi_{nm'}(\hat{r}) d\hat{r} = \delta_{mm'}. \quad (10.3.12)$$

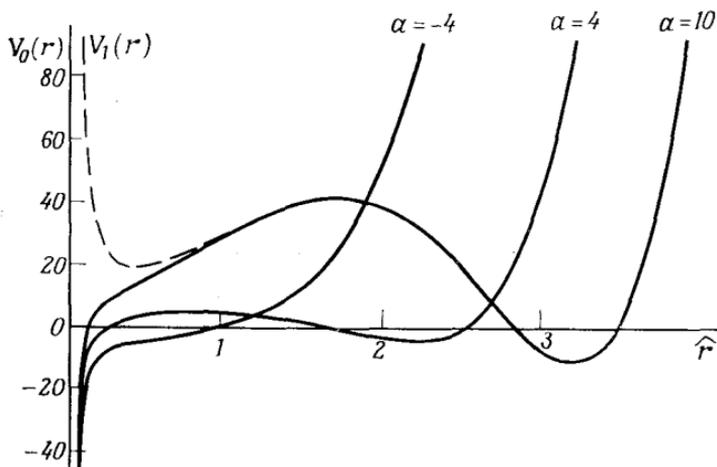


Рис. 10.3.1. Потенциал  $V_0(\hat{r})$  уравнения Шредингера (10.3.9) при трех значениях параметра накачки (сплошные кривые) и  $V_1(\hat{r})$  при  $\alpha = 10$  (штриховая кривая). [Из работы: Risken H., Vollmer H. D., Zs. Phys., 201, 323 (1967).]

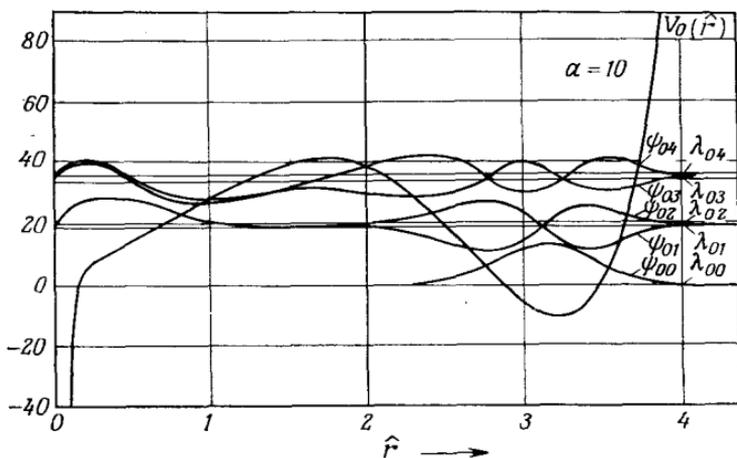


Рис. 10.3.2. Потенциал  $V_0$  уравнения Шредингера (10.3.9) и первые пять собственных значений и собственных функций при параметре накачки  $\alpha = 10$ . [Из работы: Risken H., Vollmer H. D., Zs. Phys., 201, 323 (1967).]

Соотношение полноты

$$\delta(\hat{r}-\hat{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{nm}(\hat{r}) \Psi_{nm}(\hat{r}') \quad (10.3.13)$$

приводит нас к функции Грина для уравнения Фоккера—Планка. Она получается из общего решения (10.3.8), если положить

$$A_{nm} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\hat{r}'}} \exp\left(\frac{\hat{r}'^4}{8} - a \frac{\hat{r}'^2}{4}\right) \Psi_{nm}(\hat{r}') \exp(-in\varphi'). \quad (10.3.14)$$

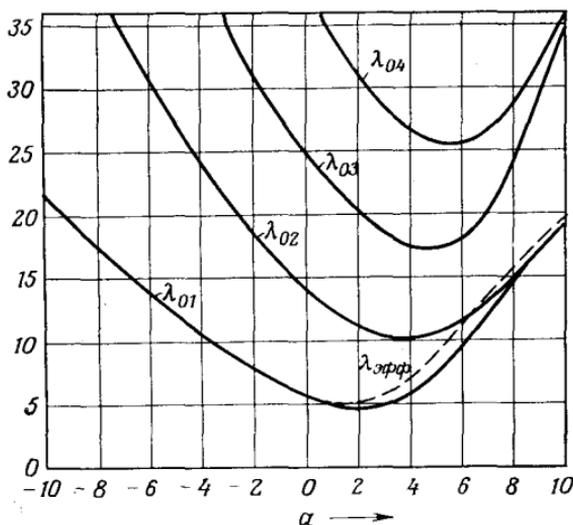


Рис. 10.3.3. Первые четыре ненулевых собственных значения  $\lambda_{0m}$  и эффективное собственное значение  $\lambda_{эфф}$  (10.3.24) как функции параметра накачки  $a$ . [Из работы: Risken H., Vollmer H. D., Zs. Phys., 201, 323 (1967).]

Таким образом, функция Грина имеет вид

$$G(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi'; \hat{\tau}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\hat{r}'}} \exp\left(-\frac{\hat{r}'^4}{8} + a \frac{\hat{r}'^2}{4} + \frac{\hat{r}'^4}{8} - a \frac{\hat{r}'^2}{4}\right) \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{nm}(\hat{r}) \Psi_{nm}(\hat{r}') \exp[in(\varphi - \varphi') - \lambda_{nm}\hat{\tau}]. \quad (10.3.15)$$

Для вычисления стационарных двухвременных корреляционных функций необходима функция совместного распределения вероятности  $F(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi'; \hat{\tau})$ . Произведение  $F(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi'; \hat{\tau}) \times \hat{r} d\hat{r} d\varphi' d\hat{r}' d\varphi'$  задает вероятность того, что  $\hat{r}(t + \hat{\tau})$  лежит в интервале  $\hat{r}, \hat{r} + d\hat{r}$ ;  $\varphi(t + \hat{\tau})$  — в интервале  $\varphi, \varphi + d\varphi$ ;  $\hat{r}'(t)$  — в интервале  $\hat{r}', \hat{r}' + d\hat{r}'$ ;  $\varphi'(t)$  — в интервале  $\varphi', \varphi' + d\varphi'$ . Функцию совместного распре-

деления вероятности можно выразить через функцию Грина  $G(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi', \hat{\tau})$  и  $W(\hat{r}, \varphi)$  (функция  $W$  описывает начальное распределение):

$$F(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi'; \hat{\tau}) = G(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi'; \hat{\tau}) W(\hat{r}', \varphi'), \quad \hat{\tau} > 0. \quad (10.3.16)$$

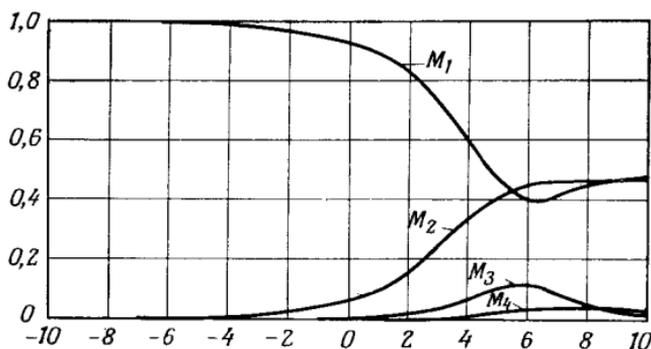


Рис. 10.3.4. Первые четыре матричных элемента  $M_m$  как функции параметра накачки. [Из работы: Risken H., Vollmer H. D., Zs., Phys., 201, 323 (1967).]

Корреляционная функция интенсивности флуктуаций определяется выражением

$$\begin{aligned} K(a, \hat{\tau}) &\equiv \langle (\hat{r}^2(\hat{t} + \hat{\tau}) - \langle \hat{r}^2 \rangle) (\hat{r}^2(\hat{t}) - \langle \hat{r}^2 \rangle) \rangle = \\ &= \iiint \hat{r} \hat{r}' \hat{r}'' \hat{r}''' d\varphi d\varphi' (\hat{r}^2 - \langle \hat{r}^2 \rangle) (\hat{r}'^2 - \langle \hat{r}'^2 \rangle) F(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi'; \hat{\tau}) = \\ &= K(a, 0) \sum_{m=1}^{\infty} M_m \exp(-\lambda_{0m} \hat{\tau}), \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

где

$$M_m = \frac{\mathcal{N}^c}{K(a, 0)} \left[ \int_0^{\infty} \sqrt{\hat{r}} \hat{r}^2 \exp\left(-\frac{\hat{r}^4}{8} + a \frac{\hat{r}^2}{4}\right) \Psi_{0m}(\hat{r}) d\hat{r} \right]^2. \quad (10.3.18)$$

Первые четыре матричных элемента  $M_m$  как функции параметра накачки  $a$  представлены на рис. 10.3.4, а их значения — в табл. 10.3.1. Коэффициент  $K(a, 0)$  определяется выражением

$$\langle \hat{r}^4 \rangle - \langle \hat{r}^2 \rangle^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \hat{r}^5 W(\hat{r}) d\hat{r} - \left[ 2\pi \int_0^{\infty} \hat{r}^3 W(\hat{r}) d\hat{r} \right]^2, \quad (10.3.19)$$

где величина  $W(\hat{r})$  задана формулой (10.3.7).

Нормировочный множитель  $\mathcal{N}$  и коэффициент  $K(a, 0)$  можно свести к интегралу ошибок

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-x^2) dx. \quad (10.3.20)$$

Пусть  $v = \hat{r}^2$  — новая переменная и по определению

$$I_n(a) = \int_0^\infty v^n \exp\left(-\frac{v^2}{4} + a \frac{v}{2}\right) dv. \quad (10.3.21)$$

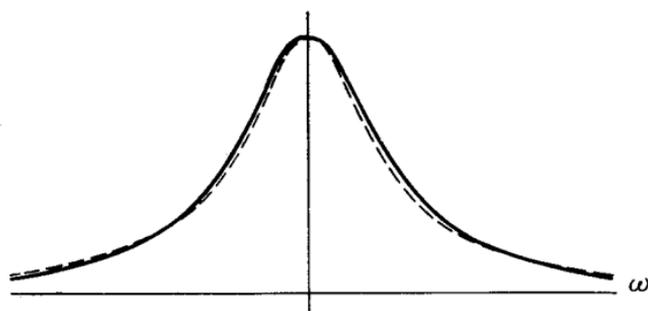


Рис. 10.3.5. Сравнение между точным спектром шума и эффективной лоренцевой линией при  $a = 5$ . [Из работы: Risken H., Vollmer H. D., Zs. Phys. 201, 323 (1967).]

Тогда выполняются следующие рекуррентные соотношения:

$$I_0(a) = \sqrt{\pi} \exp(a^2/4) [1 + \Phi(a/2)],$$

$$I_1(a) = 2 + aI_0(a), \quad (10.3.22)$$

$$I_n(a) = 2(n-1)I_{n-2}(a) + aI_{n-1}(a) \quad \text{при } n \geq 2.$$

Спектр  $S(a, \hat{\omega})$  интенсивности флуктуаций определяется преобразованием Фурье корреляционной функции (10.3.17):

$$S(a, \hat{\omega}) = K(a, 0) \sum_{m=1}^{\infty} M_m. \quad (10.3.23)$$

Хотя спектр  $S(a, \hat{\omega})$  — сумма лоренцевых линий,  $m$ -я из которых имеет ширину  $\lambda_{0m}$ , его можно аппроксимировать некоторой эффективной лоренцевой линией

$$S_{\text{эфф}}(a, \hat{\omega}) = K(a, 0) \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{\hat{\omega}^2 + \lambda_{\text{эфф}}^2}$$

$$\left( \text{где } \frac{1}{\lambda_{\text{эфф}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m}{\lambda_{0m}} \right), \quad (10.3.24)$$

ограничивающей ту же площадь и имеющей то же максимальное значение (рис. 10.3.5). Что же касается эффективной ширины  $\lambda_{\text{эфф}}$ ,

то при  $a \approx 5$  она примерно на 25 % больше, чем  $\lambda_{01}$ . Собственные значения и матричные элементы вычислялись, в частности, и для пороговой области —  $10 \leq a \leq 10$ . Аналогичные вычисления для корреляционной функции амплитуды приводят к величине

$$\begin{aligned} g(a, \hat{\tau}) &= \langle \hat{r}(\hat{t} + \hat{\tau}) \exp[i\varphi(\hat{t} + \hat{\tau})] \hat{r}(\hat{t}) \exp[-i\varphi(\hat{t})] \rangle = \\ &= \iiint \hat{r} \hat{r}' \hat{r}' d\varphi d\varphi' \hat{r}' \hat{r}' \times \\ &\times \exp(i\varphi - i\varphi') F(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \varphi'; \hat{\tau}) = \\ &= g(a, 0) \sum_{m=0}^{\infty} V_m \exp(-\lambda_{1m} \hat{\tau}), \end{aligned} \quad (10.3.25)$$

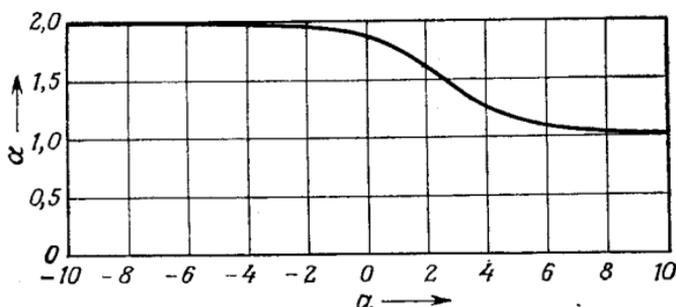


Рис. 10.3.6. Множитель  $\alpha(a) = \lambda_{10}$  ширины линии как функция параметра накачки. [Из работы: Risken H., Zs. Phys., 191, 302 (1966).]

где

$$V_m = \frac{N}{g(a, 0)} \left[ \int_0^{\infty} \sqrt{\hat{r}} \hat{r} \exp\left(-\frac{\hat{r}^4}{8} + a \frac{\hat{r}^2}{4}\right) \Psi_{1m}(\hat{r}) d\hat{r} \right]^2. \quad (10.3.26)$$

Величина  $g(a, 0)$  определяется по формуле

$$g(a, 0) = \langle \hat{r}^2 \rangle = 2\pi \int_0^{\infty} \hat{r}^3 W(\hat{r}) d\hat{r} \quad (10.3.27)$$

и может быть сведена к интегралу ошибок той же подстановкой, которая приводит к (10.3.21). Вычисление величины  $V_0$  показывает, что разность

$$1 - V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} V_m$$

составляет около 2% вблизи порогового значения и менее 2% — вдали от него. Следовательно, спектр имеет почти лоренцеву форму с шириной линии (в ненормированных единицах)

$$\Delta\omega = \sqrt{\beta Q} \lambda_{10} = \alpha(a) Q / \langle n \rangle, \quad \alpha = \lambda_{10}(a) \langle \hat{r}^2(a) \rangle. \quad (10.3.28)$$

Множитель  $\alpha$  как функция параметра накачки  $a$  представлен на рис. 10.3.6.

**Переходное решение.** Уравнение Фоккера—Планка (10.3.6) допускает переходное решение

$$W(\hat{r}, \varphi, \hat{t}) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} G(\hat{r}, \varphi; \hat{r}', \hat{\varphi}; \hat{t}) W(\hat{r}', \varphi', 0) \hat{r}' d\hat{r}' d\varphi', \quad (10.3.29)$$

где  $G$  — функция Грина (10.3.15),  $W(\hat{r}', \varphi', 0)$  — начальное распределение.

На этом мы закончим рассмотрение примера. Сформулируем теперь и наметим доказательство нескольких полезных общих теорем о свойствах решений уравнения Фоккера — Планка.

## 10.4. Некоторые общие теоремы о решениях уравнения Фоккера — Планка

### 10.4.1. Зависящие и не зависящие от времени решения уравнения Фоккера—Планка для случая, когда дрейфовые коэффициенты линейны по координатам, а коэффициенты диффузии постоянны

В некоторых классах задач вполне допустимо предположение о том, что дрейфовые коэффициенты могут быть линеаризованы относительно равновесных значений координат, а коэффициенты диффузии не зависят от координат. Если обозначить через  $q_j$  смещение из положения равновесия, то уравнение Фоккера—Планка будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} (q_j f) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}. \quad (10.4.1)$$

Объединим координаты  $q_1, \dots, q_N$  в вектор  $\mathbf{q}$ . Функция Грина уравнения (10.4.1) должна удовлетворять начальному условию

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{q}', 0) = \prod_j \delta(q_j - q'_j). \quad (10.4.2)$$

Решение уравнения (10.4.1) с начальным условием (10.4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} G(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &= [\pi^n \det \{\sigma(t)\}]^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{i,j} (\sigma^{-1})_{ij} \left[ q_i - \sum_k b_{ik}(t) q'_k \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ q_j - \sum_l b_{jl}(t) q'_l \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_{ij}), \\ \sigma_{ij}(t) &= \sum_{s,r} [\delta_{is} \delta_{jr} - b_{is}(t) b_{jr}(t)] \sigma_{sr}(\infty). \end{aligned} \quad (10.4.4)$$

Входящие в выражения (10.4.3), (10.4.4) функции  $b_{is}$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{b}_{is} = \sum_j C_{ij} b_{js} \quad (10.4.5)$$

с начальными условиями

$$b_{js}(0) = \delta_{js}. \quad (10.4.6)$$

Величина  $\sigma(\infty)$  определяется соотношением

$$C\sigma(\infty) + \sigma(\infty)C^T = -2Q, \quad (10.4.7)$$

где

$$C = (C_{ij}), \quad (10.4.8)$$

$$Q = (Q_{ij}),$$

верхний индекс  $T$  означает транспонированную матрицу. Стационарное решение имеет вид

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) = G(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \infty) = & [\pi^n \det \{\sigma(\infty)\}]^{-1/2} \times \\ & \times \exp \left[ - \sum_{i,j} \{(\sigma^{-1})_{ij}(\infty)\} q_i q_j \right]. \end{aligned} \quad (10.4.9)$$

#### 10.4.2. Точные стационарные решения уравнения Фоккера—Планка для систем, находящихся в детальном равновесии

В этом разделе мы ставим перед собой две задачи:

1) вывести необходимые и достаточные условия на дрейфовые коэффициенты и коэффициенты диффузии уравнения Фоккера—Планка, при которых выполняется принцип детального равновесия;

2) доказать, что в условиях детального равновесия стационарное решение уравнения Фоккера—Планка может быть найдено с помощью квадратур.

Принято считать, что принцип детального равновесия выполняется практически для всех систем, находящихся в тепловом равновесии, однако это отнюдь не означает, что принцип детального равновесия распространяется и на системы, далекие от теплового равновесия. Следовательно, в каждом отдельном случае вопрос о применимости принципа детального равновесия необходимо решать особо (например, привлекая для этого соображения симметрии). Анализ структуры уравнения Фоккера—Планка также позволяет строить заключения относительно применимости принципа детального равновесия.

а) *Детальное равновесие.* Обозначим совокупность переменных  $q_1, \dots, q_N$  через вектор  $\mathbf{q}$ , а совокупность тех же переменных при обращении времени — через вектор

$$\tilde{\mathbf{q}} = \{\varepsilon_1 q_1, \dots, \varepsilon_N q_N\}, \quad (10.4.10)$$

где коэффициенты  $\varepsilon_i$  равны  $-1$ , если координата  $q_i$  изменяет знак, и  $+1$ , если она остается неизменной, при обращении времени. Пусть  $\lambda$  означает совокупность параметров, найденных из эксперимента, а

$$\tilde{\lambda} = \{v_1\lambda_1, \dots, v_M\lambda_M\} \quad (10.4.11)$$

— вектор, получающийся из  $\lambda$  при обращении времени (коэффициенты  $v_i$  принимают значения  $-1$  или  $+1$  в зависимости от симметрии внешних параметров относительно обращения времени). Обозначим через

$$f_2(\mathbf{q}', \mathbf{q}; t_2, t_1) \quad (10.4.12)$$

совместную вероятность найти систему при  $t = t_1$  в точке с координатами  $\mathbf{q}$  и при  $t = t_2$  в точке с координатами  $\mathbf{q}'$ .

В дальнейшем нас интересует стационарная система, поэтому совместная вероятность зависит только от разности времен  $t_2 - t_1 = \tau$ , и (10.4.12) можно представить в виде

$$f_2(\mathbf{q}', \mathbf{q}; t_2, t_1) = W(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \tau). \quad (10.4.13)$$

Сформулируем принцип детального равновесия. Возможны два следующих варианта определения.

1) Принцип детального равновесия (в первом варианте) утверждает, что

$$W(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \tau, \lambda) = W(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}', \tau, \tilde{\lambda}). \quad (10.4.14)$$

Совместную вероятность можно записать в виде произведения стационарного распределения  $f(\mathbf{q})$  и условной вероятности  $P$ . Стационарность подчеркивается следующей записью:

$$P = P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda). \quad (10.4.15)$$

Равенство (10.4.14) переходит при замене  $W$  на произведение  $P$  и  $f$  в равенство

$$P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda) f(\mathbf{q}, \lambda) = P(\tilde{\mathbf{q}} | \tilde{\mathbf{q}}'; \tau, \tilde{\lambda}) f(\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\lambda}). \quad (10.4.16)$$

Здесь и далее мы предполагаем, что уравнение Фоккера—Планка имеет единственное стационарное решение. Нетрудно показать, что тогда

$$f(\mathbf{q}, \lambda) = f(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\lambda}). \quad (10.4.17)$$

Определим вероятность перехода за одну секунду как

$$w(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \lambda) = [(d/d\tau) P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda)]_{\tau=0}. \quad (10.4.18)$$

Взяв производную по  $\tau$  от обеих частей равенства (10.4.16) и положив  $\tau = 0$  (но  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}'$ ), мы приходим ко второму варианту принципа детального равновесия.

2) Принцип детального равновесия (во втором варианте) утверждает, что

$$w(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \lambda) f(\mathbf{q}, \lambda) = w(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\lambda}) f(\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\lambda}). \quad (10.4.19)$$

Равенство (10.4.19) имеет очень простой смысл. Его левая часть описывает полную скорость перехода из состояния  $\mathbf{q}$  в новое состояние  $\mathbf{q}'$ . Принцип детального равновесия требует, чтобы скорость этого перехода была равна скорости перехода в обратном направлении для  $\mathbf{q}'$  и  $\mathbf{q}$  при обратном движении (например, с обращенными импульсами).

б) Структура, которой должно обладать уравнение Фоккера—Планка для того, чтобы существовало стационарное решение. Выведем теперь необходимое и достаточное условия на вид уравнения Фоккера—Планка, при которых выполняется принцип детального равновесия в первом (или во втором) варианте. Условная вероятность  $P$  (представляющая собой не что иное, как функцию Грина) позволяет записать уравнение Фоккера—Планка (или обобщенное уравнение Фоккера—Планка с бесконечно большим числом производных) в виде уравнения

$$\frac{d}{dt} P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda) = L(\mathbf{q}', \lambda) P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda). \quad (10.4.20)$$

Если особо не оговорено, то  $L$  может быть не только дифференциальным, но и интегральным оператором. Решение уравнения (10.4.20) удовлетворяет начальному условию

$$P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; 0, \lambda) = \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}). \quad (10.4.21)$$

Формальное решение уравнения (10.4.20) с начальным условием (10.4.21) имеет вид

$$P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda) = \exp[L(\mathbf{q}', \lambda) \tau] \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}). \quad (10.4.22)$$

Подставляя (10.4.22) в уравнение (10.4.20) и полагая в обеих частях  $\tau = 0$ , получаем уравнение

$$\omega(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \lambda) = L(\mathbf{q}', \lambda) \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}). \quad (10.4.23)$$

Уравнением, обращенным назад (уравнением Колмогорова, обращенным назад), называется уравнение

$$(d/d\tau) P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda) = L^+(\mathbf{q}, \lambda) P(\mathbf{q}' | \mathbf{q}; \tau, \lambda), \quad (10.4.24)$$

где  $L^+$  — оператор, сопряженный с оператором  $L$ . Специализация общего уравнения (10.4.24) при  $\tau = 0$  приводит к уравнению

$$\omega(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \lambda) = L^+(\mathbf{q}, \lambda) \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}). \quad (10.4.25)$$

Переходя в уравнении (10.4.25) к координатам, соответствующим обращению времени, и подставляя  $\omega(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}', \lambda)$  из полученного уравнения и  $\omega(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \lambda)$  из уравнения (10.4.23) во второй вариант принципа детального равновесия (10.4.19), получаем

$$L(\mathbf{q}', \lambda) \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) f(\mathbf{q}, \lambda) = \{L^+(\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\lambda}) \delta(\tilde{\mathbf{q}}' - \tilde{\mathbf{q}})\} f(\mathbf{q}', \lambda) \quad (10.4.26)$$

(при выводе мы воспользовались равенством (10.4.17)).

Покажем теперь, как вывести из принципа детального равновесия (10.4.19) операторное тождество, которому должны удовлетворять операторы  $L$  и  $L^+$ . В левой части операторного соотношения (10.4.26) подставим вместо  $\mathbf{q}$  в  $f$  вектор  $\mathbf{q}'$ , а в правой части произведем замену

$$\delta(\tilde{\mathbf{q}}' - \tilde{\mathbf{q}}) = \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}). \quad (10.4.27)$$

В результате обеих подстановок соотношение (10.4.26) (после того, как мы перенесем все члены в левую часть) примет вид

$$L(\mathbf{q}', \lambda) f(\mathbf{q}', \lambda) \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) - f(\mathbf{q}', \lambda) L^+(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\lambda}) \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) = 0. \quad (10.4.28)$$

Если  $\mathbf{q}$  принимает все возможные значения, то  $\delta$ -функция становится произвольной, и равенство (10.4.28) эквивалентно следующему операторному тождеству:

$$L(\mathbf{q}', \lambda) f(\mathbf{q}', \lambda) - f(\mathbf{q}', \lambda) L^+(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\lambda}) = 0. \quad (10.4.29)$$

В (10.4.29)  $L$  действует как обычный оператор хорошо известным из квантовой механики образом:  $Lf$  означает  $\hat{L}(f \dots)$ , где многоточием указана произвольная функция. Итак, мы доказали, что операторное тождество (10.4.29) следует из принципа детального равновесия.

Докажем теперь, что если выполняется операторное тождество (10.4.29), то из него следует принцип детального равновесия (причем даже в первом, по-видимому, более сильном варианте). Прежде всего заметим, что, итерируя тождество (10.4.29), мы получаем новое операторное тождество

$$[L(\mathbf{q}', \lambda)]^n f(\mathbf{q}', \lambda) = f(\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\lambda}) [L^+(\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\lambda})]^n. \quad (10.4.30)$$

Умножим (10.4.30) на  $\tau^n (1/n!)$  и просуммируем по  $n$  от  $n = 0$  до  $n = \infty$ . Прделав все этапы, которые привели от (10.4.26) к (10.4.29), в обратной последовательности, мы приходим к равенству (10.4.16) и, следовательно, к равенству (10.4.14), выражающему принцип детального равновесия (в первом варианте). Воспользуемся теперь операторным тождеством (10.4.29) для того, чтобы выяснить, какой вид имеет уравнение Фоккера—Планка, если система удовлетворяет условию детального равновесия. Так как (10.4.29) — операторное тождество, коэффициент при каждой производной по  $q_i$  должен быть равен нулю. Хотя в принципе перебор всех коэффициентов возможен при производных сколь угодно высокого порядка, мы ограничимся обычным уравнением Фоккера—Планка с оператором  $L$  вида

$$L(\mathbf{q}) = - \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} K_i(\mathbf{q}, \lambda) + \frac{1}{2} \sum_{i, k} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} K_{ik}(\mathbf{q}, \lambda) \quad (10.4.31)$$

и сопряженным с  $L$  оператором

$$L^+(\mathbf{q}) = \sum_i K_i(\mathbf{q}, \lambda) \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \sum_{i, k} K_{ik}(\mathbf{q}, \lambda) \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}. \quad (10.4.32)$$

Коэффициенты диффузии мы всегда можем считать симметричными:

$$K_{ik} = K_{ki}. \quad (10.4.33)$$

Удобно ввести следующие новые коэффициенты:

а) необратимые дрейфовые коэффициенты

$$D_i(\mathbf{q}, \lambda) = \frac{1}{2} [K_i(\mathbf{q}, \lambda) + \varepsilon_i K_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\lambda})] \equiv D_i^r; \quad (10.4.34)$$

б) обратимые дрейфовые коэффициенты

$$J_i(\mathbf{q}, \lambda) = \frac{1}{2} [K_i(\mathbf{q}, \lambda) - \varepsilon_i K_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\lambda})] \equiv D_i^l. \quad (10.4.35)$$

Для приложений важно иметь в виду, что при обращении времени  $J_i$  преобразуется, как  $q_i$ . Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия на  $K_{ik}$ ,  $D_i$  и  $J_i$ , при которых выполняется принцип детального равновесия. Запишем стационарное решение уравнения Фоккера—Планка в виде

$$(\mathbf{q}, \lambda) = \mathcal{N} e^{-\Phi(\mathbf{q}, \tilde{\lambda})}, \quad (10.4.36)$$

где  $\mathcal{N}$  — нормировочный коэффициент, а  $\Phi$  можно интерпретировать как обобщенный термодинамический потенциал. Условия, о которых идет речь, сводятся к равенствам

$$K_{ik}(\mathbf{q}, \lambda) = \varepsilon_i \varepsilon_k K_{ik}(\mathbf{q}, \tilde{\lambda}), \quad (10.4.37)$$

$$D_i - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial K_{ik}}{\partial q_k} = -\frac{1}{2} \sum_k K_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k}, \quad (10.4.38)$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial J_i}{\partial q_i} - J_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (10.4.39)$$

Если для матрицы коэффициентов диффузии  $K_{ik}$  существует обратная матрица, то равенство (10.4.38) можно разрешить относительно градиента обобщенного термодинамического потенциала  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \sum_k (K^{-1})_{ik} \left( \sum_l \frac{\partial K_{kl}}{\partial q_l} - 2D_k \right) \equiv A_i. \quad (10.4.40)$$

Из (10.4.40) следует условие совместности (интегрируемости)

$$(\partial/\partial q_j) A_i = (\partial/\partial q_i) A_j. \quad (10.4.41)$$

Это — условие на дрейфовые коэффициенты и коэффициенты диффузии, входящие в правую часть равенства (10.4.40). Подставляя

$A_i$  и  $A_j$  из (10.4.40), запишем условие (10.4.39) подробно:

$$\sum_i \left[ \frac{\partial J_i}{\partial q_i} - J_i \sum_k (K^{-1})_{ik} \left( \sum_l \frac{\partial K_{kl}}{\partial q_l} - 2D_k \right) \right] = 0. \quad (10.4.42)$$

Итак, необходимые и достаточные условия, при которых выполняется принцип детального равновесия, в окончательном виде сводятся к равенствам (10.4.37), (10.4.41) и (10.4.42). Условие (10.4.38), или эквивалентное ему условие (10.4.40), если рассматривать его как дифференциальное уравнение относительно  $\Phi$ , позволяет находить обобщенный термодинамический потенциал с помощью квадратур, т. е. криволинейного интеграла. Тем самым стационарное решение уравнения Фоккера—Планка может быть полностью определено.

### 10.4.3. Пример

Рассмотрим следующие уравнения Ланжевена:

$$\dot{q}_1 = -\alpha q_1 + \omega q_2 + F_1(t), \quad (10.4.43)$$

$$\dot{q}_2 = -\alpha q_2 - \omega q_1 + F_2(t), \quad (10.4.44)$$

где флуктуирующие силы  $F_i$  порождают коэффициенты диффузии

$$Q_{ik} = \delta_{ik} \bar{Q} = \text{const}. \quad (10.4.45)$$

Как должны преобразовываться при обращении времени величины  $q_1$  и  $q_2$  для того, чтобы выполнялся принцип детального равновесия, мы узнаем, установив связь между уравнениями (10.4.43), (10.4.44) и уравнениями гармонического осциллятора

$$\dot{x} = \omega p, \quad (10.4.46)$$

$$\dot{p} = -\omega x \quad (10.4.47)$$

(при надлежащим образом выбранных масштабах по импульсу  $p$  и координате  $x$ ). Как известно из механики, при обращении времени координата и импульс преобразуются по формулам

$$\tilde{x} = x, \quad (10.4.48)$$

$$\tilde{p} = -p. \quad (10.4.49)$$

Сравнивая уравнения Ланжевена (10.4.43), (10.4.44) с уравнениями механики (10.4.48), (10.4.49), мы видим, что (по крайней мере при  $\alpha = 0$ ) можно попытаться отождествить  $q_1$  и  $q_2$  с  $x$  и  $p$ :

$$x = q_1, \quad (10.4.50)$$

$$p = q_2. \quad (10.4.51)$$

Сохраняя это соответствие между переменными и при  $\alpha \neq 0$ , мы

тем самым постулируем следующие трансформационные свойства  $q_1$  и  $q_2$ :

$$\bar{q}_1 = +q_1, \quad (10.4.52)$$

$$\tilde{q}_2 = -q_2, \quad (10.4.53)$$

т. е.  $\varepsilon_1 = +1$ ,  $\varepsilon_2 = -1$ .

Из определения (10.4.34) необратимого дрейфового коэффициента  $D_1$  следует, что

$$D_1 = \frac{1}{2} [-\alpha q_1 + \omega q_2 + (-\alpha q_1 - \omega q_2)], \quad (10.4.54)$$

откуда

$$D_1 = -\alpha q_1. \quad (10.4.55)$$

Аналогичным образом мы получаем

$$D_2 = \frac{1}{2} [-\alpha q_2 - \omega q_1 - (+\alpha q_2 - \omega q_1)], \quad (10.4.56)$$

откуда

$$D_2 = -\alpha q_2. \quad (10.4.57)$$

Вычислим теперь обратимые дрейфовые коэффициенты по формуле (10.4.35). Подставляя соответствующие величины, получаем

$$J_1 = \frac{1}{2} [-\alpha q_1 + \omega q_2 - (-\alpha q_1 - \omega q_2)] = +\omega q_2 \quad (10.4.58)$$

и аналогично

$$J_2 = \frac{1}{2} [-\alpha q_2 - \omega q_1 + (\alpha q_2 - \omega q_1)] = -\omega q_1. \quad (10.4.59)$$

Подставляя (10.4.55), (10.4.57) в (10.4.40), находим  $A_i$ :

$$A_i = -\frac{2\alpha}{Q} q_i, \quad i = 1, 2. \quad (10.4.60)$$

Соотношения (10.4.55), (10.4.57) — (10.4.59) позволяют проверить условие (10.4.42). Нетрудно видеть, что соотношения (10.4.60) соответствуют потенциалу

$$\Phi = \frac{\alpha}{Q} (q_1^2 + q_2^2). \quad (10.4.61)$$

Итак, мы построили стационарное решение уравнения Фоккера—Планка, соответствующего уравнениям Ланжевена (10.4.43), (10.4.44). (Упражнение см. в конце разд. 10.4.4.)

## 10.4.4. Важные частные случаи

Особо следует упомянуть два частных случая, необычайно важные для приложений.

1) При  $J_i = 0$  мы приходим к так называемым потенциальным условиям. В этом случае равенства (10.4.37), (10.4.39) выполняются тождественно, и необходимо удовлетворить лишь условиям (10.4.40), (10.4.41).

2) Во многих практических приложениях вместо вещественных переменных приходится иметь дело с комплексными переменными и уравнение Фоккера—Планка имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[ \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial u_j} C_j + \frac{\partial}{\partial u_j^*} \tilde{C}_j \right) + \sum_{k,j} Q_{kj} \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_j^*} \right] f, \quad (10.4.62)$$

где

$$Q_{kj} = \delta_{kj} Q_j, \quad Q_j = Q. \quad (10.4.63)$$

Приведенные выше условия сводятся к следующим:  $C_j$  и  $\tilde{C}_j$  должны иметь вид

$$C_j = \partial V / \partial u_j^* + I_j^{(1)}, \quad (10.4.64)$$

$$\tilde{C}_j = \partial V / \partial u_j + I_j^{(2)}. \quad (10.4.65)$$

Кроме того, должны выполняться условия

$$\sum_j \left( \frac{\partial V}{\partial u_j} I_j^{(1)} + \frac{\partial V}{\partial u_j^*} I_j^{(2)} \right) = 0, \quad (10.4.66)$$

$$\sum_j \left( \frac{\partial I_j^{(1)}}{\partial u_j} + \frac{\partial I_j^{(2)}}{\partial u_j^*} \right) = 0. \quad (10.4.67)$$

Тогда

$$f = \mathcal{N} e^{-\Phi}, \quad (10.4.68)$$

где

$$\Phi = 2B/Q \quad (10.4.69)$$

— стационарное решение уравнения Фоккера—Планка (10.4.62).

**Упражнение.** Найти стационарное решение уравнения Фоккера—Планка, соответствующего следующей системе уравнений Ланжевена:

$$\dot{q}_1 = -\alpha q_1 + \omega q_2 - \beta q_1 (q_1^2 + q_2^2) + F(t), \quad (10.4.70)$$

$$\dot{q}_2 = -\alpha q_2 - \omega q_1 - \beta q_2 (q_1^2 + q_2^2) + F_2(t), \quad (10.4.71)$$

где  $Q_{ik} = \delta_{ik} \bar{Q}$  не зависят от  $q_1, q_2$ .

## 10.5. Поведение нелинейных стохастических систем вблизи критических точек: краткие выводы

После подробного изложения математических методов, иногда сопряженных с необходимостью производить довольно громоздкие вычисления, уместно «перевести дух» и кратко сформулировать наиболее существенные выводы, к которым приводят отдельные этапы алгоритма. Отправным пунктом наших теоретических построений были нелинейные уравнения с флуктуирующими силами. На первом этапе мы предполагали, что эти силы пренебрежимо малы. Затем мы исследовали поведение систем, содержащих флуктуирующие силы, вблизи критических точек. Оказалось, что в достаточно малой окрестности критической точки поведение системы определяется небольшим числом параметров порядка и принцип подчинения позволяет исключить все «подчиненные» переменные. Включение флуктуирующих сил не нарушает процедуру исключения переменных, и мы приходим к уравнениям для параметров порядка с флуктуирующими силами. Такие уравнения для параметров порядка могут быть типа уравнений Ланжевена—Ито или Стратоновича. Эти уравнения, вообще говоря, нелинейны, и вблизи критических точек нелинейность не становится пренебрежимо малой. С другой стороны, часто бывает достаточно учесть лишь главный член нелинейности. Наиболее изящный подход к решению такого рода задач состоит в преобразовании уравнений для параметра порядка типа уравнения Ланжевена—Ито или Стратоновича в уравнение Фоккера—Планка. За последние десятилетия эта программа была реализована на различных системах. Выяснилось, что во многих случаях, когда возникают пространственные структуры, принцип детального равновесия на уровне уравнений для параметров порядка обусловлен соотношениями симметрии. В подобных случаях удастся оценить распределение вероятности, с которой реализуются отдельные конфигурации при определенных значениях параметров порядка  $u_i$ . В свою очередь это позволяет вычислить вероятность образования тех или иных пространственных структур и найти устойчивые конфигурации по минимуму  $V(\mathbf{u})$  в

$$f(\mathbf{u}) = \mathcal{N} e^{-V(\mathbf{u})},$$

где  $V(\mathbf{u}) (\equiv \Phi)$  — потенциал, задаваемый уравнением (10.4.40)

## ДИСКРЕТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С ШУМОМ

В этой главе мы рассмотрим дискретные отображения с шумом, о которых упоминалось во введении. В первых разделах мы покажем, каким образом результаты, полученные нами ранее для дифференциальных уравнений, обобщаются на дискретные отображения, а в разд. 7.7—7.9 — как обобщается принцип подчинения. Затем читатель познакомится с дискретным аналогом уравнения Фоккера—Планка (разд. 10.2—10.4), и в заключение мы введем интегралы по траекториям и покажем, каким образом с их помощью можно найти дискретный аналог решений временного уравнения Фоккера—Планка.

## 11.1. Уравнение Чепмена — Колмогорова

Рассмотрим  $n$ -мерное отображение ( $n$ -мерных) векторов состояния  $\mathbf{q}_k$ . Как мы увидим из дальнейшего, излагаемый нами метод целиком переносится на случай непрерывно распределенных переменных. Предполагается, что вектор  $\mathbf{q}_k$  удовлетворяет разностному уравнению

$$\mathbf{q}_{k+1} = f(\mathbf{q}_k) + G(\mathbf{q}_k) \boldsymbol{\eta}_k, \quad (11.1.1)$$

где  $f$  — нелинейная функция, а матрица  $G$  допускает разложение в сумму

$$G = A + M(\mathbf{q}_k). \quad (11.1.2)$$

Матрица  $A$  не зависит от переменных  $\mathbf{q}_k$  и вместе со случайным вектором  $\boldsymbol{\eta}_k$  описывает аддитивный шум. Матрица  $M$  — функция вектора состояния  $\mathbf{q}_k$  и вместе с  $\boldsymbol{\eta}_k$  порождает мультипликативный шум. Требуется вывести уравнение для плотности вероятности в момент времени  $k+1$ , задаваемой соотношением

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \langle \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{k+1}) \rangle. \quad (11.1.3)$$

Усреднение производится по случайным траекториям, которые описывают концы векторов  $\mathbf{q}_{k'}$  в результате систематического движения и флуктуаций  $\boldsymbol{\eta}_{k'}$ , т. е.

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \int d^n \boldsymbol{\xi} \int d^n \boldsymbol{\eta} \delta(\mathbf{q} - f(\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta}) W(\boldsymbol{\eta}) P(\boldsymbol{\xi}, k), \quad (11.1.4)$$

где  $W(\boldsymbol{\eta})$  — произвольная функция распределения амплитуды

шума  $\eta$  ( $W$  может зависеть от номера шага  $k$ , но для простоты мы не будем рассматривать эту зависимость).

Чтобы вычислить интегралы в (11.1.4), введем переменную  $\eta'$ :

$$\eta' = G(\xi) \eta. \quad (11.1.5)$$

Подстановка (11.1.5) переводит (11.1.4) в

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \int d^n \xi \int d^n \eta' D(\xi)^{-1} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{f}(\xi) - \eta') W(G^{-1}(\xi) \eta') P(\xi, k), \quad (11.1.6)$$

где  $D = \det G$ . Интегралы в (11.1.6) легко берутся, если воспользоваться свойствами  $\delta$ -функции, и мы приходим к окончательному результату — уравнению Чепмена—Колмогорова:

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \int d^n \xi D(\xi)^{-1} W(G^{-1}(\xi) [\mathbf{q} - \mathbf{f}(\xi)]) P(\xi, k). \quad (11.1.7)$$

## 11.2. Влияние границ. Одномерный пример

В приведенных выше рассуждениях мы неявно предполагали, что либо область значений, принимаемых компонентами вектора  $\mathbf{q}$ , простирается от  $-\infty$  до  $+\infty$ , либо функция распределения  $W$  сосредоточена на носителе, размеры которого малы по сравнению с длиной интервалов, на которых осуществляется отображение. Если эти неявные допущения не выполняются, то необходимо учитывать влияние границ. Решение этой проблемы не сопряжено с преодолением каких-либо принципиальных трудностей, но довольно громоздко, и мы ограничимся тем, что продемонстрируем его основные идеи в одномерном случае.

Начнем с уравнения

$$P(q, k+1) = \int_a^b d\xi \int d\eta \delta(q - f(\xi) - \eta) P(\xi, k) W(\eta), \quad (11.2.1)$$

где

$$a \leq q \leq b, \quad (11.2.2)$$

$$q = f(\xi) + \eta. \quad (11.2.3)$$

Из соотношений (11.2.2), (11.2.3) следует, что

$$a - f(\xi) \leq \eta \leq b - f(\xi). \quad (11.2.4)$$

При интегрировании по  $\eta$  в (11.2.1) необходимо учитывать граничные значения (11.2.4). Чтобы гарантировать сохранение вероятности, т. е.

$$\int_a^b P(q, k) dx = 1 \quad (11.2.5)$$

при всех  $k$ , функцию распределения  $W(\eta)$  необходимо нормировать

на интервале (11.2.4). Для этого мы должны ввести нормирующий множитель  $\mathcal{N}$ , зависящий от  $f(\xi)$ :

$$\int_{a-f(\xi)}^{b-f(\xi)} W(\eta) d\eta = \mathcal{N}^{-1}(f(\xi)). \quad (11.2.6)$$

Таким образом, мы вынуждены ввести в уравнение (11.2.1) вместо  $W(\eta)$  функцию

$$W(\eta; f(\xi)) = \mathcal{N}(f(\xi)) W(\eta). \quad (11.2.7)$$

Имея это в виду, мы можем преобразовать уравнение (11.2.1) к виду

$$P(q, k+1) = \int_a^b d\xi W(q-f(\xi)) \mathcal{N}(f(\xi)) P(\xi, k). \quad (11.2.8)$$

Это тоже уравнение Чепмена—Колмогорова.

### 11.3. Совместная вероятность и вероятность первого выхода на границу. Прямые и обратные уравнения

В дальнейшем мы будем использовать следующее уравнение Чепмена—Колмогорова:

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \int_{\mathcal{D}} d^n \xi K(\mathbf{q}, \xi) P(\xi, k). \quad (11.3.1)$$

Ядро  $K$  имеет вид

$$K(\mathbf{q}, \xi) = D^{-1}(\xi) \mathcal{N}(f(\xi)) W(G^{-1}[\mathbf{q}-f(\xi)]), \quad (11.3.2)$$

$D = \det G$ . Здесь  $W$  — распределение вероятности случайного вектора  $\eta$ ,  $\mathcal{N}$  — надлежащим образом выбранный нормировочный множитель, роль которого состоит в том, чтобы обеспечивать замкнутость области  $\mathcal{D}$  (флуктуации не должны выводить систему из  $\mathcal{D}$ ) и сохранение вероятности, т. е.

$$\int_{\mathcal{D}} d^n \mathbf{q} K(\mathbf{q}, \xi) = 1. \quad (11.3.3)$$

Для полного описания марковского процесса, лежащего в основе отображения (11.1.1), необходимо рассмотреть совместную вероятность

$$P_2(\mathbf{q}, k; \xi, k') \quad (k > k') \quad (11.3.4)$$

здесь «временной» индекс  $k$  связан с  $\mathbf{q}$ , а  $k'$  относится к  $\xi$ . Совместную вероятность  $P_2$  можно выразить через вероятность первого выхода на границу  $p(\mathbf{q}, k | \xi, k')$  и плотность вероятности  $P(\mathbf{q}, k)$  следующим образом:

$$P_2(\mathbf{q}, k; \xi, k') = p(\mathbf{q}, k | \xi, k') P(\xi, k'). \quad (11.3.5)$$

в случае стационарного марковского процесса ядро (11.3.2) не за-

висит явно от временного индекса  $k$ , что приводит к дополнительному соотношению

$$p(\mathbf{q}, k | \xi, k') = p(\mathbf{q} | \xi; k - k'). \quad (11.3.6)$$

Чтобы вывести уравнение, обращенное вперед, для вероятности перехода проинтегрируем (11.3.5) по  $\xi$ :

$$P(\mathbf{q}, k) = \int_{\mathcal{D}} d^n \xi p(\mathbf{q}, k | \xi, k') P(\xi, k'). \quad (11.3.7)$$

Уравнение, которое мы хотим вывести, следует из уравнений (11.3.7) и (11.3.1) (необходимо лишь иметь в виду, что начальное распределение может быть выбрано произвольно):

$$p(\mathbf{q}, k + 1 | \xi, k') = \int_{\mathcal{D}} K(\mathbf{q}, \mathbf{z}) p(\mathbf{z}, k | \xi, k') d^n \mathbf{z}. \quad (11.3.8)$$

Заметим также, что наряду с уравнением (11.3.7) выполняется уравнение

$$P(\mathbf{q}, k) = \int_{\mathcal{D}} d^n \xi p(\mathbf{q}, k | \xi, k' + 1) P(\xi, k' + 1). \quad (11.3.9)$$

Вычитая уравнение (11.3.9) из уравнения (11.3.7) и используя то, что  $P(\xi, k' + 1)$  удовлетворяет уравнению (11.3.1), мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} d^n \xi [p(\mathbf{q}, k | \xi, k') P(\xi, k') - \\ & - \int_{\mathcal{D}} d^n \mathbf{z} p(\mathbf{q}, k | \xi, k' + 1) K(\xi, \mathbf{z}) P(\mathbf{z}, k')] = 0. \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

Переобозначая переменные во втором члене ( $\mathbf{z} \leftrightarrow \xi$ ) и изменяя порядок интегрирования, получаем уравнение

$$p(\mathbf{q}, k | \xi, k') = \int_{\mathcal{D}} d^n \mathbf{z} p(\mathbf{q}, k | \mathbf{z}, k' + 1) K(\mathbf{z}, \xi). \quad (11.3.11)$$

И в этом случае мы использовали произвол в выборе начального распределения  $P(\xi, k')$ . Уравнение (11.3.11) есть уравнение, обращенное назад, для вероятности первого выхода на границу  $p$ . Уравнения (11.3.8) и (11.3.11) завершают описание процесса (11.1.1) в терминах распределений вероятности. Моменты, корреляционные функции и другие характеристики распределений могут быть найдены, как обычно.

## 11.4. Связь с интегральным уравнением Фредгольма

Введем для стационарного распределения специальное обозначение

$$P_s(\mathbf{q}) = P(\mathbf{q}, k) \quad (11.4.1)$$

и запишем в новых обозначениях уравнение (11.1.7):

$$P_s(\mathbf{q}) = \int d^n \xi K(\mathbf{q}, \xi) P_s(\xi), \quad (11.4.2)$$

где ядро определяется соотношением (см. (11.3.2))

$$K(\mathbf{q}, \xi) = D(\xi)^{-1} W(G^{-1}(\xi) [\mathbf{q} - \mathbf{f}(\xi)]). \quad (11.4.3)$$

Уравнение (11.4.2) есть не что иное, как однородное интегральное уравнение Фредгольма. При рассмотрении переходных состояний нам понадобятся соответствующие собственные функции. Их мы найдем, положив

$$P_\lambda(\mathbf{q}, k) = \lambda^{-k} P_\lambda(\mathbf{q}). \quad (11.4.4)$$

Подстановка (11.4.4) также преобразует уравнение (11.1.7) в интегральное уравнение Фредгольма

$$P_\lambda(\mathbf{q}) = \lambda \int d^n \xi K(\mathbf{q}, \xi) P_\lambda(\xi). \quad (11.4.5)$$

Решение, зависящее от  $k$ , можно представить в виде

$$P(\mathbf{q}, k) = \sum c_\lambda \lambda^{-k} P_\lambda(\mathbf{q}). \quad (11.4.6)$$

## 11.5. Решение в виде интеграла по траекториям

Начнем с уравнения (11.1.7), записанного в виде

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \int d^n \xi K(\mathbf{q}, \xi) P(\xi, k). \quad (11.5.1)$$

Итерируя его при  $k = 1, 2, \dots$ , получаем

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \int d^n q_k \dots d^n q_1 \times \\ \times K(\mathbf{q}, \mathbf{q}_k) K(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k-1}) \dots K(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) P(\mathbf{q}_1, 1). \quad (11.5.2)$$

Выражение в правой части (11.5.2) можно рассматривать как интеграл по траекториям. Для того чтобы (11.5.2) привести в согласие с традиционным определением интеграла по траекториям, будем считать  $W$  гауссовым распределением. Не ограничивая общности, предположим, что

$$W(\boldsymbol{\eta}) = \mathcal{N} \exp(-\bar{\boldsymbol{\eta}} A \boldsymbol{\eta}), \quad (11.5.3)$$

где  $A$  — диагональная матрица с элементами  $\alpha_j^2$  на главной диагонали. Вводя преобразование Фурье функции распределения (11.5.3), преобразуем (11.5.2) к виду

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \int Dq \int Ds \prod_{l=1}^k D(\mathbf{q}_l)^{-1} \exp[\dots], \quad (11.5.4)$$

где

$$Dq = \prod_{l=1}^k d^n q_l,$$

$$Ds = \prod_{l=1}^k [(1/(2\pi)) d^n s_l],$$

$$[\dots] = \sum_{i=1}^k i s_i \{G^{-1}(\mathbf{q}_i) [\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{f}(\mathbf{q}_i)]\} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{s}}_j^2, \quad (11.5.5)$$

$$\mathbf{q}_{k+1} \equiv \mathbf{q}, \quad s_j = (s_{j1}/\alpha_1, s_{j2}/\alpha_2, \dots).$$

## 11.6. Среднее время первого выхода на границу

Одно из наиболее важных применений уравнение (11.3.11), обращенное назад, находит при решении проблемы среднего времени первого выхода на границу. В этом разделе мы выведем неоднородное интегральное уравнение для условного времени первого выхода на границу, которое будет определено ниже. Будем считать процесс стационарным (см. (11.3.6)). Точная постановка задачи состоит в следующем. Пусть  $\mathcal{V}$  — замкнутая подобласть в  $\mathcal{D}$ , и пусть система первоначально сосредоточена в области  $\mathcal{V}$  с вероятностью 1, т. е.

$$\int_{\mathcal{V}} d^n q P(\mathbf{q}, 0) = 1. \quad (11.6.1)$$

Удобно ввести вероятность  $\tilde{P}(\mathbf{q}, k)$ :  $\tilde{P}(\mathbf{q}, k) d^n q$  есть вероятность того, что рассматриваемая система находится в элементе объема  $d^n q$  в точке  $\mathbf{q}$  и ранее не выходила на границу области  $\mathcal{V}$ . Пусть

$$\tilde{P}(k) = \int_{\mathcal{V}} d^n q \tilde{P}(\mathbf{q}, k), \quad (11.6.2)$$

где  $P(k)$  — вероятность того, что рассматриваемая система находится в области  $\mathcal{V}$  и до момента времени  $k$  не выходила на границу. Комбинируя соотношения (11.6.1) и (11.6.2), мы получаем вероятность того, что система выходит на границу области  $\mathcal{V}$  за время  $k$ . Эта вероятность равна  $1 - \tilde{P}(k)$ . Наконец, вероятность того, что система выходит на границу области  $\mathcal{V}$  между  $k$  и  $k + 1$  равна  $\tilde{P}(k) - \tilde{P}(k + 1)$ . Теперь уже не составляет особого труда доказать, что среднее время первого выхода на границу определяется выражением

$$\langle \tau \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) [\tilde{P}(k) - \tilde{P}(k+1)]. \quad (11.6.3)$$

Следует заметить, что среднее время первого выхода на границу зависит не только от  $\mathcal{V}$ , но и от начального распределения  $P(\mathbf{q}, 0)$  (см. (11.6.1)). Это обстоятельство наводит на мысль ввести условное время первого выхода на границу  $\langle \tau(\mathbf{q}) \rangle$ . Под этим мы будем понимать среднее время первого выхода на границу для системы, которая в момент времени  $k = 0$  с вероятностью 1 находилась в

точке  $\mathbf{q}$ . Ясно, что

$$\langle \tau(\xi) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) [\rho(\mathbf{q}|\xi, k) - \tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k+1)], \quad (11.6.4)$$

где  $\tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k)$  — соответствующая вероятность перехода. Связь между (11.6.3) и (11.6.4) определяется соотношением

$$\langle \tau \rangle = \int_{\mathcal{Y}^0} d^n \xi \langle \tau(\xi) \rangle P(\xi, 0). \quad (11.6.5)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться тем, что в области  $\mathcal{Y}^0$  вероятность первого выхода на границу  $\tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k)$  удовлетворяет уравнению (11.3.11), обращенному назад, что позволяет записать среднее время первого выхода на границу в виде

$$\begin{aligned} \langle \tau(\xi) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_{\mathcal{Y}^0} d^n q \int_{\mathcal{Y}^0} d^n z [\delta(\xi - z) - \\ - K(z, \xi)] \tilde{\rho}(\mathbf{q}|z, k). \end{aligned} \quad (11.6.6)$$

Уравнение (11.6.6) значительно упрощается, если подынтегральное выражение дополнить аддитивным членом

$$\pm \tilde{\rho}(\mathbf{q}|z, k+1) K(z, \xi). \quad (11.6.7)$$

Используя определение (11.6.4) условного среднего времени первого выхода на границу  $\langle \tau(\mathbf{q}) \rangle$  и применяя еще раз уравнение, обращенное назад, приходим к выражению

$$\langle \tau(\xi) \rangle = - \int_{\mathcal{Y}^0} d^n z K(z, \xi) \langle \tau(z) \rangle + R, \quad (11.6.8)$$

где

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_{\mathcal{Y}^0} d^n q [\tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k) - \tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k+2)]. \quad (11.6.9)$$

Нетрудно вычислить сумму, стоящую в правой части (11.6.9). Вводя в квадратные скобки аддитивный член

$$\pm \tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k+1), \quad (11.6.10)$$

используем очевидное соотношение

$$\int_{\mathcal{Y}^0} d^n q \sum_{k=0}^{\infty} [\tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k) - \tilde{\rho}(\mathbf{q}|\xi, k+1)] = 1. \quad (11.6.11)$$

Суммируя по  $k$  и заменяя  $\xi$  на  $\mathbf{q}$ , приходим к окончательному результату

$$\langle \tau(\mathbf{q}) \rangle = \int_{\mathcal{Y}^0} d^n z K(z, \mathbf{q}) \langle \tau(z) \rangle + 1. \quad (11.6.12)$$

Уравнение (11.6.12) и есть тот результат, который мы вознамерились получить в начале этого раздела: неоднородное интегральное уравнение для условного времени первого выхода на границу  $\langle \tau(\mathbf{q}) \rangle$  для процесса (11.1.1) с дискретным временем.

### 11.7. Линейная динамика и гауссов шум. Точное, зависящее от времени решение уравнения Чепмена — Колмогорова

Рассмотрим линейный вариант отображения (11.1.1), т. е. дискретное отображение

$$\dot{f}(\mathbf{q}_k) = A\mathbf{q}_k, \quad (11.7.1)$$

где  $A$  — матрица, зависящая только от внешних параметров. Предположим также, что  $G = 1$  и что плотность вероятности случайного вектора  $\eta$  гауссова типа:

$$W(\eta_k) = \left( \frac{\det \beta}{(2\pi)^n} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \bar{\eta}_k \beta \eta_k \right), \quad (11.7.2)$$

где  $\beta$  — симметричная положительная матрица. Заметим, что отображение (11.7.1) вместе с формулой (11.7.2) можно рассматривать как линейризацию отображения (11.1.1) относительно неподвижной точки. Кроме того, если флуктуации малы, то в случае конечной области  $\mathcal{D}$ , когда неподвижная точка расположена достаточно далеко от границ, влиянием границ можно пренебречь. Соотношения (11.7.1) и (11.7.2) позволяют представить ядро (11.3.2) в виде

$$K(\mathbf{q}, \xi) = \left( \frac{\det \beta}{(2\pi)^n} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\bar{\mathbf{q}} - \bar{\xi} A^T) \beta (\mathbf{q} - A\xi) \right]. \quad (11.7.3)$$

Уравнение (11.1.7) можно решить, положив

$$P(\xi, k) = \left( \frac{\det B}{(2\pi)^n} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) B (\xi - \xi_0) \right], \quad (11.7.4)$$

где  $\xi_0$  — центр распределения вероятности в момент времени  $k$ ,  $B$  — положительная симметричная матрица. Действительно, подставляя (11.7.4) и (11.7.3) в уравнение (11.7.7), получаем

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \frac{(\det B \det \beta)^{1/2}}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} d^n \xi \exp \{ \dots \}, \quad (11.7.5)$$

где

$$\{ \dots \} = \frac{1}{2} [(\bar{\mathbf{q}} - \bar{\xi} A^T) \beta (\mathbf{q} - A\xi) + (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) B (\xi - \xi_0)]. \quad (11.7.6)$$

Если сдвинуть  $\xi$  на постоянный вектор  $\mathbf{a}$

$$\xi = \xi' + \mathbf{a} \quad (11.7.7)$$

и выбрать

$$\mathbf{a} = (A^T \beta A + B)^{-1} (A^T \beta \mathbf{q} + B \xi_0), \quad (11.7.8)$$

то, интегрируя по  $\xi'$ , мы получим

$$P(\mathbf{q}, k+1) = \tilde{\mathcal{N}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{q}}_0) \bar{B} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \right]. \quad (11.7.9)$$

Полагая

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= B_{k+1}; & B &= B_k, \\ \tilde{\mathcal{N}} &= \mathcal{N}_{k+1}; & \mathcal{N}_k &= (2\pi)^{-[n:2]} (\det \beta)^{1/2}, \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}_{k+1}; & \xi_0 &= \mathbf{q}_k \end{aligned} \quad (11.7.10)$$

и сравнивая (11.7.4) с (11.7.9), мы сразу же устанавливаем рекуррентные соотношения

$$\mathbf{q}_{k+1} = A \mathbf{q}_k, \quad (11.7.11)$$

$$B_{k+1} = \beta - \beta A (A^T \beta A + B_k)^{-1} A^T \beta, \quad (11.7.12)$$

$$\mathcal{N}_{k+1} = \mathcal{N}_k \cdot \left( \frac{\det \beta}{\det (A^T \beta A + B_k)} \right)^{1/2}. \quad (11.7.13)$$

Стационарное решение следует из условия

$$B_{k+1} = B_k \quad (11.7.14)$$

и т. д. В случае диагональной матрицы  $\beta$ , удовлетворяющей условию

$$\beta_{ik} = \tilde{\beta} \delta_{ik}, \quad (11.7.15)$$

(11.7.14) можно решить, если потребовать дополнительно, чтобы выполнялось соотношение

$$A^T A = A A^T^{-1}. \quad (11.7.16)$$

В этом случае мы получаем

$$B = \tilde{\beta} (1 - A^T A). \quad (11.7.17)$$

Наконец, упомянем о том, что и в гауссовом случае система может терять устойчивость. Действительно, как только собственное значение  $a$  матрицы  $A$  в результате вариации внешнего параметра пересечет окружность  $|a| = 1$ , дисперсия распределения вероятности обратится в нуль, что свидетельствует о потере устойчивости системой.

## ПРИМЕР НЕРАЗРЕШИМОЙ ПРОБЛЕМЫ В ДИНАМИКЕ

Бросая ретроспективный взгляд на предыдущие главы этой книги, нетрудно заметить, что даже при самом, казалось бы, непосредственном обобщении проблемы (например, при переходе от периодического к квазипериодическому движению) решение новых задач наталкивается на качественно новые трудности. В этом разделе мы хотим показать, что в теории динамических систем существуют вопросы, кажущиеся на первый взгляд простыми но на которые даже в принципе невозможно ответить. Рассмотрим динамическую систему, состояния которой описываются векторами состояния  $\mathbf{q}$ . Под действием преобразований  $A, B, C, \dots$ , производимых в течение интервала времени  $\tau$ , система может переходить из любого состояния  $\mathbf{q}$  в какое-то другое состояние  $\mathbf{q}'$ :

$$\mathbf{q}' = A\mathbf{q}, \quad \text{или} \quad \mathbf{q}' = B\mathbf{q}, \quad \dots \quad (12.1)$$

Предположим, что существуют обратные операторы  $A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, \dots$ . Ясно, что операторы  $A, B, C, \dots$  образуют группу. Мы можем рассмотреть все слова (комбинации), составленные из  $A, A^{-1}, B, B^{-1}$  и т. д., например  $BA^{-1}C$ , и задать несколько слов  $W(A, B, C, \dots)$ , например  $BC = 1$ . Последнее означает, что последовательное выполнение преобразований  $C$  и  $B$  восстанавливает любое начальное состояние  $\mathbf{q}$  динамической системы. Зададим теперь следующий вопрос. Предположим, что заданы два слова  $W_1(A, B, \dots)$  и  $W_2(A, B, \dots)$ . Можно ли указать общий алгоритм, позволяющий за конечное число шагов решить, достигает ли система одного и того же конечного состояния  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$ , если начальное состояние  $\mathbf{q}_0$  в каждой из двух последовательностей преобразований было одним и тем же? Итак, мы спрашиваем, верно ли, что

$$\mathbf{q}_1 \equiv W_1(A, B, \dots) \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_2 \equiv W_2(A, B, \dots) \mathbf{q}_0, \quad (12.2)$$

т. е. верно ли, что

$$W_1(A, B, \dots) = W_2(A, B, \dots) \quad (12.3)$$

или что

$$W_1 W_2^{-1} = 1? \quad (12.4)$$

Вопрос, казалось бы, простой и четко поставлен. Тем не менее на

него в принципе нельзя дать ответ: не существует *общего* алгоритма, который бы за конечное число шагов позволил распознать тождественность двух слов. Наш пример заимствован из теории групп и представляет собой не что иное, как знаменитую проблему *тождества слов* в теории групп. Неразрешимость ее доказывается с помощью теоремы Гёделя (которую мы не будем приводить здесь). С другой стороны, если определяющие отношения  $W_j = 1$  выбрать специальным образом, то проблема тождества слов становится разрешимой.

Из приведенного примера ясно видно, сколь осторожным нужно быть при постановке задач. Особую осторожность необходимо соблюдать в тех случаях, когда требуется найти *общие* решения. Необходимо отчетливо сознавать, что некоторые проблемы допускают решение лишь *в ограниченном классе* уравнений или моделей. Вполне возможно, что такого рода осторожный подход необходим и к проблемам самоорганизации.

## НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ СИНЕРГЕТИКИ И ДРУГИХ НАУК

Во введении мы перечислили многочисленные явления, представляющие интерес для синергетики, но обычно изучаемые другими науками. Уже одно это позволяет утверждать, что между синергетикой и другими науками существуют определенные взаимосвязи. Но в нашей книге основное внимание уделено *фундаментальным понятиям и теоретическим методам* синергетики, поэтому и взаимосвязи между синергетикой и другими науками нам бы хотелось обсудить более глубоко и обстоятельно. Синергетика многогранна, и ученый, знакомящийся с синергетикой с позиций своей науки, по-видимому, прежде всего обращает внимание на те ее аспекты, которые наиболее близки основным идеям знакомой ему области знания. Опираясь на опыт многочисленных бесед и дискуссий с представителями различных наук, я попытаюсь сначала описать взаимосвязи, возникающие между синергетикой и различными науками, а затем указать основные различия.

Когда физики начинают знакомиться с синергетикой, у них чаще всего возникают ассоциации с *термодинамикой*. Действительно, одна из наиболее поразительных особенностей термодинамики состоит в ее *универсальности*. Законы, или начала, термодинамики выполняются безотносительно к тому, из каких «строительных кирпичиков» устроено вещество в различных агрегатных состояниях (газообразном, жидком или твердом). Своей универсальности термодинамика достигает, рассматривая *макроскопические величины* или «наблюдаемые»: объем, давление, температуру, энергию или энтропию. Ясно, что такого рода понятия применимы к большим ансамблям молекул, а не к отдельным молекулам. Близкий к термодинамическому подход избран *теорией информации*, которая стремится давать *несмещенные оценки* систем на основе ограниченной информации о них. Другие физики усматривают общие черты между синергетикой и *термодинамикой необратимых процессов*. По крайней мере в области физики, химии и биологии синергетика и термодинамика необратимых процессов занимаются изучением систем, находящихся далеко от теплового равновесия.

Химиков и физиков поражает тесная аналогия между различными макроскопическими переходами синергетических систем и *фазовыми переходами* систем, находящихся в состоянии теплового

равновесия: переходом жидкость — газ, возникновением ферромагнетизма или появлением сверхпроводимости. Синергетические системы могут претерпевать как непрерывные, так и дискретные переходы. У них могут наблюдаться такие хорошо известные в теории фазовых переходов свойства, как нарушение симметрии, критическое замедление и критические флуктуации.

Методы, позволяющие надлежащим образом учитывать и описывать флуктуации, которые составляют необходимую часть любой адекватной теории фазовых переходов, дает *статистическая механика*. Специалисты по статистической механике с восторгом отмечают, что типичные уравнения их науки (такие, как уравнение Ланжевена, уравнение Фоккера—Планка или уравнение для многочастичной функции распределения) занимают достойное место и в синергетике. *Инженерам-электрикам* знакомы другие аспекты синергетики — теория цепей, положительная и отрицательная обратная связь, нелинейные колебания. *Инженеры — механики и строители* усматривают в синергетике знакомые черты теории устойчивости под действием статических и динамических нагрузок, выпучивания оболочек при закритическом нагружении и нелинейных колебаний. Синергетика занимается изучением поведения систем при изменении управляющих параметров, поэтому те, кто работает в *кибернетике*, склонны рассматривать синергетику как часть *теории управления*.

С более общих позиций можно считать, что и *теория динамических систем*, и синергетика занимаются изучением временной эволюции систем. В частности, математики, работающие в *теории бифуркаций*, отмечают, что в центре внимания синергетики (по крайней мере в ее современном виде) находятся качественные изменения в динамическом (или статическом) поведении системы, в частности при бифуркациях. Наконец, синергетику можно рассматривать как часть общего *системного анализа*, поскольку и в синергетике, и в системном анализе основной интерес представляют *общие принципы*, лежащие в основе функционирования системы.

Совершенно очевидно, что каждая из перечисленных нами научных дисциплин (и многие другие) имеет достаточно веские основания считать синергетику своей составной частью. Но в то же время синергетика каждый раз привносит характерные особенности, понятия или методы, чуждые традиционно сложившимся научным направлениям. Так, *термодинамика* действует в полную силу только в том случае, если рассматриваемые системы находятся в тепловом равновесии, *термодинамика необратимых процессов* применима только к системам вблизи теплового равновесия. Синергетические системы в физике, химии и биологии находятся *далеко от теплового равновесия* и могут обнаруживать такие необычные особенности, как колебания. Хотя термодинамическое понятие *макроскопических переменных* используется и в синергетике, такие переменные, называемые *параметрами порядка*, имеют совершенно

иную природу, чем в термодинамике. Различие между синергетикой и термодинамикой проявляется наиболее отчетливо, если воспользоваться теоретико-информационным подходом к термодинамике, занимающимся подсчетом числа реализаций при заданных ограничениях (связях): теория информации и термодинамика изучают *статiku*, тогда как для синергетики основной интерес представляет *динамика*.

*Неравновесные фазовые переходы* синергетических систем отличаются гораздо большим разнообразием, чем фазовые переходы систем, находящихся в состоянии теплового равновесия, и включают в себя колебания, пространственные структуры и хаос. В то время как фазовые переходы в системах, находящихся в тепловом равновесии, обычно принято изучать в термодинамическом пределе, когда объем образца становится бесконечным, в большинстве неравновесных фазовых переходов решающее значение имеет геометрия образца, в зависимости от которой могут возникать совершенно различные структуры. Инженерам-электрикам хорошо знакомы понятия нелинейности и шума, играющие важную роль и в синергетике. Но синергетика нередко обращает внимание на то, чему при традиционном подходе не уделялось внимания. Синергетические процессы не только реализуются на самых различных субстратах (молекулах, нейронах и т. д.). Синергетика рассматривает и пространственно распределенные среды, а понятие фазового перехода никогда не встречалось в электротехнике. Аналогичные замечания можно сделать и в отношении строительной механики, где флуктуации, как правило, не принято принимать во внимание. И кибернетика, и синергетика придают первостепенное значение понятию *управления*, но при этом преследуют совершенно различные цели. Кибернетика занимается разработкой алгоритмов и методов, позволяющих управлять системой для того, чтобы та функционировала заранее заданным образом. В синергетике мы изменяем управляющие параметры более или менее непредсказуемым образом и изучаем *самоорганизацию* системы, т. е. различные состояния, в которые она переходит под воздействием «рычагов управления».

Теория динамических систем и ее особый (быть может, наиболее интересный) раздел—теория бифуркаций игнорируют флуктуации. Но, как показано в синергетике, флуктуации обретают решающее важное значение именно в тех точках, в которых происходят бифуркации (рассматриваемые теорией бифуркаций в «стерильном виде—в отсутствие флуктуаций»). Иначе говоря, области переходов могут быть адекватно описаны только в том случае, если учтены флуктуации. В отличие от традиционной теории бифуркаций (например, типа теории Ляпунова—Шмидта), позволяющей находить только ветвящиеся решения, в синергетике мы изучаем всю стохастическую динамику в подпространстве, натянутом на зависящие от времени управляющие параметры. Такой подход

необходим для адекватного учета флуктуаций. В то же время синергетический подход позволяет изучать устойчивость новых ветвей и временную эволюцию структур. Таким образом, синергетика самым непосредственным образом соприкасается с теорией фазовых переходов и позволяет вводить в теорию бифуркаций новые для той понятия критического замедления, критических флуктуаций, нарушения симметрии и восстановления нарушенной симметрии через флуктуации. Кроме того, синергетические методы позволяют охватить в рамках пространства, натянутого на параметры порядка, последовательности бифуркаций (например, последовательность удвоений периода) и затягивание частоты. В большинстве случаев для возникновения когерентного состояния необходимо существование нескольких компонентов (шума), поэтому синергетика занимается изучением систем, состоящих из *многих компонентов*, что в свою очередь требует стохастического подхода.

Хотя теория бифуркаций в ее современном виде исключает из рассмотрения флуктуации, некоторые из последних работ по теории бифуркации посвящены изучению окрестности ветвящегося решения. Специалисты по теории динамических систем и теории бифуркации заметят, что в нашей книге по ходу изложения мы выходим на передний край современных исследований и получаем новые результаты. Один из таких результатов (аналог теоремы Флоке) относится к виду решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Нам удалось изучить широкий класс таких уравнений с помощью вложения. Другой результат относится к бифуркации  $n$ -мерного тора в другие торы. Наконец, принцип подчинения включает в себя в качестве частных случаев ряд важных теорем, например теорему о центральном многообразии, теорему о медленном многообразии и различные алгоритмы адиабатического исключения переменных.

Что же касается системного анализа, то здесь синергетика идет нехоженым путем: сосредоточивая внимание на ситуациях, в которых макроскопическое поведение систем претерпевает качественные изменения, она позволяет высказывать общие утверждения, относящиеся к широким классам систем.

Наконец, нельзя не сделать замечание общего характера о связи синергетики и математики. Связь эта точно такого же рода, как связь между естественными науками и математикой. Так, квантовая механика не сводится к применению теории матриц или спектральной теории линейных операторов. Квантовая механика использует обе эти математические теории, но в то же время опирается на свою собственную, присущую только ей систему понятий. То же утверждение тем более справедливо в отношении синергетики. Такие синергетические понятия, как параметр порядка и подчинение, применимы к наукам, которые еще не подверглись математизации, и к наукам, которые никогда не будут математизированы, например к теории развития науки.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МОЗЕРА  
(ПРЕДЛОЖЕННОЕ МОЗЕРОМ)**

**1. Сходимость рядов Фурье**

**Лемма П.1.1.** Предположим, что вектор  $\mathbf{F}$  (6.3.27) (с подвекторами  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{G}$ ) — вещественнозначная аналитическая функция с периодом  $2\pi$  по  $\psi_1, \dots, \psi_n$ . Введем при заданном  $r > 0$  норму

$$\|\mathbf{F}\|_r = \sup \|\mathbf{F}\|, \quad \|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\| + \|\mathbf{G}\|, \quad (\text{П.1.1})$$

$$|\text{Im}\{\psi_\nu\}| < r$$

конечную при некоторых положительных  $r$ . Здесь  $\|\dots\|$  означает сумму абсолютных величин компонент вектора.

Коэффициенты Фурье любой вещественнозначной аналитической периодической функции убывают экспоненциально. Точнее, если

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j \exp[i(j, \psi)], \quad (\text{П.1.2})$$

то

$$\|\mathbf{F}_j\| \leq \|\mathbf{F}\|_r \exp(-\|j\|r). \quad (\text{П.1.3})$$

Для доказательства неравенства (П.1.3) запишем  $\mathbf{F}_j$  в виде

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int \mathbf{F} \exp[-i(j, \psi)] d^n \psi, \quad (\text{П.1.4})$$

где интегрирование производится по  $0 \leq \psi_\nu \leq 2\pi$ . Сдвигая область интегрирования в комплексную плоскость на  $\text{Im}\{\psi_\nu\} = -\rho \text{sign}\{j_\nu\}$ , получаем

$$\|\mathbf{F}_j\| \leq \|\mathbf{F}\|_\rho \exp(-\|j\|\rho), \quad (\text{П.1.5})$$

а поскольку это неравенство выполняется при любом  $\rho < r$ , мы приходим к неравенству (П.1.3).

В разд. 6.3 нами было введено нулевое пространство оператора  $L$ . Условимся в дальнейшем обозначать это нулевое пространство через  $\mathcal{N}$ . Пространство функций  $\mathbf{F}$  можно разложить в сумму нулевого пространства  $\mathcal{N}$  и остаточного пространства, которое мы будем считать вещественным и обозначим  $\mathcal{R}$ . Сформулируем теперь следующее утверждение.

**Лемма П.1.2.** Пусть функция  $\mathbf{F} \in \mathcal{R}$  и аналитична в  $|\text{Im}\{\psi_\nu\}| < r$ . Тогда единственное решение уравнения

$$L\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{U} \in \mathcal{R} \quad (\text{П.1.6})$$

аналитично в той же области. Если  $0 < \rho < r < 1$ , то для  $\mathbf{U}$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{U}\|_{\rho} \leq \frac{c}{K(r-\rho)^{\sigma}} \|\mathbf{F}\|_r, \quad (\text{П.1.7})$$

где  $c$  зависит только от  $n, m, \tau$ , а  $\sigma = \tau + 1$ .

*Доказательство.* Для наших целей достаточно доказать лемму только для  $\sigma = \tau + n, n \geq 2$ .

Поскольку оператор  $L$  действует покомпонентно на различные члены ряда Фурье, достаточно проверить сходимость ряда Фурье, получающегося при действии  $L$ . Записав

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j \exp[i(\mathbf{j}, \Psi)], \quad \mathbf{U} = \sum_j \mathbf{U}_j \exp[i(\mathbf{j}, \Psi)], \quad (\text{П.1.8})$$

получим из

$$L\mathbf{U} = \sum [i(\omega, \mathbf{j}) \mathbf{U}_j + L\mathbf{U}_j] \exp[i(\mathbf{j}, \Psi)] \quad (\text{П.1.9})$$

условие

$$[i(\omega, \mathbf{j}) + L] \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_j. \quad (\text{П.1.10})$$

Так как оператор  $L$  приводится к диагональному виду, мы находим  $\mathbf{U}_j$ , деля различные собственные функции оператора  $L$ , принадлежащие остаточному подпространству  $\mathcal{R}$ , на ненулевые собственные значения. Имея в виду (6.2.6) и используя неравенство (П.1.3), мы получаем для  $\mathbf{U}_j$  оценку

$$\|\mathbf{U}_j\| \leq \frac{c'}{K} (\|\mathbf{j}\|^r + 1) \|\mathbf{F}_j\| \leq \frac{c'}{K} (\|\mathbf{j}\|^r + 1) \exp(-\|\mathbf{j}\|r) \|\mathbf{F}\|_r. \quad (\text{П.1.11})$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{U}\|_{\rho} \leq \|\mathbf{F}\|_r \frac{c'}{K} \sum_j (\|\mathbf{j}\|^r + 1) \exp[\|\mathbf{j}\|(r-\rho)]. \quad (\text{П.1.12})$$

Последняя сумма всегда сходится. Получить ее оценку можно следующим образом. При  $\delta = r - \rho \leq 1$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \delta^{r+n} \sum_j (\|\mathbf{j}\|^r + 1) \exp(-\|\mathbf{j}\|\delta) &\leq \\ &\leq \sum_j (\delta^r \|\mathbf{j}\|^r + 1) \exp(-\|\mathbf{j}\|\delta) \delta^n. \end{aligned} \quad (\text{П.1.13})$$

Правая часть неравенства (П.1.13) ограничена постоянной, не зависящей от  $\delta$ , так как ее можно мажорировать интегралом

$$\int \dots \int (\|\mathbf{x}\|^r + 1) \exp(-\|\mathbf{x}\|\delta) d^n \mathbf{x}, \quad (\text{П.1.14})$$

который она аппроксимирует. Таким образом, мы получаем из (П.1.12) неравенство

$$\|\mathbf{U}\|_{\rho} \leq \|\mathbf{F}\|_r \frac{c}{K} \frac{1}{(r-\rho)^{\tau+n}}, \quad (\text{П.1.15})$$

которое и доказывает лемму П.1.2 при  $\sigma = \tau + n$ .

Результаты, полученные в приложении 1 и разд. 6.3, позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Теорема П.1.1.** Для контрчленов  $\Delta(\varepsilon)$ ,  $\mathbf{d}(\varepsilon)$ ,  $D(\varepsilon)$  и для  $\mathbf{u}(\psi, \varepsilon)$ ,  $\mathbf{v}(\psi, \varepsilon)$ ,  $\mathbf{V}(\psi, \varepsilon)$  существуют единственные формальные разложения по степеням  $\varepsilon$ . Эти разложения формально удовлетворяют условиям теоремы 6.2.1 и нормированы так, что все коэффициенты разложений  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{V}$  принадлежат  $\mathcal{R}$ . Доказательство очевидно из приведенных выше соображений. Сравнение коэффициентов приводит на каждом этапе к уравнениям типа (6.3.3), которые по лемме П.1.2 допускают единственное решение с нормировкой  $\mathbf{U} \in \mathcal{R}$ . Более трудному доказательству сходимости разложения в ряд по  $\varepsilon$  посвящен разд. П.3. Однако в разд. П.3 нам не удастся обеспечить необходимую нормировку, поэтому сейчас мы обратимся к изучению совокупности *всех* формальных решений.

## 2. Наиболее общее преобразование, необходимое для доказательства теоремы 6.2.1

Выясним теперь, что означают произвольные постоянные (нулевое пространство). Для того чтобы найти наиболее общее решение  $\mathbf{U} \in \mathcal{R}$  и нулевое пространство  $\mathcal{N}$ , о которых упоминалось в разд. 6.3 в связи с доказательством теоремы Мозера, обозначим через

$$\mathcal{U} : \begin{cases} \varphi = \psi + \mathbf{u}(\psi, \varepsilon), \\ \xi = \chi + \mathbf{v}(\psi, \chi, \varepsilon) \end{cases} \quad (\text{П.2.1})$$

единственное частное решение, удовлетворяющее нормировке, при которой все векторы, лежащие в нулевом пространстве, обращаются в нуль, т. е.  $\mathbf{U} \in \mathcal{R}$ . Это решение позволяет преобразовать дифференциальные уравнения (6.3.1) и (6.3.2) в систему уравнений, линеаризация которой имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega, \\ \dot{\chi} &= \Lambda \chi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2.2})$$

Ясно, что любое преобразование

$$\hat{\mathcal{U}} : \begin{cases} \psi' = \psi + \varepsilon \hat{\mathbf{u}}(\psi, \varepsilon), \\ \chi' = \chi + \varepsilon [\hat{\mathbf{v}}(\psi, \varepsilon) + \hat{\mathbf{V}}(\psi, \varepsilon) \chi], \end{cases} \quad (\text{П.2.3})$$

переводящее систему уравнений (П.2.2) в себя, порождает еще одно преобразование

$$\mathcal{U} \circ \hat{\mathcal{U}}. \quad (\text{П.2.4})$$

Через  $\mathcal{U} \circ \hat{\mathcal{U}}$  в (П.2.4) мы обозначим композицию преобразований  $\mathcal{U}$  и  $\hat{\mathcal{U}}$ . Для этого нам понадобились преобразования  $\hat{\mathcal{U}}$ , переводящие систему уравнений (П.2.2) в себя. Производя над системой (П.2.2) преобразование (П.2.3) и требуя, чтобы дифференциальные уравнения в новых переменных  $\psi', \chi'$  имели такой же вид, как в старых  $\psi, \chi$ , получаем (оператор  $L$  имеет вид (6.3.29) с  $L_1 = L_2 = L_3$ )

$$L\hat{U} = 0, \quad (\text{П.2.5})$$

где

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{v} \end{pmatrix}. \quad (\text{П.2.6})$$

Уравнение (П.2.5) означает, что вектор  $\hat{U}$  лежит в нулевом пространстве, а преобразования, переводящие уравнения (П.2.2) в себя, имеют вид

$$\mathcal{E} \in \mathfrak{C}: \begin{cases} \psi' = \psi + \varepsilon a, \\ \chi' = \chi + \varepsilon (b + B\chi), \end{cases} \quad (\text{П.2.7})$$

где  $a, b, B$  не зависят от  $\psi$  и удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda b = 0, \quad (\text{П.2.8})$$

$$\Lambda B = B\Lambda. \quad (\text{П.2.9})$$

Обозначим группу преобразований, переводящих уравнения (П.2.2) в себя, через  $\mathfrak{C}$ . Итак,  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{U} \circ \mathcal{E}$  преобразования, необходимые для доказательства теоремы 6.2.1. Более того, если контрчлены  $\Delta, d, D$  заданы, то  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{U} \circ \mathcal{E}$  — наиболее общие решения. Можно показать, что они однозначно определены. Так как доказательство этого утверждения носит более технический характер, мы не будем воспроизводить его здесь, а вместо этого сформулируем соответствующую лемму.

**Лемма П.2.1.** Пусть  $\mathcal{U}$  в (А.2.1) — единственное (нормированное) формальное преобразование и

$$N = \begin{pmatrix} \Delta \\ d \\ D \end{pmatrix} \quad (\text{П.2.10})$$

— соответствующий вектор контрчленов, найденных в теореме П.1.1. Таким образом,  $\mathcal{U}$  преобразует систему уравнений (6.3.1) и (6.3.2) в систему уравнений (6.1.26) и (6.1.27), линеаризация которой имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega, \\ \dot{\chi} &= \Lambda\chi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2.11})$$

Пусть  $\tilde{\mathcal{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}$  (при  $\varepsilon = 0$  преобразование  $\tilde{\mathcal{U}}$  вырождается в тождественное, а  $\tilde{\mathbf{N}} = 0$ ) — любое другое формальное разложение, обладающее тем же свойством. Тогда найдется преобразование  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$  (см. (П.2.7)), такое, что  $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \circ \mathcal{C}$  и  $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}$ .

### 3. Сходимость ряда

а) Для доказательства полученного в предыдущем разделе разложения в ряд, казалось бы, естественно воспользоваться методом мажорант Коши, однако из-за малых знаменателей этот метод неприменим к интересующему нас ряду. Грубая оценка приводит к мажорантам вида  $\sum (n!)^{2\nu} \varepsilon^n$ , которые расходятся при любых  $|\varepsilon| > 0$ . Действительно, по лемме П.1.2 решение линеаризованного уравнения приводит к умножению коэффициентов на множитель  $(r - r')^{-\nu}$ , где  $|\operatorname{Im} \{\varphi\}| < r$ ,  $|\operatorname{Im} \{\varphi'\}| < r'$  — комплексные области, в которых выполняются оценки итераций. Выбирая последовательность областей  $|\operatorname{Im} \{\varphi\}| < r_n$  с

$$r_n = \frac{r_0}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{r_0}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (\text{П.3.1})$$

мы получаем множитель  $(r_{n-1} - r_n)^{-\nu} = O(n^{2\nu})$ , переходя от определения коэффициентов при  $\varepsilon^{n-1}$  к определению коэффициентов при  $\varepsilon^n$ . В результате мы приходим к мажорирующему ряду  $\sum (n!)^{2\nu} \varepsilon^n$ , который, как нетрудно видеть, расходится. Тем не менее сходимость интересующего нас ряда удастся доказать с помощью другой конструкции, дающей ускоренную сходимость (см. разд. 5.2 и 5.3). Основная идея метода принадлежит Колмогорову. Доказательство Мозера представляет собой дальнейшее обобщение и уточнение этой идеи.

Опишем метод последовательных приближений, в котором на каждом этапе приходится решать линейные уравнения из леммы П.1.2, но точность возрастает в степень  $3/2$ , что позволяет заменить предыдущий мажорирующий ряд заведомо сходящимся мажорирующим рядом

$$\sum (n!)^{2\nu} \varepsilon^{(3/2)^n}.$$

Мы опишем метод последовательных приближений со всеми оценками и в следующем разделе покажем, как с помощью полученного результата доказать сходимость ряда, найденного в разд. 6.3.

б) Рассмотрим снова семейство дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \mathbf{a} + \mathbf{f}, \\ \dot{\xi} &= \mathbf{b} + B\xi + \mathbf{g}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.3.2})$$

где  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  — свободный вектор, а  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$

и матрица  $B$  (размером  $m \times m$ ) ограничены условиями

$$\Lambda \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad B\Lambda = \Lambda B. \quad (\text{П.3.3})$$

Вектор  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  и собственные значения  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$  матрицы  $\Lambda$  удовлетворяют неравенству

$$|(\mathbf{j}, \omega) + \sum k_\mu \Lambda_\mu| \geq (\|\mathbf{j}\|^r + 1)^{-1} K, \quad 0 < K \leq 1, \quad (\text{П.3.4})$$

которое выполняется при всех целых числах, любых векторах  $\mathbf{j}$  и всех наборах чисел  $k_\mu$ , удовлетворяющих условиям

$$|\sum k_\mu| \leq 1, \quad \sum |k_\mu| \leq 2, \quad (\text{П.3.5})$$

за исключением конечного числа векторов  $\mathbf{j}$  и наборов  $\mathbf{k}$ , таких, что  $(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = (0, \mathbf{k})$ , для которых левая часть неравенства (П.3.4) обращается в нуль. Число  $\tau$  мы выбираем так, чтобы оно было больше  $n-1$ . Это обеспечивает существование соответствующих  $\omega$  и  $\Lambda$ .

В дальнейшем нам понадобится рассматривать  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $B$  как переменные (удовлетворяющие линейным ограничениям (П.3.3)). Будем считать, что эти переменные так же, как и переменные  $\varphi$ ,  $\xi$ , принимают значения, лежащие в комплексной области

$$\mathcal{D}: \begin{cases} |\operatorname{Im} \{\varphi\}| < r \leq 1, & |\xi| < s, \\ \frac{|\mathbf{a} - \omega|}{r} + \frac{|\mathbf{b}|}{s} + |B - \Lambda| < q. \end{cases} \quad (\text{П.3.6})$$

Относительно фиксированной постоянной  $c_0 \geq 1$  потребуем, чтобы выполнялось неравенство  $q \geq c_0 K$ . В дальнейшем все постоянные, зависящие только от  $n$ ,  $m$ ,  $c_0$ ,  $\tau$ , будем обозначать только через  $c_1, c_2, c_3, \dots$ .

**Теорема П.3.1.** Существуют такие постоянные  $\delta_0$  и  $c$ , зависящие только от  $c_0, n, m, \tau$ , что если  $\delta < \delta_0$  и в  $\mathcal{D}$  выполняется неравенство

$$\frac{|\mathbf{f}|}{r} + \frac{|\mathbf{g}|}{s} < r^\sigma K \delta \quad \text{в } \mathcal{D}, \quad \sigma = \tau + 1, \quad (\text{П.3.7})$$

то найдется преобразование

$$\mathcal{U}: \begin{cases} \varphi = \psi + \mathbf{u}(\psi), \\ \xi = \chi + \mathbf{v}(\psi, \chi) \end{cases} \quad (\text{П.3.8})$$

(вектор  $\mathbf{v}$  линеен по  $\chi$ ) и  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}$ ,  $B = \hat{B}$  из  $\mathcal{D}$ , такие, что при  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}$ ,  $B = \hat{B}$  под действием  $\mathcal{U}$  система (П.3.2) перейдет в систему уравнений

$$\left. \begin{cases} \dot{\varphi} = \omega + O(\chi), \\ \dot{\chi} = \Lambda \chi + O(\chi^2), \end{cases} \right\} \text{при } |\operatorname{Im} \{\psi\}| < r/2, \quad |\chi| < s. \quad (\text{П.3.9})$$

В частности,

$$\varphi = \omega t + \psi + \mathbf{u}(\omega t + \psi), \quad \xi = \mathbf{v}(\omega t, 0) \quad (\text{П.3.10})$$

— квазипериодическое решение системы дифференциальных уравнений (П.3.2) с характеристическими числами  $\omega_1, \dots, \omega_n, \Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ .

Кроме того,  $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{B}$  принадлежат области

$$\frac{|\hat{\mathbf{a}} - \omega|}{r} + \frac{|\hat{\mathbf{b}}|}{s} + |\hat{B} - \Lambda| < cr^\sigma K \delta < q, \quad (\text{П.3.11})$$

а  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  — вещественнозначные и аналитические функции, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{|\mathbf{u}|}{r} + \frac{|\mathbf{v}|}{s} < c\delta \quad \text{при} \quad |\text{Im}\{\psi\}| < r/2, \quad |\chi| < s. \quad (\text{П.3.12})$$

в) Остальная часть этого раздела посвящена доказательству теоремы П.3.1. Прежде всего заметим, что, заменяя  $\xi$  на  $s\xi$ , мы можем, не ограничивая общности, считать  $s = 1$ . Аналогичным образом, заменяя  $t$  на  $\lambda t$  и умножая  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, B, \omega, \Lambda, \mathbf{f}, \mathbf{g}$  на  $\lambda^{-1}$ , мы можем нормировать  $K$  на 1, т. е. получить  $K = 1$ . Однако  $r$  нельзя обратить в 1, растягивая вектор  $\varphi$ , так как угловые переменные  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  были выбраны с периодом  $2\pi$ . Итак, не ограничивая общности, полагаем  $s = K = 1, r \leq 1, q \geq c_0 \geq 1$ .

В дальнейшем мы будем строить преобразование  $\mathcal{U}$  как бесконечное произведение преобразований

$$\mathcal{U} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\mathcal{U}_0 \circ \mathcal{U}_1 \circ \dots \circ \mathcal{U}_\nu), \quad (\text{П.3.13})$$

где каждое преобразование  $\mathcal{U}_\nu$  уточняет предыдущее приближение. Обозначим символически исходное семейство дифференциальных уравнений через  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ , систему, в которую  $\mathcal{F}_0$  переходит под действием преобразования координат  $\mathcal{U}_0$ , через  $\mathcal{F}_1$ , и т. д. Следовательно,  $\mathcal{F}_\nu$  под действием преобразования  $\mathcal{U}_\nu$  переходит в  $\mathcal{F}_{\nu+1}$ , а  $\mathcal{F}_0$  под действием преобразования  $\mathcal{U}_0 \circ \mathcal{U}_1 \circ \dots \circ \mathcal{U}_\nu$  — в  $\mathcal{F}_{\nu+1}$ .

Для дальнейшего важно точно описать область  $\mathcal{D}_\nu$  определения преобразования и дифференциальных уравнений. В частности, подчеркнем, что преобразование  $\mathcal{U}_\nu$  включает в себя замену параметров  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, B$ , а также преобразование переменных  $\varphi, \xi$ . Чтобы убедиться в этом, отбросим у преобразования  $\mathcal{U}_\nu$  индекс  $\nu$  и запишем  $\mathcal{U}_\nu$  в следующем виде:

$$\mathcal{U}_\nu: \begin{cases} \varphi = \psi + \mathbf{u}(\psi, \chi, \alpha, \beta, \tilde{B}), \\ \xi = \chi + \mathbf{v}(\psi, \chi, \alpha, \beta, \tilde{B}), \\ \mathbf{a} = \alpha + \mathbf{w}_1(\alpha, \beta, \tilde{B}), \\ \mathbf{b} = \beta + \mathbf{w}_2(\alpha, \beta, \tilde{B}), \\ B = \tilde{B} + \omega_3(\alpha, \beta, \tilde{B}). \end{cases} \quad (\text{П.3.14})$$

Переменные  $\varphi, \chi, \alpha, \beta, \tilde{B}$  удовлетворяют неравенствам

$$\mathcal{D}_{v+1} : |\operatorname{Im}\{\psi\}| < r_{v+1}, \quad |\chi| < s_{v+1},$$

$$\frac{|\alpha - \omega|}{r_{v+1}} + \frac{|\beta|}{s_{v+1}} + |B - \Lambda| < q_{v+1}, \quad (\text{П.3.15})$$

где последовательности  $r_v, s_v, q_v$  выбраны так, что  $\mathcal{U}_v$  отображает  $\mathcal{D}_{v+1}$  в

$$\mathcal{D}_v : |\operatorname{Im}\{\psi\}| < r_v, \quad |\xi| < s_v, \quad \frac{|\alpha - \omega|}{r_v} + \frac{|b|}{s_v} + |\tilde{B} - \Lambda| < q_v \quad (\text{П.3.16})$$

и семейство дифференциальных уравнений  $\mathcal{F}_v$  отображается в семейство  $\mathcal{F}_{v+1}$ , аппроксимирующее систему уравнений (П.3.9) более точно, чем  $\mathcal{F}_v$ . Отбросим индекс  $v$  и запишем  $\mathcal{F}_v$  в виде системы дифференциальных уравнений (П.3.2), а  $\mathcal{F}_{v+1}$  — в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \alpha + \Phi, \\ \dot{\chi} &= \beta + \tilde{B}\chi + \Xi \end{aligned} \right\} \text{в } \mathcal{D}_{v+1} \quad (\text{П.3.17})$$

(векторы  $\Phi$  и  $\Xi$  должны быть малыми).

Для того чтобы получить оценки, которые мы докажем по индукции, введем последовательности  $r_v, s_v, \delta_v, q_v$  следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} r_v &= \frac{r_0}{2} (1 + 2^{-v}), \quad 0 < r_0 < 1, \\ \delta_v &= c^v \delta_{v-1}^{3/2}, \\ s_v &= c^{-v^2/2} \delta_v, \\ q_{v+1} &= r_v^\sigma \delta_v \quad \text{при } v = 0, 1, 2, \dots; \quad q_0 = q \geq c_0 \geq 1, \end{aligned} \right. \quad (\text{П.3.18})$$

где постоянная  $c \geq 1$  пока неизвестна. Заметим, что  $\delta_v$  быстро стремится к нулю, если  $\delta_0 < c^{-\sigma} < 1$ , и, аналогично,  $s_v, q_v$  стремятся к нулю, если  $r_v \rightarrow r_0/2$ .

Предположим, что  $\mathcal{F}_v$  удовлетворяет условию

$$\frac{|f|}{r_v} + \frac{|g|}{s_v} < r_v^\sigma \delta_v = q_{v+1} \quad \text{в } \mathcal{D}_v \quad (\text{П.3.19})$$

и построим  $\mathcal{U}_v$  так, чтобы оно отображало  $\mathcal{D}_{v+1}$  в  $\mathcal{D}_v$  и чтобы для преобразованной системы  $\mathcal{F}_{v+1}$  выполнялась соответствующая оценка невязки:

$$\frac{|\Phi|}{r_{v+1}} + \frac{|\Xi|}{s_{v+1}} < r_{v+1}^\sigma \delta_{v+1} = q_{v+2} \quad \text{в } \mathcal{D}_{v+1}. \quad (\text{П.3.20})$$

Для отображения  $\mathcal{U}_v$  (см. (П.3.14)) справедливы оценки

$$\left. \begin{aligned} \frac{|u|}{r_v} + \frac{|v|}{s_v} &< c_4^{v+1} \delta_v, \\ \frac{|w_1|}{r_v} + \frac{|w_2|}{s_v} + |w_3| &< c_4 q_{v+1} \end{aligned} \right\} \text{ в } \mathcal{D}_{v+1}, \quad (\text{П.3.21})$$

где  $c_4 > 1$  — надлежащим образом выбранная постоянная.

г) Если утверждение (П.3.14) и оценки (П.3.20), (П.3.21) доказаны, то теорема П.3.1 следует из них, в чем мы сейчас убедимся. Так как  $\mathcal{U}_v$  отображает  $\mathcal{D}_{v+1}$  в  $\mathcal{D}_v$ , композиция отображений  $\tilde{\mathcal{U}}_v = \mathcal{U}_0 \circ U_1 \circ \dots \circ \mathcal{U}_v$  переводит  $\mathcal{D}_{v+1}$  в  $\mathcal{D}_0$ , и в  $\mathcal{D}_0$  справедлива оценка

$$\frac{|\tilde{u}|}{r_0} + \frac{|\tilde{v}|}{s_0} < c_4 (\delta_0 + c_4 \delta_1 + \dots + c_4^v \delta_v) < 2c_4 \delta_0. \quad (\text{П.3.22})$$

Отсюда следует, что  $\tilde{\mathcal{U}}_v$  сходится в области

$$\mathcal{D}_\infty : |\operatorname{Im} \{\psi\}| < \frac{r_0}{2}, \quad \chi = 0, \quad \alpha = \beta = 0, \quad \tilde{B} = 0 \quad (\text{П.3.23})$$

равномерно и преобразование  $\tilde{\mathcal{U}}_\infty$  аналитично в  $\mathcal{D}_\infty$ . Кроме того, из неравенства (П.3.22) при  $\chi = 0$  и подходящим образом выбранной постоянной  $c > 2c_4$  следует неравенство (П.3.12). Так как  $\tilde{u}$  не зависит от  $\chi$ , а  $\tilde{v}$  зависит от  $\chi$  линейно, остается оценить производную  $\partial \tilde{v} / \partial \chi$ . Член  $1 + \partial \tilde{v} / \partial \chi$  есть произведение соответствующих членов  $1 + \partial v_v / \partial \chi$  и, поскольку  $|\partial v_v / \partial \chi| < c_4 \delta_4$ , приводит к оценке

$$\left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \chi} \right| \leq \prod_{\mu=0}^v (1 - c_4 \delta_\mu) - 1 \leq 2c_4 \delta_0. \quad (\text{П.3.24})$$

Тем самым неравенство (П.3.12) доказано при надлежаще выбранной постоянной  $c$ .

Преобразованная система  $\mathcal{F}_\infty$  обладает тем свойством, что  $\Phi_\infty$ ,  $\Xi_\infty$ ,  $\partial \Xi_\infty / \partial \chi$  обращаются в нуль (при  $\chi = 0$ ) в  $\mathcal{D}_\infty$ . Это утверждение следует из оценки (П.3.20) того, что  $q_{v+2} \rightarrow 0$ , а также того, что производную  $\partial \Xi / \partial \chi$  при  $\chi = 0$  можно мажорировать величиной  $\sup |\Xi| s_{v+1}^{-1}$ , которая также стремится к нулю при  $v \rightarrow \infty$ . Итак, в  $\mathcal{F}_\infty$  справедливы оценки

$$\Phi_\infty = O(\chi), \quad \Xi_\infty = O(\chi^2), \quad (\text{П.3.25})$$

что и требовалось доказать.

Наконец,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\tilde{B}$  мы получим как образы трех последних компонент в (П.3.14) под действием преобразования  $\tilde{\mathcal{U}}_\infty$ . Так как  $\mathcal{U}_v$  переводит  $\mathcal{D}_{v+1}$  в  $\mathcal{D}_v$ , области

$$U_0 \circ U_1 \circ \dots \circ U_v \mathcal{D}_{v+1} = \mathcal{D}_0^{(v)} \quad (\text{П.3.26})$$

образуют последовательность областей, вложенных в  $\mathcal{D}_0$ :

$$\mathcal{D}_0^{(v+1)} \subset \mathcal{D}_0^{(v)} \subset \mathcal{D}_0. \quad (\text{П.3.27})$$

В частности, множества значений трех последних компонент  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tilde{B}$  в (П.3.14) стремятся к нулю, как следует из (П.3.15) и того, что  $q_{v+1} \rightarrow 0$ . Отсюда в свою очередь мы заключаем, что соответствующие  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $B \in \mathcal{D}_0$  стягиваются при  $v \rightarrow \infty$  в точку  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $B \in \mathcal{D}_0$ . Это утверждение следует непосредственно из (П.3.21) и сходимости ряда  $\sum_{v=0}^{\infty} q_{v+1}$ :

$$\frac{|\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}|}{r_0} + |\hat{\mathbf{b}}| + |\hat{B} - \Lambda| < c_4 \sum_{v=0}^{\infty} q_{v+1} < 2c_4 q_1 < q_0, \quad (\text{П.3.28})$$

если величина  $\delta_0$  выбрана достаточно малой для того, чтобы неравенство (П.3.11) выполнялось при  $c > 2c_4$ . Как нетрудно проверить, условия, при которых выполняется оценка (П.3.20), следуют из условий теоремы при  $v = 0$ .

д) Итак, доказательство теоремы П.3.1 сводится к построению отображения  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_v$  и доказательству оценок (П.3.20), (П.3.21). Выполним то и другое.

Для того усечем  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$ , оставив их линейные части:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \mathbf{f}(\varphi, \mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, B), \\ \mathbf{g}_0 &= \mathbf{g}(\varphi, \mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, B) + \mathbf{g}_{\xi}(\varphi, \mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, B) \xi \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П.3.29})$$

и разложим  $(\mathbf{f}_0, \mathbf{g}_0)$  на компоненты, лежащие в  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{R}$  (как в приложении 2). Обозначим эти компоненты через  $(\mathbf{f}_{\mathcal{N}}, \mathbf{g}_{\mathcal{N}})$  и  $(\mathbf{f}_{\mathcal{R}}, \mathbf{g}_{\mathcal{R}})$ . Тогда преобразование  $\mathcal{U}_v$  мы найдем, решив линейризованные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{\psi} \omega &= \mathbf{f}_{\mathcal{R}}(\psi, \mathbf{a}, \mathbf{b}, B), \\ \mathbf{v}_{\psi} \omega + \mathbf{v}_{\chi} \Lambda \chi - \Lambda \mathbf{v} &= \mathbf{g}_{\mathcal{R}}(\psi, \mathbf{a}, \mathbf{b}, B). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.3.30})$$

Как показано в предыдущем разделе, эти уравнения допускают единственное решение, если потребовать, чтобы

$$\mathbf{U} \in \mathcal{R}. \quad (\text{П.3.31})$$

Тем самым векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  определены. Преобразование  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $B$  неявно задано уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \mathbf{a} + \mathbf{f}_{\mathcal{N}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, B), \\ \beta + \tilde{B} \chi &= \mathbf{b} + B \chi + \mathbf{g}_{\mathcal{N}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, B; \chi). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.3.32})$$

е) Соотношения (П.3.30) — (П.3.32) определяют преобразование  $\mathcal{U}$ . Проверим, что оно отображает  $\mathcal{D}_{v+1} = \mathcal{D}_+$  в  $\mathcal{D}_v = \mathcal{D}$ . (Для упрощения обозначений условимся записывать величины с индексом  $v + 1$ , например,  $s_{v+1}$ , как  $s_+$ , а у величин с индексом  $v$  опу-

скать индекс.) Для этого нам необходимо убедиться, что уравнения (П.3.32) могут быть разрешены при

$$\frac{|\alpha - \omega|}{r_+} + \frac{|\beta|}{s_+} + |\tilde{B} - \Lambda| < q_+, \quad (\text{П.3.33})$$

и что решения  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $B$  попадают в  $\mathcal{D}$  (см. (П.3.6)). Поясним ход рассуждений для первого уравнения, пренебрегая зависимостью от  $\mathbf{b}$  и  $B$ .

Воспользуемся теоремой о неявной функции. В  $|\mathbf{a} - \omega| < r q$ , как следует из (П.3.19), (П.3.18), выполняются неравенства

$$|\mathbf{f}_{\mathcal{N}}| \leq |\mathbf{f}_0| \leq r q_+. \quad (\text{П.3.34})$$

Используя оценку Коши в сфере  $|\mathbf{a} - \omega| < R = c_4 q_+ < r q / 2$ , получаем

$$\left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{f}_{\mathcal{N}} \right| \leq c_2 \frac{r q_+}{R} = \frac{c_2}{c_4} < \frac{1}{2}, \quad (\text{П.3.35})$$

где  $c_2 \geq 1$ . Последнее неравенство в (П.3.35) достигается, если  $c_4 > 2c_2$ . В сфере  $|\mathbf{a} - \omega| < R$ , как следует из (П.3.33), выполняется также неравенство

$$|\mathbf{f}_{\mathcal{N}}| + |\alpha - \omega| < r q_+ + r_+ q_+ < \frac{2}{c_4} R < \frac{1}{2} R \quad (\text{П.3.36})$$

при  $c_4 > 4$ , и стандартная теорема о неявной функции гарантирует существование и единственность аналитического решения  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\alpha)$  уравнения

$$\mathbf{a} - \omega = \alpha - \omega - \mathbf{f}_{\mathcal{N}}. \quad (\text{П.3.37})$$

Рассуждая аналогичным образом, мы проверяем существование и единственность решения  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $B$  уравнения (П.3.32) в

$$\frac{|\alpha - \omega|}{r} + \frac{|\mathbf{b}|}{s} + |B - \Lambda| < c_4 q_+ < \frac{1}{2} q. \quad (\text{П.3.38})$$

Тем самым, если постоянная  $\delta_0$  выбрана достаточно малой, доказана вторая половина оценки (П.3.21).

Для того чтобы оценить решение  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  уравнений (П.3.30), воспользуемся леммой П.1.2. Для единственного решения уравнений (П.3.30) справедлива оценка

$$\frac{|\mathbf{u}|}{r} + \frac{|\mathbf{v}|}{s} < c_3 (r - r_+)^{-\sigma} r^\sigma \delta \leq c_4^{v+1} \delta \quad \text{в } \mathcal{D}_{v+1}, \quad (\text{П.3.39})$$

так как неравенство

$$r - r_+ \geq 2^{-v-1} r \quad (\text{П.3.40})$$

следует из (П.3.18). Мы можем выбрать ту же постоянную  $c_4$ , что и прежде, увеличивая в случае необходимости предыдущую постоянную. Тем самым доказана первая половина оценки (П.3.21) (вторая половина была доказана выше).

ж) Найдя отображение  $\mathcal{U}$ , мы преобразуем  $\mathcal{F}_v$  (или (П.3.2)) к новым переменным и оцениваем остаточные члены  $\Phi$ ,  $\Xi$ , чтобы завершить доказательство по индукции.

Введем следующие обозначения:

$$F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Xi \end{pmatrix}, \quad (\text{П.3.41})$$

где  $F$  зависит от аргументов  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $B$  (но не от  $\varphi$  и  $\xi!$ ), а  $\hat{\Phi}$  от  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tilde{B}$ . Для преобразования  $\mathcal{U}$  введем вектор

$$W = \begin{pmatrix} \psi + u \\ \chi + v \end{pmatrix} \quad (\text{П.3.42})$$

и его матрицу Якоби

$$W' = \begin{pmatrix} 1 + u_\psi & 0 \\ v_\psi & 1 + v_\psi \end{pmatrix}. \quad (\text{П.3.43})$$

Наконец, пусть

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b + B_\chi \end{pmatrix}, \quad A_+ = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta + \tilde{B}_\chi \end{pmatrix}. \quad (\text{П.3.44})$$

В этих обозначениях уравнения преобразования, означающие, что переводит (П.3.2) в (П.3.17), запишутся в виде

$$W'(A_+ + \hat{\Phi}) = (A + F) \circ \mathcal{U}, \quad (\text{П.3.45})$$

где в левой части произведение понимается в смысле матричного умножения, а в правой знак  $\circ$  означает композицию, т. е. замену  $\varphi$  на  $\varphi + u$ , и т. д.

Сравним эти уравнения с теми, которые мы получили, обратив уравнения (П.3.30), (П.3.32). В принятых нами обозначениях последние можно было бы записать в виде

$$W'A_\infty - A_\infty \circ \mathcal{U} = F_{\mathcal{R}}, \quad (\text{П.3.46})$$

$$A_+ - A_- = F_{\mathcal{N}},$$

где

$$A_\infty = \begin{pmatrix} \omega \\ \Lambda_\chi \end{pmatrix} \quad (\text{П.3.47})$$

(смысл  $F_{\mathcal{R}}$ ,  $F_{\mathcal{N}}$  очевиден). Суммируя уравнения (П.3.46), получаем соотношение

$$W'A_\infty - A_\infty \circ \mathcal{U} + (A_+ - A_-) = F_0, \quad (\text{П.3.48})$$

где

$$F_0 = \begin{pmatrix} f \\ g + g_\xi \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{П.3.49})$$

$\psi, \chi, a, b, B$  — аргументы. Вычитая уравнение (П.3.48) из уравнения (П.3.45), находим после несложных вычислений следующее соотношение для  $\hat{\Phi}$ :

$$W'\hat{\Phi} = -I + (F_0 \circ \mathcal{U} - F_0) = I + II + III, \quad (\text{П.3.50})$$

где

$$I = (W' - 1)(A_+ - A_\infty) - (A - A_\infty) \circ \mathcal{U} + (A - A_\infty) = \\ = \begin{pmatrix} u_\psi(\alpha - \omega) \\ v_\psi(\alpha - \omega) + v_\chi[\tilde{\beta} + (\tilde{B} - \Lambda)\chi] - (B - \Lambda)v \end{pmatrix}, \quad (\text{П.3.51})$$

$$II = F_0 \circ \mathcal{U} - F_0 \circ \mathcal{U}, \quad (\text{П.3.52})$$

$$III = F_0 \circ \mathcal{U} - F_0. \quad (\text{П.3.53})$$

Переходим к оценкам каждого из трех членов, в которых запечатлены отдельные этапы вычислений. Так, второй член хранит память о линеаризации  $F$ , третий — о вычислении  $F$  (или  $F_0$ ) при смещенном значении аргумента, первый — о замене  $\alpha$  на  $\omega$  и т. д. при решении системы уравнений (П.3.30).

3) Для того чтобы оценить величину

$$|\hat{\Phi}|_+ = \sup_{\mathcal{D}_+} \left\{ \frac{|\Phi|}{r_+} + \frac{|\Xi|}{s_+} \right\} \quad (\text{П.3.54})$$

(знак «+» в  $|\hat{\Phi}|_+$  относится к новой области  $\mathcal{D}_+$ , а также к  $r_+$ ,  $s_+$ ; важно, чтобы норма при итерации изменялась), достаточно оценить члены  $|\mathbf{I}|_+$ ,  $|\mathbf{II}|_+$ ,  $|\mathbf{III}|_+$ . Это следует из того, что матрица Якоби  $W'$  мало отличается от единичной. Но, поскольку две компоненты  $\Phi$  и  $\Xi$  имеют различные масштабы, необходимо показать, что даже матрица

$$\begin{pmatrix} 1 + u_\psi & 0 \\ v_\psi \frac{r_+}{r_-} & 1 + v_\chi \end{pmatrix} \quad [(\text{П.3.55})$$

мало отличается от единичной. Для диагональных элементов близость к единице следует из оценки (П.3.21). Что же касается члена, стоящего в левом нижнем углу матрицы (П.3.55), то по оценкам (П.3.21) и Коши он удовлетворяет неравенству

$$\left| v_\psi \frac{r_+}{s_+} \right| \leq c_4^{y+1} \delta \cdot 2 \frac{s}{r} \frac{r_+}{s_+} \leq 2c_4^{y+1} \delta \frac{s}{s_+}. \quad (\text{П.3.56})$$

В силу нашего выбора  $s$  в (П.3.18)

$$\frac{s_+}{s} = \sqrt{c\delta}, \quad (\text{П.3.57})$$

поэтому правая часть неравенства

$$\left| v_{\psi} \frac{r_+}{s_+} \right| \leq 2c_4^{v+1} \sqrt{c^{-1}\delta v} \quad (\text{П.3.58})$$

при соответствующем выборе  $\delta_0$  может быть сколь угодно мала. Итак,

$$|\hat{\Phi}|_+ \leq 2(|\text{I}|_+ + |\text{II}|_+ + |\text{III}|_+). \quad (\text{П.3.59})$$

Оценка трех членов, заключенных в круглые скобки, проводится непосредственно, но мы покажем, как входят различные масштабные множители.

Прежде всего покажем, что

$$|\text{I}|_+ < c_5 c_4^{v+1} \frac{s}{s_+} \delta q_+. \quad (\text{П.3.60})$$

Для оценки типичного члена в I (см. (П.3.15)) рассмотрим неравенство

$$\frac{|v_{\psi}(\alpha - \omega)|}{s} < \frac{r_+ q_+}{s_+} \cdot 2c_4^{v+1} \frac{s}{r} \delta \leq 2c_4^{v+1} \frac{s}{s_+} \delta q_+ \quad (\text{П.3.61})$$

(при выводе которого мы пользовались определением области (П.3.15) и оценкой (П.3.21)). Оценки остальных членов могут быть получены аналогично, но член  $(B - \Lambda)$  требует особого внимания. При его оценке недостаточно воспользоваться неравенством,  $|B - \Lambda| < q$ , вытекающим из (П.3.52), и необходимо обратиться к несколько более сложной оценке

$$|B - \Lambda| = |B - \tilde{B}| + |\tilde{B} - \Lambda| = |w_3| + q_+ < (c_4 + 1)q_+ \quad (\text{П.3.62})$$

(при выводе которой мы воспользовались оценкой (П.3.21)). Итак, неравенство (П.3.60) доказано.

Для того чтобы получить неравенство для члена II, необходимо оценить остаточный член ряда Тейлора:

$$|f(\varphi, \xi, \dots) - f(\varphi, 0, \dots)| \leq \max \{ |f_{\xi}| \} |\xi| \leq 2 \frac{r}{s} q_+ |\xi|, \quad (\text{П.3.63})$$

где в силу неравенства (П.3.21)

$$|\xi| \leq |\chi| + |v| \leq s_+ \left( 1 + \frac{s}{s_+} c_4^{v+1} \delta \right) \leq 2s_+ \quad (\text{П.3.64})$$

(из неравенства (П.3.57) мы заключаем, что второй член в круглых скобках может быть сколь угодно мал при подходящем выборе  $\delta_0$ ). Итак,

$$|f(\varphi, \xi) - f(\varphi, 0)| \leq 4r \frac{s_+}{s} q_+. \quad (\text{П.3.65})$$

Аналогичным образом получаем неравенство

$$|g(\varphi, \xi) - g(\varphi, 0) - g_{\xi}(\varphi, 0)\xi| \leq 2 \frac{q_+}{s} |\xi|^2 \leq 8 \frac{s_+^2}{s} q_+. \quad (\text{П.3.66})$$

Следовательно,

$$|\text{II}|_+ \leq c_6 \frac{s_+}{s} q_+. \quad (\text{П.3.67})$$

Наконец, для оценки члена III воспользуемся теоремой о среднем значении, т. е.

$$|f(\psi + u, \chi + v) - f(\psi, \chi)| \leq \max\{ |f_{\psi}| \cdot |u| \} + \max\{ |f_{\chi}| \cdot |v| \} \leq \leq 2q_+ 2rc_4^{v+1} \delta. \quad (\text{П.3.68})$$

При соответствующей оценке для  $g$  получаем

$$|\text{III}|_+ \leq c_7 c_4^{v+1} \frac{s}{s_+} q_+ \delta. \quad (\text{П.3.69})$$

Комбинируя оценки (П.3.60), (П.3.67) и (П.3.68) для I, II и III, приходим к окончательному результату:

$$|\widehat{\Phi}|_+ \leq c_8 c_4^{v+1} q_+ \left( \frac{s}{s_+} \delta + \frac{s_+}{s} \right). \quad (\text{П.3.70})$$

Ясно, что при оптимальном выборе  $s$  оба члена в круглых скобках должны быть равны. Как видно из (П.3.57), это приближенно согласуется с нашим выбором. Итак, с учетом (П.3.18) мы получаем неравенство

$$|\widehat{\Phi}|_+ \leq c_8 c_4^{v+1} q_+ 2\sqrt{c\delta} = c_8 c_4^{v+1} r_v^{\sigma} 2\sqrt{c} \delta^{3/2} \leq \sqrt{c} c_9^{v+1} r_{v+1}^{\sigma} \delta^{3/2}. \quad (\text{П.3.71})$$

Выбирая постоянную  $c$  достаточно большой ( $c > c_9^2$ ), получаем из (П.3.18)

$$|\widehat{\Phi}|_+ \leq c^{v+1} r_{v+1}^{\sigma} \delta^{3/2} = r_{v+1}^{\sigma} \delta_{v+1}, \quad (\text{П.3.72})$$

что и утверждалось в (П.3.20). Тем самым доказательство теоремы П.3.1 завершается.

#### 4. Доказательство теоремы 6.2.1

а) Покажем теперь, что построенное в разд. 6.3 разложение в ряд по степеням  $\varepsilon$  действительно сходится. Для этого мы воспользуемся доказанной в предыдущем разделе теоремой существования П.3.1 и установим сходимостъ решения, полученного в виде некоторого степенного ряда. Однако это решение может не совпадать с найденным (в теореме 6.2.1) формальным разложением, так как в разд. 6.3 нормировке подвергались отдельные сомножители  $\mathcal{U}_v$ , а не произведение  $\mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 \circ \dots \circ \mathcal{U}_v$ . Тем не менее лемма

П.2.1 позволит нам установить сходимость единственного решения, описанного в теореме 6.2.1.

Итак, рассмотрим уравнения (6.3.1) и (6.3.2) и предположим, что  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  — вещественнозначные аналитические функции в некоторой фиксированной области

$$(|\operatorname{Im} \{\varphi\}| < r, \quad |\xi| < s, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0, \quad (\text{П.4.1})$$

где

$$|\varepsilon| \left( \frac{|\mathbf{f}|}{r} + \frac{|\mathbf{g}|}{s} \right) < M\varepsilon_0. \quad (\text{П.4.2})$$

Применим к уравнениям (6.3.1) и (6.3.2) теорему П.3.1, заменив  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$ , о которых шла речь в приложении 3, на  $\varepsilon \mathbf{f}(\varphi, \xi, \varepsilon)$  и  $\varepsilon \mathbf{g}(\varphi, \xi, \varepsilon)$ . Хотя доказательство теоремы П.3.1 было проведено без такого комплексного параметра  $\varepsilon$ , нетрудно видеть, что решения  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$ ,  $\hat{B}$ , о которых говорится в теореме П.3.1, — аналитические функции от  $\varepsilon$ . Действительно, аппроксимация, построенная при доказательстве теоремы П.3.1, оказывается аналитической, а так как окончательное решение получается как равномерный предел (в комплексной области) аппроксимаций, то окончательное решение аналитично в комплексной области. Остается проверить, выполняются ли требуемые теоремой П.3.1 неравенства

$$\frac{|\varepsilon \mathbf{f}|}{r} + \frac{|\varepsilon \mathbf{g}|}{s} < r^\sigma K \delta_0. \quad (\text{П.4.3})$$

Ясно, что неравенство (П.4.3) следует из (П.4.2), если

$$\varepsilon_0 \leq \frac{r^\sigma K \delta_0}{M}. \quad (\text{П.4.4})$$

Последнее неравенство устанавливает нижний предел для радиуса сходимости решений  $\mathbf{u}(\varphi, \varepsilon)$ ,  $\mathbf{v}(\varphi, \chi, \varepsilon)$ ,  $\hat{\mathbf{a}}(\varepsilon)$ ,  $\hat{\mathbf{b}}(\varepsilon)$ ,  $\hat{B}(\varepsilon)$ , аналитических в области  $|\operatorname{Im} \{\varphi\}| < r/2$ ,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  (функция  $\mathbf{v}$  линейна по  $\chi$ ).

Кроме того, при  $\varepsilon = 0$  решение, построенное в приложении 3, вырождается в  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{a}} = \omega$ ,  $\hat{\mathbf{b}} = 0$ ,  $\hat{B} = \Lambda$ , в чем нетрудно убедиться, полагая в приведенных формулах  $\delta = 0$ . Следовательно,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}$ ;  $\omega$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$ ,  $\hat{B}$ ;  $\Lambda$  допускают разложения в степенные ряды без свободных членов, сходящиеся в круге  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ .

Это доказывает существование одного аналитического решения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}(\varphi, \varepsilon), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\varphi, \xi, \varepsilon), \\ \Delta &= \hat{\mathbf{a}}(\varepsilon) - \omega, \\ \mathbf{d} &= \hat{\mathbf{b}}(\varepsilon), \\ D &= \hat{B}(\varepsilon) - \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.4.5})$$

нашей задачи. Тем самым теорема 6.2.1 доказана. Действительно, как показано в конце приложения 2, степенные ряды для  $\Delta$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $D$  однозначно определены и не зависят от нормировок.

б) Обратимся теперь к доказательству сходимости разложения в ряд, построенного в разд. 6.3. Оно было нормировано условием

$$U \in \mathcal{R}, \quad (\text{П.4.6})$$

которому не обязательно удовлетворяет решение (П.4.5). Обозначим преобразование, задаваемое (П.4.5), через

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi + \mathbf{u}(\psi, \varepsilon), \\ \xi &= \chi + \mathbf{v}(\chi, \xi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{П.4.7})$$

По лемме П.2.1 наиболее общее решение представимо в виде  $\mathcal{U} \circ \mathcal{V}$ , где  $\mathcal{V} \in \mathcal{C}$ , а  $\Delta$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $D$  не зависят от нормировки. Следовательно, достаточно доказать, что для  $\mathcal{V}$  можно найти сходящийся ряд, при котором разложение для решений  $\mathcal{U} \circ \mathcal{V}$  совпадало бы с найденным в теореме П.1.1. Так как группа  $\mathcal{C}$  конечномерна, последнее утверждение следует из теоремы о неявной функции, в чем мы сейчас убедимся.

Если

$$\mathcal{V}: \begin{cases} \psi' = \psi + \mathbf{a}, \\ \chi' = \chi + \mathbf{b} + B\chi, \end{cases} \quad \Lambda \mathbf{b} = 0, \quad \Lambda B = B\Lambda, \quad (\text{П.4.8})$$

то для  $\mathcal{U} \circ \mathcal{V}$  получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \psi + \mathbf{a} + \mathbf{u}(\psi + \mathbf{a}, \varepsilon), \\ \xi &= \chi + \mathbf{b} + B\chi + \mathbf{v}(\psi + \mathbf{a}, \chi + \mathbf{b} + B\chi, \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.4.9})$$

Остается найти  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $B$  так, чтобы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{u} \\ \mathbf{b} + \mathbf{v} + B\chi \end{pmatrix} \in \mathcal{R}. \quad (\text{П.4.10})$$

Разложим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

на компоненты, лежащие в  $\mathcal{N}^\circ$  и  $\mathcal{R}$ , и обозначим через  $P_{\mathcal{N}^\circ}$  проекцию пространства решений на  $\mathcal{N}^\circ$ .

Попытаемся определить  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $B$  так, чтобы проекция

$$P_{\mathcal{N}^\circ} \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{u} \\ \mathbf{b} + B\chi + \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} + B\chi \end{pmatrix} + P_{\mathcal{N}^\circ} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (\text{П.4.11})$$

была равна нулю. Функции  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  зависят от аргументов  $\psi' = \psi + \mathbf{a}$ ,  $\chi' = \chi + \mathbf{b} + B\chi$ ,  $\varepsilon$ . Равенство нулю проекций (П.4.11) порождает конечное число уравнений с одними и теми же неизвестными  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, B)$ , изменяющимися в зависимости от  $\mathcal{N}^\circ$ . При  $\varepsilon = 0$  функции

$u$  и  $v$  обращаются в нуль, и решение имеет вид  $a = b = B = 0$ . По теореме о неявной функции существуют аналитические функции  $a(\varepsilon)$ ,  $b(\varepsilon)$ ,  $B(\varepsilon)$  (разложения которых по степеням  $\varepsilon$  не содержат свободных членов), обращающие (П.4.11) в нуль. Это определяет отображение  $\mathcal{E}$  в (П.4.8), при котором  $\mathcal{U} \circ \mathcal{E}$  удовлетворяет нормировке (П.4.6). Так как  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{E}$  заданы сходящимися рядами, их композиция  $\mathcal{U} \circ \mathcal{E}$  при достаточно малом  $|\varepsilon|$  также представима в виде сходящегося ряда, что и требовалось доказать.

в) Полученный результат позволяет нам избежать сложной конструкции, приведенной в приложении 3, и обеспечивает сходимость ряда, полученного при формальном разложении, по крайней мере при указанной выше нормировке. То же утверждение остается в силе, если потребовать, чтобы свободные члены

$$P_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (\text{П.4.12})$$

остающиеся в разложении, образовывали сходящийся ряд.

Итак, резюмируя, мы можем сформулировать следующую теорему.

**Теорема П.4.1.** Формальные разложения в ряды по  $\varepsilon$  для  $u(\psi, \varepsilon)$ ,  $v(\psi, \chi, \varepsilon)$ ,  $\Delta(\varepsilon)$ ,  $d(\varepsilon)$ ,  $D(\varepsilon)$ , о которых говорится в теореме П.1.1, сходятся при достаточно малом  $\varepsilon$ , если проекция

$$P_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

задана в виде сходящегося ряда по  $\varepsilon$ .

## ЛИТЕРАТУРА

Синергетика связана со столь многими научными дисциплинами, что любая попытка составить более или менее полный список работ, имеющих непосредственное отношение к синергетическим проблемам, неминуемо обречена на провал: для такого перечня понадобится бы целый том. Сознательная неизбежную ограниченность наших возможностей, мы указали лишь те работы, которые были использованы нами при работе над книгой. Кроме того мы привели ссылки на статьи, обзоры и книги, рекомендуемые для более подробного изучения затронутых нами проблем. Все ссылки даны по главам.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

#### 1.1. Что такое синергетика?

*Haken H.*, Synergetics, An Introduction, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. [Имеется перевод: *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980.] В дальнейшем при ссылках на эту работу мы будем обозначать ее [1].  
*Haken H.*, *Graham R.*, Synergetik — Die Lehre vom Zusammenwirken, Umschau, 6, 191 (1971).

*Haken H.* (ed.), Synergetics (Proceedings of a Symposium on Synergetics, Elmau 1972), Teubner, Stuttgart, 1973.

*Haken H.* (ed.), Cooperative Effects, Progress in Synergetics, North-Holland, Amsterdam, 1974.

*Haken H.*, Cooperative effects in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical system, Rev. Mod. Phys., 47, 67 (1975).

Дальнейшие ссылки читатель сможет найти в отдельных томах шпрингеровской серии по синергетике, часть из которых перечислена в предисловии.

Популярное введение в синергетику см. в работе

*Haken H.*, Erfolgsgeheimnisse der Natur, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1981.

#### 1.2. Физика

Современный подход к фазовым переходам в системах, находящихся в тепловом равновесии, основан на использовании ренормализационной группы:

*Wilson K. G.*, Phys. Rev., B4, 3174; 3184 (1971).

*Wilson K. G.*, *Fischer M. E.*, Phys. Rev. Lett., 28, 248 (1972).

*Wegener F. J.*, Phys. Rev., B5, 4529 (1972); B6, 1891 (1972).

*Burkhardt T. W.*, *van Leeuwen J. M. J.* (eds.), Real-Space Renormalization, Topics in Current Physics, vol. 30. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

Фазовым переходам и критическим явлениям посвящены также книги и обзоры. См., например,

Wilson K. G., Kogut J., Phys. Rep., **12C**, 75 (1974).

Domb C., Green M. S. (eds.), Phase Transitions and Critical Phenomena (Internat. Series of Monographs in Physics), vols. 1—6, Academic, London, 1972—1976.

Ma S. K. Modern Theory of Critical Phenomena, Benjamin, Reading, MA, 1976. [Имеется перевод: Ма Ш. Современная теория критических явлений.— М.: Мир, 1980.]

### 1.2.1. Жидкости: образование динамических структур

#### Неустойчивость Тейлора

Taylor G. I., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A223**, 289 (1923).

Результаты более современных и полных исследований см., например, в работах

Fenstermacher R. P., Swinney H. L., Gollub J. P., J. Fluid mech., **94**, 103 (1979).

DiPrima R. C.— In: Transition and Turbulence (Meyer R. E., ed.), Academic, New York, 1981.

#### Неустойчивость Бенара

Bénard H., Rev. Gén. Sci. Pures Appl., **11**, 1261, 1309 (1900).

Lord Rayleigh, Phil. Mag., **32**, 529 (1916).

Современное теоретическое исследование неустойчивости Бенара в линейном приближении приведено, например, в работе

Chandrasekhar S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon, Oxford, 1961.

Исследования неустойчивости Бенара с учетом нелинейности см., например, в работах

Schlüter A., Lortz D., Busse F., J. Fluid Mech., **23**, 129 (1965).

Busse F. H., J. Fluid Mech., **30**, 625 (1967).

Newell A. C., Whitehead J. A., J. Fluid Mech., **38**, 279 (1969).

DiPrima R. C., Eckhaus H., Segel L. A., J. Fluid Mech., **49**, 705 (1971).

Busse F. H., J. Fluid Mech., **52**, 1 (1972).

Busse F. H., Rep. Prog. Phys., **41**, 1929 (1978).

Нелинейность и флуктуации рассмотрены в работах

Haken H., Phys. Lett., **46A**, 193 (1973); Rev. Mod. Phys., **47**, 67 (1975).

Haken H. Synergetics (Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed.), Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

Graham R., Phys. Rev. Lett., **31**, 1479 (1973); Phys. Rev. **10**, 1762 (1974).

Последние экспериментальные данные см. в работах

Ahlers G., Behringer R., Phys. Rev. Lett., **40**, 712 (1978).

Ahlers G., Walden R., Phys. Rev. Lett., **44**, 445 (1978).

Bergè P.— In: Dynamical Critical Phenomena and Related Topics. Enz C. P. (ed.), Lecture Notes Phys., vol. 104, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, p. 288.

Busse F. H., Clever R. M., J. Fluid Mech., **102**, 75 (1981).

Giglio M., Musazzi S., Perini U., Phys. Rev. Lett., **47**, 243 (1981).

Koschmieder E. L., Pallas S. G., Intern. J. Heat Mass Transfer, **17**, 991 (1974).

Gollub J. P., Benson S. W., J. Fluid Mech., **100**, 449 (1980).

Maurer J., Libchaber A., J. Phys. Paris Lett., **39**, 369 (1978); **40**, 419 (1979); **41**, 515 (1980).

Pfister G., Rehberg I., Phys. Lett., **83A**, 19 (1981).

Haken H. (ed.), Chaos and Order in Nature (Springer Series in Synergetics, vol. 11) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981. Особого внимания

заслуживают статьи Либхабера и Фове, Шульца-Дюбуа и сотрудников, Берже, Буссе.

*Haken H.* (ed.). *Evolution of Order and Chaos*, Springer Series in Synergetics, vol. 17, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

*Swinney H. L., Gollub J. P.* (eds.), *Hydrodynamic Instabilities and Transition to Turbulence*, Topics in Applied Physics, vol. 45, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981. [Имеется перевод: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности./Под ред. Суинни Х., Голлаба Дж.— М.: Мир, 1984.]

#### Руководства и монографии по гидродинамике

*Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* *Механика сплошных сред*. Изд. 2-е, перераб. и доп.— М.: изд-во техн. теор. л-ры, 1953.

*Chia-Shun-Yih*, *Fluid Mechanics*, University Press, Cambridge, 1970.

*Lin C. C.*, *Hydrodynamic Stability*, University Press, Cambridge, 1967.

[Имеется перевод: *Линь Ц. Ц.* *Теория гидродинамической неустойчивости*.— М.: ИЛ, 1958.]

*Joseph D. D.*, *Stability of Fluid Motions*, Springer Tracts Nat. Phil. vols. 27, 28, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. [Имеется перевод: *Джозеф Д. Д.* *Устойчивость движений жидкости*.— М.: Мир, 1981.]

#### Метеорология

*Scorer R.*, *Clouds of the World*, Lothian, Melbourne, 1972.

#### 1.2.2. Лазеры: когерентные колебания

Первые работы по теории лазеров с учетом флуктуаций

*Haken H.*, *Z. Phys.*, **181**, 96 (1964); **190**, 327 (1966).

*Risken H.*, *Z. Phys.*, **186**, 85 (1965).

*Hempstead R. D., Lax M.*, *Phys. Rev.*, **161**, 350 (1967).

*Weidlich W., Risken H., Haken H.*, *Z. Phys.*, **201**, 396 (1967).

*Scully M., Lamb W. E.*, *Phys. Rev.*, **159**, 208 (1967); **166**, 246 (1968).

*Haken H.*, *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 67 (1975).

Аналогия между процессами в лазере и фазовыми переходами

*Graham R., Haken H.*, *Z. Phys.*, **213**, 420 (1968).

*Graham R., Haken H.*, *Z. Phys.*, **237**, 31 (1970).

*De Giorgio V., Scully M. O.*, *Phys. Rev.*, **A2**, 117a (1970).

#### Ультракороткие импульсы

*Graham R., Haken H.*, *Z. Phys.*, **213**, 420 (1968).

*Risken H., Nummedal K.*, *Phys. Lett.*, **26A**, 275 (1968); *J. Appl. Phys.*, **39**, 4662 (1968).

*Haken H., Ohno H.*, *Opt. Comm.*, **16**, 205 (1976); *Phys. Lett.*, **59A**, 261 (1976).

*Knapp H., Risken H., Vollmer H. D.*, *Appl. Phys.*, **15**, 265 (1978).

*Büttiker M., Thomas H.*— In: *Solitons and Condensed Matter Physics*, Bishop A. R., Schneider T. (eds.), Springer Series in Solid-State Phys., vol. 8, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981, p. 321.

*Zorell J.*, *Opt. Comm.*, **38**, 127 (1981).

Оптическая бистабильность (некоторые старые и новые работы)

*McCall S. L.*, *Phys. Rev.*, **A9**, 1515 (1974).

*Bonifacio R., Lugiatto L. A.*, *Opt. Comm.*, **19**, 172 (1976).

*Sulomaa R., Stenholm S.*, *Phys. Rev.*, **A8**, 2695 (1973).

*Kossakowski A., Marzalek T.*, *Z. Phys.*, **B23**, 205 (1976).

- Lugiato L. A., Benza V., Narducci L. M., Farina J. D.*, Opt. Comm., **39**, 405 (1981).
- Lugiato L. A., Benza V., Narducci L. M.*— In: Evolution of Order and Chaos, Haken H. (ed.), Springer Series in Synergetics, vol. 17, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, p. 120.
- Velarde M. G.*, *ibid.*, p. 132.
- Lugiato L. A.*— In: Progress in Optics, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- Bonifacio R.* (ed.). Dissipative Systems in Quantum Optics, Topics Current in Physics, vol. 27, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

### Монографии по теории лазеров

- Haken H.*, Laser Theory.— In: Encyclopedia of Physics, vol. XXV/2c, Light and Matter Ic. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970. См. также отдельное издание: *Haken H.*, Laser Theory, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- Sargent M., Scully M. O., Lamb W. E.*, Laser Physics, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

#### 1.2.3. Плазма: неисчерпаемое разнообразие неустойчивостей

Мы вынуждены ограничиться лишь самыми необходимыми ссылками:

- Cap F.*, Handbook on Plasma Instabilities, vols. 1,2, Academic, New York, 1976, 1978.
- Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. В 2-х томах. Т. 1. Неустойчивость однородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп.— М.: Атомиздат, 1972. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп.— М.: Атомиздат, 1977.
- Wilhelmson H., Weiland J.*, Coherent Non-Linear Interaction of Waves in Plasmas, Pergamon, Oxford, 1977. [Имеется перевод: *Вильгельмсон Х., Вейланд Л.* Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме.— М.: Энергоиздат, 1981.]
- Thornhill S. G., ter Haar D.*, Phys. Rep., **C43**, 43 (1978).

#### 1.2.4. Физика твердого тела: мультистабильность, импульсы, хаос

##### Осциллятор Ганна

- Gunn J. B.*, Solid State Comm., **1**, 88 (1963).
- Gunn J. B.*, IBM Res. Develop., **8**, 141 (1964).
- Nakamura K.*, J. Phys. Soc. Japan. **38**, 46 (1975).

##### Туннельные диоды

- Zener C.*, Proc. Roy. Soc., London, **145**, 523 (1934).
- Esaki L.*, Phys. Rev., **109**, 603 (1958).
- Landauer R.*, J. Appl. Phys., **33**, 2209 (1962).
- Landauer R., Woo J. W. F.*— In: Synergetics, Haken H. (ed.), Teubner, Stuttgart, 1973, p. 97.

##### Термоупругие неустойчивости

- Bottani C. E., Caglioti G., Ossi P. M.*, J. Phys., **F**, **11**, 541 (1981).
- Caglioti C., Milone A. F.* (eds.), Mechanical and Thermal Behaviour of Metallic Materials, Proc. Intern. School of Physics Enrico Fermi, North-Holland, Amsterdam, 1982.

##### Рост кристаллов

- Langer J. S.*— In: Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions, Riste T. (ed.), Plenum, New York, 1975, p. 82.
- Langer J. S.*, Rev. Mod. Phys., **52**, 1 (1980).

## 1.3. Техника

## 1.3.1. Строительная механика, сопротивление материалов, авиа- и ракетостроение: выпучивание после «выхлопа», флаттер и т. д.

*Thompson J. M. T., Hunt G. W.*, A General Theory of Elastic Stability, Wiley, London, 1973.

*Huseyn K.*, Nonlinear Theory of Elastic Stability, Nordhoff, Leyden, 1975.

*Brush D. O., Almoth B. D.*, Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, 1975.

## 1.3.2. Электротехника и электроника: нелинейные колебания

*Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. Изд. 3-е.— М.: Наука, 1981.

*Minorsky N.*, Nonlinear Oscillations, van Nostrand, Princeton, 1962.

*Hayashi C.*, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill, New York, 1964. [Имеется перевод: *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.]

*Lindsay P. S.*, Phys. Rev. Lett., **47**, 1349 (1981).

## 1.4. Химия: макроскопические структуры

*Bray C. H.*, J. Am. Chem. Soc., **43**, 1262 (1921).

*Белоусов Б. П.*, Сб. рефератов по радиационной медицине, М., 1959.

*Вавилин В. А., Жаботинский А. М., Ягужинский Л. С.* Исследование зависимости колебательной химической реакции от концентрации исходных реагентов.— В кн.: Колебательные процессы в биологических и химических системах.— М.: Пушино, ОНТИ НЦБИ, 1967. с. 181.

*Zaikin A. N., Zhabotinski A. M.*, Nature, **225**, 535 (1970).

*Zhabotinski A. M., Zaikin A. N.*, J. Theor. Biol., **40**, 45 (1973).

*Turing A. M.*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **B237**, 37 (1952).

*Nicolis G., Prigogine I.*, Self-Organization in Non-Equilibrium Systems, Wiley, New York, 1977. [Имеется перевод: *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах.— М.: Мир., 1979.]

*Haken H.*, Z. Phys., **B20**, 413 (1975).

*Oster G. F., Perelson A. S.*, Arch. Rat. Mech. Anal., **55**, 230 (1974).

*Perelson A. S., Oster G. F.*, Arch. Rat. Mech. Anal., **57**, 31 (1974/75).

*Nicolis G.*, Adv. Chem. Phys., **19**, 209 (1971).

*Change B., Pye E. K., Ghosh A. M., Hess B.* (eds.), Biological and Biochemical Oscillators, Academic, New York, 1973.

*Nicolis G., Portnow J.*, Chem. Rev., **73**, 365 (1973).

*Noyes R. M., Field J.*, Annual Rev. Phys. Chem., **25**, 95 (1975).

*Tyson J. J.*, The Belousov-Zhabotinsky Reaction, Lecture Notes in Biomath., vol. 10, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

*Fife P. C.*, Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Lecture Notes in Biomath., vol. 28, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

*Pacault A., Vidal C.* (eds.), Synergetics. Far from Equilibrium, Springer Series in Synergetics, vol. 3, Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

*Vidal C., Pacault C.* (eds.), Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics, Springer Series in Synergetics, vol. 12, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

## 1.5. Биология

## 1.5.1. Несколько общих замечаний

*Bullock T. H., Orkand R., Grinnell A.*, Introduction to Nervous Systems' Freeman, San Francisco, 1977.

- Scott A. C., Neurophysics, Wiley, New York, 1977.  
 Basar E., Biophysical and Physiological System Analysis, Addison-Wesley, Reading, MA, 1976.  
 Conrad M., Güttinger W., Dal Chin M. (eds.), Physics and Mathematics of the Nervous System, Lecture Notes in Biomath., vol. 4, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.  
 Holden A. V. Models of Stochastic Activity of Neurons, Lecture Notes in Biomath., vol. 12, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.  
 Shimizu H., Adv. Biophys., 13, 195 (1979).

### 1.5.2. Морфогенез

- Turing A. M., Phil. Trans. Roy. Soc. London, B237, 37 (1952).  
 Wolpert L., J. Theor. Biol., 25, 1 (1969).  
 Gierer A., Meinhardt H., Kybernetik, 12, 30 (1972); J. Cell. Sci., 15, 321 (1974).  
 Haken H., Olbrich H., J. Math. Biol., 6, 317 (1978).  
 Murray J. P., J. Theor. Biol., 88, 161 (1981).  
 Berding C., Haken H., J. Math. Biol., 14, 133 (1982).

### 1.5.3. Динамика популяций

- Lotka A., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 6, 410 (1920).  
 Volterra V., Leçons sur la Théorie Mathématiques de la Lutte pour la Vie Paris, 1931. [Имеется перевод: Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.— М.: Наука, 1976.]  
 Goel N. S., Maitra S. C., Montroll E. W., Rev. Mod. Phys., 43, 231 (1971).  
 Greville T. N. E. (ed.), Population, Academic, London, 1972.  
 Ludwig D.— In: Stochastic Population Theories, Levin S. (ed.), Lecture Notes in Biomath., vol. 3, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.  
 May R. B., Nature, 261, 459 (1976).

### 1.5.4. Эволюция

- Eigen M., Naturwissenschaften, 58, 465 (1971).  
 Eigen M., Schuster P., Naturwissenschaften, 64, 541 (1977); 65, 7 (1978); 65, 341 (1978).  
 Ebeling W., Feistel R., Physik der Selbstorganisation und Evolution, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

### 1.5.5. Иммунная система

- Burnet F. M., Immunology, Aging, and Cancer, Freeman, San Francisco, 1976.  
 DeLisi C., Antigen Antibody Interactions, Lecture Notes in Biomath., vol. 8, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.  
 Dubin N., A Stochastic Model for Immunological Feedback in Carcinogenesis, Lecture Notes in Biomath., vol. 9, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.  
 Richter P. H., Pattern formation in the immune system, Lect. Math. Life Sci., 11 89 (1979).

## 1.6. Общая теория вычислительных систем

### 1.6.1. Самоорганизация вычислительных машин (в частности, параллельные вычисления)

- Hockney R. W., Jesshope C. R., Parallel Computers, Hilger, Bristol, 1981.

## 1.6.2. Распознавание образов машинами

- Fu K. S.*, Digital Pattern Recognition, 2nd ed., Springer, Berlin, Heidelberg New York, 1980.
- Fu K. S.*, Syntactic Pattern Recognition Applications, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
- Fu K. S.* — In: Pattern Formation by Dynamic Systems and Pattern Recognition, Haken H. (ed.), Springer Series in Synergetics, vol. 5, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, p. 176.
- Kohonen T.*, Associative Memory — A System Theoretical Approach, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- Kohonen T.*, Self-Organization and Associative Memory, Springer Ser. Inf. Sci., vol. 8, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- Haken H.* (ed.), Pattern Formation by Dynamic Systems and Pattern Recognition, Springer Series in Synergetics, vol. 5, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

## 1.6.3. Надежные системы из ненадежных элементов

*Хакен Г.*, не опубликовано.

## 1.7. Экономика

- Mensch G., Kaasch K., Kleinknecht A., Schnopp R.*, IIM/dp 80-5 Innovation Trends, and Switching between Full- and Under-Employment Equilibria, 1950—1978 Discussion Paper Series, International Institute of Management, Wissenschaftszentrum, Berlin.
- Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (см. [1].)
- Weidlich W., Haag G.*, Quantitative Sociology, Springer Series in Synergetics, vol. 14, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- Haken H.*, Erfolgsgeheimnisse der Natur, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart 1981.

## 1.8. Экология

- Krebs Ch. J.*, The Experimental Analysis of Distribution and Abundance, Harper and Row, New York, 1972.
- Ricklefs., R. E.*, Ecology, Nelson, London, 1973.

## 1.9. Социология

- Ash S. E.*, Social Psychology, Prentice Hall, New York, 1952, p. 452.
- Weidlich W.*, Collect. Phenom., 1, 51 (1972).
- Noelle-Neumann E.*, Die Schweigespirale, Piper, Munchen, 1980; The Spiral of Silence: Public Opinion — The Skin of Time, Chicago, University Press, 1983.
- Wunderlin A., Haken H.*, Lecture Notes, Project Mehrebenenanalyse im Rahmen des Forschungsschwerpunkts Mathematisierung, Universität Bielefeld 1980.
- Haken H.*, Erfolgsgeheimnisse der Natur, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1981.
- Weidlich W., Haag G.*, Quantitative Sociology, Springer Series in Synergetics, vol. 14, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

## 1.11. Какие уравнения нам нужны?

Общие соображения относительно математического аппарата, используемого в синергетике, читатель может почерпнуть в книге

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (см. [1].)

Поскольку вопросы, затрагиваемые в разд. 1.11—1.17, более подробно рассматриваются в последующих главах, соответствующие ссылки читатель найдет в библиографических указателях к этим главам. Здесь же мы приведем только те ссылки, которые не дублируются в дальнейшем.

### 1.11.1. Дифференциальные уравнения

*Courant R., Hilbert D.*, Methods of Mathematical Physics, vols. 1,2, Wiley, New York, 1962. [Имеется перевод: *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. В 2-х томах. Т. 1.—М.: Гостехтеоретиздат, 1933. Т. 2.—М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1961.]

*Morse P. M., Feshbach H.*, Methods of Theoretical Physics, vols. 1,2, McGraw-Hill, New York, 1953. [Имеется перевод: *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. В 2-х томах. Т. 1. М.: ИЛ, 1958, Т. 2. М.: ИЛ, 1960.

*Elen L. W. F.*, Differential Equations, vols. 1,2, Macmillan, London, 1967.

### 1.11.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

*Coddington E. A., Levinson N.*, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955. [Имеется перевод: *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.]

### 1.11.3. Нелинейность

*Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2-е.—М.—Л.: 1949.

*Hirsch M. W., Smale S.*, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic New York, 1974.

*Nitecki Z.*, Differentiable Dynamics, MIT Press, Cambridge, MA, 1971. [Имеется перевод: *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику.—М.: Мир, 1975.]

*Abraham R., Marsden J. E.*, Foundations of Mechanics, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1978.

*Smale S.* The Mathematics of Time, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

### 1.11.4. Управляющие параметры

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

### 1.11.5. Стохастичность

*Doob J. L.*, Stochastic Processes, Wiley, New York, 1953. [Имеется перевод: *Дуб Дж.* Вероятностные процессы.—М.: ИЛ, 1956.]

*Loève M.*, Probability Theory, van Nostrand, Princeton, 1963. [Имеется перевод: *Ловэ М.* Теория вероятностей.—М.: ИЛ, 1962.]

*von Mises R.*, Mathematical Theory of Probability and Statistics, Academic, New York, 1964. [Имеется перевод: *Мизес Р.* Вероятность и статистика.—М.—Л., 1930.]

*Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. Изд. 2-е, перераб.—М.: Наука, 1973.

*Dubes R. C.*, The Theory of Applied Probability, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.

*Feller W.*, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 1, Wiley, New York, 1971. [Имеется перевод: *Феллер В.* Введение в теорию

вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Изд. 3-е. Т. 1.— М.: Наука, 1984.]

*Kai Lai Chung*, Elementary Probability Theory with Stochastic Processes, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

*Hida T.*, Brownian Motion, Applications of Mathematics, vol. 11, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

#### Статистическая механика

*Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Изд. 3-е доп.— М.: Наука, 1976.

*Kubo R.*, Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam, 1968. [Имеется перевод: *Кубо Р.* Термодинамика.— М.: Мир, 1970.]

*Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика.— М.: Наука, 1971.

#### Квантовые флуктуации

*Haken H.*, Laser Theory.— In: Encyclopedia of Physics, vol. XXV/2c, Light and Matter Ic, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970. См. также отдельное издание: *Haken H.*, Laser Theory, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. Помимо обширного фактического материала в книге приведена подробная библиография.

#### Хаос

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978. (См. [1].)

*Haken H.* (ed.), Chaos and Order in Nature, Springer Series in Synergetics, vol. 11, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

*Haken H.*, Order and Chaos, Springer Series in Synergetics, vol. 17, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

#### 1.11.6. Многокомпонентность и мезоскопический подход

По неопубликованным материалам Г Хакена.]

#### 1.12. Как выглядят решения?

*Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleick M.*, Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland, Amsterdam, 1982.

*Richtmyer R. D.*, Principles of Advanced Mathematical Physics II, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981. [Имеется перевод: *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. В 2-х томах. Т. 2. Группы и теория представлений. Многообразия. Риманова геометрия. Зарождение турбулентности.— М.: Мир, 1984.]

#### 1.13. Качественные изменения: общий подход

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

*Thompson D'Arcy W.*, On Growth and Form, Cambridge University Press, London, 1961.

#### 1.14. Качественные изменения: типичные явления

*Haken H.*, Synergetics, Springer in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983, (См. [1].)

В дальнейших главах этой книги приведена обширная литература. Мы приведем здесь несколько ссылок на работы по теории характеристических показателей Ляпунова.

## 1.14.6. Показатели Ляпунова

*Оседец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема, Характеристический показатель Ляпунова для динамических систем.— Труды Московского матем. общества, 1968, т. 19, с. 179.

*Песин Я. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория.— Успехи матем. наук, 1977, т. 32, вып. 4, с. 55—112.

*Ruelle D.*, Sensitive Dependence on Initial Conditions and Turbulent Behavior of Dynamical Systems.— In: Bifurcation Theory and Its Applications in Scientific Disciplines, Gurel O., Rössler O. E. (eds.), New York Acad. Sci., 316, (1979).

*Farmer J. D.*, Physica 4D, 366 (1979).

*Tomita K.*, Phys. Rep., 86, 113 (1982).

## 1.15. Влияние флуктуаций (шумов). Неравновесные фазовые переходы

См. литературу, приведенную в разд. 1.11.5 и в следующих главах.

## 1.16. Эволюция пространственных структур

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

## 1.17. Дискретные отображения. Отображение Пуанкаре

Дискретные отображения подробно рассмотрены в гл. 11. Сведения об отображении Пуанкаре читатель может почерпнуть, например, в книге *Abraham R.*, *Marsden J. E.*, Foundations of Mechanics, Benjamin/Cummings, Reading MA, 1978.

## 1.18. Дискретные отображения с шумом

См. гл. 11.

## 1.19. Пути к самоорганизации

1.19.1. Самоорганизация через изменение управляющих параметров

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

1.19.2. Самоорганизация через изменение числа компонент

*Haken H.*, Progr. Theor. Phys. Suppl., 69, 30 (1980).

1.19.3. Самоорганизация через переходы

*Хакен Г.*, не опубликовано.

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 2.2. Группы и инвариантность

*Sudarshan E. C. G.*, *Mukunda M.*, Classical Dynamics: A Modern Perspective, Wiley, New York, 1974.

*Richtmyer R. D.*, Principles of Advanced Mathematical Physics II, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981. [Имеется перевод: *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. В 2-х томах. Т. 2. Группы и тео.

рия представлений. Многообразия. Риманова геометрия. Зарождение турбулентности.— М.: Мир, 1984.]

### 2.3. Система с вынуждающей силой

*Duffing O.*, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, Vieweg Braunschweig, 1918.

*Hayashi C.*, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, New York, 1964. [Имеется перевод: *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.] См. также разд. 2.1.1.

### 2.4. Общие теоремы об алгебраических и дифференциальных уравнениях

#### 2.4.2. Жорданова нормальная форма

*Bellman R.*, *Cooke K. L.*, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.

#### 2.4.3. Некоторые общие теоремы о линейных дифференциальных уравнениях

Исчерпывающим обзором современного состояния теории линейных операторов по праву считается книга

*Dunford N.*, *Schwartz J. T.*, *Linear Operators, Pure and Applied Mathematics*, vol. VII, Partz I—III, Wiley, New York, 1957. [Имеется перевод: *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. В 3-х томах. Т. 1. Общая теория— М.: ИЛ, 1962. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1966. Т. 3. Спектральные операторы.— М.: Мир, 1974.]

#### 2.4.4. Обобщенные характеристические показатели и показатели Ляпунова

См. разд. 2.4.3. Относительно показателей Ляпунова см. Разд. 1.14.6.

Теорема о нулевых показателях Ляпунова заимствована из работы *Haken H.*, *Phys. Lett.*, 94A, 71 (1983).

### 2.6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

*Coddington E. A.*, *Levinson N.*, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955. [Имеется перевод: *Коддингтон Э. А.*, *Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.]

### 2.7. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами

*Floquet G.*, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, *Ann. École Norm.*, Ser. 2, 12,47 (1883).

### 2.8. Теоретико-групповая интерпретация

См. разд. 2.2.

### 2.9. Теория возмущений

*Хакен Г.*, не опубликовано.

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Излагаемые в этой главе результаты за исключением тех, которые приведены в разд. 3.9, получены Г. Хакеном. Оператор  $T$  в (3.1.6) был введен в работе

*Haken H.*, *Z. Naturforsch.*, **8A**, 228 (1954),

в которой рассмотрено унитарное представление оператора  $T$  и доказана формула (3.1.20). См. также

*Haken H.*— In: *Dynamics of Synergetic Systems*, Springer Series in Synergetics, vol. 6, Haken H. (ed.), Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, p. 16.

При доказательстве теоремы 3.8.2 использованы леммы, приведенные в книге

*Dunford N., Schwartz J. T.*, *Linear Operators, Pure and Applied Mathematics*, vol. VII, Parts I—III, Wiley, New York, 1957. [Имеется перевод: *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. В 3-х томах. Т. 1. Общая теория.— М.: ИЛ, 1962. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1966. Т. 3. Спектральные операторы.— М.: Мир, 1974.]

Важные результаты по теории линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами приведены в работе

*Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1969. Там же приведена обширная библиография.

Результаты разд. 3.9 заимствованы из книги Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и А. М. Самойленко.

### 4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исчисления Ито и Стратоновича изложены по оригинальным работам их авторов:

*Itô K.*, *Lectures on Stochastic Processes*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.

*Itô K.*, *Stochastic Processes*, Universitet Matematisk Institut, Aarhus, 1969. [Имеется перевод: *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. 1.— М.: ИЛ, 1960. *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. 2.— М.: ИЛ, 1963.]

*Itô K., McKean H. P.*, *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1965. [Имеется перевод: *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.— М.: Мир, 1968.]

*Itô K.*, *Nagoya Math. J.*, **1**, 35 (1950).

*Itô K.*, *Nagoya Math. J.*, **3**, 55 (1951).

*Itô K.* *On Stochastic Differential Equations*, Amer. Math. Soc. New York, 1951.

*Langevin P.* *Sur la théorie du mouvement brownien*, C. R. Acad. Sci, Paris, **146**, 530 (1980).

*Stratonovich R. L.*, *SIAM J. Control*, **4**, 362 (1966).

Из числа последних курсов и монографий назовем следующие:

*Гухман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наука думка, 1968.

*Arnold L.* *Stochastic Differential Equations*, Oldenburg, München, 1973.

*van Kampen N. G.*, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

*Gardiner C. W.*, Handbook of Stochastic Methods, Springer Series in Synergetics, vol. 13, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

## 5. МИР СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

### 5.1. Связанные линейные осцилляторы

В этом разделе мы даем лишь беглый обзор наиболее важных результатов. Более подробное изложение можно найти в следующих работах: *Боголюбов Н. Н.*, *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е, исправл., и доп.— М.: Наука, 1974. *Minorski N.*, Nonlinear Oscillations, Van Nostrand, Toronto, 1962. *Андронов А. А.*, *Витт А. А.*, *Хайкин С. Э.* Теория колебаний. Изд. 3-е.— М.: Наука, 1981.

### 5.2. Возмущения квазипериодического движения в случае амплитуд, не зависящих от времени (квазипериодическое движение сохраняется)

При изложении материала в этом разделе мы следуем монографии *Боголюбов Н. Н.*, *Митропольский Ю. А.*, *Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1969.

### 5.3. Некоторые соображения о сходимости метода последовательных приближений

См. разд. 5.2.

## 6. ОСЦИЛЛЯТОРЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ: СЛУЧАЙ, КОГДА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ СОХРАНЯЕТСЯ

*Колмогоров А. Н.* — ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527.

*Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13—40.

*Moser J.*, Math. Ann., 169, 136 (1967).

В главе 6 мы существенно используем результаты этой работы Мозера, но излагаем их иначе, чем автор. Читателю полезно будет ознакомиться с работами

*Moser J.*, Nearly Integrable and Integrable Systems.— In: Topics in Nonlinear Dynamics, Jorna S. (ed.), AIP Conf. Proc., 46, 1 (1978).

*Berry M. V.* Regular and Irregular Motion.— In: Topics in Nonlinear Dynamics, Jorna S. (ed.), AIP. Conf. Proc., 46, 16 (1978).

## 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИНЦИП ПОДЧИНЕНИЯ

В этой главе мы излагаем в несколько обобщенном виде результаты нашей работы

*Haken H.*, *Wunderlin A.*, Z. Phys., B47, 179 (1982). Упрощенный вариант, применимый к квазипериодическому движению в случае лазера, был развит в докладе Г. Хакена на Международной конференции по оптической накачке в Гейдельберге, 1962 г. См. также работу

*Haken H.*, *Sauermann H.*, Z. Phys., 176, 47 (1963),

в которой за счет подходящего разбиения переменных на быстро осциллирующие и медленно изменяющиеся части удалось выразить атомные характеристики через полевые моды (параметры порядка).

Другие методы см. в работах

*Haken H.*, *Z. Phys.*, **B20**, 413 (1975); **B21**, 105 (1975); **B22**, 69 (1975); **B23**, 388 (1975).

*Haken H.*, *Z. Phys.*, **B29**, 61 (1978); **B30**, 423 (1978).

В этих работах метод последовательных приближений основан на использовании быстро сходящихся разложений, получаемых с помощью непрерывных дробей, но подчиненные переменные зависят от значений параметров порядка (неустойчивых мод) в предыдущие моменты времени (в более высоких приближениях). Здесь же рассмотрены флуктуации ланжевеновского типа. В ряде случаев, в частности, в отсутствие флуктуаций, приводимые нами соотношения могут быть выведены из других теорем и другими методами, известными в математике, теоретической физике и других науках.

Взаимосвязи между принципом подчинения и теоремой о центральном многообразии, равно как и другими теоремами, изучались в работе *Wunderlin A.*, *Haken H.*, *Z. Phys.*, **B44**, 135 (1981).

Относительно теоремы о центральном многообразии см. работы

*Пласс В. А.*, Изв. АН СССР, мат. сер. 1964, 28, т. 28, с. 1297.

*Kelley A.*— In: *Transversal Mappings and Flows*, Abraham R., Robbin J., (eds.), Benjamin, New York, 1967.

В отличие от теоремы о центральном многообразии принцип подчинения учитывает флуктуации, распространяется на окрестность центрального многообразия и позволяет построить функцию  $s(u, \varphi, t)$

## 8. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАЧЕСТВЕННЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ

В этой главе изложен подход, начало которому было положено в докладе автора на Международной конференции по оптической накачке — в Гейдельберге (1962 г.). Тогда наш подход был применен к теории лазеров, включающей и квазипериодическое движение, например, бифуркацию рождения торов. См., работы

*Haken H.*, *Sauer mann H.*, *Z. Phys.*, **176**, 47 (1963).

*Haken H.*, *Laser Theory*,— In: *Encyclopedia of Physics*, vol. XXV, 2c, Light and Matter Ic, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970. См. также отдельное издание этой работы: *Haken H.*, *Laser Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. Подход автора основан на принципе подчинения и может быть отнесен к тому, что ныне принято называть динамической теорией бифуркаций. Начало «статической» теории бифуркаций было положено в работах

*Poincaré H.*, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1892. [Имеется перевод Пуанкаре А. Новые методы небесной механики, т. 1.— В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. В 3-х томах. Т. 1.— М.: Наука, 1971.]

*Poincaré H.*, *Acta Math.*, **7**, 1 (1885).

*Lyapunov A. M.*, *Sur le masse liquide homogène donnée d'un mouvement de rotation*, Зап. Акад. Наук, Санкт-Петербург, **1**, 1 (1906).

*Schmidt E.*, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, 3. Teil, *Math. Annalen*, **65**, 370 (1908).

На протяжении довольно продолжительного времени теория бифуркации пребывала в «дремотном» состоянии (за исключением быть может, ее приложений в гидродинамике). За последнее десятилетие интерес к ней зна-

чительно оживился, о чем можно судить хотя бы по приводимому списку современной литературы.

*Sattinger D. H.*, Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes Math., vol. 309, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

*Sattinger D. H.* Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Lecture Notes in Math., vol. 762. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

*Iooss G.*, Bifurcation of Maps and Applications, Lecture Notes, Mathematical Studies, North-Holland, Amsterdam, 1979.

*Iooss G., Joseph D. D.*, Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980. [Имеется перевод *Иосс Дж., Джозеф Д. Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.] Иосс и Джозеф излагают весьма изящный подход к «статической» теории бифуркаций.

### 8.2. Простое вещественное значение становится положительным

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982. (См. [1].)

### 8.3. Кратные вещественные собственные значения становятся положительными

Мы следуем неопубликованным материалам автора.

Идеология теории катастроф изложена в работе

*Thom R.*, Structural Stability and Morphogenesis, Benjamin, Reading, MA, 1975.

Ссылки на другие работы по теории катастроф см., например, в книге *Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983, (См. [1].)

### 8.4. Простое комплексное собственное значение пересекает мнимую ось. Бифуркация Хопфа

Ветвление осциллирующих решений было впервые рассмотрено в ставшей ныне классической работе

*Hopf E.*, Abzweigung einer periodischen Lösung eines Differentialsystems, Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, XCIV, 1 (1942).

Из последних работ по бифуркации Хопфа назовем следующие:

*Marsden J., McCracken M.*, The Hopf Bifurcation and Its Applications, Lecture Notes in Appl. Math. Sci., vol. 18, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. [Имеется перевод: *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.]

*Joseph D. D.* Stability of Fluids Motion, Springer Tracts Natural Phil., vols. 27, 28, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. [Имеется перевод: *Джозеф Д. Д.* Устойчивость движений жидкости.— М.: Мир, 1981.]

*Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. В 2-х частях. Ч. 1.— М.: Наука, 1965. Ч. 2. М.: Наука, 1967.

*Haken H.* Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

### 8.5. Бифуркация Хопфа (продолжение)

См. разд. 8.4.

### 8.6. Взаимная синхронизация двух осцилляторов

См., например,  
*Haken H.*, *Laser Theory*.— In: *Encyclopedia of Physics*, vol. XXV, 2c, *Light and Matter* Ic., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970. См. также отдельное издание: *Haken H.*, *Laser Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.  
*Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961.

### 8.7. Бифуркация предельного цикла

Мы следуем работе  
*Haken H.*, *Z. Phys.*, **Б29**, 61 (1978).

### 8.8. Бифуркация из предельного цикла: частные случаи

*Хакен Г.*, не опубликовано. См. также разд. 8.7.

### 8.9. Бифуркация из тора (квазипериодическое движение)

*Хакен Г.*, не опубликовано. См. также разд. 8.7 и работу  
*Haken H.*, *Z. Phys.*, **В30**, 423 (1978).

Другие подходы см. в работах

*Chenciner A.*, *Iooss G.*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **69**, 109 (1979).  
*Sell G. R.*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **69**, 199 (1979).  
*Sell G. R.*— In: *Chaos and Order in Nature*, Springer Series in Synergetics, vol. 11, *Haken H.* (ed), Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, p. 84.

### 8.10. Бифуркация из тора: частные случаи

См. разд. 8.9.

### 8.11. Иерархии неустойчивостей, сценарии и пути к турбулентности

#### 8.11.1 Картина Ландау—Хопфа

*Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. Изд. 2-е, перераб. и доп.— М.: Гостехиздат, 1953.  
*Норф Е.*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1**, 303 (1948).

#### 8.11.2. Картина Рюэля—Такенса

*Ruelle D.*, *Takens F.*, *Comm. Math. Phys.*, **20**, 167 (1971).  
 [Имеется перевод: *Рюэль Д.*, *Такенс Ф.* О природе турбулентности.— В кн.: *Странные аттракторы*.— М.: Мир, 1981, с. 117—151.]  
*Newhouse S.*, *Ruelle D.*, *Takens F.*, *Comm. Math. Phys.*, **64**, 35 (1978).

#### 8.11.3. Бифуркация торов. Квазипериодические движения

См. разд. 8.9, 11.3.

#### 8.11.4. Путь к хаосу через удвоение периода. Последовательность Фейгенбаума

*Grossman S.*, *Thomae S.*, *Z. Naturforsch.*, **32A**, 1353 (1977).  
*Feigenbaum M. J.* *J. Stat. Phys.*, **19**, 25 (1978); *Phys. Lett.*, **74A**, 375 (1979)

- Collet P., Eckman J. P.*, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhäuser, Boston, 1980.
- Geisel T., Nierwetberg J.*— In: Evolution of Order and Chaos, Springer Series in Synergetics, vol. 17, Haken H. (ed.), Springer, Berlin, Heidelberg, New York, p. 187.

### 8.11.5. Путь через перемежаемость

- Pomeau Y., Manneville P.*, Comm. Math. Phys., 77, 189 (1980).
- Mayer-Kress G., Haken H.*, Phys. Lett., 82A, 151 (1981).

## 9. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ

Примером служат уравнения Навье — Стокса:

- Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)
- Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.

*Joseph D. D.*, Stability of Fluid Motions I and II, Springer Tracts Natural Phil. vols. 27, 28, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. [Имеется перевод: Джозеф Д. Д. Устойчивость движений жидкости.— М.: Мир, 1981.]

Уравнениям типа реакция с диффузией посвящены, например, работы *Fife P. C.*— In: Dynamics of Synergetic Systems, Springer Series in Synergetics, vol. 6, Haken H. (ed.) Springer, Heidelberg, New York, 1980, p. 97. Там приведены дальнейшие ссылки.

- Turner J. S.*, Adv. Chem. Phys., 29, 63 (1975).
- Turner J. W.*, Trans. NY Acad. Sci., 36 800 (1974); Bull. Cl. Sci. Acad. Belg., 61, 293 (1975).
- Schiffmann Y.* Phys. Rep., 64, 87 (1980).

См. также разд. 1.5.2.

### 9.2. Общий метод решения

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983 (См. [1].)

### 9.3. Анализ бифуркаций для конечных геометрий

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

См. также работы, указанные к разд. 9.1.

### 9.4. Обобщенные уравнения Гинзбурга—Ландау

- Haken H.*, Z. Phys., B21, 105 (1975).
- Haken H.*, Z. Phys., B22, 69 (1975); B23; 388 (1975).

Другой подход (к более ограниченному классу задач), основанный на использовании масштабного преобразования, см. в работах *Kuramoto Y., Tsusuki T.*, Progr. Theor. Phys., 52, 1399 (1974).

*Wunderlin A., Haken H.*, Z. Phys., B21, 393 (1975).

### 9.5. Упрощение обобщенных уравнений Гинзбурга—Ландау Образование структур в конвекции Бенара

- Хакен Г.*, не опубликовано. Уравнение (9.5.15) при  $A = 0$  было выведено другим способом в работе
- Swift J., Hohenberg P. C.*, Phys. Rev., A15, 319 (1977).

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

## 10. ВЛИЯНИЕ ШУМА

### 10.1. Общий подход

См. ссылки к главе 4 и монографию

*Horsthemke W.*, *Lefever R.*, Noise-Induced Transitions, Springer Series in Synergetics, vol. 15, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

### 10.2. Простой пример

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. (См. [1].)

### 10.3. Численное решение уравнения Фоккера—Планка для комплексного параметра порядка

*Risken H.*, *Z. Phys.*, **186**, 85 (1965); **191** 302 (1966).

*Risken H.*, *Vollmer H. D.*, *Z. Phys.*, **201**, 323 (1967); **204**, 240, (1967).

*Risken H.*—In: Progress in Optics, vol. VIII, Wolf Ed. (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1970, p. 239.

### 10.4. Некоторые общие теоремы о решениях уравнения Фоккера—Планка

*10.4.1. Зависящие и не зависящие от времени решения уравнения Фоккера—Планка для случая, когда дрейфовые коэффициенты линейны по координатам, а коэффициенты диффузии постоянны*

*Uhlenbeck G. E.*, *Ornstein L. S.*, *Phys. Rev.*, **36**, 823 (1930).

*Wax N.* (ed.), Selected Papers on Noise and Statistical Processes, Dover, New York, 1954.

*10.4.2. Точные стационарные решения уравнения Фоккера—Планка для систем, находящихся в детальном равновесии*

Мы придерживаемся работ

*Graham R.*, *Haken H.*, *Z. Phys.*, **248**, 389 (1971).

*Risken H.*, *Z. Phys.*, **251**, 231 (1972).

Аналогичные идеи использованы в работах

*Haken H.*, *Z. Phys.*, **219**, 246 (1969).

*Haken H.*, *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 67 (1975).

*Graham R.*, *Z. Phys.*, **B40**, 149 (1980).

*10.4.4. Важные частные случаи*

*Haken H.*, *Z. Phys.*, **219**, 246 (1969).

### 10.5. Поведение нелинейных стохастических систем вблизи критических точек: краткие выводы

Другой подход см. в книге

*Haken H.*, Synergetics, Springer Series in Synergetics, vol. 1, 3rd., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983 (См. [1].)

Суть его состоит в том, что за исходные принимаются непосредственно уравнение для многочастичной функции распределения или уравнение Фоккера—Планка, из которых исключают подчиненные переменные.

## 11. ДИСКРЕТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С ШУМОМ

Основные работы по дискретным отображениям перечислены в разд.8.11.2. Масштабные свойства дискретных отображений с шумом проанализированы в работах

*Crutchfield J. P., Huberman B. A.*, Phys. Lett., **77A**, 407 (1980).

*Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J.*, Phys. Rev. Lett., **46**, 935 (1981).

*Shraiman B., Wayne C. E., Martin P. C.*, Phys. Rev. Lett., **46**, 933 (1981).

Мы придерживались работ

*Mayer-Kress G., Haken H.*, J. Stat. Phys., **26** 149 (1981).

*Haken H., Mayer-Kress G.*, Z. Phys., **B43**, 185 (1981).

*Haken H.*— In: Chaos and Order in Nature, Springer Series in Synergetics, vol. 11, *Haken H.* (ed.), Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, p. 2.

*Haken H., Wunderlin A.*, Z. Phys., **B46**, 181 (1982).

## 12. ПРИМЕР НЕРАЗРЕШИМОЙ ПРОБЛЕМЫ В ДИНАМИКЕ

*Gödel K.*, Monathsh. Math. Phys., **38**, 173 (1931).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Moser J.*, Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions. Math. Ann., **169**, 136 (1967).

- Автоволновые процессы в системах с диффузией.— Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
- Агладзе К. И. Исследование вращающихся спиральных волн в химической активной среде.— Пущино: ОНТИ НЦБИ, 1983. Препринт.
- Аладьев В. З. Кибернетическое моделирование биологии развития.— В сб.: Параллельная обработка информации и параллельные алгоритмы.— Таллин: Валгус, 1981, с. 211—277.
- Алексеев В. М. Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики.— В кн.: IX летняя математическая школа.— Киев: Институт математики УССР, 1972, с. 212—341.
- Алексеев В. М. Символическая динамика.— В кн.: IX летняя математическая школа.— Киев: Институт математики УССР, 1976, с. 72—134.
- Алексеев В. М., Якобсон М. В. Символическая динамика и гиперболические системы.— В кн.: Боуэн Р. Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979, с. 196—240.
- Алдушин А. П., Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. К феноменологической теории спинового горения.— Черногоровка: Отделение Института физ. химии, 1981. Препринт.
- Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы.— ДАН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 247—250.
- Андронов А. А. Собрание трудов А. А. Андропова.— М.: Изд-во АН СССР 1956.
- Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка.— М.: Наука, 1966.
- Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.
- Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е. Многочастотные и стохастические автоколебания в генераторе с инерционной нелинейностью.— Радиотехника и электроника, 1982, № 10, с. 1972—1978.
- Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. В. О бифуркациях в трехмерной двухпараметрической автономной колебательной системе со странным аттрактором.— Изв. вузов. Радиофизика, 1983, т. 26, № 2, с. 169—176.
- Анищенко В. С., Астахов В. С. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью.— Радиотехника и электроника, 1983, № 6, с. 1109.
- Анищенко В. С. Взаимодействие странных аттракторов (СА). Переменяемость типа «хаос—хаос».— Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 10, вып. 10, с. 629.
- Анищенко В. С., Климонтович Ю. Л. Эволюция энтропии в генераторе с инерционной нелинейностью при переходе к стохастичности через последовательность бифуркаций удвоения.— Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 10, вып. 14, с. 876—880.
- Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды МИАН, 1967, т. 90, с. 3—209.

<sup>1</sup> Добавлена переводчиком и редактором книги, — Прим. ред.

- Аносов Д. В.* Вступительная статья.— В кн.: Гладкие динамические системы.— М.: Мир, 1977, с. 7—31.
- Антипов С. В., Незлин М. В., Родионов В. К., Снежкин Е. Н., Трубников А. С.* Солитоны Россби: устойчивость, столкновения, асимметрия и генерация течениями со сдвигом скорости.— ЖЭТФ, 1983, т. 84, вып. 4, с. 1357—1372.
- Антипов С. В., Незлин М. В., Родионов В. К., Снежкин Е. Н., Трубников А. С.* Стабилизация неустойчивости тангенциального разрыва на мелкой воде при «сверхзвуковом» течении жидкости.— Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, вып. 7, с. 319—322.
- Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1971.
- Арнольд В. И.* Лекции о бифуркациях и версальных семействах.— Успехи матем. наук, 1972, т. 27, № 5, с. 119—184.
- Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
- Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
- Арнольд В. И.* Теория катастроф. Изд. 2-е, доп.— М.: Изд-во Московского университета, 1983.
- Арнольд В. И.* Особенности бифуркации и катастрофы.— Успехи физ. наук, 1983, т. 141, вып. 4, с. 569—590.
- Арнольд В. И., Авец А. М.* Эргодические проблемы классической механики. III. Неустойчивые системы.— В кн.: Дискретные и непрерывные динамические системы.— Владивосток, 1981, с. 42—92.
- Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Наука, 1981.
- Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов.— М.: Наука, 1984.
- Афанасьев П. Б., Зельдович Я. Б., Тодес О. М.* О пространственном распределении осадков при кристаллизации взаимно диффундирующих веществ.— Ж. физ. химии, 1949, т. 23, вып. 2, с. 156—179.
- Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников О. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. Труды Московского матем. общества, 1982, т. 44, с. 150—212.
- Афраймович В. С., Шильников Л. П.* О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижных точек типа седло—узел.— ДАН СССР, 1974, т. 219, № 6, с. 1282—1285.
- Афраймович В. С., Шильников Л. П.* О достижимых переходах от системы Морса—Смейла к системе со многими периодическими движениями.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1974, т. 38, вып. 6, с. 1248—1288.
- Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем.— ПММ, 1977, т. 42, вып. 4, с. 618—627.
- Афраймович В. С., Шильников Л. П.* О бифуркации коразмерности 1, приводящей к появлению счетного множества торов.— ДАН СССР, 1982, т. 262, № 4, с. 777—780.
- Афраймович В. С., Шильников Л. Г.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность.— В сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений.— Горький: Горьковский университет, 1983, с. 3—267.
- Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* Колебательные процессы в нелинейных диссипативных средах. О некоторых упрощенных моделях.— М.: ИПМ АН СССР, 1982. Препринт № 53.
- Бабский В. Г., Маркман Г. С., Уринцев А. Л.* Значение брусселятора как

- методической модели теоретической биологии.— В сб.: Молекулярная биология.— Киев: Наукова думка, 1982, вып. 30, с. 82—93.
- Бабский В. Г., Мышкис А. Д.* Математические модели в биологии, связанные с учетом последствия.— В кн.: *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.— М.: Мир, 1983, с. 383—394.
- Базыкин А. Д., Хибник А. И.* Билокальная модель диссипативной структуры.— *Биофизика*, 1982, т. 27, вып. 1, с. 132—136.
- Бакай А. С., Степановский Ю. П.* Адиабатические инварианты.— Киев: Наукова думка, 1981.
- Балкарей Ю. И., Никулин М. Г.* О моделировании автоволновой среды в полупроводниках.— *ФТП*, 1976, т. 10, № 8, с. 1455.
- Балкарей Ю. И., Никулин М. Г.* Полупроводниковая автоволновая среда.— *ФТП*, 1978, т. 12, № 2, с. 347.
- Барелко В. В.* Явления бегущих волн в реакциях глубокого окисления на платине.— В сб.: Проблемы кинетики и катализа, вып. 48.— М.: Институт хим. физики, АН СССР, 1981, с. 61—80.
- Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Промежуточные асимптотики в математической физике.— *Успехи матем. наук*, 1971, т. 26, с. 115.
- Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.
- Баркалов И. М., Барелко В. В., Гольдманский В. И., Кирюхин Д. П., Занин А. М.* Пороговые явления и автоволновые процессы в низкотемпературных твердофазных химических реакциях.— Черногоровка: Отделение Института хим. физики АН СССР, 1983, Препринт.
- Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.
- Белый В. В.* О гидродинамических флуктуациях в неоднородно нагретом газе.— *ТМФ*, 1984, т. 58, № 3, с. 421—434.
- Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация.— М.: Мир, 1969.
- Бифуркационные переходы в некоторых задачах теории гидродинамической устойчивости.*— Свердловск: Институт механики сплошных сред, 1982. Препринт.
- Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем.— М.: Наука, 1971.
- Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике.— М.: Наука, 1981.
- Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.: Гостехиздат, 1946.
- Боголюбов Н. Н.* О стохастических процессах в динамических системах.— *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1978, т. 9, с. 501—579.
- Боголюбов Н. Н.* Избранные труды по статистической физике.— М.: Изд-во Московского университета, 1979.
- Бонгард М. М.* Проблемы узнавания.— М.: Наука, 1967.
- Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г.* Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках.— М.: Наука, 1972.
- Боуэн Р.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
- Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М.: Мир, 1977.
- Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фужаев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.
- Ван-Дайк М.* Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1967.
- Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.— *УФН*, 1979, т. 129, № 4, с. 625—666.
- Вильсон К., Козут Дж.* Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение.— М.: Мир, 1975.
- Володин Ю. Е., Борелко В. В., Мержанов А. Г.* Стоячие тепловые волны окисления аммиака на платиновой нити.— *Хим. физика*, 1982, № 5, с. 670—678.

- Володин Ю. Е., Бейбутян В. М., Барелко В. В., Мержанов А. Г. «Кризис» теплообмена в системе платина — гелий. — ДАН СССР, 1982, т. 264, № 3, т. 604—607.
- Волькенштейн М. В. Молекулярная биофизика. — М.: Наука, 1975.
- Волькенштейн М. В. Общая биофизика. — М.: Наука, 1978.
- Волькенштейн М. В. Физика и биология. — М.: Наука, 1980.
- Волькенштейн М. В. Биофизика. — М.: Наука, 1981.
- Волперт А. И., Иванов А. Н. О пространственно-неоднородных решениях нелинейных диффузионных уравнений. — Черноголовка: Отделение Института хим. физики АН СССР, 1981. Препринт.
- Волперт А. И. Волновые решения параболических уравнений. — Черноголовка: Отделение Института хим. физики АН СССР, 1983.
- Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм. — Успехи матем. наук, 1984, т. 39, вып. 3, с. 3—37.
- Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. Ч. 1, 2. — Мат. сб. 1973, т. 88, с. 475—492; т. 90, № 1, с. 139—156.
- Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн. — УФН, 1979, т. 128, № 4, с. 579—624.
- Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Хаотическая динамика простых систем. — Природа, 1981, № 2, с. 54—65.
- Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры. — Горький: ИПФ АН СССР, 1983. Препринт № 87.
- Гаузе Г. Ф., Витт А. А. О периодических колебаниях численности популяций: математическая теория релаксационного взаимодействия между хищниками и жертвами и ее применение к популяциям двух простейших. — Изв. АН СССР, отд. мат. и естеств. наук, 1934, т. 10, с. 1551—1559.
- Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. — М.: Наука, 1982.
- Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. — М.: Наука, 1981.
- Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: Мир, 1973.
- Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. — М.: Наука, 1983.
- Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977.
- Гонченко С. В., Шильников Л. П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми. — Успехи матем. наук, 1983, т. 38, вып. 5, с. 154—155.
- Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Шелепин Л. А. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры. — М.: Наука, 1980.
- Гречаный О. А. Статистический подход и функциональные модели в кинетической теории газов. — ТМФ, 1978, т. 36, № 2, с. 224—239.
- Гречаный О. Б. Кинетические уравнения с учетом длинноволновых статистических связей и крупномасштабных флуктуаций. — ТМФ, 1980, т. 43, № 2, с. 273—288.
- Гудвин Б. Аналитическая физиология клеток и развивающихся организмов. — М.: Мир, 1979.
- Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии. — УФН, 1983, т. 141, вып. 2, с. 221—256.
- Давыдов А. С. Биология и квантовая механика. — Киев: Наукова думка, 1979.
- Данилов Ю. А., Кадомцев Б. Б. Что такое синергетика? — В сб.: Нелинейные волны. Самоорганизация. — М.: Наука, 1983, с. 5—16.

- Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.
- Диканский А. С. Уравнения диффузии с нелинейной кинетикой.— Пущино: ОНТИ НЦБИ, 1979. Депонировано в ВИНТИ № 1405—80.
- Динамическая теория биологических популяций/Под ред. Полуэктова Р. А.— М.: Наука, 1974.
- Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа.— М.: Наука, 1974.
- Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником.— М.: ИПМ АН СССР, 1980. Препринт № 31.
- Дородницын В. А., Князева И. В., Свищевский С. Р. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях.— М.: ИПМ АН СССР, 1982. Препринт № 79.
- Жаботинский А. М. Концентрационные волны.— М.: Наука, 1974.
- Жаботинский А. М. Автоволны в биофизике.— В сб.: Нелинейные волны. Самоорганизация.— М.: Наука, 1983.
- Жаботинский А. М., Заикин А. Н., Корзухин М. Д., Крейцер Г. П. Математическая модель автоколебательной химической реакции.— Кинетика и катализ, 1971, т. 12, № 3, с. 585.
- Жирмудский А. В., Кузьмин В. И. Критические уровни в процессах развития биологических систем.— М.: Наука, 1982.
- Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
- Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
- Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах.— Новосибирск: Наука, 1982.
- Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний.— УФН, 1971, т. 105, с. 3—39.
- Заславский Г. М. Стохастичность квантовых систем.— В сб.: Нелинейные волны. Самоорганизация.— М.: Наука, 1983, с. 96—107.
- Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
- Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1982, т. 25, с. 591—618.
- Зельдович Я. Б., Тодес О. М. О математической формулировке теории периодического осаждения.— Ж. физ. химии, 1949, т. 23, вып. 2, с. 180—191.
- Змитриенко Н. В., Михайлов А. П. Инерция тепла.— М.: Знание, 1982.
- Зотин А. И. Термодинамический подход к проблемам развития, роста и старения.— М.: Наука, 1974.
- Зубарев Д. Н. Статистическая термодинамика процессов турбулентного переноса.— ТМФ, 1982, т. 53, № 1, с. 93—107.
- Зыков В. С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах.— М.: Наука, 1984.
- Иваницкий Г. Р., Кринский В. И. Автоволновые процессы: общие закономерности биологических, химических и физических активных сред.— Пущино: ОНТИ НЦБИ, АН СССР, 1982. Препринт.
- Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки.— М.: Наука, 1978.
- Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Морнев О. А. Автоволны: новое на перекрестках наук.— В сб.: Кибернетика живого. Биология и информация.— М.: Наука, 1984, с. 24—37.
- Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
- Кадомцев Б. Б., Рязанов А. И. Что такое синергетика?— Природа, 1983, № 8, с. 2—11.

- Кастлер Г.* Возникновение биологической организации.— М.: Мир, 1967.
- Кастри Дж.* Большие системы. Связность, сложность и катастрофы.— М.: Мир, 1982.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Нелинейная теория стационарных страт в диссипативных системах.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, № 5, с. 1675—1697.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Страты в разогретой электронно-дырочной плазме.— ФТП, 1979, т. 13, № 4, с. 721—734.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Стохастические неоднородные структуры в неравновесных системах.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, № 6, с. 2218—2238.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Стационарные и бегущие диссипативные структуры в активных кинетических средах.— Микроэлектроника, 1981, т. 10, № 5, с. 407—432.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Динамическая перестройка диссипативных структур.— ДАН СССР, 1982, т. 264, № 6, с. 1366—1370.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* «Пульсирующие» гетерофазные области в неравновесных системах.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, № 6, с. 2201—2214.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Свойства стационарных диссипативных структур в математических моделях морфогенеза.— Биофизика, 1982, т. 27, № 1, с. 137—143.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Нелинейная теория стоячих страт в высокочастотном газовом разряде.— Радиотехника и электроника, 1982, т. 27, № 12, с. 2415—2425.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Нелинейная теория страт в низкотемпературной плазме.— Радиотехника и электроника, 1983, т. 28, № 1, с. 132—142.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* О спонтанном возникновении нерегулярных или пульсирующих структур при расслоении однородного состояния неравновесных систем.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 5, с. 1104—1108.
- Кернер Б. С., Осипов В. В.* Бегущие «гетерофазные» области в неравновесных системах.— Микроэлектроника, 1983, т. 12, № 6.
- Климонтович Ю. Л.* Уменьшение энтропии в процессе самоорганизации. S-теорема (на примере перехода через порог генерации).— Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 9, вып. 23, с. 1412—1416.
- Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.— М.: Наука, 1975.
- Когерентные кооперативные явления.— Труды ФИАН, т. 87.— М.: Наука, 1976.
- Колебательные процессы в биологических и химических системах.— Пушкино: ОНТИ НЦБИ, 1967.
- Колебательные процессы в биологических и химических системах.— Пушкино: ОНТИ НЦБИ, 1971.
- Колесов Ю. С., Швирта Д. И.* Автоколебания в системах с запаздыванием.— Вильнюс: Моклас, 1979.
- Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его изменение к одной биологической задаче.— Бюлл. МГУ, секция А математика и механика, 1937, т. 1, вып. 6, с. 3—28.
- Колмогоров А. Н.* О таблицах случайных чисел.— В сб.: Семиотика и информатика, вып. 18.— М.: ВИНТИ, 1982, с. 3—13.
- Константинов А. Б., Маломед Б. А., Гольберг С. М.* Об устойчивости одномерных слабонадкритических структур.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 6, с. 1364—1368.
- Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
- Крапивин Ф. В., Свирежев Ю. М., Тарко А. М.* Математическое моделирование глобальных биосферных процессов.— М.: Наука, 1982.
- Кринский В. И., Михайлов А. С.* Автоволны.— М.: Знание, 1984.
- Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической механики.— М.: Изд-во АН СССР, 1950.

- Кузнецов Е. А., Львов В. С., Предтечинский А. А., Соболев В. С., Уткин Е. Н. О проблеме перехода к турбулентности в течении Куэтта.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, вып. 4, с. 226—229.
- Кузнецов Ю. А., Панфилов А. В. Стохастические волны в системе Фитц—Хью—Нагумо.— Пушкино: ОНТИ НЦБИ, 1981, Препринт.
- Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы.— М.: Знание, 1983.
- Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А. Многомерные диссипативные структуры в триггерных средах.— М.: ИГМ АН СССР, 1981. Препринт № 85.
- Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы.— М.: Наука, 1980.
- Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах.— М.: Наука, 1983.
- Лайтфут Э. Явления переноса в живых системах.— М.: Мир, 1977.
- Леонтович М. А. Основные уравнения кинетической теории с точки зрения случайных процессов.— ЖЭТФ, 1935, т. 5, с. 211.
- Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.
- Лешец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1961.
- Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем.— М.: Наука, 1982.
- Лихарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами.— М.: Изд-во Московского университета, 1978.
- Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая механика.— М.: Мир, 1984.
- Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами.— ДАН СССР, 1978, т. 243, № 1, с. 26—29.
- Львов В. С. Лекции по физике нелинейных явлений.— Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 1977.
- Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.—Л.: ОНТИ, 1935.
- Маломед Б. А. Распространение автоколебательных волн вдоль полосы.— Черноголовка: Отделение Института хим. физики, 1981. Препринт.
- Маломед Б. А. Некоторые режимы распространения автоколебательных волн.— ЖТФ, 1981, т. 51, № 12, с. 2476—2482.
- Маркин В. С., Пастушенко В. Ф., Чизмаджев Ю. А. Теория возбудимых сред.— М.: Наука, 1981.
- Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии.— Лекции о моделях.— М.: Мир, 1983.
- Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии.— М.: Наука, 1980.
- Математическая биология развития.— М.: Наука, 1982.
- Математические методы в биологии.— Киев: Наукова думка, 1977.
- Михайлов А. С., Кринский В. И. Аналитическая оценка размеров ревербратора.— Биофизика, 1982, т. 27, с. 967—971.
- Михайлов А. С., Упоров И. В. Спиральные волны и ведущие центры в модели Тьюринга.— ДАН СССР, 1979, т. 249, № 3, с. 733—736.
- Михайлов А. С., Упоров И. В. Критические явления в средах с размножением распадом и диффузией.— УФН, 1984, т. 144, вып. 1, с. 79—112.
- Монин А. С. О природе турбулентности.— УФН, 1978, т. 125, № 1, с. 97—122.
- Морозов А. Г., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Фридман А. М. Моделирование процесса генерации спиральной структуры галактик на установке с вращающейся жидкостью.— Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 39, вып. II, с. 504—507.
- Моффат Г. Некоторые направления развития теории турбулентности.— В кн.: Современная гидродинамика. Успехи и проблемы/Под ред. Бэтчелора Дж., Моффата Г.— М.: Мир, 1984.

- Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1972.
- Неймарк Ю. И. О возникновении стохастичности в динамических системах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4, с. 602—607.
- Неймарк Ю. И. Теория нелинейных колебаний и стохастические движения динамических систем.— В кн.: Динамика систем.: Горький, 1977, № 12, с. 94—95.
- Неймарк Ю. И. Инвариантные многообразия и стохастические движения динамических систем.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.— Киев: 1977, с. 160—168.
- Найфэ А. Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.
- Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников М. В. Неустойчивость Кельвина—Гельмгольца и Большое Красное Пятно Юпитера.— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, вып. 6, с. 190—193.
- Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие./Под ред. Гапонова А. В.— М.: Наука, 1981.
- Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность/Под ред. Рабиновича М. И.— Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
- Нелинейные волны: Самоорганизация/Под ред. Гапонова А. В., Рабиновича М. И.— М.: Наука, 1983.
- Нелинейные электромагнитные волны/Под ред. Усленги П.— М.: Мир, 1983.
- Неустойчивость в динамических системах. Приложения к небесной механике/Под ред. Себекея В. Дж.— М.: Мир, 1982.
- Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.— М.: Мир, 1979.
- Новиков Е. А. Переменяемость и масштабное подобие в структуре турбулентного потока.— ПММ, 1971, т. 35, с. 2.
- Новиков П. С. Избранные труды.— М.: Наука, 1979.
- Обухов А. М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование.— Успехи матем. наук, 1983, т. 38, вып. 4, с. 101—111.
- Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы.— М.: Мир, 1978.
- Осипов А. И. Неравновесный газ.— М.: Знание, 1984.
- Паташинский А. З., Покровский В. Л. Метод ренорм-группы в теории фазовых переходов.— УФН, 1977, т. 121, с. 55—96.
- Петвиашвили В. И. Самофокусировка потенциальной дрейфовой волны.— Физика плазмы, 1977, т. 3, с. 270—272.
- Петвиашвили В. И. Красное Пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме.— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, с. 632—635.
- Петвиашвили В. И. Уединенные вихри в зональном потоке во вращающейся атмосфере.— Письма в Астрономический журнал, 1983, т. 9, с. 253—256.
- Петвиашвили В. И., Яньков В. В. Двухслойные вихри во вращающейся стратифицированной жидкости.— ДАН СССР, 1982, т. 267, с. 825—828.
- Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний.— М.—Л.: Наука, 1972.
- Плыкин Р. В. О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов.— Успехи матем. наук, 1980, т. 35, вып. 3, с. 94—104.
- Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах.— М.: Наука, 1983.
- Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
- Рабинович М. И. Стохастические колебания и турбулентность.— УФН, 1978, т. 125, № 1, с. 123—168.
- Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.

- Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1974.
- Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биологии.— М.: Наука, 1975.
- Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика.— М.: Наука, 1984.
- Романовский Ю. М. Проблемы математической биофизики.— М.: Изд-во Московского университета, 1981.
- Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы.— М.: Наука, 1976.
- Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты.— М.: Мир, 1971.
- Сбитнев В. И. Гиперболические паттерны.— Ленинград: ЛИЯФ, 1983. Препринт № 871.
- Свирижев Ю. М., Елизаров Е. Я. Математическое моделирование экологических систем.— В кн.: Проблемы космической биологии.— М.: Наука, 1972, т. 20, с. 3—156.
- Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ.— М.: Наука, 1978.
- Свирижев Ю. М., Пасеков В. П. Математическая генетика.— М.: Наука, 1982.
- Сендов Б. Х. Математические модели процесса деления и дифференциации клеток.— М.: Изд-во Московского университета, 1976.
- Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты.— М.: Наука, 1980.
- Синай Я. Г. Случайность неслучайного.— Природа, 1981, № 3, с. 72—80.
- Синергетика. Труды международного симпозиума «Синергетика и кооперативные явления в твердых телах и макромолекулах». Таллин, 27 сентября—1 октября 1982 г.— Таллин: Валгус, 1983.
- Синергетика: Сб. статей.— М.: Мир, 1984.
- Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.— М.: Сов. радио, 1977.
- Сонечкин Д. М. Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
- Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981.
- Стратонович Р. Л. Неравновесная нелинейная термодинамика.— М.: Наука, 1985.
- Структурная турбулентность: Сб. статей/Под ред. Гольдштика М. А.— Новосибирск: Наука, 1982.
- Термодинамика биологических процессов.— М.: Наука, 1976.
- Термодинамика и кинетика биологических процессов.— М.: Наука, 1980.
- Турбулентность. Принципы и применения.— М.: Мир, 1981.
- Факторы разнообразия в экологии и популяционной генетике/Под ред. Молчанова А. М., Базыкина А. Д.— Пущино: 1980.
- Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем.— УФН, 1983, т. 141, вып. 2, с. 343—374.
- Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.
- Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем.— М.: Наука, 1969.
- Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1967.
- Чириков Б. В. Нелинейный резонанс.— Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 1977.
- Чириков Б. В. Взаимодействие нелинейных резонансов.— Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 1978.
- Шапиро А. П., Луппов С. П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии.— М.: Наука, 1983.
- Шарковский А. И. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя.— Укр. мат. ж., 1964, т. 16, № 1, с. 61—71.

- Шарковский А. И.* О циклах и структуре непрерывного отображения.— Укр. мат. ж., 1965, т. 17, № 3, с. 104—111.
- Шелепин Л. А.* Когерентность.— М.: Знание, 1983.
- Шень А.* Частотный подход к определению понятия случайной последовательности.— В сб.: Семиотика и информатика, вып. 18.— М.: ВИНТИ, 1982, с. 14—42.
- Шильников Л. П.* О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий.— Матем. сб., 1983, т. 61, № 4, с. 443—466.
- Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре—Биркгофа.— Матем. сб., 1967, т. 74, № 3, с. 378—397.
- Шильников Л. П.* О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло.— Матем. сб., 1968, т. 77, с. 461—472.
- Шильников Л. П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло—фокус.— Матем. сб., 1970, т. 81, с. 92—103.
- Шкадинский К. Г., Барелко В. В., Курочка И. И.* О множестве решений в виде бегущих волн для уравнений типа горения.— ДАН СССР, 1977, т. 233, с. 639.
- Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах.— М.: Мир, 1979.
- Эйген М.* Самоорганизация материи и эволюции биологических макромолекул.— М.: Мир, 1973.
- Эйген М., Винклер Р.* Игра жизни.— М.: Наука, 1979.
- Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул.— М.: Мир, 1982.
- Яблонский Г. С., Быков В. И., Горбань А. Н.* Кинетические модели каталитических реакций.— Новосибирск: Наука, 1983.
- Яблонский Г. С., Быков В. И., Елохин В. И.* Кинетика модельных реакций гетерогенного катализа.— Новосибирск: Наука, 1984.
- Afraimovich V. S., Shilnikov L. P.* On strange attractors and quasi-attractors.— In: Nonlinear dynamics and Turbulence/Barenblatt G. I., ed.— Boston, London, Melbourne: Pitman, 1983, p. 1—34.
- Engelbrecht J.* Nonlinear Waves in active media.— Tallin: Acad. Sci. of the Estonian SSR, 1983. Preprint.
- Zubarev D. N., Morozov V. G.* Statistical mechanics of nonlinear hydrodynamic fluctuations.— Physica, 1983, 120A, 411—467.

### Литература, добавленная при корректуре

- Арнольд В. И.* Экспоненциальное разбегание траекторий и его гидродинамические приложения.— В сб. Н. Е. Кочин и развитие механики.— М.: Наука, 1984.
- Аршавский Ю. И., Гельфанд И. М., Орловский Г. Н.* Мозжечок и управление ритмическими движениями.— М.: Наука, 1984.
- Вихри и волны:* Сб. статей.— М.: Мир, 1984.
- Вишик М. И., Комеч А. И.* Задача Коши для уравнений Хопфа, Лиувилля и прямого и обратного уравнений Колмогорова, соответствующих системе Навье—Стокса.— В сб.: Н. Е. Кочин и развитие механики.— М.: Наука, 1984.
- Вольтер В. Б.* Кто же открыл колебательные реакции? Химия и жизнь, 1985, № 2, с. 8—9.
- Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Нелинейная физика. Стохастичность и структуры.— В сб.: Физика XX века Развитие и перспективы.— М.: Наука, 1984.

- Гидродинамика межфазных поверхностей: Сб. статей.— М.: Мир, 1984.
- Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах.— Киев: Наукова думка, 1984.
- Климонтович Н. Ю. Без формул о синергетике.— Минск: Вышайшая школа, 1985.
- Кузнецов С. П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью.— Изв. вузов. Радиофизика, 1982, т. 25, с. 1410—1428.
- Лукащук С. Н., Предтеченский А. А. Наблюдение резонансных торов в фазовом пространстве течения Куэтта.— ДАН СССР, 1984, т. 274, № 6, с. 1317—1320.
- Львов В. С., Предтеченский А. А., Черных А. И. Бифуркации и хаос в системе вихрей Тейлора: натурный и численный эксперимент.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, в. 3, с. 1099—1121.
- Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные эволюционные уравнения.— Таллин: Валгус, 1984.
- Песин Я. Б. Семейство инвариантных многообразий, отвечающее ненулевым характеристическим показателям.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, т. 40, № 6, с. 1332—1379.
- Песин Я. Б. Описание  $\pi$ -разбиения диффеоморфизма с инвариантной мерой.— Матем. заметки, 1977, т. 22, № 1, с. 29—44.
- Песин Я. Б. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях без фокальных точек.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1977, т. 41, № 6, с. 1252—1288.
- Песин Я. Б. Геодезические потоки с гиперболическим поведением траекторий и связанные с ними объекты.— УМН, 1981, т. 36, № 4, с. 3—51.
- Самоорганизация в физических, химических и биологических системах.— Кишинев: Штиинца, 1984.
- Тода М. Теория нелинейных решеток.— М.: Мир, 1984.
- Черных А. И. Численное моделирование цепочки вихрей Тейлора.— Новосибирск: Институт автоматики и электрометрии СО АН СССР, 1981. Препринт № 147.
- Шец Дж. Турбулентное течение. Процессы вдува и перемешивания.— М.: Мир, 1984.
- Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.
- Pesin Ya. B., Sinai Ya. G. Hyperbolicity and stochasticity of dynamical systems.— In: Soviet Math. Phys. Reviews.— N. Y.: Gordon and Breach, Harwood Acad. Publishers, 1982, p. 53—115.
- Sharkovskii A. N. «Dry» turbulence.— In: Nonlinear and turbulent processes in physics.— N. Y.: Gordon and Breach, Harwood Acad. Publishers, 1984, p. 1621—1626.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокатализ 35, 42, 61  
Аспектное отношение 25  
Аттрактор 48, 49, 59, 72, 73  
— *Лоренца* 57  
— *Ресслера* 56  
— странный (хаотический) 55—57, 69—70, 72, 307, 308  
Аттракторы, классификация по показателям *Ляпунова* 72, 73, 308  
Аттракторы-многообразия 49—55
- Белюсова—Жаботинского* реакция 31—33  
— — — концентрические волны 33  
— — — спиральные волны 33  
*Бенара* ячейки 23—25  
Бистабильность 27  
Бифуркация 63—69  
— из предельного цикла 65—68, 283—295  
— — — — в два предельных цикла 66, 288—290  
— — — — в тор 66, 293—295  
— — — удвоение периода 67, 68, 290, 291  
— из тора 68, 69, 295—306  
— — в другие торы 68, 69, 307, 308  
— — в странные аттракторы 307, 308  
— — — комплексное невырожденное собственное значение пересекает мнимую ось 302—306  
— — — простое вещественное собственное значение становится положительным 299—302  
— — — стягивание в предельный цикл 306  
— — — удвоение периода 309  
— из узла или фокуса 63—65, 262—269  
— — — — *Хопфа* 65, 271—280  
— — — — в предельный цикл 65  
— — — — в два узла или два фокуса 63—65
- — — — — взаимная синхронизация двух осцилляторов 280—283  
— — — — — кратное вещественное собственное значение становится положительным 269, 270  
— — — — — простое вещественное собственное значение становится положительным 255—269
- Броуновское** движение 44, 179  
**Винеровский** процесс 255  
«Выхлоп» тонкой оболочки 29, 30  
Вычислительные машины 36, 37
- Ганна* осциллятор 28  
Группа 100, 131  
— *Абелева* 101, 125, 167  
— — ограниченных операторов в гильбертовом пространстве 168  
— неприводимое представление 128
- Диффузии матрица 311  
«Дорожки» в облаках 23
- Инвариантность** 102  
Интеграл по траекториям 353
- КАМ** (*Колмогорова—Арнольда—Мозера*) условия 95  
Картина *Ландау—Хопфа* 306, 307  
— *Помо—Манневилля* 309  
— *Рюэля—Такенса* 307, 308  
Контрчлен 194
- Лапласа* детерминизм 43  
Логарифм от матрицы (оператора) 125
- Малые знаменатели** 223  
*Михаэлиса—Ментен* член 311

- Многокомпонентность 45—46  
 Многообразие 49—50  
 — дифференцируемое 50—51  
 — инвариантное 54  
 — неустойчивое 55  
 — притягивающее 54  
 — устойчивое 55  
 — центральное 55  
 Морфогенез 34—35  
 Морфогены 35
- Нелинейность** 42  
**Неустойчивости** 20  
 — в лазерах 26—27  
 — в механических системах 29—30  
 — в плазме 28  
 — в твердом теле 28—29  
 — в электронике 30—31  
 — термоупругие 29  
 Неустойчивость *Бенара* (конвективная) 21—25, 57, 322—326  
 — *Маренго* 25  
 — *Тейлора* 20—23  
 — тонких оболочек 29—30
- Отображение дискретное** 77—86  
 — — критическое замедление 84  
 — — нарушение симметрии 84  
 — — показатель *Ляпунова* 84, 85  
 — — принцип подчинения 84  
 — — с шумом 85, 86, 349—357  
 — логистическое 80, 82  
 — *Пуанкаре* 78, 83  
 — с шумом, влияние границ 310, 311, 356  
**Параметр порядка** 60—62  
**Перенормированные частоты** 236  
**Пламена** 33  
**Подстановка** *Ито* 179  
 — *Стратоновича* 180  
**Подчиненная переменная** 61, 62  
**Показатель *Ляпунова*** 70—73, 110—112  
 — — для дискретного отображения 84, 85  
 — — обобщенный характеристический 99, 110—112  
 — — характеристический 92, 93, 97, 115  
 — — непрерывный спектр 319—322  
 — — дискретный спектр 317, 318  
 — *Флоке* 123  
**Популяций динамика** 35  
**Поток** 47
- Предельный цикл** 48—51  
**Приближение адиабатическое** 61, 211, 213—215, 225—232  
 — вращающейся волны 292  
 — линейное 60  
**Принцип подчинения** 61, 62, 232—236, 300, 318, 321  
 — — для дискретного отображения 84  
 — — — — — с шумом 245, 246  
 — — для стохастических дифференциальных отображений 255—261  
**Процедура *Ито*** 180—184  
 — *Стратоновича* 180, 184—187
- Разрушение мостов** 29  
**Распознавание образов** 37  
**Рост кристаллов** 29
- Самоорганизация** 19  
 — через изменение управляющих параметров 86  
 — через изменение числа компонент 87—88  
 — через переходы 88  
**Силы когерентные** 178  
 — макроскопические 178  
 — флуктуирующие 178  
**Система автономная** 62  
 — биологическая 33, 34  
 — иммунная 36  
 — синергетическая 39, 40  
**Системы, далекие от состояния термодинамического равновесия** 73  
 — надежные из ненадежных элементов 37, 38  
**Слайн-функция** 154  
**Статистическое усреднение** 178  
**Стержня изгиб** 29  
***Стоуна* тесрема** 168  
**Стохастичность** 43—44  
**Структуры в жидкости** 19—26  
 — временные 19  
 — в химии 31—33  
 — в электронике 30—31  
 — пространственно-временные 19  
 пространственные 19  
 — — граничные условия 312, 313  
 — — эволюция 75—77  
**Субгармоник генерация** 67, 78, 291, 292
- Тейлора* вихри 20—23  
**Тор** 51—54

- обмотка 52  
Туннельный диод 28, 29
- Удвоение периода 67  
— — последовательность 81, 82  
— — точка накопления 81
- Управляющие параметры 42, 43
- Уравнение для параметров порядка 90  
— *Дуффинга* 68  
— *Лоренца* 57
- Уравнение «реакций с диффузией» 311  
— *Ресслера* 56
- Уровень макроскопический 45  
— мезоскопический 45  
— микроскопический 45
- Устойчивость, анализ по линейному приближению 60  
— потеря 88  
— структурная 57, 58
- Фазовые переходы 19  
*Фейгенбаума* число 82
- Флаттер 30  
Флуктуации 73—75, 88, 90  
— квантовые 44  
Функция от матриц 124
- Хаос 23, 27, 44, 69, 82, 306—309  
Химическая «праструктура» 34—35
- Чувствительность к изменениям начальных условий 44, 73
- Шум аддитивный 44  
— мультипликативный 44
- Эволюция 35, 36  
*Эйгена—Шустер* гиперциклы 35, 36  
Эксперимент *Нозля—Неймана* 39  
— *Эша* 39  
Экспонента от оператора (матрица) 115—120

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие к русскому изданию . . . . .	14
Предисловие . . . . .	15
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1. Что такое синергетика? . . . . .	19
1.2. Физика . . . . .	19
1.2.1. Жидкости: образование динамических структур . . . . .	19
1.2.2. Лазеры: когерентные колебания . . . . .	26
1.2.3. Плазма: неисчерпаемое разнообразие неустойчивостей . . . . .	28
1.2.4. Физика твердого тела: мультистабильность, импульсы, хаос . . . . .	28
1.3. Техника . . . . .	29
1.3.1. Строительная механика, сопротивление материалов, авиа- и ракетостроение: выпучивание после «выхлопа», флаттер и т. д. . . . .	29
1.3.2. Электротехника и электроника: нелинейные колебания . . . . .	30
1.4. Химия: макроскопические структуры . . . . .	31
1.5. Биология . . . . .	33
1.5.1. Несколько общих замечаний . . . . .	33
1.5.2. Морфогенез . . . . .	34
1.5.3. Динамика популяций . . . . .	35
1.5.4. Эволюция . . . . .	35
1.5.5. Иммунная система . . . . .	36
1.6. Общая теория вычислительных систем . . . . .	36
1.6.1. Самоорганизация вычислительных машин (в частности, параллельные вычисления) . . . . .	36
1.6.2. Распознавание образов машинами . . . . .	37
1.6.3. Надежные системы из ненадежных элементов . . . . .	37
1.7. Экономика . . . . .	38
1.8. Экология . . . . .	38
1.9. Социология . . . . .	38
1.10. Что общего между приведенными выше примерами? . . . . .	39
1.11. Какие уравнения нам нужны? . . . . .	40
1.11.1. Дифференциальные уравнения . . . . .	41
1.11.2. Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	41
1.11.3. Нелинейность . . . . .	42
1.11.4. Управляющие параметры . . . . .	42
1.11.5. Стохастичность . . . . .	43
1.11.6. Многокомпонентность и мезоскопический подход . . . . .	45
1.12. Как выглядят решения? . . . . .	46
1.13. Качественные изменения: общий подход . . . . .	57
1.14. Качественные изменения: типичные явления . . . . .	62
1.14.1. Бифуркация из одного узла (или фокуса) в два узла (или фокуса) . . . . .	63
1.14.2. Бифуркация из фокуса в предельный цикл (бифуркация Хопфа) . . . . .	65
1.14.3. Бифуркации из предельного цикла . . . . .	65

1.14.4. Бифуркации из тора в другие торы . . . . .	68
1.14.5. Странные аттракторы . . . . .	69
1.14.6. Показатели Ляпунова* . . . . .	70
1.15. Влияние флуктуаций (шумов). Неравновесные фазовые переходы . . . . .	73
1.16. Эволюция пространственных структур . . . . .	75
1.17. Дискретные отображения. Отображение Пуанкаре . . . . .	77
1.18. Дискретные отображения с шумом . . . . .	85
1.19. Пути к самоорганизации . . . . .	86
1.19.1. Самоорганизация через изменение управляющих параметров . . . . .	86
1.19.2. Самоорганизация через изменение числа компонент . . . . .	87
1.19.3. Самоорганизация через переходы . . . . .	88
1.20. Как мы намереваемся действовать дальше? . . . . .	88
<b>Глава 2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>91</b>
2.1. Примеры линейных дифференциальных уравнений: случай одной переменной . . . . .	91
2.1.1. Линейное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом . . . . .	92
2.1.2. Линейное дифференциальное уравнение с периодическим коэффициентом . . . . .	92
2.1.3. Линейное дифференциальное уравнение с квазипериодическим коэффициентом . . . . .	93
2.1.4. Линейное дифференциальное уравнение с вещественным ограниченным коэффициентом . . . . .	97
2.2. Группы и инвариантность . . . . .	99
2.3. Системы с вынуждающей силой . . . . .	103
2.4. Общие теоремы об алгебраических и дифференциальных уравнениях . . . . .	106
2.4.1. Вид уравнений . . . . .	106
2.4.2. Жорданова нормальная форма . . . . .	107
2.4.3. Некоторые общие теоремы о линейных дифференциальных уравнениях . . . . .	108
2.4.4. Обобщенные характеристические показатели и показатели Ляпунова . . . . .	110
2.5. Прямые и обратные уравнения: дуальные пространства решений . . . . .	112
2.6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	115
2.7. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами . . . . .	121
2.8. Теоретико-групповая интерпретация . . . . .	125
2.9. Теория возмущений* . . . . .	128
<b>Глава 3. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с квазипериодическими коэффициентами . . . . .</b>	<b>136</b>
3.1. Постановка задачи и теорема 3.1.1 . . . . .	136
3.2. Леммы . . . . .	139
3.3. Доказательство утверждения «а» теоремы 3.1.1.: построение треугольной матрицы (на примере матрицы $2 \times 2$ ) . . . . .	144
3.4. Доказательство квазипериодичности элементов треугольной матрицы $S$ по $\tau$ , а также периодичности по $\varphi_j$ и принадлежности классу $S^k$ по $\Phi$ (на примере матрицы $2 \times 2$ ) . . . . .	146
3.5. Построение треугольной матрицы $S$ и доказательство квазипериодичности ее элементов по $\tau$ , а также их периодичности $\varphi_j$ и принадлежности классу $S^k$ по $\Phi$ (для матрицы $m \times m$ все $\lambda$ различны) . . . . .	148
3.6. Приближенные методы. Сглаживание . . . . .	152

3.6.1. Вариационный метод . . . . .	152
3.6.2. Сглаживание . . . . .	153
3.7. Треугольная матрица $C$ и приведение ее к блочно-диагональному виду . . . . .	156
3.8. Общий случай: некоторые обобщенные характеристические показатели совпадают . . . . .	163
3.9. Решение уравнения (3.1.1) методом последовательных приближений . . . . .	168
<b>Глава 4. Стохастические нелинейные дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>177</b>
4.1. Пример . . . . .	178
4.2. Дифференциальное уравнение Ито и уравнение Ито—Фоккера—Планка . . . . .	180
4.3. Исчисление Стратоновича . . . . .	184
4.4. Уравнения Ланжевена и уравнение Фоккера—Планка . . . . .	187
<b>Глава 5. Мир связанных нелинейных осцилляторов . . . . .</b>	<b>189</b>
5.1. Связанные линейные осцилляторы . . . . .	190
5.1.1. Линейные осцилляторы с линейной связью . . . . .	190
5.1.2. Линейные осцилляторы с нелинейной связью. Пример. Сдвиги частот . . . . .	191
5.2. Возмущения квазипериодического движения в случае амплитуд, не зависящих от времени (квазипериодическое движение сохраняется) . . . . .	193
5.3. Некоторые соображения о сходимости метода последовательных приближений . . . . .	200
<b>Глава 6. Осцилляторы с нелинейной связью: случай, когда квазипериодическое движение сохраняется . . . . .</b>	<b>207</b>
6.1. Постановка задачи . . . . .	207
6.2. Теорема Мозера (теорема 6.2.1) . . . . .	215
6.3. Метод последовательных приближений . . . . .	216
<b>Глава 7. Нелинейные уравнения. Принцип подчинения . . . . .</b>	<b>224</b>
7.1. Пример . . . . .	224
7.1.1. Адиабатическое приближение . . . . .	225
7.1.2. Исключение переменной . . . . .	226
7.2. Общая формулировка принципа подчинения. Основные уравнения . . . . .	232
7.3. Формальные соотношения . . . . .	236
7.4. Итерационный метод . . . . .	240
7.5. Оценка остаточного члена. Проблема дифференцируемости . . . . .	243
7.6. Принцип подчинения для дискретных отображений с шумом . . . . .	245
7.7. Формальные соотношения . . . . .	247
7.8. Итерационный метод для дискретного случая* . . . . .	253
7.9. Принцип подчинения для стохастических дифференциальных уравнений* . . . . .	255
<b>Глава 8. Нелинейные уравнения. Качественные макроскопические изменения . . . . .</b>	<b>262</b>
8.1. Бифуркации из узла или фокуса. Основные преобразования . . . . .	262
8.2. Простое вещественное собственное значение становится положительным . . . . .	265

8.3. Кратное вещественное собственное значение становится положительным	269
8.4. Простое комплексное собственное значение пересекает мнимую ось. Бифуркация Хопфа	271
8.5. Бифуркация Хопфа (продолжение)	274
8.6. Взаимная синхронизация двух осцилляторов	280
8.7. Бифуркация из предельного цикла	283
8.8. Бифуркация из предельного цикла: частные случаи	288
8.8.1. Бифуркация в два предельных цикла	288
8.8.2. Удвоение периода	290
8.8.3. Субгармоники	291
8.8.4. Бифуркация в тор	293
8.9. Бифуркация из тора (квазипериодическое движение)	295
8.10. Бифуркация из тора: частные случаи	299
8.10.1. Простое собственное значение становится положительным	299
8.10.2. Комплексное невырожденное собственное значение пересекает мнимую ось	302
8.11. Иерархии неустойчивостей, сценарии и пути к турбулентности	306
8.11.1. Картина Ландау—Хопфа	306
8.11.2. Картина Рюэля—Такенса	307
8.11.3. Бифуркации торов. Квазипериодические движения	308
8.11.4. Путь к хаосу через удвоение периода. Последовательность Фейгенбаума	309
8.11.5. Путь через перемежаемость	309
<b>Глава 9. Пространственные структуры</b>	<b>310</b>
9.1. Основные дифференциальные уравнения	310
9.2. Общий метод решения	313
9.3. Анализ бифуркаций для конечных геометрий	316
9.4. Обобщенные уравнения Гинзбурга—Ландау	318
9.5. Упрощение обобщенных уравнений Гинзбурга—Ландау. Образование структур в конвекции Бенара	322
<b>Глава 10. Влияние шума</b>	<b>327</b>
10.1. Общий подход	327
10.2. Простой пример	327
10.3. Численное решение уравнения Фоккера—Планка для комплексного параметра порядка	331
10.4. Некоторые общие теоремы о решениях уравнения Фоккера—Планка	339
10.4.1. Зависящие и не зависящие от времени решения уравнения Фоккера—Планка для случая, когда дрейфовые коэффициенты линейны по координатам, а коэффициенты диффузии постоянны	339
10.4.2. Точные стационарные решения уравнения Фоккера—Планка для систем, находящихся в детальном равновесии	340
10.4.3. Пример	345
10.4.4. Важные частные случаи	347
10.5. Поведение нелинейных стохастических систем вблизи критических точек: краткие выводы	348
<b>Глава 11. Дискретные отображения с шумом</b>	<b>349</b>
11.1. Уравнение Чепмена—Колмогорова	349
11.2. Влияние границ. Одномерный пример	350

11.3. Совместная вероятность и вероятность первого выхода на границу. Прямые и обратные уравнения . . . . .	351
11.4. Связь с интегральным уравнением Фредгольма . . . . .	352
11.5. Решение в виде интеграла по траекториям . . . . .	353
11.6. Среднее время первого выхода на границу . . . . .	355
11.7. Линейная динамика и гауссов шум. Точное, зависящее от времени решение уравнения Чепмена—Колмогорова . . . . .	356
<b>Глава 12. Пример неразрешимой проблемы в динамике . . . . .</b>	<b>358</b>
<b>Глава 13. Некоторые замечания по поводу взаимосвязей синергетики и других наук . . . . .</b>	<b>360</b>
<b>Приложение. Доказательство теоремы Мозера (предложенное Мозером) . . . . .</b>	<b>364</b>
1. Сходимость рядов Фурье . . . . .	364
2. Наиболее общее преобразование, необходимое для доказательства теоремы 6.2.1 . . . . .	366
3. Сходимость ряда . . . . .	368
4. Доказательство теоремы 6.2.1 . . . . .	378
<b>Литература . . . . .</b>	<b>382</b>
<b>Дополнительная литература . . . . .</b>	<b>400</b>
Литература, добавленная при корректуре . . . . .	409
Предметный указатель . . . . .	412