

32, 844 73
л 62

А. О. Мінаков
О. Ф. Тирнов



СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА



**До 200-річчя Харківського
національного університету
імені В. Н. Каразіна**

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна — один із найстаріших університетів Східної Європи. Заснований у 1804 р.

З історією Харківського університету пов'язані імена трьох лауреатів Нобелівської премії: І. Мечникова, Л. Ландау, С. Кузнеця, а також таких всесвітньо відомих учених, як історик Д. Багалій, астроном М. Барабашов, фізико-хімік М. Бекетов, математик О. Ляпунов, лінгвіст О. Потебня та ін.

Один із найбільших освітніх центрів України, Харківський університет з 1974 року є членом Міжнародної Асоціації Університетів під егідою ЮНЕСКО.

**А. О. Мінаков
О. Ф. Тирнов**

СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

*Затверджено Міністерством освіти і
науки України як підручник для студентів
вищих навчальних закладів*



Харків
«Факт»
2003

ББК 32.84я73
УДК 538.56
М62

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11-271 від 28.01.03)

Друкується згідно з рішенням Ученої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(Протокол № 6 від 27.06.02)

Редактор за спеціальністю: завідувач відділу Радіоастрономічного інституту
НАН України, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук,
професор, лауреат Державної премії України В. М. Шульга

Рецензенти:

Кафедра прийому, передачі та обробки сигналів Національного
університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»
(завідувач кафедри — доктор технічних наук, професор О.О. Зеленський);
завідувач відділу Інституту радіофізики і електроніки ім. О.Я. Усикова
НАН України, доктор технічних наук, професор, лауреат премії АН України
ім. акад. К.Д. Синельникова В.Б. Рассказовський

Мінаков А. О., Тирнов О. Ф.

М62 Статистична радіофізика: Підручник для вищих навч. закладів. —
Х.: Факт, 2003. — 528 с.
ISBN 966-637-172-3.

Головною метою підручника є строгий, стислий та логічно ув'язаний виклад
питань, що належать до статистичної радіофізики, відповідно до сучасних стандартів
освіти. Книгу написано в самодостатній формі, що не потребує використання
додаткової літератури при вивченні курсу. На прикладах простих фізичних моделей
отримано формули та виведено закони, що мають загальний характер та широку
сферу використання. Розділи підручника супроводжуються типовими прикладами,
які полегшують розуміння та засвоєння пройденого матеріалу.

Для студентів старших курсів, аспірантів та наукових співробітників
радіофізичних та радіотехнічних спеціальностей університетів.

Statistical Radio Physics provides a rigorous, condensed and logical treatment of the
subject and meets high education standards. The textbook is written in a self-consistent
manner, and no additional literature is required to have the subject studied. Simple physical
models are used to derive the formulae and laws that are general in nature and of much
practical use. There are problems that illustrate the theory and others that apply the theory to
issues of current interest in order to facilitate the assimilation of the material.

The book has been planned for use as a textbook and as a reference book
for researchers.

імені Василя Стефаника
к. 02125266
НАУКОВА БІБЛІОТЕКА
68 50 01

ББК 32.84я73

ISBN 966-637-172-3

© Мінаков А.О., Тирнов О.Ф., 2003
© Видавництво «Факт», 2003

Зміст

Передмова	9
Вступ	10

Розділ I. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	15
--	-----------

§ 1. Випадкові події	15
Задачі	22

§ 2. Випадкові величини	23
2.1. Неперервні випадкові величини	24
2.2. Дискретні випадкові величини	26
2.3. Моменти випадкових величин	30
2.4. Характеристична функція.....	34
Задачі	35

§ 3. Закони розподілу випадкових величин	39
3.1. Рівномірний розподіл.....	39
3.2. Біномний розподіл. Схема Бернуллі	41
3.3. Розподіли Пуассона і Лапласа.....	46
Задачі	50

§ 4. Сукупність випадкових величин і функції випадкових аргументів	52
4.1. Властивості інтегральної функції і густини розподілу ймовірностей.....	53
4.2. Умовні функції розподілу.....	56
4.3. Початкові і центральні моменти сукупності випадкових величин	59
4.4. Функціональні перетворення випадкових величин	61
4.5. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей.....	68
4.6. Нормальний розподіл.....	73
Задачі.....	78

Розділ II. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	82
§ 5. Випадкові функції	82
5.1. Інтегральна функція і густина розподілу ймовірностей	83
5.2. Моменти випадкового процесу	86
5.3. Стационарні випадкові процеси	88
5.4. Процеси зі стационарними прирощеннями	93
5.5. Ергодічні процеси	96
Задачі	99
§ 6. Спектральний аналіз випадкових процесів	102
6.1. Енергетичний спектр стационарного процесу. Формула Вінера-Хінчина	103
6.2. Аналітичний сигнал	113
6.3. Кореляційні функції та енергетичні спектри аналітичного сигналу	118
6.4. Приклади спектральних розподілів	122
6.5. Комплексна обвідна аналітичного сигналу	129
Задачі	132
§ 7. Лінійні перетворення випадкових процесів	134
7.1. Математичний опис лінійних систем	135
7.2. Зв'язок між моментами у лінійних системах	138
7.3. Спектральний аналіз лінійних систем з постійними параметрами	140
7.4. Приклади найпростіших лінійних перетворень	143
7.5. Перетворення випадкових процесів у радіотехнічних колах	149
Задачі	162
§ 8. Сумісна дія сигналу і шуму на лінійну систему	175
8.1. Узагальнений гармонійний аналіз детермінованих процесів	176
8.2. Проходження гармонійного сигналу і шуму через лінійну систему зі сталими параметрами	179
8.3. Оптимальний лінійний фільтр для сигналів скінченної тривалості	185

8.4. Виділення сигналу з шуму. Рівняння Вінера-Хопфа	189
8.5. Оптимальні фільтри і корелятори	197
Задачі	199

Розділ III. ФЛУКТУАЦІЙНІ ЯВИЩА В РАДІОТЕХНІЦІ	204
--	-----

§ 9. Броунівський рух	204
9.1. Оцінки швидкості руху броунівської частинки	205
9.2. Аналогія між рухом броунівської частинки і флуктуаціями струму в електричному колі	207
9.3. Аналіз рівняння руху броунівської частинки	210
9.4. Визначення статистичних моментів флуктуацій швидкості	211
9.5. Статистичні характеристики зміщення частинки	215
9.6. Густина розподілу ймовірностей швидкості і зміщення частинки	218
9.7. Енергетичний спектр флуктуацій швидкості броунівської частинки	220
Задачі	224
§ 10. Теплові флуктуації у радіотехнічних колах	227
10.1. Формула Найквіста	228
10.2. Спектральний аналіз процесів зі стационарним прирощенням	233
10.3. Аналіз теплових флуктуацій у коливальному контурі	237
10.4. Еквівалентна шумова температура	240
10.5. Область застосування формули Найквіста	241
10.6. Флуктуаційно-дисипаційна теорема	243
Задачі	249
§ 11. Дробовий шум	252
11.1. Визначення статистичних характеристик сили струму	255
11.2. Енергетичний спектр дробового шуму	258
11.3. Еквівалентний шумовий опір	262
Задачі	263

§ 12. Флуктуації в автоколивальних системах	268
12.1. Побудова замкнутого рівняння для сили струму	268
12.2. Укорочені рівняння Ван-дер-Поля	273
12.3. Аналіз розв'язання укорочених рівнянь Ван-дер-Поля	278
12.4. Врахування випадкових факторів	281

Розділ IV. ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ

§ 13. Випадкові поля і хвилі	289
13.1. Статистичний опис випадкових полів	290
13.2. Моменти випадкового поля	290
13.3. Статистично однорідні поля	292
13.4. Спектральні зображення для однорідних випадкових полів	295
13.5. Випадкові хвильові поля	301
Задачі	304
§ 14. Метод малих збурень	307
14.1. Побудова розв'язку. Борнівське наближення	308
14.2. Середнє поле і середня інтенсивність	320
14.3. Індикатриса розсіювання	325
14.4. Межі застосування борнівського наближення	330
14.5. Спектр розсіяного сигналу	333
Задачі	343
§ 15. Методи геометричної оптики і плавних збурень	346
15.1. Метод геометричної оптики	347
15.2. Наближення малих збурень у методі геометричної оптики	352
15.3. Метод плавних збурень (метод Ритова)	357
15.4. Наближення малих збурень у методі Ритова	359
15.5. Визначення статистичних характеристик	366
15.6. Область застосування методу геометричної оптики	373
Задачі	376

§ 16. Флуктуації показника заломлення в турбулентній атмосфері	380
16.1. Рівняння Нав'є—Стокса	381
16.2. Структурна функція швидкості. Закон Обухова—Колмогорова	384
16.3. Структурна функція і просторовий енергетичний спектр показника заломлення	387
§ 17. Метод фазового екрана	394
17.1. Формула Гріна	396
17.2. Визначення поля за фазовим екраном. Принцип Гюйгенса	398
17.3. Розв'язання задачі в рамках методу геометричної оптики	403
17.4. Дифракційне розв'язання задачі	409
17.5. Дифракція флуктуюючих хвиль	418
17.6. Статистичні моменти поля. Принцип Гюйгенса для інтенсивності	420
Задачі	432

§ 18. Діаграма спрямованості дзеркальної антени з випадковими спотвореннями фази на апертурі	445
18.1. Обчислення середнього поля	447
18.2. Визначення середньої інтенсивності	451
Задачі	459

Розділ V. РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ

НА ВИПАДКОВО НЕРІВНИХ ПОВЕРХНЯХ

§ 19. Розсіювання хвиль на слабкошорсткій поверхні	461
19.1. Граничні умови	463
19.2. Побудова наближеного розв'язку	464
19.3. Середнє поле і середня інтенсивність	471
19.4. Індикатриса розсіювання	477
19.5. Область застосування «борнівського» наближення	481
Задачі	485

§ 20. Розсіювання на поверхні з великими нерівностями (метод Кірхгофа)	497
20.1. Граничні умови	497
20.2. Побудова наближеного динамічного розв'язку	500
20.3. Середнє розсіяне поле	510
20.4. Середня інтенсивність	512
20.5. Індикатриса розсіювання	516
Задачі	520
Післямова	525
Література	526

Основою підручника став курс лекцій зі статистичної радіофізики, що читається у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна студентам-радіофізикам. Уперше цей курс був уведений понад тридцять років тому професором кафедри космічної радіофізики П.В. Бліохом. У 80-ті роки професор цієї ж кафедри І.М. Фукс доповнив лекційний курс розділами з розсіювання електромагнітних хвиль на випадкових поверхнях. Починаючи з 1998 р. суттєво перероблений і доповнений курс читається авторами підручника.

Без сумніву, цей курс не в змозі охопити широке коло питань, що належать до статистичної радіофізики. Основна мета авторів — стисло, строго і логічно викласти матеріал відповідно до сучасних стандартів освіти. Книга написана у самодостатній формі таким чином, щоб під час вивчення курсу у студента не виникало необхідності звертатися до додаткових літературних джерел. Окрім цього, на прикладах простих фізичних моделей отримано формули і виведено закони, що мають загальний характер і ширший спектр застосування.

Автори висловлюють подяку рецензентам: член-кор. НАН України проф. В.М. Шульзі; проф. В.Б. Рассказовському; колективу кафедри прийому, передачі і обробки сигналів Національного аерокосмічного університету імені М.Є. Жуковського „Харківський авіаційний інститут”, очолюваної доктором технічних наук, професором О.О. Зеленським, за уважне прочитання рукопису і висловлені корисні зауваження. Автори вдячні Українському науково-технологічному центру за підтримку у рамках проектної угоди №1773, та В.Л. Дорохову за допомогу, надану під час підготовки рукопису до друку.

Вступ

Останні часи відзначаються бурхливим розвитком радіофізики і широким упровадженням її методів у астрофізику, біофізику, техніку тощо. При розв'язанні багатьох технічних задач, пов'язаних із генерацією, випромінюванням, поширенням і прийомом радіохвиль, виникає необхідність створення джерел електромагнітних коливань великої потужності і високої стабільності у широкому діапазоні довжин хвиль (від часток мікрона до десятків кілометрів), антен із гранично вузькими діаграмами спрямованості, високочутливих приймачів. Створення таких пристроїв неможливе без переходу до принципово нових методів генерації, прийому, реєстрації і обробки сигналів. Проте поліпшення характеристик радіотехнічних пристроїв не завжди веде до бажаного ефекту: на певному етапі кількісні зміни призводять до тієї межі, за якою виникають якісно нові явища, і починають відігравати роль якісно нові чинники і закономірності — статистичні.

Загальною вимогою, що ставиться перед будь-якою радіотехнічною системою, є достовірне і своєчасне отримання великого об'єму інформації з випромінювання із обмеженою енергетикою. Цьому протидіють, по-перше, спотворення сигналів при їх поширенні у реальних середовищах, по-друге, власні шуми радіотехнічних пристроїв, і, нарешті, технічна недосконалість пристроїв. Якщо спотворення сигналу за рахунок недосконалості пристрою можна знизити, то вплив випадкових завад повністю виключити неможливо, оскільки завади зумовлені фізичними процесами, невіддільними від них. У результаті виявляється, що найкраще відновлення корисної інформації за спотвореним сигналом неможливе без застосування методів статистичної радіофізики.

Також точніше визначення кутових координат джерела випромінювання можливе за допомогою антени з більш вузькою діаграмою спрямованості. Як правило, звуження діаграми досягається збільшенням лінійних розмірів антени. Проте ця залежність справджується доти, доки не починають виявляти себе різноманітні випадкові чинники: неточності у виготовленні самої антени, її температурні і вітрові деформації, просторові неоднорідності показника заломлення оточуючого середовища і підстилаючої поверхні. Внаслідок цього ми знову повертаємося до

ситуації, коли подальше збільшення кутової роздільної здатності антени неможливе без застосування статистичної теорії.

Особливо наочно виявляється вплив випадкових факторів на поширення радіохвиль у реальних умовах. Тут ми практично ніколи не стикаємося з тими простими закономірностями, які впливають із строгих розв'язань задач дифракції методами математичної фізики у традиційних курсах теорії поля або класичної електродинаміки (поширення хвиль над імпедансною площиною або сферою, дифракція на клині або циліндрі, заломлення у плоскошаруватих або сферичношаруватих середовищах та ін.). Реальні середовища, в яких поширюються радіохвилі, непомірно складніші. Просторові і часові варіації їхнього показника заломлення і форми меж поділу носять випадковий характер. Це призводить до того, що випадковим чином змінюється у просторі і в часі напрямок поширення і поляризація радіохвиль, виникають випадкові зміни амплітуди і фази радіосигналів, що приймаються. Аналіз впливу на корисний сигнал перелічених факторів неможливий без застосування методів статистичної радіофізики.

Після сказаного вище може скластися враження, що застосування статистичних методів у радіофізиці виправдане тільки в деяких екстремальних, екзотичних ситуаціях (надспрямовані антени, сильно неоднорідні середовища, надчутливі приймачі і т.д.), а в решті випадків, не ризикуючи припуститися серйозної помилки, можна користуватися методами і результатами класичної радіофізики (нестатистичної, детермінованої). Насправді ж ця межа досить розмита і значною мірою умовна: елемент випадковості або статистичної невизначеності присутній у всіх без винятку явищах і законах фізики взагалі і радіофізики зокрема. Питання тільки в тому, з якого рівня цю невизначеність слід брати до уваги і враховувати при розв'язанні конкретних задач.

Як приклад розглянемо простий дослід, що демонструє справедливості закону Ома. У колі з опором R вимірюється струм I , що виникає під дією напруги U (рис.1). Якщо для вимірювання користуватися досить грубим та інерційним приладом, то при кожному фіксованому значенні U ми зареєструємо силу струму $I = U/R$. Замінімо тепер амперметр на чутливіший (і менш інер-

ційний). Ми виявимо, що при постійній напрузі U струм I дивним чином змінюється у часі (рис. 2 а).

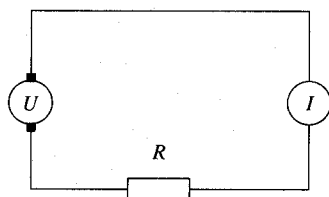


Рис. 1

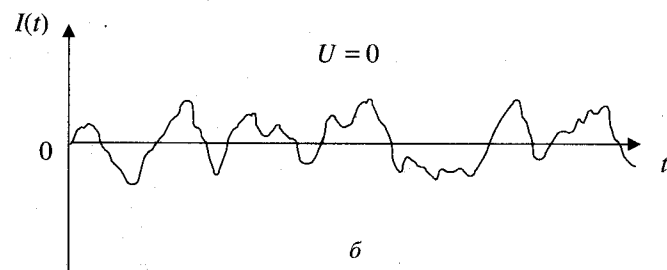
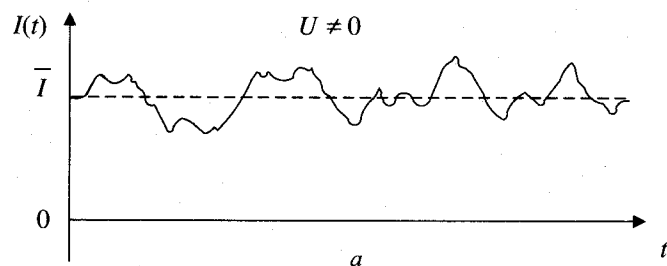


Рис. 2

Більше того, ми побачимо, що струм проходить по колу і тоді, коли $U = 0$ (рис. 2 б). Чи означає це, що закон Ома хибний? Звичайно ні. У результаті дослідів ми переконуємось у тому, що він справджується тільки для середніх значень струму \bar{I} при кожному значенні U (на рис. 2 напрузі $U \neq 0$ відповідає середній струм $I = \bar{I}$). Відхилення миттєвих значень струму I від значення \bar{I}

називаються флуктуаціями. Своєю появою вони зобов'язані тому факту, що мікроскопічне значення струму I є результатом підсумовування великої кількості мікроскопічних струмів, що переносяться кожним елементарним зарядом. У свою чергу, заряди рухаються хаотично і нерівномірно, зіштовхуються між собою, розсіюються на домішках і коливаннях кристалічних ґрат (якщо мова йде про рух електронів провідності у твердому тілі), а їхня густина змінюється у просторі і в часі випадково. Тому не дивно, що і сумарний струм I виявляється не сталим, а підлягає випадковим змінам — флуктуаціям. Проте найбільш цікавим і на перший погляд несподіваним є те, що флуктуації можуть бути з вичерпною повнотою описані і проаналізовані, причому не тільки на якісному рівні, а й у рамках строгої теорії — і цим також займається статистична радіофізика.

На рис. 3 схематично подані спотворення хвильового фронту хвилі, що проходить через неоднорідне середовище. Для достатньо віддалених радіоджерел (або штучних — супутники і космічні кораблі, або природних — пульсари, квазари тощо) хвильовий фронт хвилі, яка надходить, з великою точністю можна вважати плоским (верхня штрихова лінія на рис. 3). Проте, потрапляючи в іоносферу Землі, а згодом у тропосферу, хвильовий фронт спотворюється як за рахунок заломлення на великомасштабних неоднорідностях, так і за рахунок дифракції на дрібномасштабних флуктуаціях показника заломлення. В результаті біля поверхні Землі хвильовий фронт набуває складної структури (нижня штрихова лінія на рис. 3), напрямки надходження сигналу (нормалі до хвильового фронту — стрілки) виявляються відмінними від напрямку на джерело — виникають флуктуації кута надходження радіохвиль, а разом з ними — флуктуації і інших параметрів сигналу (наприклад, поляризації, амплітуди, фази).

Дослідження зв'язку між флуктуаціями параметрів сигналів і характеристиками неоднорідностей середовища, в якому відбувається поширення радіохвиль, також є предметом статистичної радіофізики.

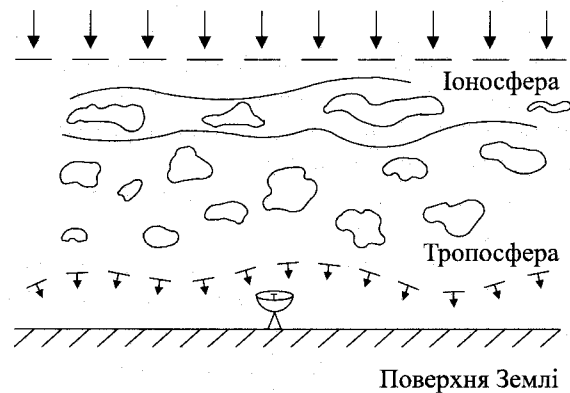


Рис. 3

Наведеними прикладами, звичайно, далеко не вичерпується широке коло задач, для розв'язання яких застосовуються методи статистичної радіофізики, проте вони мають дати правильне уявлення про сам характер цих задач. По-перше, мова завжди йде про поведінку макроскопічних систем, тобто систем із великою кількістю степенів вільності: у прикладі зі струмом — це багато зарядів, в останньому прикладі — значення показника заломлення у великій кількості точок простору в різні моменти часу. По-друге, метою дослідження є не точне передбачення значень тої чи іншої макроскопічної величини (сили струму в колі або кута надходження радіохвиль), а розрахунок тільки тих параметрів флуктуацій цих величин, які є стійкими (повторюваними) при заданих зовнішніх умовах: у першому прикладі — при сталих параметрах і температурі кола, у другому — при однакових станах іоносфери і тропосфери (степені іонізації, швидкості і напрямку вітру, тиску, вологості, температури тощо).

РОЗДІЛ I ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

§ 1. Випадкові події

Об'єктом вивчення теорії ймовірностей є випадкові події. Як найпростішу модель випадкової події можна розглядати, наприклад, випадання „орла” або „решки” при киданні монети (випадання заданої кількості очок при киданні гральних костей, утворення певних комбінацій гральних карт тощо).

Вивчення закономірностей, пов'язаних навіть із цими найпростішими моделями, дає змогу розв'язувати досить складні задачі радіофізики і радіотехніки, де як випадкові події можна розглядати, наприклад такі: перевищення шумовим сигналом $I(t)$ заданого порогового значення I_0 ; проходження $I(t)$ через нуль (випадкова подія полягає у зміні знака I); входження значення $I(t)$ в заданий інтервал dI (рис. 1.1);

На відміну від не випадкової (детермінованої) події, яка в результаті проведеного дослідження обов'язково відбувається або обов'язково не відбувається, випадкова подія A (події далі позначатимемо великими літерами латинського алфавіту) у цьому досліді може відбутися, а може й не відбутися. Це означає, що коли в однакових умовах проводиться серія з N дослідів, то кількість дослідів N_A , в яких подія A відбулася, може набувати, загалом, будь-якого значення з інтервалу

$$0 \leq N_A \leq N. \quad (1.1)$$

Для детермінованої події A при будь-якій великій кількості дослідів N обов'язково реалізується одна з двох можливостей: або

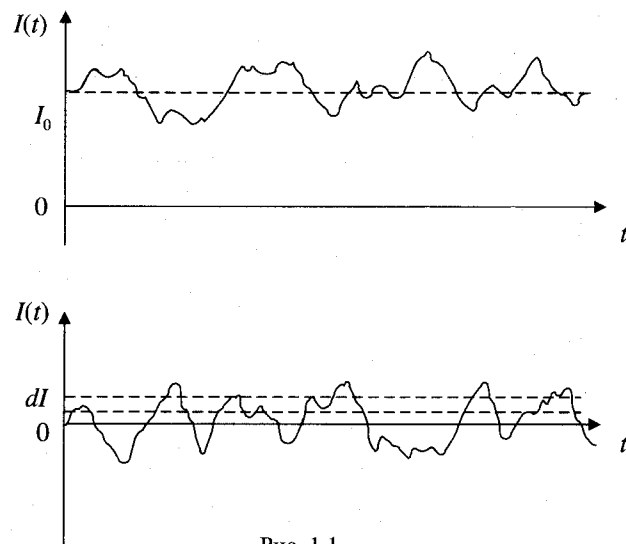


Рис. 1.1

$N_A = 0$ (неможлива подія), або $N_A = N$ (достовірна подія).

Відношення

$$N_A/N = \nu_A \quad (1.2)$$

називається **частотою** появи події A , а досліди, що послідовно проводяться, називають випробуваннями. Для випадкових подій частота ν_A при великій кількості дослідів ($N \gg 1$) виявляється стійкою величиною: чим більше дослідів ми проводимо (чим довша серія випробувань), тим щільніше виміряні значення ν_A групуються навколо якогось цілком визначеного значення, яке позначається $P\{A\}$ і називається **ймовірністю** події A . Слід підкреслити, що $P\{A\}$ — не є границею ν_A при $N \rightarrow \infty$: адже ν_A — емпірично визначена (виміряна в досліді) величина, тоді як поняття „границя” належить тільки до об'єктів математичного аналізу, тобто до абстрактних понять. Тому вимірювання частоти ν_A можна розглядати тільки як емпіричний спосіб визначення деякої

абстрактної математичної величини $P\{A\}$. Стійкість ν_A при $N \gg 1$ свідчить про те, що ми дійсно маємо справу із випадковою подією A , частота ν_A появи якої визначається її ймовірністю $P\{A\}$ тим точніше, чим довша серія випробувань N . Тут можна говорити про випадкові події як про передбачувані на відміну від непередбачуваних подій, частота появи яких при великих N не є стійкою і для яких, відповідно, не можна ввести поняття ймовірності.

Звернемося до наведеного у Вступі прикладу з вимірюванням струму в колі. Грубий прилад дає цілком визначені значення струму $I = \bar{I}$ при заданому U — жодних випадковостей немає, всі події детерміновані. Дуже точний прилад, що характеризується високою чутливістю, фіксує відхилення струму від того середнього значення, яке показує грубий прилад, — ці відхилення можна розглядати як випадкові події (флуктуації). Покази несправного приладу (з поганим контактом в електричному колі гальванометра або з механічними несправностями — значним тертям у підвісці, стрілкою, що „заїдає” тощо) є непередбачуваними — вони жодним чином не пов'язані зі справжніми флуктуаціями струму в колі (що мають, як ми побачимо, цілком певну фізичну природу), а визначаються тільки несправностями приладу.

Із формули (1.2) випливає, що $0 \leq \nu_A \leq 1$, і, отже, ймовірність $P\{A\}$ — є невід'ємною (дійсною) величиною, що не перевищує одиницю:

$$0 \leq P\{A\} \leq 1. \quad (1.3)$$

Ймовірність неможливої події $P\{A\} = 0$ (оскільки $N_A = 0$ при будь-якому N , отже, $\nu_A = 0$); ймовірність достовірної події $P\{A\} = 1$ (оскільки $N_A = N$ і $\nu_A = 1$). Зворотні твердження, загалом, хибні: якщо $P\{A\} = 0$, то не має сенсу вважати $N_A = 0$! Тобто подія A , ймовірність $P\{A\}$ якої об'єднується нулю, може іноді відбуватися, проте так рідко, що $\nu_A \rightarrow 0$. Про такі

події говорять як про події з “ймовірнісною мірою нуль” на відміну від подій, які справді ніколи не відбуваються.

Якщо в результаті досліду може відбутися не одна, а декілька подій A_1, A_2, \dots, A_k , то говорять про **сукупність** або **групу випадкових подій** (випадання певних комбінацій очок при одночасному киданні кількох гральних костей; колір і старшинство гральної карти, навмання взятої з колоди тощо). У радіофізиці такою сукупністю подій може виступати, наприклад, прийом сигналу фіксованої амплітуди A_1 певної поляризації A_2 із заданого напрямку A_3 тощо. Це приклади сукупності **спільних** (або **сумісних**) подій – внаслідок досліду вони можуть відбуватися одночасно на відміну від **несумісних** (взаємно виключених) подій, які одночасно відбуватися не можуть. Прикладами несумісних подій можуть бути випадання „орла” або „решки” в одному кидку, влучення або промах під час одного пострілу, вилітання і невилітання електрона за малий проміжок часу та ін.

Визначення

1. **Сумою двох подій** A_1 і A_2 називають подію $S = A_1 + A_2$, яка полягає в тому, що в результаті досліду відбувається хоча б одна (незалежно яка) з подій A_1 або A_2 або A_1 і A_2 . Якщо події A_1 і A_2 несумісні, то $S = A_1 + A_2$ — подія, що полягає в появі однієї з подій A_1 або A_2 (незалежно якої). Звідси випливає, що ймовірність появи однієї з двох несумісних подій A_1 і A_2 дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\{S\} = P\{A_1 \text{ або } A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}.$$

Узагальнивши цю формулу для випадку k попарно несумісних подій A_i ($i = 1, 2, \dots, k$), отримаємо

$$P\{S\} = P\{A_1 \text{ або } A_2 \dots \text{ або } A_k\} = \sum_{i=1}^k P\{A_i\}. \quad (1.4)$$

Сукупність несумісних подій A_i ($i = 1 \div k$) утворює **повну групу**, якщо внаслідок досліду обов’язково відбувається одна з них, тобто якщо сума S є достовірною подією:

$$P\{S\} = \sum_{i=1}^k P\{A_i\} = 1. \quad (1.5)$$

Якщо дві події A_1 і A_2 утворюють повну групу, вони називаються **доповнювальними** (або **протилежними**) подіями. Подія, доповнювальна до A_1 , позначається як $A_2 = \bar{A}_1$. Отже, $S = A_1 + \bar{A}_1$ — достовірна подія, тобто

$$P\{S\} = P\{A_1\} + P\{\bar{A}_1\} = 1. \quad (1.6)$$

Розглянемо тепер дві сумісні події A і B , нехай нам дано ймовірності самих подій $P\{A\}$ і $P\{B\}$, а також ймовірність їх сумісної появи $P\{AB\}$. Ставиться питання: як знайти ймовірність суми подій $S = A + B$?

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P\{S\} = P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.7)$$

Доведення. Подія $A + B$ відбудеться, якщо відбудеться одна із наступних трьох несумісних подій: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ або AB . За правилом додавання ймовірностей несумісних подій (1.4) можна записати:

$$P\{A + B\} = P\{A\bar{B}\} + P\{\bar{A}B\} + P\{AB\}. \quad (1.8)$$

З іншого боку, подія A настане, якщо настане одна з двох несумісних подій: $A\bar{B}$ або AB . За правилом додавання ймовірностей несумісних подій (1.4) маємо:

$$P\{A\} = P\{A\bar{B}\} + P\{AB\}. \quad (1.9)$$

Звідси знаходимо

$$P\{A\bar{B}\} = P\{A\} - P\{AB\}. \quad (1.10)$$

Аналогічні міркування дають змогу визначити також ймовірність появи події B :

$$P\{B\} = P\{\bar{A}B\} + P\{AB\}, \quad (1.11)$$

звідки отримуємо

$$P\{\bar{A}B\} = P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.12)$$

Підставивши (1.10) і (1.12) у (1.8), отримаємо шукану формулу (1.7).

2. **Добутком** подій A і B називають подію $M = AB$, яка полягає в тому, що в результаті досліду відбуваються як подія A , так і подія B . Очевидно, що якщо A і B є несумісними, то M – неможлива подія.

Нехай при N випробуваннях подія A відбулася N_A разів, подія B — N_B разів, а у N_{AB} випадках із N мали місце відразу обидві події A і B . Тоді при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$ можна записати вирази для ймовірностей:

$$v_A = \frac{N_A}{N} \rightarrow P\{A\}, v_B = \frac{N_B}{N} \rightarrow P\{B\}, v_{AB} = \frac{N_{AB}}{N} \rightarrow P\{AB\}. \quad (1.13)$$

Останній вираз (1.13) визначає ймовірність сумісної реалізації подій A і B .

Відношення N_{AB}/N_A при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$ буде групуватися навколо деякого числа, яке також можна трактувати як

ймовірність, а саме як **умовну ймовірність** здійснення події B за умови, що подія A обов'язково мала місце:

$$\frac{N_{AB}}{N_A} \rightarrow P\{B|A\} \text{ або } P_A\{B\}. \quad (1.14)$$

Аналогічно можна записати й умовну ймовірність здійснення події A за умови, що подія B обов'язково має місце:

$$\frac{N_{AB}}{N_B} \rightarrow P\{A|B\} \text{ або } P_B\{A\}. \quad (1.15)$$

Оскільки

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A} \frac{N_A}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N_B}{N},$$

то між умовними і звичайними (або безумовними) ймовірностями має місце наступне співвідношення:

$$P\{M\} = P\{AB\} = P\{A|B\}P\{B\} = P\{B|A\}P\{A\}. \quad (1.16)$$

Умовну ймовірність $P\{A|B\}$ називають ще **апостеріорною** (або „післядослідною” ймовірністю), а $P\{A\}$ — **апріорною** („переддослідною”). З (1.16) отримаємо

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \text{ або } P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}. \quad (1.17)$$

Дві події A і B називаються **незалежними**, якщо умовна ймовірність події $P\{A|B\}$ збігається з „безумовною” $P\{A\}$, тобто ймовірність появи події A не залежить від того, чи відбулася подія B (або, навпаки, ймовірність появи події B не залежить від того, чи відбулася подія A). При цьому з (1.16) випливає, що ймовірність добутку незалежних подій є добутком ймовірностей цих подій

$$P\{M\} = P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}. \quad (1.18)$$

У загальному випадку для довільного числа незалежних подій маємо формулу множення ймовірностей:

$$P\{M\} = P\{A_1 A_2 \dots A_k\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\} \dots P\{A_k\} = \prod_{i=1}^k P\{A_i\}. \quad (1.19)$$

ЗАДАЧІ

1. Проводиться прийом кодових комбінацій, що складаються з п'ятих цифр від 1 до 5, причому кожна з цифр у окремій комбінації з'являється один єдиний раз, наприклад: 1, 2, 3, 4, 5 або 5, 4, 3, 2, 1 та ін. Яка ймовірність $P\{A\}$ того, що у прийнятій комбінації цифри утворюють послідовність 1, 2, 3, 4, 5?

Розв'язок. Із п'ятих елементів (цифр 1, 2, 3, 4, 5) шляхом перестановок можна скласти $N = 5!$ різних комбінацій з рівною ймовірністю. Нас цікавить тільки один результат $n = 1$: комбінація 1, 2, 3, 4, 5. Його ймовірність дорівнює

$$P\{A\} = \frac{n}{N} = \frac{1}{120}.$$

2. Лінією зв'язку у випадковому порядку з рівною ймовірністю передаються 30 знаків української абетки. Знайти ймовірність $P\{A\}$ того, що з'явиться послідовність букв, яка утворить слово „радіо”.

Розв'язок. Кількість всіх випадків N (кількість вибірок із 30 літер абетки по 5) дорівнює кількості розміщень із 30 по 5, тобто

$$N = A_{30}^5 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26.$$

Із цих випадків сприятливим для події A є тільки один результат, тобто $n = 1$. Отже,

$$P\{A\} = \frac{n}{N} = \frac{1}{A_{30}^5} \approx 5,9 \cdot 10^{-8}.$$

3. Виявлення повітряної цілі виконується незалежно двома радіолокаційними станціями. Імовірність виявлення цілі першою станцією дорівнює 0,7. Імовірність виявлення цілі другою станцією дорівнює 0,8. Визначити ймовірність $P\{S\}$ того, що цілі буде виявлена хоча б однією станцією.

Розв'язок. Подія S , що полягає у виявленні цілі, відбудеться, якщо цілі буде виявлена першим локатором (подія A), або другим (подія B), або одночасно двома локаторами (подія AB). Видно, що S є сумою сумісних подій $S = A + B$ і ймовірність її появи визначається формулою (1.7)

$$P\{S\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}.$$

Оскільки події A і B незалежні, $P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$. Отже,

$$P\{S\} = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94.$$

§ 2. Випадкові величини

Випадкова подія може розглядатися тільки як якісний результат експерименту, що проводиться за певних умов. Наприклад, якщо струм у колі має вигляд імпульсів, що йдуть один за одним із випадковими інтервалами, то факти наявності або відсутності струму в цей момент є випадковими подіями. Для кількісної характеристики результату експерименту вводиться поняття **випадкової величини**. Для вказаної послідовності імпульсів такою характеристикою може слугувати, наприклад, кількість імпульсів у певному інтервалі часу або кількість перевищень струмом заданого порога за рахунок флуктуацій, зокрема кількість переходів через нульовий рівень (кількість змін знака) тощо. Це приклади **дискретних** випадкових величин – вони набувають лічильної множини значень (їх буквально можна перелічити); ця множина може бути і нескінченною. З іншого боку, результати вимірювань фізичної величини можуть належати

континууму значень, тобто неперервно заповнювати скінчений або нескінчений інтервали дійсної осі. До класу **неперервних** випадкових величин належать, наприклад, тривалість інтервалів часу між імпульсами, миттєві значення флюктуючих струмів і напруг у радіотехнічному колі, швидкості електронів у плазмі, швидкість і координати броунівської частинки (аналогію з пересуванням якої ми використовуватимемо далі для наочності) тощо.

2.1. Неперервні випадкові величини

Нехай неперервна випадкова величина ξ може набувати значення в інтервалі $(a, b]$. Імовірність того, що випадкова величина ξ не перевищує будь-якого заданого заздалегідь значення x , називається **функцією розподілу ймовірностей** (або **інтегральною функцією розподілу ймовірностей**) $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ .

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}. \quad (2.1)$$

З рис. 2.1 видно, що $F_\xi(x)$ — імовірність випадкової події, що полягає у потраплянні виміряної величини ξ в заштриховану подвійним штрихом область.

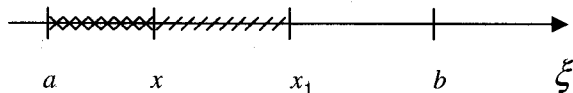


Рис. 2.1

Властивості $F_\xi(x)$

1. Подія $\xi \leq a$ є неможливою подією, а подія $\xi \leq b$ — достовірною. Отже,

$$\begin{aligned} P\{\xi \leq a\} &= F_\xi(a) = 0, \\ P\{\xi \leq b\} &= F_\xi(b) = 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Доведемо, що в інтервалі $a < x \leq b$ функція $F_\xi(x)$ є монотонною неспадною функцією. Оберемо на осі ξ значення $x_1 > x$ (див. рис. 2.1). Випадкову подію $\xi \leq x_1$ можна розглядати як суму двох несумісних подій $\xi \leq x$ (подвійних штрих) і $x < \xi \leq x_1$ (одинарний штрих). Ця обставина дає змогу застосувати формулу додавання ймовірностей (1.4):

$$P\{\xi \leq x_1\} = P\{\xi \leq x\} + P\{x < \xi \leq x_1\}. \quad (2.3)$$

Враховуючи визначення (2.1) і той факт, що ймовірність P будь-якої події є невід'ємною, маємо

$$F_\xi(x_1) - F_\xi(x) = P\{x < \xi \leq x_1\} \geq 0. \quad (2.4)$$

Таким чином, зі збільшенням x функція розподілу $F_\xi(x)$, у будь-якому разі не спадає. З (2.2) і (2.4) випливає: $F_\xi(x) = 0$ при $-\infty < x \leq a$, $F_\xi(x) = 1$ при $b < x \leq \infty$, а в області $a < x \leq b$ монотонно зростає від нуля (при $x = a$) до одиниці (при $x = b$).

3. Нехай x_1 відрізняється від x на нескінченно малу величину dx ($x_1 = x + dx$). Тоді з (2.4) випливає:

$$P\{x < \xi \leq x + dx\} = F_\xi(x + dx) - F_\xi(x) \equiv W_\xi(x) dx, \quad (2.5)$$

де ми ввели **густину розподілу ймовірності** $W_\xi(x)$ випадкової величини ξ :

$$W_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}. \quad (2.6)$$

4. З визначення (2.5) видно, що $W_\xi(x) dx$ є ймовірність того, що випадкова величина ξ набуває значення на інтервалі $x < \xi \leq x + dx$. Інтегруючи (2.6) з урахуванням умови $F_\xi(-\infty) = 0$, маємо

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(x') dx'. \quad (2.7)$$

5. Імовірність потрапляння ξ у кінцевий інтервал $x_1 < \xi \leq x_2$, згідно з (2.4) і (2.7) дорівнює

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W_{\xi}(x) dx. \quad (2.8)$$

Властивості $W_{\xi}(x)$

Із наведених властивостей $F_{\xi}(x)$ і формул (2.6) і (2.7) випливає, що

- 1) $W_{\xi}(x)$ — **фінітна функція**, що тотожно перетворюється у нуль поза інтервалом $a < x \leq b$;
- 2) невід'ємна функція всередині вказаного інтервалу ($W_{\xi}(x) \geq 0$);

- 3) площа під нею дорівнює одиниці (**умова нормування**):

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = F_{\xi}(\infty) = 1. \quad (2.9)$$

На рис. 2.2 схематично зображені можливі графіки функцій $F_{\xi}(x)$ і $W_{\xi}(x)$. Імовірність того, що випадкова величина ξ набуває значення з інтервалу $x_1 < \xi \leq x_2$, дорівнює заштрихованій площині.

2.2. Дискретні випадкові величини

Нехай тепер випадкова величина ξ може набувати тільки дискретних значень $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ з імовірностями $P\{\xi = x_i\} = p_i$. Нехай події $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) несумісні.

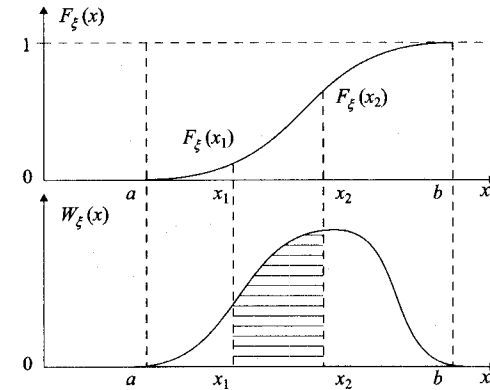


Рис. 2.2

Для будь-якого наперед заданого значення x складна подія $\xi \leq x$ настає тоді і тільки тоді, коли ξ набуває одного зі значень $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), де значення k визначається із наступної нерівності:

$$x_k \leq x < x_{k+1}. \quad (2.10)$$

Скориставшись правилом підсумовування ймовірностей для несумісних подій, отримуємо для функції розподілу ймовірностей наступну формулу:

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi = x_1 \text{ або } \xi = x_2 \text{ або } \dots \text{ або } \xi = x_k\} = \sum_{i=1}^k p_i. \quad (2.11)$$

Введемо у розгляд одиничну східчасту функцію (**функцію Хевісайда**):

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Тоді формулу (2.11) можна переписати у вигляді

$$F_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i h(x - x_i). \quad (2.13)$$

Доданки з $i > k$ випадають із суми (2.13) у зв'язку з умовами (2.10) і (2.12).

Визначивши густину розподілу ймовірностей $W_{\xi}(x)$ як похідну від $F_{\xi}(x)$ (див. (2.6)), з (2.13), отримуємо

$$W_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i), \quad (2.14)$$

де введено $\delta(x - a)$ — дельта-функція Дірака

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} h(x - a). \quad (2.15)$$

Основні властивості δ -функції:

1. Вона дорівнює нулю всюди, крім точки $x = a$ (де її аргумент дорівнює нулю), а у точці $x = a$ набуває нескінченного значення:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq a; \\ \infty, & \text{якщо } x = a. \end{cases} \quad (2.16)$$

2. Функція парна $\delta(-x) = \delta(x)$.

3. „Площа” під δ -функцією скінченна і дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (2.17)$$

4. Правило інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (2.18)$$

Формула (2.17) є випадком (2.18) при $f(x) = 1$.

Наведемо декілька найуживаніших граничних подань для δ -функції:

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x - a)^2}; \quad (2.19 \text{ а})$$

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\varepsilon^2}}, \quad (2.19 \text{ б})$$

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \sin[\varepsilon(x - a)]}{\pi \varepsilon(x - a)}. \quad (2.19 \text{ в})$$

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-a)} d\omega. \quad (2.19 \text{ г})$$

З останнього співвідношення і умови парності легко довести, що

$$\delta[b(x - a)] = \frac{1}{|b|} \delta(x - a) \quad \text{або} \quad \delta(bx - a) = \frac{1}{|b|} \delta\left(x - \frac{a}{b}\right). \quad (2.20)$$

Оскільки події $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) утворюють повну групу (в результаті досліду обов'язково відбувається одна і тільки одна з них), то сума подій (2.11) при $k = N$ є достовірною подією, і має виконуватись умова нормування

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (2.21)$$

Використовуючи формулу для $W_{\xi}(x)$, перепишемо (2.21) у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = \sum_{i=1}^N p_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (2.22)$$

Схематично графіки функцій $W_{\xi}(x)$ і $F_{\xi}(x)$ наведені на рис. 2.3.

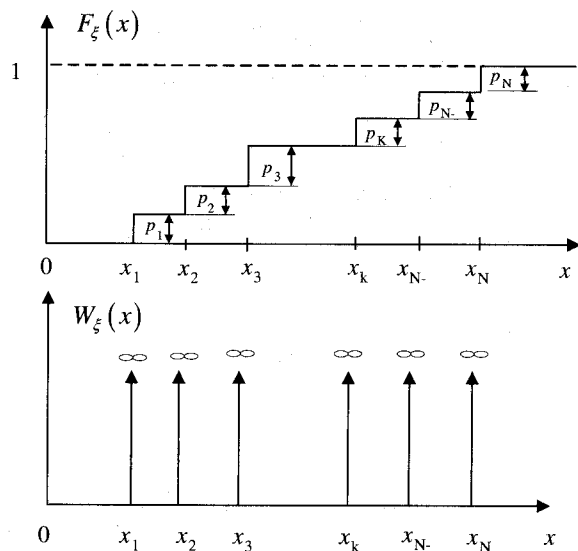


Рис. 2.3

2.3. Моменти випадкових величин

Функція розподілу $F_\xi(x)$ або густина розподілу ймовірності $W_\xi(x)$ дають повний статистичний опис випадкової величини ξ . Знаючи їх, можна розрахувати за формулою (2.8) ймовірність того, чи потрапить (або не потрапить) випадкова величина ξ у будь-який інтервал $(x_1, x_2]$. Проте, іноді така повна інформація буває або непотрібною, або недоступною, і ми вимушені обмежуватися грубішим описом ймовірнісних властивостей випадкової величини ξ , користуючись не функціями $F_\xi(x)$ і $W_\xi(x)$, а деякою сукупністю числових параметрів, які називаються моментами випадкової величини.

Як найпростіший приклад виступає **середнє значення** (або **математичне сподівання**) випадкової величини ξ , яке далі ми будемо позначати ризикою $\bar{\xi}$, або косими дужками $\langle \xi \rangle$. Якщо в результаті проведених M випробувань дискретна величина ξ набула n_1 разів значення x_1 , n_2 разів значення x_2 і n_N разів значення

x_N , то емпірична оцінка середнього значення ξ проводиться за очевидною формулою (що узагальнює звичайне поняття середнього арифметичного):

$$\bar{\xi} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_N n_N}{M} = \sum_{i=1}^N x_i v_i, \quad (2.23)$$

де $v_i = n_i/M$ — частота появи події $\xi = x_i$. При достатньо великій кількості випробувань ($M \gg 1$) частоти v_i у (2.23) можна замінити на ймовірності p_i , і ми отримаємо

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^N x_i p_i = \int_{-\infty}^{\infty} x W_\xi(x) dx, \quad (2.24)$$

де $W_\xi(x)$ визначається за формулою (2.14). Для неперервної випадкової величини ξ можна провести аналогічні обчислення, і ми прийдемо до цієї ж формули. Провівши аналогію з механікою, можна сказати, що $\bar{\xi}$ — координата „центру ваги” функції $W_\xi(x)$. Справді, якщо розглянути стержень з лінійною густиною маси (маса на одиницю довжини), що залежить від координати x за законом $W_\xi(x)$, то $\bar{\xi}$ — координата «центру мас» цього стержня. До речі, звідси і походить назва $W_\xi(x)$ — густина ймовірності (аналог густини маси). Знання середнього значення $\bar{\xi}$ дає змогу вказати величину, навколо якої групуються значення, яких набуває випадкова величина ξ , проте нічого не говорить про відхилення ξ відносно $\bar{\xi}$, тобто, про величину **флуктуацій** $\delta\xi = \xi - \bar{\xi}$.

Більш повну інформацію про випадкову величину ξ дають **початкові і центральні моменти**. Середні значення цілих степенів ξ^k носять назву початкових моментів k -го порядку:

$$m_k = \langle \xi^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_\xi(x) dx = \bar{\xi^k}. \quad (2.25)$$

Аналогічно, середні значення цілих степенів флуктуацій $(\delta\xi)^k$ носять назву центральних моментів k -го порядку:

$$M_k = \langle \delta\xi^k \rangle = \langle (\xi - \bar{\xi})^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^k W_\xi(x) dx = \overline{\delta\xi^k}. \quad (2.26)$$

Центральний момент 2-го порядку M_2 називається **дисперсією** флуктуації і звичайно позначається як σ_ξ^2 . Величину $\sigma_\xi = \sqrt{\sigma_\xi^2}$ називають ще **середньоквадратичним відхиленням** або **стандартом** величини ξ .

Із визначень m_k (2.25) і M_k (2.26), а також умови нормування (2.9) випливає, що

$$m_0 = M_0 = 1, \quad m_1 = \bar{\xi}, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = \sigma_\xi^2 = m_2 - m_1^2. \quad (2.27)$$

Повертаючись до аналогії з неоднорідним стержнем із розподілом густини мас $W_\xi(x)$, можна показати, що дисперсія $\sigma_\xi^2 = \langle (\xi - \bar{\xi})^2 \rangle$ — є моментом інерції стержня відносно центру мас. З іншого боку, величина σ_ξ може слугувати для грубої оцінки ширини функції $W_\xi(x)$, “центр ваги” якої зосереджено навколо $x = \bar{\xi}$ (рис. 2. 4).

Моменти більш високих порядків містять детальнішу інформацію про форму функції $W_\xi(x)$ — ступінь її асиметрії, гостроту максимуму та ін.

Розглянемо тепер детерміновану функцію $\eta = \varphi(\xi)$ дискретної випадкової величини ξ . Якщо внаслідок проведених M випробувань дискретна величина ξ набула n_1 разів значення x_1 , n_2 разів значення x_2 і n_N разів значення x_N , то аналогічно (2.23)

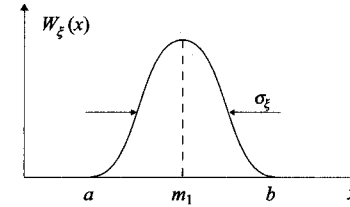


Рис. 2. 4

емпірична оцінка середнього значення $\eta = \varphi(\xi)$ проводиться як

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle = \langle \varphi(\xi) \rangle &= \frac{\varphi(x_1)n_1 + \varphi(x_2)n_2 + \dots + \varphi(x_N)n_N}{M} = \\ &= \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) v_i. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тут $v_i = n_i/M$ — частота появи події $\xi = x_i$. При достатньо великій кількості випробувань ($M \gg 1$) частоти v_i у (2.28) можна замінити на ймовірності p_i , і ми отримаємо наступний вираз:

$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) p_i = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_\xi(x) dx, \quad (2.29)$$

де густина ймовірності $W_\xi(x)$ визначається за формулою (2.14). Нескладно показати, що середнє значення детермінованої функції $\eta = \varphi(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ визначається так само, як і в (2.29):

$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_\xi(x) dx. \quad (2.30)$$

2.4. Характеристична функція

Характеристичною функцією $f(v)$ випадкової величини ξ називається середнє від функції $\varphi(\xi) = \exp(iv\xi)$, де v – довільний дійсний параметр:

$$f(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} W_{\xi}(x) dx. \quad (2.31)$$

Видно, що $f(v)$ — не що інше, як перетворення Фур'є від густини розподілу ймовірностей $W_{\xi}(x)$. У свою чергу можна записати і зворотнє перетворення:

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} f(v) dv. \quad (2.32)$$

Таким чином, характеристична функція $f(v)$ і густина розподілу ймовірностей $W_{\xi}(x)$ є парою перетворень Фур'є.

Із визначення (2.31) випливають наступні **властивості характеристичної функції**. По-перше,

$$\begin{aligned} |f(v)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} W_{\xi}(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ivx} W_{\xi}(x)| dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ivx}| W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = 1, \end{aligned} \quad (2.33)$$

звідки випливає, що характеристична функція може бути визначена для кожної випадкової величини. По-друге,

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = 1. \quad (2.34)$$

Окрім того, для симетричних (парних) функцій $W_{\xi}(x)$ характеристична функція $f(v)$ дійсна.

Одним із корисних застосувань характеристичної функції є спрощене обчислення моментів m_k випадкової величини ξ . Якщо існує k -ий початковий момент m_k випадкової величини ξ , то її характеристична функція має похідну k -го порядку, причому

$$\frac{d^k f(v)}{dv^k} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) e^{ivx} dx. \quad (2.35)$$

З (2.35) випливає, що

$$\left. \frac{d^k f(v)}{dv^k} \right|_{v=0} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) dx = i^k m_k. \quad (2.36)$$

Отже, початкові моменти m_k випадкової величини ξ відрізняються від значення похідної характеристичної функції при $v=0$ тільки множником i^k :

$$m_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k f(v)}{dv^k} \right|_{v=0}. \quad (2.37)$$

ЗАДАЧІ

1. Випадкова величина ξ може набувати тільки два значення $x: x_1 = A$ з імовірністю $p_1 = 3/4$ і $x_2 = -A$ з імовірністю $p_2 = 1/4$. Знайти $W_{\xi}(x)$, $\bar{\xi}$ і σ_{ξ}^2 .

Розв'язок. Випадкова величина ξ дискретна, тому густина розподілу ймовірностей для неї визначається за формулою (2.14):

$$\begin{aligned} W_{\xi}(x) &= \sum_{i=1}^2 p_i \delta(x - x_i) = p_1 \delta(x - x_1) + p_2 \delta(x - x_2) = \\ &= p_1 \delta(x - A) + p_2 \delta(x + A). \end{aligned}$$

Скориставшись цим поданням, згідно з формулами (2.25) і (2.26) знаходимо математичне очікування $\bar{\xi}$ і дисперсію σ_{ξ}^2 випадкової величини ξ .

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = x_1 p_1 + x_2 p_2 = \frac{3}{4} A - \frac{1}{4} A = \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = (x_1 - \bar{\xi})^2 p_1 + (x_2 - \bar{\xi})^2 p_2 = \\ &= (A - \frac{A}{2})^2 p_1 + (-A - \frac{A}{2})^2 p_2 = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} A^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} A^2. \end{aligned}$$

2. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_{\xi}(x) = c + b \cdot \arctg \frac{x}{a}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Необхідно:

- визначити коефіцієнти b і c ;
- знайти вираз для $W_{\xi}(x)$;
- визначити ймовірність $P\{\alpha < \xi \leq \beta\}$ потрапляння величини ξ в інтервал $(\alpha, \beta]$.

Розв'язок. а) Скористаємося властивостями функції $F_{\xi}(x)$:

$$F_{\xi}(-\infty) = 0, \quad c + b \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0;$$

$$F_{\xi}(\infty) = 1, \quad c + b \frac{\pi}{2} = 1.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти b і c : $b = \frac{1}{\pi}$, $c = \frac{1}{2}$.

б) Зі зв'язку між $W_{\xi}(x)$ і $F_{\xi}(x)$ отримаємо наступне співвідношення:

$$W_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(c + b \arctg \frac{x}{a} \right) = b \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{ab}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

в) За відомою густиною розподілу ймовірності $W_{\xi}(x)$ знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал.

$$\begin{aligned} P\{\alpha < \xi \leq \beta\} &= F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} W_{\xi}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \arctg y \Big|_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} = \frac{1}{\pi} \left(\arctg \frac{\beta}{a} - \arctg \frac{\alpha}{a} \right). \end{aligned}$$

3. Випадкова величина ξ розподіляється за законом, поданим на рис. 2.5. Необхідно записати вираз для $F_{\xi}(x)$ і визначити ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(a/2, a]$. Обчислити значення $\bar{\xi}$ і σ_{ξ}^2 .

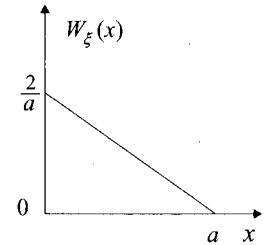


Рис. 2.5

Розв'язок. Із рис. 2.5 видно, що $W_{\xi}(x)$ — це пряма лінія, рівняння якої має вигляд

$$W_{\xi}(x) = -k(x - a) = k(a - x).$$

Значення коефіцієнта k знаходимо з умови, що при $x=0$ $W_{\xi}(x) = 2/a = ka$. Отже, $k = 2/a^2$. Таким чином, маємо

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right), & 0 < x \leq a; \\ 0, & x \leq 0; \quad x > a. \end{cases}$$

На інтервалі $0 < x \leq a$ вираз для $0 < x \leq a$ має вигляд (див. (2.8)):

$$F_{\xi}(x) = \int_0^x W_{\xi}(x') dx' = \int_0^x \left(1 - \frac{x'}{a}\right) dx' = \frac{2}{a}x - \frac{x^2}{a^2} = \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right).$$

Отже,

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Імовірність потрапляння величини ξ в інтервал $(a/2, a]$ знаходиться як

$$P\left\{\frac{a}{2} < \xi \leq a\right\} = F_{\xi}(a) - F_{\xi}\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Середнє значення ξ і середній квадрат ξ^2 випадкової величини ξ рівні

$$m_1 = \bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = \int_0^a x \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a}{3}.$$

$$m_2 = \overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx = \frac{2}{a} \left(\int_0^a x^2 dx - \int_0^a \frac{x^3}{a} dx\right) = \frac{2}{a} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

За отриманими першим і другим початковими моментами за формулою (2.27) знайдемо дисперсію

$$\sigma_{\xi}^2 = M_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}.$$

§ 3. Закони розподілу випадкових величин

Будь-яка функція $W_{\xi}(x)$, що задовольняє сформульовані у §2 умови, може виступати в ролі густини розподілу ймовірностей якої-небудь випадкової величини. Проте у фізичних задачах ми, як правило, стикаємося з досить обмеженим набором функцій $W_{\xi}(x)$. Розглянемо деякі з них.

3.1. Рівномірний розподіл

Для неперервної випадкової величини ξ , що змінюється в інтервалі $(a, b]$, найпростішим розподілом є **рівномірний**:

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \quad x > b; \\ W_0, & a < x \leq b. \end{cases} \quad (3.1)$$

Значення сталої $W_0 = \text{Const}$ визначається з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = W_0 \int_a^b dx = W_0(b-a) = 1, \quad (3.2)$$

тобто $W_0 = 1/(b-a)$. Імовірність P того, що випадкова величина ξ потрапить в інтервал значень $(x, x+l]$, де $a < x < x+l \leq b$, не залежить від x , а визначається тільки довжиною інтервалу l :

$$P = \{x < \xi \leq x+l\} = \int_x^{x+l} W_{\xi}(x') dx' = W_0 l = \frac{l}{b-a}. \quad (3.3)$$

Графік густини ймовірностей $W_{\xi}(x)$ і функції розподілу $F_{\xi}(x)$, що їй відповідає, наведено на рис. 3.1.

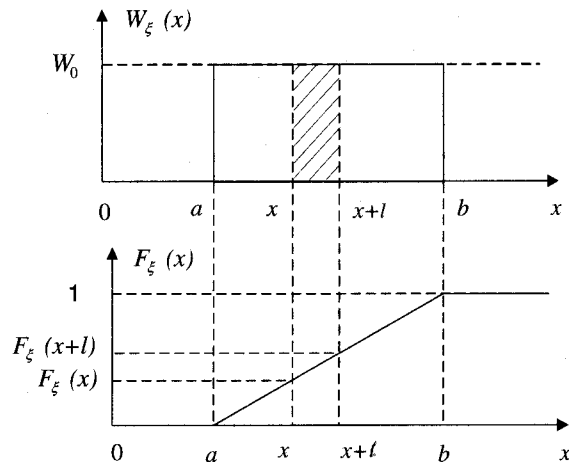


Рис. 3.1

Для дискретної випадкової величини, що набуває з однаковою ймовірністю $p_i = p = \text{Const}$ одне з N можливих значень x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), відповідний розподіл називається **рівноймовірним**. Для цього розподілу, згідно з (2.14), маємо

$$W_\xi(x) = p \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i). \quad (3.4)$$

З умови нормування випливає:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = p \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = pN = 1, \text{ тобто } p = \frac{1}{N}. \quad (3.5)$$

Наприклад, при киданні гральної кості випадання будь-якого числа очок від $x_1 = 1$ до $x_6 = 6$ відбувається з рівною ймовірністю $p = 1/6$.

3.2. Біномний розподіл.

Схема Бернуллі (1713 р.)

Серед багатьох можливих законів розподілу ймовірностей особливу роль відіграють розподіли, що виникають в результаті розв'язання найпростіших ймовірнісних задач, і внаслідок цього є достатньо загальними і мають досить широку область застосування. Найважливішим із них є **біномний розподіл**, що виникає в задачах, які зводяться до схеми незалежних послідовних випробувань.

Нехай проводиться N незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може виникнути або не виникнути. Доведимося вважати, що ймовірність появи події A у кожному випробуванні є однаковою, а саме — дорівнює p . Отже, ймовірність невиникнення події A (доповнювальна подія \bar{A}) також стала і дорівнює $q = 1 - p$. Таким чином, подія \bar{A} має ймовірність $q = 1 - p$. Поставимо перед собою задачу обчислити ймовірність того, що при N випробуваннях подія A здійсниться рівно n разів. Результат серії з N випробувань можна записати, наприклад, у вигляді

$$\underbrace{AAAA\bar{A}\bar{A}\dots A\bar{A}}_N. \quad (3.6)$$

Цей запис означає, що у першому і другому досліді A відбулася, в третьому — не відбулася, у четвертому — відбулася, у п'ятому — ні і т.ін. Нас цікавить подія M , яка полягає в тому, що A в ланцюжку (3.6) відбудеться рівно n разів. Подію M можна розглядати як складну подію, рівну добутку незалежних указаних елементарних подій A і \bar{A} . У цьому випадку ймовірність події M є добутком ймовірностей появи подій A і \bar{A} відповідно (див. формулу множення ймовірностей (1.19)):

$$P\{M\} = \overbrace{ppqprq\dots pq}^N = p^n q^{N-n}. \quad (3.7 \text{ а})$$

Подія M , яка нас цікавить, відбувається щоразу, коли в ланцюжку типу (3.6) A повторюється n разів незалежно від послідовності A і \bar{A} :

$$\left. \begin{aligned} P\{M\} &= ppqrqq\dots pq = p^n q^{N-n}, \\ P\{M\} &= pqqrqq\dots qp = p^n q^{N-n}, \\ &\dots\dots\dots, \\ P\{M\} &= qppqpp\dots qq = p^n q^{N-n}. \end{aligned} \right\} C_N^n. \quad (3.7 \text{ б})$$

При цьому складні події типу (3.7 б), що відрізняються тільки перестановками A і \bar{A} , несумісні, тому ймовірність їхньої суми є сумою ймовірностей кожної з них. Видно, що ці події мають рівну ймовірність, а їх кількість дорівнює кількості способів вибору n елементів з N , тобто кількості поєднань C_N^n . Отже, сума ймовірностей (3.7 б) всіх подій типу (3.6), у яких подія A відбулася n разів, дорівнює

$$P\{S\} = P_N(n) = \sum_{\substack{\text{за всіма} \\ \text{окремими} \\ \text{випадками } M}} p^n q^{N-n} = C_N^n p^n q^{N-n}, \quad (3.8)$$

де $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ — біноміальні коефіцієнти (кількість поєднань).

Формулою (3.8) виражається **біномний закон розподілу ймовірностей**. Згідно з (2.14) для густини розподілу ймовірностей $W_\xi(x)$ дискретної величини ξ , що набуває значень $\xi = n$, отримаємо наступний вираз:

$$W_\xi(x) = \sum_{n=0}^N P_N(n) \delta(x-n).$$

Перевіримо, чи задовольняє цей розподіл умові нормування. Повна група подій полягає, очевидно, в тому, що n може набувати всіх значень від $n=0$ до $n=N$. Отже, має виконуватися наступна рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=0}^N P_N(n) \delta(x-n) = \sum_{n=0}^N P_N(n) = 1. \quad (3.9)$$

Підставимо у (3.9) знайдений розподіл (3.8) і скористаємося формулою бінома Ньютона (звідси і назва розподілу):

$$\sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1^N = 1. \quad (3.10)$$

Ми врахували, що ймовірність доповнювальної події A дорівнює $q = 1 - p$.

Моменти біномного розподілу

Легко показати, що початковий момент k -го порядку:

$$m_k = \langle n^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_\xi(x) dx = \sum_{n=0}^N n^k P_N(n) \quad (3.11)$$

зручно обчислювати, користуючись формулою

$$\langle n^k \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^k (p+q)^N \Big|_{p+q=1}. \quad (3.12)$$

Зокрема, перші два моменти дорівнюють:

$$\langle n \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p+q)^N \Big|_{p+q=1} = Np(p+q)^{N-1} \Big|_{p+q=1} = Np, \quad (3.13)$$

$$\langle n^2 \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left[p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \right] \Big|_{p+q=1} = Np[1 + p(N-1)] = Np[q + Np]. \quad (3.14)$$

Дисперсія випадкової величини при цьому має наступний вигляд:

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = Npq. \quad (3.15)$$

Приклади

Наведемо ряд конкретних прикладів, у яких задача зводиться безпосередньо до схеми Бернуллі.

1. Урнова задача. В урні лежать білі і чорні кулі. Ймовірність того, що взята навмання куля буде білою (подія A) дорівнює p . Яка ймовірність того, що з узятих N куль білими виявляться n (для того, щоб забезпечити незалежність випробувань, узяту кулю потрібно обов'язково класти назад до урни і перемішувати її вміст)?

2. Кидання монети. Яка ймовірність того, що при N киданнях n разів випаде "орел", якщо при одному киданні $p = 1/2$?

3. Флуктуації густини. В об'ємі V міститься N молекул газу. Ймовірність потрапляння молекули до виділеного із V об'єму ν (подія A) дорівнює p . Яка ймовірність того, що у V міститься n яких-небудь молекул?

4. Випадкові блукання (броунівської частинки, людини й т.ін.). Яка ймовірність того, що за N „кроків” частинка (людина) відійде на n кроків вліво (або вправо), якщо ймовірність кроку вліво дорівнює p ?

5. Телефонні виклики. Телефоністка чергує протягом часу T . Ймовірність того, що за дуже малий інтервал τ відбудеться виклик, який дорівнює p . Яка ймовірність того, що за час чергування відбудеться n викликів?

Розглянемо детальніше дві задачі.

6. Задача про надійність складної системи, що складається з великої кількості N однакових елементів (опорів, реле та ін.). Нехай ймовірність виходу з ладу або відмови (подія A) кожного з них протягом заданого інтервалу часу T дорівнює p .

Яка ймовірність того, що за час T система відмовить?

Складна подія, ймовірність P якої нас цікавить, відбувається, якщо відмовляє один елемент, два елементи або всі N елементів. Ці події несумісні й, отже, ймовірність P їхньої суми дорівнює сумі ймовірностей:

$$P = \sum_{n=1}^N P_N(n). \quad (3.16)$$

Додамо і віднімемо в (3.16) $P_N(0)$ і скористаємося умовою нормування (3.9):

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^N P_N(n) + P_N(0) - P_N(0) = \\ &= \sum_{n=0}^N P_N(n) - P_N(0) = 1 - C_N^0 p^0 q^N = 1 - (1-p)^N. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Цей результат, звичайно, можна було б отримати значно простішим способом, розглянувши ймовірність \bar{P} доповнювальної події, яка полягає в тому, що жоден елемент не вийде з ладу (тобто A не відбудеться жодного разу, а \bar{A} — всі N разів):

$$\bar{P} = P_N(0) = q^N. \quad (3.18)$$

Звідси, зі співвідношення $P + \bar{P} = 1$ випливає формула (3.17).

7. Ще один приклад, який корисно розглянути, — дробовий шум у електровакуумних приладах. Розглянемо струм, що протікає через двохелектродну лампу. Нехай за час T з катода вилетіло n електронів, які перенесли заряд $q_T = ne$ й, отже, утворили у колі струм:

$$I = q_T/T = ne/T. \quad (3.19)$$

Кількість n електронів, що вилетіли, звичайно, є випадковою величиною. Тому і струм I — випадкова величина, що флукутує навколо якогось середнього значення:

$$\bar{I} = \bar{n}e/T = n_1 e, \quad (3.20)$$

де $n_1 = \bar{n}/T$ — середня кількість електронів, що вилітають з катода за одиницю часу. Із (3.19) і (3.20) видно, що розподіл ймовірностей для флуктуацій струму $\delta I = I - \bar{I}$ (ці флуктуації струму, викликані

дискретним характером перенесення заряду, і носять назву дробового шуму) визначається розподілом числа n . Для того, щоб застосувати біноміальний розподіл, ми маємо звести цю задачу до схеми Бернуллі — послідовності незалежних випробувань. Для цього розіб'ємо весь інтервал T на N інтервалів тривалістю $\tau = T/N$. Вважатимемо, що вилітання кожного електрона з катода протягом проміжку часу $0 < t \leq T$ є рівномірною подією. У цьому випадку ймовірність p вилітання одного електрона за час τ пропорційна $p \sim \tau/T$ (див. формулу (3.3)). Вилітання окремих електронів можна вважати незалежною подією (якщо, звичайно, не враховувати просторовий заряд). Тому ймовірність вилітання двох електронів за той же час $\sim (\tau/T)^2, \dots$ « k » електронів $\sim (\tau/T)^k$. Припустимо, що τ/T — настільки мале (тобто N — настільки велике), що ймовірністю вилітання за час τ більше, ніж одного електрона можна знехтувати. Таким чином, за час τ може відбутися тільки дві події: вилітання одного електрона (подія A з ймовірністю p) і відсутність вилітання (подія \bar{A} з ймовірністю $q = 1 - p$). Задачу зведено до схеми Бернуллі й, отже, розподіл n — біномний:

$$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}. \quad (3.21)$$

3.3. Розподіли Пуассона і Лапласа

Знайдений розподіл (3.21) не може повністю нас задовольнити: до нього входить невідома ймовірність p і невизначене число N , про яке припускається, що воно дуже велике. Для визначення p , з одного боку, скористаємося визначенням $\bar{n} = Np$, звідки випливає

$$p = \bar{n}/N. \quad (3.22)$$

З іншого боку, з визначення середнього струму \bar{I} за формулою (3.20) знаходимо

$$\bar{n} = T\bar{I}/e. \quad (3.23)$$

Враховуючи, що для фіксованого проміжку часу T величина \bar{I} визначається тільки конструктивними особливостями лампи, температурою катода, різницею потенціалів між катодом і анодом тощо, можна вважати $\bar{I} = \text{Const}$. Звідси отримуємо, що і $\bar{n} = \text{Const}$ не залежить від кількості розбивань N .

Тепер збільшуватимемо кількість розбивань ($N \rightarrow \infty$). Зі зростанням N середня кількість електронів, що вилетіли з катода за фіксований час T не змінюється ($\bar{n} = \text{Const}$), отже, $p = \bar{n}/N \rightarrow 0$. Таким чином, нам потрібно відшукати границю розподілу (3.21) за умови, що $N \rightarrow \infty$ і $p = \bar{n}/N \rightarrow 0$. Для цього підставимо $p = \bar{n}/N$ і $q = 1 - p = 1 - \bar{n}/N$ у (3.21), запишемо у явному вигляді вираз для C_N^n і перейдемо до границі $\bar{n}/N \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)(N-n)!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{-n} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \equiv P(n). \end{aligned}$$

При цьому ми скористалися формулою

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = e^{-\bar{n}}.$$

Розподіл

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (3.24)$$

називається **розподілом Пуассона**. Перевіримо тепер, що

$$W_\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \delta(x - n)$$

задовольняє умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} = e^{-\bar{n}} \cdot e^{\bar{n}} = 1. \quad (3.25)$$

Переконаємося, що перший початковий момент m_1 збігається з середнім значенням \bar{n} :

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \bar{n}^n e^{-\bar{n}} = \\ &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^k}{k!} = \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Другий початковий момент m_2 знайдемо за допомогою аналогічних обчислень:

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx = \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \bar{n}^n = \\ &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \bar{n}^n = e^{-\bar{n}} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} \right\} = \bar{n}^2 + \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Отже,

$$\sigma_n^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = \bar{n}. \quad (3.28)$$

Інший граничний випадок біномного закону при $N \rightarrow \infty$ з'являється, коли p не прямує до нуля, а має певне значення, відмінне від нуля й одиниці. Таким чином, зі зростанням N зростає також і \bar{n} . З формули (3.28) видно, що при $\bar{n} \gg 1$ середньоквадратичне відхилення $\sigma_n = \sqrt{\bar{n}}$ значно менше за середнє значення \bar{n} : $\sigma_n / \bar{n} \sim 1/\sqrt{\bar{n}} \ll 1$, тобто розподіл $P(n)$ виявляється зосередженим головним чином навколо значень $n \approx \bar{n} \gg 1$. Ураховуючи цю обставину, введемо до розгляду $\delta n = n - \bar{n}$ і в формулі (3.24) у області значень $\bar{n} \gg 1$ и $|\delta n|/\bar{n} \ll 1$, проведемо наступні спрощення:

1. Для великих значень n ($n \gg 1$) можна скористатися формулою Стірлінга для $n!$:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

і ми прийдемо до розподілу вигляду:

$$P(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\bar{n}}{n} \right)^n e^{n-\bar{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} \left(\frac{\bar{n}}{n} \right)^n e^{\delta n}.$$

2. Увівши позначення $F(n) = (\bar{n}/n)^n$, з точністю до квадратичних доданків за малою величиною $|\delta n|/\bar{n} \ll 1$ обчислимо наближене значення $\ln F(n)$:

$$\begin{aligned} \ln F(n) &= n \ln \left(\frac{\bar{n}}{n} \right) = -(\bar{n} + \delta n) \ln \left(1 + \frac{\delta n}{\bar{n}} \right) \approx \\ &\approx -(\bar{n} + \delta n) \left(\frac{\delta n}{\bar{n}} - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}^2} \right) \approx -\delta n - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$F(n) \approx \exp \left\{ -\delta n - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}} \right\}.$$

З урахуванням усіх виконаних спрощень, розподіл (3.24) можна подати у наступному вигляді:

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} e^{-\frac{\delta n^2}{2\bar{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_n}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma_n^2}}. \quad (3.29)$$

Цей вираз називається **розподілом Лапласа** або **нормальним законом розподілу**.

Таким чином, з біномного розподілу ми отримали ще два важливі закони розподілу Пуассона і Лапласа:

$$C_N^n p^n q^{N-n} \xrightarrow[\bar{n}/N \rightarrow 0]{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \xrightarrow[\bar{n} \gg 1]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}. \quad (3.30)$$

ЗАДАЧІ

1. Випадкова величина φ розподіляється за нормальним законом із середнім значенням $\bar{\varphi} = 0$ і дисперсією σ_φ^2 . Знайти середнє значення іншої випадкової величини $\xi = e^{-i\varphi}$.

Розв'язок. При нульовому середньому нормальний закон (3.29) має вигляд

$$W(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}}.$$

Для визначення $\bar{\xi}$ скористаємося формулою (2.30):

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}} d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{2\sigma_\varphi^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varphi} \exp\left(-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \exp\left(-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}\right).\end{aligned}$$

2. На радіомаяк-відповідач надходить у середньому 15 запитів за годину. Вважаючи кількість запитів випадковою величиною, що розподіляється за законом Пуассона, визначити ймовірність того, що за $T = 4$ хв:

- а) надійде рівно 3 запити;
- б) не надійде жодного запиту;
- в) надійде хоча б один запит.

Розв'язок. У розподілі Пуассона (3.24), що описує ймовірність появи шуканої події A на інтервалі часу $(0, t]$, входить величина \bar{n} , яка є середньою кількістю появ події A на цьому інтервалі. Згідно з (3.20) величина \bar{n} легко визначається, якщо відома середня кількість подій за одиницю часу n_1 і тривалість

інтервалу t : $\bar{n} = n_1 t$. У нашому випадку $t = T = 4$ хв, а середня кількість запитів за одиницю часу дорівнює $n_1 = \frac{15}{60 \text{ хв}} = 1/4 \text{ хв}^{-1}$.

Звідси знаходимо $\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$. Знаючи \bar{n} , за допомогою розподілу Пуассона (3.24) визначимо шукані ймовірності:

$$\text{а) } P(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,061;$$

$$\text{б) } P(0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37;$$

$$\text{в) } P(n \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - 1/e \approx 0,63.$$

3. Відмова у роботі приладу відбувається в середньому 1 раз за 200 годин. Визначити ймовірність того, що за інтервал $T = 10$ год не відбудеться жодної відмови.

Розв'язок. Спочатку знайдемо середню кількість відмов за одиницю часу $n_1 = \frac{1}{200} \text{ год}^{-1}$. Звідси середня кількість відмов за

$T = 10$ год дорівнює $\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{20}$. За відомим значенням \bar{n} ,

згідно з формулою (3.24), визначимо шукану ймовірність

$$P(0) = \frac{\bar{n}^0}{0!} e^{-\bar{n}} = e^{-1/20} \approx 1 - \frac{1}{20} \approx 0,95.$$

4. Знайти густину розподілу ймовірності для часу безвідмовної роботи приладу, згаданого у попередній задачі.

Розв'язок. Розглянемо два інтервали спостереження $(0, t_1]$ і $(0, t_2]$ і обчислимо ймовірності безвідмовної роботи для кожного з них:

$$P(t_{1,2}) = P_{1,2}(0) = \frac{\bar{n}_{1,2}^0}{0!} e^{-\bar{n}_{1,2}} = e^{-\bar{n}_{1,2}}. \quad (1)$$

Середні значення $\bar{n}_{1,2}$, що входять сюди, пропорційні до середньої кількості появ подій n_1 і до відповідних тривалостей інтервалів $t_{1,2}$: $\bar{n}_{1,2} = n_1 t_{1,2}$. Нехай тепер $t_1 = t$, а $t_2 = t + \Delta t$, де Δt — невеликий приріст часу. Згідно з формулою (1) запишемо різницю ймовірностей для двох близьких моментів часу

$$\begin{aligned} P(t_1) - P(t_2) &= e^{-n_1 t} - e^{-n_1(t+\Delta t)} = e^{-n_1 t} (1 - e^{-n_1 \Delta t}) = \\ &= e^{-n_1 t} (1 - 1 + n_1 \Delta t - \dots) \approx n_1 \Delta t e^{-n_1 t}. \end{aligned} \quad (2)$$

З іншого боку, різниця ймовірностей між двома близькими моментами часу за визначенням дорівнює $W(t) \Delta t$. Прирівнявши

$$P(t_1) - P(t_2) = n_1 \Delta t e^{-n_1 t} = W(t) \Delta t, \quad (3)$$

знаходимо

$$W(t) = n_1 e^{-n_1 t},$$

$$\text{де } n_1 = \frac{1}{200} \text{год}^{-1}.$$

§ 4. Сукупність випадкових величин і функції випадкових аргументів

Розглянемо дві випадкові величини ξ і η , які можуть набувати дійсні значення x і y відповідно. Повний статистичний опис кожної з них, як ми знаємо з § 2, задається законом розподілу ймовірностей F або густиною розподілу W . Ці функції для ξ і η , взагалі кажучи,

відмінні, і для того, щоб їх відрізнити, слід писати внизу відповідний індекс:

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}; \quad W_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}; \quad (4.1)$$

$$F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\}; \quad W_\eta(y) = \frac{dF_\eta(y)}{dy}. \quad (4.2)$$

Статистично повний опис сукупності двох випадкових величин, за аналогією з (2.1), задається сумісним законом розподілу ймовірностей (інтегральною функцією розподілу)

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}. \quad (4.3)$$

Густина сумісного розподілу ймовірностей ξ і η визначається за формулою

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y). \quad (4.4)$$

Функцію $W_{\xi\eta}(x, y)$ називають ще **двовимірною густиною розподілу ймовірностей** на відміну від одновимірних $W_\xi(x)$ і $W_\eta(y)$; ця термінологія застосовується і для інтегральних функцій розподілу: $F_{\xi\eta}(x, y)$ — двовимірна, а $F_\xi(x)$ і $F_\eta(y)$ — одновимірні функції.

4.1. Властивості інтегральної функції і густини розподілу ймовірностей

Із визначення (4.3) випливають фундаментальні властивості функції $F_{\xi\eta}(x, y)$:

1. Оскільки ймовірність $P\{\dots\}$ за визначенням є **невід'ємною величиною**, що не перевищує одиницю, то

$$0 \leq F_{\xi\eta}(x, y) \leq 1. \quad (4.5)$$

2. **Властивість симетрії** $F_{\xi\eta}(x, y)$ випливає з того факту, що ймовірність P суми двох подій ($\xi \leq x$ і $\eta \leq y$) не залежить від порядку, у якому вони перелічуються:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} = P\{\eta \leq y, \xi \leq x\} = F_{\eta\xi}(y, x). \quad (4.6)$$

3. **Умова узгодженості** $F_{\xi\eta}(x, y)$ з одновимірними функціями $F_{\xi}(x)$ і $F_{\eta}(y)$ випливає з того, що події $\xi \leq \infty$ або $\eta \leq \infty$ є достовірними:

$$F_{\xi\eta}(\infty, y) = P\{\xi \leq \infty, \eta \leq y\} = P\{\eta \leq y\} = F_{\eta}(y), \quad (4.7)$$

$$F_{\xi\eta}(x, \infty) = P\{\xi \leq x, \eta \leq \infty\} = P\{\xi \leq x\} = F_{\xi}(x). \quad (4.8)$$

4. Оскільки події $\xi \leq -\infty$ і $\eta \leq -\infty$ є неможливими, то

$$F_{\xi\eta}(-\infty, y) = P\{\xi \leq -\infty, \eta \leq y\} = 0, \quad (4.9)$$

$$F_{\xi\eta}(x, -\infty) = P\{\xi \leq x, \eta \leq -\infty\} = 0. \quad (4.10)$$

5. Так само, як і в §2 (див. (2.4)), можна довести, що $F_{\xi\eta}(x, y)$ — **неспадна функція** кожного аргументу (при фіксованому значенні іншого):

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x, y) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} F_{\xi\eta}(x, y) \geq 0. \quad (4.11)$$

Причому, як випливає з властивостей 4 і 5, вона зростає від нуля при $\xi = -\infty$ або $\eta = -\infty$ до одиниці при $\xi = \eta = \infty$.

Із визначення (4.4) і перелічених властивостей функції $W_{\xi\eta}(x, y)$ випливають наступні **властивості** $W_{\xi\eta}(x, y)$:

1. $W_{\xi\eta}(x, y)$ — **невід'ємна функція** на всій площині x, y :

$$W_{\xi\eta}(x, y) \geq 0. \quad (4.12)$$

2. **Властивість симетрії**:

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{\xi\eta}(y, x) = W_{\eta\xi}(y, x). \quad (4.13)$$

3. **Зв'язок з** $F_{\xi\eta}(x, y)$. Інтегрування (4.4) з урахуванням умов (4.9) і (4.10) дає

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^y dy' W_{\xi\eta}(x', y'). \quad (4.14)$$

4. З (4.4), (4.7) і (4.8) випливає **умова узгодженості**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y') dy' = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' W_{\xi\eta}(x', y') = \frac{d}{dx} F_{\xi}(x) = W_{\xi}(x). \quad (4.15)$$

Аналогічно, для інтегралу по dx' :

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x', y) dx' = W_{\eta}(y). \quad (4.16)$$

5. Поклавши у (4.14) $x, y = \infty$, отримуємо **умову нормування**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = F_{\xi\eta}(\infty, \infty) = 1. \quad (4.17)$$

Якщо ξ і η розглядати як декартові проекції випадкового вектора $\vec{\zeta}$, то $F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$ є ймовірністю потрапляння вектора у заштриховану ділянку на рис. 4.1 а.

Функцію $W_{\xi\eta}(x, y)$, у свою чергу, можна подати у вигляді деякої поверхні. Тоді ймовірність того, що кінець випадкового вектора $\vec{\zeta}$ (точка A) буде всередині деякої ділянки S ($A \in S$),

дорівнює об'єму всередині циліндричної поверхні, що спирається на ділянку S і обмеженому зверху поверхнею $W_{\xi\eta}(x, y)$ (рис. 4.1 б):

$$P\{A \in S\} = \iint_S W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (4.18)$$

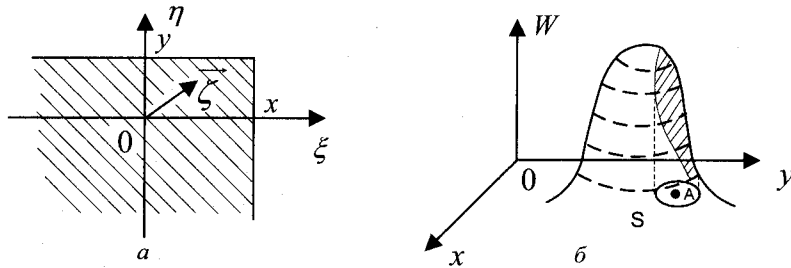


Рис. 4.1

7. Дві випадкові величини ξ і η називаються незалежними, якщо незалежні події $\xi \leq x$ і $\eta \leq y$. У цьому випадку двовимірні функції F і W розпадаються на добуток одновимірних, оскільки, згідно з формулою множення ймовірностей, маємо:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} = P\{\xi \leq x\} \cdot P\{\eta \leq y\} = F_{\xi}(x) F_{\eta}(y), \quad (4.19)$$

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx} \cdot \frac{dF_{\eta}(y)}{dy} = W_{\xi}(x) W_{\eta}(y). \quad (4.20)$$

4.2. Умовні функції розподілу

Якщо випадкові величини ξ і η залежні, то існує **умовна (апостеріорна) ймовірність** того, що одна з цих випадкових величин розташовується нижче певного рівня y , якщо інша міститься у межах $x < \xi \leq x_1$. Ця ймовірність $P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\}$ знаходиться за правилом множення (див. формули (1.16) і (1.17))

$$P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\} = \frac{P\{x < \xi \leq x_1, \eta \leq y\}}{P\{x < \xi \leq x_1\}}. \quad (4.21)$$

При заданій двовимірній густині ймовірності $W_{\xi\eta}(x, y)$ згідно з (4.14) і (4.15), вираз (4.21) можна переписати у наступному вигляді:

$$P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\} = \frac{\int_{x_1}^{x_1} \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x', y') dx' dy'}{\int_{x_1}^{x_1} \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x', y') dx' dy'}. \quad (4.22)$$

Здійснивши тепер у (4.22) граничний перехід $x_1 \rightarrow x$, отримаємо функцію, яка називається **умовною інтегральною функцією розподілу випадкової величини η за умови, що $\xi = x$** :

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(y|x) &= \lim_{x_1 \rightarrow x} P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y') dy'}{\int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y') dy'} = \frac{1}{W_{\xi}(x)} \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y') dy'. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Якщо $F_{\xi\eta}(y|x)$ має часткову похідну за y

$$\frac{\partial F_{\xi\eta}(y|x)}{\partial y} = W_{\xi\eta}(y|x), \quad (4.24)$$

то вона називається **умовною (апостеріорною) густиною ймовірності або умовною функцією розподілу випадкової величини η за умови, що $\xi = x$** .

Диференціюючи (4.23) за y , отримаємо

$$W_{\xi\eta}(y|x) = \frac{W_{\xi\eta}(x, y)}{W_{\xi}(x)}, \quad (4.25 \text{ а})$$

або

$$W_{\xi\eta}(x, y) = W_{\xi}(x) \cdot W_{\xi\eta}(y|x). \quad (4.25 \text{ б})$$

В умовних апостеріорних функціях розподілу наявні усі властивості, які мають безумовні одновимірні функції. Зокрема, проінтегрувавши (4.25 б) за всіма можливими значеннями y з урахуванням умови узгодженості (4.15), отримаємо „умову” нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(y|x) dy = 1. \quad (4.26)$$

З іншого боку, після інтегрування (4.25 б) за всіма можливими значеннями x , отримаємо зв'язок між умовними і безумовними розподілами:

$$W_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) W_{\xi\eta}(y|x) dx. \quad (4.27)$$

Аналогічним чином можна отримати вирази і для умовних функцій розподілу $F_{\xi\eta}(x|y)$, $W_{\xi\eta}(x|y)$. Наприклад, для $W_{\xi\eta}(x|y)$ справджується вираз

$$W_{\xi\eta}(x|y) = \frac{W_{\xi\eta}(x, y)}{W_{\eta}(y)}, \quad (4.28)$$

з якого випливають відповідні „умова” нормування (4.26) і зв'язок між умовними і безумовними розподілами (4.27).

4.3. Початкові і центральні моменти сукупності випадкових величин

Середні від добутку цілих додатних степенів випадкових величин ξ і η називаються **початковими змішаними моментами** і позначаються як

$$m_{ik} = \langle \xi^i \eta^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k W_{\xi\eta}(x, y) dx dy, \quad (4.29)$$

причому сума $i + k$ називається порядком моменту.

За аналогією з (2.26) можна ввести **центральні змішані моменти**:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \langle (\xi - \bar{\xi})^i (\eta - \bar{\eta})^k \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^i (y - \bar{\eta})^k W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Центральний змішаний момент другого порядку M_{11} називається **коваріацією** випадкових величин ξ и η :

$$M_{11} = \langle (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \rangle = \langle \xi \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle. \quad (4.31)$$

Тут ми врахували, що позначення $\langle \xi \rangle$ і $\bar{\xi}$ еквівалентні.

Якщо випадкові величини незалежні, змішані моменти m_{ik} виражаються через добуток початкових моментів кожної із випадкових величин:

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^i W_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y^k W_{\eta}(y) dy = \langle \xi^i \rangle \langle \eta^k \rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Зокрема, середнє від добутку $\xi\eta$ збігається з добутком середніх:

$$m_{11} = \langle \xi \eta \rangle = \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle. \quad (4.33)$$

Із визначення (4.31) видно, що коваріація M_{11} двох незалежних величин дорівнює нулю. Отже, величина M_{11} може слугувати мірою залежності між двома випадковими величинами. Як таку міру звичайно приймають коваріацію нормованих на стандарт флуктуацій $\alpha = \delta\xi/\sigma_\xi$ і $\beta = \delta\eta/\sigma_\eta$:

$$K = \langle \alpha\beta \rangle = \frac{\langle (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \rangle}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{\langle \xi \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \quad (4.34)$$

яку називають **коефіцієнтом кореляції** (або зв'язку) двох випадкових величин. Якщо $K=0$, то випадкові величини ξ і η називаються некорельованими. З (4.33) і (4.34) видно, що незалежні випадкові величини є некорельованими. Зворотнє твердження, взагалі кажучи, хибне: некорельовані величини можуть і не бути незалежними, оскільки з рівності інтегралів (див. (4.32))

$$\begin{aligned} \langle \xi \eta \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x W_\xi(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y W_\eta(y) dy = \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \end{aligned} \quad (4.35)$$

не впливає рівність підінтегральних функцій $W_{\xi\eta}(x, y) = W_\xi(x) W_\eta(y)$, яка є умовою незалежності.

Отже, **коефіцієнт кореляції K незалежних величин дорівнює нулю**. А яка величина його максимального значення? Доведемо, що завжди виконується нерівність

$$|K| \leq 1. \quad (4.36)$$

Розглянемо другий момент випадкових величин $\alpha \pm \beta$:

$$\langle (\alpha \pm \beta)^2 \rangle = \langle \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta \rangle = 2(1 \pm K) \geq 0. \quad (4.37)$$

При цьому ми врахували визначення (4.34) і рівність одиниці дисперсій випадкових величин α і β :

$$\langle \alpha^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\delta\xi}{\sigma_\xi} \right)^2 \right\rangle = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2} = 1; \quad \langle \beta^2 \rangle = 1. \quad (4.38)$$

Але у лівій частині (4.37) стоїть середнє від невід'ємної величини $(\alpha \pm \beta)^2$, отже, $1 \pm K \geq 0$, звідки і випливає нерівність (4.36).

Величини ξ і η , для яких $K=1$, називають повністю корельованими, а у випадку $K=-1$ — антикорельованими. Проміжні значення K між нулем і одиницею (мінус одиницею) відповідають частково корельованим величинам. Іноді просто говорять про те, що величини ξ і η корелюють, якщо $K \neq 0$.

4.4. Функціональні перетворення випадкових величин

Окремим, але дуже важливим прикладом двох випадкових величин є ситуація, коли одна з них є детермінованою (невипадковою) функцією іншої. Отже, нехай нам дано статистично повний опис випадкової величини ξ : наприклад, нам відома її густина розподілу ймовірностей $W_\xi(x)$. Розглянемо іншу випадкову величину η , яка отримується з ξ відомим перетворенням φ : $\eta = \varphi(\xi)$. Як отримати повний статистичний опис η ? Іншими словами, як знайти густину розподілу ймовірностей $W_\eta(y)$?

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли функція $\varphi(\xi)$ є монотонною і, отже, обернена функція $\xi = f(\eta)$ є однозначною (див. рис. 4.2).

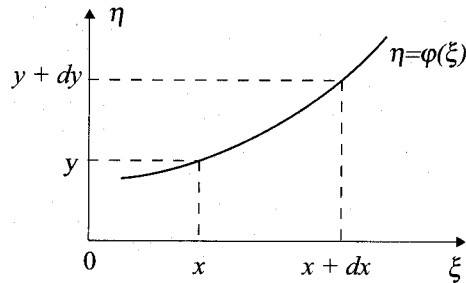


Рис. 4.2

Імовірність того, що випадкова величина ξ потрапить в інтервал між x і $x + dx$, згідно з (2.5), дорівнює

$$dP = W_{\xi}(x)dx. \quad (4.39)$$

При цьому, як видно з рис. 4.2, випадкова величина η набуває якогось значення з інтервалу між y і $y + dy$, і, отже, ймовірність цієї події, з одного боку, збігається з (4.39), а з другого — дорівнює за визначенням $W_{\eta}(y)dy$, тобто

$$W_{\eta}(y)dy = W_{\xi}(x)dx. \quad (4.40)$$

Якщо у правій частині цієї формули виразити x через y за допомогою оберненої функції $x = f(y)$, то ми прийдемо до формули, що виражає $W_{\eta}(y)$ через задану густину ймовірності $W_{\xi}(x)$:

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x = f(y)] \cdot \left| \frac{df(y)}{dy} \right|. \quad (4.41)$$

Необхідність писати модуль від df/dy пов'язана з тим, що для монотонно спадаючої функції $\varphi(x)$ додатним dx відповідають від'ємні dy , і, отже, у лівій частині формули (4.41) у цьому випадку потрібно поставити знак мінус.

Якщо функція $\varphi(x)$ не є монотонною (рис. 4.3) то, події $y < \eta \leq y + dy$ відповідає одна з подій

$$x_1 < \xi \leq x_1 + dx_1, \dots, x_k < \xi \leq x_k + dx_k,$$

де x_1, \dots, x_k — корені рівняння $\varphi(x) = y$: обернена функція $x = f(y)$ у цьому випадку є багатозначною і значення x_k належать різним її гілкам $x_k = f_k(y)$ (рис. 4.3).

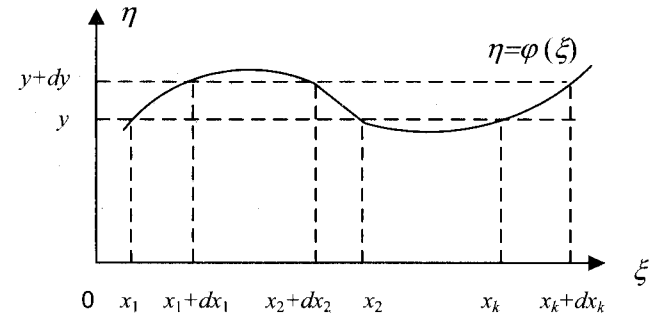


Рис. 4.3

Оскільки події ($x_k < \xi \leq x_k + dx_k, k = 1, 2, \dots$) є несумісними (випадкова величина ξ не може одночасно набувати кілька значень), то ймовірність $W_{\eta}(y)dy$ дорівнює сумі ймовірностей $W_{\xi}(x_k)dx_k$ за формулою додавання ймовірностей (1.4):

$$W_{\eta}(y)dy = \sum_k W_{\xi}(x_k)dx_k. \quad (4.42)$$

Із формули (4.42) випливає, що

$$W_{\eta}(y) = \sum_k W_{\xi}[f_k(y)] \cdot \left| \frac{df_k(y)}{dy} \right|, \quad (4.43)$$

де підсумовування проводиться по всіх гілках f_k оберненої функції $f(y)$.

Як приклад розглянемо випадкову величину ξ , що рівномірно розподіляється в інтервалі $0 \leq \xi \leq \pi$ з густиною розподілу $W_\xi(x) = 1/\pi$. Знайдемо густину розподілу $W_\eta(y)$ випадкової величини $\eta = \sin \xi$. Обернена функція $x = f(y) = \arcsin y$ є двозначною в області $0 \leq x \leq \pi$, причому для кожної з двох гілок маємо $df/dy = 1/\sqrt{1-y^2}$, тому, користуючись формулою (4.43), отримуємо:

$$W_\eta(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (4.44)$$

Розглянемо тепер перетворення сукупності двох випадкових величин ξ_1 і ξ_2 у дві інші величини η_1 і η_2 . Нехай між величинами η_i і ξ_i задано функціональний зв'язок:

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2). \quad (4.45)$$

Для спрощення припустимо, що існує обернене перетворення, і що воно однозначне:

$$\xi_1 = f_1(\eta_1, \eta_2), \quad \xi_2 = f_2(\eta_1, \eta_2). \quad (4.46)$$

Тоді сумісна густина розподілу ймовірностей $W_\eta(y_1, y_2)$ пари випадкових величин η_1 і η_2 може бути виражена через сумісну густину розподілу $W_\xi(x_1, x_2)$ величин ξ_1 і ξ_2 за допомогою міркувань, аналогічних до вже наведених. Тут і далі для спрощення записів у багатовимірному випадку замість W_{η_1, η_2} , W_{ξ_1, ξ_2} ми писатимемо просто W_η , W_ξ , вважаючи, що нижні індекси набувають усі можливі значення $\eta = \eta_1, \eta_2$; $\xi = \xi_1, \xi_2$ тощо.

Розглядатимемо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 як декартові координати точки A на площині $\xi_1 O \xi_2$ (рис. 4.4 а). Імовірність того, що ця точка потрапить у заштрихований прямокутник зі сторонами dx_1 і dx_2 , дорівнює

$$dP = P\{x_1 < \xi_1 \leq x_1 + dx_1, x_2 < \xi_2 \leq x_2 + dx_2\} = W_\xi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (4.47)$$

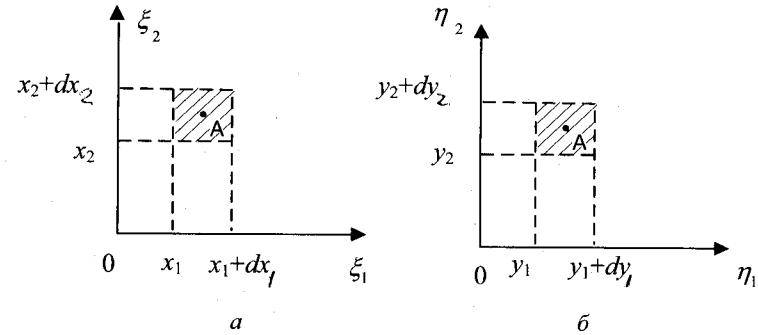


Рис. 4.4

При цьому випадкові величини η_1 і η_2 , що також розглядаються як декартові координати точки A на площині $\eta_1 O \eta_2$ потрапляють у заштрихований прямокутник (рис. 4.4 б) зі сторонами dy_1 і dy_2 . Імовірність цієї події з одного боку збігається з (4.47), а з іншого дорівнює

$$dP = P\{y_1 < \eta_1 \leq y_1 + dy_1; y_2 < \eta_2 \leq y_2 + dy_2\} = W_\eta(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (4.48)$$

де $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$, $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$. Прирівнявши вирази (4.47) і (4.48), отримуємо

$$W_\eta(y_1, y_2) = W_\xi[x_1 = f_1(y_1, y_2), x_2 = f_2(y_1, y_2)] \cdot \left| \frac{dx_1 dx_2}{dy_1 dy_2} \right|. \quad (4.49)$$

Другий співмножник у правій частині цієї формули є якобіаном переходу від змінних x_1, x_2 до змінних y_1, y_2 :

$$\frac{dx_1 dx_2}{dy_1 dy_2} = \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{array} \right|} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}. \quad (4.50)$$

Формула (4.50) має простий геометричний зміст — модуль якобіана перетворення дорівнює відношенню площі прямокутника зі сторонами dy_1 і dy_2 (рис. 4.4 б) до площі прямокутника зі сторонами dx_1 і dx_2 (рис. 4.4 а).

Користуючись формулою (4.49), знайдемо густину розподілу ймовірностей суми (різниці) $\xi_1 \pm \xi_2$ двох випадкових величин. Введемо дві нові величини:

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \pm \xi_2, \quad \eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2. \quad (4.51)$$

Із (4.51) легко можна знайти обернені функції:

$$\xi_1 = f_1(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 \mp \eta_2, \quad \xi_2 = f_2(\eta_1, \eta_2) = \eta_2. \quad (4.52)$$

Після чого, обчисливши якобіан переходу, отримаємо:

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{array} \right| = 1. \quad (4.53)$$

В результаті формула (4.49) дає:

$$W_\eta(y_1, y_2) = W_\xi(x_1 = y_1 \mp y_2, x_2 = y_2). \quad (4.54)$$

Для того, щоб із двовимірної густини розподілу ймовірностей $W_\eta(y_1, y_2)$ отримати густину розподілу ймовірностей суми, тобто випадкової величини η_1 , яка нас і цікавить, достатньо про-

інтегрувати її за всіма значеннями y_2 другої змінної η_2 , як впливає із умов узгодженості (4.15) і (4.16):

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(y_1 \mp y_2, y_2) dy_2. \quad (4.55)$$

Аналогічно до (4.55) можна отримати формули для густини розподілу ймовірностей добутку $\xi_1 \cdot \xi_2$ і частки ξ_1 / ξ_2 двох випадкових величин ξ_1, ξ_2 . Без доведення наведемо тільки остаточну відповідь.

Добуток двох випадкових величин. Увівши позначення $\eta_1 = \xi_1 \cdot \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, отримаємо

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \frac{dy_2}{|y_2|}. \quad (4.56)$$

Частка двох випадкових величин. Увівши позначення $\eta_1 = \xi_1 / \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, отримаємо

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(y_1 \cdot y_2, y_2) |y_2| dy_2. \quad (4.57)$$

Розглянемо тепер загальніший випадок, коли нам задано N -вимірну густину розподілу ймовірності $W_\xi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ сукупності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ і необхідно знайти середнє значення від детермінованої функції $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ випадкових аргументів ξ_i . Аналогічно до (2.30) маємо

$$m_1(\eta) = \langle \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_N) W_\xi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (4.58)$$

В окремому випадку, який розглядатиметься далі, формула (4.58) може бути використана для знаходження числових характеристик суми і добутку випадкових величин.

4.5. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей

Розглянемо тепер статистичні характеристики суми η достатньо великої кількості N випадкових величин ξ_i :

$$\eta = \sum_{i=1}^N \xi_i. \quad (4.59)$$

Статистично повний опис сукупності випадкових величин ξ_i задається N -вимірною густиною розподілу ймовірностей $W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Згідно з (4.58) обчислимо середнє значення суми:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^N \xi_i \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \right\} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} x_i W_{\xi}(x_i) dx_i = \sum_{i=1}^N \bar{\xi}_i. \end{aligned} \quad (4.60)$$

При знаходженні $\langle \eta \rangle$ ми скористалися властивістю узгодженості (4.15), (4.16) для W_{ξ} .

Припустимо тепер, що всі величини ξ_i взаємно незалежні. Це означає, що N -вимірна густина розподілу ймовірностей розпадається на добуток одновимірних:

$$W_{\xi}(x_1 \dots x_N) = \prod_{i=1}^N W_{\xi}(x_i). \quad (4.61)$$

З урахуванням (4.61) знайдемо дисперсію суми:

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta}^2 &= \langle (\eta - \bar{\eta})^2 \rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{\xi}_i) \right]^2 \right\rangle = \sum_{i,k=1}^N \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^N \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle + \sum_{i \neq k} \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle \end{aligned} \quad (4.62)$$

(нагадаємо, що риска вгорі і кутові дужки означають одне й те саме статистичне усереднення: $\langle \xi_i \rangle = \bar{\xi}_i$). Подвійна сума в (4.62) за різними індексами $i \neq k$ перетворюється на нуль, оскільки кожен доданок у ній є коваріацією двох незалежних величин:

$$\begin{aligned} \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle &= \langle \xi_i \xi_k \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle = \\ &= \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Сума, що залишилася у (4.62) за збіжними індексами має вигляд

$$\sigma_{\eta}^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2, \quad (4.64)$$

де $\sigma_i^2 = \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle$ — дисперсія випадкової величини ξ_i .

Таким чином, ми отримали важливий результат: дисперсія суми незалежних величин дорівнює сумі дисперсій кожного доданка (зауважимо, що при виведенні (4.64) достатньо було б вимагати тільки взаємної некорельованості доданків, які при цьому не обов'язково мають бути незалежними).

Виявляється, що при $N \rightarrow \infty$ густина розподілу ймовірностей суми η випадкових величин ξ_i прямує до деякого універсального розподілу (який називається нормальним або розподілом Гаусса) незалежно від конкретного вигляду густини розподілу ймовірностей кожного доданка ξ_i , якщо тільки виконуються наступні умови:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_\eta^2} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_\eta^n} \sum_{k=1}^N \left\langle |\xi_k - \bar{\xi}|^n \right\rangle_{n>2} = 0. \quad (4.65)$$

У цьому факті — зміст центральної граничної теореми теорії ймовірностей. Ми не даватимемо тут її строгого доведення, а тільки покажемо, як у окремому випадку однаконо розподілених і взаємно незалежних випадкових величин ξ_i їх сума η при $N \rightarrow \infty$ стає нормально розподіленою. Позначимо через a середнє значення, а через σ^2 — дисперсію кожного доданка ξ_i у сумі (4.59):

$$\langle \xi_i \rangle = a; \quad \langle (\xi_i - \bar{\xi})^2 \rangle = \sigma^2. \quad (4.66)$$

Тоді згідно з (4.60) і (4.64), маємо:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= Na, \\ \sigma_\eta^2 &= N\sigma^2. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Розглянемо нормовані флуктуації ζ_i кожного доданка ξ_i :

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma\sqrt{N}}$$

і всієї суми

$$z = \frac{\eta - \bar{\eta}}{\sigma_\eta} = \frac{\eta - Na}{\sigma\sqrt{N}} = \sum_{i=1}^N \zeta_i. \quad (4.68)$$

Із незалежності випадкових величин ξ_i випливає і незалежність нормованих величин ζ_i . Отже, багатовимірна густина розподілу ймовірності $W_\zeta(y_1, y_2, \dots, y_N)$ аналогічно до (4.61) розпадається на добуток одновимірних. Враховуючи це, знайдемо характеристичну функцію випадкової величини z :

$$f_z(v) = \langle e^{ivz} \rangle = \left\langle \exp \left\{ iv \sum_{i=1}^N \zeta_i \right\} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ iv \sum_{i=1}^N y_i \right\} W_\zeta(y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ iv \sum_{k=1}^N y_k \right\} \prod_{k=1}^N W_\zeta(y_k) dy_1 dy_2 \dots dy_N = \\ &= \prod_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv y_k} W_\zeta(y_k) dy_k = [f_\zeta(v)]^N, \end{aligned} \quad (4.69)$$

де $f_\zeta(v)$ — характеристична функція окремого доданка ζ_i (однакова для всіх ζ_i):

$$f_\zeta(v) = \langle e^{iv\zeta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy} W_\zeta(y) dy. \quad (4.70)$$

Подавши експоненту під знаком інтеграла у вигляді

$$e^{ivy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} y^k,$$

після інтегрування (4.70) отримаємо

$$f_\zeta(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} \langle \zeta^k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} \frac{\langle (\xi - a)^k \rangle}{\sigma^k N^{k/2}} = 1 - \frac{v^2}{2N} + O\left(N^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (4.71)$$

При $N \gg 1$ у цій формулі достатньо залишити тільки перші два відмінні від нуля доданки:

$$f_\zeta(v) \approx 1 - \frac{v^2}{2N}. \quad (4.72)$$

Підставимо (4.72) у (4.69) і перейдемо до границі $N \rightarrow \infty$:

$$f_z(v) \approx \left(1 - \frac{v^2}{2N} \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{v^2}{2}}. \quad (4.73)$$

Знаючи характеристичну функцію $f_z(v)$, можна знайти густину розподілу ймовірностей $W(z)$ випадкової величини z , застосувавши зворотне перетворення Фур'є до $f_z(v)$:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivz} f_z(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivz - \frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (4.74)$$

Перейшовши від z за формулою (4.68) до вихідної величини η і користуючись отриманим правилом (4.41) перетворення густин розподілу ймовірностей, отримаємо остаточно:

$$W(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{-\frac{(\eta-\bar{\eta})^2}{2\sigma_\eta^2}}. \quad (4.75)$$

Це й є розподіл Гаусса або нормальний розподіл. Схематичний графік $W(\eta)$ наведено на рис. 4.5. З нього випливає, що це й є одномодальний розподіл з симетричним максимумом при $\eta = \bar{\eta}$, півширина якого на рівні $1/\sqrt{e}$ дорівнює стандарту σ_η .

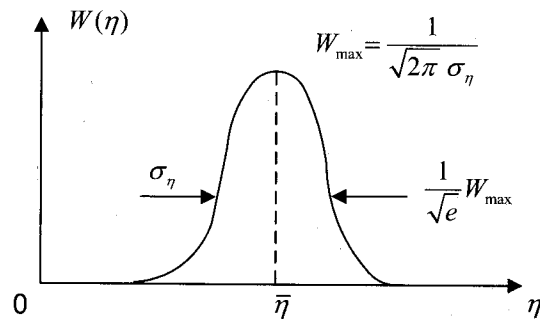


Рис. 4.5

4.6. Нормальний розподіл

Нормальний розподіл відіграє надзвичайно велику роль у всій статистичній фізиці і, зокрема, у статистичній радіофізиці, оскільки флуктуації $\delta\eta = \eta - \bar{\eta}$ величин, за якими проводиться спостереження, як правило, є результатом дії великої кількості різноманітних факторів (ξ_i), які часто можна вважати незалежними й адитивними (тобто такими, що підсумовуються). Слід зазначити одну важливу властивість нормального розподілу: **будь-які лінійні перетворення нормальної випадкової величини приводять знову до нормального розподілу.**

Повернемося до задачі про розподіл двох випадкових величин ξ і η . Розглядатимемо ξ і η як декартові координати „випадкової точки” (кінця випадкового вектора $\vec{\zeta}$) на площині ξ, η (див. рис.4.6). Окрім декартових координат положення точки можна описувати й у полярній системі — задаючи відстань ζ від початку координат і кута ν , або, іншими словами, модуля ζ і фази ν випадкового вектора $\vec{\zeta}$, що лежить у площині ξ, η :

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \nu = \arctg \frac{\eta}{\xi}. \quad (4.76)$$

Якщо як ξ і η виступають дві квадратурні компоненти якого-небудь коливального випадкового процесу, то ζ — амплітуда коливання, а ν — його фаза. З випадковими процесами ми познайомимося дещо пізніше, а зараз знайдемо вигляд густини розподілу ймовірностей $W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi)$ модуля і фази випадкового вектора, якщо відома сумісна густина розподілу ймовірностей його квадратурних складових $W_{\xi\eta}(x, y)$. Напишемо формули оберненого до (4.76) перетворення:

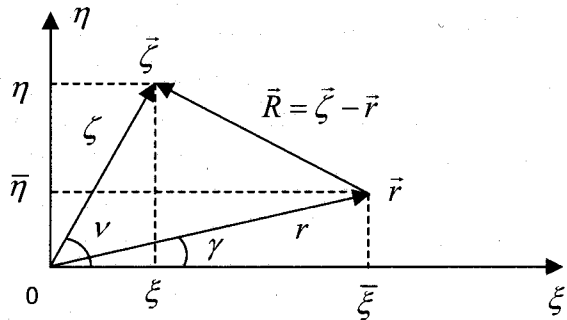


Рис. 4.6

$$\xi = \zeta \cos \nu; \quad \eta = \zeta \sin \nu \quad (4.77)$$

і скористаємося загальною формулою (4.49) перетворення W при переході від однієї сукупності змінних (ξ, η) до іншої — (ζ, ν) .

Якобіан переходу від (x, y) до (ρ, φ) обчислюється легко:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \quad (4.78)$$

Отже, згідно з (4.49) маємо:

$$W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) = \rho W_{\xi\eta}(x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi). \quad (4.79)$$

Нехай ξ і η — нормально розподілені і незалежні випадкові величини із заданими середніми значеннями $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ і однаковими дисперсіями $\sigma_{\xi}^2 = \sigma_{\eta}^2 = \sigma^2$:

$$W_{\xi\eta}(x, y) = W_{\xi}(x)W_{\eta}(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\bar{\xi})^2 + (y-\bar{\eta})^2\right]\right\}. \quad (4.80)$$

Згідно з визначенням

$$\bar{\xi} = r \cos \gamma,$$

$$\bar{\eta} = r \sin \gamma,$$

введемо у розгляд модуль r і фазу γ постійного вектора середнього зміщення $\vec{r} = \langle \vec{\zeta} \rangle$. Як видно з рис. 4.6, випадковий вектор $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$ у цьому випадку є сумою постійного вектора $\vec{r} = (\bar{\xi}, \bar{\eta})$ і нормально розподіленого випадкового вектора $\vec{R} = \vec{\zeta} - \vec{r} = (\xi - \bar{\xi}, \eta - \bar{\eta})$, середнє значення, компонент якого дорівнює нулю. Скориставшись формулою (4.79), отримаємо

$$\begin{aligned} W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\vec{\rho} - \vec{r})^2\right\} = \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \gamma)]\right\}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Проінтегрувавши (4.81) за всіма можливими значеннями кута φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), отримаємо так званий **узагальнений розподіл Релея** для модуля ζ :

$$W_{\zeta}(\rho) = \int_0^{2\pi} W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho r}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{\rho^2 + r^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.82)$$

Тут $I_0(z)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку від уявного аргументу:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi} d\varphi.$$

За відсутності сталого зміщення ($r=0$) функція Бесселя дорівнює 1 ($I_0(0)=1$), і узагальнений розподіл Релея (4.82) переходить у просто розподіл Релея:

$$W_{\zeta}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.83)$$

Якщо ж ми проінтегруємо (4.81) за всіма можливими значеннями ρ , то отримаємо закон розподілу фази $W_{\nu}(\varphi)$. Зокрема, за відсутності сталого зміщення ($r=0$) отримуємо рівномірний розподіл:

$$W_{\nu}(\varphi) = \int_0^{\infty} W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) d\rho = \frac{1}{2\pi}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (4.84)$$

Сукупність графіків $W_{\zeta}(\rho)$ як функції аргументу ρ/σ за різних значень параметра r/σ наведено на рис. 4.7.

У граничному випадку $r \gg \sigma$, коли відбуваються тільки дрібні флуктуації вектора $\vec{\zeta}$ навколо постійного вектора \vec{r} , замість функції I_0 в (4.82) можна скористатися її асимптотичним поданням:

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \gg 1. \quad (4.85)$$

Унаслідок цього для не надто малих ζ , коли виконується нерівність $\zeta \gg \sigma^2/r$, з (4.82) впливає нормальний розподіл:

$$W_{\zeta}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\rho-r)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (4.86)$$

При цьому ми припустили, що відхилення ζ від r не надто великі: $|\zeta - r| \ll r$. У загальнішому випадку густина нормального

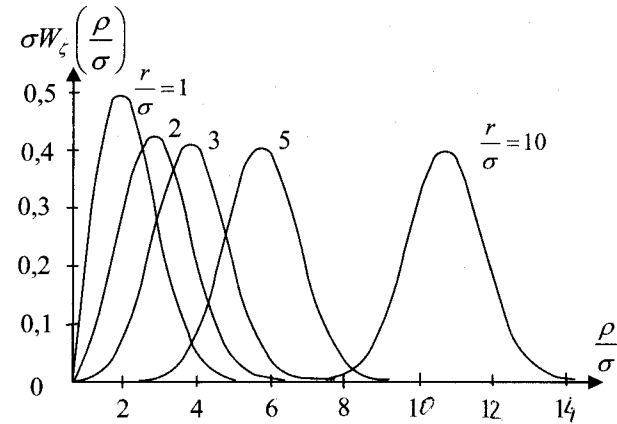


Рис. 4.7

розподілу ймовірностей сукупності двох величин ξ і η з різними середніми $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ і дисперсіями $(\sigma_{\xi}^2, \sigma_{\eta}^2)$, а також відмінним від нуля коефіцієнтом кореляції (K) має вигляд

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}\sqrt{1-K^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-K^2)}\left[\frac{(x-\bar{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2} - 2K\frac{(x-\bar{\xi})(y-\bar{\eta})}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} + \frac{(y-\bar{\eta})^2}{\sigma_{\eta}^2}\right]\right\}. \quad (4.87)$$

Перехід у цьому виразі від декартових координат до полярних і подальше інтегрування за φ або ρ дає змогу отримати інші узагальнення формул (4.82), (4.84), які ми тут не наводитимемо. Детальні дослідження отримуваних при цьому функцій розподілу фази і модуля можна знайти у монографіях зі статистичної радіотехніки.

ЗАДАЧІ

1. Випадкова величина η є лінійною функцією випадкової величини ξ : $\eta = \varphi(\xi) = a\xi + b$, де a і b – сталі величини. Знайти густину ймовірності $W_\eta(y)$ величини η при відомій густині ймовірності $W_\xi(x)$ випадкової величини ξ .

Розв'язок. Спочатку визначимо обернену функцію $x = f(y) = \frac{y-b}{a}$. Оскільки $x = f(y)$ — однозначна функція, то для знаходження густини ймовірності $W_\eta(y)$ скористаємося формулою (4.41). Отримаємо

$$W_\eta(y) = W_\xi[f(y)] \left| \frac{df(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|a|} W_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Якщо величина ξ , наприклад, має рівномірну густину розподілу ймовірності в інтервалі $(x_1, x_2]$, то величина η буде розподілена рівномірно в інтервалі $(ax_1 + b, ax_2 + b]$.

2. Випадкова величина ξ з рівномірною густиною ймовірності

$$W_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{(b+a)}, & -a < x \leq b, a < b; \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (1)$$

підлягає квадратичному перетворенню $\eta = \xi^2$.

Визначити:

А – функцію розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ ;

В – функцію розподілу $F_\eta(y)$ і густину ймовірності $W_\eta(y)$ випадкової величини η .

Розв'язок.

А. З урахуванням визначення $W_\xi(x)$ за формулою (2.7) знаходимо $F_\xi(x)$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x W_\xi(x') dx' = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{b+a} x' \Big|_{-a}^x = \frac{x+a}{b+a}, & -a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (2)$$

В. При квадратичному перетворенні $y = x^2$ функція y ніколи не набуває від'ємних значень. Тому

$$F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\} = 0 \text{ при } y \leq 0. \quad (3)$$

Для значень $x \in (-a, a]$ (відповідний інтервал значень y : $y \in (0, a^2]$), обернена функція $x = f(y)$ є двозначною: $x_1 = f_1(y) = +\sqrt{y}$, $x_2 = f_2(y) = -\sqrt{y}$. У цьому випадку необхідно користуватися правилом перетворення густини розподілу ймовірності (4.43) для багатозначних функцій. Отримуємо

$$W_\eta(y) = W_\xi[x = f_1(y)] \left| \frac{df_1}{dy} \right| + W_\xi[x = f_2(y)] \left| \frac{df_2}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{y(b+a)}}. \quad (4)$$

Звідси

$$F_\eta(y) = \int_0^y W_\eta(y') dy' = \frac{2\sqrt{y}}{b+a}. \quad (5)$$

На інтервалі $x \in (a, b]$ (відповідний інтервал значень y : $y \in (a^2, b^2]$) обернена функція має тільки одну гілку $x_2 = f_2(y) = \sqrt{y}$, отже, вона однозначна. Тому

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x_2(y)] \cdot \frac{dx_2}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}(b+a)}, \quad (6)$$

$$F_{\eta}(y) = F_{\eta}(a^2) + \int_{a^2}^y W_{\eta}(y') dy' = \frac{1}{2(b+a)} \int_{a^2}^y \frac{dy'}{\sqrt{y'}} + \frac{2a}{b+a} = \frac{\sqrt{y}+a}{b+a}. \quad (7)$$

Таким чином, підсумовуючи (3), (5) і (7), а також (4) і (6), остаточно отримуємо

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{2\sqrt{y}}{(b+a)}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{\sqrt{y}+a}{b+a}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 1, & y > b^2. \end{cases} \quad (8)$$

$$W_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{y}(b+a)}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{1}{2\sqrt{y}(b+a)}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 0, & y > b^2. \end{cases} \quad (9)$$

3. Сумісна густина ймовірності двовимірної випадкової величини (ξ, η) має вигляд

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & x \leq 0, y \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Визначити: математичні очікування $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ і дисперсію флуктуацій σ_{ξ}^2 , σ_{η}^2 випадкових величин ξ і η .

Розв'язок. Згідно з умовою узгодженості (4.15) і (4.16) визначимо спочатку одновимірні густини ймовірностей величин ξ і η :

$$W_{\xi}(x) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dy = 4xe^{-x^2} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy = 2xe^{-x^2}, \quad x > 0; \quad (2)$$

$$W_{\eta}(y) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx = 2ye^{-y^2}, \quad y > 0.$$

За знайденими $W_{\xi}(x)$ і $W_{\eta}(y)$ знаходимо середні значення і дисперсії:

$$\bar{\xi} = \int_0^{\infty} xW_{\xi}(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (3)$$

$$\bar{\eta} = 2 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \int_0^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx - \bar{\xi}^2 = \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx - \bar{\xi}^2 = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\xi}^2 = 1 - \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

При обчисленні формул (3÷6) ми використали наступне визначення:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \alpha > 0, \quad n > -1.$$

Тут $\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера.

Розділ II

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

§ 5. Випадкові функції

Випадкові величини, з якими ми стикаємося у радіофізиці, як правило, або змінюються у часі, або набувають різних значень у різних точках простору, часто змінюються як у часі, так і в просторі, тобто є випадковими функціями часу і просторових координат. Випадкова функція часу (тобто часова розгортка випадкової величини) **називається випадковим процесом**. Очевидно, що не варто говорити про яке-небудь повністю визначене значення випадкової функції у певний момент часу: значення, яких набуває випадковий процес у кожен момент часу – випадкові величини. Осцилограма (часова розгортка) струму у найпростішому електричному колі, наведена у „Вступі” (рис. 2), є однією з можливих реалізацій, яку може мати залежність струму від часу. Якщо ми зберемо багато повністю ідентичних кіл, то осцилограми струму у кожному з них, загалом, будуть цілком різними (рис. 5.1): у кожному колі (з номером k) залежність струму від часу $I_k(t)$ буде вигадливо флуктувати навколо середнього значення \bar{I} , яке є макроскопічним середнім значенням струму (наприклад тим, яке передбачається законом Ома). Кожна така осцилограма $I_k(t)$ і є k -ю **реалізацією випадкової функції**, а їх сукупність називається **ансамблем реалізацій**. Таким чином, будь-яка випадкова функція (у тому числі і випадковий процес) подається своїм ансамблем реалізацій. З рис. 5.1 видно, що у кожен певний момент часу t значення струму $I_k(t)$ у різних реалізаціях відмінні, тобто можна говорити тільки про ймовірність тих чи інших значень струму в момент t і оперувати з $I(t)$ як із випадковою величиною ξ .

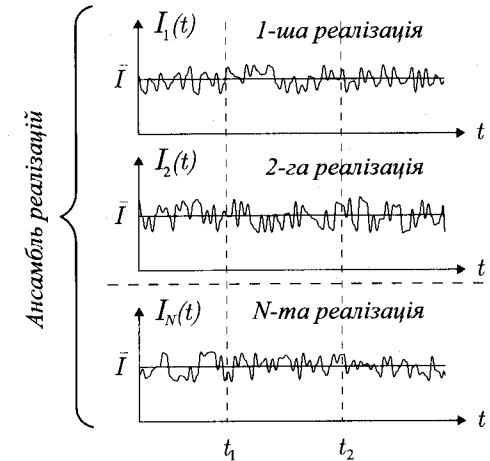


Рис. 5.1

5.1. Інтегральна функція і густина розподілу ймовірностей

Припустимо, що нам задано ансамбль з N реалізацій випадкової функції $\xi(t)$. Позначимо через $\xi_k(t)$ k -ту реалізацію з цього ансамблю. Обравши довільну величину x , для заданого значення часу t слід підрахувати кількість реалізацій n_1 з ансамблю, для яких випадкова величина $\xi(t)$ в момент часу t задовольняє умові $\xi(t) \leq x$. Побудуємо відношення $\nu_1 = n_1/N$, яке визначає частоту появи події, що розглядається. Для достатньо великих N ($N \rightarrow \infty$) величина ν_1 групуватиметься поблизу деякого числа, яке збігається з ймовірністю появи події P , що розглядається, і позначається так:

$$F_1(x, t) = P\{\xi(t) \leq x\}. \quad (5.1)$$

Функція $F_1(x, t)$ називається **одноточковою** (або **одновимірною**) **інтегральною функцією розподілу ймовірностей**.

Опис випадкової функції $\xi(t)$ за допомогою (5.1) є далеко не повним: він дає змогу обчислити всі статистичні середні $\xi(t)$ у кожен момент часу t , але нічого не говорить про характер зміни з часом різних реалізацій $\xi_k(t)$. Значно багатша інформація міститься у **двоточковій (або двовимірній) функції розподілу ймовірностей** $F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$, яку можна визначити аналогічно до $F_1(x, t)$. Для обраних моментів часу t_1 і t_2 і наперед заданих значень x_1 і x_2 підрахуємо кількість реалізацій n_2 в ансамблі N , для яких одночасно виконуються дві умови $\xi(t_1) \leq x_1$ і $\xi(t_2) \leq x_2$. Для достатньо великих N ($N \rightarrow \infty$) частота появи подій $\nu_2 = n_2/N$ групуватиметься поблизу певного значення, яке збігається з імовірністю P і позначається так:

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1; \xi(t_2) \leq x_2\}. \quad (5.2)$$

Якщо проміжок часу між моментами t_1 і t_2 достатньо малий, то значення $\xi(t_2)$ не можуть сильно відрізнятися від $\xi(t_1)$, тобто дві випадкові величини $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$ будуть залежними й у границі $t_2 \rightarrow t_1$ збігатимуться:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_1(x_m, t_1); \quad x_m = \min(x_1, x_2). \quad (5.3)$$

Тут через $x_m = \min(x_1, x_2)$ позначено мінімальне значення з двох величин x_1 і x_2 .

Якщо ж $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$, то статистичний зв'язок між $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$ має, як правило, послаблюватися, і ці величини стануть незалежними, тобто

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_1(x_1, t_1) F_1(x_2, t_2). \quad (5.4)$$

Аналогічно вводиться **n -точкова (або n -вимірна) функція розподілу ймовірностей**

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1; \dots; \xi(t_n) \leq x_n\}. \quad (5.5)$$

Повний статистичний опис випадкової функції міститься у F_n при $n \rightarrow \infty$, тобто коли наявний статистичний опис всієї сукупності випадкових величин $\xi(t_k)$ у всі моменти часу t_k .

Окрім (5.5) зручно ввести **n -точкову густину розподілу ймовірностей**:

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n). \quad (5.6)$$

Властивості функції W_n легко з'ясувати очевидним узагальненням формул, наведених у першому розділі і попередньому параграфі, для сукупності тільки двох випадкових величин:

1. Додатна визначеність:

$$W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \geq 0. \quad (5.7)$$

2. Симетрія відносно перестановок будь-яких пар аргументів x_i, t_i і x_k, t_k :

$$\begin{aligned} W_n(x_1, t_1; \dots; x_i, t_i; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n) = \\ = W_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_i, t_i; \dots; x_n, t_n). \end{aligned} \quad (5.8)$$

3. Зв'язок між W_n і F_n .

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} dx'_n W_n(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n). \quad (5.9)$$

4. Умова узгодженості:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n) dx_k = \\ = W_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{k-1}, t_{k-1}; x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n). \quad (5.10)$$

Інтегрування W_n за будь-яким аргументом, наприклад, за x_k , призводить до зниження розмірності густини ймовірності на одиницю ($W_n \rightarrow W_{n-1}$). Діючи так і далі (інтегруючи за інших змінних x_i) ми, зрештою, приходимо до умови нормування.

5. Умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = 1. \quad (5.11)$$

5.2. Моменти випадкового процесу

За допомогою n -точкової густини розподілу ймовірності W_n ми можемо визначити різні статистичні характеристики (моменти) випадкового процесу $\xi(t)$. У попередньому параграфі було показано, що початкові і центральні моменти сукупності випадкових величин — це набір числових параметрів. Для випадкових процесів з урахуванням розглянутих властивостей W_n можна відразу зауважити, що моменти у загальному випадку є функціями часу. Серед усіх можливих моментів ми обмежимося розглядом тільки одноточкових і двоточкових.

1. Одноточкові початкові моменти k -го порядку:

$$m_k(t) = \langle \xi^k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_1(x, t) dx. \quad (5.12)$$

2. Двоточкові початкові (або змішані початкові) моменти $i+k$ -го порядку:

$$m_{ik}(t_1, t_2) = \langle \xi^i(t_1) \xi^k(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^i x_2^k W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.13)$$

Момент $m_{11}(t_1, t_2)$ має власне позначення $R_{\xi}(t_1, t_2)$ і називається **коваріаційною функцією**:

$$m_{11}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.14)$$

3. Одноточкові центральні моменти k -го порядку:

$$M_k(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}(t)]^k W_1(x, t) dx. \quad (5.15)$$

Одноточковий центральний момент другого порядку ($k=2$) називається **дисперсією** випадкового процесу

$$M_2(t) = \sigma_{\xi}^2(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}(t)]^2 W_1(x, t) dx. \quad (5.16)$$

4. Двоточкові центральні моменти $i+k$ порядку. Надалі нас цікавитиме головним чином двоточковий центральний момент другого порядку, який називається **функцією кореляції** (точніше, **функцією автокореляції**):

$$M_{11}(t_1, t_2) = B_{\xi}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\xi(t_2) - \bar{\xi}(t_2)] \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \bar{\xi}(t_1)][x_2 - \bar{\xi}(t_2)] W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.17 а)$$

Із порівняння цієї формули з (5.14) отримаємо зв'язок між функціями $B_{\xi}(t_1, t_2)$ і $R_{\xi}(t_1, t_2)$:

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2). \quad (5.17 б)$$

5. Іноді для кореляційного аналізу зручніше мати справу не з функціями $R_\xi(t_1, t_2)$ або $B_\xi(t_1, t_2)$, а з так званою **структурною функцією** $D_\xi(t_1, t_2)$, яка визначається так:

$$D_\xi(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 \rangle = m_2(t_2) + m_2(t_1) - 2R_\xi(t_1, t_2). \quad (5.18)$$

Видно, що $D_\xi(t_1, t_2)$ — симетрична невід'ємна функція:

$$D_\xi(t_1, t_2) = D_\xi(t_2, t_1) \geq 0,$$

причому вона дорівнює нулю у збіжні моменти часу: $D_\xi(t_1, t_1) = 0$.

5.3. Стаціонарні випадкові процеси

Випадковий процес називається стаціонарним, якщо всі його статистичні характеристики не залежать від початку відліку часу, тобто якщо функція W_n не змінюється при зсуві всіх аргументів t_1, \dots, t_n на довільну величину Δt (є однорідною функцією часу):

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = W_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t). \quad (5.19)$$

Однорідність W_n відносно зсуву всіх її аргументів на довільну величину Δt викликає такі важливі наслідки.

1. Одноточкова густина розподілу ймовірності $W_1(x, t)$ для стаціонарного випадкового процесу взагалі не залежить від часу. Справді, припускаючи у (5.19) $n = 1$ і $\Delta t = -t$, отримаємо:

$$W_1(x, t) = W_1(x, t - t) = W_1(x, 0) \equiv W_1(x). \quad (5.20)$$

Із (5.20) випливає, що всі одноточкові моменти $m_k(t)$ і $M_k(t)$ стаціонарного процесу не залежать від часу:

$$m_k(t) = \langle \xi^k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_1(x) dx = \text{Const}, \quad (5.21)$$

$$M_k(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}]^k W_1(x) dx = \text{Const}.$$

Зокрема, середнє значення $m_1(t) = \langle \xi(t) \rangle$ і дисперсія

$$M_2(t) = \sigma_\xi^2 = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^2 \rangle$$

стаціонарного процесу не змінюються в часі. Тут, як і раніше, косі дужки $\langle \rangle$ або риска вгорі ... означають повне статистичне усереднення, тобто усереднення за ансамблем реалізацій випадкової функції.

2. Двоточкова функція W_2 — функція тільки різниці $|t_2 - t_1|$.

Справді, припускаючи у (5.19) $n = 2$ і $\Delta t = -t_1$ (або $\Delta t = -t_2$), дійдемо висновку, що

$$\begin{aligned} W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) &= W_2(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1) = \\ &= W_2(x_1, t_1 - t_2; x_2, 0) \equiv W_2(x_1, x_2; |t_2 - t_1|). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Зазначимо, що залежність від модуля різниці $|t_2 - t_1|$ є наслідком властивості симетрії (5.8). Із (5.22) випливає, що для стаціонарних випадкових процесів усі двоточкові моменти є функціями різниці $|t_2 - t_1|$. Зокрема, **коваріаційна функція** дорівнює

$$\begin{aligned} m_{11}(t_1, t_2) &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, x_2, |t_2 - t_1|) dx_1 dx_2 = R_\xi(|t_2 - t_1|). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Аналогічно до (5.23) для центрального змішаного моменту другого порядку (**автокореляційної функції**) маємо

$$\begin{aligned} M_{11}(t_1, t_2) &= B_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2) = \\ &= R_\xi(|t_2 - t_1|) - \langle \xi \rangle^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Властивості кореляційних функцій стаціонарного процесу

1. Як впливає з (5.24), автокореляційна функція $B_\xi(t_1, t_2)$ є функцією тільки різниці $\tau = t_2 - t_1$. Справді, ввівши у (5.24) позначення $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$, отримаємо

$$\begin{aligned} B_\xi(t_1, t_2) &= \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \\ &= R_\xi(\tau) - \langle \xi \rangle^2 = B_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (5.25)$$

2. Функція $B_\xi(\tau)$ є парною внаслідок (5.22):

$$B_\xi(\tau) = B_\xi(-\tau). \quad (5.26)$$

3. При $\tau \rightarrow \infty$ статистичний зв'язок між значенням випадкового процесу, як правило, зникає, випадкові величини $\xi(t)$ і $\xi(t + \tau)$ стають незалежними, й, отже:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_\xi(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2] = \\ &= \langle \xi(t) \rangle \langle \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

4. При $\tau = 0$ значення $B_\xi(\tau)$ збігається з дисперсією:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} B_\xi(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} [\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2] = \\ &= \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \sigma_\xi^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

5. Функція $B_\xi(\tau)$ має бути неперервною функцією τ , модуль якої $|B_\xi(\tau)|$ досягає абсолютного максимуму при $\tau \rightarrow 0$ (доведення цих важливих фактів можна знайти, наприклад, у

монографіях зі статистичної радіотехніки). Схематичний вигляд залежності $B_\xi(\tau)$ подано на рис. 5.2.

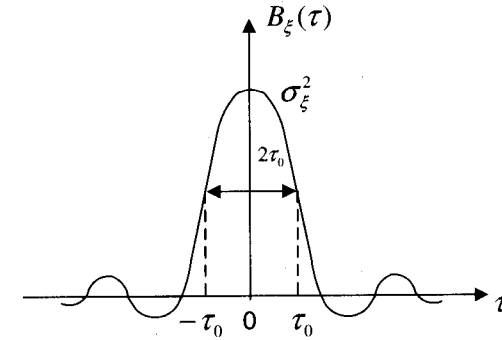


Рис. 5.2

6. Згідно з визначенням (5.18) для стаціонарного процесу легко простежується зв'язок між структурною й автокореляційною функціями:

$$\begin{aligned} D_\xi(t, \tau) &= \langle [\xi(t + \tau) - \xi(t)]^2 \rangle = \langle [\xi(t + \tau) - \bar{\xi} - \xi(t) + \bar{\xi}]^2 \rangle = \\ &= \langle [\xi(t + \tau) - \bar{\xi}]^2 \rangle + \langle [\xi(t) - \bar{\xi}]^2 \rangle - \\ &- 2 \langle [\xi(t + \tau) - \bar{\xi}][\xi(t) - \bar{\xi}] \rangle = 2[\sigma_\xi^2 - B_\xi(\tau)] = D_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (5.29)$$

З урахуванням уже зазначених властивостей $B_\xi(\tau)$ можна отримати і властивості структурної функції стаціонарного процесу. Зокрема,

$$D_\xi(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} D_\xi(\tau) = 2\sigma_\xi^2. \quad (5.30)$$

Схематичний вигляд $D_\xi(\tau)$ наведено на рис. 5.3.

7. Проміжок часу τ_0 , протягом якого кореляція між значеннями випадкового процесу суттєво послаблюється (наприклад, функ-

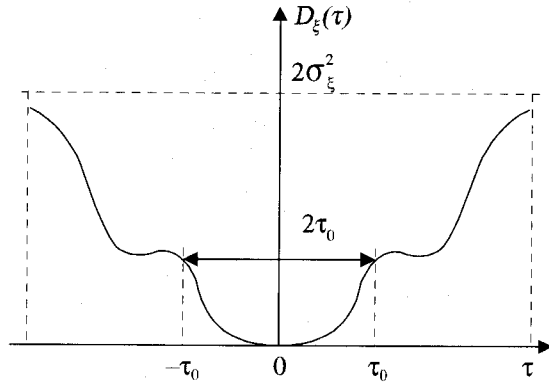


Рис. 5.3

ція автокореляції $B_\xi(\tau)$ спадає вдвічі, як показано на рис. 5.2, або в e разів — це питання домовленості), називається **часом кореляції** або **інтервалом кореляції**:

$$B_\xi(\tau_0) = \frac{1}{2} B_\xi(0) = \frac{\sigma_\xi^2}{2} \quad (5.31 \text{ а})$$

або

$$B_\xi(\tau_0) = \frac{1}{e} B_\xi(0) = \frac{\sigma_\xi^2}{e}. \quad (5.31 \text{ б})$$

Окрім $B_\xi(\tau)$ іноді зручно розглядати нормовану на σ_ξ^2 функцію автокореляції (або **коефіцієнт кореляції**):

$$K_\xi(\tau) = \frac{B_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2}, \quad |K_\xi(\tau)| \leq 1, \quad K_\xi(0) = 1. \quad (5.32)$$

За допомогою $K_\xi(\tau)$ час кореляції τ_0 можна формально ввести ще й так:

$$\tau_0 = \int_0^\infty K_\xi(\tau) d\tau = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \int_0^\infty B_\xi(\tau) d\tau \quad (5.33 \text{ а})$$

або

$$\left. \frac{d^2}{d\tau^2} K_\xi(\tau) \right|_{\tau=0} = -\frac{1}{\tau_0^2}. \quad (5.33 \text{ б})$$

Загалом, уведені різними способами часи кореляції можуть відрізнятися між собою. Тому, користуючись поняттям „час кореляції”, кожен раз потрібно вказувати, про яке з визначень: (5.31 а, б) чи (5.33 а, б) йде мова.

Визначення

Випадкові процеси, кореляційні функції яких є функціями тільки різниці $|t_2 - t_1|$, а дисперсії σ_ξ^2 і середні значення $\langle \xi \rangle$ — не залежать від часу, називаються **стаціонарними у широкому розумінні**, на відміну від просто стаціонарних (або **стаціонарних у вузькому розумінні**), для яких виконується умова (5.19). Раніше ми показували, що зі стаціонарності у вузькому розумінні випливає стаціонарність у широкому розумінні. Зворотне твердження, взагалі кажучи, хибне: (5.17) може бути функцією тільки різниці $|t_2 - t_1|$, у той час як умова однорідності (5.19) не виконується.

5.4. Процеси зі стаціонарними прирошеннями

Існує досить великий клас нестаціонарних процесів, які як окремий випадок включають у себе і стаціонарні процеси. Ці процеси, що їх ще називають процесами зі стаціонарними прирошеннями, вперше були розглянуті А.М. Колмогоровим у 1940 р.

Розглянемо нестационарний випадковий процес $\xi(t)$ і побудуємо прирощення на інтервалі часу $(t, t+T)$ довільної, але фіксованої тривалості T :

$$\eta_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t). \quad (5.34)$$

Очевидно, що повільні зміни $\xi(t)$ мало впливають на значення $\eta_T(t)$ (зміни тим менші, чим більші значення характерного часу зміни $\xi(t)$). Унаслідок цього у $\eta_T(t)$ ліквідовуватимуться компоненти з великими періодами, і можливий варіант, коли процес $\eta_T(t)$ буде стаціонарним (за t , але не за T !). У цьому випадку $\xi(t)$ називається **випадковим процесом зі стаціонарним першим прирощенням**. Припущення про стаціонарність $\eta_T(t)$ передбачає виконання умови

$$\langle \eta_T(t) \rangle = \langle \xi(t+T) \rangle - \langle \xi(t) \rangle = \text{Const}. \quad (5.35)$$

Звідси випливає, що середнє значення $\xi(t)$ може бути тільки лінійною функцією t :

$$\langle \xi(t) \rangle = at + b, \quad (5.36)$$

де a і b — деякі регулярні константи. Неважко зрозуміти, що для випадкового процесу зі стаціонарним другим прирощенням має бути стаціонарною різниця $\eta_T(t+T_1) - \eta_T(t)$, а середнє значення $\xi(t)$ буде поліномом не вище, ніж другого степеня:

$$\langle \xi(t) \rangle = at^2 + bt + c. \quad (5.37)$$

Далі ми обмежимося тільки процесами зі стаціонарними першими прирощеннями. Середнє значення вигляду (5.36) має, наприклад, процес

$$\xi(t) = \alpha t + \zeta(t), \quad (5.38)$$

де α — випадковий „коефіцієнт” із середнім значенням, що не дорівнює нулю ($\bar{\alpha} = a \neq 0$), а $\zeta(t)$ — стаціонарний випадковий процес ($\langle \zeta(t) \rangle = b$, $\langle \zeta(t+\tau)\zeta(t) \rangle = R_\zeta(\tau)$). Видно, що процес $\xi(t)$ — нестационарний, хоча б тому, що його перший момент лінійно змінюється з часом за законом (5.36). Проте перше прирощення $\eta_T(t)$

$$\eta_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t) = \alpha T + \zeta(t+T) - \zeta(t) \quad (5.39)$$

є стаціонарним процесом (за t , але не за T). Справді, з (5.39) видно, що середнє значення $\langle \eta_T(t) \rangle = \bar{\alpha}T = aT = \text{Const}$. Окрім того, неважко показати, що коваріаційна функція $R_{\eta_T}(t_1, t_2)$ залежить тільки від різниці часу $\tau = t_2 - t_1$. Для доведення останнього твердження зробимо заміну $t_1 = t + \tau$ і $t_2 = t$, після чого отримаємо

$$\begin{aligned} R_{\eta_T}(t_1, t_2) &= \langle \eta_T(t_1)\eta_T(t_2) \rangle = \langle \eta_T(t+\tau)\eta_T(t) \rangle = \\ &= \langle [\alpha T + \zeta(t+T+\tau) - \zeta(t+\tau)] [\alpha T + \zeta(t+T) - \zeta(t)] \rangle = \\ &= \langle \alpha^2 \rangle T^2 + 2R_\zeta(\tau) - R_\zeta(T+\tau) - R_\zeta(T-\tau) = R_{\eta_T}(\tau). \end{aligned} \quad (5.40)$$

При виведенні формули (5.40) ми припускали, що випадкові величини α і ζ статистично незалежні ($\langle \alpha \zeta \rangle = \langle \alpha \rangle \langle \zeta \rangle$).

Для випадкового процесу зі стаціонарним першим прирощенням вигляду (5.38) обчислимо тепер структурну функцію

$$\begin{aligned} D_\xi(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 \rangle = \langle [\alpha(t_2 - t_1) + \zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 \rangle = \\ &= \langle \alpha^2 \rangle (t_2 - t_1)^2 + \langle [\zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \tau^2 + D_\zeta(\tau) = D_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Тут $D_\zeta(\tau)$ — структурна функція стаціонарного процесу $\zeta(t)$ (див. (5.29)). Видно, що структурна функція $D_\xi(t_1, t_2)$ нестационарного процесу $\xi(t)$ також залежить тільки від різниці часу $\tau = t_2 - t_1$ і при $|\tau| \rightarrow \infty$ необмежено зростає.

Введемо у розгляд ще одну кореляційну функцію, яка називається **взаємною кореляційною функцією** двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\zeta(t)$ і визначається за формулою

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \overline{[\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\zeta(t_2) - \bar{\zeta}(t_2)]}. \quad (5.42)$$

Якщо ця функція є функцією тільки різниці $\tau = t_2 - t_1$, то такі процеси називаються **стаціонарно пов'язаними**.

5.5. Ергодичні процеси

У всіх наведених вище формулах припускалося, що статистичне усереднення проводиться за ансамблем реалізацій випадкової функції, тобто шляхом інтегрування виразів, які усереднюються, з густиною розподілу ймовірностей $W_n(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)$. Проте, як правило, у нашому розпорядженні немає достатньо повного набору реалізацій, поданих на рис. 5.1. Справді, в експериментаторів звичайно є одна лабораторія і кілька ідентичних приладів, а часто — тільки один, тому доводиться робити статистичні оцінки і висновки про ймовірнісні властивості випадкового процесу тільки за однією, проте достатньо тривалою реалізацією $\xi(t)$. При цьому як характерні параметри процесу використовують середні за часом величини. Найчастіше визначають такі моменти:

1. Середнє часове реалізації

$$\bar{m}_1 = \overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt. \quad (5.43)$$

Цю величину можна трактувати як сталу складову реалізації.

2. Середній у часі квадрат

$$m_2 = \overline{\xi^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt. \quad (5.44)$$

Якщо $\xi(t)$ описує флуктуації струму або напруги у колі, то момент $\overline{\xi^2(t)}$ пропорційний до середньої потужності.

3. Часова дисперсія

$$\widetilde{M}_2 = \overline{\sigma_\xi^2} = \overline{[\xi(t) - \bar{m}_1]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \bar{m}_1]^2 dt. \quad (5.45)$$

Її можна трактувати як середню потужність флуктуацій.

4. Нарешті, вкажемо на часову кореляційну функцію

$$\widetilde{m}_{11} = \overline{R_\xi(\tau)} = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\xi(t+\tau) dt \quad (5.46)$$

і часову автокореляційну функцію

$$\widetilde{M}_{11} = \overline{B_\xi(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \bar{m}_1][\xi(t+\tau) - \bar{m}_1] dt = \overline{R_\xi(\tau)} - \bar{m}_1^2. \quad (5.47)$$

Тут і надалі усереднені за часом характеристики ми позначатимемо хвилястою рисою вгорі.

Слід зазначити, що не для будь-якого випадкового процесу наведені часові середні існують. Проте, навіть, якщо вони існують, то для різних реалізацій вони можуть бути різними. Виникає питання — для яких процесів введені характеристики мають зміст, і який зв'язок існує між середніми за часом і за ансамблем реалізацій? Зокрема, для яких випадкових процесів усереднення за ансамблем реалізацій можна замінити на усереднення за часом?

Виявляється, що існує цілий клас випадкових процесів, у яких часові характеристики з як завгодно близькою до одиниці ймовірністю збігаються з відповідними характеристиками, отриманими шляхом усереднення за ансамблем реалізацій

($\widetilde{m}_1 = m_1, \widetilde{m}_2 = m_2, \widetilde{M}_2 = M_2, \widetilde{m}_{11} = m_{11}, \widetilde{M}_{11} = M_{11}$ та ін.). Такі процеси називаються **ергодичними**. Властивість ергодичності виявляється дуже корисною, оскільки за окремою реалізацією шляхом її усереднення за часом можна знаходити статистичні характеристики процесу, не застосовуючи усереднення за ансамблем.

Необхідною умовою ергодичності випадкового процесу є його стаціонарність. Ця умова легко пояснюється. Для стаціонарних процесів усі одноточкові моменти є сталими величинами, а двоточкові — функціями різниці часу τ . Точно така сама залежність буде і при часовому усередненні згідно з формулами (5.43 ÷ 5.46). З іншого боку, уявимо такий експеримент. Достатньо довгу реалізацію стаціонарного процесу $\xi(t)$ розіб'ємо на окремі „шматки” $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) приблизно рівної тривалості $T_i \approx T$. Якщо інтервал розбивання T набагато перевищує характерний радіус кореляції τ_0 автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$ ($T \gg \tau_0$), то кожен з відрізків нестиме у собі повну інформацію про весь процес у цілому. При цьому часові характеристики (5.43 ÷ 5.46), обчислені для кожного відрізка $\xi_i(t)$ за кінцевим інтервалом $(0, T)$, будуть мало відрізнятися від своїх граничних значень для всього процесу. Розташуємо тепер усі відрізки $\xi_i(t)$ так, як це показано на рис. 5.1, і ми отримаємо відповідний „ансамбль реалізацій” з тими самими ймовірнісними характеристиками.

Потрібно, проте, зазначити, що стаціонарність процесу є необхідною, але не достатньою умовою ергодичності. Виявляється, що не в усіх часових характеристиках стаціонарний процес є ергодичним. Для одних характеристик властивість ергодичності може виконуватися, а для інших — ні. У зв'язку з цим

уводять поняття ергодичності відносно конкретних характеристик процесу. Наприклад, стаціонарний процес $\xi(t)$ буде ергодичний відносно математичного сподівання, тобто

$$\widetilde{m}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = m_1, \quad (5.48)$$

якщо і тільки якщо виконується умова

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_\xi(\tau) d\tau = 0. \quad (5.49)$$

З іншого боку, гауссівський стаціонарний процес ергодичний відносно дисперсії флуктуацій, тобто

$$\widetilde{\sigma}_\xi^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \widetilde{m}_1]^2 dt = \sigma_\xi^2, \quad (5.50)$$

якщо і тільки якщо виконується умова

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_\xi^2(\tau) d\tau = 0. \quad (5.51)$$

Детальне дослідження питання про достатні умови ергодичності інших характеристик стаціонарного процесу можна, наприклад, знайти у монографіях зі статистичної радіотехніки.

ЗАДАЧІ

1. Визначити, чи має функція

$$B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(ch(\omega_0 \tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} sh(\omega_0 |\tau|) \right), \quad \alpha > 0, \omega_0 > 0 \quad (1)$$

властивості автокореляційної функції.

Розв'язок. Для відповіді на поставлене питання необхідно перевірити виконання наступних умов.

1. Автокореляційна функція при $\tau = 0$ збігається з дисперсією σ_ξ^2 , отже, має бути додатною величиною: $B_\xi(0) > 0$.

2. Автокореляційна функція повинна бути функцією парною: $B_\xi(\tau) = B_\xi(-\tau)$.

3. Модуль автокореляційної функції $|B_\xi(\tau)|$ має досягати абсолютного максимуму при $\tau \rightarrow 0$: $|B_\xi(\tau)| \leq B_\xi(0)$. З іншого боку, при $\tau \rightarrow \infty$ $B_\xi(\tau)$ повинна перетворюватися на 0: $B_\xi(\infty) = 0$.

З аналізу виразу (1) для $B_\xi(\tau)$ видно, що умови 1 і 2 виконуються. Для перевірки умови 3 зобразимо функцію $B_\xi(\tau)$ для додатних значень τ у вигляді

$$B_\xi(\tau) = \frac{\sigma_\xi^2}{2} \left[e^{-(\alpha - \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha + \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right], \tau \geq 0. \quad (2)$$

Оскільки $B_\xi(0) = \sigma_\xi^2$, то для виконання умови 3 необхідно, щоб вираз у квадратних дужках за модулем не перевищував 2:

$$\left| e^{-(\alpha - \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha + \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right| \leq 2. \quad (3)$$

Неважко показати, що ця нерівність виконується тільки при $\alpha > \omega_0$. Справді, при $\alpha < \omega_0$ і $\tau \rightarrow \infty$ функція $\exp[-(\alpha - \omega_0)\tau]$ необмежено зростає. З іншого боку, випадок $\alpha = \omega_0$ має бути виключений з розгляду тому, що згідно з (3) не виконується умова $B_\xi(\infty) = 0$. До такого самого висновку веде й аналіз виразу $B_\xi(\tau)$ при $\tau < 0$.

Підсумовуючи все сказане, дійдемо висновку, що функція $B_\xi(\tau)$ задовольняє всі властивості автокореляційної функції тільки при $\alpha > \omega_0$.

2. Випадковий процес $\xi(t) = f(t, \varphi) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ є синусоїдою з випадковою фазою φ , яка рівномірно розподілена в інтервалі $[-\pi, \pi]$. Перевірити цей процес на ергодичність.

Розв'язок. Для перевірки на ергодичність заданого процесу $\xi(t)$ слід обчислити середнє значення $\bar{\xi}$, дисперсію σ_ξ^2 і автокореляційну функцію $B_\xi(t_1, t_2)$ двома способами (шляхом усереднень за ансамблем реалізацій і за часом), а після цього порівняти отримані результати.

А. Усереднення за ансамблем.

$$\bar{\xi}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = 0. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2 &= \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = \overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] d\varphi = \frac{A^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

З урахуванням того, що $\bar{\xi} = 0$, обчислимо автокореляційну функцію $B_\xi(t_1, t_2) = \langle f(t_1, \varphi) f(t_2, \varphi) \rangle$. Поклавши $t_2 = t + \tau$, $t_1 = t$, отримаємо

$$B_\xi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) \xi(t + \tau, \varphi) W(\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot A \sin(\omega_0 t + \varphi + \omega_0 \tau) \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \right\} d\varphi = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau = B_{\xi}(\tau). \quad (3)$$

Із формул (1 ÷ 3) видно, що процес $\xi(t)$ стаціонарний.

В. Усереднення за часом.

$$\bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_0^T \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = 0. \quad (4)$$

$$\widetilde{\sigma_{\xi}^2} = \widetilde{\xi^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] dt = \frac{A^2}{2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \sin 2(\omega_0 t + \varphi) \Big|_0^T = \frac{A^2}{2}. \quad (5)$$

$$\widetilde{B_{\xi}(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) f(t + \tau, \varphi) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_0^T \left\{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \right\} dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (6)$$

Із порівняння формул (1 ÷ 3) і (4 ÷ 6) видно, що знайдені значення $\bar{\xi}$, σ_{ξ}^2 і $B_{\xi}(\tau)$ не залежать від способу усереднення. Отже, аналізований процес можна вважати ергодичним.

§ 6. Спектральний аналіз випадкових процесів

При вивченні детермінованих процесів часто застосовується гармонійний аналіз. Періодичні процеси подаються у вигляді рядів Фур'є, а аперіодичні — інтегралів Фур'є. При цьому розв'язок багатьох

фізичних задач, що зводяться до лінійних рівнянь, значно спрощується. Це пов'язано з тим, що лінійні перетворення (наприклад, інтегрування і диференціювання) не змінюють вигляду функції $e^{i\omega t}$, викликаючи тільки множення або ділення її на незалежні від t множники. Хотілося б мати настільки ж простий і ефективний математичний апарат і при аналізі випадкових процесів.

6.1. Енергетичний спектр стаціонарного процесу.

Формула Вінера-Хінчіна

Запишемо формально перетворення Фур'є для випадкового стаціонарного процесу $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.1)$$

Обернене перетворення має вигляд

$$C_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.2)$$

Величина $C_{\xi}(\omega)$ називається трансформантою Фур'є. Для спрощення подальшого аналізу вважатимемо, що випадкова функція $\xi(t)$ описує флуктуації якоїсь величини навколо її середнього значення, так що $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Урахування середньої величини ($\langle \xi(t) \rangle \neq 0$) зводиться до простої заміни $\xi(t) \rightarrow \delta \xi$. Перетворення (6.1) і (6.2) ми назвали формальним тому, що стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ у загальному випадку не задовольняє вимогу спадання на нескінченності й, отже, трансформанта Фур'є $C_{\xi}(\omega)$ як така не існує. Нагадаємо, що перетворення Фур'є можливе тільки для абсолютно інтегрованих функцій, коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)| dt \leq M,$$

де M — деяка стала величина. Для того, щоб надати спектральним розкладам випадкових полів коректний математичний зміст, припускають, що процес $\xi(t)$ стаціонарний всередині якогось великого, але скінченного інтервалу $-T \leq t \leq T$ і швидко спадає до нуля за його межами:

$$\xi_T(t) = \begin{cases} \xi(t), & -T \leq t \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Для побудованої таким чином випадкової функції $\xi_T(t)$ Фур'є-спектр існує і має вигляд

$$C_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \xi_T(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Далі на обраному інтервалі $-T \leq t \leq T$ будуються середньоквадратичні корелятори $\langle \xi_T(t_1) \xi_T(t_2) \rangle$, $\langle C_T(\omega_1) C_T^*(\omega_2) \rangle$ і встановлюється між ними зв'язок через перетворення Фур'є. Після цього переходять до границі $T \rightarrow \infty$, в результаті чого отримують математично коректний результат. Ми, проте, не використовуємо такого роду прийомів, а вважаємо, що інтеграли (6.1) і (6.2) існують у розумінні ймовірнісної збіжності, а саме у середньому квадратичному.

Застосувавши операцію комплексного спряження до (6.1), отримуємо

$$\xi^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(-\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.3)$$

Праву частину (6.3) отримано внаслідок заміни змінної інтегрування $\omega \rightarrow -\omega$. Для дійсної функції $\xi(t) = \xi^*(t)$ і підінтегральний вираз у (6.3) має збігатися з аналогічним у (6.1). Звідси випливає важлива властивість „ермітовості” функції $C_{\xi}(\omega)$:

$$C_{\xi}^*(-\omega) = C_{\xi}(\omega), \quad C_{\xi}(-\omega) = C_{\xi}^*(\omega). \quad (6.4)$$

З урахуванням того, що $\xi(t)$ є випадковою функцією з нульовим середнім значенням ($\langle \xi \rangle = 0$), з (6.2) випливає, що $C_{\xi}(\omega)$ також є випадковою функцією, причому $\langle C_{\xi}(\omega) \rangle = 0$.

Виразимо тепер автокореляційну функцію стаціонарного процесу $\xi(t)$ через корелятор Фур'є-компоненти $C_{\xi}(\omega)$:

$$B_{\xi}(\tau) = \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t+i\omega\tau} d\omega d\omega'. \quad (6.5 \text{ а})$$

Виконавши під знаком інтегралу заміну змінної $\omega' \rightarrow -\omega'$ з урахуванням властивості ермітовості (6.4), формулу (6.5 а) можна переписати ще й так:

$$B_{\xi}(\tau) = \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle e^{i(\omega-\omega')t+i\omega\tau} d\omega d\omega'. \quad (6.5 \text{ б})$$

Для того, щоб інтеграли у (6.5 а, б) не залежали від t (а тільки від τ — за умовою стаціонарності), необхідно, щоб підінтегральні функції перетворювалися на нуль на всій площині (ω, ω') , окрім ліній: $\omega' + \omega = 0$ для виразу (6.5 а) і $\omega' - \omega = 0$ для виразу (6.5 б), де

залежні від t експоненти $\exp\{i(\omega \pm \omega')t\}$ тотожно дорівнюють одиниці. Для цього необхідно, щоб перетворювалися на нуль корелятори компонент Фур'є:

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = 0, \quad \text{при } \omega + \omega' \neq 0, \quad (6.6 \text{ а})$$

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle = 0, \quad \text{при } \omega - \omega' \neq 0. \quad (6.6 \text{ б})$$

При цьому інтеграли (6.5) мають зводитися, взагалі кажучи, до відмінної від нуля функції $B_{\xi}(\tau)$. Це можливо тільки у тому випадку, якщо корелятори $\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle$, $\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle$ мають особливості типу δ -функції:

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega), \quad (6.7)$$

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') S_{\xi}(\omega). \quad (6.8)$$

Уведену формулами (6.7) і (6.8) функцію $S_{\xi}(\omega)$ називають **енергетичним спектром** потужності стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$.

Підставляючи (6.7), (6.8) у (6.5 а, б) та інтегруючи за $d\omega'$ за допомогою δ -функції, отримуємо **формулу Вінера-Хінчіна**:

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.9)$$

Обернене Фур'є-перетворення дає:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.10)$$

Із формул (6.9) і (6.10) можна отримати наступні корисні нам далі співвідношення.

Зокрема, при $\tau = 0$ з (6.9) випливає:

$$B_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (6.11 \text{ а})$$

З іншого боку, поклавши у (6.10) $\omega = 0$, отримаємо:

$$S_{\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau. \quad (6.11 \text{ б})$$

Необхідно коротко пояснити походження назви „енергетичний спектр” на прикладі з радіотехніки. Якщо $\xi(t)$ описує флуктуації струму у колі або напруги на якомусь опорі, то дисперсія $\sigma_{\xi}^2 = \langle \xi^2 \rangle$ з точністю до сталого множника має зміст середньої потужності процесу — енергії, що виділяється за одиницю часу. З формули (6.11 а) випливає, що ця енергія представляється у вигляді суми „енергій” окремих спектральних компонент — $S_{\xi}(\omega) d\omega$, які можна ототожнити з енергією процесу в інтервалі частот від ω до $\omega + d\omega$. Інакше кажучи, функція $S_{\xi}(\omega)$ описує густину розподілу енергії процесу за частотами ω , тобто за спектром (тому іноді енергетичний спектр називають ще спектральною густиною).

Властивості $S_{\xi}(\omega)$

1. Із визначення (6.8) видно, що $S_{\xi}(\omega)$ — **додатна функція**. Справді, переходячи у (6.8) до границі $\omega' \rightarrow \omega$, отримуємо, що $S_{\xi}(\omega)$ з точністю до нормувального множника збігається з $\langle |C_{\xi}(\omega)|^2 \rangle$ — середнім квадратом амплітуди однієї спектральної компоненти, тобто середньою потужністю — величиною в кожному разі невід'ємною.

2. Із (6.10) з урахуванням, того, що $B_{\xi}(\tau)$ дійсна і парна, випливає, що $S_{\xi}(\omega)$ — дійсна і парна функція:

$$S_{\xi}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_{\xi}(\omega), \quad (6.12)$$

$$S_{\xi}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = S_{\xi}^*(\omega) = S_{\xi}(\omega). \quad (6.13)$$

Легко переконатися в тому, що парність і дійсність функцій $B_{\xi}(\tau)$ і $S_{\xi}(\omega)$, дає змогу у формулах (6.9) і (6.10) довільно змінювати знаки перед уявною одиницею i в показниках експонент.

3. Характерна ширина $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$ пов'язана з характерним часом $\Delta\tau$ зміни автокореляційної функції $B_{\xi}(\tau)$ деяким співвідношенням, яке часто називають „співвідношенням невизначеностей”.

$$\Delta\omega \Delta\tau = Const. \quad (6.14)$$

Із цієї формули зокрема випливає, що чим „ширший” спектр $S_{\xi}(\omega)$, тим „вужча” автокореляційна функція $B_{\xi}(\tau)$, і навпаки. Таке твердження легко пояснюється за допомогою рис. 6.1 і наступних простих міркувань. Аналогічно до формули (5.33 а) визначимо характерну ширину $B_{\xi}(\tau)$ як

$$\Delta\tau = \frac{1}{B_{\xi}(0)} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{\pi S_{\xi}(0)}{B_{\xi}(0)}. \quad (6.15 а)$$

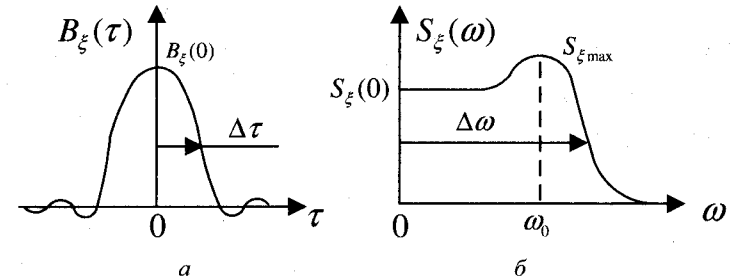


Рис. 6.1

Подібним чином можна ввести і поняття характерної ширини $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$:

$$\Delta\omega = \frac{1}{S_{\xi \max}(\omega_0)} \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{B_{\xi}(0)}{2S_{\xi \max}(\omega_0)}. \quad (6.15 б)$$

Через $S_{\xi \max}(\omega_0)$ тут позначено максимальне значення енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$, що досягається на деякій частоті ω_0 (див. рис. 6.1). При написанні формул (6.15) ми врахували співвідношення (6.11).

Помноживши тепер (6.15 а) і (6.15 б), отримаємо

$$\Delta\omega \Delta\tau = \frac{\pi}{2} \frac{S_{\xi}(0)}{S_{\xi \max}(\omega_0)} = Const. \quad (6.16)$$

Величина $Const$ у (6.16) залежить від виду спектра $S_{\xi}(\omega)$ і від способу визначення характерної ширини $\Delta\tau$ і $\Delta\omega$. Наприклад, для низькочастотних спектрів $S_{\xi \max}(\omega_0) \approx S_{\xi}(0)$ і $Const \approx \pi/2 \approx 1$. З іншого боку, як $\Delta\tau$ можна вважати раніше введений час кореляції процесу τ_0 тощо.

Підсумовуючи викладене, зазначимо, що „співвідношення невизначеностей” є наслідком загальної теорії перетворення Фур’є, а не якихось специфічних властивостей автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$ або енергетичного спектра $S_\xi(\omega)$ випадкового процесу.

Як *приклад* розглянемо співвідношення невизначеностей для гауссової автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$:

$$B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\tau^2/2\tau_0^2}.$$

За допомогою формули Вінера-Хінчіна (6.10) знайдемо, що енергетичний спектр $S_\xi(\omega)$ також є гауссовою кривою:

$$S_\xi(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2} - i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_\xi^2 \tau_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{2}}.$$

Для цих залежностей $B_\xi(\tau)$ і $S_\xi(\omega)$ згідно з формулами (6.15)

$$\text{отримаємо } \Delta\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \tau_0, \quad \Delta\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\tau_0} \quad \text{і} \quad \Delta\omega \cdot \Delta\tau = \pi/2 \approx 1.$$

З іншого боку, за $\Delta\tau$ ми можемо вибрати значення τ за рівнем $B_\xi(0)/\sqrt{e}$. У цьому випадку, як легко побачити, $\Delta\tau = \tau_0$. Таким самим способом, оцінивши характерну ширину енергетичного спектра $\Delta\omega$ за рівнем $S_\xi(0)/\sqrt{e}$, отримаємо $\Delta\omega = 1/\tau_0$. У результаті співвідношення невизначеностей має вигляд $\Delta\omega \cdot \Delta\tau = 1$.

Незважаючи на те, що строга рівність $\Delta\tau \cdot \Delta\omega = \pi/2$ справджується тільки для гауссових спектрів, співвідношенням $\Delta\tau \cdot \Delta\omega \approx 1$ часто користуються для оцінки ширини смуги процесу (ширини його енергетичного спектра $\Delta\omega$) за відомим часом

кореляції, вважаючи $\tau_0 \approx \Delta\tau$. Навпаки, знаючи ширину смуги випадкового процесу $\Delta\omega$, користуючись (6.16), можна оцінити його час кореляції τ_0 .

Записавши пару Фур’є-перетворень у вигляді (6.1), (6.2), ми неявно припустили, що спектр процесу – неперервний. У випадку **дискретного спектра** замість інтеграла (6.1) слід писати суму:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}, \quad (6.17)$$

де ω_n — зліченна множина частот (можливо, і нескінченна). Якщо процес періодичний (з періодом T), то $\omega_n = n\omega_0$, де $\omega_0 = 2\pi/T$, тобто спектр складається з екуїдистантних (рівновіддалених одна від одної) дискретних частот. У загальному ж випадку, коли $\omega_n \neq n\omega_0$, розклад (6.17) є поданням майже періодичного процесу, для автокореляційної функції якого замість (6.5) має місце формула

$$B_\xi(t, \tau) = \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \langle C_n C_m^* \rangle e^{i(\omega_n - \omega_m)t + i\omega_n \tau}, \quad (6.18)$$

звідки випливає, що для стаціонарності процесу необхідно, щоб виконувалася умова, аналогічна до (6.8):

$$\langle C_n C_m^* \rangle = \delta_{nm} S_n, \quad (6.19)$$

де δ_{nm} — **символ Кронекера** ($\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$, $\delta_{nm} = 1$ при $n = m$). Таким чином, автокореляційна функція $B_\xi(\tau)$ майже періодичного випадкового процесу подається у вигляді:

$$B_\xi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{i\omega_n \tau}. \quad (6.20)$$

Якщо ввести енергетичний спектр $S_{\xi}(\omega)$ співвідношенням

$$S_{\xi}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_n) S_n, \quad (6.21)$$

то (6.20) можна розглядати як окремий випадок формули (6.9).

У формулі (6.9) є суттєва хиба — в інтеграл за $d\omega$ входить ділянка від'ємних частот, яка не додає жодної нової інформації про процес у порівнянні з додатними частотами, оскільки $S_{\xi}(\omega)$ — парна функція за умовою (6.13). Для того, щоб у (6.9) позбутися від'ємних частот, розіб'ємо область інтегрування за $d\omega$ на дві півосі, зробимо в інтегралі за від'ємною півоссю ($\omega < 0$) заміну змінної інтегрування $\omega \rightarrow -\omega$ і скористаємося парністю $S_{\xi}(\omega)$:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \int_{-\infty}^0 S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) [e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}] d\omega = \\ &= 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}^{(+)}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Енергетичний спектр потужності $S_{\xi}^{(+)}(\omega)$, що належить тільки до додатних частот, має відповідно, вигляд:

$$S_{\xi}^{(+)}(\omega) = 2S_{\xi}(\omega), \quad \omega \geq 0. \quad (6.23)$$

Аналогічні перетворення формули (6.10) з урахуванням парності $B_{\xi}(\tau)$ ведуть до виразу для $S_{\xi}^{(+)}(\omega)$ через значення $B_{\xi}(\tau)$ тільки при додатних τ :

$$S_{\xi}^{(+)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (6.24)$$

Коментарі

Як уже зазначалося на початку цього параграфа, перетворення Фур'є можливе тільки для абсолютно інтегрованих функцій. Це означає, що формули Вінера-Хінчіна (6.9) і (6.10) справджуються, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B_{\xi}(\tau)| d\tau \leq N, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\xi}(\omega)| d\omega \leq P,$$

де P і N — деякі константи. Ця умова накладає суттєві обмеження на область застосування Фур'є-аналізу стосовно випадкових процесів. **Формули справджуються тільки для стаціонарних процесів, середнє значення яких дорівнює нулю, й у яких немає також квазідетермінованих складових.**

6.2. Аналітичний сигнал

Під час дослідження фізичних систем, що описуються лінійними рівняннями, особливу роль відіграють гармонійні коливання виду

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \Phi), \quad (6.25)$$

де A — амплітуда коливання, а Φ — його фаза. Значне спрощення математичних обчислень при розв'язуванні лінійних інтегродиференціальних рівнянь досягається, як відомо, шляхом переходу від дійсної функції (6.25) до комплексної

$$\zeta(t) = A e^{i(\omega t + \Phi)} \quad (6.26)$$

з причин, які вже обговорювалися на початку цього параграфа. А що робити у загальному випадку довільного, взагалі кажучи, негармонійного процесу $\xi(t)$? Зрозуміло, що існує незліченна множина комплексних функцій $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, таких, що

$\operatorname{Re} \zeta(t) = \xi(t)$, але як побудувати таку схему переходу від $\xi(t)$ до $\zeta(t)$, щоб можна було однозначно ставити кожному процесу $\xi(t)$ у відповідність комплексну функцію $\zeta(t)$, реальна частина якої збігається з $\xi(t)$? Шуканий метод побудови $\zeta(t)$, по-перше, не має потребувати додаткової порівняно з уже відомою $\xi(t)$ інформації, а по-друге, у випадку гармонійних процесів (6.25) повинен приводити $\zeta(t)$ до (6.26).

Найприродніший спосіб введення $\zeta(t)$ за заданою $\xi(t)$ ґрунтується на її спектральному поданні (6.1):

$$\zeta(t) = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.27)$$

де $C_{\xi}(\omega)$ — перетворення Фур'є (6.2) функції $\xi(t)$. Уведену таким чином комплексну функцію $\zeta(t)$ називають аналітичним сигналом, що відповідає дійсному процесові $\xi(t)$. Беручи до уваги властивість ермітовості (6.4) Фур'є-компоненти $C_{\xi}(\omega)$, переконуємося у тому, що $\operatorname{Re} \zeta(t)$ справді збігається з $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \zeta(t) &= \frac{1}{2} [\zeta(t) + \zeta^*(t)] = \int_0^{\infty} [C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} + C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \xi(t). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Для уявної частини $\operatorname{Im} \zeta(t) \equiv \eta(t)$, яку називають **квадратурною компонентою** або **спряженим процесом**, маємо наступний розклад Фур'є:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \zeta(t) &= \frac{1}{2i} [\zeta(t) - \zeta^*(t)] = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} [C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} - C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega = \\ &= \frac{1}{i} \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \frac{1}{i} \int_{-\infty}^0 C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \eta(t), \end{aligned} \quad (6.29)$$

причому спектр $\tilde{C}_{\xi}(\omega)$ пов'язаний із $C_{\xi}(\omega)$ формулою

$$\tilde{C}_{\xi}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) C_{\xi}(\omega), \quad (6.30)$$

де

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0; \\ 0, & \omega = 0; \\ -1, & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Легко перевірити, що з урахуванням визначень (6.28), (6.29) ми отримуємо вихідну формулу (6.27):

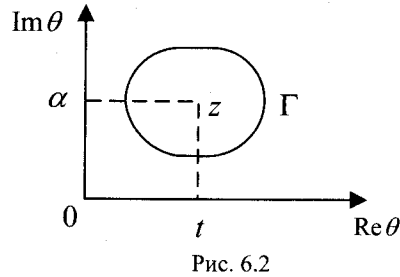
$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \xi(t) + i\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [C_{\xi}(\omega) + i\tilde{C}_{\xi}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) [1 + \operatorname{sgn}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Між $\xi(t)$ і $\eta(t)$ можна встановити і безпосередній зв'язок, не застосовуючи розкладу Фур'є, а використовуючи тільки властивість аналітичності функції

$$\zeta(z) = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega z} d\omega, \quad (6.32)$$

у верхній півплощині ($\alpha > 0$) комплексної змінної $z = t + i\alpha$. Справді, при $\alpha > 0$ інтеграл (6.32) збігається за рахунок

експоненціального множника $e^{-\alpha\omega}$ при будь-яких t , якщо вихідна функція $\xi(t)$ не має особливостей. Якби залежність від часу у (6.27) ми обрали у вигляді $e^{-i\omega t}$, то $\zeta(t)$ була б аналітичною у нижній півплощині ($\alpha < 0$). Оточимо точку $z = t + i\alpha$ на рис. 6.2



довільним замкнутим контуром Γ , що цілком лежить у верхній півплощині, і скористаємося формулою Коші

$$\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - z} d\theta. \quad (6.33)$$

Оскільки $\zeta(\theta)$ не має особливостей у верхній півплощині, контур Γ можна розтягнути так, щоб він складався з дійсної осі і нескінченно віддаленого півкола, інтеграл за яким дорівнює нулю через швидке спадання $\zeta(t + i\alpha)$ при $\text{Im } \theta \rightarrow +\infty$. Таким чином, у (6.33) контур Γ можна трансформувати у дійсну вісь:

$$\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - z} d\theta. \quad (6.34)$$

Спрямовуватимемо тепер точку $z = t + i\alpha$ до дійсної осі ($\alpha \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\theta - z} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\theta - t - i\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta - t + i\alpha}{(\theta - t)^2 + \alpha^2} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta - t}{(\theta - t)^2 + \alpha^2} + i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{(\theta - t)^2 + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Згідно з формулою (2.19 а), другий доданок у (6.35) при $\alpha \rightarrow 0$ переходить в $i\pi\delta(\theta - t)$, а інтеграл від першого – є інтегралом у розумінні головного значення. Підставляючи (6.35) в (6.34) і переходячи до границі $\alpha \rightarrow 0$, отримуємо:

$$\zeta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta) d\theta}{\theta - t} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\theta) \delta(\theta - t) d\theta. \quad (6.36)$$

Звідси випливає **формула Сохоцького**

$$\zeta(t) = \frac{1}{\pi i} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - t} d\theta.$$

Тут уведено таке позначення: **V.p.** — перші літери від слів “**Valeur principale**”, що по-французьки означає “**головне значення**”.

Виділяючи тепер в останньому виразі дійсну й уявну частини, отримуємо, що $\text{Re } \zeta(t) = \xi(t)$ і $\text{Im } \zeta(t) = \eta(t)$ пов’язані між собою перетвореннями Гільберта:

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\theta)}{\theta - t} d\theta, \quad (6.37 \text{ а})$$

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\theta)}{\theta - t} d\theta. \quad (6.37 \text{ б})$$

Ці перетворення можна записати й інакше:

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta(t+\theta) - \eta(t-\theta)}{\theta} d\theta, \quad (6.37 \text{ в})$$

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi(t+\theta) - \xi(t-\theta)}{\theta} d\theta.$$

Таким чином, для побудови аналітичного сигналу $\zeta(t)$ за заданим дійсним процесом $\xi(t)$ не потрібно спочатку знаходити перетворення Фур'є $C_{\xi}(\omega)$ від $\xi(t)$, а після цього будувати спряжений процес $\eta(t)$ за формулою (6.29) — функція $\eta(t)$ може бути побудована безпосередньо за $\xi(t)$ перетворенням Гільберта (6.37 б); $\eta(t)$ називають ще спряженим за Гільбертом процесом відносно $\xi(t)$. Легко переконатися в тому, що для гармонічного процесу (6.25) безпосереднє обчислення інтеграла (6.37 б) дає $\eta(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$ і, отже, аналітичний сигнал у цьому випадку дійсно має вигляд (6.26).

6.3. Кореляційні функції та енергетичні спектри аналітичного сигналу

Звернемося знову до випадку, коли $\xi(t)$ — стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім ($\langle \xi(t) \rangle = 0$), так що його автокореляційну функцію $B_{\xi}(\tau)$ можна подати у вигляді спектрального розкладу (6.9) або (6.22):

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (6.38)$$

Знайдемо автокореляційну функцію та енергетичний спектр спряженого за Гільбертом процесу $\eta(t)$, скориставшись розкладом $\eta(t)$ в інтеграл Фур'є (6.29):

$$\langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \tilde{C}_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t + i\omega\tau}. \quad (6.39)$$

Але згідно з (6.30) і (6.7) маємо

$$\begin{aligned} \langle \tilde{C}_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle &= -\operatorname{sgn}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega') \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = \\ &= -\operatorname{sgn}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega') \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega) = \\ &= -\operatorname{sgn}(\omega) \operatorname{sgn}(-\omega) \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega) = \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Підставляючи (6.40) в (6.39), отримуємо

$$\langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle = B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = B_{\xi}(\tau). \quad (6.41)$$

Таким чином, **спряжений процес $\eta(t)$ так само, як і первинний $\xi(t)$, виявляється стаціонарним, причому їх автокореляційні функції та енергетичні спектри повністю збігаються.**

Обчислимо тепер взаємну кореляційну функцію стаціонарних процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$:

$$\langle \xi(t) \eta(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle C_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t + i\omega\tau}. \quad (6.42)$$

Корелятор $\langle C_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle$ обчислюємо так само, як і (6.40), за допомогою формул (6.30) і (6.7):

$$\begin{aligned} \langle C_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle &= -i \operatorname{sgn}(\omega') \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = \\ &= i \operatorname{sgn}(\omega) S_{\xi}(\omega) \delta(\omega + \omega'). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Підставимо (6.43) в (6.42) і виконаємо інтегрування за $d\omega'$ з допомогою дельта-функції $\delta(\omega + \omega')$:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\eta(t+\tau) \rangle &= B_{\xi\eta}(\tau) = i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) S_{\xi}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \\ &= i \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) [e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}] d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Таким чином, випадковий процес $\xi(t)$ і спряжений з ним $\eta(t)$ виявляються стаціонарно пов'язаними, їх функція взаємної кореляції $B_{\xi\eta}(\tau)$ є непарною, і в моменти часу, що збігаються ($\tau = 0$), ці два процеси некорельовані:

$$\langle \xi(t)\eta(t) \rangle = B_{\xi\eta}(0) = 0. \quad (6.45)$$

При обчисленні корелятора $\langle \eta(t)\xi(t+\tau) \rangle = B_{\eta\xi}(\tau)$ слід скористатися його незалежністю від t і ввести нову змінну $t' = t + \tau$ (тобто змістити початок відліку часу на $-\tau$):

$$B_{\eta\xi}(\tau) = \langle \eta(t)\xi(t+\tau) \rangle = \langle \xi(t')\eta(t'-\tau) \rangle = B_{\xi\eta}(-\tau) = -B_{\xi\eta}(\tau). \quad (6.46)$$

Формулу (6.45) можна розглядати як факт ортогональності процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$, вкладаючи у це поняття той самий зміст, що і в ортогональність функцій $A\cos(\omega t + \Phi)$ і $A\sin(\omega t + \Phi)$ (відмінність фаз цих процесів на $\pi/2$). Таким чином, перетворення Гільберта (6.37 б), по суті, є способом побудови процесу $\eta(t)$, ортогонального до $\xi(t)$. Звідси, до речі, і походить назва сукупності $\xi(t)$ і $\eta(t)$ — квадратурні складові (або компоненти) аналітичного сигналу: так само, як

$A\cos(\omega t + \Phi)$ і $A\sin(\omega t + \Phi)$ є квадратурними компонентами комплексної функції $A\exp\{i(\omega t + \Phi)\}$.

Побудуємо тепер автокореляційну функцію самого аналітичного сигналу $\zeta = \xi + i\eta$:

$$B_{\zeta}(\tau) = \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle. \quad (6.47)$$

Для скорочення записів опускатимемо аргумент t ($\xi(t) \equiv \xi, \eta(t) \equiv \eta$) і введемо позначення $\xi(t+\tau) \equiv \xi_{\tau}$ і $\eta(t+\tau) \equiv \eta_{\tau}$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle &= \langle [\xi - i\eta][\xi_{\tau} + i\eta_{\tau}] \rangle = \\ &= \langle (\xi\xi_{\tau} + \eta\eta_{\tau} - i\eta\xi_{\tau} + i\eta_{\tau}\xi) \rangle = 2[B_{\xi}(\tau) + iB_{\xi\eta}(\tau)]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Скориставшись тепер спектральними розкладами (6.38) і (6.44), отримаємо

$$B_{\zeta}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) [\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau] d\omega = 4 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.49)$$

З іншого боку, за визначенням енергетичний спектр аналітичного сигналу $S_{\zeta}(\omega)$ пов'язаний з $B_{\zeta}(\tau)$ загальним співвідношенням (6.9):

$$B_{\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.50)$$

Із порівняння (6.49) і (6.50) випливає, що:

$$S_{\zeta} = \begin{cases} 4S_{\xi}, & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.51)$$

Окрім (6.47) можна було б розглянути ще одну автокореляційну функцію

$$\tilde{B}_\zeta(\tau) = \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle, \quad (6.52)$$

проте прості обчислення свідчать, що вона тотожно дорівнює нулю при будь-яких τ :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\zeta(\tau) &= \langle (\xi + i\eta)(\xi_\tau + i\eta_\tau) \rangle = \\ &= \langle \xi\xi_\tau - \eta\eta_\tau + i\xi\eta_\tau + i\eta\xi_\tau \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

При цьому ми скористалися формулами (6.41) і (6.46).

6.4. Приклади спектральних розподілів

Одна важлива властивість $S_\xi(\omega)$ може бути отримана без конкретизації вигляду $B_\xi(\tau)$ — мова йде про характер зміни $S_\xi(\omega)$ на достатньо низьких частотах ω . Звернемося знову до формули (6.10). Характерні розміри області інтегрування за τ визначаються часом кореляції процесу τ_0 , оскільки при великому часі $B_\xi(\tau)$ швидко спадає до нуля:

$$S_\xi(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.54)$$

Розглянемо у $S_\xi(\omega)$ область гранично низьких частот, коли $\omega\tau_0 \ll 1$. При цьому експоненту у (6.54) можна замінити на одиницю:

$$S_\xi(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B_\xi(\tau) d\tau \approx \frac{B_\xi(0)\tau_0}{\pi} = \frac{\sigma_\xi^2\tau_0}{\pi} = \frac{N}{2} = \text{Const.} \quad (6.55)$$

Таким чином, на низьких частотах спектральна густина $S_\xi(\omega)$ — величина стала ($S_\xi(\omega) \approx N/2$ і незалежна від ω). Схематично графік $S_\xi(\omega)$ показано на рис. 6.3.

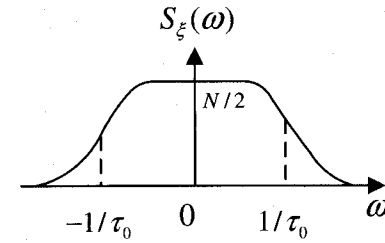


Рис. 6.3

Білий шум

З рис. 6.3 видно, що при зменшенні τ_0 область частот, де $S_\xi(\omega) \approx N/2$, необмежено розширюється. Граничному випадку $\tau_0 \rightarrow 0$ відповідає сталий на всій осі частот ω енергетичний спектр $S_\xi(\omega) = N/2$. Випадковий процес зі сталою спектральною густиною $S_\xi(\omega)$ називається **білим шумом** за аналогією до білого кольору, який утворюється внаслідок змішування електромагнітних хвиль із приблизно однаковою енергією у широкому інтервалі частот. На відміну від білого шуму у „забарвлених” шумів вся енергія зосереджена в одній або кількох спектральних складових (лініях, смугах, вікнах та ін.). З визначення (6.9) випливає вираз для автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$ білого шуму:

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{2} e^{i\omega\tau} d\omega = \pi N \delta(\tau). \quad (6.56)$$

Таким чином, **білий шум** — дельта-корельований процес: значення, яких набуває цей випадковий процес у будь-які близькі моменти, розділені проміжком $\tau \neq 0$, не корелюють між собою.

Звичайно, білий шум не більше, ніж зручна абстракція, хоча б тому, що його дисперсія (тобто середня потужність процесу) дорівнює нескінченності ($\sigma_\xi^2 = B_\xi(0) \sim \delta(0) \rightarrow \infty$). Окрім того, зрозуміло, що неможливе існування часових процесів із нескінченно широкою смугою частот у будь-яких реальних фізичних системах і, зокрема, радіотехнічних колах. Формально можна ввести і коефіцієнт кореляції $K_\xi(\tau)$ білого шуму:

$$K_\xi(\tau) = \frac{B_\xi(\tau)}{B_\xi(0)} = \begin{cases} 1, & \tau = 0; \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (6.57)$$

Вузькосмуговий випадковий процес

Іншим граничним випадком, протилежним до білого шуму, є вузькосмуговий випадковий процес. Його енергетичний спектр відмінний від нуля у вузькій смузі частот навколо центральної (середньої або несучої) частоти ω_0 і внаслідок симетрії $S_\xi(\omega)$ навколо $-\omega_0$, причому виконується нерівність $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ (рис.6.4).

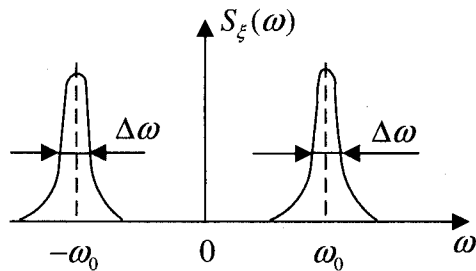


Рис. 6.4

Для обчислення автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$ зручно виходити з формули (6.22). Перейдемо від частоти ω до частоти ν , що

відлічується від несучої ω_0 : $\nu = \omega - \omega_0$. Формула (6.22) при цьому набуває вигляду:

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu) \cos[(\omega_0 + \nu)\tau] d\nu. \quad (6.58)$$

Враховуючи, що за визначенням вузькосмугового процесу функція $S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu)$ відмінна від нуля тільки при $|\nu| \approx |\Delta\omega| \ll \omega_0$, нижню границю $-\omega_0$ в інтегралі (6.58) можна замінити на $-\infty$:

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu) [\cos \omega_0 \tau \cos \nu \tau - \sin \omega_0 \tau \sin \nu \tau] d\nu. \quad (6.59)$$

Введемо спектр низьких частот, так званий „повільний спектр” $\tilde{S}(\nu)$:

$$\tilde{S}(\nu) = S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu) \quad (6.60)$$

і амплітуди синус-косинусових складових

$$a_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) \cos \nu \tau d\nu, \quad (6.61 \text{ а})$$

$$a_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) \sin \nu \tau d\nu. \quad (6.61 \text{ б})$$

З урахуванням зроблених визначень $B_\xi(\tau)$ набуває вигляду

$$B_\xi(\tau) = a_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - a_s(\tau) \sin \omega_0 \tau = A_B(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \Phi_B(\tau)], \quad (6.62)$$

де

$$A_B(\tau) = \sqrt{a_c^2(\tau) + a_s^2(\tau)} \quad (6.63 \text{ а})$$

обвідна кореляційної функції, а

$$\Phi_B(\tau) = \arctg \left[\frac{a_s(\tau)}{a_c(\tau)} \right] - \quad (6.63 \text{ б})$$

повільна фаза автокореляційної функції.

Характерний час τ_0 зміни амплітуди $A_B(\tau)$ і фази $\Phi_B(\tau)$ визначається шириною $\Delta\omega$ повільного спектра ($\tau_0 \approx 1/|\Delta\omega|$) відповідно до співвідношення невизначеності (6.16) і Фур'є-перетворень (6.61), а швидкі осциляції косинуса у (6.62) відбуваються за значно коротші відрізки часу $T = 2\pi/\omega_0 \ll \tau_0$. Таким чином, автокореляційна функція $B_\xi(\tau)$ вузькосмугового випадкового процесу має вигляд модульованого за амплітудою і фазою високочастотного коливання типу зображеного на рис.6.5 (схематичний графік поданий тільки для часу $\tau \geq 0$, цього достатньо, оскільки $B_\xi(\tau)$ — парна функція).

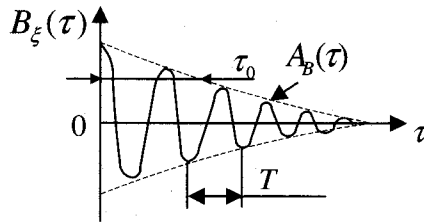


Рис. 6.5

Видно, що як характерний час кореляції τ_0 виступає час суттєвого зменшення амплітуди $A_B(\tau)$. Величина τ_0 обернено пропорційна до ширини смуги $\Delta\omega$, а не до несучої частоти ω_0 : на часах $T = 2\pi/\omega_0$ відбуваються тільки осциляції $B_\xi(\tau)$ без помітного спадання амплітуди коливань $A_B(\tau)$.

Амплітуда і фаза випадкового процесу

Для аналізу вузькосмугових випадкових процесів дуже зручними є поняття амплітуди і фази процесу $\xi(t)$. У загальному випадку (не обов'язково для вузькосмугових процесів) амплітуда $A(t)$ і фаза $\varphi(t)$ довільного дійсного процесу $\xi(t)$ можуть бути введені як модуль і аргумент аналітичного сигналу $\zeta(t)$, що відповідає $\xi(t)$:

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t) \equiv A(t)e^{i\varphi(t)}. \quad (6.64)$$

Переконаємося в тому, що введені подібним чином амплітуди і фази узгоджуються з тими самими уявленнями, які вкладаються в них у курсі теорії коливань або теоретичних основ радіотехніки. Звичайно під вузькосмуговим процесом (не обов'язково випадковим) розуміють функцію виду:

$$\xi(t) = A(t) \cos \varphi(t), \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t), \quad (6.65)$$

де $A(t)$ і $\Phi(t)$ є повільнішими функціями часу, ніж осциляції косинуса з періодом $T = 2\pi/\omega_0$. Увівши до розгляду характерні часи $\tau_{A,\Phi}$ змін амплітуди $A(t)$ і фази $\Phi(t)$, умову їхньої повільності можна сформулювати як

$$\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right| \approx \frac{1}{\tau_A} \ll \omega_0; \quad \left| \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dt} \right| \approx \frac{1}{\tau_\Phi} \ll \omega_0. \quad (6.66)$$

Величину $\Phi(t)$ називають „повільною фазою” на відміну від швидкої або просто фази $\varphi(t)$.

Застосовуючи перетворення Гільберта (6.37 в), зіставимо (6.65) спряжений з ним процес $\eta(t)$. З урахуванням нерівностей (6.66) обчислення інтеграла (6.37 в) приводить до такого результату:

$$\eta(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \Phi(t)). \quad (6.67)$$

Видно, що для вузькосмугового процесу перетворення Гільберта еквівалентне до диференціювання (6.65) за t , наступного ділення отриманого результату на $-\omega_0$ і відкидання доданків, малих у міру виконання нерівностей (6.66).

Аналітичний сигнал $\zeta(t)$, відповідно, має вигляд

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t) = A(t)e^{i[\omega_0 t + \Phi(t)]}. \quad (6.68)$$

Таким чином,

$$A(t) = |\zeta(t)| = \sqrt{\xi(t)^2 + \eta(t)^2}, \quad (6.69)$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t) = \arg \zeta(t) = \arctg \frac{\eta(t)}{\xi(t)}. \quad (6.70)$$

Якщо $\xi(t)$ випадковий процес, то очевидно, що $A(t)$ і $\Phi(t)$ також є випадковими функціями часу. В реальних умовах, як правило, доводиться мати справу не з функціями $\xi(t)$, які швидко осцилюють, а з повільними — амплітудою $A(t)$ і фазою $\Phi(t)$. Виникає природне запитання: як пов'язані статистичні характеристики швидкого процесу $\xi(t)$ з параметрами флуктуацій $A(t)$ і $\Phi(t)$? Якщо априорі відомо, що $\xi(t)$ — нормальний випадковий процес, то спряжений з ним $\eta(t)$, будучи пов'язаний із $\xi(t)$ лінійним перетворенням (6.37 в), також є нормальним, причому ці процеси мають однакові автокореляційні функції (6.41) і у збіжні моменти часу не корелюють (6.45). Як впливає з (6.69), $A(t)$ — довжина вектора, що має декартові компоненти $\xi(t)$ і $\eta(t)$ відповідно. Задачу про визначення функції розподілу ймовірності довжини випадкового вектора з нормальними некорельованими компонентами було розв'язано у § 4: якщо $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, то $W(A)$ є розподіл Релея (див. (4.82)), а фаза $\Phi(t)$ розподілена рівномірно (див. (4.84)).

6.5. Комплексна обвідна аналітичного сигналу

Амплітуду $A(t)$ часто називають обвідною процесу $\zeta(t)$. Під **комплексною обвідною** розуміють функцію

$$E(t) = A(t)e^{i\Phi(t)}. \quad (6.71)$$

Аналітичний сигнал (6.68) при цьому записується у вигляді

$$\zeta(t) = E(t)e^{i\omega_0 t}. \quad (6.72)$$

Для визначення характеру часових флуктуацій $A(t)$, $\Phi(t)$ і $E(t)$ необхідно, принаймні, виразити їх автокореляційні функції через автокореляційну функцію (або енергетичний спектр) процесу $\xi(t)$. Запишемо процес $\xi(t)$, заданий формулою (6.65), у вигляді суми двох квадратурних компонент:

$$\xi(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (6.73)$$

де

$$\begin{aligned} A_c(t) &= A(t) \cos \Phi(t) = \operatorname{Re} E(t), \\ A_s(t) &= A(t) \sin \Phi(t) = \operatorname{Im} E(t). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Аналогічне подання має місце і для спряженого (за Гільбертом) процесу

$$\eta(t) = A_c(t) \sin \omega_0 t + A_s(t) \cos \omega_0 t. \quad (6.75)$$

Виразимо спочатку автокореляційні функції квадратурних компонент через автокореляційну функцію $B_\xi(\tau)$ вихідного процесу $\xi(t)$ і взаємну кореляційну функцію $B_{\xi\eta}(\tau)$. Розв'яжемо рівняння (6.73) і (6.75) відносно A_c і A_s :

$$\begin{aligned} A_c(t) &= \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t, \\ A_s(t) &= -\xi(t) \sin \omega_0 t + \eta(t) \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (6.76)$$

звідки випливає

$$\begin{aligned} \langle A_c(t)A_c(t+\tau) \rangle &= \langle A_s(t)A_s(t+\tau) \rangle = \\ &= B_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau + B_{\xi\eta}(\tau) \sin \omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$\begin{aligned} \langle A_s(t)A_c(t+\tau) \rangle &= -\langle A_c(t)A_s(t+\tau) \rangle = \\ &= B_\xi(\tau) \sin \omega_0 \tau - B_{\xi\eta}(\tau) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Квадратурні компоненти $A_c(t)$ і $A_s(t)$ нормального випадкового процесу $\xi(t)$ також розподілені за нормальним законом, оскільки пов'язані з $\xi(t)$ і $\eta(t)$ лінійними співвідношеннями (6.76). З іншого боку, густина нормального розподілу повністю визначається тільки першими двома моментами, й, отже, у цьому випадку формули (6.77), (6.78) містять у собі всю інформацію про статистику сукупності двох функцій $A_c(t)$ і $A_s(t)$. Перехід же від $A_c(t)$ і $A_s(t)$ до обвідної $A(t)$ і фази процесу $\Phi(t)$ здійснюється за допомогою очевидних формул:

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}; \quad \Phi = \arctg \frac{A_s}{A_c}. \quad (6.79)$$

Використовуючи загальні формули перетворення для переходу від густин розподілів $A_c(t)$ і $A_s(t)$ до $A(t)$ і $\Phi(t)$ (див. § 4), можна обчислити будь-які корелятори амплітуди і фази у рознесені моменти часу. Це досить громіздкі обчислення, і їх можна, наприклад, знайти у монографіях зі статистичної радіотехніки.

Значно простішим виявляється визначення енергетичного спектра флуктуацій комплексної обвідної $E(t)$. Для цього, користуючись поданням (6.72), запишемо автокореляційну функцію аналітичного сигналу:

$$B_\zeta(\tau) = \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle = \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0\tau} = B_E(\tau) e^{i\omega_0\tau}. \quad (6.80)$$

Користуючись спектральним розкладом (6.50) і виразом для енергетичного спектра аналітичного сигналу (6.51), з (6.80) отримуємо:

$$\begin{aligned} B_E(\tau) &= \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle = B_\zeta(\tau) e^{-i\omega_0\tau} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\omega = 4 \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Зробимо у (6.81) заміну змінних $\nu = \omega - \omega_0$ і введемо повільний спектр $\tilde{S}(\nu)$ (6.60):

$$B_E(\tau) = 4 \int_{-\omega_0}^{\infty} S_\xi(\omega_0 + \nu) e^{i\nu\tau} d\nu \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu. \quad (6.82 \text{ а})$$

Тут під час заміни нижньої границі $-\omega_0$ на $-\infty$ ми скористалися вузькосмуговістю процесу (подібно до переходу від (6.58) до (6.59)). З іншого боку, згідно з (6.9)

$$B_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu. \quad (6.82 \text{ б})$$

Із порівняння (6.82 б) і (6.82 а) отримуємо, що енергетичний спектр $S_E(\nu)$ флуктуацій комплексної обвідної збігається зі спектром аналітичного сигналу, зсунутим в область низьких частот на величину ω_0 і просто виражається через повільний спектр:

$$S_E(\nu) = S_\zeta(\omega_0 + \nu) = 4S_\xi(\omega_0 + \nu) = 2\tilde{S}(\nu). \quad (6.83)$$

ЗАДАЧІ

1. Стационарний випадковий процес $\xi(t)$ має рівномірну спектральну густину $S_\xi(\omega) = S_0$ в інтервалі частот $\left[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}\right]$ і

$S_\xi(\omega) = 0$ при $|\omega| > \frac{\Omega}{2}$, $\Omega > 0$. Знайти автокореляційну функцію $B_\xi(\tau)$, за допомогою якої перевірити співвідношення невизначеностей.

Розв'язок. Користуючись формулою Вінера-Хінчіна (6.9), знаходимо

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{S_0}{i\tau} e^{i\omega\tau} \Big|_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} =$$

$$= \frac{S_0}{i\tau} \left[e^{\frac{i\Omega\tau}{2}} - e^{-\frac{i\Omega\tau}{2}} \right] = S_0 \Omega \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{(\Omega\tau/2)}.$$

Згідно з визначенням, характерна ширина $\Delta\omega$ енергетичного спектра дорівнює $\Delta\omega = \Omega$. Характерну ж ширину $\Delta\tau$ автокореляційної функції визначимо за першим нулем $\sin(\Omega\tau/2)$: $\Delta\tau = 2\pi/\Omega$. Звідси співвідношення невизначеностей (6.14) записується таким чином:

$$\Delta\tau \Delta\omega = \Omega \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi > 1.$$

2. Знайти автокореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ з нульовим математичним сподіванням і спектральною густиною

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} N/2, & -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1 \quad (\omega < 0); \\ N/2, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (\omega > 0); \\ 0, & \text{при всіх інших значеннях } \omega. \end{cases} \quad (1)$$

Для окремого випадку $\omega_1 = 0$ визначити величину інтервалу $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при якому значення $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ і $\xi_k = \xi(t_k)$ некорельовані.

Розв'язок. За формулою Вінера-Хінчіна (6.9), знаходимо

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = N \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega\tau d\omega = \frac{N}{\tau} (\sin \omega_2\tau - \sin \omega_1\tau) =$$

$$= N(\omega_2 - \omega_1) \frac{\sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}}{\frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}} \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau = \sigma_{\xi_1}^2 \rho_1(\tau) \cos \omega_0\tau. \quad (2)$$

Тут $\sigma_{\xi_1}^2 = N\Delta\omega$; $\rho_1(\tau) = \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}}$; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Для окремого випадку $\omega_1 = 0$ автокореляційна функція (2) набуває вигляду

$$B_\xi(\tau) = \frac{N}{\tau} \sin \omega_2\tau = N\omega_2 \frac{\sin \omega_2\tau}{\omega_2\tau} = \sigma_{\xi_2}^2 \rho_2(\tau), \quad (3)$$

де $\sigma_{\xi_2}^2 = N\omega_2$; $\rho_2(\tau) = \frac{\sin \omega_2\tau}{\omega_2\tau}$.

Інтервал $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при якому значення $\xi_k = \xi(t_k)$ і $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ будуть некорельованими, можна визначити, прирівнявши у (3) до нуля значення нормованої кореляційної функції $\rho_2(\Delta t)$:

$$\frac{\sin \omega_2 \Delta t}{\omega_2 \Delta t} = 0; \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{1}{2f_2}.$$

Тут $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ — верхня гранична частота спектральної густини $S_\xi(\omega)$. За знайденою величиною Δt кількість некорельованих відліків N на інтервалі тривалістю T визначається як $N = T / \Delta t = 2f_2 T$.

§ 7. Лінійні перетворення випадкових процесів

Випадкові процеси, що описують флуктуації реальних сигналів, підлягають різним перетворенням як під час поширення каналами зв'язку, так і безпосередньо у радіотехнічних передавальних і приймальних пристроях. Унаслідок перетворення кожна реалізація $x(t)$ випадкового процесу $\xi(t)$ породжує реалізацію $y(t)$ процесу $\eta(t)$. При цьому властивості $y(t)$ можуть докорінним чином відрізнитися від властивостей вихідного процесу $x(t)$.

Із математичної точки зору будь-яку радіотехнічну систему можна подати формалізованим співвідношенням

$$y(t) = \hat{L}[x(t)], \quad (7.1)$$

де \hat{L} — деякий оператор, що перетворює за заданим законом сигнал на вході системи $x(t)$ у сигнал на виході $y(t)$. Вхідний і вихідний процеси можуть залежати не тільки від часу t , а й від інших параметрів (просторові координати, температура, густина газу та ін.).

За виглядом залежності вихідного процесу від вхідного розрізняють наступні види систем: **безінерційні та інерційні, фізично реалізовані та нереалізовані, лінійні та нелінійні, стаціонарні та нестаціонарні.**

Безінерційною називається система, в якій значення сигналу на виході $y(t)$ у будь-який момент часу t залежить тільки від значення вхідного сигналу $x(t)$ у той самий момент. В **інерційній** системі значення сигналу на виході $y(t)$ у момент t може залежати від значення вхідного сигналу $x(t')$ в попередній період часу $t' \leq t$.

Фізично реалізована система — система, що перетворює тільки попередні і поточні значення вхідного сигналу.

7.1. Математичний опис лінійних систем

Будь-яку радіотехнічну систему можна подати у вигляді сукупності **лінійних і нелінійних** пристроїв і ланок. Лінійні системи описуються лінійними операторами \hat{L} , якими можуть виступати лінійні інтегро-диференціальні рівняння, алгебраїчні тощо. Формально оператор \hat{L} називається лінійним, якщо для нього справджується **принцип суперпозиції**. Зміст цього принципу наступний. Якщо на вхід системи одночасно надходять кілька сигналів $x_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, N$), то на кожен сигнал система відгукується незалежно. Математично цей принцип записується так:

$$y(t) = \hat{L}\left[\sum_{k=1}^N c_k x_k(t)\right] = \sum_{k=1}^N c_k \hat{L}[x_k(t)] = \sum_{k=1}^N c_k y_k(t). \quad (7.2)$$

Тут $y_k(t) = \hat{L}[x_k(t)]$ — відгук системи на вхідний сигнал $x_k(t)$, а c_k — довільні, незалежні від часу коефіцієнти.

Системи, для яких принцип суперпозиції не виконується, називаються **нелінійними**. До цієї групи можна зарахувати такі елементи і пристрої, як обмежувачі, випрямлячі, змішувачі, перетворювачі частоти, модулятори, детектори тощо.

Далі ми розглянемо найпростіший і разом з тим важливий випадок **лінійних інерційних систем**. Нехай на вхід лінійної системи в момент часу $t = \tau$ надходить дельтаподібний імпульс

$x(t) = \delta(t - \tau)$. При цьому згідно з (7.1) на виході системи спостерігатиметься відгук

$$y(t, \tau) = h(t, \tau) = \hat{L}[\delta(t - \tau)], \quad (7.3)$$

який називається **імпульсною перехідною функцією**. За допомогою визначень (7.1) і (7.3) для лінійних систем можна записати наступну фундаментальну формулу:

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{L}[x(t)] = \hat{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \hat{L}[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.4)$$

При написанні цього виразу ми скористалися відомою властивістю δ -функції:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

і поміняли порядок дії двох лінійних операторів \hat{L} і $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau$.

Зауважимо, що якщо лінійна система описується за допомогою відповідних лінійних диференціальних рівнянь, то $h(t, \tau)$ є функцією Гріна, а формула (7.4) — розв'язком деякої крайової задачі.

Таким чином, функцію $y(t)$ можна розглядати як відгук лінійної системи, що характеризується функцією $h(t, \tau)$, на зовнішній вплив $x(\tau)$ (див. рис. 7.1).

Як уже зазначалося, у **фізично реалізованій системі** сигнал на виході $y(t)$ може залежати від значень вхідного сигналу $x(\tau)$ тільки у попередні моменти часу $\tau \leq t$, а поведінка $x(\tau)$ при $\tau > t$

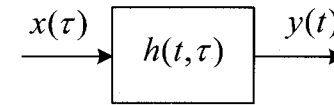


Рис. 7.1

не може вплинути на вихідний сигнал $y(t)$ у момент t . Це є наслідком загального **фізичного принципу причинності**, тому ядро $h(t, \tau)$ інтегрального перетворення (7.4) має володіти наступною властивістю:

$$h(t, \tau) \equiv 0 \text{ при } \tau > t, \quad (7.5)$$

і, отже, завжди лінійне перетворення має вигляд

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (7.6)$$

Серед усіх можливих лінійних систем особливе місце займають **системи зі сталими параметрами**, відгук яких $h(t, \tau)$ залежить тільки від проміжку часу між моментами впливу τ та спостереження t і не залежить від того, у який момент часу τ цей вплив відбувся. Таким чином, для систем зі сталими параметрами $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, а (7.6) набуває вигляду:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Після заміни змінної інтегрування $t' = t - \tau$ маємо

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') x(t - t') dt'. \quad (7.7)$$

До систем з незмінними в часі параметрами належать, наприклад, одинарні і зв'язані контури, багатоланкові фільтри, багатокаскадні підсилювачі, лінії затримки, диференціюючі та інтегруючі ланцюжки та ін.

У тих випадках, коли вивчаються перехідні процеси у лінійних системах, необхідно враховувати момент включення процесу на вході, тобто необхідно вважати $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Тоді вираз (7.6) набуває вигляду

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (7.8)$$

Для систем зі сталими параметрами аналогічно до (7.7) отримуємо

$$y(t) = \int_0^t h(t') x(t-t') dt'. \quad (7.9)$$

7.2. Зв'язок між моментами у лінійних системах

За допомогою вже наведених формул легко встановити зв'язок між **першими моментами** на вході і виході лінійної системи. Так, згідно з (7.6) обчислимо середнє значення сигналу на виході:

$$\langle y(t) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right\rangle = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle x(\tau) \rangle d\tau. \quad (7.10)$$

При усередненні у (7.10) ми врахували, що лінійні операції інтегрування й усереднення за ансамблем реалізацій можна поміняти місцями. Видно, що у загальному випадку, коли параметри лінійної системи змінюються у часі, на виході спостерігатиметься нестационарний процес навіть у тому разі, коли на вхід подається стаціонарний процес. Справді, при $\langle x(\tau) \rangle = \text{Const}$ отримуємо

$$\langle y(t) \rangle = \bar{x} \int_{-\infty}^t h(t, \tau) d\tau = \bar{x} \cdot f(t), \quad (7.11)$$

де $f(t)$ — деяка детермінована функція часу.

Якщо ж параметри лінійної системи не змінюються у часі, то згідно з (7.7) математичні сподівання на вході і на виході пов'язані між собою наступним співвідношенням:

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^{\infty} h(t') \langle x(t-t') \rangle dt' = \bar{x} \int_0^{\infty} h(t') dt' = \text{Const}. \quad (7.12)$$

Незмінність середнього відгуку на виході системи у випадку, що розглядається, є однією з ознак стаціонарності процесу $y(t)$. З іншого боку, якщо у (7.12) ми врахуємо момент увімкнення сигналу на вході, то згідно з (7.9) отримаємо залежність

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^t h(t') \langle x(t-t') \rangle dt' = \bar{x} \int_0^t h(t') dt' \neq \text{Const}, \quad (7.13)$$

яка так само, як і (7.11), свідчить про нестационарність процесу $y(t)$.

Із формули загального вигляду (7.6) безпосередньо випливає зв'язок між **другими моментами** на вході і виході лінійної системи.

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') \langle x(\tau') x(\tau'') \rangle d\tau'' = \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') R_x(\tau', \tau'') d\tau''. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Для стаціонарного (у широкому розумінні) процесу на вході $\langle x(\tau') x(\tau'') \rangle = R_x(\tau' - \tau'')$ і формула (7.14) набуває вигляду

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') R_x(\tau' - \tau'') d\tau''. \quad (7.15)$$

Знову видно, що у лінійних системах зі змінними у часі параметрами на виході спостерігатиметься нестационарний процес

навіть у тому випадку, коли на вхід подається стаціонарний процес. З іншого боку, при незмінних параметрах системи згідно з (7.7) легко показати, що при надходженні на вхід стаціонарного процесу другий момент на виході залежатиме тільки від різниці часу $t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \int_0^\infty h(t') dt' \int_0^\infty h(t'') < x(t_1 - t') x(t_2 - t'') > dt'' = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') R_x(t_1 - t_2 - t' + t'') = R_y(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Таким чином, сталість середнього значення ($\bar{y}(t) = \text{Const}$) і залежність другого моменту тільки від різниці часу ($R_y(t_1, t_2) = R_y(t_1 - t_2)$) свідчить про те, що **при подачі на вхід лінійної системи зі сталими параметрами стаціонарного процесу на виході спостерігатиметься стаціонарний процес**. Зазначимо, що це твердження справджується тільки без урахування у системі перехідних процесів. Справді, на основі виразу (7.9) легко показати, що врахування моменту включення сигналу на вході системи призводить до його нестационарності на виході. Проте, як буде показано у §9, нестационарність $y(t)$, як правило, спостерігається тільки у межах часу, що не перевищує характерного часу τ_0 релаксації системи ($0 \leq t < \tau_0$). При $t \gg \tau_0$ момент увімкнення сигналу на вході системою „забувається”, і вихідний сигнал $y(t)$ перетворюється на стаціонарний.

7.3. Спектральний аналіз лінійних систем з постійними параметрами

Далі ми не зупинятимемося окремо на вивченні перехідних процесів, а розглядатимемо тільки фізично реалізовані системи зі сталими параметрами, для яких зв'язок між виходом і входом визначається за формулою (7.7). Простота опису і дослідження

систем зі сталими параметрами зумовлена тим, що вони дуже просто реагують на гармонійні зовнішні впливи. Так, поклавши у (7.7) $x(t) = e^{i\omega t}$, маємо

$$y(t) = \int_0^\infty h(t') e^{i\omega(t-t')} dt' = K(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (7.17)$$

де введено **передавальну функцію** $K(i\omega)$:

$$K(i\omega) = \int_{-\infty}^\infty h(t') e^{-i\omega t'} dt', \quad h(t') \equiv 0 \text{ при } t' < 0. \quad (7.18)$$

Таким чином, при проходженні гармонійного сигналу $x(t) = e^{i\omega t}$ через лінійну систему зі сталими параметрами на її виході спостерігається також гармонійне коливання $y(t) = K(i\omega) e^{i\omega t}$, амплітуда і фаза якого визначаються значенням модуля і аргументу передавальної функції системи $K(i\omega)$: $K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp\{i \arg K(i\omega)\}$. $|K(i\omega)|$ називають **амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ)** системи, а $\arg K(i\omega)$ – **фазочастотною характеристикою (ФЧХ)**.

Перейдемо тепер від сигналів $x(t)$ і $y(t)$ до їх перетворень Фур'є:

$$x(t) = \int_{-\infty}^\infty C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.19)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^\infty C_y(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.20)$$

Підставляючи (7.19) у (7.7), отримуємо:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_0^{\infty} h(t') e^{-i\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} C_x(\omega) K(i\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Порівнюючи (7.21) з (7.20), отримаємо формулу

$$C_y(\omega) = K(i\omega) C_x(\omega), \quad (7.22)$$

з якої випливає, що **передавальна функція $K(i\omega)$ лінійної системи зі сталими параметрами може бути визначена як відношення Фур'є-перетворень сигналу на виході і на вході системи:**

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)}. \quad (7.23)$$

Нехай на вхід системи надходить стаціонарний випадковий процес $x(t)$ з відомим енергетичним спектром $S_x(\omega)$. Ставиться питання: який процес спостерігатиметься на виході системи? Користуючись (7.22), обчислимо корелятор Фур'є-компонент вихідного сигналу:

$$\begin{aligned} \langle C_y(\omega) C_y^*(\omega') \rangle &= K(i\omega) K^*(i\omega') \langle C_x(\omega) C_x^*(\omega') \rangle = \\ &= K(i\omega) K^*(i\omega') \delta(\omega - \omega') S_x(\omega) = \delta(\omega - \omega') S_y(\omega). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Дельта-кореляція Фур'є-компонент вихідного процесу $\delta(\omega - \omega')$ свідчить про його стаціонарність, а коефіцієнт при $\delta(\omega - \omega')$ у (7.24) — його енергетичний спектр (подібно до (6.8)):

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (7.25)$$

Таким чином, при дії стаціонарного випадкового процесу на лінійну систему зі сталими параметрами енергетичний спектр вихідного сигналу одержується зі спектра вхідного сигналу шляхом його множення на квадрат амплітудно-частотної характеристики. Слід іще раз нагадати, що це твердження справджується тільки для фізично реалізованих систем при нехтуванні перехідними процесами.

7.4. Приклади найпростіших лінійних перетворень

Як найпростіші лінійні перетворення докладно розглянемо диференціювання та інтегрування випадкового процесу.

Диференціювання випадкового процесу. Нехай $y(t)$ — результат проходження випадкового процесу $x(t)$ через диференціюючий пристрій:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (7.26)$$

Провівши усереднення обох частин рівності (7.26), отримуємо:

$$\langle y(t) \rangle = \langle \frac{dx(t)}{dt} \rangle = \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle. \quad (7.27)$$

Для стаціонарних процесів $\langle x(t) \rangle = \text{Const}$, так що $\langle y(t) \rangle = 0$.

Визначимо автокореляційну функцію $B_y(t_1, t_2)$ вихідного процесу, припускаючи для простоти, що $\langle x(t) \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} B_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \langle \frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{dx(t_2)}{dt_2} \rangle = \\ &= \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Враховуючи, що для стаціонарного процесу $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_1 - t_2)$, після введення нової змінної — $\tau = t_1 - t_2$, отримуємо

$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = \frac{d}{d\tau}$, $\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = -\frac{d}{d\tau}$. Унаслідок цього (7.28) набуває вигляду

$$B_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1 - t_2) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau) = B_y(\tau). \quad (7.29)$$

Знайдемо взаємну кореляційну функцію стаціонарного процесу і його похідної:

$$\begin{aligned} B_{xy}(t_1, t_2) &= \langle x(t_1)y(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_2} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} B_x(t_1 - t_2) = -\frac{d}{d\tau} B_x(\tau) = B_{xy}(\tau). \end{aligned} \quad (7.30)$$

У §6 показано, що функція $B_x(\tau)$ — парна, і може бути подана у вигляді інтеграла за додатними частотами (див. (6.22)):

$$B_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Продиференціювавши цей вираз за τ , отримуємо спектральне подання взаємної кореляційної функції:

$$B_{xy}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \omega S_x(\omega) \sin \omega d\omega. \quad (7.31)$$

Звідси випливає, що, по-перше, $B_{xy}(\tau)$ є непарною функцією, і, по-друге, при $t_1 = t_2 = t$ ($\tau = 0$) взаємна кореляційна функція завжди дорівнює 0, тобто у збіжні моменти часу $x(t)$ і $y(t)$ не корелюють між собою:

$$\langle x(t)y(t) \rangle = B_{xy}(0) = -\frac{d}{d\tau} B_x(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (7.32)$$

Підставляючи у (7.26) як $x(t)$ гармонійне коливання $x(t) = e^{i\omega t}$, легко визначити за (7.23) передавальну функцію $K(i\omega)$ диференціюючого пристрою:

$$K(i\omega) = i\omega. \quad (7.33)$$

Отже, енергетичні спектри процесу $S_x(\omega)$ і його похідної $S_y(\omega)$ пов'язані простим співвідношенням (див. (7.25)):

$$S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \quad (7.34)$$

Цю формулу можна отримати і безпосередньо з (7.29), якщо перейти від кореляційних функцій до їх енергетичних спектрів за формулою Вінера-Хінчіна (6.9). З одного боку, згідно з формулою (7.29) маємо:

$$B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

З іншого ж боку, безпосереднє подання $B_y(\tau)$ дає

$$B_y(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Порівнюючи між собою праві частини цих формул, приходимо знову до (7.34).

Інтегрування випадкового процесу. У прикладеннях досить часто доводиться вивчати статистичні характеристики інтеграла від стаціонарного процесу $x(t)$:

$$y(t) = \int_0^t x(t') dt'. \quad (7.35)$$

Видно, що загалом випадковий процес $y(t)$ нестационарний. Дійсно, обчисливши математичне сподівання на виході інтегруючого оператора, отримаємо

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^t \langle x(t') \rangle dt' = \bar{x}t. \quad (7.36)$$

Проте в деяких випадках процес нагромадження $y(t)$ можна розглядати як стаціонарний. Сформулюємо наступну задачу. Які умови має задовольняти стаціонарний процес $x(t)$ на вході інтегруючого пристрою, щоб вихідний процес $y(t)$ можна було вважати стаціонарним (у крайньому разі, у широкому розумінні)?

Насамперед, згідно з (7.36) ми повинні вимагати виконання умови $\langle x(t) \rangle = 0$. З іншого боку, використавши спектральне подання вхідного сигналу (6.1), перепишемо формулу (7.35) у такому вигляді

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t'} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) d\omega \int_0^t e^{i\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (7.37)$$

За допомогою (7.37) обчислимо тепер середній квадрат вихідного сигналу:

$$\begin{aligned} \langle y^2(t) \rangle &= \left\langle \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} d\omega \right\}^2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_x(\omega') C_x^*(\omega) \rangle \frac{e^{i\omega' t} - 1}{i\omega'} \cdot \frac{e^{-i\omega'' t} - 1}{-i\omega''} d\omega' d\omega'' = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Для отримання цього виразу ми використали формулу (6.8) для корелятора $\langle C_x(\omega') C_x^*(\omega'') \rangle$ Фур'є-компонент стаціонарного процесу.

Із розглянутих у попередньому параграфі властивостей енергетичного спектра стаціонарного процесу випливає, що $S_x(\omega)$ —дійсна, додатна і парна функція. Отже, якщо ми подаватимемо $S_x(\omega)$ у вигляді ряду Тейлора в околі точки $\omega = 0$ то в розкладенні будуть наявні тільки члени з парними степенями ω^{2m} ($m = 0, 1, 2, \dots$):

$$S_x(\omega) = S_x(0) + S_x''(0) \frac{\omega^2}{2} + \dots = S_x(0) + \omega^2 \tilde{S}_x(\omega). \quad (7.39)$$

Тут уведено деяку нову, скінченну в нулі, парну функцію $\tilde{S}_x(\omega)$. Підставляючи тепер це подання у формулу (7.38), знаходимо:

$$\langle y^2(t) \rangle = 2S_x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} d\omega + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) (1 - \cos \omega t) d\omega \quad (7.40)$$

перший інтеграл у (7.40) легко обчислюється, і дорівнює

$$2S_x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} d\omega = S_x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} d\omega = 2\pi S_x(0) t.$$

Другий інтеграл є сумою двох складових, одна з яких дорівнює деякій константі

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) d\omega = \text{Const},$$

а при обчисленні другої, скориставшись поданням $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ і замінюючи в інтегралі з $e^{-i\omega t}$ змінну $\omega \rightarrow -\omega$, отримаємо

$$-2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) \cos \omega t d\omega = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.41)$$

Інтеграл у цьому виразі можна розглядати як частину контурного інтеграла від комплексної функції

$$f(z) = \tilde{S}_x(z) e^{izt},$$

що обчислюється на комплексній площині $z = \omega + i\theta$ уздовж замкненого контуру C , який повністю лежить у верхній півплощині і складається з інтервалу $(-R, R)$ дійсної осі ($\text{Re } z = \omega$) і дуги кола C_R радіуса $|z| = R$:

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(\omega) d\omega + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Потім, згідно з лемою Жордана, спрямовуємо радіус кола до нескінченості ($R \rightarrow \infty$). При цьому інтеграл за C_R обертається на ноль, а інтеграл, що залишився за дійсною віссю ($\text{Re } z = \omega$), дорівнює сумі лишків, котрі є у верхній напівплощині. Унаслідок цього ми доходимо висновку, що складова (7.41) приводиться до вигляду експоненціально згасаючих у часі t величин. Таким чином, середній квадрат вихідного процесу може подаватися так:

$$\langle y^2(t) \rangle = 2\pi S_x(0)t + \text{Const} + \quad (7.42)$$

+ експоненціально згасаючі члени.

Зрозуміло, що другою умовою стаціонарності вихідного процесу має бути вимога (див. 6.11 б):

$$S_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) d\tau = 0. \quad (7.43)$$

Дійсно, при виконанні рівності (7.43) для досить великих часів спостереження, коли закінчуються всі перехідні процеси у лінійній

системі $\langle y^2(t) \rangle = \text{Const}$, і процес інтегрування $y(t)$ можна вважати стаціонарним (у крайньому випадку, в широкому розумінні). У протилежному випадку, коли $S_x(0) \neq 0$, на виході інтегруючого пристрою спостерігатиметься процес, який буде дифузно зростати $\langle y^2(t) \rangle \sim t$.

Розглянемо тепер питання про визначення енергетичного спектра на виході інтегруючого пристрою. Припустимо, що всі умови стаціонарності процесу $y(t)$ виконані. У цьому разі передаточну функцію розглядуваної лінійної системи легко визначати із таких формальних роздумів. Оскільки $dy/dx = x(t)$, то надаючи у наведених для диференціального оператора формулах перепозначення $y \leftrightarrow x$ отримаємо:

$$K(i\omega) = \frac{1}{i\omega}; \quad S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\omega^2}. \quad (7.44)$$

Зазначимо, що при інтегруванні енергетичний спектр $S_y(\omega)$ збідається у області високих частот у порівнянні з $S_x(\omega)$, тоді як при диференціюванні навпаки, усуваються низькочастотні складові у спектрі за рахунок множника ω^2 в (7.34).

Формально формули (7.44) можна використовувати і для знаходження енергетичних спектрів нестаціонарних вихідних процесів, для яких $S_x(0) \neq 0$. З деякими особливостями спектрального аналізу таких процесів ми ознайомимося далі (див. §10).

7.5. Перетворення випадкових процесів у радіотехнічних колах

Перетворення випадкових процесів у електричних колах описується, як правило, лінійними інтегро-диференціальними

рівняннями, що очевидним способом узагальнюють закон Ома для постійних струмів. Для аналізу стаціонарних або нестаціонарних режимів роботи лінійних радіотехнічних систем часто використовують апарат диференціальних рівнянь. Так, для неперервної (аналогової) системи достатньо загальним є лінійне диференціальне рівняння n -го порядку:

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} y(t) + a_0(t) y(t) = \\ = b_m(t) \frac{d^m}{dt^m} x(t) + \dots + b_1(t) \frac{d}{dt} x(t) + b_0(t) x(t), \end{aligned} \quad (7.45)$$

де $a_k(t)$ ($k=0,1,\dots,n$) і $b_i(t)$ ($i=0,1,\dots,m$) — відомі, неперервні на деякому часовому інтервалі, функції. Для цього рівняння мають вказуватися початкові умови

$$y(0), \quad dy(0)/dt, \quad \dots \quad dy^{n-1}(0)/dt^{n-1}.$$

Увівши оператор диференціювання $p = d/dt$ і поліноми-оператори

$$\begin{aligned} A_n(p,t) &= \sum_{k=0}^n a_k(t) p^k, \\ B_m(p,t) &= \sum_{i=0}^m b_i(t) p^i, \end{aligned} \quad (7.46)$$

степеня n і m відповідно, вихідне рівняння (7.45) можна записати у наступній компактній операторній формі:

$$A_n(p,t) y(t) = B_m(p,t) x(t). \quad (7.47)$$

Із (7.47) формально випливає рівність, що визначає сигнал на виході системи у явному вигляді

$$y(t) = \frac{B_m(p,t)}{A_n(p,t)} x(t) = \hat{L}x(t). \quad (7.48)$$

Уведена тут величина

$$\hat{L} = \frac{B_m(p,t)}{A_n(p,t)} \quad (7.49)$$

називається лінійним диференціальним оператором системи. Для доведення його лінійності розглянемо виконання умови (7.2).

Нехай на вхід системи, описаної рівнянням (7.47), надходять сигнали $x_1(t)$ або $x_2(t)$. Позначимо через $y_{1,2}(t)$ відповідні відгуки системи на кожен із сигналів окремо:

$$\begin{aligned} A_n(p,t) y_1(t) &= B_m(p,t) x_1(t), \\ A_n(p,t) y_2(t) &= B_m(p,t) x_2(t). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Покажемо тепер, що відгук системи на вхідний сигнал, який має вигляд

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad (7.51)$$

де $c_{1,2}$ — довільні константи, дорівнює

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \quad (7.52)$$

Дійсно, з одного боку, для вхідного сигналу (7.51) права частина рівняння (7.47) подається у вигляді суми двох складових:

$$B_m(p,t) x(t) = c_1 B_m(p,t) x_1(t) + c_2 B_m(p,t) x_2(t). \quad (7.53)$$

З іншого боку, диференціюючи k разів рівність (7.52) і помножуючи праві і ліві частини на коефіцієнти $a_k(t)$, отримуємо

$$a_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k} = c_1 a_k(t) \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} + c_2 a_k(t) \frac{d^k y_2(t)}{dt^k}. \quad (7.54)$$

Підсумувавши (7.54) за всіма значеннями $k = 0, 1, 2, \dots, n$, приходимо до наступного співвідношення:

$$A_n(p, t) y(t) = c_1 A_n(p, t) y_1(t) + c_2 A_n(p, t) y_2(t). \quad (7.55)$$

Враховуючи тепер визначення (7.50) і (7.51), отримуємо

$$A_n(p, t) y(t) = c_1 B_m(p, t) x_1(t) + c_2 B_m(p, t) x_2(t) = B_m(p, t) x(t). \quad (7.56)$$

Таким чином для системи, що описується рівнянням (7.47), виконується принцип суперпозиції

$$A_n(p, t) [c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)] = B_m(p, t) [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)]$$

і, отже, система і відповідний диференціальний оператор \hat{L} лінійні.

Якщо оператор \hat{L} побудований, то математичні сподівання і кореляційні функції на вході і на виході пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= \langle y(t) \rangle = \hat{L}(p, t) \langle x(t) \rangle = \hat{L}(p, t) m_x(t), \\ B_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \hat{L}(p, t_1) \hat{L}(p, t_2) \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \\ &= \hat{L}(p, t_1) \hat{L}(p, t_2) B_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Як **приклад** розглянемо перетворення випадкової напруги $x(t)$ у деяких найпростіших радіотехнічних колах.

1. Проаналізуємо спочатку роботу **інтегруючого кола**, схема якого наведена на рис. 7.2.

Позначимо через $I(t)$ струм, що тече у колі під дією випадкової ЕРС $x(t)$.

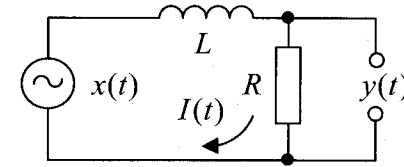


Рис. 7.2

Легко бачити, що процес $y(t)$, який нас цікавить, на виході системи пропорційний до струму: $y(t) = RI(t)$, для визначення якого маємо закон Кірхгофа

$$L \frac{dI}{dt} + RI = x(t). \quad (7.58)$$

Перейшовши у (7.58) до Фур'є-компонент і ввівши позначення $\tau_0 = L/R$, отримуємо

$$i\omega L C_I(\omega) + R C_I(\omega) = (i\omega \tau_0 + 1) C_y(\omega) = C_x(\omega), \quad (7.59)$$

звідки випливає:

$$C_y(\omega) = \frac{1}{i\omega \tau_0 + 1} C_x(\omega). \quad (7.60)$$

Таким чином, передавальна функція кола, що розглядається, має вигляд

$$K(i\omega) = \frac{1}{i\omega \tau_0 + 1}, \quad (7.61)$$

і, отже, енергетичні спектри вхідного і вихідного процесів пов'язані між собою відношенням

$$S_y(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.62)$$

На достатньо високих частотах, коли $\omega \gg 1/\tau_0$, з (7.62) отримуємо

$$S_y(\omega) \approx \frac{1}{\omega^2 \tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.63)$$

Порівнюючи (7.63) з (7.44), бачимо, що дійсно, при $\omega \gg 1/\tau_0$ перетворення сигналу у колі, зображеному на рис. 7.2, відбувається так само, як і при його інтегруванні.

Якщо як $x(t)$ виступає білий шум – випадковий процес зі сталою спектральною густиною

$$S_x(\omega) = \frac{N}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

то згідно з (7.62) на виході кола, що розглядається, енергетичний спектр дорівнює

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2(1 + \omega^2 \tau_0^2)}. \quad (7.64)$$

Схематично поведінку $S_y(\omega)$ показано на рис. 7.3.

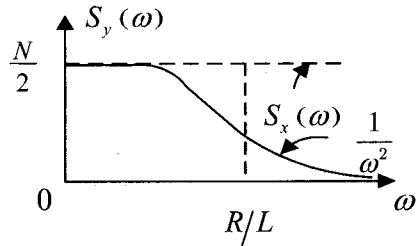


Рис. 7.3

Видно, що при проходженні білого шуму через інтегруюче коло спектр сигналу обрізається на частотах $|\omega| > 1/\tau_0$. Іншими словами, відбувається фільтрація високих частот, а низькі частоти $|\omega| < 1/\tau_0$, як видно з (7.64) і рис. 7.3, проходять через коло без спотворень:

$$S_y(\omega) \approx \frac{N}{2} = S_x(\omega) \text{ при } |\omega| \ll 1/\tau_0.$$

У §6 ми бачили, що білий шум — δ -корельований процес з автокореляційною функцією вигляду

$$B_x(\tau) = N\pi\delta(\tau). \quad (7.65)$$

Скориставшись формулою Вінера-Хінчіна (6.9), знайдемо за (7.64) вигляд автокореляційної функції вихідного процесу $y(t)$:

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Отриманий інтеграл так само, як і в попередньому пункті цього параграфа, можна розглядати як частину контурного інтеграла від комплексної функції $f(z) = e^{i\tau z} / (1 + \tau_0^2 z^2)$, що обчислюється на комплексній площині $z = \omega + i\theta$ вздовж замкнутого контуру C , котрий складається з інтервалу $(-R, R)$ дійсної осі і дуги C_R кола $|z| = R$ у верхній півплощині, якщо $\tau > 0$, або в нижній, якщо $\tau < 0$.

Далі, згідно з лемою Жордана, спрямуємо радіус кола у нескінченність ($R \rightarrow \infty$). Інтеграл за C_R при цьому обертається на нуль, а інтеграл по дійсній осі, що залишився, дорівнює лишку в точці $z = 1/i\tau_0$ для $\tau > 0$ або $z = -1/i\tau_0$ для $\tau < 0$. У результаті отримаємо

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{\pi N}{2\tau_0} e^{-|\tau|/\tau_0}. \quad (7.66)$$

Видно, що білий шум $x(t)$ після проходження інтегруючого кола перетворюється на випадковий процес зі скінченним часом кореляції $\tau_0 \approx L/R$, який збігається зі сталою часу кола. Цей результат можна було б передбачити заздалегідь, виходячи з того, що відповідно до рис. 7.3 спектр $S_y(\omega)$ має ширину $\Delta\omega \approx 1/\tau_0 = R/L$, а в силу співвідношення невизначеностей $\Delta\omega\tau_0 \approx 1$.

Дисперсія процесу $x(t)$ на виході кола виявляється скінченною величиною.

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \frac{\pi N}{2\tau_0}, \quad (7.67)$$

у той час, коли вихідний процес $x(t)$ як білий шум має нескінченну дисперсію.

Розглянемо тепер питання про перетворення сигналів найпростішим електричним колом, зображеним на рис. 7.2 в іншій постановці, що відповідає розв'язку **оберненої задачі**. Нехай нам відомі параметри кола (R і L) і автокореляційна функція $B_y(\tau)$ процесу $y(t)$ на виході кола, а вхідний процес $x(t)$ є невідомим. Як знайти його автокореляційну функцію — $B_x(\tau)$? Можна, звичайно, скористатися формулою (7.62) і виразити невідомий спектр $S_x(\omega)$ через $S_y(\omega)$:

$$S_x(\omega) = (1 + \omega^2 \tau_0^2) S_y(\omega), \quad (7.68)$$

а після цього перейти від енергетичних спектрів до кореляційних функцій:

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2 \tau_0^2) S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= B_y(\tau) - \tau_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} B_y(\tau). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Проте цей самий результат можна отримати і простішим шляхом — безпосередньо з рівняння (7.58), яке з урахуванням того, що $I(t) = y(t)/R$ і $\tau_0 = L/R$, ми перепишемо у вигляді

$$\tau_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t). \quad (7.70)$$

Складемо автокореляційну функцію $B_x(\tau)$:

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \left\langle \left[\tau_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \right] \left[\tau_0 \frac{dy(t+\tau)}{dt} + y(t+\tau) \right] \right\rangle = \\ &= \tau_0^2 \left\langle \frac{dy(t)}{dt} \frac{dy(t+\tau)}{dt} \right\rangle + \tau_0 \left\langle \frac{dy(t)}{dt} y(t+\tau) \right\rangle + \tau_0 \left\langle y(t) \frac{dy(t+\tau)}{dt} \right\rangle + \\ &\quad + \langle y(t)y(t+\tau) \rangle = -\tau_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} B_y(\tau) + B_y(\tau). \end{aligned} \quad (7.71)$$

При усередненні ми скористалися формулами (7.29) і (7.30) та врахували, що $\langle y'y'_\tau \rangle = -\langle yy'_\tau \rangle$.

2. Розглянемо ще один простий приклад, пов'язаний з проходженням сигналу $x(t)$ через показане на рис. 7.4 **диференціююче RC-коло**,

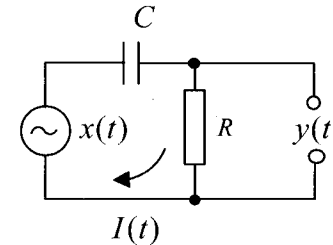


Рис. 7.4

для якого закон Кірхгофа має вигляд

$$RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' = x(t). \quad (7.72)$$

Увівши позначення $y(t) = RI(t)$ і $\tau_0 = RC$ (стала часу кола), перепишемо (7.72) у такому вигляді:

$$y(t) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^t y(t') dt' = x(t). \quad (7.73)$$

Після переходу до Фур'є-компонент маємо

$$\left(1 + \frac{1}{i\omega\tau_0}\right) C_y(\omega) = C_x(\omega), \quad (7.74)$$

звідки знаходимо передавальну функцію

$$K(i\omega) = \left(1 + \frac{1}{i\omega\tau_0}\right)^{-1} = \frac{i\omega\tau_0}{1 + i\omega\tau_0}. \quad (7.75)$$

Видно, що на частотах, коли $\omega\tau_0 \ll 1$, передавальна функція з точністю до сталого множника збігається з передавальною функцією диференціюючого пристрою: $K(i\omega) \approx i\omega\tau_0$. Згідно з формулою (7.25) енергетичний спектр на виході системи рівний

$$S_y(\omega) = \frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.76)$$

Якщо на вхід подається білий шум ($S_x(\omega) = N/2$), то на виході RC кола отримуємо

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2} \frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2}. \quad (7.77)$$

Схематичний графік $S_y(\omega)$ показано на рис. 7.5.

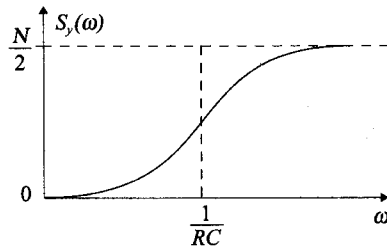


Рис. 7.5

Видно, що RC-коло є фільтром низьких частот при $|\omega| < 1/\tau_0$, а вищі частоти $|\omega| \gg 1/\tau_0$ проходять через коло без спотворень.

Аналогічно до (7.66), скориставшись формулою Вінера-Хінчіна (6.9) за (7.77), знайдемо автокореляційну функцію вихідного процесу $y(t)$:

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2\tau_0^2 + 1 - 1}{1 + \omega^2\tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= N\pi\delta(\tau) - \frac{\pi N}{2\tau_0} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Під час виведення цієї формули ми скористалися визначенням δ -функції і отриманим раніше результатом (7.66).

3. Насамкінець розглянемо одинарний коливальний контур, утворений послідовним з'єднанням індуктивності L , опору R і ємності C (рис. 7.6).

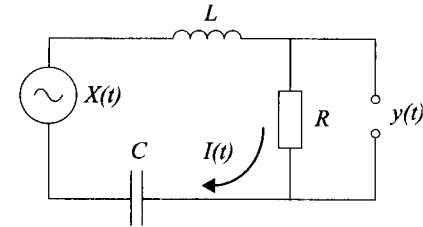


Рис. 7.6

Для визначення процесу $y(t) = RI(t)$ на виході системи знову запишемо закон Кірхгофа

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = x(t). \quad (7.79)$$

Переходячи до Фур'є-компонент, отримаємо

$$\begin{aligned} i\omega LC_I(\omega) + RC_I(\omega) + \frac{1}{i\omega C} C_I(\omega) = \\ = \left[1 + i\omega\tau_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] C_y(\omega) = C_x(\omega). \end{aligned} \quad (7.80)$$

Тут уведено наступні позначення: $C_y(\omega) = RC_I(\omega)$, $\tau_0 = L/R$ – стала часу кола, що розглядається, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота контуру. З (7.80) випливає:

$$K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau_0 \left(1 - \omega_0^2/\omega^2 \right)}, \quad (7.81)$$

$$|K(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (7.82)$$

Отже, енергетичні спектри на вході і виході кола LRC , що розглядається, пов'язані між собою співвідношенням

$$S_y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} S_x(\omega). \quad (7.83)$$

Якщо на вхід системи подається білий шум ($S_x(\omega) = N/2$), то на виході маємо

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (7.84)$$

На рисунках 7.7 і 7.8 подано графіки залежності $|K(i\omega)|^2$ і $S_y(\omega)$ для значень параметрів $\omega_0\tau_0 \gg 1$. Видно, що крива $|K(i\omega)|^2$ має різкий максимум на резонансній частоті контуру $\omega = \omega_0$ і характерну ширину $\Delta\omega_f$, яку наближено можна оцінити як $\Delta\omega_f \approx 1/\tau_0 \ll \omega_0$ (рис.7.7).

Скінченність ширини спектра коливального контуру призводить до того, що з усього неперервного спектра білого шуму на виході залишається тільки вузька смуга частот, що визначається смугою пропускання фільтра (рис. 7.8).

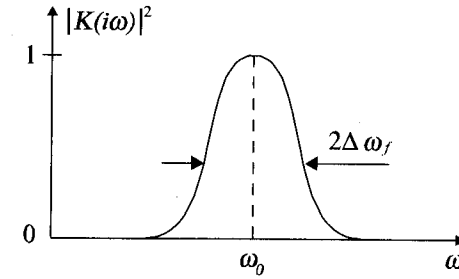


Рис. 7.7

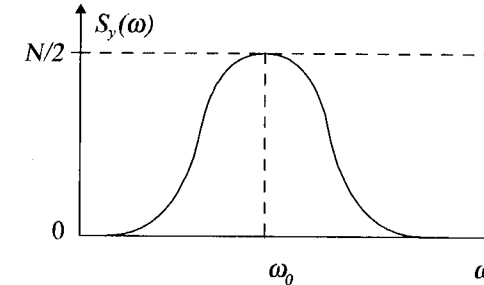


Рис. 7.8

Згідно з формулою Вінера-Хінчіна (6.9), за заданим спектром (7.84) обчислимо тепер автокореляційну функцію вихідного процесу $y(t)$:

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} e^{i\omega\tau} d\omega = N \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \cos \omega\tau}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} d\omega. \quad (7.85)$$

При $\omega_0\tau_0 \gg 1$ характерна ширина $\Delta\omega_f$ кривої на рис. 7.7 набагато менша за резонансну частоту ω_0 : $\Delta\omega_f \ll \omega_0$. У цьому випадку ми маємо справу з вузькосмуговим процесом, для якого обчислення

(7.85) можна виконати, провівши деякі спрощення. Так, згідно з визначенням $\omega = \omega_0 + \nu$ перейдемо до інтегрування за повільною частотою ν . При цьому спростимо підінтегральний вираз

$$\frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 4\omega_0^2 \tau_0^2 \nu^2} = \frac{1}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} \quad (7.86)$$

і виконаємо інтегрування за ν у нескінченних межах. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &\approx N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\tau(\omega_0 + \nu)]}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = N \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \nu \tau}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = \\ &= N \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu \tau}}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = \frac{\pi N}{2\tau_0} \cos \omega_0 \tau e^{-|\tau|/2\tau_0}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Під час обчислення інтегралу ми скористалися отриманим раніше результатом (7.66).

ЗАДАЧІ

1. На вхід ідеального диференціюючого кола діє стаціонарний гауссівський випадковий процес $x(t)$ з нульовим математичним сподіванням $m_x = 0$ і кореляційною функцією

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Визначити кореляційну функцію процесу $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ на виході.

Розв'язок. Згідно з (7.29) для випадку, що розглядається, знаходимо

$$B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau).$$

Автокореляційні функції $B_x(\tau)$ і $B_y(\tau)$ парні, тому достатньо розглянути тільки значення $\tau \geq 0$, а після цього у парний спосіб продовжити остаточний результат у ділянку $\tau < 0$. Так, для $\tau \geq 0$ маємо

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha\tau),$$

$$\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} = -\alpha^2 \sigma_x^2 \tau e^{-\alpha\tau},$$

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= -\frac{d}{d\tau} \left[\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} \right] = \alpha^2 \sigma_x^2 \frac{d}{d\tau} (\tau e^{-\alpha\tau}) = \\ &= \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau). \end{aligned}$$

Продовжуючи тепер отриманий вираз для $B_y(\tau)$ в область від'ємних значень τ , остаточно отримаємо

$$B_y(\tau) = \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

2. Автокореляційна функція стаціонарного процесу $x(t)$ з нульовим середнім має вигляд $B_x(\tau) = e^{-\alpha^2 \tau^2}$. Знайти автокореляційну функцію процесу $y(t)$ на виході системи, що перетворює сигнал за законом

$$y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1)$$

Розв'язок. Один із можливих шляхів розв'язку задач такого типу зводиться до алгоритму $B_x(\tau) \rightarrow S_x(\omega) \rightarrow S_y(\omega) \rightarrow B_y(\tau)$. Реалізація цього шляху розв'язку зводиться до наступного. Згідно з (6.10) спочатку знаходимо енергетичний спектр вхідного сигналу

$$\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\tau^2 - i\omega\tau} d\tau = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha\tau + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} d\tau = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}}{2\alpha\sqrt{\pi}}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Далі, переходячи у рівняння (1) до Фур'є-компонент

$$C_y(\omega) = C_x(\omega)(1 + i\omega), \quad (3)$$

знаходимо передавальну функцію лінійної системи: $K(i\omega) = 1 + i\omega$. Звідси, згідно з (7.25) енергетичний спектр на виході системи визначається як

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{(1 + \omega^2)}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \quad (4)$$

За відомим спектром $S_y(\omega)$ за допомогою формули Вінера-Хінчіна знаходимо вихідну автокореляційну функцію:

$$\begin{aligned}
B_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2) e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} e^{i\omega\tau} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega \right] = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2). \quad (5)
\end{aligned}$$

Перший інтеграл зводиться до інтеграла Пуассона

$$I_1 = 2\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Під час обчислення другого інтеграла необхідно перейти до диференціювання за параметром τ :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} I_1 = \\
&= -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d^2}{d\tau^2} e^{-\alpha^2\tau^2} = -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d}{d\tau} \left[(-2\alpha^2\tau) e^{-\alpha^2\tau^2} \right] = \\
&= 4\alpha^3\sqrt{\pi} \left[e^{-\alpha^2\tau^2} + \tau(-2\alpha^2\tau) e^{-\alpha^2\tau^2} \right] = 4\alpha^3\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} (1 - 2\alpha^2\tau^2).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
B_y(\tau) &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[2\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} + 4\alpha^3\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} (1 - 2\alpha^2\tau^2) \right] = \\
&= e^{-\alpha^2\tau^2} \left[1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2) \right]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Можливий і інший, простіший шлях розв'язку. Вхідний і вихідний сигнали у лінійній системі пов'язані за допомогою лінійного оператора \hat{L} .

$$y(t) = \hat{L}x(t), \quad (7)$$

де згідно з (1) $\hat{L} = 1 + \partial/\partial t$. Для заданого оператора зв'язок між математичними сподіваннями і автокореляційними функціями на вході і виході системи визначається згідно з формулами (7.57):

$$m_y(t) = \hat{L}m_x(t), \quad (8)$$

$$B_y(t_1, t_2) = \hat{L}_1 \hat{L}_2 B_x(t_1, t_2). \quad (9)$$

Тут $\hat{L}_{1,2} = 1 + \partial/\partial t_{1,2}$. Враховуючи, що для стаціонарного вхідного процесу, що розглядається, $m_x(t) = \text{Const} = 0$ і $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_2 - t_1)$, отримуємо $m_y(t) \equiv 0$ і

$$B_y(t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_1}\right) \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_2}\right) B_x(t_2 - t_1). \quad (10)$$

Переходячи у цьому виразі до нової змінної $\tau = t_2 - t_1$, знаходимо $\frac{\partial B_x}{\partial t_1} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -\frac{dB_x}{d\tau}$; $\frac{\partial B_x}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau}$. У результаті (10) набуває наступного вигляду:

$$B_y(\tau) = \left(1 - \frac{d}{d\tau}\right) \left(1 + \frac{d}{d\tau}\right) B_x(\tau) = \left(1 - \frac{d^2}{d\tau^2}\right) B_x(\tau). \quad (11)$$

Підставляючи в (11) заданий вигляд $B_x(\tau)$, приходимо до виразу

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= e^{-\alpha^2 \tau^2} - \frac{d}{d\tau} \left[e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2\tau \right] = \\ &= e^{-\alpha^2 \tau^2} - e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2\tau(-\alpha^2) \cdot 2\tau - e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2 = \\ &= e^{-\alpha^2 \tau^2} [1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2 \tau^2)], \end{aligned}$$

який збігається зі знайденим раніше (6) іншим способом.

3. На вхід диференціюючого кола (рис. 7.9) діє випадкова напруга $x(t)$, що є обмеженим за частотою білим шумом, спектральна густина якого

$$S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases} \quad (1)$$

Знайти дисперсію σ_y^2 сигналу на виході кола.

Розв'язок. Для визначення комплексної передавальної функції кола, що розглядається, запишемо закон Кірхгофа

$$C_x(\omega) = C_I(\omega) \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) = \frac{1 + i\omega CR}{i\omega C} C_I(\omega). \quad (2)$$

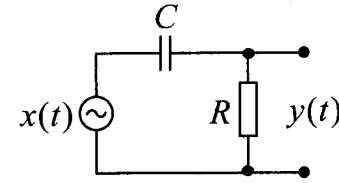


Рис. 7.9

Увівши у (2) позначення $C_y(\omega) = RC_I(\omega)$, отримаємо

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)} = \frac{i\omega CR}{1 + i\omega CR}; \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (3)$$

Тепер з урахуванням (7.25) для спектральної густини на виході системи маємо вираз

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases} \quad (4)$$

Скориставшись (6.22), отримуємо дисперсію сигналу на виході.

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= B_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = N \int_0^{\omega_1} \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} d\omega = \\ &= N \left(\int_0^{\omega_1} d\omega - \int_0^{\omega_1} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) = N \left(\omega_1 - \frac{1}{RC} \operatorname{arctg} \omega_1 RC \right). \end{aligned}$$

4. Стаціонарний випадковий процес $x(t)$ з кореляційною функцією $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ діє на фільтр нижніх частот, амплітудно-частотна характеристика якого наведена на рис. 7.10. Знайти дисперсію σ_y^2 вихідної напруги $y(t)$.

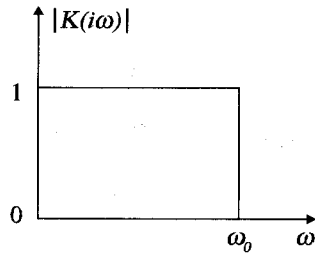


Рис. 7.10

Розв'язок. Спектральну густину на вході фільтра згідно з (6.10) запишемо як

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau + i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Останній інтеграл обчислено з використанням перетворення Лапласа. У випадку, що розглядається, оригіналу $f(\tau) = \cos \omega\tau$ відповідає зображення $F(\alpha) = \alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$.

За заданою передавальною функцією системи (рис. 7.10) і знайденим енергетичним спектром вхідного сигналу (1) згідно з формулою (7.25) визначаємо спектральну густину вихідного сигналу:

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)} = \begin{cases} 2 \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases} \quad (2)$$

Дисперсія напруги на виході фільтра згідно з (6.22) дорівнює

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \int_0^{\infty} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_0} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\pi} \arctg \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

Аналогічно розв'язуються всі задачі, пов'язані з дією на лінійні системи стаціонарних процесів і, зокрема, білого шуму (див., наприклад, наступну, складнішу задачу).

5. На вхід кола, зображеного на рис. 7.11, діє випадкова напруга $x(t)$, що є білим шумом, зі спектральною густиною $S_x(\omega) = N/2$, $-\infty < \omega < \infty$. Знайти спектральну густину, кореляційну функцію і дисперсію вихідної напруги $y(t)$.

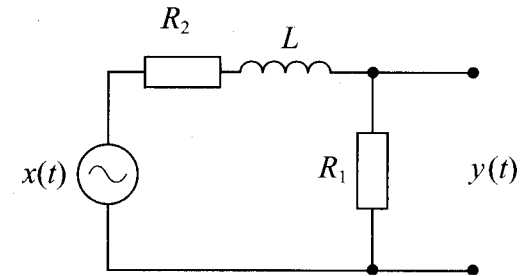


Рис. 7.11

Розв'язок. Із закону Кірхгофа, записаного для Фур'є-компонент кола, що розглядається, маємо

$$C_x(\omega) = (R + i\omega L) C_I(\omega),$$

$$R = R_1 + R_2. \quad (1)$$

Після введення позначення $C_y(\omega) = R_1 C_I(\omega)$ визначимо комплексну передавальну функцію лінійної системи

$$K(i\omega) = \frac{R_1}{R + i\omega L}. \quad (2)$$

Із (7.25) і цього виразу випливає співвідношення для шуканої спектральної густини на виході системи

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{R_1^2 N}{2(R^2 + L^2 \omega^2)}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (3)$$

Згідно з формулою Вінера-Хінчіна (6.10) знаходимо кореляційну функцію вхідного сигналу

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = R_1^2 N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{R^2 + L^2 \omega^2} d\omega. \quad (4)$$

Інтеграл у (4) візьмемо за допомогою лишків. Перейдемо у комплексну площину $z = \omega + i\theta$ і розглянемо допоміжний контурний інтеграл

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N}{L^2} \oint_C \frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} dz = \frac{R_1^2 N}{L^2} I(a, \tau). \quad (5)$$

Тут $a = \frac{R_1 + R_2}{L} > 0$ а $I(a, \tau)$ — інтеграл по замкнутому контуру C , який для $\tau > 0$ розташований повністю у верхній півплощині. Особливі точки підінтегральної функції: $z_{1,2} = \pm ia$ — прості полюси, $z_3 = \infty$ — суттєво особлива точка.

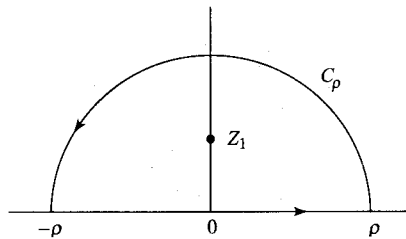


Рис. 7.12

Оскільки підінтегральна функція $\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2}$ при $\tau > 0$ є аналітичною у верхній півплощині, то контур інтегрування C можна довільно деформувати. Оберемо його так, як показано на рис. 7.12: частина контуру — це відрізок дійсної осі $(-\rho < \omega < \rho)$, а решта — півколо C_ρ радіусом ρ . Після цього спрямуємо $\rho \rightarrow \infty$. При цьому згідно з лемою Жордана інтеграл за C_ρ перетворюється на 0 (через експоненціальне спадання підінтегральної функції $\sim e^{-\theta\tau}$), а інтеграл за дійсною віссю, що залишився, дорівнює сумі лишків, що потрапили всередину замкнутого контуру C :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = 2\pi i \left[\text{res}_{z=ia} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) + \text{res}_{z=\infty} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) \right]. \quad (6)$$

Лишок у точці $z = ia$ легко обчислюється як

$$2\pi i \text{res}_{z=ia} \frac{e^{itz}}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \frac{e^{itz_1}}{z_1 - z_2} = 2\pi i \frac{e^{-ta}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ta}. \quad (7)$$

А лишок у точці $z \rightarrow \infty$ дорівнює нулю, оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + a^2} = 0$.

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{a} e^{-a\tau}. \quad (8)$$

З урахуванням (8) після продовження отриманого парним способом результату в область $\tau < 0$ вираз (5) можна записати в остаточному вигляді:

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N \pi}{(R_1 + R_2) L} e^{-\frac{R_1}{L} |\tau|}. \quad (9)$$

Вираз для дисперсії отримаємо з (9), поклавши $\tau = 0$:

$$\sigma_y^2 = \frac{R_1^2 N \pi}{(R_1 + R_2) L}.$$

6. На вхід пропорційно-інтегруючого фільтра (рис. 7.13) надходить стаціонарна випадкова напруга $x(t)$ з нульовим середнім значенням і кореляційною функцією $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha |\tau|}$.

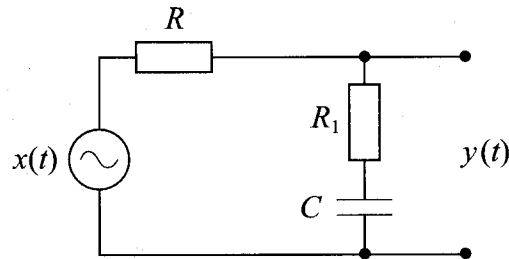


Рис. 7.13

Визначити спектральну густину $S_y(\omega)$, кореляційну функцію $B_y(\tau)$ і дисперсію σ_y^2 напруги $y(t)$ на виході фільтра.

Розв'язок. Передавальна функція знаходиться з закону Кірхгофа для Фур'є-компонент напруги і струму

$$C_x(\omega) = \left(R + R_1 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega),$$

який дає змогу визначити зв'язок між $C_y(\omega)$ і $C_x(\omega)$. Увівши

$$\text{позначення } C_y(\omega) = \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega), \text{ отримаємо}$$

$$C_y(\omega) = \frac{R_1 + \frac{1}{i\omega C}}{R + R_1 + \frac{1}{i\omega C}} C_x(\omega). \quad (1)$$

Таким чином, з (1) маємо

$$K(i\omega) = \frac{1 + i\omega T_1}{1 + i\omega T}, \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (2)$$

де $T = C(R + R_1)$; $T_1 = R_1 C$.

Енергетичний спектр $S_x(\omega)$ вхідного сигналу визначається за заданою автокореляційною функцією $B_x(\tau)$ за допомогою формули Вінера-Хінчіна (6.10):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |\tau| - i\omega \tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha \tau - i\omega \tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha \tau - i\omega \tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega) \tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - i\omega) \tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} \right] = \frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Інтеграли у (3) легко обчислюються з використанням перетворення Лапласа, як це було показано у задачі 4. Таким чином, знаючи передавальну функцію лінійної системи (2) й енергетичний спектр (3) на вході, на виході системи згідно з (7.25), отримаємо

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (4)$$

Кореляційну функцію флуктуацій напруги на виході кола з урахуванням (6.9) і (4) можна записати у такому вигляді:

$$B_y(\tau) = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Тут $F(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2}$. Інтеграл у (5) візьмемо за допомогою лишків, як і в задачі 5. Перейдемо у комплексну площину $z = \omega + i\theta$ і оберемо допоміжний інтеграл від $F(z) = \frac{1}{\alpha^2 + z^2} \cdot \frac{1 + z^2 T_1^2}{1 + z^2 T^2}$ по замкнутому контуру C , розташованому у верхній півплощині, якщо $\tau > 0$ (або у нижній – якщо $\tau < 0$). Підінтегральна функція у цьому інтегралі має наступні особливі точки: $z_{1,2} = \pm i\alpha$, $z_{3,4} = \pm i/T$ – прості полюси при $\alpha \neq 1/T$ і $z_5 = \infty$ – суттєво особлива точка. При цьому для випадку $\tau > 0$ обчислення (5) приводить до наступного результату:

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \cdot 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=i/T} F(z) + \operatorname{res}_{z=i\alpha} F(z) \right] = \\ &= 2\alpha \sigma_x^2 i \left[\frac{1}{T^2} \cdot \frac{1 + T_1^2 (i/T)^2}{2(i/T)} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{(i/T)^2 + \alpha^2} + \frac{1 + T_1^2 (i\alpha)^2}{1 + T^2 (i\alpha)^2} \cdot \frac{e^{-\alpha\tau}}{2i\alpha} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{1 - T_1^2/T^2}{T} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{\alpha^2 - 1/T^2} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 T \left[1 - \frac{T_1^2/T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{\tau}{T}} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Узагальнюючи (6) для випадку всіх довільних значень, остаточно отримуємо

$$B_y(\tau) = \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1 - T_1^2/T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{|\tau|}{T}} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha|\tau|} \right]. \quad (7)$$

Вираз для дисперсії σ_y^2 отримаємо з (7), поклавши $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1 - T_1^2/T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{T_1^2/T - T}{1 - \alpha^2 T^2} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha(1 - \alpha^2 T^2)} \right] = \alpha \sigma_x^2 \frac{1 - \alpha^2 T_1^2 - \alpha T + \alpha T_1^2/T}{\alpha(1 - \alpha^2 T^2)} = \\ &= \sigma_x^2 \frac{T - \alpha^2 T_1^2 T - \alpha T^2 + \alpha T_1^2}{T(1 - \alpha^2 T^2)} = \sigma_x^2 \frac{T + \alpha T_1^2}{T(1 + \alpha T)}. \quad (8) \end{aligned}$$

§ 8. Сумісна дія сигналу і шуму на лінійну систему

У цьому розділі, користуючись уже розглянутим апаратом перетворення сигналів у лінійних системах, ми розберемо деякі питання, пов'язані з прийомом і обробкою сигналів у присутності шуму. В експериментах часто доводиться мати справу з ситуацією, коли потужність корисного сигналу виявляється подібною або навіть меншою за потужність шуму (кажучи про шум, ми маємо на увазі не тільки шум, що приходить разом з сигналом, а й власний шум приймальної системи). Приймання та обробка сигналу у випадку, що розглядається, стає, по суті, тільки статистичною задачею. У статистичній теорії приймання сигналів на фоні шумів, як правило, виділяють **дві основні групи задач**. До першої належать задачі **виявлення сигналів на фоні шумів**, а до другої – задачі **виділення сигналів із шумів**.

Якщо спектральні криві сигналу і шуму відрізняються, то для розв'язання поставлених задач використовують лінійні вибіркові системи (лінійні фільтри). У цьому випадку задача оптимізації формулюється таким чином: **необхідно підібрати частотну характеристику фільтра так, щоб він усував спектральні**

компоненти шуму й у той же час „підкреслював” спектральні компоненти корисного сигналу. В підсумку постає питання: як вибрати оптимальний фільтр, і як розрахувати його частотну характеристику $K(i\omega)$?

Для відповіді на поставлені питання нам доведеться спочатку провести деякі узагальнення гармонійного аналізу на випадок детермінованих процесів.

8.1. Узагальнений гармонійний аналіз детермінованих процесів

У попередніх розділах ми розглянули основні правила і прийоми гармонійного аналізу випадкових процесів, а також їх перетворення у лінійних системах. При цьому ми визначили автокореляційну функцію $B_\xi(\tau)$, енергетичний спектр $S_\xi(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ і знайшли зв'язок між $B_\xi(\tau)$ і $S_\xi(\omega)$ на вході і на виході лінійної системи. Виявляється, що аналогічні поняття і прийоми можна з успіхом застосовувати і при дослідженні детермінованих процесів, якими є корисні сигнали.

Розглянемо детермінований дійсний процес (сигнал) $S(t)$. Аналогічно до того, як ми це робили для ергодичних процесів (див. §5), введемо поняття середнього значення $\langle S \rangle$:

$$\langle S \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt, \quad (8.1)$$

середньої потужності:

$$P_s = \langle S^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt, \quad (8.2)$$

часової кореляційної функції:

$$B_s(\tau) = \langle S(t) S(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) S(t+\tau) dt \quad (8.3)$$

і енергетичного спектра:

$$S_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8.4)$$

Обернене до (8.4) перетворення має вигляд

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.5)$$

Так само, як і для випадкових процесів, надалі розглядатимемо тільки процеси з нульовим середнім значенням ($\langle S \rangle = 0$) і зі скінченною потужністю ($P_s \neq \infty$). Із формул (8.2), (8.3) і (8.5) випливає вже відомий нам із теорії випадкових процесів зв'язок між середньою потужністю, кореляційною функцією та енергетичним спектром:

$$P_s = \langle S^2(t) \rangle = B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) d\omega. \quad (8.6)$$

Окрім перелічених „статистичних” аналогів, для детермінованих процесів природно користуватися й звичайним поняттям амплітудного Фур'є-спектра сигналу $C_s(\omega)$:

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt, \quad S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.7)$$

За допомогою (8.7) легко визначити зв'язок між повною енергією E_s сигналу і його амплітудним спектром $C_s(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') e^{it(\omega' - \omega'')} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\omega' - \omega'')} = \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') \delta(\omega' - \omega'') = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

Строго кажучи, формули (8.4) і (8.5) потребують, щоб часова кореляційна функція $B_s(\tau)$ і відповідний енергетичний спектр $S_s(\omega)$ були абсолютно інтегрованими функціями (див. коментарі до §6). Проте, використовуючи поняття дельта-функції, у деяких випадках можна розширити область застосування даних формул. Як приклад розглянемо сигнал у вигляді поодинокого гармонійного коливання:

$$S(t) = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (8.9)$$

де A_s — амплітуда, ω_s — частота і φ_s — початкова фаза детермінованого процесу. Згідно з формулами (8.1)÷(8.4) отримаємо наступні вирази для середнього значення, середньої потужності, кореляційної функції й енергетичного спектра:

$$\begin{aligned}
 \langle S \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_s t + \varphi_s) dt = 0, \\
 P_s &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega_s t + \varphi_s) dt = \frac{A_s^2}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_s(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_s t + \varphi_s) \cos(\omega_s t + \omega_s \tau + \varphi_s) dt = \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau, \quad (8.10) \\
 S_s(\omega) &= \frac{A_s^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_s \tau e^{i\omega \tau} d\tau = \frac{A_s^2}{4} [\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)].
 \end{aligned}$$

8.2. Проходження гармонійного сигналу і шуму через лінійну систему зі сталими параметрами

Розглянемо таку задачу. Нехай на вхід лінійної системи (рис. 8.1) з незмінними у часі параметрами (стаціонарний фільтр) діє сума $x(t)$ корисного сигналу $S(t)$ і шуму $\xi(t)$:

$$x(t) = S(t) + \xi(t). \quad (8.11)$$

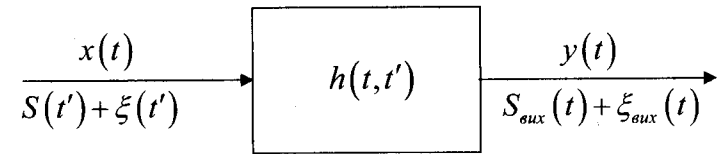


Рис. 8.1

Тут і далі припускається, що сигнал і завада є стаціонарними, мають нульові середні ($\langle S(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \rangle = 0$) і задаються своїми кореляційними функціями $B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle$, $B_\xi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$ або відповідними енергетичними Фур'є-спектрами $S_s(\omega)$, $S_\xi(\omega)$. Оскільки фільтр за умовою є лінійною системою, то на виході ми також матимемо суму коливань:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t')x(t-t')dt' = \int_0^{\infty} h(t')[S(t-t') + \xi(t-t')]dt' =$$

$$= S_{\text{вих}}(t) + \xi_{\text{вих}}(t), \quad (8.12)$$

яка складається з перетворених корисного сигналу:

$$S_{\text{вих}}(t) = \int_0^{\infty} h(t')S(t-t')dt' \quad (8.13)$$

і шуму

$$\xi_{\text{вих}}(t) = \int_0^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt'. \quad (8.14)$$

Ставиться наступна задача: **які умови мають задовольняти характеристики фільтра, щоб на виході системи забезпечити максимальне відношення сигнал/шум?**

Розглянемо спочатку випадок, коли вхідний сигнал є поодиноким гармонійним коливанням (8.9). Уявивши

$$\cos(\omega_s t + \varphi_s) = \frac{1}{2} \left[e^{i(\omega_s t + \varphi_s)} + e^{-i(\omega_s t + \varphi_s)} \right], \text{ згідно з формулою (8.13)}$$

отримаємо наступне значення корисного сигналу на виході:

$$S_{\text{вих}}(t) = \int_0^{\infty} h(t')S(t-t')dt' = \frac{A_s}{2} \int_0^{\infty} h(t') \left\{ e^{i[\omega_s(t-t') + \varphi_s]} + e^{-i[\omega_s(t-t') + \varphi_s]} \right\} dt' =$$

$$= \frac{A_s}{2} \left\{ e^{i(\omega_s t + \varphi_s)} K(i\omega_s) + e^{-i(\omega_s t + \varphi_s)} K^*(i\omega_s) \right\} =$$

$$= A_s |K(i\omega_s)| \cos[\omega_s t + \varphi_s + \arg K(i\omega_s)]. \quad (8.15)$$

Під час виведення (8.15) ми користувалися визначенням (7.18) комплексної передавальної функції $K(i\omega)$ і її поданням

$K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp\{i \arg K(i\omega)\}$. Видно, що після проходження через лінійну систему вигляд гармонійного сигналу не змінюється. Відбувається тільки зміна амплітуди у $|K(i\omega_s)|$ разів, і з'являється додаткове набігання фази $\arg K(i\omega_s)$.

Визначимо тепер середні потужності сигналів на вході і виході лінійної системи. Для детермінованих процесів $S(t)$ і $S_{\text{вих}}(t)$ згідно з (8.10) і (8.15) отримаємо

$$P_{s \text{ вх}} = \frac{A_s^2}{2}, \quad P_{s \text{ вих}} = \frac{A_s^2}{2} |K(i\omega_s)|^2. \quad (8.16)$$

Для випадкових процесів $\xi(t)$ і $\xi_{\text{вих}}(t)$ середні потужності визначимо через відповідні енергетичні спектри $S_{\xi}(\omega)$ — на вході і $S_{\xi_{\text{вих}}}(\omega)$ — на виході лінійної системи. При цьому $S_{\xi_{\text{вих}}}(\omega)$ згідно з (7.25) дорівнює

$$S_{\xi_{\text{вих}}}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_{\xi}(\omega). \quad (8.17)$$

Вважаючи далі, що середня потужність шуму визначається дисперсією випадкового процесу згідно з формулою (6.11), отримаємо

$$P_{\xi \text{ вх}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega, \quad (8.18 \text{ а})$$

$$P_{\xi_{\text{вих}}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_{\text{вих}}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (8.18 \text{ б})$$

Під відношенням сигнал/шум розуміють відношення відповідних середніх потужностей. Користуючись формулами (8.16) і (8.18), запишемо наступні співвідношення:

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{вх} = \frac{A_s^2}{2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}, \quad (8.19)$$

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{вих} = \frac{A_s^2 |K(i\omega_s)|^2}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega}, \quad (8.20)$$

$$\frac{(P_s/P_\xi)_{вих}}{(P_s/P_\xi)_{вх}} = \frac{|K(i\omega_s)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega}. \quad (8.21)$$

Вираз (8.20) показує, які вимоги має задовольняти лінійна система (фільтр), щоб виконувалася умова $(P_s/P_\xi)_{вих} \gg 1$. По-перше, частота сигналу має бути близькою до резонансної частоти фільтра ω_0 ($\omega_s \approx \omega_0$). У цьому випадку $|K(i\omega_s)|^2$ досягає максимальних значень (див. рис. 7.7). По-друге, частотна характеристика $|K(i\omega)|^2$ має бути значно вужчою за характерну ширину $\Delta\omega_\xi$ спектра шуму $S_\xi(\omega)$: чим з більшим запасом виконуватиметься нерівність

$$\Delta\omega_f \ll \Delta\omega_\xi, \quad (8.22)$$

тим меншим буде знаменник. Через $\Delta\omega_f$ ми позначили характерну ширину резонансної кривої фільтра. Це твердження легко пояснюється за допомогою рис. 7.7.

При виконанні умови (8.22) можна вважати, що спектральна густина шуму $S_\xi(\omega)$ у межах резонансної кривої є наближено сталою ($S_\xi(\omega) \approx S_\xi(\omega_0)$). У цьому випадку

$$P_{\xi вих} = \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega \approx S_\xi(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.23)$$

Зауважимо, що при надходженні на вхід системи білого шуму $S_\xi(\omega_0) = S_\xi(\omega) = N/2 = \text{Const}$ і у формулі (8.23) необхідно писати строго рівність

$$P_{\xi вих} = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.24)$$

З урахуванням викладеного ми отримуємо наступне значення відношення сигнал/шум (8.20) на виході системи:

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{вих} \approx \frac{A_s^2 |K(i\omega_0)|^2}{2S_\xi(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.25)$$

Визначимо характерну ширину $\Delta\omega_f$ спектральної кривої фільтра $|K(i\omega)|^2$ як

$$2\Delta\omega_f = \frac{1}{|K(i\omega_0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.26)$$

Окрім цього, згідно з (8.18) і з урахуванням нерівності (8.22), обчислимо потужність шуму, що припадає на інтервал частот $\omega_0 - \Delta\omega_f \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega_f$:

$$\Delta P_{\xi \text{ вх}} = \int_{\omega_0 - \Delta \omega_f}^{\omega_0 + \Delta \omega_f} S_{\xi \text{ вх}}(\omega) d\omega \approx 2S_{\xi \text{ вх}}(\omega_0) \Delta \omega_f. \quad (8.27)$$

З допомогою введених визначень $\Delta \omega_f$ і $\Delta P_{\xi \text{ вх}}$ формула (8.25) набуває такого вигляду:

$$\left(\frac{P_s}{P_{\xi}} \right)_{\text{вих}} \approx \frac{A_s^2/2}{\Delta P_{\xi \text{ вх}}}. \quad (8.28)$$

Таким чином, **перерахунок відношення сигнал/шум зі входу на вихід лінійної системи зводиться просто до заміни повної потужності $P_{\xi \text{ вх}}$ на потужність $\Delta P_{\xi \text{ вх}}$.**

Аналогічно до (8.26) для шуму зі скінченною смугою також можна ввести характерну ширину $\Delta \omega_{\xi}$ спектральної кривої $S_{\xi}(\omega)$:

$$2\Delta \omega_{\xi} = \frac{1}{S_{\xi}(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (8.29)$$

З урахуванням визначень (8.26) і (8.29) формула (8.21) набуває остаточного і простого вигляду

$$\left(\frac{P_s}{P_{\xi}} \right)_{\text{вих}} = \frac{|K(i\omega_s)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega} \approx \frac{|K(i\omega_0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega}{S_{\xi}(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega} = \frac{\Delta \omega_{\xi}}{\Delta \omega_f}. \quad (8.30)$$

Отримана оцінка дає змогу оптимальним чином вибирати смугу фільтра $\Delta \omega_f$ за величиною $\left(\frac{P_s}{P_{\xi}} \right)_{\text{вих}}$, що вимагається, за

умови, що нам відомі значення $\left(\frac{P_s}{P_{\xi}} \right)_{\text{вх}}$ і смуга частот вхідного шуму $\Delta \omega_{\xi}$.

8.3. Оптимальний лінійний фільтр для сигналів скінченної тривалості

Розглянемо тепер більш реальний випадок, коли на вхід лінійної системи разом з шумом $\xi(t)$ подається сигнал $S(t)$ скінченної тривалості і з заданим амплітудним Фур'є-спектром $C_s(\omega)$. У процесі проходження корисного сигналу через лінійну систему його спектр перетворюється за законом (див. (7.22)):

$$C_{s \text{ вих}}(\omega) = C_s(\omega) K(i\omega). \quad (8.31)$$

У часовому поданні сигнал на виході має вигляд

$$S_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{s \text{ вих}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8.32)$$

а його миттєва потужність дорівнює

$$P_{s \text{ вих}}(t) = S_{\text{вих}}^2(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}^2. \quad (8.33)$$

З іншого боку, середньоквадратичне значення потужності шуму на виході системи далі визначається формулою (8.18). Звідси ми знаходимо відношення миттєвої потужності сигналу до середньої потужності шуму на виході системи:

$$r(t) = \left[\frac{P_s(t)}{P_\xi} \right]_{\text{вих}} = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.34)$$

У суто математичному плані поставлена нами задача зводиться до відшукування такого виду передавальної функції $K(i\omega)$, при якому $r(t)$ досягає найбільшого значення. Цю задачу було вперше розв'язано Нормом у 1943 р. методами варіаційного числення. Пізніше, у 1946 р. Ван-Флек і Д. Мідлтон незалежно один від одного розв'язали цю саму задачу за допомогою нерівності Коші-Буняковського. Коротка схема побудови розв'язання зводиться до наступного.

Нехай $t = t_0$ — деякий фіксований момент часу, коли сигнал на виході лінійної системи має відповідні значення амплітуди $S_{\text{вих}}(t_0)$ і миттєвої потужності $P_s(t_0)$:

$$S_{\text{вих}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega, \quad (8.35)$$

$$P_s(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right\}^2. \quad (8.36)$$

На основі нерівності Коші-Буняковського миттєву інтенсивність на виході можна оцінити так:

$$P_s(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right\}^2 \leq$$

$$\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega \right\}. \quad (8.37)$$

При цьому

$$r(t_0) \leq \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega \right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.38)$$

Рівність у (8.37), тобто досягнення $P_{s \text{ вих}}(t_0)$ і, отже, $r(t_0)$ максимальних значень є можливим тільки у тому випадку, якщо

$$K(i\omega) = \alpha C_s^*(\omega) e^{-i\omega t_0}, \quad (8.39)$$

де α — довільний сталий коефіцієнт, а

$$C_s^*(\omega) = C_s(-\omega) \quad (8.40)$$

є комплексно спряжений Фур'є-спектр вхідного сигналу.

Скориставшись отриманою раніше оцінкою (8.23) для середньої потужності шуму на виході системи, запишемо вираз для максимального відношення сигнал/шум у момент часу $t = t_0$:

$$r_{\text{max}}(t_0) = \frac{1}{S_\xi(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.41)$$

Враховуючи далі визначення повної енергії E_s корисного сигналу (8.8) на вході системи, отримаємо

$$r_{\text{max}}(t_0) = \frac{E_s}{2\pi S_\xi(\omega_0)}. \quad (8.42)$$

Згідно з (8.42) величина $r_{\max}(t_0)$ не залежить від t_0 , якщо передавальна функція $K(i\omega)$ фільтра вибирається для кожного нового значення t_0 відповідно до формули (8.39). Іншими словами, **ми можемо забезпечити отримання максимального відношення сигнал/шум, що визначається формулою (8.42) у будь-який заздалегідь заданий момент часу t_0 , якщо оберемо передавальну функцію фільтра у вигляді (8.39)**. Видно, що частотна характеристика (8.39) близька до спектра вхідного сигналу (тому оптимальний фільтр називають також **узгодженим фільтром**). Слід, проте, зауважити, що до (8.39) входить не сама спектральна амплітуда вхідного сигналу, а її комплексно спряжене значення.

Згідно з (8.32) сигнал на виході оптимального фільтра у довільний момент часу t дорівнює

$$S_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (8.43)$$

При $t = t_0$ сигнал $S_{\text{вих}}(t)$ набуває максимального значення

$$S_{\text{вих max}}(t_0) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega = \frac{\alpha E_s}{2\pi} \quad (8.44)$$

(ми скористалися визначенням повної енергії (8.8) вхідного сигналу).

З іншого боку, з (8.43) видно, що сигнал на виході оптимального фільтра має вигляд симетричного відносно $t = t_0$ імпульсу, хоч форма імпульсу вхідного сигналу може бути довільною. Таким чином, **під час проходження сигналу через узгоджений з ним фільтр його форма змінюється**.

8.4. Виділення сигналу з шуму.

Рівняння Вінера-Хопфа

У класичній постановці задача виділення сигналу з шуму, вперше сформульована Н. Вінером ще у 1941 р., полягає у наступному. Нехай на вхід лінійної системи з незмінними у часі параметрами надходить сума (8.11) сигналу $S(t)$ і шуму $\xi(t)$ (див. рис. 8.1). Часто процес $S(t)$, що несе інформацію, є промодульованим людською мовою радіосигналом. Такий процес наближено можна розглядати як стаціонарний шум з нульовим середнім значенням ($\langle S(t) \rangle = 0$). З іншого боку, як і раніше, припускати, що завада $\xi(t)$, яка спотворює сигнал, також є стаціонарним шумом з нульовим середнім значенням ($\langle \xi(t) \rangle = 0$). Таким чином, на вхід лінійної системи подається два випадкових стаціонарних процеси:

$$x(t) = S(t) + \xi(t), \quad (8.45)$$

причому перший $S(t)$ ми вважаємо сигналом, а другий $\xi(t)$ — завадою. Припускаємо, що нам відомі відповідні Фур'є-подання $C_s(\omega)$ і $C_\xi(\omega)$ процесів (див. (6.2) і (8.7)), задані їхні кореляційні функції $B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle$, $B_\xi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$, а також відповідні енергетичні спектри $S_s(\omega)$ і $S_\xi(\omega)$. Якщо процеси $S(t)$ і $\xi(t)$ між собою корелюють, то припускається, що відома їхня взаємна кореляційна функція $B_{s\xi}(\tau) = \langle S(t)\xi(t+\tau) \rangle$ і енергетичний спектр $S_{s\xi}(\omega)$, що їй відповідає.

Задачею лінійного фільтра крім очищення сигналу від завад може бути також якесь його лінійне перетворення (підсилення,

диференціювання, інтегрування тощо). Тому у загальному випадку на виході фільтра за відсутності завад потрібно отримати деяку функцію часу $F(t)$, пов'язану з сигналом $S(t)$, заданим лінійним перетворенням:

$$F(t) = \hat{L}\{S(t)\}, \quad (8.46)$$

де \hat{L} — деякий лінійний оператор. Наприклад:

$$F(t) = \frac{dS(t)}{dt}, \text{ якщо потрібне диференціювання;}$$

$$F(t) = \int_0^t S(t') dt', \text{ якщо потрібне інтегрування;}$$

$$F(t) = S(t - \Delta t), \text{ якщо потрібен зсув у часі на величину } \Delta t;$$

$$F(t) = A \cdot S(t), \text{ якщо потрібне підсилення в } A \text{ разів;}$$

$$F(t) = S(t), \text{ якщо потрібне просто відтворення сигналу.}$$

Коливання $y(t)$ на виході лінійної системи пов'язане з коливанням на вході вже відомим нам співвідношенням (8.12). Потрібне ж коливання на виході фільтра — $F(t)$. Запишемо різницю

$$\varepsilon(t) = y(t) - F(t), \quad (8.47)$$

яка має зміст миттєвої похибки відтворення $F(t)$. Середній квадрат цієї похибки дорівнює

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \langle [y(t) - F(t)]^2 \rangle = \left\langle \left[\int_0^\infty dt' h(t') x(t-t') \right]^2 \right\rangle - \\ &- 2 \langle F(t) \int_0^\infty dt' h(t') x(t-t') \rangle + \langle F^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Перетворюючи квадрат першого доданка справа у подвійний інтеграл, вносячи далі у другому доданку множник $F(t)$ як незалежний від змінної інтегрування під знак інтеграла, отримаємо

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') \langle x(t-t') x(t-t'') \rangle - \\ &- 2 \int_0^\infty dt' h(t') \langle F(t) x(t-t') \rangle + \langle F^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Враховуючи стаціонарність усіх процесів, що розглядаються, введемо до розгляду наступні кореляційні функції:

$$\begin{aligned} B_x(t_1, t_2) &= \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = B_x(t_1 - t_2), \\ B_{Fx}(t_1, t_2) &= \langle F(t_1) x(t_2) \rangle = B_{Fx}(t_1 - t_2), \\ B_F(t_1, t_2) &= \langle F(t_1) F(t_2) \rangle = B_F(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (8.50)$$

Скориставшись далі зв'язком між середньою потужністю процесу $F(t)$ і його кореляційною функцією $B_F(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$: $\langle F^2(t) \rangle = B_F(0)$, перепишемо (8.49) так:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \\ &- 2 \int_0^\infty dt' h(t') B_{xF}(t') + B_F(0). \end{aligned} \quad (8.51)$$

Оптимальним вважається такий фільтр, для якого величина $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ є мінімальною. Отже, математична задача зводиться до відшукування такого виду імпульсної перехідної

функції $h(t)$, при якій величина $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ є мінімальною. Ця задача була розв'язана Вінером методами варіаційного аналізу. Він показав, що шукана характеристика $h(t)$ визначається з розв'язку наступного інтегрального рівняння:

$$\int_0^{\infty} B_x(t-t') h(t') dt' = B_{xF}(t), \quad (8.52)$$

яке пізніше отримало назву **рівняння Вінера-Хопфа**.

Доведення (8.52) проведемо шляхом наступних простих міркувань. Нехай оптимальний фільтр з імпульсною передавальною функцією $h(t)$ забезпечує мінімум середньоквадратичної похибки $\mathcal{E} = \overline{\varepsilon^2}$. Розглянемо тепер новий фільтр з імпульсною передавальною функцією у вигляді

$$\tilde{h}(t) = h(t) + \gamma g(t), \quad (8.53)$$

де $h(t)$ — як і раніше імпульсна передавальна функція оптимального фільтра, $g(t)$ — імпульсна передавальна функція деякого довільного фізично здійсненого фільтра, а γ — довільний дійсний параметр. Замінюючи у формулах (8.48)–(8.51) $h(t)$ на $\tilde{h}(t)$, запишемо середньоквадратичну похибку $\tilde{\mathcal{E}} = \langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle$ відтворення сигналу $F(t)$ на виході нової лінійної системи:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} = \langle \tilde{\varepsilon}^2(t) \rangle = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' \tilde{h}(t') \tilde{h}(t'') B_x(t' - t'') - \\ & - 2 \int_0^{\infty} dt' \tilde{h}(t') B_{xF}(t') + B_F(0). \end{aligned} \quad (8.54)$$

Підставивши тепер сюди вираз (8.53), отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' [h(t') + \gamma g(t')] [h(t'') + \gamma g(t'')] B_x(t' - t'') - \\ & - 2 \int_0^{\infty} dt' [h(t') + \gamma g(t')] B_{xF}(t') + B_F(0). \end{aligned} \quad (8.55)$$

Розкривши дужки під знаком інтеграла і враховуючи визначення середньоквадратичної похибки \mathcal{E} оптимального фільтра (8.51), приходимо до наступного виразу:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} = 2\gamma \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' g(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \int_0^{\infty} dt' g(t') B_{xF}(t') \right\} + \\ + \gamma^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' g(t') g(t'') B_x(t' - t''). \end{aligned} \quad (8.56)$$

Під час виведення (8.56) ми врахували, що для стаціонарного процесу $x(t)$ кореляційна функція B_x парна, отже,

$$B_x(t' - t'') = B_x(t'' - t').$$

За визначенням, оптимальний фільтр мінімізує похибку на виході. А оскільки фільтр з $\tilde{h}(t)$ не є оптимальним, то різниця $\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E}$ у (8.56) має бути невід'ємною ($\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} \geq 0$) для будь-яких фізично реалізованих $g(t)$ і значеннях параметра γ . Неважко довести, що другий доданок у (8.56) є додатною величиною:

$$\gamma^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' g(t') g(t'') B_x(t' - t'') = \gamma^2 \left\langle \int_0^{\infty} dt g(t) x(t) \right\rangle^2 \geq 0. \quad (8.57)$$

Нерівність (8.57) приводить до того, що для виконання умови $\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} \geq 0$ необхідно вимагати, щоб вираз, який міститься у фігурних дужках (8.56), дорівнював нулю:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \int_0^\infty dt' g(t') B_{xF}(t') = 0. \quad (8.58)$$

Справді, якщо вираз (8.58) не дорівнює нулю, то при відповідному виборі величини довільного параметра γ (додатних або від'ємних значень) можна досягти того, що різниця похибок у (8.56) стане від'ємною величиною ($\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} < 0$), а за умовою задачі це неможливо.

Перепишемо (8.58) у наступному вигляді:

$$\int_0^\infty g(t') \left\{ \int_0^\infty B_x(t' - t'') h(t'') dt'' - B_{xF}(t') \right\} dt' = 0. \quad (8.59)$$

Рівність (8.59) може виконуватися при всіх можливих $g(t)$ тільки у випадку, якщо

$$\int_0^\infty B_x(t' - t'') h(t'') dt'' - B_{xF}(t') = 0. \quad (8.60)$$

Таким чином, ми приходимо до рівняння Вінера—Хопфа (8.52), що й потрібно було довести.

Як **приклад** розглянемо випадок, коли вхідний сигнал $S(t)$ і завада $\xi(t)$ є статистично незалежними, а $F(t) = S(t)$ (просте відтворення вхідного сигналу). Згідно з (8.50) знаходимо відповідні кореляційні функції:

$$\begin{aligned} B_x(t_1 - t_2) &= \langle [S(t_1) + \xi(t_1)][S(t_2) + \xi(t_2)] \rangle = B_s(t_1 - t_2) + B_\xi(t_1 - t_2), \\ B_{Fx}(t_1 - t_2) &= \langle S(t_1)[S(t_2) + \xi(t_2)] \rangle = B_s(t_1 - t_2), \\ B_F(t_1 - t_2) &= \langle S(t_1)S(t_2) \rangle = B_s(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

З урахуванням цих подань рівняння Вінера—Хопфа (8.52) набуває вигляду

$$\int_0^\infty [B_s(t - t') + B_\xi(t - t')] h(t') dt' = B_s(t). \quad (8.61)$$

Виконуючи Фур'є-перетворення цього виразу за змінною t , з урахуванням визначення передавальної функції лінійного фільтра (7.18), отримаємо

$$[S_s(\omega) + S_\xi(\omega)] K(i\omega) = S_s(\omega). \quad (8.62)$$

Звідси знаходимо передавальну функцію оптимального фільтра

$$K(i\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_\xi(\omega)}. \quad (8.63)$$

Обчислимо тепер середньоквадратичну похибку $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ відтворення сигналу. Для цього виконаємо Фур'є-перетворення виразу (8.47). Унаслідок цього з урахуванням зв'язку амплітудних спектрів сигналу і шуму на вході і виході лінійної системи отримаємо амплітудний спектр миттєвої похибки відтворення.

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\omega) &= [C_s(\omega) + C_\xi(\omega)] K(i\omega) - C_s(\omega) = \\ &= [K(i\omega) - 1] C_s(\omega) + K(i\omega) C_\xi(\omega). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Згідно з (8.64) кореляційна функція $\langle \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle$ амплітудного спектра дорівнює

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle &= \langle \{ [K(i\omega) - 1] C_s(\omega) + K(i\omega) C_\xi(\omega) \} \times \\ &\times \{ [K(i\omega') - 1]^* C_s^*(\omega') + K^*(i\omega') C_\xi^*(\omega') \} \rangle. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Для стаціонарних процесів $S(t)$ і $\xi(t)$ з урахуванням їхньої некорельованості енергетичні й амплітудні спектри на вході лінійної системи пов'язані наступними співвідношеннями (див. §6):

$$\begin{aligned} \langle C_s(\omega) C_s^*(\omega') \rangle &= S_s(\omega) \delta(\omega - \omega'), \\ \langle C_\xi(\omega) C_\xi^*(\omega') \rangle &= S_\xi(\omega) \delta(\omega - \omega'), \\ \langle C_s(\omega) C_\xi^*(\omega') \rangle &= \langle C_s^*(\omega) C_\xi(\omega) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (8.66)$$

З (8.66) видно, що у правій частині (8.65) в нас стоїть δ -корельований процес. Отже, такий самий процес має бути і в лівій частині рівності (див. §6). Увівши за допомогою співвідношення $\langle \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle = S_\varepsilon(\omega) \delta(\omega - \omega')$ енергетичний спектр $S_\varepsilon(\omega)$ похибки, з (8.65) отримаємо для нього такий вираз:

$$S_\varepsilon(\omega) = |K(i\omega) - 1|^2 S_s(\omega) + |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega). \quad (8.67)$$

За знайденим енергетичним спектром $S_\varepsilon(\omega)$ середньоквадратична похибка вимірювань $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ визначається так:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |K(i\omega) - 1|^2 S_s(\omega) + |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (8.68)$$

Підставляючи сюди знайдену передавальну функцію (8.63) оптимального фільтра, остаточно отримуємо

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega) S_\xi(\omega)}{S_s(\omega) + S_\xi(\omega)} d\omega. \quad (8.69)$$

8.5. Оптимальні фільтри і корелятори

Розглянуті методи виявлення і виділення сигналів особливо ефективні, коли спектри сигналу і шуму суттєво відрізняються. У цьому випадку оптимальні фільтри забезпечують мінімальні похибки виявлення і виділення сигналів. Проте, як уже зазначалося, через те, що енергетичні спектри і кореляційні функції пов'язані між собою через Фур'є-перетворення, суттєві відмінності у спектрах сигналу і шуму, природно, призведуть до відмінностей у їхніх кореляційних функціях. Тому в задачах виявлення і виділення сигналів окрім розглянутих уже методів використовуються і „спряжені за Фур'є” методи, які ґрунтуються на вимірюванні автокореляційних і взаємно-кореляційних функцій. Для пояснення вищесказаного розглянемо знову задачу про виявлення поодинокого гармонійного сигналу (8.9) на фоні стаціонарного шуму $\xi(t)$:

$$x(t) = S(t) + \xi(t) = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) + \xi(t). \quad (8.70)$$

Припускаємо, що сигнал і завада незалежні. Нехай тепер сумарний сигнал $x(t)$ подається на корелятор, показаний на рис.

8.2. На виході корелятора маємо

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \langle x(t) x(t+\tau) \rangle = \langle [S(t) + \xi(t)] [S(t+\tau) + \xi(t+\tau)] \rangle = \\ &= \langle S(t) S(t+\tau) \rangle + \langle S(t) \xi(t+\tau) \rangle + \langle S(t+\tau) \xi(t) \rangle + \\ &\quad + \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Беручи до уваги те, що для незалежних процесів

$$\langle S\xi \rangle = \langle S \rangle \langle \xi \rangle = 0 \quad (\langle S \rangle = \langle \xi \rangle = 0),$$

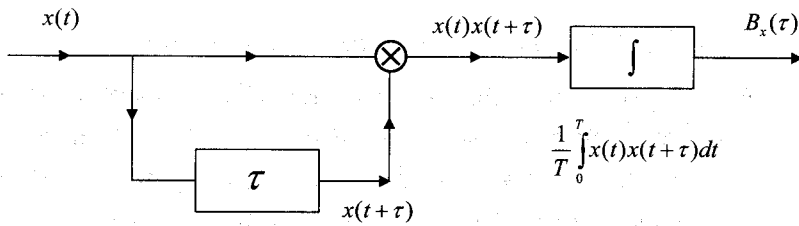


Рис. 8.2

отримаємо

$$B_x(\tau) = B_s(\tau) + B_\xi(\tau) = \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau + B_\xi(\tau). \quad (8.72)$$

При обчисленні $B_s(\tau)$ ми скористалися отриманим раніше результатом (8.10).

Як уже зазначалося в §5, кореляційна функція випадкового процесу $B_\xi(\tau)$ відмінна від нуля тільки для часу τ , що не перевищує характерного часу $\tau = \tau_0$ спадання функції $B_s(\tau)$ (характерний час кореляції). При $\tau \gg \tau_0$ кореляційна функція $B_\xi(\tau)$ є зникаюче малою ($B_\xi \approx 0$) і на виході приладу, що вимірює кореляційну функцію $B_x(\tau)$ сумарного сигналу, ми отримуємо

$$B_x(\tau) \approx \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau \quad (8.73)$$

незалежно від відношення сигнал/шум на вході. Це означає, що **при великому часі спостереження з'являється можливість виявлення будь-якого малого гармонійного сигналу на фоні шуму** (рис. 8.3).

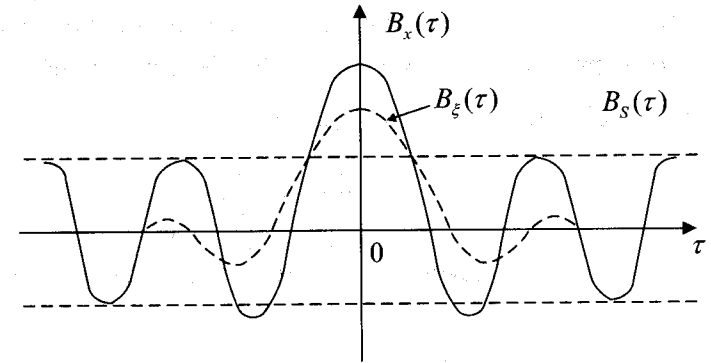


Рис. 8.3

ЗАДАЧІ

1. Визначити зв'язок між амплітудним $C_s(\omega)$ і енергетичним $S_s(\omega)$ спектрами детермінованого сигналу $S(t)$, заданого у вигляді фінітної функції, значення якої відмінні від нуля тільки на скінченному інтервалі часу:

$$\begin{aligned} S(t) &\neq 0, \quad -T_s/2 \leq t \leq T_s/2; \\ S(t) &\equiv 0, \quad |t| > T_s/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Розв'язок. Згідно з формулою (8.7) знайдемо амплітудний Фур'є-спектр $C_s(\omega)$ сигналу $S(t)$:

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} S(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2)$$

За допомогою (8.3) будемо далі кореляційну функцію імпульсного процесу:

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) S(T+\tau) dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} S(t) S(T+\tau) dt. \quad (3)$$

Виконавши тепер у (3) Фур'є-перетворення за τ , приходимо до наступного виразу, який пов'язує між собою енергетичний $S_s(\omega)$ і амплітудний $C_s(\omega)$ спектри імпульсного сигналу:

$$S_s(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} |C_s(\omega)|^2. \quad (4)$$

2. На вхід узгодженого фільтра подається прямокутний імпульс

$$S(t) = \begin{cases} S_0, & |t| \leq \frac{\tau_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau_0}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Визначити форму сигналу на виході.

Розв'язок. Згідно з формулою (8.7) визначимо спочатку амплітудний Фур'є-спектр для заданого вхідного прямокутного імпульсу (1)

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega \tau_0/2)}{\omega \tau_0/2}. \quad (2)$$

Скориставшись співвідношенням (8.43), визначимо форму сигналу на виході оптимального фільтра. Підставивши (2) у (8.43), отримуємо

$$\begin{aligned} S_{\text{вих}}(t) &= \alpha \left(\frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{(\omega \tau_0/2)^2} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= \alpha \frac{S_0^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \cos \omega t' - i \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \sin \omega t' \right] d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

У цій формулі введено позначення $t' = t - t_0$.

Другий інтеграл у (3) дорівнює нулю, оскільки підінтегральна функція непарна, а границі інтегрування симетричні. Тому

співвідношення (3) можна переписати у вигляді табличного інтеграла для косинус-перетворення Фур'є

$$S_{\text{вих}}(t) = \frac{2\alpha S_0^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \cos \omega t' d\omega, \quad (4)$$

який дорівнює

$$S_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} S_0^2 \tau_0 \left[1 - \frac{|t-t_0|}{\tau_0} \right], & |t-t_0| < \tau_0, \\ 0, & |t-t_0| > \tau_0. \end{cases} \quad (5)$$

З отриманого виразу видно, що оптимальний фільтр перетворює вхідний прямокутний сигнал $S(t)$ у деякий новий $S_{\text{вих}}(t)$ і робить це таким чином, що новий сигнал набуває при $t = t_0$ значення, найбільшого з усіх можливих, і цим у найкращий спосіб виділяється на фоні шуму (рис. 8.4).

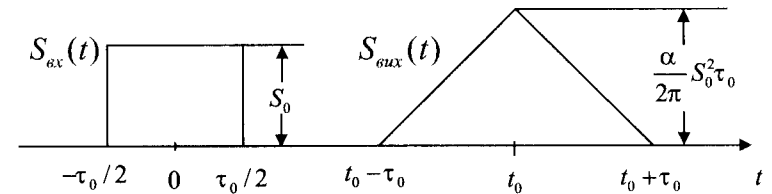


Рис. 8.4

3. На вхід лінійного фільтра діє адитивна суміш $x(t) = S(t) + n(t)$, де $n(t)$ – стаціонарний гауссівський білий шум, а

$$S(t) = \begin{cases} S_0 e^{\beta(t-t_0)}, & t \leq t_0; \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (1)$$

статистично незалежний від шуму $n(t)$ експоненціальний відео-імпульс (рис. 8.5).

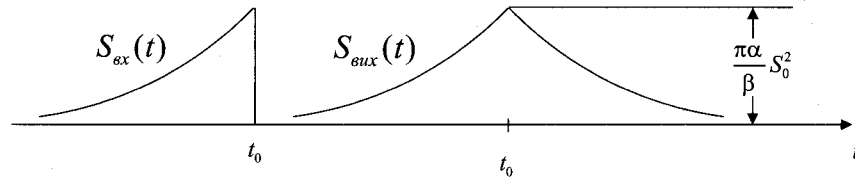


Рис. 8.5

Визначити комплексну частотну характеристику $K(i\omega)$ фільтра, що максимізує відношення сигнал-шум на виході у момент часу $t = t_0$.

Розв'язок. За допомогою формули (8.7) обчислимо амплітудний спектр вхідного сигналу:

$$C_S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = S_0 e^{-\beta t_0} \int_{-\infty}^{t_0} e^{(\beta - i\omega)t} dt = \frac{S_0}{(\beta - i\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (2)$$

Використовуючи співвідношення (8.39), знаходимо шукану комплексну частотну характеристику оптимального фільтра

$$K(i\omega) = \alpha C_S^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = \frac{\alpha S_0}{\beta + i\omega}. \quad (3)$$

Згідно з (8.43), визначимо форму сигналу на виході знайденого оптимального фільтра. Підставивши (2) у (8.43), отримуємо

$$S_{\text{вих}}(t) = \alpha S_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t_0)}}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi \alpha S_0^2}{\beta} e^{-\beta|t-t_0|}.$$

Видно, що на виході оптимального фільтра ми отримали симетричний відносно часу $t = t_0$ сигнал (див. рис. 8.5).

Передавальну функцію знайденого вигляду (3) можна легко реалізувати, наприклад, за допомогою простого RC -кола, зображеного на рис. 8.6, якщо виберемо $RC = 1/\beta$.

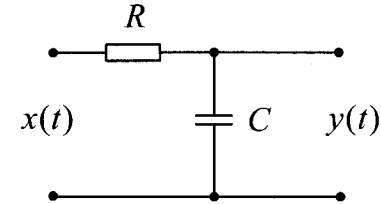


Рис. 8.6

Розділ III

ФЛУКТУАЦІЙНІ ЯВИЩА В РАДІОТЕХНІЦІ

§ 9. Броунівський рух

Застосовуючи методи теорії випадкових величин для дослідження флуктуаційних явищ в електричних колах, ми досі не цікавилися фізичною природою цих флуктуацій. Головним чином мова йшла тільки про способи опису флуктуаційних струмів і напруг за допомогою абстрактних випадкових процесів і про закони їх перетворення при проходженні через найпростіші радіотехнічні кола. Виникнення ж цих флуктуацій може бути зумовлене різноманітними фізичними явищами. Однією з найпоширеніших причин флуктуацій в електричних колах є хаотичний тепловий рух мікроскопічних носіїв електричного заряду. Цей тепловий рух призводить до флуктуацій макроскопічних параметрів – струмів і напруг у різноманітних елементах кола так само, як зіткнення з нейтральними атомами і молекулами є причиною **броунівського руху** у завислих у рідині або газі макроскопічних частинок. Далі ми побачимо: вказана аналогія є настільки глибокою, що ці фізичні процеси описуються тими самими математичними рівняннями. Дослідження ж броунівського руху з точки зору методології є значно простішим, оскільки ґрунтується тільки на простих рівняннях механіки, а не електродинаміки. Крім цього опис броунівського руху є значно наочнішим і очевиднішим у буквальному розумінні – цей рух справді можна побачити за допомогою найпростішого мікроскопа. Вперше цей рух спостерігав у 1828 р. Роберт Браун, розглядаючи у мікроскоп завислий у воді пилок рослин. Окремі пилінки пересувалися у воді без жодної видимої причини, і виникало враження, ніби вони живі. Виявилось, що так само поведуться частинки буквально всіх речовин, якщо вони достатньо малих розмірів.

9.1. Оцінки швидкості руху броунівської частинки

Спробуємо оцінити характерну швидкість руху V , що набуває броунівська частинка з масою M після зіткнення з мікроскопічними частинками (молекулами) з масою m (рис.9.1).

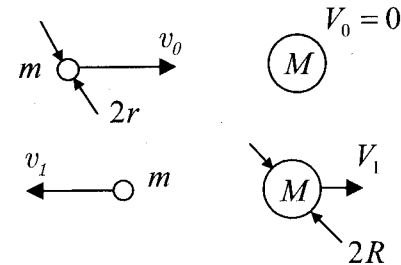


Рис. 9.1

Запишемо закон збереження імпульсу для системи мікро- і макрочастинки, розглядаючи для простоти лобове зіткнення:

$$mv_0 + MV_0 = mv_1 + MV_1,$$

де v_0, V_0 і v_1, V_1 — значення швидкостей мікро- і макрочастинки до і після зіткнення відповідно. Якщо перед зіткненням макрочастинка M перебувала у спокої ($V_0 = 0$), то легка мікросистинка m ($m \ll M$), що налетіла на макрочастинку зі швидкістю v_0 , відскочить у протилежному напрямку приблизно з тою самою швидкістю $v_1 \approx -v_0$, як від нескінченно важкої стінки. При цьому імпульс частинки m дорівнюватиме $mv_1 \approx -mv_0$ і, отже, броунівська частинка M набуває в результаті зіткнення імпульсу

$$MV_1 \approx 2mv_0. \quad (9.1)$$

Для спрощення записів далі будемо опускати індекси для швидкостей, що розглядаються, ($v_0 \equiv v$, $V_1 \equiv V$). Згідно з (9.1) в результаті лобового зіткнення макроскопічна частинка набуває швидкості

$$V \approx 2v \frac{m}{M}. \quad (9.2)$$

Характерна швидкість руху v мікрочастинок (молекул) визначається температурою T , при якій вони перебувають. Величину v можна оцінити за середньою кінетичною енергією молекул

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

де $k = 11,38 \cdot 10^{-16}$ ерг/град – стала Больцмана. Вважаючи для оцінок $m \approx 10^{-22}$ г, $T \approx 300$ К, отримуємо

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (9.3)$$

Для оцінки відношення мас m/M будемо вважати, що характерний лінійний розмір броунівської частинки приблизно дорівнює $R \approx 10^{-3}$ см, розмір молекул $r \approx 10^{-7}$ см, а середня "густина" макро- і мікрочастинок приблизно однакова, так що

$$\frac{m}{M} \approx \left(\frac{r}{R}\right)^3 \approx 10^{-12}. \quad (9.4)$$

Підставляючи (9.3) і (9.4) у (9.2), отримуємо „механічну” оцінку:

$$V_{\text{мех}} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (9.5)$$

яка виявляється на чотири порядки меншою за експериментально (візуально) отриману величину $V_{\text{експ}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Зрозуміло, що причина цієї розбіжності у тому, що ми врахували зіткнення тільки з

однією молекулою, а насправді вони безперервно бомбардують велику частинку, внаслідок чого вона набуває кінетичної енергії, дорівняної середній тепловій енергії кожної молекули (макрочастинку можна розглядати як дуже велику молекулу, що перебуває у термодинамічній рівновазі з оточуючим середовищем:

$$M \frac{V^2}{2} = m \frac{v^2}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Звідси випливає „термодинамічна” оцінка:

$$V_{\text{терм}} = v \sqrt{\frac{m}{M}} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (9.6)$$

Результат цього розрахунку також не задовольняє — він на два порядки перевищує експериментальне значення $V_{\text{експ}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ (рис. 9. 2).

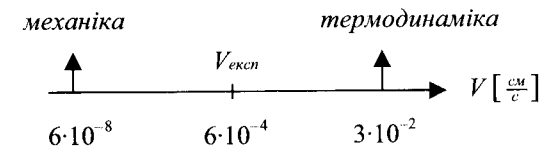


Рис. 9.2

У чому ж причина цих розбіжностей? Вичерпну відповідь дає кінетична теорія броунівського руху, розроблена на початку ХХ-го століття Ейнштейном та Смолуховським (1905), і Ланжевром (1908). Деякі питання цієї теорії ми розглянемо у наступних розділах цього параграфа.

9.2. Аналогія між рухом броунівської частинки і флуктуаціями струму в електричному колі

Для встановлення аналогії між рухом броунівської частинки і флуктуаціями в електричних колах нам достатньо розглянути тільки одновимірний рух частинки, наприклад, уздовж осі OX . Нехай

$x(t)$ — координата частинки в момент часу t . Рух частинки описується другим законом Ньютона:

$$M \frac{dV}{dt} = f(t), \quad (9.7)$$

де $V = dx/dt$, а $f(t)$ — **випадкова сила**, що діє на частинку з боку всіх молекул. Зрозуміло, що середнє значення цієї сили, взагалі кажучи, відмінне від нуля. Справді, відомо, що на макроскопічний об'єкт, що рухається у середовищі зі швидкістю V , діє регулярна сила тертя $f_{\text{тер}}$, пропорційна до швидкості V і спрямована протилежно до неї

$$f_{\text{тер}} = -\gamma V. \quad (9.8)$$

Коефіцієнт пропорційності γ між силою тертя і швидкістю називають **коефіцієнтом в'язкого тертя**. Наприклад, для твердої сферичної частинки радіусом R при ламінарному обтіканні її рідиною з коефіцієнтом в'язкості μ має місце формула Стокса

$$\gamma = 6\pi\mu R. \quad (9.9)$$

Позначимо через $F(t)$ флуктуючу частину випадкової сили $f(t)$:

$$F(t) = f(t) - f_{\text{тер}}(t), \quad \langle F(t) \rangle = 0. \quad (9.10)$$

Скориставшись (9.8), формулу (9.7) можна переписати у вигляді

$$M \frac{dV}{dt} + \gamma V = F(t). \quad (9.11)$$

Зауважимо тепер, що точно таким самим рівнянням описуються флуктуації сили струму $I(t)$ в найпростішому електричному колі, зображеному на рис. 9.3:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t). \quad (9.12)$$

Тут у ролі випадкової сили $F(t)$, що викликає флуктуації швидкості V броунівської частинки, виступає **випадкова ЕРС** — $E(t)$, яка зобов'язана своїм виникненням випадковому переміщенню носіїв заряду (електронів, іонів та ін.).

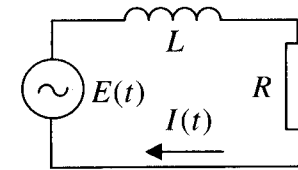


Рис. 9.3

Порівнюючи два рівняння (9.11) і (9.12), легко помітити взаємно однозначну відповідність між величинами, що належать до броунівського руху і до флуктуацій в електричному колі (на рис. 9.3). Цю відповідність подано у вигляді таблиці (табл. 9.1). Виходячи зі знайденої аналогії, **будь-які результати, отримані при теоретичному аналізі броунівського руху, можуть бути перенесені в область теплових флуктуацій в електричних колах відповідною заміною позначень**. Якщо, наприклад, ми зможемо розрахувати дисперсію швидкості σ_V^2 , то відразу отримаємо вираз для дисперсії струму σ_I^2 тощо.

Таблиця 9.1

Броунівський рух	Електричне коло
Маса частинки M	Індуктивність кола L
Коефіцієнт тертя γ	Активний опір R
Швидкість частинки $V(t)$	Сила струму $I(t)$
Зміщення частинки за час t $x(t) = \int_0^t V(t') dt'$	Перенесений заряд за час t $q(t) = \int_0^t I(t') dt'$
Випадкова сила $F(t)$	Випадкова ЕРС $E(t)$

9.3. Аналіз рівняння руху броунівської частинки

Звернемося тепер до розв'язання рівняння (9.11). Розділимо ліву і праву частини на M і введемо позначення: $\tau_M = M/\gamma$ – час релаксації, $a(t) = F(t)/M$ – випадкове прискорення, яке набуває макрочастинка внаслідок зіткнення з мікрочастинками. Після цього рівняння (9.11) набуває вигляду:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau_M} = a(t). \quad (9.13)$$

Згідно з методом варіації довільної сталої спочатку розв'язуємо однорідне рівняння з $a(t) = 0$:

$$V(t) = Ce^{-t/\tau_M}.$$

Після цього припускаємо, що стала інтегрування є функцією часу t : $C = C(t)$. І, нарешті, після підстановки шуканого вигляду розв'язку

$$V(t) = C(t)e^{-t/\tau_M} \quad (9.14)$$

у (9.13) отримуємо рівняння для невідомої функції $C(t)$:

$$e^{-t/\tau_M} \frac{dC}{dt} = a(t). \quad (9.15)$$

Із (9.15) випливає, що

$$C(t) = \int_0^t a(t')e^{t'/\tau_M} dt' + Const, \quad (9.16)$$

де $Const$ — стала інтегрування. Підставляючи (9.16) в (9.14) з урахуванням початкових умов $V(t)|_{t=0} = V_0$, отримуємо остаточно:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau_M} + \int_0^t \exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \quad (9.17)$$

Формула (9.17) розв'язує так звану динамічну частину поставленої задачі, встановлюючи зв'язок між швидкістю частинки, що нас цікавить, і випадковою силою, яка на цю частинку діє. Функціональний вигляд прискорення $a(t)$, яке отримує броунівська частинка внаслідок зіткнень з молекулами, нам, звичайно, невідомий. Тому ми не маємо можливості обчислити в явному вигляді інтеграл від $a(t)$, що входить до (9.17). Поки що ми можемо тільки сказати, що $V(t)$, так само, як і $a(t)$, є випадковою функцією часу і може бути описана тільки статистично. Таким чином, ми доходимо до необхідності розв'язання статистичної задачі.

9.4. Визначення статистичних моментів флуктуацій швидкості

Для обчислення моментів і спектра флуктуацій функції $V(t)$ необхідно мати деяку апіорну інформацію про статистичні параметри прискорення $a(t) = F(t)/M$ (випадкової сили, яка діє на частинку з одиничною масою).

По-перше, є очевидним (із визначення $F(t)$ за формулою (9.10)), що середнє значення прискорення $a(t)$ дорівнює нулю, молекули з рівною ймовірністю „штовхають” броунівську частинку як ліворуч, так і праворуч:

$$\langle a(t) \rangle = 0. \quad (9.18 \text{ a})$$

По-друге, якщо зовнішні макроскопічні умови (тиск, температура, густина та ін.) залишаються сталими, то **випадковий процес** $a(t)$ є **стаціонарним**, і, отже, автокореляційна функція прискорення залежить тільки від різниці часів $t'' - t'$:

$$\langle a(t')a(t'') \rangle = B_a(t'' - t'). \quad (9.18 \text{ б})$$

Усереднюючи (9.17) за ансамблем реалізацій випадкової функції $a(t)$, отримуємо:

$$\langle V(t) \rangle = V_0 e^{-t/\tau_M} + \int_0^t \exp\left\{\frac{t' - t}{\tau_M}\right\} \langle a(t') \rangle dt' = V_0 e^{-t/\tau_M}. \quad (9.19)$$

Звідси випливає, що при будь-якій початковій швидкості частинки V_0 середнє значення $\langle V(t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля, причому характерний час цього процесу збігається з часом релаксації τ_M . Віднявши від (9.17) (9.19), отримуємо формулу для флуктуацій швидкості δV :

$$\delta V(t) = V(t) - \langle V(t) \rangle = \int_0^t \exp\left\{\frac{t' - t}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \quad (9.20)$$

Піднісши (9.20) до квадрата й усереднюючи, отримуємо вираз для **дисперсії** флуктуацій швидкості:

$$\sigma_V^2(t) = \langle [\delta V(t)]^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t dt' dt'' \exp\left\{\frac{t' - t}{\tau_M} + \frac{t'' - t}{\tau_M}\right\} B_a(t'' - t'). \quad (9.21)$$

Швидкість зміни експоненціальних функцій під знаком інтеграла (9.21) за змінними t' і t'' визначається часом релаксації τ_M . Це макроскопічний час: він характеризує, як ми побачили із (9.19), інерцію важкої частинки у в'язкому середовищі і є тим більшим, чим більша маса M броунівської частинки. Характерний час, за який змінюється випадкове прискорення $a(t)$, визначається за часом τ_m зіткнень окремих молекул з макрочастинкою. Цей час значно менший за τ_M ($\tau_m \ll \tau_M$) і є по суті „мікроскопічним”. Звідси випливає, що час кореляції випадкового процесу $a(t)$ можна вважати нехтовно малим порівняно з τ_M , і в результаті цього кореляційну функцію $B_a(t'' - t')$ під інтегралом (9.21) можна замінити на δ -функцію:

$$B_a(t'' - t') = A \delta(t'' - t'). \quad (9.22)$$

Тут A – невідома поки що константа. Підставимо (9.22) у (9.21) і виконаємо інтегрування:

$$\sigma_V^2(t) = A e^{-2t/\tau_M} \int_0^t e^{2t'/\tau_M} dt' = \frac{A \tau_M}{2} (1 - e^{-2t/\tau_M}). \quad (9.23)$$

Із (9.19) і (9.23) випливає, що при $t \gg \tau_M$ середня швидкість макрочастинки $\bar{V} \rightarrow 0$, а дисперсія флуктуацій швидкості σ_V^2 не залежить від часу і збігається із середнім квадратом швидкості:

$$\sigma_V^2 = \langle (V - \bar{V})^2 \rangle = \overline{V^2} - \bar{V}^2 \approx \overline{V^2} = \frac{1}{2} A \tau_M. \quad (9.24)$$

З іншого боку, у стані термодинамічної рівноваги середня кінетична енергія ε_T частинки дорівнює $kT/2$ (в одновимірному випадку ми маємо справу з поступальним рухом з одним степенем вільності, на який і припадає енергія $kT/2$):

$$\varepsilon_T = \frac{M\overline{V^2}}{2} = \frac{M\sigma_V^2}{2} = \frac{1}{2}kT. \quad (9.25)$$

Порівнюючи (9.24) і (9.25), отримуємо для сталої A вираз:

$$A = \frac{2kT}{M\tau_M} = \frac{2kT}{M^2} \gamma. \quad (9.26)$$

З'ясуємо тепер, як зміниться з часом середня кінетична енергія частинки. Враховуючи, що згідно з (9.24) $\overline{V^2} = \overline{V^2} + \sigma_V^2$ і, користуючись формулами (9.19) і (9.23), отримуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{M}{2}(\overline{V^2} + \sigma_V^2) = \frac{M}{2} \left[V_0^2 e^{-2t/\tau_M} + \frac{kT}{M} (1 - e^{-2t/\tau_M}) \right] = \\ &= \left(\frac{MV_0^2}{2} - \frac{kT}{2} \right) e^{-2t/\tau_M} + \frac{kT}{2} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_T) e^{-2t/\tau_M} + \varepsilon_T. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Поведінка $\varepsilon(t)$ для двох випадків, коли початкова кінетична енергія частинки $\varepsilon_0 = MV_0^2/2$ більша або менша за середню теплову енергію $\varepsilon_T = kT/2$, наведено на рис. 9.4.

Видно, що час встановлення термодинамічної рівноваги між броунівською частинкою і оточуючим середовищем і є часом релаксації τ_M . Інакше кажучи, за час τ_M частинка або віддає молекулам надлишок своєї початкової енергії ε_0 відносно середньої теплової ε_T (верхня крива на рис. 9.4) або отримує від них енергію, якої бракує до теплової (нижня крива на рис. 9.4).

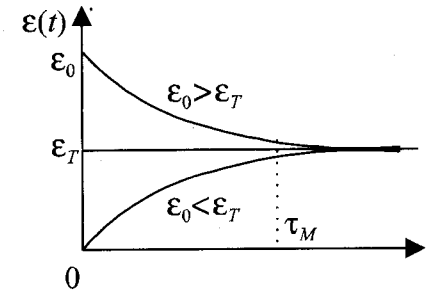


Рис. 9.4

Можна ще сказати, що за час τ_M частинка „забуває” про свою початкову швидкість завдяки численним зіткненням з молекулами.

9.5. Статистичні характеристики зміщення частинки

Маючи розв'язок динамічної задачі (9.17) для швидкості $V(t)$, легко отримати формулу і для зміщення $x(t)$. Нехай у початковий момент часу $t=0$ частинка перебувала у точці $x=0$ і мала швидкість V_0 . Тоді з визначення $V = dx/dt$ випливає:

$$x(t) = \int_0^t V(t') dt'. \quad (9.28)$$

Середнє значення зміщення $\langle x(t) \rangle$ отримується звідси за допомогою (9.19):

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^t \langle V(t') \rangle dt' = V_0 \int_0^t e^{-t'/\tau_M} dt' = V_0 \tau_M (1 - e^{-t/\tau_M}). \quad (9.29)$$

Згідно з (9.29) при $t \ll \tau_M$ зіткнення з молекулами практично не впливають на рух макрочастинки. Вона пересувається вільно і проходить у середньому шлях

$$\langle x(t) \rangle \approx V_0 t \quad (t \ll \tau_M). \quad (9.30)$$

При $t \gg \tau_M$ це регулярне зміщення сповільнюється (подібно до (9.19) і у границі $t \rightarrow \infty$ взагалі припиняється, тому за нескінченний час частинка в середньому зміщується на скінченну відстань:

$$\langle x(t) \rangle = V_0 \tau_M \quad (t \gg \tau_M). \quad (9.31)$$

Проте завдяки флуктуації швидкості відбуваються хаотичні зміщення частинки із „положення рівноваги”, так звані випадкові блукання. Флуктуації зміщення частинки δx із положення рівноваги $\langle x \rangle$ визначаємо за формулою, що впливає з (9.28) з урахуванням (9.20):

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= x(t) - \langle x(t) \rangle = \int_0^t [V(t_1) - \bar{V}(t_1)] dt_1 = \\ &= \int_0^t \delta V(t_1) dt_1 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \exp\left\{-\frac{t' - t_1}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Інтеграл за dt_1 легко обчислюється інтегруванням по частинах:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \int_0^t e^{-t_1/\tau_M} dt_1 \int_0^{t_1} e^{t'/\tau_M} a(t') dt' = -\tau_M e^{-t_1/\tau_M} \int_0^{t_1} e^{t'/\tau_M} a(t') dt' \Big|_{t_1=0}^{t_1=t} + \\ &+ \tau_M \int_0^t a(t_1) dt_1 = \tau_M \int_0^t \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\} \right] a(t') dt'. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Після цього для дисперсії зміщень з урахуванням (9.22) маємо

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \langle [\delta x(t)]^2 \rangle = \\ &= \tau_M^2 \int_0^t \int_0^t dt' dt'' \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\} \right] \left[1 - \exp\left\{-\frac{t'' - t}{\tau_M}\right\} \right] B_a(t'' - t') = \\ &= A \tau_M^2 \int_0^t \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\} \right]^2 dt'. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Вводячи нову змінну інтегрування $z = (t' - t)/\tau_M$, отримуємо:

$$\sigma_x^2(t) = A \tau_M^3 \int_{-t/\tau_M}^0 [1 - e^z]^2 dz = A \tau_M^3 \left[\frac{t}{\tau_M} - \frac{3}{2} + 2e^{-t/\tau_M} - \frac{1}{2}e^{-2t/\tau_M} \right]. \quad (9.35)$$

Для малих інтервалів часу, коли $t \ll \tau_M$, можна розкласти експоненціальні функції у (9.35) в ряд Тейлора (аж до членів третього порядку мализни за параметром $t/\tau_M \ll 1$). У результаті цього отримуємо

$$\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3} A t^3. \quad (9.36)$$

У протилежному граничному випадку $t \gg \tau_M$ у формулі (9.35) достатньо залишити тільки перший доданок:

$$\sigma_x^2(t) = A \tau_M^2 t = \frac{2kT}{\gamma} t. \quad (9.37)$$

Ми скористалися виразом (9.26) для A і визначенням $\tau_M = M/\gamma$. З отриманих формул видно, що випадковий процес $x(t)$ завідомо є нестационарним, оскільки його дисперсія σ_x^2 зростає з часом: спочатку за кубічним законом $\sim t^3$, а згодом за лінійним $\sim t$ (рис. 9.5).

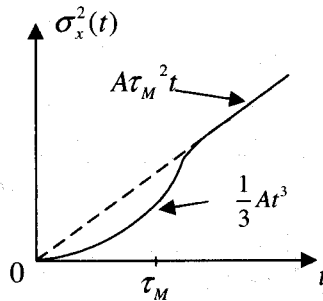


Рис. 9.5

9.6. Густини розподілу ймовірностей швидкості і зміщення частинки

Диференціальним рівнянням (9.13) і формулою (9.28) визначаються дві випадкові функції $V(t)$ і $x(t)$. Наведені обчислення дали змогу нам визначити тільки перші два моменти цих випадкових функцій, тоді як питання про вигляд густин розподілу ймовірностей $W(V, t)$ і $W(x, t)$ поки що залишається відкритим. Звернемося до формули (9.20), з якої видно, що в кожен момент часу t флуктуація швидкості $\delta V(t)$ може подаватися як сума (в границі – інтеграл) більшої кількості незалежних доданків – поштовхів, яких завдають броунівській частинці молекули за час t . Оскільки τ_M – макроскопічний час, то кількість таких поштовхів дуже велика, а сила кожного з них у середньому однакова: ми припустили, що прискорення $a(t)$ є стаціонарним процесом. Це дає змогу скористатися центральною граничною теоремою і стверджувати, що функція $\delta V(t)$ розподілена за нормальним законом, який при $t \gg \tau_M$ (коли $\langle V(t) \rangle = 0$ і $\delta V \approx V$) має вигляд

$$W(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_V} e^{-V^2/2\sigma_V^2}.$$

Якщо врахувати тепер, що згідно з (9.24) $\sigma_V^2 = A\tau_M/2 = kT/M$, то ми доходимо до розподілу

$$W(V) = \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{MV^2}{2kT}\right\}, \quad (9.38)$$

який є не що інше, як **розподіл Максвелла** для швидкостей частинок у системі при одновимірному русі.

Випадковий процес $x(t)$ пов'язаний з нормальним випадковим процесом $V(t)$ лінійним перетворенням (9.28) і, отже, також має нормальний розподіл

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (9.39)$$

При $t \gg \tau_M$ з (9.37) випливає, що $\sigma_x^2 = Dt$, де $D = 2kT/\gamma$ має зміст **коефіцієнта дифузії**. Справді, легко впевнитися, що (9.39) є розв'язком одновимірного рівняння

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (9.40)$$

яке називають **рівнянням дифузії**. Звичайне виведення (9.40) ґрунтується на феноменологічних міркуваннях і за своєю суттю є макроскопічним. Застосований нами мікроскопічний підхід, побудований на розв'язанні рівнянь руху (9.13), створює можливість пов'язати коефіцієнт дифузії D з фізичними параметрами середовища – її температурою і в'язкістю.

9.7. Енергетичний спектр флуктуацій швидкості броунівської частинки

Для пояснення спостережуваної величини $V_{ексн}$, обчислимо енергетичний спектр флуктуацій швидкості броунівської частинки. Як було показано, при $t \gg \tau_M$ середня швидкість макрочастинки прямує до нуля ($\bar{V} \rightarrow 0$), а дисперсія перестає залежати від часу ($\sigma_V^2 = Const$). Це свідчить про те, що випадковий процес $V(t)$ для таких інтервалів часу можна вважати стаціонарним (принаймні, у широкому розумінні) і до нього можна застосувати спектральний аналіз, розглянутий у §6. Із рівняння (9.11) для Фур'є-компонент отримаємо таке співвідношення:

$$(i\omega M + \gamma)C_V(\omega) = C_F(\omega), \quad (9.41)$$

звідки

$$C_V(\omega) = \frac{C_F(\omega)}{i\omega M + \gamma}.$$

Побудуємо тепер корелятор Фур'є-компонент

$$\langle C_V(\omega') C_V^*(\omega'') \rangle = \frac{\langle C_F(\omega') C_F^*(\omega'') \rangle}{(i\omega' M + \gamma)(-i\omega'' M + \gamma)}. \quad (9.42)$$

Для стаціонарного процесу

$$\langle C_F(\omega') C_F^*(\omega'') \rangle = S_F(\omega') \delta(\omega' - \omega''),$$

де $S_F(\omega)$ — енергетичний спектр сили. З δ -корельованості правої частини (9.42) випливає, що і в лівій частині також має стояти δ -корелятор вигляду $\langle C_V(\omega') C_V^*(\omega'') \rangle = S_V(\omega') \delta(\omega' - \omega'')$.

Звідси знаходимо енергетичний спектр швидкості $S_V(\omega)$ броунівської частинки:

$$S_V(\omega) = \frac{S_F(\omega)}{(\omega^2 M^2 + \gamma^2)}. \quad (9.43)$$

Енергетичний спектр сили $S_F(\omega)$ за допомогою формули Вінера-Хінчіна визначається через автокореляційну функцію $B_F(\tau) = \langle F(t)F(t+\tau) \rangle$:

$$S_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (9.44)$$

У свою чергу, з урахуванням зв'язку між силою і прискоренням $a(t) = F(t)/M$ згідно з (9.22) маємо

$$B_F(\tau) = M^2 B_a(\tau) = AM^2 \delta(\tau) = 2kT \gamma \delta(\tau). \quad (9.45)$$

Отже,

$$S_F(\omega) = \frac{kT}{\pi} \gamma, \quad (9.46)$$

й енергетичний спектр швидкості (9.43) визначається як

$$S_V(\omega) = \frac{kT}{\pi \gamma} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_M^2}, \quad (9.47)$$

де $\tau_M = M/\gamma$.

Тепер ми спроможні відповісти на запитання: чому при оцінці швидкості броунівської частинки, проведений на початку параграфа на основі термодинамічного підходу, що привела до формули (9.6), отримано значення, що на два порядки перевищують експериментальні дані. Аналіз знайденого нами енергетичного спектра $S_V(\omega)$ свідчить, що він простягається до дуже великих частот $\omega = \omega_M \approx 1/\tau_M \sim 10^5 \text{ c}^{-1}$. З іншого боку, як реєструючий пристрій в експерименті виступає людське око, котре характеризується досить великою інерційністю. Воно фіксує тільки повільні переміщення броунівської частинки і не фіксує швидких.

Характерний час фіксації оком переміщення можна оцінити як $\tau_{ока} \approx 1/16$ с (при частоті 16 і більше кадрів на секунду ми вже не розрізняємо окремих кадрів – рух на екрані здається нам неперервним). У цьому розумінні наше око як прилад, що реєструє зміщення броунівської частинки, можна уподібнити до деякої лінійної системи (фільтра нижніх частот) з передавальною функцією $K(i\omega)$. Для лінійних систем енергетичний спектр на виході $S_{V_{спост}}(\omega)$ (спектр флуктуацій швидкості $V_{спост} \equiv V_{експ}$, що спостерігаються) пов'язаний зі спектром вхідного сигналу $S_V(\omega)$ співвідношенням (7.25):

$$S_{V_{спост}}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_V(\omega). \quad (9.48)$$

Для простоти покладемо, що

$$|K(i\omega)| = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{ока}; \\ 0, & \text{при } \omega > \omega_{ока}; \end{cases}$$

де $\omega_{ока} \approx 1/\tau_{ока} \approx 10$ с⁻¹ – верхня частота фіксації оком руху. В результаті для дисперсії флуктуації швидкості, що спостерігається, доходимо такого виразу:

$$\sigma_{V_{спост}}^2 = 2 \int_0^{\infty} S_{V_{спост}}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_{ока}} S_V(\omega) d\omega = \frac{2kT}{\pi\gamma} \int_0^{\omega_{ока}} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau_M^2}. \quad (9.49)$$

Оскільки $\omega_{ока} \tau_M \sim 10^{-4} \ll 1$, підінтегральну функцію у (9.49) можна замінити на одиницю, і ми отримаємо оцінку

$$\sigma_{V_{спост}}^2 = \frac{2kT}{\pi\gamma} \omega_{ока} = \frac{2}{\pi} \sigma_V^2 \omega_{ока} \tau_M \quad (9.50)$$

(ми врахували, що $\gamma = M/\tau_M$ і $\sigma_V^2 = kT/M$).

Таким чином, характерні значення швидкості $V_{спост} \approx \sigma_{V_{спост}}$, що спостерігаються, відрізняються від теплової (термодинамічної) оцінки $V_{терм} = \sqrt{\sigma_V^2} = \sqrt{kT/M}$:

$$V_{спост} \approx V_{терм} \sqrt{\omega_{ока} \tau_M} \approx 10^{-2} V_{терм} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}. \quad (9.51)$$

Цей результат добре узгоджується з експериментом, як видно з рис. 9.2.

Отриману з рівнянь механіки оцінку (9.5) для швидкості $V_{мех} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ також можна поправити, якщо врахувати, що в кожен момент з броунівською частинкою зіштовхується не одна, а багато (N) молекул, тому результуюча швидкість буде

$$V = \sum_{i=1}^N V_i, \quad (9.52)$$

де V_i – зміна швидкості броунівської частинки за рахунок зіткнення з однією молекулою, що визначається за формулою (9.2). Оскільки зіткнення молекул можна вважати незалежними і середні значення швидкостей V_i – дорівнюваними нулю ($\langle V_i \rangle = 0$), то для дисперсії суми (9.52) маємо:

$$\sigma_V^2 = N \sigma_{V_i}^2, \quad \text{де } \sigma_{V_i} \approx V_{мех} \approx 2\nu \frac{m}{M} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}. \quad (9.53)$$

Отже, швидкість, що спостерігається $V_{спост} \approx V_{мех} \sqrt{N}$. Кількість молекул N , що одночасно зіштовхуються з частинкою, можна грубо оцінити як відношення їх площ поперечного перерізу:

$$N \approx \left(\frac{R}{r} \right)^2 \approx 10^8 \quad (9.54)$$

(для оцінок так само, як і у (9.4) ми обирали значення $R \approx 10^{-3} \text{ см}$ і $r \approx 10^{-7} \text{ см}$). Таким чином, $V_{\text{спост}} \approx 10^4 V_{\text{мех}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}$, що також добре узгоджується з експериментальними даними.

ЗАДАЧІ

1. Використовуючи закони збереження імпульсу й енергії, довести, що формула (9.1) справджується тільки при $m/M \ll 1$.

Розв'язок. Із закону збереження імпульсу при початковій швидкості макрочастинки $V_0 = 0$ випливає

$$mv_0 = mv_1 + MV_1. \quad (1)$$

Тут v_0 і v_1 – швидкості мікроскопічної частинки до і після удару відповідно. Із (1) визначаємо квадрат швидкості макрочастинки після удару:

$$V_1^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 (v_0 - v_1)^2. \quad (2)$$

Запишемо тепер закон збереження енергії для цієї системи:

$$mv_0^2 = mv_1^2 + MV_1^2. \quad (3)$$

Із (3) знаходимо

$$V_1^2 = \frac{m}{M} (v_0^2 - v_1^2) = \frac{m}{M} (v_0 + v_1)(v_0 - v_1). \quad (4)$$

Прирівнявши праві частини (2) і (4), маємо

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 (v_0 - v_1)^2 = \frac{m}{M} (v_0 + v_1)(v_0 - v_1),$$

$$\frac{m}{M} v_0 - \frac{m}{M} v_1 = v_0 + v_1,$$

$$-v_0 \left(1 - \frac{m}{M}\right) = v_1 \left(1 + \frac{m}{M}\right). \quad (5)$$

При $m/M \ll 1$ із виразу (5) отримуємо $v_1 \approx -v_0$.

2. Обчислити дисперсію флуктуацій швидкості частинки для одновимірного броунівського руху, вважаючи, що автокореляційна функція (АКФ) випадкового прискорення є гауссовою:

$$B_a(\tau) = \overline{a(t'')a(t')} = \sigma_a^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_a^2}\right), \quad (1)$$

де $\sigma_a^2 = \overline{a^2}$ – дисперсія, T_a – характерний масштаб спадання АКФ випадкового прискорення $a(t)$, а $\tau = t'' - t'$.

Розв'язок. Скористаємося формулою (9.21) для дисперсії флуктуації швидкості броунівської частинки

$$\sigma_V^2(t) = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp\left\{-\frac{2t}{\tau_M} + \frac{t' + t''}{\tau_M}\right\} B_a(t'' - t') \quad (2)$$

і перейдемо в ній до нових сумарних $q = t' + t''$ і різницевих $\tau = t'' - t'$ змінних. При цьому, як легко показати, якобіан переходу I

дорівнює $I = \frac{\partial(t', t'')}{\partial(q, \tau)} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. Звідси у нових змінних

вираз (2) записується так:

$$\begin{aligned}
\sigma_V^2(t) &= \frac{e^{-2t/\tau_M}}{2} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) d\tau \int_{-\tau}^{\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq + \int_0^t B_a(\tau) d\tau \int_{\tau}^{-\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq \right\} = \\
&= \frac{\tau_M}{2} e^{-2t/\tau_M} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) \left[e^{(\tau+2t)/\tau_M} - e^{-\tau/\tau_M} \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t B_a(\tau) \left[e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau \right\} = \\
&= \tau_M e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) \left[e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau = \\
&= \tau_M \left\{ \int_0^t B_a(\tau) e^{-\tau/\tau_M} d\tau - e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) e^{\tau/\tau_M} d\tau \right\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Підставивши у (3) заданий вид АКФ (1) випадкового прискорення, отримаємо

$$\sigma_V^2(t) = \sigma_a^2 \tau_M \left\{ \int_0^t e^{-\tau^2/T_a^2 - \tau/\tau_M} d\tau - e^{-2t/\tau_M} \int_0^t e^{-\tau^2/T_a^2 + \tau/\tau_M} d\tau \right\}. \tag{4}$$

За визначенням T_a — характерний час зміни АКФ $B_a(\tau)$. Він визначається часом зіткнення окремих молекул із броунівською макрочастинкою. Час же τ_M — характерний час релаксації швидкості макрочастинки. Тому завжди можна вважати виконаною умову $\tau_M \gg T_a$. При цьому в інтегралах (4) можна у показниках експонент знехтувати доданками $\pm \tau/\tau_M$: $e^{-\tau^2/T_a^2 \pm \tau/\tau_M} \approx e^{-\tau^2/T_a^2}$. Якщо до того ж ми будемо розглядати час $t \gg \tau_M$ ($T_a \ll \tau_M \ll t$), то обчислення інтегралів можна проводити у нескінченних межах. В результаті отримуємо

$$\sigma_V^2(t) \approx \sigma_a^2 \tau_M \left(1 - e^{-2t/\tau_M}\right) \int_0^\infty e^{-\rho^2/T_a^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M \left(1 - e^{-2t/\tau_M}\right). \tag{5}$$

Враховуючи далі, що $t \gg \tau_M$, остаточно отримаємо

$$\sigma_V^2 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M.$$

§ 10. Теплові флуктуації у радіотехнічних колах

Зазначена у попередньому параграфі аналогія між тепловими флуктуаціями в електричних колах і випадковими зміщеннями броунівських частинок (див. таблицю 9.1) дає змогу скориставшись формулами $\sigma_V^2 = kT/M$ і $\sigma_x^2 = 2kTt/\gamma$, відразу написати формули для дисперсії флуктуацій струму $I(t)$ і перенесеного електричного заряду $q(t)$ у колі, зображеному на рис. 9.3:

$$\sigma_I^2 = \frac{kT}{L}, \tag{10.1}$$

$$\sigma_q^2 = \frac{2kT}{R} t. \tag{10.2}$$

Ці та наведені далі формули стосуються достатньо великих значень часу t , що набагато перевищують час релаксації $\tau_0 = L/R$ (сталу часу кола), коли всіма перехідними процесами можна знехтувати і, не обмежуючи загальності отриманих результатів, вважати, що

$$\bar{I}(t) = \frac{d\bar{q}(t)}{dt} = 0. \tag{10.3}$$

10.1. Формула Найквіста

Середня потужність теплових флуктуацій струму, що виділяється на опорі R , дорівнює

$$P = R \langle I^2 \rangle = R \sigma_I^2 = \frac{kTR}{L}. \quad (10.4)$$

Оскільки всі реальні радіотехнічні пристрої мають скінченну ширину смуги частот, що пропускаються, то природно виникає запитання про те, в якій смузі частот виділяється потужність P , що визначається за формулою (10.4). Для відповіді на поставлене питання необхідно розрахувати **енергетичний спектр флуктуацій струму**

$$S_I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (10.5)$$

через який повна потужність P виражається формулою

$$P = R \sigma_I^2 = R \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = R \int_0^{\infty} S_I^{(+)}(\omega) d\omega, \quad (10.6)$$

де ми ввели енергетичний спектр додатних частот:

$$S_I^{(+)} = \begin{cases} 2S_I, & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Потужність, що виділяється у смузі частот від ω до $\omega + d\omega$, дорівнює

$$S_P(\omega) d\omega = R S_I^{(+)}(\omega) d\omega. \quad (10.7)$$

Таким чином, повну потужність, що виділяється на опорі R , можна визначити у вигляді інтеграла

$$P = \int_0^{\infty} S_P(\omega) d\omega. \quad (10.8)$$

Для визначення енергетичного спектра $S_I(\omega)$ флуктуацій струму у колі скористаємося законом Кірхгофа (див. (9.12) і рис. 9.3):

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t), \quad (10.9)$$

який для Фур'є-компонент має вигляд

$$(i\omega L + R)C_I(\omega) = C_E(\omega). \quad (10.10)$$

Тут $C_I(\omega)$ і $C_E(\omega)$ – відповідно Фур'є-трансформанти струму $I(t)$ і ЕРС у колі $E(t)$. Введемо у розгляд **комплексний опір (імпеданс)** кола:

$$Z(i\omega) = i\omega L + R. \quad (10.11)$$

Тоді з (10.10) випливає:

$$C_I(\omega) = \frac{C_E(\omega)}{Z(i\omega)}. \quad (10.12)$$

Формула (10.12), випливаючи з закону Ома у комплексній формі, справджується не тільки для найпростішого електричного кола, зображеного на рис. 9.3, а й у найбільш загальному випадку квазістаціонарних електричних кіл, для яких $Z(i\omega)$ може мати значно складніший вигляд, ніж (10.11). Формула (10.12) збігається з виразом (7.22), яким описуються перетворення сигналів у довільних лінійних системах, причому роль передавальної функції $K(i\omega)$ відіграє відношення $1/Z(i\omega)$. Скориставшись (7.25), отримуємо зв'язок між енергетичним спектром флуктуацій струму $S_I(\omega)$ і випадковою ЕРС $S_E(\omega)$:

$$S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(i\omega)|^2}. \quad (10.13)$$

Для визначення спектра $S_E(\omega)$ згадаємо, що $E(t)$ у випадку броунівського руху відповідала випадкова сила $F(t) = Ma(t)$, кореляційна функція якої мала вигляд (див. формули (9.22) і (9.45)):

$$\langle F(t')F(t'') \rangle = M^2 \langle a(t')a(t'') \rangle = AM^2 \delta(t'' - t') = AM^2 \delta(\tau),$$

а енергетичний спектр $S_F(\omega)$ визначався за формулою (9.46):

$$S_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F(t)F(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{AM^2}{2\pi} = \frac{kT}{\pi} \gamma. \quad (10.14)$$

Враховуючи, що коефіцієнту тертя γ відповідає активний опір R у найпростішому колі, зображеному на рисунку 9.3, а в загальному випадку під R слід розуміти $\text{Re} Z(i\omega)$, з (10.14) отримуємо **формулу Найквіста** для енергетичного спектра теплових флуктуацій випадкових ЕРС в електричних колах:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \text{Re} Z(i\omega). \quad (10.15)$$

Підставивши цю формулу в (10.13), отримуємо

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{\text{Re} Z(i\omega)}{|Z(i\omega)|^2}. \quad (10.16)$$

Для найпростішого кола, зображеного на рис. 9.3, ці формули набувають вигляду:

$$S_E = \frac{kT}{\pi} R, \quad (10.17 \text{ а})$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi R} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2}. \quad (10.17 \text{ б})$$

Тут $\tau_0 = L/R$ — стала часу кола. Таким чином, спектр $S_E(\omega)$ виявляється сталим на всіх частотах (і, отже, $E(t)$ є білим шумом), а спектр флуктуації струму $S_I(\omega)$ зосереджений у смузі частот $|\omega| \leq 1/\tau_0$. На рис. 10.1 схематично зображений спектр $S_I(\omega)$ в області $\omega > 0$.

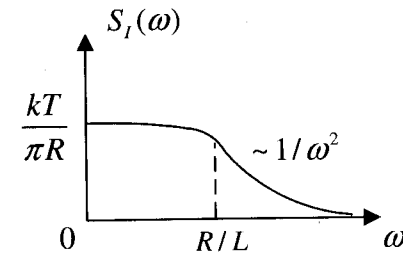


Рис. 10.1

Видно, що на високих частотах ($\omega\tau_0 \gg 1$) спектр $S_I(\omega)$ достатньо швидко спадає як $S_I(\omega) \sim \omega^{-2}$.

Визначимо тепер дисперсію флуктуацій струму, обчисливши площу під спектральною кривою $S_I(\omega)$:

$$\sigma_I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = \frac{kT}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau_0^2} = \frac{kT}{L}. \quad (10.18)$$

Цей результат, як і слід було сподіватися, збігається з (10.1).

Формула (10.17 а) для $S_E(\omega)$ при уважному розгляді може викликати здивування: з неї випливає, що при $R \rightarrow \infty$ спектральна густина $S_E(\omega)$ також прямує у нескінченність, тобто у розімкненому

колі ($R \rightarrow \infty$) мають виникати нескінченно великі флуктуації ЕРС. Для розв'язку цього парадокса слід урахувати, що будь-який опір R має власну індуктивність L і власну ємність C , причому власна ємність шунтує активний опір, як показано на рис. 10.2.

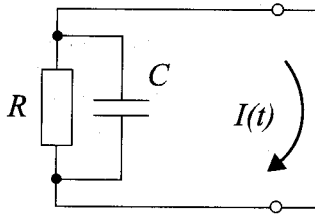


Рис. 10.2

Імпеданс такого кола розраховується як повний опір при паралельному з'єднанні елементів:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C. \quad (10.19)$$

Звідси отримуємо

$$Z(i\omega) = \frac{R}{1 + i\omega RC},$$

$$\operatorname{Re} Z(i\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (10.20)$$

Отже, для кола, зображеного на рис. 10.2, маємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2},$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi R}. \quad (10.21)$$

Таким чином, при $R \rightarrow \infty$ $S_E(\omega)$ і $S_I(\omega)$ перетворюються на нуль, як це й має бути для розімкнутого кола.

10.2. Спектральний аналіз процесів зі стаціонарним припущенням

Статистичні характеристики флуктуацій заряду $q(t)$, що переноситься через RL -коло, можна знайти, якщо врахувати, що струм і заряд пов'язані між собою таким співвідношенням:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad q(t) = \int_0^t I(t_1) dt_1. \quad (10.22)$$

Для простоти припустимо, що в початковий момент ($t=0$) заряд $q(t)=0$. Ми вже показували, що в режимі, який встановився, процес $I(t)$ можна розглядати як стаціонарний з нульовим середнім значенням ($\langle I(t) \rangle = 0$). У цьому разі заряд $q(t)$ визначається як інтеграл від стаціонарного процесу $I(t)$; при статистичному аналізі $q(t)$ можна скористатися результатами, отриманими раніше у §7. Так, насамперед дослідимо процес $q(t)$ щодо його стаціонарності. Усереднюючи (10.22) за ансамблем реалізацій, отримуємо $\langle q(t) \rangle = 0$, тобто перша умова стаціонарності виконується. Для перевірки другої умови скористаємося отриманим виразом для енергетичного спектра флуктуацій струму. Із (10.17 б) випливає, що на нульовій частоті ($\omega=0$) енергетичний спектр має скінченне значення, яке не дорівнює нулю.

$$S_I(0) = \frac{kT}{\pi R} \neq 0. \quad (10.23)$$

Це означає, що процес накопичення $q(t)$ є нестаціонарним і його дисперсія матиме вигляд дифузно зростаючого процесу (див. (7.42)):

$$\sigma_q^2(t) = 2\pi S_I(0) \cdot t = \frac{2kT}{R} \cdot t. \quad (10.24)$$

Ця обставина не повинна нас дивувати, оскільки аналогом $q(t)$ в задачі про броунівський рух є нестационарний процес — зміщення $x(t)$, дисперсія якого також зростає з часом як $\sigma_x^2 \approx 2kTt/\gamma$.

Щоб використати розглядуваний в попередніх розділах спектральний аналіз стосовно нестационарного процесу $q(t)$, спочатку подамо $q(t)$ на деякому фіксованому часовому інтервалі (t_1, t_2) у такому вигляді:

$$\Delta q(t_1, t_2) = q(t_2) - q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_I(\omega)}{i\omega} (e^{i\omega t_2} - e^{i\omega t_1}) d\omega. \quad (10.25)$$

Обчислимо тепер структурну функцію приросту

$$\begin{aligned} D_q(t_2, t_1) &= \langle [\Delta q(t_2, t_1)]^2 \rangle = \left\langle \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_I(\omega)}{i\omega} (e^{i\omega t_2} - e^{i\omega t_1}) d\omega \right\}^2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \langle C_I(\omega') C_I^*(\omega'') \rangle \frac{e^{i\omega' t_2} - e^{i\omega' t_1}}{i\omega'} \cdot \frac{e^{-i\omega'' t_2} - e^{-i\omega'' t_1}}{-i\omega''} = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega^2} \{1 - \cos[\omega(t_2 - t_1)]\} d\omega = D_q(\tau). \end{aligned} \quad (10.26)$$

Виявилося, що структурна функція $D_q(t_2, t_1)$ не залежить від часів t_1, t_2 окремо, а залежить тільки від їхньої різниці $\tau = t_2 - t_1$. Процеси з такою залежністю, як ми знаємо з §5, називаються процесами зі стаціонарними прирощеннями.

Враховуючи парність енергетичного спектра $S_I(\omega)$: подаючи $1 - \cos \omega\tau = 2 \sin^2(\omega\tau/2)$, перепишемо (10.26) у вигляді

$$D_q(\tau) = 8 \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \frac{S_I(\omega)}{\omega^2} d\omega. \quad (10.27)$$

Таким чином, за заданою залежністю енергетичного спектра $S_I(\omega)$ “вхідного” стаціонарного процесу $I(t)$ ми можемо побудувати структурну функцію $D_q(\tau)$ „вихідного” нестационарного процесу $q(t)$.

Встановимо тепер зворотний зв'язок між структурною функцією $D_q(\tau)$ й енергетичним спектром $S_I(\omega)$. Для цього продиференціюємо ліву і праву частини виразу (10.26) за τ . Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dD_q(\tau)}{d\tau} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega} \sin \omega\tau d\omega = \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) d\omega = \frac{2}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega} e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (10.28)$$

(ми врахували парність функції $S_I(\omega)$ і виконали у другому доданку заміну змінних $\omega \rightarrow -\omega$).

Застосовуючи тепер у (10.28) зворотне обернення Фур'є, отримаємо подання енергетичного спектра $S_I(\omega)$ через похідну від

структурної функції $\frac{dD_q}{d\tau}$:

$$\frac{2}{i} \frac{S_I(\omega)}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dD_q(\tau)}{d\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Враховуючи, що $D_q(\tau)$ є функція парна й, отже, її похідна $\frac{dD_q(\tau)}{d\tau}$ — непарна, отриманий вираз можна довести до такого вигляду

$$S_I(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dD_q}{d\tau} \sin \omega\tau d\tau. \quad (10.29)$$

Якщо ми формально введемо за формулою інтегрального перетворення (7.44) енергетичний спектр заряду $S_q(\omega) = \frac{S_I(\omega)}{\omega^2}$, то формули (10.27), (10.29) будуть такими:

$$D_q(\tau) = 8 \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) S_q(\omega) d\omega, \quad (10.30)$$

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} \frac{dD_q}{d\tau} \sin \omega\tau d\tau.$$

Виявляється, що введена формально функція $S_q(\omega) = S_I(\omega)/\omega^2$ має цілком визначений фізичний зміст: вона визначає енергетичний спектр процесу з першим стаціонарним прирощенням $q(t)$. При цьому формули (10.30) визначають зв'язок між структурними функціями й енергетичними спектрами процесів з першими стаціонарними прирощеннями.

Коментарі

Оскільки стаціонарні процеси — це окремий випадок процесів з першим стаціонарним прирощенням (але не навпаки), то формули (10.30) дійсні і для стаціонарних процесів. Зручність

користування зв'язку (10.30) між структурною функцією $D_\xi(\tau)$ і відповідним енергетичним спектром $S_\xi(\omega)$ полягає в тому, що можна не перейматися тим, чи є випадковий процес $\xi(t)$ стаціонарним або процесом із першим стаціонарним прирощенням. В обох випадках функція $S_\xi(\omega)$ існує і має той самий фізичний зміст спектральної густини енергії. Для стаціонарних процесів інтеграли просто обчислюються, і за знайденою залежністю $D_\xi(\tau)$ легко визначається автокореляційна функція $B_\xi(\tau)$ (див. (5.29)):

$$B_\xi(\tau) = \frac{1}{2} [D_\xi(\infty) - D_\xi(\tau)].$$

Особливості ж в енергетичних спектрах процесів із першими стаціонарними прирощеннями, типу $S_\xi(\omega) \sim \omega^{-2}$ при $\omega \rightarrow 0$, компенсуються оберненням на нуль множника $\sin^2(\omega\tau/2)$, і розбіжності в першому інтегралі (10.30) також не відбувається.

10.3. Аналіз теплових флуктуацій у коливальному контурі

Проаналізуємо зображений на рис. 10.3 коливальний контур за викладеною вище схемою. Спочатку визначимо імпеданс кола:

$$Z(i\omega) = i\omega L + \frac{1}{iC\omega} + R \quad (10.31)$$

і квадрат його модуля

$$|Z(i\omega)|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2. \quad (10.32)$$

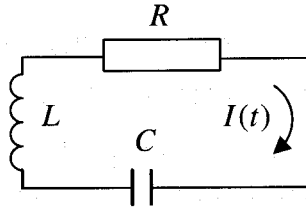


Рис. 10.3

Підставляючи цю формулу в (10.16) і враховуючи, що $\text{Re } Z(i\omega) = R$, отримуємо для енергетичного спектра флуктуацій струму в контурі наступний вираз:

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} = \frac{kT}{\pi R} \cdot \frac{\omega^2}{\tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2}. \quad (10.33)$$

Схематичний графік функції $S_I(\omega)$ зображено на рис. 10.4. Видно, що максимум теплових шумів припадає на власну резонансну частоту контуру $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, значення $S_I(\omega)$ в максимумі дорівнює $kT/\pi R$, а ширина кривої поблизу максимуму $\Delta\omega \approx 1/\tau_0$, де $\tau_0 = L/R$ — стала часу контуру.

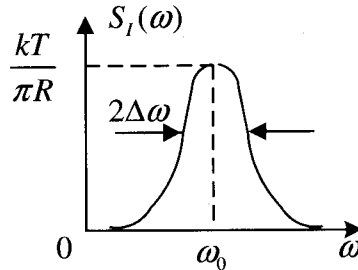


Рис. 10.4

Таким чином, спектр власних теплових шумів виявляється зосередженим саме у тій області частот $\omega \approx \omega_0$, де цей контур і має працювати, наприклад, як смуговий фільтр. Інтегруючи формулу (10.33) за всіма частотами ω , отримаємо дисперсію флуктуацій $\sigma_I^2 = kT/L$. Звідси знаходимо, що середня енергія магнітного поля, яка запасена у контурі (точніше – в індуктивності L), дорівнює

$$W_L = \frac{L}{2} \langle I^2 \rangle = \frac{L}{2} \sigma_I^2 = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = \frac{kT}{2}. \quad (10.34)$$

Цей результат узгоджується з тим, що середнє значення кінетичної енергії у системі з одним ступенем вільності у стані термодинамічної рівноваги дорівнює $kT/2$. Шляхом аналогічних обчислень можна переконатися в тому, що середня енергія електричного поля W_C , яка запасена у ємності C , також дорівнює $kT/2$:

$$W_C = \frac{\langle q^2 \rangle}{2C} = \frac{kT}{2}. \quad (10.35)$$

При цьому дисперсія флуктуацій заряду $\sigma_q^2 = \langle q^2 \rangle$ на відміну від розглянутого прикладу LR -кола виявляється скінченною за рахунок того, що на низьких частотах $S_I(\omega) \sim \omega^2$, та інтеграл від $S_q(\omega) = S_I(\omega)/\omega^2$ вже не має розбіжності:

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} = kTC. \quad (10.36)$$

Фізична причина цієї відмінності у порівнянні з LR -колом також цілком очевидна: розходження інтеграла від $S_q(\omega) = S_I(\omega)/\omega^2$ для залежності виду (10.17 б) було пов'язане з особливістю спектра

флуктуацій $S_q(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$, тобто з проходженням постійного струму, а в контурі (див. рис. 10.3) за рахунок послідовного включення в коло ємності C постійний струм взагалі текти не може. Тому $S_q(\omega) \sim \omega^2 \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$.

Оскільки різниця потенціалів U між обкладками конденсатора дорівнює q/C , то дисперсія її флуктуацій визначається простою формулою, що випливає з (10.36):

$$\sigma_U^2 = \frac{\sigma_q^2}{C^2} = \frac{kT}{C}.$$

10.4. Еквівалентна шумова температура

Отримані формули для спектра теплових флуктуацій дають змогу описувати потужність будь-якого джерела (не обов'язково теплового) за допомогою поняття еквівалентної шумової температури. Вводиться воно так. Позначимо через $S_p(\omega)d\omega$ потужність, що віддається джерелом у смузі частот $d\omega$ навантаженню з опором R (рис. 10.5 а). Замінімо тепер джерело узгодженим з навантаженням опором R (рис. 10.5 б), що перебуває при температурі T , і вимагатимемо, щоб потужність теплових флуктуацій, що віддається цим опором у навантаження в смузі $d\omega$, збігалася з $S_p(\omega)d\omega$, тобто (див. формулу (10.7)):

$$S_p(\omega) = RS_I^{(+)}(\omega). \quad (10.37)$$

При розрахунку $S_I^{(+)}(\omega)$ зазначимо наступне: оскільки джерелом теплової ЕРС у колі служить тільки один опір (лівий на рис. 10.5 б, той, що замінив джерело), то енергетичний спектр флуктуацій ЕРС дорівнює

$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R$. Повний же опір кола Z дорівнює $2R$, так що

$$S_I^{(+)}(\omega) = \frac{S_E^{(+)}(\omega)}{|Z|^2} = \frac{2S_E(\omega)}{4R^2} = \frac{kT}{2\pi R}. \quad (10.38)$$

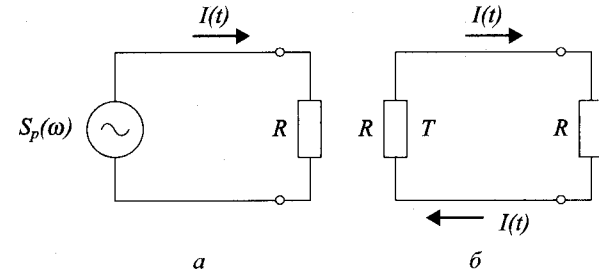


Рис. 10.5

Підставляючи (10.38) у (10.37), отримуємо

$$S_p(\omega) = \frac{kT}{2\pi}. \quad (10.39)$$

Температуру T , при якій виконується це співвідношення, називають **еквівалентною шумовою температурою** джерела на частоті ω .

10.5. Область застосування формули Найквіста

Перерахуємо тепер усі умови та обмеження, при яких була отримана формула Найквіста (10.15):

1. **Електричне коло вважалось квазістаціонарним**, випромінювання електромагнітних хвиль з нього не враховувалося, тобто довжина хвилі λ випромінювання на всіх частотах ω , що розглядаються, вважалася значно більшою за лінійні розміри системи a ($\lambda \gg a$). Переходячи за формулою $\lambda = 2\pi c/\omega$ від λ до ω , отримуємо обмеження згори на частоти, при яких наявна квазістаціонарність: $\omega \ll \frac{2\pi c}{a}$.

2. Випадкові ЕРС у колі вважалися δ -корельованими, як і сили, що діють з боку молекул на макроскопічну частинку у теорії броунівського руху.

3. Розглядалися тільки термодинамічні рівноважні флуктуації, тобто припускалося, що всі перехідні процеси в електричному колі вже закінчилися.

4. При знаходженні спектра флуктуацій теплової ЕРС у колі ми припускали, що на кожен поступальний степінь вільності у стані термодинамічної рівноваги припадає енергія $kT/2$ (див. формулу (9.25)), тобто користувалися результатом класичної статистичної фізики, а не квантової. Це припустимо тільки тоді, коли енергія кванта $\hbar\omega$ значно менша за теплову енергію:

$$\hbar\omega \ll kT. \quad (10.40)$$

5. Розглядалися тільки кола із сталими параметрами R , C , L при відсутності дисперсії (тобто припускалося, що ці параметри не залежать від частоти ω).

6. Не враховувалася дискретність електричного заряду – на відміну від зміщення броунівської частинки $x(t)$, електричний заряд $q(t)$ не може змінюватися неперервно, а тільки порціями, кратними до заряду електрона.

Узагальнення отриманих результатів

• Скасування умови п. 4 і нерівності (10.40) можна легко провести, якщо врахувати, що на квантовому рівні на кожен коливальний степінь вільності із власною частотою ω припадає не енергія kT , як у класичній теорії, а середня енергія осцилятора:

$$kT \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} = \Theta(\omega, T). \quad (10.41)$$

Якщо у формулі Найквіста (10.15) (і (10.16), що випливає з неї, тощо), ми зробимо заміну (10.41), то її можна буде застосовувати й у квантовому випадку $\hbar\omega \geq kT$.

• Частотна дисперсія параметрів кола (умова п. 5) також легко враховується, якщо у формулі Найквіста вважати $R=R(\omega)$, $L=L(\omega)$, $C=C(\omega)$. При цьому ми не маємо виходити за межі умови квазістаціонарності ($\omega \ll 2\pi c/a$).

• Нарешті, дискретність електричного заряду призводить до специфічних флуктуацій струму, не пов'язаних із тепловим рухом. Це так званий **дробовий шум**, йому присвячено наступний параграф.

10.6. Флуктуаційно-дисипаційна теорема (ФДТ)

Насамкінець необхідно зазначити, що формула Найквіста, як у класичному вигляді (10.15), так і у квантовому (з урахуванням заміни (10.41)), є окремим випадком однієї дуже важливої теореми із надзвичайно високим ступенем загальності — так званої флуктуаційно-дисипаційної теореми (Г.Каллен, Т.Вельтон, 1951р.). Із самої назви теореми вбачаємо, що вона пов'язує флуктуаційні явища з дисипативними властивостями системи. Під **дисипацією** слід розуміти перетворення будь-яких нетеплових видів енергії і руху у теплову. Швидкість цього перетворення визначається дисипативними параметрами. Наприклад, при броунівському русі у ролі такого параметра виступає коефіцієнт тертя γ і формула (10.14) встановлює зв'язок між енергетичним спектром $S_F(\omega)$ флуктуацій випадкової сили F , що викликає випадкові зміни зміщення $x(t)$ і швидкості $V(t)$ броунівської частинки, з дисипативним параметром γ :

$$S_F(\omega) = \frac{kT}{\pi} \gamma. \quad (10.42)$$

Аналогічний вигляд має і формула Найквіста (10.15), яка описує перетворення електричної енергії у теплову. Процес дисипації у цьому випадку визначається активним опором кола $\operatorname{Re} Z(i\omega)$, а роль сил, що викликають, наприклад, флуктуації струму, відіграють випадкові ЕРС $E(t)$. Таким чином, за своєю фізичною суттю теплові флуктуації і в механічній системі (броунівський рух) і в електричних колах виявляються настільки близькими, що описуються, по суті, однаковими формулами. Зрозуміло, що ця обставина не може бути випадковим збігом, а має впливати з якогось спільного фізичного закону. Саме про цей спільний закон, що „керує” флуктуаціями, й іде мова у флуктуаційно-дисипаційній теоремі (ФДТ), суть якої зводиться до наступного.

Розглянемо довільну фізичну систему, що перебуває у стані термодинамічної рівноваги. Нехай $x(t)$ – якийсь макроскопічний фізичний параметр, що описує стан системи і відіграє роль **узагальненої координати**. У випадку броунівської частинки як $x(t)$ можна вибрати координату її зміщення $x(t)$ або будь-який інший параметр, наприклад, швидкість $V(t)$, прискорення $a(t)$ тощо. Так само і для електричного кола як $x(t)$ можна обрати і перенесений через коло заряд $q(t)$, і силу струму у колі $I(t)$ і, наприклад, різницю потенціалів $U(t)$ на обкладках конденсатора (див. рис. 10.3) тощо.

Теорема, яку ми розглядаємо, дає змогу пов'язати енергетичний спектр $S_x(\omega)$ флуктуацій узагальненої координати $x(t)$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau$$

зі швидкістю дисипації енергії у системі (в механічній системі – з коефіцієнтом тертя, в електричній – з потужністю джоулевих втрат тощо). Тут ми не будемо строго доводити цю теорему, а наведемо тільки хід думок і остаточну формулу Каллена—Вельтона для $S_x(\omega)$, яку можна розглядати як формулювання ФДТ.

Окрім узагальненої координати $x(t)$ введемо спряжену з нею **узагальнену силу**:

$$F(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (10.43)$$

де U — **енергія системи**. Якщо $x(t)$ — дійсна координата, то $F(t)$ — сила у звичайному значенні цього слова. Формально розглядатимемо флуктуації $x(t)$ як результат дії на систему зовнішніх сил $F(t)$. Відгук системи $x(t)$ пов'язаний із $F(t)$ у загальному випадку нелінійними рівняннями типу

$$x(t) = \Phi\{F(t)\}, \quad (10.44)$$

але при достатньо малих F цей зв'язок можна вважати лінійним, причому, не обмежуючи загальності, покласти $x=0$, якщо $F=0$. Загальна форма лінійного зв'язку з урахуваннями принципу причинності й у припущенні про стаціонарність системи (система перебуває у тепловій рівновазі, й усі моменти часу є фізично еквівалентними і саме у цьому значенні тут вживається термін „стаціонарність”) описується формулою (7.7). Це призводить до

того, що Фур'є-компоненти $C_x(\omega)$ і $C_F(\omega)$ виявляються пропорційними:

$$C_x(\omega) = \alpha(\omega) C_F(\omega). \quad (10.45)$$

Порівнявши (10.45) з (7.22), бачимо, що $\alpha(\omega)$ – не що інше, як передавальна функція системи $K(i\omega)$ у радіотехніці, а у фізиці її називають **узагальненою сприйнятливістю**.

З урахуванням стаціонарності процесу з (10.45) випливає зв'язок між енергетичними спектрами:

$$S_x(\omega) = |\alpha(\omega)|^2 S_F(\omega). \quad (10.46)$$

Скористаємося тим, що ми вже вивели формулу Найквіста, і розглянемо заряд $q(t)$, який переноситься, як узагальнену координату $x(t)$. Тоді узагальненою силою $F(t)$ буде виступати ЕРС $E(t)$, енергетичний спектр флуктуацій якої відомий:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z(i\omega). \quad (10.47)$$

З'ясуємо тепер, що відіграє роль узагальненої сприйнятливості $\alpha(\omega)$ у цьому конкретному випадку. Оскільки $I(t) = dq/dt$, то $C_q(\omega) = C_I(\omega)/i\omega$. З іншого боку, згідно з законом Кірхгофа маємо $C_I(\omega) = C_E(\omega)/Z(i\omega)$. Отже,

$$C_q(\omega) = \frac{1}{i\omega Z(i\omega)} C_E(\omega). \quad (10.48)$$

Порівнюючи цей зв'язок із (10.45), визначаємо $\alpha(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\omega Z(i\omega)}. \quad (10.49)$$

Перейдемо тепер у формулі Найквіста (10.47) від $Z(i\omega)$ до $\alpha(\omega)$, ввівши попередньо позначення α' і α'' для дійсної і уявної частин α відповідно: $\alpha = \alpha' + i\alpha''$. Тоді

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{i\omega \alpha(\omega)} = -\frac{kT}{\pi\omega} \frac{\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2}. \quad (10.50)$$

Підставляючи (10.50) у праву частину (10.46), отримуємо

$$S_x(\omega) = -\frac{kT\alpha''(\omega)}{\pi\omega}. \quad (10.51)$$

Слід зазначити, що знак „-” у (10.51) пов'язаний з тим, що залежність від часу у „прямому” перетворенні Фур'є ми розглядали у вигляді $e^{i\omega t}$. Якби ми вибрали $e^{-i\omega t}$, то у (10.51) було б необхідно писати знак „+”.

Формула (10.51) і є, по суті, формулюванням флуктуаційно-дисипаційної теореми, що стверджує, що **спектр флуктуацій $S_x(\omega)$ довільної узагальненої координати $x(t)$ (а не тільки заряду $q(t)$ в електричному колі) пов'язаний з уявною частиною α'' узагальненої сприйнятливості і температурою системи T** . Із (10.45) видно, що наявність у α уявної частини — α'' якраз і означає присутність дисипації в системі. У випадку квантових флуктуацій, як зазначалося, достатньо замінити $kT \rightarrow \Theta(\omega, T)$ за формулою (10.41).

Продемонструємо застосування формули (10.51) до флуктуацій координати $x(t)$ зміщення броунівської частинки. Роль рівняння (10.44) у цьому випадку відіграє рівняння руху

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = F(t). \quad (10.52)$$

Перейшовши до Фур'є-компонент, маємо:

$$(-M\omega^2 + i\omega\gamma)C_x(\omega) = C_F(\omega). \quad (10.53)$$

Звідси знаходимо узагальнену сприйнятливість:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\omega\gamma - M\omega^2} \quad (10.54)$$

і її уявну (відповідальну за дисипацію) частину:

$$\alpha'' = -\frac{1}{\omega\gamma(1 + \omega^2\tau_M^2)}, \quad \tau_M = \frac{M}{\gamma}. \quad (10.55)$$

Користуючись (10.51), отримуємо

$$S_x(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma\omega^2} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau_M^2}. \quad (10.56)$$

Спектр флуктуацій швидкості $V(t)$ можна визначити за допомогою (10.56), якщо врахувати, що $C_V(\omega) = i\omega C_x(\omega)$ і, отже,

$$S_V(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau_M^2}. \quad (10.57)$$

Цей результат збігається з отриманою раніше формулою (9.47).

Узагальнення формул Каллена—Вельтона для випадку кількох флуктуюючих величин $x_m(t)$ ($m=1, 2, \dots$) полягає у встановленні зв'язку взаємного спектра флуктуацій

$$S_{xmk}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_m(t) \cdot x_k(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10.58)$$

з антиермітовою частиною матриці узагальненої сприйнятливості α_{mk} , яка вводиться наступним чином.

Спочатку визначають узагальнені сили

$$F_m(t) = -\frac{\partial U}{\partial x_m}, \quad (10.59)$$

а після цього у лінійному наближенні пов'язують Фур'є-компоненти $C_{xm}(\omega)$ і $C_{Fk}(\omega)$:

$$C_{xm}(\omega) = \sum_k \alpha_{mk}(\omega) C_{Fk}(\omega). \quad (10.60)$$

В результаті виявляється, що має місце наступна загальна формула:

$$S_{xmk}(\omega) = \frac{i k T}{2\pi\omega} [\alpha_{mk}(\omega) - \alpha_{km}^*(\omega)], \quad (10.61)$$

яка, як легко переконатися, в одновимірному випадку ($m=k=1$, $\alpha_{mk} = \alpha\delta_{mk}$) переходить в (10.51).

ЗАДАЧІ

1. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для кола, що складається з опору R з незамкнутими виведеннями (рис. 10.6).

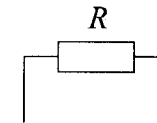


Рис.10.6

Розв'язок. Користуючись формулами Найквіста (10.15) і (10.16), отримуємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z(\omega) = \frac{kT}{\pi} R ,$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{\operatorname{Re} Z(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R + \infty)^2} = 0 .$$

При обчисленні $S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$ за $Z(\omega)$ слід брати повний комплексний опір кола, в якому тече шумовий струм. У цьому випадку $|Z(\omega)| = R + \infty$. Фізична рівність $S_I(\omega) = 0$ визначається відсутністю у колі струму, оскільки коло розімкнуте.

2. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для короткозамкнутого опору R (рис. 10.7).

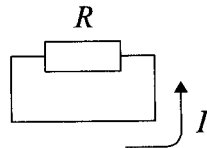


Рис. 10.7

Розв'язок. Користуючись (10.15) і (10.16), знаходимо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R, \quad S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R + 0)^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{1}{R} .$$

3. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для контуру, що складається із паралельно поєднаних опору R і ємності C (рис. 10.8).

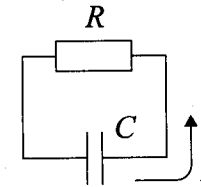


Рис. 10.8

Розв'язок. Послідовність розв'язку цієї задачі така сама, як і в попередньої.

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} ;$$

$$\operatorname{Re} Z(\omega) = R ;$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2}} ;$$

$$|Z(\omega)|^2 = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2} .$$

Тепер згідно з формулами Найквіста маємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R ;$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R\omega^2 C^2}{1 + (\omega CR)^2} .$$

§ 11. Дробовий шум

Однією з найважливіших причин флуктуацій в електричних колах є дробовий шум – флуктуації струму у колі, що викликаються дискретністю заряду, який переноситься. У звичайних електровакуумних приладах час прольоту одного електрона має порядок $\tau_{np} \approx 10^{-9}$ с. Це й є тривалість елементарного імпульсу струму, що переносить заряд, який дорівнює заряду e одного електрона. При середньому струмі $\bar{I} \approx 5$ мА за одну секунду пролітає величезна кількість електронів $N \approx 3 \cdot 10^{16}$, а за час тривалості одного імпульсу τ_{np} — $N\tau_{np} \approx 3 \cdot 10^7$ електронів. Таким чином, імпульси струму, викликані прольотом кожного електрона, густо перекриваються. На рис. 11.1 товстою лінією зображено імпульс струму $i_v(t)$ за рахунок прольоту одного електрона, що вилетів з катода (якщо мова йде про електронну лампу) у момент t_v . Імпульси струму за рахунок електронів, що вилітають у наступні моменти від t_v до $t_v + \tau_{np}$, зображені тонкими лініями.

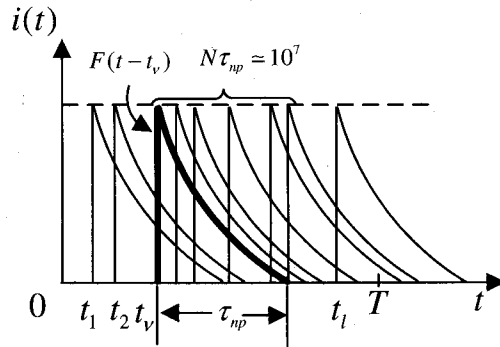


Рис. 11.1

Через те, що імпульси струму дуже сильно перекриваються, сумарний струм буде слабо флуктувати навколо середнього

значення \bar{I} (рис. 11.2). Ці флуктуації струму називають **дробовим шумом** або **дробовим струмом**.

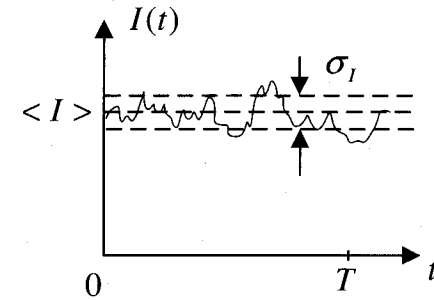


Рис. 11.2

Позначимо, як і в § 3, через n число електронів, що вилітають з катода за час T . Перенесений ними заряд є $q_T = ne$, а значення струму за цей час дорівнює

$$I_T = \frac{q_T}{T} = \frac{ne}{T}. \quad (11.1)$$

Як ми з'ясували у § 3, випадкова величина n розподілена за законом Пуассона:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (11.2)$$

де $\bar{n} = n_1 T$, а n_1 – середнє число електронів, що вилітають з катода за одиницю часу – величина, що визначає середній струм у колі:

$$\langle I_T \rangle = \frac{e}{T} \bar{n} = n_1 e. \quad (11.3)$$

Для обчислення дисперсії флуктуацій дробового струму $I_{dp} = I_T - \langle I_T \rangle$

$$\sigma_{I_T}^2 = \langle (I_T - \langle I_T \rangle)^2 \rangle = \langle I_{dp}^2 \rangle = \frac{e^2}{T^2} \langle (n - \bar{n})^2 \rangle, \quad (11.4)$$

скористаємося формулою (3.28), що визначає дисперсію флуктуацій випадкової величини n : $\sigma_n^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \bar{n}$. В результаті отримуємо

$$\sigma_{I_T}^2 = \frac{e^2}{T^2} \bar{n} = \frac{e}{T} \langle I_T \rangle. \quad (11.5)$$

Таким чином, дисперсія флуктуацій дробового струму виявляється пропорційною до середньої сили струму $\langle I_T \rangle$ і обернено пропорційною до часу усереднення T . Далі індекс T для величини струму I опускатимемо ($I \equiv I_T$).

Звернемося тепер до обчислення автокореляційної функції і спектра флуктуацій дробового шуму. Миттєве значення повного струму I у момент часу t , що створюється всіма електронами, які вилетіли за час T у моменти t_1, t_2, \dots, t_n , очевидно, є сумою всіх елементарних струмів:

$$I(t) = \sum_{v=1}^n i_v(t) = e \sum_{v=1}^n F(t - t_v). \quad (11.6)$$

Тут e — заряд електрона, а $F(t - t_v) = i_v(t)/e$ — форма елементарного імпульсу струму $i_v(t)$, яка описується детермінованою (невипадковою) функцією. Враховуючи, що за весь час проходження імпульсу $i_v(t)$ переноситься елементарний заряд e , отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_v(t) dt = e, \quad (11.7)$$

звідки випливає, що $F(t - t_v)$ нормована умовою:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_v) dt = 1. \quad (11.8)$$

Формулою (11.6) визначається деяка випадкова функція $I(t)$.

Випадковими величинами є як моменти вильоту t_v кожного електрона, так і повна кількість n електронів, що вилетіли за час T . Оскільки всі моменти часу в інтервалі $0 \leq t \leq T$ фізично еквівалентні, кожна з випадкових величин t_v розподілена рівномірно з густиною ймовірностей:

$$W_1(t_v) = \frac{1}{T}, \quad 0 \leq t_v \leq T. \quad (11.9)$$

Із незалежності актів вилітання окремих електронів випливає, що і випадкові величини t_v незалежні, тобто їх спільна густина розподілу ймовірностей розпадається на добуток

$$W_n(t_1, t_2, \dots, t_v, \dots, t_n) = \prod_{v=1}^n W_1(t_v) = \frac{1}{T^n}. \quad (11.10)$$

Оскільки випадкова величина n розподілена за законом Пуассона, функцію $I(t)$ називають **пуассонівським випадковим процесом**, а сукупність незалежних випадкових подій, що полягають у вильоті окремих електронів у моменти часу t_v , — **пуассонівським потоком подій**.

11.1. Визначення статистичних характеристик сили струму

При визначенні статистичних характеристик випадкового процесу (11.6) усереднення зручно проводити двома етапами: спочатку провести усереднення за всіма t_v (позначимо його $\langle \dots \rangle_{t_v}$) а після цього — за випадковим параметром n . Таким чином, наприклад, обчислення першого моменту $\langle I(t) \rangle_{t_v}$ зводиться до обчислення середнього від суми:

$$\begin{aligned} \langle I(t) \rangle_{t_v} &= \langle e \sum_{v=1}^n F(t-t_v) \rangle_{t_v} = \\ &= e \sum_{v=1}^n \langle F(t-t_v) \rangle_{t_v} = e \sum_{v=1}^n \int_0^T dt_v W_1(t_v) F(t-t_v). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Якщо час спостереження T значно перевищує тривалість елементарного імпульсу струму – τ_{np} , то інтеграл за dt_v в (11.11) можна замінити на інтеграл у нескінченних межах. Враховуючи далі формулу (11.8), отримаємо:

$$\langle I(t) \rangle_{t_v} \approx \frac{e}{T} \sum_{v=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_v) dt = \frac{e}{T} n. \quad (11.12)$$

Таким чином, ми приходимо до формули (11.1), остаточне усереднення якої за n із розподілом виду (11.2), дає вираз (11.3).

Для визначення автокореляційної функції

$$B_I(t, t') = \langle I(t)I(t') \rangle - \langle I(t) \rangle^2 \quad (11.13)$$

необхідно обчислити другий двоточковий момент $\langle I(t)I(t') \rangle$.

Для цього проведемо спочатку усереднення за моментами вильоту електронів t_v при їх сталій загальній кількості n :

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t') \rangle_{t_v, \mu} &= e^2 \langle \sum_{v=1}^n F(t-t_v) \sum_{\mu=1}^n F(t'-t_\mu) \rangle_{t_v, \mu} = \\ &= e^2 \sum_{v, \mu=1}^n \langle F(t-t_v) F(t'-t_\mu) \rangle_{t_v, \mu}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Виділимо в (11.14) доданки з $v = \mu$ і врахуємо незалежність t_v і t_μ при $v \neq \mu$:

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t') \rangle_{t_v, \mu} &= e^2 \sum_{v=1}^n \langle F(t-t_v) F(t'-t_v) \rangle_{t_v} + \\ &+ e^2 \sum_{v \neq \mu}^n \langle F(t-t_v) \rangle_{t_v} \langle F(t'-t_\mu) \rangle_{t_\mu} = \\ &= e^2 \sum_{v=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T F(t-t_v) F(t'-t_v) dt_v + \\ &+ e^2 \sum_{v \neq \mu}^n \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_v F(t-t_v) \int_0^T dt_\mu F(t'-t_\mu). \end{aligned} \quad (11.15)$$

Вважаючи, як і раніше, що $T \gg \tau_{np}$, границі інтегрування в (11.15) можна розтягнути до нескінченності. Враховуючи далі, що подвійна сума в (11.15) складається з $n(n-1)$ однакових доданків, і проводячи остаточне усереднення за n , отримуємо:

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \frac{e^2 \bar{n}}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_1) F(t'-t_1) dt_1 + \frac{e^2}{T^2} (\bar{n}^2 - \bar{n}). \quad (11.16)$$

Проте, з (3.28) випливає, що $\bar{n}^2 - \bar{n} = \bar{n}$, тобто другий доданок (11.16) перетворюється до вигляду $e^2 \bar{n}^2 / T^2 = \langle I \rangle^2$. Підставляючи (11.16) у (11.13), після заміни змінної інтегрування $t - t_1 = \theta$ приходимо до формули:

$$B_I(t, t') = e \langle I \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(t' - t + \theta) d\theta. \quad (11.17)$$

Звідси видно, що B_I залежить тільки від різниці $t - t'$, тобто процес $I(t)$ є стаціонарним у широкому розумінні. Зокрема, якщо вважати тривалість τ_{np} елементарних імпульсів нехтовно малою, тобто

покласти $F(t) = \delta(t)$, то інтеграл (11.17) обчислюється і процес $I(t)$ виявляється δ -корельованим, тобто білим шумом:

$$B_I(t, t') = e \langle I \rangle \delta(t - t'). \quad (11.18)$$

11.2. Енергетичний спектр дробового шуму

Перетворення Фур'є від формули (11.17) за різницевою змінною $\tau = t' - t$ приводить до наступного виразу для енергетичного спектра дробового шуму:

$$S_I(\omega) = \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\tau + \theta) d\theta. \quad (11.19)$$

Змінимо в (11.19) порядок інтегрування і введемо амплітудний спектр $C_F(\omega)$ імпульсу струму $F(t)$:

$$C_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (11.20)$$

Тоді $S_I(\omega)$ перетворюється так:

$$\begin{aligned} S_I(\omega) &= \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau + \theta) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) e^{i\omega\theta} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta') e^{-i\omega\theta'} d\theta' = 2\pi e \langle I \rangle |C_F(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (11.21)$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла ми скористалися заміною змінної $\theta' = \tau + \theta$.

Для гранично низьких частот, коли $\omega\tau_{np} \ll 1$, множник $e^{-i\omega\tau}$ в (11.20) можна замінити на одиницю. В результаті отримуємо

$$C_F(\omega) \approx \frac{1}{2\pi}, \quad |\omega| \ll \frac{1}{\tau_{np}}. \quad (11.22)$$

Підставляючи цю оцінку в (11.21), приходимо до **формули Шоттки**

$$S_I(\omega) = \frac{e \langle I \rangle}{2\pi}. \quad (11.23)$$

Таким чином, **спектр низькочастотних флуктуацій** ($\omega\tau_{np} \ll 1$) **дробового шуму визначається тільки величиною середнього струму $\langle I \rangle$ і не залежить від частоти.**

Приклад

Поведінка спектра $S_I(\omega)$ на більш високих частотах згідно з (11.21) повністю визначається формою елементарного імпульсу струму $F(t)$, характерного для електровакуумного приладу, що розглядається. Як найпростіший приклад визначимо вигляд $F(t)$ під час руху електрона від катода до анода в плоскому діоді (рис.11.3).

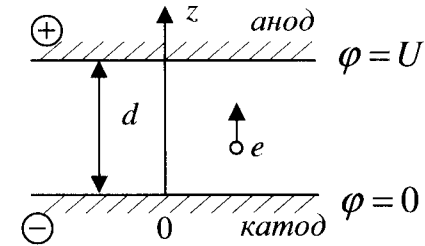


Рис. 11.3

Позначимо через d відстань, а через U — різницю потенціалів між катодом і анодом. Для визначення сили, що діє на електрон у просторі між катодом і анодом необхідно спочатку обчислити

напруженість електростатичного поля $\vec{E} = -\nabla\varphi$, де φ – електростатичний потенціал усередині конденсатора. Розподіл φ знаходиться із розв’язку рівняння Пуассона із заданими умовами на границях (обкладках конденсатора):

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \varphi_{z=0} = 0, \\ \varphi_{z=d} = U. \end{cases} \quad (11.24)$$

За умови, що лінійні розміри L плоского конденсатора набагато перевищують відстань між його обкладками ($L \gg d$), можна вважати, що потенціал φ залежить тільки від z -ї координати. При

цьому $\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dz^2}$ і розв’язок рівняння Пуассона (11.24) має

простий вигляд $\varphi(z) = \frac{U}{d}z$. У результаті для напруженості електростатичного поля і сили, що діє на електрон ($\vec{F} = -e\vec{E}$), отримуємо наступні вирази:

$$\vec{E} = -E\vec{e}_z, \quad E = \frac{U}{d}; \quad \vec{F} = F\vec{e}_z, \quad F = eE = e\frac{U}{d}. \quad (11.25)$$

З (11.25) видно, що сила, яка діє на електрон, всюди спрямована вздовж додатного напрямку осі z , стала і дорівнює eE . Електрон, пересуваючись уздовж осі z , на інтервалі шляху dz отримує енергію $dW = Fdz = eEdz$ і потужність

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = eE\left(\frac{dz}{dt}\right) = eEV(t), \quad (11.26)$$

де $V(t) = \frac{dz}{dt}$ – швидкість руху електрона.

З іншого боку, під час руху електрон наводить на обкладках конденсатора (діода) індукований заряд q , зміни якого у часі призводять до появи в електричному колі імпульсу струму $i(t)$. При цьому потужність в електричному колі дорівнює добутку струму $i(t)$ на різницю потенціалів U :

$$P(t) = i(t)U. \quad (11.27)$$

З порівняння (11.26) і (11.27) отримуємо, що

$$i(t) = \frac{e}{d}V(t). \quad (11.28)$$

Швидкість електрона $V(t)$ можна знайти з одновимірного рівняння руху: $m\frac{dV}{dt} = F = eE$. З припущення, що у момент вильоту електрон мав нульову швидкість ($V(t)|_{t=0} = 0$), отримуємо

$$V(t) = \frac{eE}{m}t. \quad (11.29)$$

Видно, що залежність $i(t)$ виявляється лінійною:

$$i(t) = \frac{e^2E}{md}t. \quad (11.30)$$

З очевидного співвідношення

$$\int_0^{\tau_{np}} V(t) dt = d, \quad (11.31)$$

визначимо час прольоту τ_{np} електрона від катода до анода. Підставляючи у (11.31) знайдену залежність (11.29) та інтегруючи за t , знаходимо

$$d = \frac{eE}{2m} \tau_{np}^2. \quad (11.32)$$

Замінивши d в (11.30) на вираз (11.32) й увівши функцію форми $F(t) = i(t)/e$, приходимо до такого:

$$F(t) = \frac{2t}{\tau_{np}^2}, \quad (0 \leq t \leq \tau_{np}). \quad (11.33)$$

Визначимо тепер $C_F(\omega)$ за формулою (11.20), враховуючи, що $F(t) = 0$ поза інтервалом $[0, \tau_{np}]$

$$C_F(\omega) = \frac{1}{\pi \tau_{np}^2} \int_0^{\tau_{np}} t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\pi \theta^2} [e^{-i\theta} (1 + i\theta) - 1]. \quad (11.34)$$

Тут $C_F(\omega)$ подано у вигляді функції кута прольоту $\theta = \omega \tau_{np}$. В результаті для енергетичного спектра $S_I(\omega)$ флуктуацій струму (11.21) отримуємо

$$S_I(\omega) = \frac{2e \langle I \rangle}{\pi \theta^4} \{2 + \theta^2 - 2 \cos \theta - 2\theta \sin \theta\}. \quad (11.35)$$

Легко переконатися, що при малих кутах прольоту ($\theta \ll 1$) (низькі частоти) з (11.35) ми приходимо до формули Шоттки (11.23).

11.3. Еквівалентний шумовий опір

Дробовий шум в анодному колі (рис. 11.4) іноді зручно розглядати як результат теплових флуктуацій ЕРС у колі сітки, котрі **виникають в еквівалентному шумовому опорі R_c** , що перебуває при температурі T . Флуктуації $E(t)$ у сітковому колі

викликають в анодному колі флуктуації струму $I(t) = SE(t)$, де S — крутизна анодної характеристики лампи.

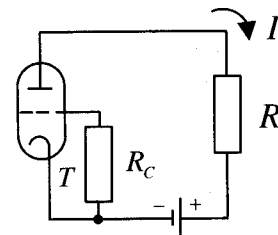


Рис. 11.4

Оскільки згідно з формулою Найквіста спектр флуктуацій ЕРС у колі сітки дорівнює $S_E = \frac{kT}{\pi} R_c$, то спектр флуктуацій струму $S_I(\omega)$ в анодному колі має вигляд

$$S_I(\omega) = S^2 S_E = \frac{kT}{\pi} R_c S^2. \quad (11.36)$$

Прирівнюючи цю величину до виразу для $S_I(\omega)$, визначеного формулою Шоттки (11.23), отримуємо

$$R_c = \frac{e \langle I \rangle}{2kTS^2}. \quad (11.37)$$

Формула (11.37) і визначає величину еквівалентного шумового опору.

ЗАДАЧІ

1. Знайти кореляційну функцію і проаналізувати енергетичний спектр дробового струму при заданій функції форми поодинокого імпульсу:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\tau_{np}^2}, & 0 \leq t \leq \tau_{np} \\ t < 0, & t > \tau_{np} \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язок За умовою задачі $F(t)$ має вигляд, зображений на рис. 11.5.

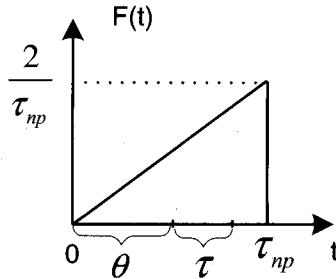


Рис. 11.5

Згідно з (11.17) кореляційна функція струму $B_I(\tau)$, записана у змінних θ і τ , подається як

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta + \tau)d\theta, \quad (2)$$

де \bar{I} — середнє значення струму. Границі інтегрування у (2) вибираються, виходячи із заданого вигляду (1) функції $F(t)$. Поточна точка визначається координатою θ , τ — часовий зсув для визначення кореляції (див. рис. 11.5). Цей зсув може бути як додатним, так і від'ємним.

Розглянемо спочатку випадок $\tau > 0$. За умовою задачі $F(t) = 0$ при $t < 0$ і $t > \tau_{np}$. Отже, $B_I(\tau)$ буде відмінною від нуля за умови виконання наступних нерівностей (див. (2)):

$$0 < \theta < \tau_{np} \quad \text{і} \quad 0 < (\theta + \tau) < \tau_{np}.$$

Перетворимо ці нерівності до вигляду: $0 < \theta < \tau_{np}$ і $-\tau < \theta < \tau_{np} - \tau$. Зобразимо крайні точки цих нерівностей на осі (рис. 11.6).

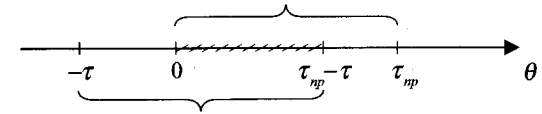


Рис. 11.6

Видно, що обидві нерівності одночасно виконуватимуться тільки за умови перебування θ в інтервалі $0 < \theta < \tau_{np} - \tau$ (заштрихована ділянка). Таким чином, ми приходимо до наступного визначення:

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_0^{\tau_{np}-\tau} \frac{2\theta}{\tau_{np}^2} \frac{2(\theta + \tau)}{\tau_{np}^2} d\theta = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - \tau)^2 (\tau + 2\tau_{np}), \quad (3)$$

яке справджується для $0 \leq \tau \leq \tau_{np}$. Аналогічним чином отримується і вираз для $B_I(\tau)$ при від'ємних значеннях τ : $-\tau_{np} \leq \tau \leq 0$. У цьому випадку, проте, зручніше продовжити парним способом (3) в область від'ємних τ ($\tau < 0$). У результаті отримуємо наступний остаточний вираз:

$$B_I(\tau) = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - |\tau|)^2 (|\tau| + 2\tau_{np}). \quad (4)$$

Графік залежності $B_I(\tau)$ подано на рис. 11.7.

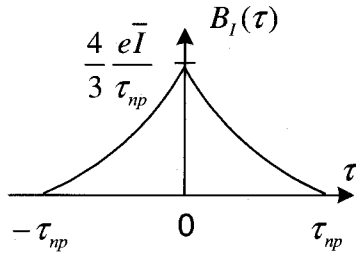


Рис.11.7

Видно, що $B_I(\tau)$ має максимальне значення при $\tau=0$, а при $\tau=\pm\tau_{np}$ набуває мінімальних значень, дорівнюваних нулю.

Енергетичний спектр $S_I(\omega)$ для $F(t)$ функції, що розглядається, визначається згідно з (11.35):

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^4} (2 + \theta^2 - 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta), \quad (5)$$

де $\theta = \omega\tau_{np}$ – безрозмірний кут прольоту. Проаналізуємо цей вираз при різних значеннях θ (частоти ω). При $\theta \ll 1$ (низькі частоти) подавши $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$ і $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$ отримаємо

$$S_I(\theta) \approx \frac{e\bar{I}}{2\pi}. \quad (6)$$

При великих $\theta \gg 1$ (високі частоти) у формулі (5) можна залишити в дужках тільки доданок θ^2 , в результаті чого знаходимо

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^2}. \quad (7)$$

Звідси випливає, що на високих частотах $S_I(\omega) \sim 1/\omega^2$. Графік $S_I(\omega)$ показано на рис. 11.8.

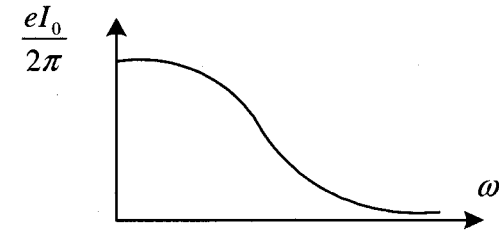


Рис. 11.8

2. Знайти кореляційну функцію й енергетичний спектр дробового струму імпульсного пуассонівського випадкового процесу

$$I(t) = e \sum_v F_v(t),$$

де $F_v(t) = \delta(t - t_v)$, t_v — пуассонівський потік подій, причому середня кількість імпульсів за одиницю часу дорівнює n_1 .

Розв'язок. Проводячи обчислення, аналогічні до таких у попередній задачі і використовуючи властивість δ -функції, отримуємо

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta) \delta(\theta + \tau) d\theta = e\bar{I} \delta(\tau),$$

$$S_I(\omega) = \frac{e\bar{I}}{2\pi},$$

де $\bar{I} = en_1$.

§ 12. Флуктуації в автоколивальних системах

Розглянуті у попередніх параграфах теплові і дробові флуктуації є причиною появи шумів і в складніших радіотехнічних схемах, зокрема в генераторах коливальних. Розрізняють генератори із самозбудженням і з зовнішнім збудженням. Генератори з самозбудженням називають також автогенераторами. Для збудження коливальних у них використовується позитивний зворотний зв'язок або активний прилад, що має ділянку характеристики з від'ємним нахилом. Характерні схеми автогенераторів з індуктивним зворотним зв'язком, у яких використовуються різні активні елементи, показано на рис. 12.1 (а — на біполярному транзисторі, б — на польовому транзисторі, в — на електронній лампі). Для дослідження статистичних характеристик флуктуацій в автоколивальних системах ми розглянемо вже класичний нині приклад найпростішого генератора на триелектродній електронній лампі з індуктивним зворотним зв'язком і коливальним контуром у анодному колі (рис. 12.1 в).

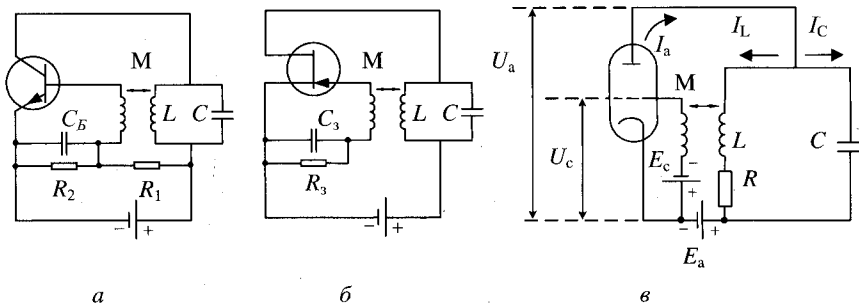


Рис. 12.1

12.1. Побудова замкнутого рівняння для сили струму

Нехай у коливальному контурі в анодному колі (рис. 12.1 в) з якоїсь причини виникли коливання. Тоді вони матимуть місце у всіх колах генератора, що розглядається. Позначимо через I_L і I_C відповідно струми через індуктивний і ємнісний ланцюжки

контурі. Враховуючи, що активний опір R у контурі є джерелом теплової флуктуації ЕРС $E(t)$ за законом, Кірхгофа, маємо

$$L \frac{dI_L}{dt} + RI_L - \frac{1}{C} \int I_C(t') dt' = E(t). \quad (12.1)$$

З іншого боку умова рівності струмів у вузлі дає

$$I_L + I_C = I_a. \quad (12.2)$$

Після диференціювання (12.1) за t з урахуванням (12.2), отримаємо

$$L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + R \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{C} I_L - \frac{1}{C} I_a = \frac{dE(t)}{dt}. \quad (12.3)$$

Врахуємо тепер, що анодний струм I_a підлягає флуктуаціям за рахунок дробового шуму. Позначимо через J_a складову анодного струму без урахування дробових флуктуацій. Тоді сумарний анодний струм I_a подається як

$$I_a = J_a + I_{др}. \quad (12.4)$$

Складова J_a залежить від різниці потенціалів між сіткою і катодом U_c , а також між анодом і катодом U_a . З теорії електровакуумних пристроїв відомо, що J_a є функція так званої **керуючої напруги**:

$$U_y = U_c + D U_a, \quad (12.5)$$

де D ($D < 1$) – параметр, який називають **проникністю**. Величина D залежить від екрануючої дії сітки і визначається головним чином її густиною: чим гущіша сітка, тим більшу кількість силових ліній поля анода вона перехопить, і тим меншою є проникність лампи. Залежність $J_a(U_y)$ звичайно нелінійна і має характерний

вигляд, показаний на рис. 12.2. Відповідним підбором сталого зміщення $U_y = U_0$ вибираємо потрібний режим роботи лампи. Точка P на характеристиці лампи, що відповідає режимові відсутності коливань, називається „точкою спокою”.

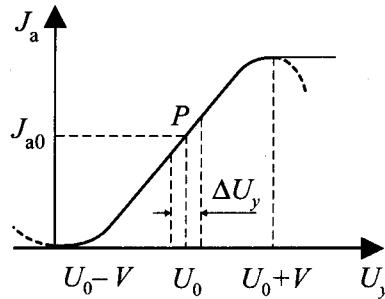


Рис. 12.2

Нехай точка спокою суміщена з точкою перегинання кривої $J_a(U_y)$ $\left(\frac{d^2 J_a(U_0)}{dU_y^2} = 0\right)$. У цьому випадку для незначних відхилень $\Delta U_y = U_y - U_0$ керуючого сигналу U_y від значення U_0 , зміни анодного струму $J_a(U_y)$ можна приблизно визначити, якщо представити характеристику лампи поліномом третього степеня.

$$J_a(U_y) \approx J_{a0} + S \left[\Delta U_y - \frac{(\Delta U_y)^3}{3V^2} \right] \quad (12.6)$$

Тут $J_{a0} = J_a(U_0)$ – постійний анодний струм, що відповідає робочій точці; $S = dJ_a(U_0)/dU_y$ – крутизна характеристики у точці P ; а

$$V = \left[-\frac{2S}{d^3 J_a(U_0)/d^3 U_y} \right]^{\frac{1}{2}} -$$

параметр, що має розмірність напруги і характеризує нелінійність кривої у точці спокою. Заміна істинної кривої $J_a(U_y)$ (її показано суцільною лінією на рис. 12.2) на приблизну залежність (12.6) (штрихова лінія) з одного боку достатньо добре описує перетворення невеликих коливань у лампі, а з іншого – дає змогу враховувати нелінійні процеси.

Якщо омичним опором контуру можна знехтувати, то керуюча напруга у робочій точці U_0 пов'язана з ЕРС у колах сітки E_c і анода E_a наступним співвідношенням:

$$U_0 = E_c + DE_a. \quad (12.7)$$

Згідно з рис. 12.1в анодна напруга U_a дорівнює ЕРС в анодному колі E_a , без спада напруги на індуктивному колі контуру:

$$U_a = E_a - \left(L \frac{dI_L}{dt} + RI_L \right). \quad (12.8)$$

Напруга на сітці U_c в свою чергу за рахунок зворотного зв'язку M визначається ЕРС у колі сітки E_c і швидкістю зміни струму I_L в контурі:

$$U_c = E_c + M \frac{dI_L}{dt}. \quad (12.9)$$

Підставляючи (12.8, 12.9) в формулу для керуючої напруги (12.5), отримаємо

$$\begin{aligned} U_y = U_c + DU_a &= E_c + DE_a + (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L = \\ &= U_0 + (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \end{aligned}$$

Звідси, згідно з визначенням $\Delta U_y = U_y - U_0$ знаходимо змінну складову керуючої напруги:

$$\Delta U_y = (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \quad (12.10)$$

Якщо знехтувати реакцією анодного навантаження, тобто покласти $D = 0$, то останній вираз спрощується і набуває вигляду

$$\Delta U_y = M \frac{dI_L}{dt}. \quad (12.11)$$

Для спрощення подальшого аналізу ми будемо користуватися наближеною формулою (12.11). Зауважимо тільки, що врахування реакції анодного навантаження зводиться в основному до формальної заміни M на $M' = M - DL$.

Введемо тепер у розгляд змінну складову струму $I = I_L - J_{a0}$ і перепишемо вихідне рівняння (12.3) з урахуванням визначень (12.4), (12.6), а також зв'язку між ΔU_y і I_L (12.11):

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \left\{ I - SM \frac{dI}{dt} \left[1 - \frac{M^2}{3V^2} \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 \right] \right\} = \frac{dE(t)}{dt} + \frac{1}{C} I_{op}. \quad (12.12)$$

Розділимо обидві частини рівняння (12.12) на L і введемо власну частоту контуру $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Після цього, перенісши у праву частину нелінійні за I доданки, поява яких пов'язана з нелінійністю анодної характеристики лампи (12.6), і неконсервативний доданок $R \frac{dI}{dt}$, завдяки якому враховуються теплові втрати у системі,

приходимо до такого рівняння:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 SM \frac{dI}{dt} \left\{ 1 - \frac{RC}{SM} - \frac{M^2}{3V^2} \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 I_{op}. \quad (12.13)$$

Введемо у розгляд безрозмірний час $t' = \omega_0 t$, диференціювання за яким будемо позначати крапкою вгорі:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \omega_0 \dot{I}. \quad (12.14)$$

З урахуванням (12.14) рівняння (12.13) набуває вигляду

$$\ddot{I} + I = \mu \dot{I} \left\{ p - \frac{4}{3} \frac{\dot{I}^2}{I_0^2} \right\} + \frac{1}{L\omega_0} \dot{E} + I_{op}, \quad (12.15)$$

де використано наступні позначення:

$$\mu = \omega_0 SM; \quad p = 1 - \frac{RC}{SM}; \quad I_0 = \frac{2V}{\omega_0 M}. \quad (12.16)$$

Нарешті розділимо обидві частини рівняння (12.15) на I_0 і введемо безрозмірний струм $x = I/I_0$:

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} \left\{ p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right\} + \mu F(t'). \quad (12.17)$$

Через $\mu F(t')$ ми позначили „зовнішні сили”, що викликають флуктуації у цій коливальній системі – **теплові і дробові шуми**:

$$\mu F(t') = \frac{1}{I_0} \left\{ \frac{1}{L\omega_0} \dot{E}(t') + I_{op}(t') \right\}. \quad (12.18)$$

12.2. Укорочені рівняння Ван-дер-Поля

При $\mu = 0$ рівняння (12.17) переходить у рівняння для ідеального гармонійного осцилятора

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (12.19)$$

яке описує незатухаючі гармонійні коливання струму в контурі з нескінченно високою добротністю:

$$x(t') = r \cos(t' + \varphi). \quad (12.20 \text{ а})$$

Сталі інтегрування r і φ мають зміст амплітуди і фази коливань відповідно. Якщо зовнішні сили $\mu F(t')$, нелінійні і дисипативні доданки є достатньо малими ($\mu \ll 1$), то коливання, що описуються рівнянням (12.17), будуть мало відрізнятися від гармонійних коливань (12.20 а). У цьому випадку розв'язок рівняння (12.17) можна шукати у вигляді

$$x(t') = r(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)], \quad (12.20 \text{ б})$$

де амплітуда r і фаза φ є функціями „повільного часу” $\theta = \mu t'$.

Перед тим, як проводити аналіз розв'язку, зробимо деякі зауваження стосовно вихідного рівняння (12.17), яке ми перепишемо у загальнішій формі:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \mu F(t'), \quad (12.21)$$

де $\mu \ll 1$, а $f(x, \dot{x})$ – деяка детермінована нелінійна функція x і \dot{x} , що визначається типом автоколивальної системи. Для найпростішого генератора, який розглядається,

$$f\left(x, \dot{x}\right) = \dot{x} \left(p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right). \quad (12.22)$$

До вигляду (12.21) зводяться рівняння, що описують коливання у широкому класі автоколивальних „майже гармонійних” пристроїв (лампові генератори, генератори на напівпровідникових елементах, квантові й оптичні генератори тощо). Системи, в яких під дією малих нелінійних і дисипативних членів ($\mu \ll 1$) відбуваються майже гармонійні коливання, називаються **томсонівськими**. Розв'язок диференціальних рівнянь,

якими вони описуються, можна проводити у межах наближеного (асимптотичного) **методу Ван-дер-Поля**, або, як його інакше називають, **методу повільних збурень**.

Для вибраного виду розв'язку (12.20б) обчислимо другу похідну \ddot{x} із точністю до лінійних за $\mu \ll 1$ членів:

$$\dot{x} = -r \sin(t' + \varphi) + \mu \frac{dr}{d\theta} \cos(t' + \varphi) - \mu r \frac{d\varphi}{d\theta} \sin(t' + \varphi), \quad (12.23)$$

$$\ddot{x} \approx -r \cos(t' + \varphi) - 2\mu \frac{dr}{d\theta} \sin(t' + \varphi) - 2\mu r \frac{d\varphi}{d\theta} \cos(t' + \varphi). \quad (12.24)$$

Підставимо (12.24) у рівняння (12.21). Доданки нульового порядку за μ , як і слід було очікувати, скорочуються, а лінійні члени приводять до рівняння

$$-2 \left[\frac{dr}{d\theta} \sin(t' + \varphi) + r \frac{d\varphi}{d\theta} \cos(t' + \varphi) \right] = f(x, \dot{x}) + F(t'), \quad (12.25)$$

причому у правій частині цієї формули в аргументах функції f слід ураховувати тільки головні за малим параметром μ доданки:

$$x = r \cos(t' + \varphi); \quad \dot{x} = -r \sin(t' + \varphi). \quad (12.26)$$

Функція $f(x, \dot{x})$ є періодичною функцією від змінної $\Theta = t' + \varphi$ з періодом 2π , оскільки її аргументи x і \dot{x} є тригонометричними функціями (12.26) від Θ . Тому $f(x, \dot{x})$ можна розкласти у ряд Фур'є на інтервалі $0 \leq \Theta \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= f(r \cos \Theta, -r \sin \Theta) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\Theta + b_n(r) \sin n\Theta]. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Тут $a_n(r)$ і $b_n(r)$ — коефіцієнти розкладання:

$$\begin{cases} a_n(r) \\ b_n(r) \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \Theta, -r \sin \Theta) \begin{cases} \cos n\Theta \\ \sin n\Theta \end{cases} d\Theta. \quad (12.28)$$

Для систем із достатньо високою добротністю коливання відбуваються тільки у невеликій області навколо резонансної частоти $\omega = \omega_0$. Дійсно, амплітуда r і фаза φ коливань є функціями повільного часу $\theta = \mu t'$. Останнє означає, що резонансна крива коливального контуру, що розглядається, має ширину смуги $\Delta_{\text{рез}} = |\omega/\omega_0| \approx 2\mu \ll 1$ (див. рис. 12.3). Ця обставина дає змогу нам здійснити ще кілька спрощень. По-перше, у правій частині рівняння (12.25) достатньо врахувати тільки резонансні доданки функції $f(x, \dot{x})$ — члени з $n=1$ у формулі (12.27). По-друге, зі всього широкого енергетичного спектра $S_F(\omega)$ випадкової зовнішньої сили $F(t')$ у рівнянні (12.25) можна залишити тільки ділянку спектра, що прилягає до частоти власних коливань системи $\omega = \omega_0$ (див. рис. 12.3).

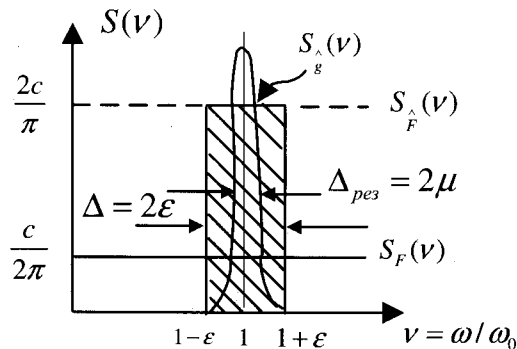


Рис. 12.3

Згідно з визначенням (12.18), випадкова сила $F(t')$, будучи суперпозицією теплових і дробових флуктуацій, близька до білого шуму. Виріжемо з її енергетичного спектра $S_F(\omega)$ деяку смугу частот шириною $\Delta = |\omega/\omega_0| = 2\varepsilon$, що задовольняє умові:

$$\mu \ll \varepsilon \ll 1. \quad (12.29)$$

З урахуванням малого значення ε істинний випадковий процес $F(t')$ можна замінити на вузькосмуговий — $g(t')$, який, як нам відомо з §6, може бути поданий у вигляді двох квадратурних компонент:

$$g(t') \approx F_{\parallel}(\theta) \cos(t' + \varphi) + F_{\perp}(\theta) \sin(t' + \varphi). \quad (12.30)$$

Підставляючи (12.30) в (12.25) і прирівнюючи коефіцієнти при кожній з двох лінійно незалежних функцій $\cos(t' + \varphi)$ і $\sin(t' + \varphi)$, приходимо до **системи рівнянь Ван-дер-Поля** для визначення повільних змін амплітуд $r(\theta)$ і фази $\varphi(\theta)$:

$$-2 \frac{dr}{d\theta} = b_1(r) + F_{\perp}(\theta), \quad (12.31 \text{ а})$$

$$-2r \frac{d\varphi}{d\theta} = a_1(r) + F_{\parallel}(\theta). \quad (12.31 \text{ б})$$

Рівняння (12.31) ще називають **укороченими рівняннями** — вони справді простіші і „коротші” за вихідне рівняння (12.21).

Повернемося до нашого конкретного прикладу — найпростішої автоколивальної системи, для якої $f(x, \dot{x})$ має вигляд

$$f(x, \dot{x}) = -r \sin \Theta \left[p - \frac{4}{3} r^2 \sin^2 \Theta \right]. \quad (12.32)$$

Із цього виразу випливає, що f — непарна функція від Θ , тому інтеграл (12.28) для $a_1(r)$ перетворюється на нуль, а для $b_1(r)$ маємо:

$$b_1(r) = -\frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \Theta \left(p - \frac{4}{3} r^2 \sin^2 \Theta \right) d\Theta. \quad (12.33)$$

Знаходження $b_1(r)$ зводиться до обчислення двох інтегралів:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \Theta d\Theta = 1 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \Theta d\Theta = \frac{3}{4},$$

в результаті чого отримуємо:

$$b_1(r) = -r(p - r^2). \quad (12.34)$$

З урахуванням (12.34) рівняння Ван-дер-Поля (12.31) набувають вигляду

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{2}(p - r^2) - \frac{1}{2}F_{\perp}(\theta), \quad (12.35 \text{ а})$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{2r}F_{\parallel}(\theta). \quad (12.35 \text{ б})$$

Таким чином, дослідження флуктуацій в автоколивальній системі звелось до розв'язку системи двох диференціальних рівнянь для амплітуди і фази коливань, які можна розглядати як рівняння руху динамічної системи, що описується двома параметрами r і φ , під дією випадкових зовнішніх сил F_{\parallel} і F_{\perp} . Легко бачити досить близьку аналогію між рівняннями (12.35) і рівнянням руху броунівської частинки (9.11).

12.3. Аналіз розв'язання укорочених рівнянь Ван-дер-Поля

Звернемося спочатку до аналізу розв'язань рівнянь (12.35) у випадку відсутності зовнішніх сил $F_{\perp} = F_{\parallel} = 0$, тобто дослідимо характер коливань в автономній системі (але, як і раніше, нелінійній і неконсервативній):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{2}(p - r^2), \quad (12.36 \text{ а})$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 0. \quad (12.36 \text{ б})$$

Із (12.36 б) випливає, що $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, а стосовно розв'язку нелінійного рівняння (12.36 а), то ми дамо його тільки на якісному рівні. Для наочності стан розглянутої динамічної системи будемо зображати точкою на площині з полярними координатами r (відстань до початку координат) і φ (азимутальний кут) — **площини Ван-дер-Поля**. З (12.36 б) випливає, що кут φ залишається сталим, тому точка, що зображує стан системи, може пересуватися тільки за променем $\varphi = \varphi_0$. Характер еволюції системи суттєво залежить від знака параметра p , який було введено у (12.16):

$$p = 1 - \frac{RC}{SM}. \quad (12.37)$$

Величина SM є добутком крутизни характеристики лампи S і коефіцієнта зворотного зв'язку M . Чим більша SM , тим легше самозбуджується система. Параметр RC враховує дисипативні втрати у системі (аналог механічного тертя).

При $p < 0$ (дисипація переважає над зворотним зв'язком) права частина (12.36 а) – від'ємна при будь-яких r , оскільки завжди $r > 0$. Отже, у цьому випадку $dr/d\theta < 0$, тобто точка на площині Ван-дер-Поля пересувається за променем $\varphi = \varphi_0$ до початку координат, доки не сягне стану рівноваги $r = 0$, де $dr/d\theta = 0$ (див. рис.12.4). Для переходу від площини Ван-дер-Поля до **фазової площини**, на якій стан системи задається значенням

„координати” x і „швидкості” \dot{x} згідно з формулами (12.26), необхідно площину Ван-дер-Поля обернути навколо початку координат з одиничною кутовою швидкістю проти годинникової

стрілки. При цьому фазова точка буде пересуватися за годинниковою стрілкою спірально до початку координат (рис.12.5) — амплітуда коливань у системі буде зменшуватися доти, доки коливання не згаснуть повністю ($r = 0$).

У протилежному граничному випадку $p > 0$ (зворотний зв'язок переважає над дисипацією) знак похідної $dr/d\theta$, як випливає з (12.36 а), залежить від амплітуди коливань r : при $r > r_0 = \sqrt{p}$ права частина (12.36 а) буде як і раніше від'ємною ($dr/d\theta < 0$) і точка A на площині Ван-дер-Поля буде пересуватися за променем $\varphi = \varphi_0$ до початку координат (див. рис 12.6); при $r < r_0$, навпаки, $dr/d\theta > 0$ і точка B на рис. 12.6 пересувається за радіусом від початку координат. Очевидно, що при $p > 0$ є два положення рівноваги: $dr/d\theta = 0$ при $r = 0$ і $r = r_0$. Найпростіше дослідження на стійкість показує, що тільки $r = r_0$ відповідає стійкій рівновазі. На фазовій площині траєкторії, що описують точки A і B , мають вигляд спіралей, які наближаються до кола $r = r_0$, котре називають **граничним циклом** (див. рис. 12.7).

Таким чином, при $p > 0$ система з будь-якого початкового стану виходить на стаціонарний режим гармонійних коливань зі сталими амплітудою r_0 і фазою φ_0 :

$$x_0(t') = r_0 \cos(t' + \varphi_0).$$

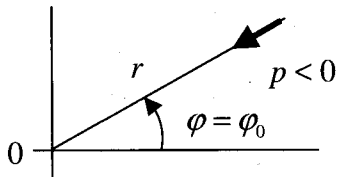


Рис. 12.4

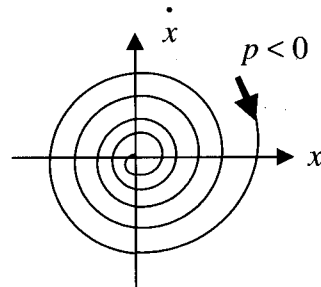


Рис. 12.5

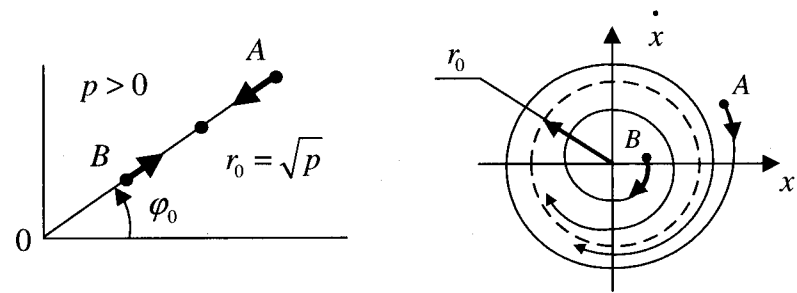


Рис. 12.6

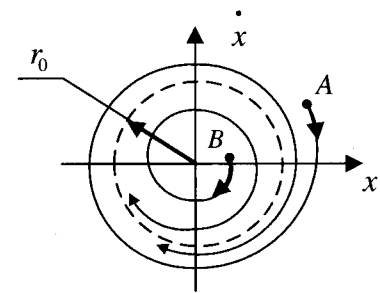


Рис. 12.7

12.4. Врахування випадкових факторів

Звернемося тепер до головного питання, яке нас цікавить: як змінюються коливання у системі при наявності теплового і дробового шуму? Для відповіді на це питання потрібно розв'язати рівняння (12.35) за наявності зовнішніх випадкових сил $F_{\perp}(\theta)$ і $F_{\parallel}(\theta)$. Найцікавішим при цьому є автоколивальний режим $p > 0$, що встановився, коли система вже вийшла на граничний цикл $r = r_0$. З якісної точки зору роль зовнішньої сили F_{\perp} в (12.35) зводиться до „зіштовхування” фазової точки циклу з граничного циклу (рис. 12. 8), тобто до збільшення або зменшення амплітуди r коливань — сила F_{\perp} діє ніби „перпендикулярно” до фазової траєкторії системи (ми не даремно ввели значок \perp , що означає перпендикулярність). Друга ж частина „проекції” сили — $F_{\parallel}(\theta)$ діє по дотичній до траєкторії, сповільнюючи або прискорюючи обертання фазової точки навколо початку координат, так що за рівні проміжки часу t' фазова точка описує не рівні кути (на рис. 12.8 радіуси з початку координат проведені до фазової точки через рівні проміжки часу).

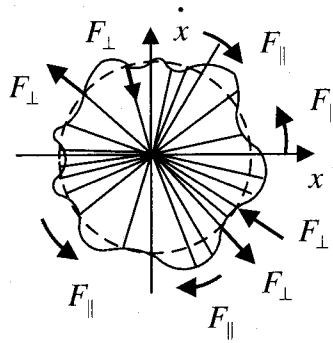


Рис. 12.8

Таким чином, наявність випадкових сил має призводити до флуктуацій як амплітуди коливань r , так і їх фази φ і, отже, частоти $d\varphi/d\theta$. Вважатимемо, що внаслідок дії „слабких” сил ($|F_{\parallel}(\theta)| \ll 1$, $|F_{\perp}(\theta)| \ll 1$) в автоколивальній системі виникають малі флуктуації. Це означає, що амплітуду коливань можна шукати за формулою $r(\theta) = r_0 + \rho(\theta)$, причому $|\rho| \ll r_0$. Підставивши такий розв’язок у (12.35 а) і, враховуючи тільки лінійні за $|\rho|/r_0 \ll 1$ і $|F_{\perp}(\theta)| \ll 1$ доданки, отримаємо

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \approx -\rho - \frac{1}{2} F_{\perp}(\theta). \quad (12.38)$$

У правій частині рівняння (12.35 б), враховуючи мале значення зовнішніх сил ($|F_{\parallel}(\theta)| \ll 1$), можна r замінити на r_0 . Як результат, у лінійному наближенні приходимо до рівнянь:

$$\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = -\frac{1}{2} F_{\perp}(\theta), \quad (12.39 \text{ а})$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{2r_0} F_{\parallel}(\theta). \quad (12.39 \text{ б})$$

Як початкові умови до цієї системи рівнянь зручно вибрати наступні: а) $\rho = 0$ при $\theta = -\infty$ (адіабатичне включення збурень у нескінченно далекому минулому); б) $\varphi = 0$ при $\theta = 0$ (фазу коливань можна відлічувати від довільного значення і, зокрема, від її значення при $\theta = 0$). Із рівнянням (12.39 а) ми вже стикалися у теорії броунівського руху (див. формулу (9.13)), так що ми можемо скористатися готовим розв’язком (9.17):

$$\rho(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1 - \theta)} F_{\perp}(\theta_1) d\theta_1. \quad (12.40 \text{ а})$$

Рівняння (12.39 б) також елементарно інтегрується:

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2r_0} \int_0^{\theta} F_{\parallel}(\theta_1) d\theta_1. \quad (12.40 \text{ б})$$

Отримані формули (12.40) дають змогу розв’язати динамічну частину поставленого завдання – виражають флуктуації амплітуди r і фази φ , які нас цікавлять, через випадкові сили F_{\perp} і F_{\parallel} . Очевидно, що для розв’язання статистичної задачі потрібно задатися статистичними параметрами цих випадкових сил. Зокрема, вважаючи, що $\langle F_{\perp} \rangle = \langle F_{\parallel} \rangle = 0$, отримуємо $\langle \rho \rangle = \langle \varphi \rangle = 0$.

Для визначення **дисперсій** флуктуацій амплітуди і фази:

$$\langle \rho^2(\theta) \rangle = \frac{1}{4} e^{-2p\theta} \int_{-\infty}^{\theta} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1 + \theta_2)} \langle F_{\perp}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2) \rangle d\theta_1 d\theta_2, \quad (12.41 \text{ а})$$

$$\langle \varphi^2(\theta) \rangle = \frac{1}{4r_0^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} \langle F_{\parallel}(\theta_1) F_{\parallel}(\theta_2) \rangle d\theta_1 d\theta_2 \quad (12.41 \text{ б})$$

нам знадобляться автокореляційні функції $\langle F_{\perp}(\theta_1)F_{\perp}(\theta_2) \rangle$ і $\langle F_{\parallel}(\theta_1)F_{\parallel}(\theta_2) \rangle$. Для їх знаходження попередньо побудуємо автокореляційну функцію сили $F(t')$, введenu формулою (12.18). Вважаючи, що флуктуації теплової ЕРС $E(t')$ і дробового струму $I_{dp}(t')$ між собою не корелюють, згідно з (12.18) отримаємо

$$\langle F(t'_1)F(t'_2) \rangle = \frac{1}{\mu^2 I_0^2} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 L^2} \langle \dot{E}(t'_1)\dot{E}(t'_2) \rangle + \langle I_{dp}(t'_1)I_{dp}(t'_2) \rangle \right\}. \quad (12.42)$$

Якщо обмежитися не надто великими частотами флуктуацій, для яких справджується формула Шоттки (11.23), то для автокореляційної функції дробового струму маємо:

$$\langle I_{dp}(t_1)I_{dp}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega \approx eJ_a \delta(t_2-t_1). \quad (12.43)$$

Тут ми врахували, що середнє значення $\langle I \rangle$, що входить у формулу Шоттки, згідно з визначенням (12.4) дорівнює J_a . Переходячи тепер до безрозмірного часу $t' = \omega_0 t$ і враховуючи, що

$$\delta(\omega_0 t) = \frac{1}{\omega_0} \delta(t), \text{ отримуємо:}$$

$$\langle I_{dp}(t'_1)I_{dp}(t'_2) \rangle = eJ_a \omega_0 \delta(t'_2 - t'_1). \quad (12.44)$$

Для корелятора похідних від флуктуацій теплової ЕРС $\dot{E}(t')$, користуючись формулою Найквіста, маємо

$$\langle \dot{E}(t'_1)\dot{E}(t'_2) \rangle = \frac{1}{\omega_0^2} \left\langle \frac{dE(t_1)}{dt_1} \cdot \frac{dE(t_2)}{dt_2} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2}{d\tau^2} R_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot S_E(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega = \langle E(t_1)E(t_2) \rangle = \\ &= 2kTR \delta(t_2 - t_1) = 2kTR \omega_0 \delta(t'_2 - t'_1). \end{aligned} \quad (12.45)$$

Ми врахували, що через високу добротність коливальної системи, що розглядається, під знаком інтеграла в (12.45) можна наближено покласти $\omega/\omega_0 \approx 1$ (див. рис.12.3).

Підставляючи (12.44) і (12.45) в (12.42), доходимо висновку, що випадкова сила $F(t')$ наближено дельта-корельована, тобто є білим шумом:

$$\langle F(t'_1)F(t'_2) \rangle = C \delta(t'_2 - t'_1), \quad (12.46)$$

де $C = C_{dp} + C_{тепл}$, причому

$$C_{dp} = \frac{eJ_a \omega_0}{\mu^2 I_0^2}, \quad C_{тепл} = \frac{2kTR}{\mu^2 I_0^2 \omega_0 L^2}. \quad (12.47)$$

З (12.46) випливає, що енергетичний спектр $S_F(\nu)$ сили $F(t')$ є сталим на всіх частотах $(-\infty < \nu < \infty)$:

$$S_F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F(t')F(t'+\tau') \rangle e^{-i\nu\tau'} d\tau' = \frac{C}{2\pi}. \quad (12.48)$$

Тут $\nu = \omega/\omega_0$ — безрозмірна частота, що відповідає безрозмірному часові $t' = \omega_0 t$.

Поставимо у відповідність до $F(t')$ аналітичний сигнал $\hat{F}(t')$. Його енергетичний спектр $S_{\hat{F}}(\nu)$ згідно з (6.51) дорівнює

$$S_{\hat{F}}(\nu) = \begin{cases} 4S_F(\nu) = \frac{2C}{\pi}, & \nu \geq 0; \\ 0, & \nu < 0. \end{cases} \quad (12.49)$$

З іншого боку, вузькосмуговий випадковий процес $g(t')$ (12.30) також можна розглядати як дійсну частину $g = \text{Re } \hat{g}$ аналітичного сигналу $\hat{g}(t')$:

$$\hat{g}(t') = [F_{\parallel}(t') - iF_{\perp}(t')] e^{i(t'+\varphi)}, \quad (12.50)$$

енергетичний спектр якого $S_{\hat{g}}(\nu)$ відмінний від нуля тільки у вузькій смузі частот $1-\varepsilon < \nu < 1+\varepsilon$, де він збігається зі спектром $S_{\hat{F}}(\nu)$ (див. рис. 12.3). Незважаючи на те, що ширина 2ε енергетичного спектра $S_{\hat{g}}(\nu)$ припускається достатньо малою ($\varepsilon \ll 1$) для того, щоб $\hat{g}(t')$ можна було вважати вузькосмуговим процесом, тим не менше, вона має бути вибрана суттєво більшою за ширину енергетичного спектра флуктуацій струму в контурі $x(t')$, яка приблизно дорівнює 2μ (див. нерівність (12.29) і рис. 12.3). Тому при $\varepsilon \gg \mu$ випадковий процес $\hat{g}(t')$ діє на струм у коливальному контурі так само, як і білий шум зі спектральною густиною $S_{\hat{g}}(\nu) = 2C/\pi$.

За відомим спектром $S_{\hat{F}}(\nu)$ можна визначити кореляційну функцію

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}^*(t'_2) \rangle = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} S_{\hat{F}}(\nu) e^{i\nu(t'_1-t'_2)} d\nu.$$

Враховуючи знову нерівність (12.29), границі інтегрування можна розтягнути від $-\infty$ до $+\infty$, після чого отримаємо

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}^*(t'_2) \rangle = 4C \delta(t'_2 - t'_1), \quad (12.51a)$$

тобто аналітичний сигнал $\hat{g}(t')$ так само, як і $F(t')$ наближено дельта-корельований (пор. з (12.46)). Із теорії аналітичного сигналу має місце також рівність (див. (6.52) і (6.53))

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}(t'_2) \rangle = 0. \quad (12.51 б)$$

Стосовно квадратурних складових F_{\parallel} і F_{\perp} , то їхні автокореляційні функції знаходяться з (12.51) з урахуванням подання \hat{g} у вигляді (12.50):

$$\begin{aligned} \langle F_{\parallel}(\theta_1) F_{\parallel}(\theta_2) \rangle &= \langle F_{\perp}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2) \rangle = \\ &= 2C \delta(t'_1 - t'_2) = 2C\mu \delta(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned} \quad (12.52)$$

де $\theta_1 = \mu t'_1$ і $\theta_2 = \mu t'_2$. Використаємо тепер (12.52) для обчислення дисперсій флуктуацій амплітуди і фази за формулами (12.41):

$$\langle \rho^2(\theta) \rangle = \frac{C\mu}{2} e^{-2p\theta} \int_{-\infty}^{\theta} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1+\theta_2)} \delta(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{C\mu}{4p}, \quad (12.53 а)$$

$$\langle \varphi^2(\theta) \rangle = \frac{C\mu}{2r_0^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} \delta(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{C\mu}{2p} \theta. \quad (12.53 б)$$

Висновки

1. Слід звернути увагу на той факт, що дисперсія флуктуацій амплітуди виявилася незалежною від часу. Якби крім $\langle \rho^2 \rangle$ ми таким самим чином розраховували б автокореляційну функцію $\langle \rho(\theta_1) \rho(\theta_2) \rangle$, то переконалися б, що вона залежить тільки від різниці часів $\theta_1 - \theta_2$, тобто $\rho(\theta)$ є стаціонарним випадковим процесом (принаймні, у широкому значенні).

2. Випадковий процес $\varphi(\theta)$ – не є стаціонарним, оскільки величина $\langle \varphi^2(\theta) \rangle$ зростає лінійно при збільшенні часу θ . Це, як ми бачили при дослідженні броунівського руху, є характерною

ознакою випадкових процесів дифузійного типу (див. §9), причому роль коефіцієнта дифузії D відіграє відношення:

$$D = \frac{\langle \varphi^2(\theta) \rangle}{2t} = \frac{C\mu^2\omega_0}{4p} \quad (12.54)$$

(ми врахували, що $\theta = \mu t' = \mu\omega_0 t$).

3. Із (12.53) видно також, що флуктуації амплітуди і фази зростають при зменшенні параметра p , тобто при наближенні до критичного значення $p = 0$, яке відділяє автоколивальний режим ($p > 0$ — режим генерації) від релаксаційного ($p < 0$, режим згасаючих коливань). Поблизу $p = 0$ стан системи є нестійким, і з цієї причини флуктуації можуть виявитися настільки великими, що формули (12.53) отримані за умови $|\rho| \ll r_0 = \sqrt{p}$, вже не зможуть застосовуватися.

4. Нарешті зазначимо, що теплові функції і дробовий шум дають адитивний вклад у величину флуктуацій амплітуди і фази. Їх відносна роль визначається співвідношенням:

$$\frac{C_{dp}}{C_{тепл}} = \frac{e}{2kT} U_C, \quad (12.55)$$

де U_C — амплітуда коливань різниці потенціалів на обкладках конденсатора C у коливальному контурі:

$$U_C = \frac{J_a L}{RC}. \quad (12.56)$$

При $T = 300K$ з (12.55) випливає:

$$\frac{C_{dp}}{C_{тепл}} \approx 17U_C, \quad [U_C] = B. \quad (12.57)$$

Таким чином, якщо $U_C > 1/17 B$, то переважає дробовий шум, а у протилежному випадку — теплові флуктуації.

Розділ IV ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ

§ 13. Випадкові поля і хвилі

У попередніх параграфах ми мали справу з одно-параметричними випадковими функціями $\xi(\alpha)$, де як параметр α , як правило, виступав час t . Залежності $\xi(\alpha)$ називаються **випадковими процесами**. Якщо ж йдеться про випадкову функцію більш ніж одного параметра $\xi(\alpha, \beta, \dots)$, то її називають **випадковим полем** (у просторі параметрів α, β, \dots). У задачах поширення хвиль, як правило, достатньо розглянути тільки чотири параметри: час t і три просторові координати, наприклад, $\vec{R} = (x, y, z)$. Поле $\xi(t, \vec{R})$ можна розглядати як поле у чотиривимірному просторі, але в нерелятивістських задачах переважно говорять про змінне (залежне від t) поле у тривимірному просторі (x, y, z) .

Випадкове поле може описуватися не однією, а N функціями $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$, $m = 1, 2, \dots, N$. У цьому випадку $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$ називається **N -вимірним випадковим полем у просторі (чотирьох) параметрів t, \vec{R}** . Наприклад, три компоненти напруженості електричного поля $\vec{E}\{E_x(t, \vec{R}), E_y(t, \vec{R}), E_z(t, \vec{R})\}$ утворюють тривимірне випадкове поле. З іншого боку, з чисто математичного погляду компоненти $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$ можуть бути чим завгодно і навіть не повинні мати однакові розмірності.

13.1. Статистичний опис випадкових полів

Для скорочення через $Q = (t, \bar{R})$ позначатимемо точку у чотиривимірному просторі. Повне задання одновимірного випадкового поля $\xi(Q)$ означає, що відомі всі його n -вимірні (або, як часто говорять, n -точкові ($n=1, 2, \dots$)) густини ймовірностей, тобто для будь-якого числа n довільно обраних точок Q_v відомі функції

$$W_n\{x_1, Q_1; \dots, x_n, Q_n\} dx_1 \dots dx_n = P\left\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v \quad (v=1, 2, \dots, n)\right\}, \quad (13.1)$$

де $P\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v\}$ – ймовірність того, що випадкова величина $\xi(Q)$ у точці $Q = Q_v$ набуває значення, що лежить в інтервалі $(x_v, x_v + dx_v]$.

Аналогічно, повне статистичне задання (опис) N -вимірного поля $\xi^{(m)}(Q)$ дається сукупністю nN -вимірних густин ймовірностей

$$W_{nN}\{x_1^{(1)}, Q_1; \dots, x_n^{(1)}, Q_n; x_1^{(2)}, Q_1; \dots, x_n^{(2)}, Q_n; \dots, x_1^{(N)}, Q_1; \dots, x_n^{(N)}, Q_n\} dx_1^{(1)} dx_1^{(2)} \dots dx_n^{(N)} = \\ = P\left\{x_v^{(m)} < \xi^{(m)}(Q_v) \leq x_v^{(m)} + dx_v^{(m)} \quad (v=1, 2, \dots, n, \quad m=1, 2, \dots, N)\right\}. \quad (13.2)$$

Аналогічно до розглянутих раніше випадкових процесів, можна показати, що густини ймовірностей повинні підкорятися умовам невід'ємності, симетрії, узгодженості й нормування.

13.2. Моменти випадкового поля

Знаючи багатовимірні густини ймовірностей, можна обчислити моменти випадкового поля ξ будь-якого порядку.

У загальному випадку ці моменти будуть функціями координат: $Q_v = (t_v, \bar{R}_v)$. У багатьох випадках найбільш цікавими є найнижчі моменти (першого і другого порядку), якими оперує кореляційна теорія випадкових полів.

Середнє значення випадкового поля $\xi(Q)$ (момент першого порядку) обчислюється за допомогою одновимірної густини ймовірностей $W_1(x, Q)$:

$$\langle \xi(Q) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x, Q) dx. \quad (13.3)$$

Флуктуаційну частину випадкового поля ξ позначатимемо як

$$\delta \xi \equiv \xi - \langle \xi \rangle \equiv \xi - \bar{\xi}. \quad (13.4)$$

Змішаний момент другого порядку R_ξ обчислюється за допомогою двовимірної густини ймовірностей $W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2)$:

$$R_\xi(Q_1, Q_2) = \langle \xi(Q_1) \xi(Q_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2) dx_1 dx_2. \quad (13.5)$$

Функція кореляції (точніше, **функція автокореляції**) B_ξ виражається через R_ξ :

$$B_\xi(Q_1, Q_2) = \langle \delta \xi(Q_1) \delta \xi(Q_2) \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \langle \xi(Q_1) \rangle] [x_2 - \langle \xi(Q_2) \rangle] \cdot W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2) dx_1 dx_2 = \\ = R_\xi(Q_1, Q_2) - \langle \xi(Q_1) \rangle \langle \xi(Q_2) \rangle. \quad (13.6)$$

Для випадкових полів з нульовим середнім значенням функції

$B_\xi(Q_1, Q_2)$ і $R_\xi(Q_1, Q_2)$ збігаються:

$$R_\xi(Q_1, Q_2) = B_\xi(Q_1, Q_2). \quad (13.7)$$

Дисперсія випадкового поля, тобто середній квадрат флуктуацій, дорівнює

$$\sigma_\xi^2(Q) = \langle \delta\xi^2(Q) \rangle = \langle [\xi(Q) - \langle \xi(Q) \rangle]^2 \rangle = B_\xi(Q, Q). \quad (13.8)$$

Багатовимірне поле $\xi^{(m)}(Q)$ характеризується сукупністю середніх значень $\langle \xi^{(m)}(Q) \rangle$ і **матрицею моментів другого порядку** з елементами

$$R_{ik}(Q_1, Q_2) = \langle \xi^{(i)}(Q_1) \xi^{(k)}(Q_2) \rangle. \quad (13.9)$$

З матрицею R_{ik} пов'язана і **кореляційна матриця** B_{ik} , елементи якої дорівнюють

$$\begin{aligned} B_{ik}(Q_1, Q_2) &= \langle \delta\xi^{(i)}(Q_1) \delta\xi^{(k)}(Q_2) \rangle = \\ &= R_{ik}(Q_1, Q_2) - \langle \xi^{(i)}(Q_1) \rangle \langle \xi^{(k)}(Q_2) \rangle. \end{aligned} \quad (13.10)$$

13.3. Статистично однорідні поля

Аналогічно до випадкових процесів, на випадкові поля поширюється і поняття статистичної однорідності. **Одновимірне випадкове поле** ξ називається **однорідним** (у вузькому розумінні), тобто стаціонарним за t і однорідним за \vec{R} , якщо всі n -вимірні густини ймовірностей W_n інваріантні відносно перетворення трансляції $Q_v \rightarrow Q_v + \delta Q$:

$$\begin{aligned} P\{x_v < \xi(Q_v + \delta Q) \leq x_v + dx_v, \quad v=1, 2, \dots, n\} = \\ = P\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v, \quad v=1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Аналогічне поняття статистичної однорідності можна ввести і для N -вимірного випадкового поля.

Поняття просторової однорідності для випадкових полів (інваріантність густин W_n відносно просторового зсуву $\vec{R} \rightarrow \vec{R} + \delta\vec{R}$) є природним узагальненням поняття стаціонарності для випадкових функцій часу. Але багатовимірність простору параметрів (наприклад, t, \vec{R}) відкриває нові можливості, а саме: випадкове поле може бути однорідним за одними параметрами, а за іншими – неоднорідним. Наприклад, поле стаціонарне за часом, але неоднорідне за простором, або поле однорідне за поверхнею сфери, але неоднорідне за радіусом та ін.

Поняття **статистичної однорідності у широкому розумінні** передбачає виконання умови трансляції тільки для одноточкової W_1 та двоточкової W_2 густин ймовірностей.

Наслідки

Розглянемо спочатку поля, що залежать тільки від просторових координат, тобто не залежать від часу t : $Q = (\vec{R})$. Для статистично однорідного (у широкому розумінні) поля $\xi(\vec{R})$ інваріантність відносно зсуву $\vec{R} \rightarrow \vec{R} + \delta\vec{R}$ повинна виконуватися тільки для середнього значення і для моментів другого порядку:

$$\langle \xi(\vec{R}) \rangle = \langle \xi(\vec{R} + \delta\vec{R}) \rangle, \quad (13.12)$$

$$B_\xi(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = B_\xi(\vec{R}_1 + \delta\vec{R}, \vec{R}_2 + \delta\vec{R}). \quad (13.13)$$

Умова (13.12) означає, що $\langle \xi \rangle = \text{Const}$, тобто **середнє значення є сталою величиною**. Справді, обравши $\delta \vec{R} = -\vec{R}$, отримаємо $\langle \xi(\vec{R}) \rangle = \langle \xi(0) \rangle = \text{Const}$.

Поклавши у (13.13) $\delta \vec{R} = -\vec{R}_2$ (або $\delta \vec{R} = -\vec{R}_1$), знаходимо, що

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) &= B_{\xi}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, 0) = B_{\xi}(0, \vec{R}_2 - \vec{R}_1) = \\ &= B_{\xi}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) = B_{\xi}(\vec{R}_2 - \vec{R}_1). \end{aligned} \quad (13.14)$$

З (13.14) випливає, що для **статистично однорідних полів автокореляційна функція B_{ξ} залежить тільки від різниці $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$** (але не від \vec{R}_1 і \vec{R}_2 окремо), причому $B_{\xi}(\vec{\rho}) = B_{\xi}(-\vec{\rho})$. Крім цього, для дисперсії випадкового поля маємо

$$\sigma_{\xi}^2(\vec{R}) = B_{\xi}(\vec{R}, \vec{R}) = B_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2(0) = \text{Const}. \quad (13.15)$$

Статистично однорідні поля, у яких $B_{\xi}(\vec{\rho})$ залежить тільки від модуля (але не від напрямку) вектора $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$, що з'єднує точки \vec{R}_1 і \vec{R}_2 ,

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = B_{\xi}(\rho), \quad (13.16)$$

де $\rho = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$, називаються **статистично ізотропними**. Прикладом кореляційної функції однорідного й ізотропного поля може слугувати кореляційна функція у вигляді гауссової залежності:

$$B_{\xi}(\rho) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\rho^2/2l^2}, \quad (13.17)$$

де l – **радіус кореляції поля**.

У статистично однорідних, але **анізотропних полів** функції $B_{\xi}(\vec{\rho})$ залежать не тільки від модуля, але й від напрямку вектора $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$. Приклад:

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \sigma_{\xi}^2 \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{2a^2} - \frac{\rho_y^2}{2b^2} - \frac{\rho_z^2}{2c^2} \right\}. \quad (13.18)$$

Величини a, b, c характеризують масштаби просторової кореляції у напрямках x, y і z . Якщо $a = b = c = l$, то анізотропний розподіл (13.18) переходить в ізотропний (13.17).

13.4. Спектральні зображення для однорідних випадкових полів

Запишемо формальний розклад флуктуаційної компоненти $\delta \xi(\vec{R})$ однорідного випадкового поля у трикратний інтеграл Фур'є:

$$\delta \xi(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi}. \quad (13.19)$$

Тут $C_{\xi}(\vec{\chi})$ – **просторова спектральна амплітуда поля $\delta \xi(\vec{R})$** . Запишемо і обернене перетворення Фур'є:

$$C_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \xi(\vec{R}) e^{-i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{R}. \quad (13.20)$$

Так само, як і у §6, перетворення (13.19) ми назвали формальним тому, що однорідне випадкове поле $\delta \xi(\vec{R})$ у загальному випадку не відповідає вимозі спадання на нескінченності і, отже, трансформанти Фур'є $C_{\xi}(\vec{\chi})$ не існує. Для

того, щоб надати спектральним розкладам випадкових полів коректного математичного смислу, необхідно було б спочатку припустити, що поле $\delta\xi(\vec{R})$ однорідне всередині якогось великого, але скінченного об'єму V і швидко спадає до нуля за його межами:

$$\delta\xi_V(\vec{R}) = \begin{cases} \delta\xi(\vec{R}), & \vec{R} \in V; \\ 0, & \vec{R} \notin V. \end{cases}$$

Тоді, побудувавши квадратичні корелятори $\langle \delta\xi_V(\vec{R}_1) \delta\xi_V(\vec{R}_2) \rangle$ і $\langle C_{V\xi}(\vec{\chi}_1) C_{V\xi}(\vec{\chi}_2) \rangle$, слід переходити до нескінченних розмірів області V і встановлювати зв'язок між кореляторами через перетворення Фур'є. Ми, однак, не використовуватимемо таких прийомів, а вважатимемо, що інтеграли (13.19) і (13.20) існують у розумінні ймовірнісної збіжності, а саме — у середньому квадратичному.

Властивості спектральних перетворень однорідних полів

Згідно з (13.19), побудуємо перетворення Фур'є від комплексно спряженої величини:

$$\delta\xi^*(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(\vec{\chi}) e^{-i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(-\vec{\chi}) e^{\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi}. \quad (13.21)$$

Враховуючи, що для дійсного поля $\delta\xi^* = \delta\xi$, а також прирівнюючи (13.21) і (13.19), отримаємо так звану **властивість ермітовості**:

$$\begin{aligned} C_{\xi}^*(-\vec{\chi}) &= C_{\xi}(\vec{\chi}), \\ C_{\xi}(-\vec{\chi}) &= C_{\xi}^*(\vec{\chi}). \end{aligned} \quad (13.22)$$

Функція автокореляції випадкового поля $\delta\xi(\vec{R})$ може бути подана так:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) &= \langle \delta\xi(\vec{R}_1) \delta\xi(\vec{R}_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}'' \langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}(\vec{\chi}'') \rangle e^{i(\vec{\chi}'\vec{R}_1 + \vec{\chi}''\vec{R}_2)}. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Виконаємо деякі перетворення у (13.23). По-перше, проведемо заміну змінних $\vec{\chi}'' = -\vec{\chi}''$, і, по-друге, введемо позначення $\vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{\rho}$, $\vec{R}_2 = \vec{R}$. З урахуванням властивості ермітовості (13.22), у результаті отримаємо

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\vec{R}, \vec{\rho}) &= \langle \delta\xi(\vec{R} + \vec{\rho}) \delta\xi(\vec{R}) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}'' \langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle e^{i[(\vec{\chi}' - \vec{\chi}'')\vec{R} + \vec{\chi}'\vec{\rho}]}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Для однорідного випадкового поля функція кореляції B_{ξ} має залежати тільки від різницевої змінної $\vec{\rho}$ і не повинна залежати від сумарної \vec{R} . Це можливо, якщо корелятор $\langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle$ відповідає такій умові:

$$\langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle = S_{\xi}(\vec{\chi}') \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}''). \quad (13.25)$$

Функція $S_{\xi}(\vec{\chi})$ називається **просторовою спектральною густиною** (або, коротше, — **просторовим спектром**) випадкового однорідного поля $\delta\xi(\vec{R})$. З точністю до нормування $S_{\xi}(\vec{\chi})$ збігається із середнім квадратом амплітуди Фур'є — $\langle |C_{\xi}(\vec{\chi})|^2 \rangle$

просторової гармоніки з „хвильовим вектором” $\vec{\chi}$ у розкладанні $\delta\xi(\vec{R})$ за плоскими хвилями.

З урахуванням (13.25), остаточно отримаємо

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi}. \quad (13.26)$$

Напишемо відразу і зворотний зв'язок між $S_{\xi}(\vec{\chi})$ і $B_{\xi}(\vec{\rho})$:

$$S_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (13.27)$$

Формули (13.26) і (13.27) є узагальненням теореми Вінера-Хінчіна на випадкові поля.

У більш загальному випадку, коли флуктуації полів залежать не тільки від просторових координат \vec{R} , але й від часу t : $\delta\xi = \delta\xi(\vec{R}, t)$, використання чотиривимірних (просторово-часових) гармонічних розкладів здійснюється шляхом узагальнення формул, що використовуються при розгляді випадкових процесів і випадкових полів. Так, для флуктуацій одновимірного випадкового поля $\delta\xi = \delta\xi(\vec{R}, t)$ чотиривимірне спектральне розкладання має вигляд

$$\delta\xi(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) e^{i(\vec{\chi}\vec{R} - \omega t)}, \quad (13.28)$$

де $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$ – спектральна амплітуда поля $\delta\xi = \delta\xi(\vec{R}, t)$. На відміну від розділів, присвячених статистичній радіотехніці, де залежність від часу описувалась множником $\sim e^{i\omega t}$ у задачах поширення хвиль, залежність від часу обирається у вигляді

$\sim e^{-i\omega t}$. Це пов'язано з тим, що під час розгляду хвильових явищ зручніше оперувати множником $e^{i\vec{\chi}\vec{R}}$, а не $e^{-i\vec{\chi}\vec{R}}$. При цьому формула (13.28) є розкладанням випадкового поля за плоскими монохроматичними біжучими хвилями $\sim \exp\{i(\vec{\chi}\vec{R} - \omega t)\}$.

Зворотний зв'язок між $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$ і $\delta\xi(\vec{R}, t)$ має вигляд

$$C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R} \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\xi(\vec{R}, t) e^{-i(\vec{\chi}\vec{R} - \omega t)}. \quad (13.29)$$

Для стаціонарного у часі й однорідного у просторі поля, коли $B_{\xi}(\vec{R}_1, \vec{R}_2; t_1, t_2) = B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau)$, де $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$ і $\tau = t_1 - t_2$, аналогічно до (13.26) і (13.27), можна записати такі співвідношення:

$$B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) e^{i(\vec{\chi}\vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\chi} d\omega, \quad (13.30)$$

$$S_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau) e^{-i(\vec{\chi}\vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau. \quad (13.31)$$

Тут $S_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$ – просторово-часовий енергетичний спектр випадкових флуктуацій, пропорційний до середнього квадрату модуля спектральної компоненти $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$:

$$\langle C_{\xi}(\vec{\chi}', \omega') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'', \omega'') \rangle = S_{\xi}(\vec{\chi}', \omega') \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}'') \delta(\omega' - \omega''). \quad (13.32)$$

Таким чином, для стаціонарного у часі й однорідного за простором випадкового поля спектральні компоненти $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$ є δ -корельованими.

Для статистично однорідних полів так само, як і для стаціонарних у часі процесів (див. §6), між характерними ширинами

$\Delta\rho$ і $\Delta\tau$ автокореляційної функції $B_\xi(\vec{\rho}, \tau)$ і відповідними ширинами $\Delta\chi$ і $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_\xi(\vec{\chi}, \omega)$ існує зв'язок, який називається „співвідношенням невизначеностей”. Продемонструємо це співвідношення на прикладі просторово однорідних полів з гауссовими автокореляційними функціями (13.17) і (13.18). Для ізотропного статистично однорідного поля (13.17), виконавши, згідно з (13.27), перетворення Фур'є, отримаємо такий вираз для просторового енергетичного спектра:

$$S_\xi(\vec{\chi}) = S_\xi(\chi) = \frac{\sigma_\xi^2 l^3}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} l^2 \chi^2}. \quad (13.33)$$

Оцінюючи характерні ширини $\Delta\rho$ і $\Delta\chi$ за рівнем $1/\sqrt{e}$ від максимальних значень відповідних розподілів (13.17) і (13.33), отримаємо $\Delta\rho = l$, $\Delta\chi = 1/l$ і

$$\Delta\rho \cdot \Delta\chi = 1. \quad (13.34)$$

Провівши аналогічні обчислення для анізотропного розподілу (13.18), знайдемо просторовий енергетичний спектр

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{\sigma_\xi^2 abc}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(a^2 \chi_x^2 + b^2 \chi_y^2 + c^2 \chi_z^2)\right\}. \quad (13.35)$$

З (13.18) і (13.35) видно, що характерні ширини автокореляційної функції й відповідного їй просторово-енергетичного спектра, у загальному випадку відрізняються за різними напрямками. У результаті, для анізотропного поля співвідношення невизначеностей розпадається відразу на три, і, замість (13.34), отримуємо

$$\Delta\rho_x \cdot \Delta\chi_x = 1, \quad \Delta\rho_y \cdot \Delta\chi_y = 1, \quad \Delta\rho_z \cdot \Delta\chi_z = 1. \quad (13.36)$$

Незважаючи на те, що строгі рівності одиниці співвідношень невизначеностей справедливі тільки для гауссових автокореляційних функцій, ми використовуватимемо їх надалі для наближених оцінок ширин відповідних розподілів енергетичних спектрів.

13.5. Випадкові хвильові поля

Серед різноманітних випадкових полів, з якими має справу статистична радіофізика, **хвильові поля** посідають центральне місце. У загальному випадку хвилею називається збурення $U(\vec{R}, t)$, яке поширюється зі скінченою швидкістю v у просторі і несе із собою енергію. Наприклад, простішим видом збурення, яке задовольняє це визначення, є плоска хвиля, у якої залежність від просторових координат \vec{R} і часу t має вигляд:

$$U(\vec{R}, t) = U(\vec{n}\vec{R} - vt). \quad (13.37)$$

Дійсно, з (13.37) видно, що U описує хвилю, яка рухається зі швидкістю v у напрямку одиничного вектора \vec{n} .

Надалі розглядатимемо лише лінійні й неквантові задачі. З математичного погляду, поширення хвиль тієї чи іншої фізичної природи (електромагнітних, пружних, поверхневих тощо) описується **лінійним просторово-часовим оператором** \hat{L} . Як \hat{L} звичайно виступають диференціальні, зрідка — інтегродиференціальні оператори. Хвильове поле $U(\vec{R}, t)$ при цьому задовольняє неоднорідне рівняння

$$\hat{L}U(\vec{R}, t) = q(\vec{R}, t), \quad (13.38)$$

де $q(\vec{R}, t)$ описує джерела хвиль, задані всередині певного обмеженого об'єму V . Поля U і q можуть бути і багатокомпонентними (наприклад, векторними). У цьому разі як оператор \hat{L} виступає операторна матриця.

Для лінійного рівняння (13.38) є справедливим принцип суперпозиції. Тому при аналізі можна обмежуватися розглядом лише гармонійної зміни у часі поля джерел $q(\vec{R}, t) = q(\vec{R})e^{-i\omega t}$.

Якщо ж параметри, які входять у задачу (діелектрична і магнітна проникності середовища, форма розсіюючої поверхні та ін.) не змінюються в часі, то шукане поле також змінюватиметься у часі за аналогічним законом $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R})e^{-i\omega t}$. При цьому початкове рівняння (13.38) для просторових компонентів набуває вигляду

$$\hat{L}U(\vec{R}) = q(\vec{R}). \quad (13.39)$$

У багатьох задачах просторова область, у межах якої розглядається поле $U(\vec{R})$, обмежена якоюсь поверхнею Σ (вона може бути зімкнута й розімкнута). На цій поверхні необхідно задавати граничні умови:

$$U|_{\vec{R} \in \Sigma} = f_1(\vec{R}), \quad \frac{\partial U}{\partial N}|_{\vec{R} \in \Sigma} = f_2(\vec{R}), \quad (13.40)$$

де N — нормаль до поверхні, а $f_i(\vec{R})$ — задані функції координат. Часто замість (13.40) використовують однорідні граничні умови типу

$$\left[\alpha U + \beta \frac{\partial U}{\partial N} \right]_{\vec{R} \in \Sigma} = 0. \quad (13.41)$$

Тут α і β — певні постійні числа або задані функції координат.

Якщо в задачі необхідно враховувати випромінювання з області V у зовнішній простір (вакуум або однорідне середовище), то на нескінченності ($R \rightarrow \infty$) мають виконуватися наступні умови. По-перше, поле U має спадати так, щоб величина $RU(\vec{R})$ залишалася скінченою при $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RU(\vec{R}) \neq \infty. \quad (13.42)$$

Ця умова називається **умовою регулярності** поля на нескінченності. По-друге, окрім (13.42), має також виконуватися умова випромінювання

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial R} - ikU \right) = 0, \quad (13.43)$$

де $k = 2\pi/\lambda$, λ — довжина хвилі, що поширюється (у вакуумі або однорідному середовищі). Умова (13.43) означає, що на великих відстанях від випромінюючого об'єму поле уявляє собою біжучу хвилю, що розходить.

Статистичні хвильові задачі ставляться тими самими рівняннями й умовами, що й динамічні, але тепер це будуть стохастичні рівняння, стохастичні початкові й граничні умови (рівняння й умови для окремих реалізацій випадкового поля U). Параметри, функції й оператори, що фігурують у задачах, тепер випадкові (всі або їх частина). Для розв'язання статистичної задачі випадкові фактори мають бути задані своїми розподілами ймовірностей. Випадковими можуть бути:

- 1) джерела полів (необхідно задати „статистику джерел”);
- 2) властивості середовища (необхідно задати „статистику середовища”, а отже, оператора \hat{L});
- 3) форма і розташування меж поділу Σ (необхідно задати „статистику меж”);

- 4) умови прийому і реєстрації хвиль (необхідно задати „статистику приймача, завад”).

Існує два основних способи розв'язання статистичних задач.

1. Спочатку знаходять розв'язок (як правило, наближений) динамічної задачі, а після цього визначають моменти шуканого поля (середнє поле, середня інтенсивність та ін.).

2. Зі стохастичних рівнянь будуються детерміновані рівняння для моментів і граничних умов, а після цього розв'язують „усереднену” задачу.

У наступних розділах ми зупинимося, головним чином, на розв'язанні статистичних задач у рамках першої схеми.

ЗАДАЧІ

Показати, що для статистично однорідного й ізотропного поля $\delta \xi(\vec{R})$ просторово-спектральна густина $S_\xi(\vec{\chi})$ залежить тільки від модуля хвильового вектора $\vec{\chi}$. Отримати зв'язок між $B_\xi(\rho)$ і $S_\xi(\chi)$.

Розв'язок. За визначенням, кореляційна функція однорідного та ізотропного поля залежить тільки від модуля $\rho = |\vec{\rho}|$ різницевого вектора $\vec{\rho}$. З урахуванням цього запишемо формулу (13.27):

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\rho) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (1)$$

Цей інтеграл зручно обчислювати у сферичних координатах $\vec{\rho} = (\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho)$, де θ_ρ відлічується від полярної осі, спрямованої уздовж вектора $\vec{\chi}$ (рис. 13.1).

Враховуючи, що в обраній системі координат елементарний об'єм записується у вигляді $d\vec{\rho} = \rho^2 \sin \theta_\rho d\rho d\theta_\rho d\varphi_\rho$, а $\vec{\chi} \vec{\rho} = \chi \rho \cos \theta_\rho$, отримаємо

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty B_\xi(\rho) \rho^2 d\rho \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \sin \theta_\rho d\theta_\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho. \quad (2)$$

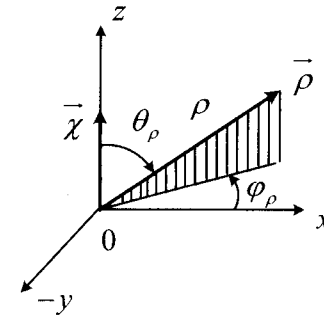


Рис. 13.1

Інтеграл за $d\varphi_\rho$ дорівнює 2π , а інтегрування за $d\theta_\rho$ легко проводиться за допомогою заміни змінних $\xi = \cos \theta_\rho$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \sin \theta_\rho d\theta_\rho &= \int_{-1}^1 e^{-i\chi\rho t} dt = \\ &= -\frac{1}{i\chi\rho} e^{-i\chi\rho t} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{\chi\rho} \sin(\chi\rho). \end{aligned} \quad (3)$$

Підставляючи (3) у (2), отримаємо

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{1}{2\pi^2\chi} \int_0^\infty B_\xi(\rho) \sin(\chi\rho) \rho d\rho = S_\xi(\chi). \quad (4)$$

Отже, для статистично однорідного й ізотропного поля $\delta \xi(\vec{R})$ просторовий енергетичний спектр залежить тільки від модуля хвильового вектора $\vec{\chi}$: $S_{\xi}(\vec{\chi}) = S_{\xi}(\chi)$.

В аналогічний спосіб, враховуючи, що для ізотропного поля флуктуацій $S_{\xi}(\vec{\chi}) = S_{\xi}(\chi)$, можна переписати й формулу (13.26):

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\chi) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi} = \int_0^{\infty} \chi^2 S_{\xi}(\chi) d\chi \int_0^{\pi} e^{i\chi\rho\cos\theta_{\chi}} \sin\theta_{\chi} d\theta_{\chi} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\chi} = \\ = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{\infty} S_{\xi}(\chi) \sin(\chi\rho) \chi d\chi = B_{\xi}(\rho). \quad (5)$$

Тут інтегрування виконувалося у сферичних координатах $\vec{\chi} = (\chi, \theta_{\chi}, \varphi_{\chi})$, де θ_{χ} відлічується від полярної осі, спрямованої уздовж вектора $\vec{\rho}$ (рис. 13.2).

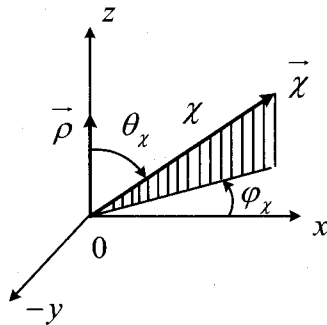


Рис. 13.2

§ 14. Метод малих збурень

Флуктуації параметрів сигналів, з якими доводиться мати справу в радіотехнічних системах, можуть бути викликані не тільки тепловими й дробовими шумами, про які йшлося вище. Часто основною причиною флуктуацій є спотворення сигналів у каналах зв'язку і, зокрема, розсіювання радіохвиль на флуктуаціях показника заломлення середовища, у якому відбувається їх поширення. Під час поширення радіохвиль у земних умовах основну роль відіграють флуктуації показника заломлення тропосфери та іоносфери. У космічних лініях зв'язку й у радіоастрономії слід враховувати розсіювання радіохвиль на флуктуаціях щільності космічної плазми. Навіть при передачі сигналів через хвилеводи (для сигналів оптичного діапазону хвиль – через світловоди) доводиться враховувати неоднорідності середовища, яке заповнює хвилевід (світловід).

Неоднорідності середовища поширення і викликане ними розсіювання радіохвиль не завжди є шкідливими факторами, що викликають спотворення сигналу і вносять завади, з якими необхідно боротися. У ряді випадків явище розсіювання радіохвиль може приносити й користь. Наприклад, завдяки розсіюванню ультракоротких радіохвиль на турбулентних пульсаціях показника заломлення атмосфери виявляється можливим їх проникнення далеко за горизонт у ділянку геометричної тіні. З іншого боку, розсіяні на неоднорідностях плазми короткі радіохвилі можуть бути захоплені у міжшаровий хвилевідний канал, у якому вони можуть поширюватися на великі відстані з малим згасанням та ін. Оскільки розсіяний сигнал несе інформацію про флуктуації параметрів середовища (щільність, тиск, степінь іонізації та ін.), то, в принципі, можна ставити і розв'язувати "обернену" задачу: за флуктуаціями розсіяного сигналу визначати параметри середовища розсіювання.

Ця можливість широко використовується в системах дистанційного зондування оточуючого середовища.

Задача про поширення хвиль в середовищі зі змінним у часі й просторі показником заломлення $n(\vec{R}, t)$ у деяких випадках може бути зведена до розв'язання скалярного хвильового рівняння

$$\left\{ \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{n^2(\vec{R}, t)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = 0, \right. \\ \left. + \text{граничні умови} \right. \quad (14.1)$$

де $\Delta_{\vec{R}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа («лапласіан»), c — швидкість поширення електромагнітних хвиль при $n=1$, (швидкість світла у вакуумі), а $U(\vec{R}, t)$ — хвильове поле, наприклад, звуковий тиск. Під $U(\vec{R}, t)$ ми можемо мати на увазі також будь-яку компоненту напруженості електричного або магнітного поля. При цьому рівняння (14.1) впливає з рівнянь Максвелла за деяких додаткових умов, виконання яких забезпечує відсутність перетворення хвиль однієї поляризації у хвилі іншої поляризації в процесі поширення їх у неоднорідному середовищі. Оскільки точні аналітичні методи розв'язання рівняння (14.1) при довільному вигляді функції $n(\vec{R}, t)$ відсутні, доводиться застосовувати наближені методи. У цьому параграфі ми вивчимо один з них — метод малих збурень (ММЗ).

14.1. Побудова розв'язку. Борнівське наближення

Розглядатимемо $n^2(\vec{R}, t)$ як випадкову функцію чотирьох змінних — трьох просторових координат $\vec{R} = (x, y, z)$, а також

часу t . Введемо діелектричну проникність середовища $\varepsilon(\vec{R}, t) = n^2(\vec{R}, t)$ і подамо її у вигляді суми регулярної $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$ (тут, як і раніше, косі дужки $\langle \dots \rangle$ або риска вгорі $\overline{\dots}$ позначають статистичне усереднення за ансамблем реалізацій) і флюктууючої $\varepsilon_1(\vec{R}, t)$ складових:

$$n^2(\vec{R}, t) = \varepsilon(\vec{R}, t) = \langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle + \varepsilon_1(\vec{R}, t), \quad \langle \varepsilon_1(\vec{R}, t) \rangle = 0. \quad (14.2)$$

З урахуванням (14.2) перепишемо хвильове рівняння (14.1) у такому вигляді:

$$\left\{ \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = \frac{\varepsilon_1(\vec{R}, t)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\vec{R}, t), \right. \\ \left. + \text{граничні умови} \right. \quad (14.3)$$

Таким чином, вихідне однорідне хвильове рівняння (14.1) подамо у вигляді неоднорідного, записаного для регулярного середовища, у правій частині якого стоять випадкові „джерела“, пов'язані з флюктууючою складовою діелектричної проникності середовища ε_1 . Відомо, що розв'язок неоднорідного рівняння

$$\left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = f(\vec{R}, t) \quad (14.4)$$

можна подати у вигляді суми $U(\vec{R}, t) = U_0(\vec{R}, t) + U_{sc}(\vec{R}, t)$,

де $U_0(\vec{R}, t)$ — розв'язання однорідного рівняння:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U_0(\vec{R}, t) = 0, \\ & + \text{граничні умови} \end{aligned} \right. \quad (14.5)$$

а $U_{sc}(\vec{R}, t)$ – частинний розв’язок неоднорідного (14.4) рівняння. Поле $U_0(\vec{R}, t)$ є полем первинної (падаючої) хвилі. Його визначення для заданих $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$, граничних і початкових умов є завданням математичної фізики. Для знаходження частинного розв’язку $U_{sc}(\vec{R}, t)$ неоднорідного рівняння (14.4) введемо до розгляду функцію Гріна $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') = \delta(\vec{R} - \vec{R}') \delta(t - t'), \\ & + \text{граничні умови} \end{aligned} \right. \quad (14.6)$$

яка має таке розуміння. Це хвильове поле у точці \vec{R} у момент часу t , що створюється точковим джерелом, розташованим у точці \vec{R}' , яке випромінює δ -подібний одиничний імпульс у момент часу t' . Явний вигляд функції Гріна $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$ залежить як від виду функціональної залежності $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$, так і від граничних умов, які на неї накладаються. Якщо розглядати поширення хвиль у безмежному статистично однорідному у просторі й стаціонарному у часі середовищі ($\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = \text{Const}$), то як граничні умови природно вимагати виконання умови випромінювання при $|\vec{R} - \vec{R}'| \rightarrow \infty$, яка з двох лінійно незалежних розв’язків рівняння

(14.6) вибирає тільки той, який описує сферичну хвилю, що розходить (з точки \vec{R}'):

$$G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') = -\frac{1}{4\pi |\vec{R} - \vec{R}'|} \delta \left[t - t' - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} \right]. \quad (14.7)$$

Тут $v_\varepsilon = c/\sqrt{\varepsilon} = \text{Const}$ – швидкість поширення хвилі в однорідному середовищі. У свою чергу, будь-який просторово-часовий розподіл $f(\vec{R}, t)$ можна подати у вигляді сукупності точкових імпульсних джерел:

$$f(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(\vec{R}', t') \delta(\vec{R} - \vec{R}') \delta(t - t'). \quad (14.8)$$

Підставимо цей розклад у праву частину (14.4) і скористаємося принципом суперпозиції, що є справедливим для будь-яких лінійних рівнянь і, зокрема, для хвильового рівняння (14.4). Суть цього принципу полягає у тому, що хвильове поле $U_{sc}(\vec{R}, t)$, що створюється „сумою” (або „суперпозицією”) δ -джерел (14.8) є суперпозицією полів $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$, що створюються кожним із цих джерел окремо:

$$U_{sc}(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') f(\vec{R}', t'). \quad (14.9)$$

З урахуванням того, що у розглядуваній задачі

$$f(\vec{R}', t') = \frac{\varepsilon_1(\vec{R}', t')}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U(\vec{R}', t'),$$

розв’язання рівняння (14.3), врешті-решт, можна подати у вигляді

$$U(\vec{R}, t) = U_0(\vec{R}, t) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U(\vec{R}', t'). \quad (14.10)$$

У результаті виконаних перетворень ми отримали **інтегральне рівняння**, яке повністю еквівалентне вихідному диференціальному рівнянню (14.3). Перевагою (14.10) перед (14.3) є те, що (14.10) вже враховує всі граничні умови.

Розв'язок інтегрального рівняння

Розв'язок інтегрального рівняння (14.10) можна знайти у вигляді ряду теорії збурень, який будується шляхом ітерацій. При побудові **першої ітерації**, згідно з (14.10), запишемо поле U для точки з координатами $\vec{R} = \vec{R}'$ і в момент часу $t = t'$:

$$U(\vec{R}, t) = U_0(\vec{R}, t) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' G(\vec{R}, \vec{R}''; t, t'') \varepsilon_1(\vec{R}'', t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} U(\vec{R}'', t''). \quad (14.11)$$

Підставимо тепер (14.11) під знак інтеграла вихідного рівняння (14.10). У результаті, отримаємо

$$\begin{aligned} U(\vec{R}, t) = & U_0(\vec{R}, t) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t') + \\ & + \frac{1}{c^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \frac{\partial^2}{\partial t''^2} G(\vec{R}', \vec{R}''; t', t'') \varepsilon_1(\vec{R}'', t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} U(\vec{R}'', t'') \right\}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Друга ітерація будується за аналогічною схемою. Згідно з рівнянням (14.10), записується поле U в точці з координатами $\vec{R} = \vec{R}''$ у момент часу $t = t''$ і підставляється під знак інтеграла для першої ітерації (14.12). Продовжуючи процес ітерування, ми отримуємо ряд:

$$U_{SC} = U - U_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad (14.13)$$

де $U_n \sim \varepsilon_1^n$. Такий ряд у математиці називається **рядом Неймана**, а у фізиці – **борнівським розкладанням** (на честь фізика М. Борна, відомого своїми працями у галузі квантової механіки).

Як вже відзначалося раніше, знаходження поля $U_0(\vec{R}, t)$ є завданням математичної фізики і зводиться до розв'язання стандартними методами хвильового рівняння (14.5) з початковими і граничними умовами. Вважатимемо цей розв'язок відомим. Перший член борнівського ряду

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t') \quad (14.14)$$

описує одноразове розсіювання і називається „**борнівським наближенням**”. Член ряду U_n описує n -кратне розсіювання. З побудови борнівського ряду видно, що середні поля $\langle U_n \rangle$, а також моменти другого порядку міститимуть корелятори вигляду $\langle \varepsilon_1(\vec{R}') \dots \varepsilon_1(\vec{R}^{(n)}) \rangle$, знаходження яких при довільній статистиці випадкової величини ε_1 – досить складна задача. Проте для малих флуктуацій ε_1 можна обмежитися тільки першим членом розкладання – борнівським наближенням.

Як **приклад** розглянемо задачу про розсіювання плоскої монохроматичної хвилі на флуктуаціях показника заломлення $n(\vec{R}, t)$, припускаючи, що середовище у середньому статистично однорідне у безмежному просторі й стаціонарне в часі ($\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = \text{Const}$), а флуктуації n відбуваються тільки

всередині обмеженого об'єму V . Ввівши до розгляду відносні флуктуації діелектричної проникності:

$$\mu(\vec{R}, t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1(\vec{R}, t) - \langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle} = \frac{n^2(\vec{R}, t) - \langle n^2(\vec{R}, t) \rangle}{\langle n^2(\vec{R}, t) \rangle}, & \vec{R} \in V; \\ 0, & \vec{R} \notin V, \end{cases} \quad (14.15)$$

з урахуванням визначення функції Гріна (14.7) і згідно з формулою (14.14), отримаємо

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi v_\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta\left[t - t' - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right] \mu(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t'). \quad (14.16)$$

Поле первинної (падаючої) хвилі $U_0(\vec{R}, t)$ визначається, як вже було зазначено вище, з однорідного хвильового рівняння (14.5), яке для безмежного середовища з $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = \text{Const}$ має відомий розв'язок у вигляді плоскої монохроматичної хвилі. Для спрощення задачі ми розглядатимемо плоску хвилю одиничної амплітуди:

$$U_0(\vec{R}, t) = e^{i(\vec{k}_\varepsilon \vec{R} - \omega_0 t)}, \quad (14.17 \text{ а})$$

де ω_0 — кругова частота вихідного випромінювання і модуль хвильового вектора \vec{k}_ε пов'язані співвідношенням

$$k_\varepsilon = |\vec{k}_\varepsilon| = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{v_\varepsilon}. \quad (14.17 \text{ б})$$

З іншого боку, модуль хвильового вектора можна ще виразити і через довжину хвилі λ_ε у статистично однорідному середовищі

$$k_\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda_\varepsilon}. \quad (14.17 \text{ в})$$

Врахуємо тепер, що флуктуації показника заломлення $\mu(\vec{R}, t)$ зосереджені у скінченному об'ємі V , і розглядатимемо найцікавіший випадок розсіювання „коротких” хвиль, коли $\lambda_\varepsilon \ll L$, де $L \sim (V)^{1/3}$ — характерний лінійний розмір об'єму розсіювання. Підставимо (14.17 а) в (14.16) і виконаємо за допомогою δ -функції інтегрування за dt' , зробивши попередньо заміну змінної $t'' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} - t'$:

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \mu\left(\vec{R}', t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right) \times \\ \times \exp\left\{i\left[\vec{k}_\varepsilon \vec{R}' - \omega_0\left(t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right)\right]\right\}. \quad (14.18)$$

Розташуємо початок декартової системи координат XYZ у центрі об'єму розсіювання V а вісь OZ спрямуємо вздовж хвильового вектора падаючої хвилі \vec{k}_ε (див. рис. 14.1)

Вважатимемо, що точка спостереження P з радіус-вектором \vec{R} , де розташовано приймач розсіяного поля, знаходиться достатньо далеко від об'єму розсіювання V . У цьому випадку відстань $|\vec{R} - \vec{R}'|$ ($\vec{R}' \in V$) можна розкласти у степеневий ряд за малим параметром $R'/R \leq L/R \ll 1$:

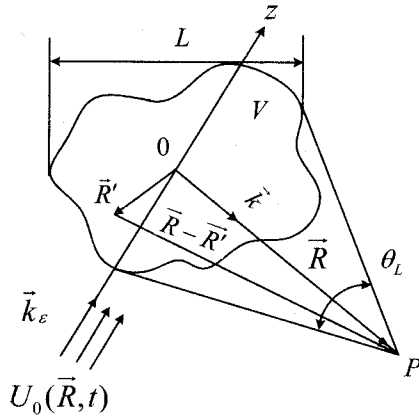


Рис. 14.1

$$|\bar{R} - \bar{R}'| = \sqrt{(\bar{R} - \bar{R}')^2} = \sqrt{R^2 - 2\bar{R}\bar{R}' + R'^2} \approx R \left[1 - \frac{\bar{R}\bar{R}'}{R^2} + O\left(\frac{R'^2}{R^2}\right) \right]. \quad (14.19)$$

Підставимо розклад (14.19) у (14.18) і обмежимося тільки лінійними за $R'/R \ll 1$ доданками у показнику степеню експоненти:

$$\exp \left\{ -i\omega_0 \left(t - \frac{|\bar{R} - \bar{R}'|}{v_\epsilon} \right) \right\} \approx \exp \left\{ i \left[k_\epsilon \left(R - \frac{\bar{R}\bar{R}'}{R} \right) - \omega_0 t + O\left(\frac{k_\epsilon R'^2}{R}\right) \right] \right\}. \quad (14.20)$$

Для того, щоб у (14.20) можна було знехтувати квадратичними доданками $\sim \frac{k_\epsilon R'^2}{R}$, необхідно вимагати виконання нерівності

$$\frac{k_\epsilon R'^2}{R} \leq \frac{k_\epsilon L^2}{R} \ll 1, \quad (14.21)$$

яка визначає так звану „дальню зону” (або **зону Фраунгофера**) відносно об'єму розсіювання V (що має лінійний розмір L). Для

точок спостереження, що знаходяться у „хвильовій зоні” $R \gg \lambda_\epsilon$ ($k_\epsilon R \gg 1$), умова дальньої зони (14.21) виявляється більш жорсткою, ніж введена раніше умова $L \ll R$, оскільки нерівність (14.21) можна переписати у вигляді

$$\frac{k_\epsilon L^2}{R} = (k_\epsilon L) \frac{L}{R} = k_\epsilon R \left(\frac{L}{R} \right)^2 \ll 1. \quad (14.22 \text{ а})$$

Умові (14.21) можна надати простий фізичний смисл, якщо ввести поняття характерного кута дифракції θ_d на геометричному тілі з лінійним розміром L : $\theta_d \approx \lambda_\epsilon / L \sim 1/k_\epsilon L \ll 1$, а також характерного кута $\theta_L = L/R \ll 1$, під яким видно об'єм розсіювання з точки спостереження (рис. 14. 1):

$$k_\epsilon \frac{L^2}{R} = k_\epsilon L \cdot \frac{L}{R} \sim \frac{\theta_L}{\theta_d} \ll 1. \quad (14.22 \text{ б})$$

Видно, що умова знаходження точки спостереження у дальній зоні відносно об'єму V означає, що „геометричний” кутовий розмір θ_L об'єму має бути значно меншим, ніж кут дифракції θ_d .

У курсах теорії дифракції й поширення радіохвиль загальноприйнятим є інше (також, взагалі-то, достатньо фізичне) трактування нерівності (14.21). Вираз у лівій частині (14.21) можна записати як відношення площі поперечного перерізу об'єму розсіювання ($\sim L^2$) до площі першої зони Френеля ($\sim a_F^2$, де $a_F = \sqrt{\lambda_\epsilon R} \sim \sqrt{R/k_\epsilon}$ – лінійний розмір першої зони Френеля на відстані R):

$$k_\epsilon \frac{L^2}{R} \sim \frac{L^2}{a_F^2} \ll 1. \quad (14.22 \text{ в})$$

Таким чином, для спостерігача P , який перебуває у дальній зоні, лінійний розмір a_F зони Френеля виявляється значно більшим, ніж геометричний розмір L об'єму розсіювання V . Беручи до уваги, що зона Френеля визначається як область простору, кожна точка якої дає синфазний з іншими внесок до повного поля у точці спостереження (різниця фаз хвилі між точками у межах першої зони Френеля не перевищує $\pi/2$), поле у дальній зоні з достатнім наближенням можна вважати сферичною хвилею, що розходить. Кривизна фазового фронту хвилі визначається тільки відстанню R від початку координат, розташованого всередині об'єму розсіювання V , і не залежить від його лінійного розміру L .

У дальній зоні з урахуванням спрощень (14.19) і (14.20) підінтегральні функції у вихідній формулі (14.18) можуть наближено бути подані так:

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \exp \left\{ i \left[\vec{k}_\varepsilon \vec{R}' - \omega_0 \left(t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} \right) \right] \right\} \approx \frac{e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)}}{R} \cdot e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_\varepsilon) \vec{R}'},$$

$$\mu \left(\vec{R}', t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} \right) \approx \mu \left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k} \vec{R}'}{\omega_0} \right).$$

Тут ми ввели $\vec{k} = k_\varepsilon \frac{\vec{R}}{R}$ — **хвильовий вектор розсіяного поля**.

Зауважимо, що введений вектор \vec{k} спрямований у точку спостереження (див. рис. 14.1), а його модуль збігається з k_ε ($k = k_\varepsilon$). Після зроблених спрощень у першому порядку теорії збурень для розсіяного поля U_1 отримуємо такий вираз:

$$U_1(\vec{R}, t) \approx \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi R} e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)} \int_V d\vec{R}' \mu \left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k} \vec{R}'}{\omega_0} \right) \cdot e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_\varepsilon) \vec{R}'}. \quad (14.23)$$

Якщо флуктуації показника заломлення не залежать від часу, а є тільки функцією просторових координат, тобто $\mu(\vec{R}', t) \equiv \mu(\vec{R}')$, то формулу (14.23) можна переписати у більш простому вигляді

$$U_1(\vec{R}, t) \approx \frac{2\pi^2 k_\varepsilon^2}{R} C_\mu(\vec{q}) e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)}, \quad (14.24)$$

де введено так званий **вектор розсіювання** $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\varepsilon$, а $C_\mu(\vec{q})$ — Фур'є-компонента випадкового поля флуктуацій $\mu(\vec{R})$, взята для однієї єдиної просторової гармоніки $\vec{\chi} = \vec{q}$:

$$C_\mu(\vec{q}) = C_\mu(\vec{\chi}) \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \mu(\vec{R}') e^{-\vec{\chi} \vec{R}'} d\vec{R}' \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}}. \quad (14.25)$$

Оскільки $\mu(\vec{R}') \equiv 0$ при $\vec{R}' \notin V$, то інтегрування у (14.25) за $d\vec{R}'$ можна поширити на весь тривимірний простір:

$$C_\mu(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\vec{R}') e^{-\vec{\chi} \vec{R}'} d\vec{R}' \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}}. \quad (14.26)$$

Висновки

1. З формули (14.24) випливає, що при розсіюванні хвилі, яка падає на нерухомі неоднорідності, **частота хвильового поля не**

змінюється (залежність від часу має той самий вигляд $\sim e^{-i\omega_0 t}$, що й у падаючій хвилі U_0).

2. Величина (напруженість) U_1 розсіяного поля з напрямку \vec{k}_e у напрямку \vec{k} визначається тільки однією просторовою гармонікою Фур'є (14.25) з „хвильовим” вектором $\vec{\chi}$, що дорівнює векторові розсіювання $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_e$. Таке розсіювання називають „резонансним”.

14.2. Середнє поле і середня інтенсивність

У першому наближенні методу малих збурень (борнівське наближення) поле $U_1(\vec{R}, t)$ у дальній зоні, розсіяне на флюктуючих просторових неоднорідностях $\mu(\vec{R}, t)$ показника заломлення, визначається формулою (14.23), з якої випливає, що зв'язок між $U_1(\vec{R}, t)$ і $\mu(\vec{R}, t)$ є лінійним. Якщо розглядати μ як одну з можливих реалізацій випадкової функції $\mu(\vec{R}, t)$, то U_1 також буде випадковою реалізацією розсіяного хвильового поля $U_1(\vec{R}, t)$, і для його опису потрібно застосувати методи теорії випадкових функцій, і, зокрема, метод моментів.

Усереднимо (14.23) за ансамблем реалізацій $\mu(\vec{R}, t)$. За рахунок лінійності зв'язку між U_1 і μ операції інтегрування за $d\vec{R}'$ і усереднення за ансамблем реалізацій $\langle \rangle$ можна поміняти місцями. У результаті, з урахуванням того, що $\langle \mu(\vec{R}, t) \rangle = 0$, для *середнього поля* отримаємо

$$\langle U_1(\vec{R}, t) \rangle \sim \int_V d\vec{R}' \langle \mu(\vec{R}', t) \rangle e^{-i\vec{q}\vec{R}} = 0. \quad (14.27)$$

Факт перетворення на нуль першого статистичного моменту поля $U_1(\vec{R}, t)$ дає змогу говорити про відсутність у полі U_1 когерентної складової, а саме розсіювання у цьому наближенні вважати **некогерентним**.

Величина потужності розсіяного поля W у точці спостереження, а також густина потоку енергії \vec{S} є величинами, квадратичними за полем U : наприклад, якщо величина U є напруженість електричного (або магнітного) поля у розсіяній електромагнітній хвилі, то щільність енергії $W = |U|^2 / 4\pi$, а вектор

Умова-Пойнтінга $\vec{S} = \frac{\vec{k}}{k} c W$, де c – швидкість поширення електромагнітної хвилі при $n=1$ (швидкість світла у вакуумі). Для простоти далі розглядатимемо величину $I = |U|^2$, яку назовемо „**інтенсивністю**”. За визначенням, ця величина з точністю до сталих множників збігається зі щільністю потоку енергії у розсіяній хвилі і пропорційна потужності, що реєструється будь-яким приймачем у точці спостереження.

Середня інтенсивність поля, розсіяного на нерухомих неоднорідностях ($\mu(\vec{R}, t) = \mu(\vec{R})$), у борнівському наближенні, як випливає з (14.23), дорівнює

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \langle |U_1(\vec{R})|^2 \rangle = \frac{k_e^4}{(4\pi R)^2} \left\langle \left| \int_V d\vec{R}' \mu(\vec{R}') e^{-i\vec{q}\vec{R}} \right|^2 \right\rangle. \quad (14.28)$$

Подаючи квадрат модуля інтеграла за $d\vec{R}'$ у вигляді добутку двох інтегралів і змінюючи порядок усереднення $\langle \rangle$ та інтегрування, отримуємо

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \frac{k_\epsilon^4}{(4\pi R)^2} \int_V d\vec{R}' \int_V d\vec{R}'' \langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle e^{-i\vec{q}(\vec{R}' - \vec{R}'')}. \quad (14.29)$$

Для просторово однорідного поля випадкових флуктуацій показника заломлення корелятор $\langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle$ є функцією тільки різниці аргументів $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$:

$$\langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle = B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'') = B_\mu(\vec{\rho}). \quad (14.30)$$

Просторова однорідність випадкових полів повністю аналогічна властивості стаціонарності випадкових процесів (у широкому розумінні), що дає змогу ввести поняття довжини кореляції l_μ як відстані, на якій автокореляційна функція $B_\mu(\vec{\rho})$ суттєво спадає.

Під словами „суттєво спадає” можна розуміти той самий смисл, що й при введенні поняття „час кореляцій” (див. формули (5.31), (5.33)). Довжина кореляції l_μ може відрізнятися у різних напрямках, тобто залежати від напрямку вектора $\vec{\rho}$ (див. § 13), у цьому випадку ми маємо справу з „анізотропним” полем флуктуацій показника заломлення $\mu(\vec{R})$. Якщо ж довжина кореляції l_μ не залежить від напрямку $\vec{\rho}$, то поле флуктуацій $\mu(\vec{R})$ є статистично ізотропним, а довжину кореляції l_μ називають у цьому випадку **радіусом кореляції**. За порядком величини l_μ

збігаються з характерним лінійним розміром неоднорідностей показника заломлення.

Замість \vec{R}', \vec{R}'' перейдемо у (14.29) до нових (сумарних і різницевих) змінних інтегрування:

$$\vec{R}_1 = \frac{1}{2}(\vec{R}' + \vec{R}''), \quad \vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''.$$

Якщо лінійні розміри L об'єму розсіювання V достатньо великі: $L \gg l_\mu$ (тобто розсіювання відбувається на великій кількості $N \sim L^3/l_\mu^3 \gg 1$ неоднорідностей), то на границях області інтегрування за змінною $\vec{\rho}$ значення $B_\mu(\vec{\rho})$ буде настільки малим, що інтеграл за $d\vec{\rho}$ можна поширити на весь простір (від $-\infty$ до ∞), а область інтегрування за сумарною змінною \vec{R}_1 практично не відрізнятиметься від старої V . У результаті отримаємо

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \frac{k_\epsilon^4}{(4\pi R)^2} \int_V d\vec{R}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} = \frac{\pi k_\epsilon^4}{2 R^2} V S_\mu(\vec{q}), \quad (14.31)$$

де введена величина $S_\mu(\vec{q})$ має смисл просторово-енергетичного спектра $S_\mu(\vec{\chi})$, взятого для однієї-єдиної просторової гармоніки з „хвильовим вектором” $\vec{\chi} = \vec{q}$:

$$S_\mu(\vec{q}) = S_\mu(\vec{\chi}) \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}}. \quad (14.32)$$

Висновки

Зі знайденого виразу (14.31) випливає, що

1. Середня інтенсивність $\langle I_1(\vec{R}) \rangle$ спадає з відстанню R за законом $\sim R^{-2}$, як це і має бути у **сферичній хвилі, що розходиться**.

2. Факт, що $\langle I_1 \rangle \sim V$, свідчить про **некогерентний характер розсіювання**. Дійсно, враховуючи, що середню кількість неоднорідностей в об'ємі V можна оцінити за порядком величини як $N \sim V/l_\mu^3$ (l_μ^3 — пропорційне до об'єму, що припадає на одну неоднорідність з характерним лінійним розміром l_μ), доходимо висновку, що $\langle I_1 \rangle \sim V \sim N$. Зауважимо, що при когерентному додаванні полів, розсіяних на N неоднорідностях, амплітуда сумарного поля була б $U_1 \sim N$, а його інтенсивність, пропорційна квадрату амплітуди, має бути $\sim N^2 \sim V^2$. **При некогерентному ж додаванні полів додаються не їх амплітуди, а інтенсивності (квадрати амплітуд), тому сумарна інтенсивність I_1 виявляється пропорційною $N \sim V$.**

3. Розсіювання має **вибірковий (резонансний) характер** у тому розумінні, що при розсіюванні з напрямку \vec{k}_e у напрямок \vec{k} бере участь тільки одна-єдина просторова гармоніка з хвильовим вектором $\vec{\chi} = \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_e$.

4. Середня інтенсивність $\langle I_1 \rangle \sim k_e^4$. Множник k_e^4 характерний для „релеєвської” частотної залежності ($\sim \omega_0^4$) інтенсивності поля, розсіяного на „дрібних” неоднорідностях (l_μ набагато менша за довжину хвилі випромінювання λ_e). Дійсно, якщо радіус

кореляції l_μ настільки малий, що виконується нерівність $l_\mu q \leq 2k_e l_\mu \ll 1$, то $S_\mu(\vec{q})$, як випливає з (14.32), виявляється взагалі не залежним від \vec{q} (і, отже, від хвильового вектора \vec{k}_e і довжини хвилі випромінювання λ_e):

$$\begin{aligned} S_\mu(\vec{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\rho \leq l_\mu} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \approx \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) = S_\mu(0) \approx \frac{l_\mu^3}{(2\pi)^3} B_\mu(0) = \frac{\sigma_\mu^2 l_\mu^3}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (14.33)$$

При отриманні цієї оцінки ми врахували, що $\sigma_\mu^2 = B_\mu(0) = \langle \mu^2 \rangle$ — дисперсія флуктуації квадрату показника заломлення $n^2(\vec{R})$ (див. визначення μ за формулою (14.15)), а l_μ^3 — характерний об'єм, зайнятий однією неоднорідністю з лінійним розміром l_μ , що дорівнює радіусові кореляції. З урахуванням (14.33), згідно з вихідною формулою (14.31), отримуємо, що для „дрібних” неоднорідностей $l_\mu q \ll 1$ середня інтенсивність розсіяного поля у точці спостереження пропорційна ω_0^4 .

14.3. Індикатриса розсіювання

З формули (14.31) випливає, що середня інтенсивність у точці спостереження залежить від відстані $R = |\vec{R}|$ до об'єму розсіювання і вектора розсіювання $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_e$: $\langle I_1 \rangle = \langle I_1(R, \vec{q}) \rangle$. Для визначення конкретної залежності $\langle I_1 \rangle$ від напрямку вектора

$\vec{k} = k_\epsilon \frac{\vec{R}}{R}$ розпишемо його проєкції в декартовій системі координат XYZ з початком O в центрі об'єму розсіювання і віссю OZ , спрямованою вздовж хвильового вектора падаючої хвилі \vec{k}_ϵ (див. рис. 14.1 і 14.2).

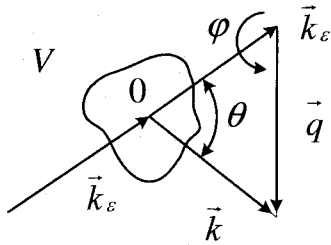


Рис. 14.2

Орієнтація осі OX в ортогональній до вектора \vec{k}_ϵ площині XOY у загальному випадку довільна. Проекції вектора \vec{k} задаватимемо у сферичних координатах $\vec{k} = (k_\epsilon, \theta, \varphi)$, де θ — полярний кут (кут між векторами \vec{k}_ϵ і \vec{k}), а φ — азимутальний кут (кут між проєкцією вектора \vec{k} на площину XOY і віссю OX).

Введемо поняття **індикатиси розсіювання** $F(\theta, \varphi)$, яку визначимо як відношення середньої інтенсивності $\langle I_1 \rangle$, розсіяної у напрямку θ, φ , до середньої інтенсивності, розсіяної у напрямку поширення падаючої хвилі ($\vec{k} = \vec{k}_\epsilon$). При $\vec{k} = \vec{k}_\epsilon$ хвильовий вектор розсіювання $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\epsilon = 0$. Для цього напрямку полярний кут $\theta = 0$, а величина азимутального кута φ довільна (для визначеності нехай вона дорівнює нулю). З урахуванням вищевикладеного,

згідно зі знайденою раніше формулою для середньої інтенсивності (14.31), отримаємо

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\langle I_1(R, \vec{q}) \rangle}{\langle I_1(R, 0) \rangle} = \frac{\langle I_1(R, \theta, \varphi) \rangle}{\langle I_1(R, 0, 0) \rangle} = \frac{S_\mu(\vec{q})}{S_\mu(0)}. \quad (14.34)$$

При цьому, як легко переконатися, всі множники перед S_μ у формулі (14.31) для $\langle I_1 \rangle$ скорочуються, тому в напрямку $\vec{k} = \vec{k}_\epsilon$, що задається хвильовим вектором падаючої хвилі $F(0, 0) = 1$. Залежність $F(\theta, \varphi)$ прийнято зображати у сферичній системі координат, відкладаючи значення F за напрямком променя, заданого кутами θ, φ , що відлічуються від напрямку вектора \vec{k}_ϵ (див. рис. 14.3).

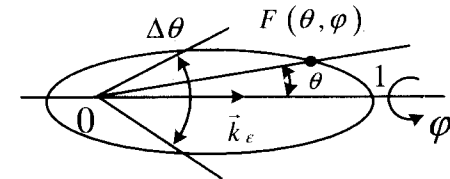


Рис. 14.3

Як **приклад** розглянемо статистично однорідне й ізотропне поле неоднорідностей, коли $B_\mu(\vec{\rho}) = B_\mu(\rho)$. У цьому випадку, як було показано у задачі §13, енергетичний спектр $S_\mu(\vec{\chi})$ залежить тільки від модуля хвильового вектора $\vec{\chi}$. Отже, і $S_\mu(\vec{q})$ також залежатиме тільки від $q = |\vec{q}|$. Причому зв'язок між $S_\mu(q)$ і $B_\mu(\rho)$ визначається як

$$\begin{aligned}
S_\mu(\vec{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(\rho) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{\rho} = \\
&= \frac{1}{2\pi^2 q} \int_0^\infty B_\mu(\rho) \sin(q\rho) d\rho = S_\mu(q).
\end{aligned}
\quad (14.35)$$

З рис. 14.2 (з урахуванням того, що $k = k_\epsilon$) випливає

$$\begin{aligned}
q &= \sqrt{(\vec{k} - \vec{k}_\epsilon)^2} = \sqrt{k^2 + k_\epsilon^2 - 2\vec{k}\vec{k}_\epsilon} = \\
&= k_\epsilon \sqrt{2(1 - \cos\theta)} = 2k_\epsilon \sin \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}
\quad (14.36)$$

Таким чином, для ізотропних неоднорідностей індикатриса розсіювання виявляється функцією тільки полярного кута θ :

$$F(\theta) = \frac{S_\mu\left(2k_\epsilon \sin \frac{\theta}{2}\right)}{S_\mu(0)}. \quad (14.37)$$

Кутову ширину $\Delta\theta$ індикатрисы розсіювання $F(\theta)$ (див. рис. 14.3) можна оцінити за заданим характерним лінійним масштабом неоднорідностей l_μ (радіусом кореляції), скориставшись співвідношенням невизначеностей (див. (13.34)). Інтервал $\Delta\chi$ хвильових чисел χ , де спектр $S_\mu(\chi)$ відмінний від нуля, пов'язаний з l_μ співвідношенням

$$\Delta\chi \cdot l_\mu \approx 1. \quad (14.38)$$

З (14.37) і (14.38) випливає, що **кутова ширина $\Delta\theta$ індикатрисы розсіювання $F(\theta)$** визначається „шириною” за θ функції

$S_\mu\left(2k_\epsilon \sin \frac{\theta}{2}\right)$. З урахуванням того, що $\Delta\chi = \Delta q = 2k_\epsilon \sin \frac{\Delta\theta}{2}$, співвідношення (14.38) набуває вигляду

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{1}{2k_\epsilon l_\mu}. \quad (14.39)$$

Розглянемо два граничні випадки.

І. Якщо розмір неоднорідностей l_μ набагато перевищує довжину хвилі випромінювання λ_ϵ (**великі неоднорідності**, $k_\epsilon l_\mu \gg 1$) і виконується нерівність $1/k_\epsilon l_\mu \ll 1$, то індикатриса розсіювання $F(\theta)$ виявляється відмінною від нуля тільки у вузькому інтервалі кутів $\Delta\theta \ll 1$ (поблизу напрямку $\theta = 0$), який визначається зі співвідношення невизначеностей (14.39) як

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{1}{2k_\epsilon l_\mu}. \quad (14.40)$$

Звідси випливає оцінка ширини

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{k_\epsilon l_\mu} \sim \frac{\lambda_\epsilon}{l_\mu} \ll 1. \quad (14.41)$$

2. У протилежному граничному випадку, коли розміри неоднорідностей l_μ набагато менші за довжину хвилі λ_ϵ (**дрібні неоднорідності**, $k_\epsilon l_\mu \ll 1$), при будь-яких значеннях кута θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) величина $ql_\mu = 2k_\epsilon l_\mu \sin \frac{\theta}{2} \ll 1$, і, згідно з (14.33), можна скористатися наближенням $S_\mu(q) \approx S_\mu(0)$. У цьому випадку індикатриса розсіювання (14.34) не залежить від θ і всюди дорівнює одиниці: **розсіювання є ізотропним**, $\langle I_1 \rangle$ не залежить

від напрямку. Це так званий **випадок релеевського розсіювання на дрібних неоднорідностях**, коли $\langle I_1 \rangle \sim \omega_0^4 \sim \lambda_\epsilon^{-4}$.

14.4. Межі застосування борнівського наближення

Оскільки формула (14.31) для $\langle I_1 \rangle$ є наближеною (вона отримана у „борнівському” наближенні), для того, щоб нею можна було скористатися, необхідно зазначити межі її застосування. Основною нерівністю, виконання якої припускалося при виведенні формули (14.31), виступала вимога малого значення розсіяного поля U_1 порівняно з первинним полем U_0 :

$$|U_1| \ll |U_0| \quad \text{або} \quad \langle I_1 \rangle = |U_1|^2 \ll |U_0|^2 = 1.$$

Проте, у зв'язку з тим, що $\langle I_1 \rangle$ залежить від напрямку розсіювання, зазначені нерівності можуть добре виконуватися, наприклад, при розсіюванні на великі кути $\theta \gg \lambda_\epsilon / l_\mu$ (за рахунок малого значення $\langle I_1 \rangle$, розсіяного у цих напрямках), але не виконуватися при розсіюванні на малі кути. Тому навіть при великих флуктуаціях μ як критерій застосування (14.31) слід вимагати малого значення розсіяного поля в „інтегральному” розумінні: **необхідно, щоб повний потік енергії P_1 , розсіяного об'ємом V поля U_1 , був значно меншим, ніж потік енергії P_0 випромінювання U_0 , що падає на об'єм V :**

$$P_1 \ll P_0.$$

Оточимо об'єм розсіювання V сферою C_R із центром в точці O і достатньо великим радіусом R — таким, щоб точки на поверхні сфери знаходилися у дальній зоні відносно V (рис. 14.4).

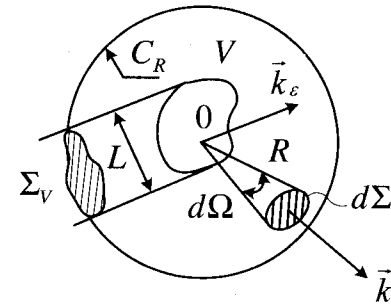


Рис. 14.4

У цьому випадку $\langle I_1 \rangle$ для всіх точок поверхні визначається формулою (14.31). Середній потік розсіяної енергії $\langle |U_1|^2 \rangle = \langle I_1 \rangle$ через сферу C_R можна записати у вигляді інтеграла за поверхнею:

$$P_1 = a \oint_{C_R} \langle I_1 \rangle d\Sigma, \quad (14.42)$$

де a — несуттєвий для подальшого розгляду сталий множник (який, наприклад, дорівнює $v_\epsilon / 4\pi$, якщо йдеться про розсіювання електромагнітних хвиль, причому у цьому випадку U_1 є напруженість розсіяного електричного або магнітного поля, v_ϵ — швидкість хвилі в однорідному середовищі, так що $\frac{v_\epsilon}{4\pi} \langle |U_1|^2 \rangle$ — середнє значення модуля вектора Умова-Пойтінга). Потік енергії P_0 у падаючому полі U_0 можна записати у вигляді

$$P_0 = a |U_0|^2 \Sigma_V, \quad (14.43)$$

де Σ_V — площа поперечного перерізу об'єму V площиною, перпендикулярною до хвильового вектора \vec{k}_ϵ . Підставимо у (14.42)

вираз для $\langle I_1 \rangle$ (14.31) і перейдемо від інтегрування за $d\Sigma = R^2 d\Omega$ до інтегрування за тілесним кутом $d\Omega$

$$P_1 = a \frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 V \oint_{4\pi} d\Omega S_\mu(\vec{q}) \approx a \frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 V S_\mu(0) \Delta\Omega. \quad (14.44)$$

Тут ми скористалися оцінкою інтеграла, замінивши його добутком підінтегральної функції при $\vec{q} = 0$ на величину тілесного кута $\Delta\Omega$, у якому відбувається розсіювання основної частини енергії.

Нерівність $P_1 \ll P_0$, виконання якої необхідне для застосування теорії збурень, за допомогою формул (14.43) і (14.44) тепер можна записати у вигляді

$$\frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 L S_\mu(0) \Delta\Omega \ll 1. \quad (14.45)$$

При отриманні цієї нерівності ми врахували, що $|U_0| = 1$ (див. (14.17)), і скористалися оцінками $\Sigma_V \sim L^2$, $V \sim L^3$.

Розглянемо знову два граничні випадки.

І. Розсіювання коротких хвиль на великомасштабних неоднорідностях ($k_\varepsilon l_\mu \gg 1$, $\lambda_\varepsilon \ll l_\mu$). З урахуванням оцінки кутової ширини індикатрисы розсіювання $\Delta\theta$ (14.41) отримаємо характерну величину тілесного кута

$$\Delta\Omega \approx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\Delta\theta} \sin\theta d\theta \approx 2\pi \frac{(\Delta\theta)^2}{2} \approx \frac{\pi}{k_\varepsilon^2 l_\mu^2} \sim \frac{\lambda_\varepsilon^2}{l_\mu^2} \ll 1. \quad (14.46)$$

Підставимо тепер знайдену величину $\Delta\Omega$ у (14.45) і, враховуючи оцінку (14.33) для $S_\mu(0)$, отримуємо

$$\frac{1}{16\pi} \sigma_\mu^2(k_\varepsilon L) (k_\varepsilon l_\mu) \ll 1. \quad (14.47)$$

2. Розсіювання на дрібних неоднорідностях ($k_\varepsilon l_\mu \ll 1$, $\lambda_\varepsilon \gg l_\mu$) є, як зазначено вище, дифузним – енергія рівномірно розсіюється у всіх напрямках, тобто $\Delta\Omega = 4\pi$, і (14.45) призводить до нерівності

$$\frac{1}{4\pi} \sigma_\mu^2(k_\varepsilon L) (k_\varepsilon l_\mu)^3 \ll 1, \quad (14.48)$$

яка, як легко переконатися, накладає слабші обмеження на величину σ_μ^2 , ніж (14.47).

Таким чином, першим наближенням теорії збурень можна користуватися, якщо лінійні розміри неоднорідностей l_μ не надто великі, а дисперсія флуктуації σ_μ^2 і розміри L об'єму розсіювання достатньо малі. Крім цього, нагадаємо, що під час виведення формули (14.31) припускалося, що виконується нерівність $L \gg l_\mu$, яка забезпечує наявність великої кількості неоднорідностей у об'ємі розсіювання V .

14.5. Спектр розсіяного сигналу

Звернемося тепер до більш загального випадку **рухомих** (змінних у часі) **неоднорідностей** показника заломлення, коли $\mu = \mu(\vec{R}, t)$, а розсіяне у першому наближенні теорії збурень хвильове поле $U_1(\vec{R}, t)$ визначається за формулою (14.23):

$$U_1(\vec{R}, t) \approx \frac{k_\epsilon^2}{4\pi R} e^{i(k_\epsilon R - \omega_0 t)} \int_V d\vec{R}' \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_\epsilon)\vec{R}'}$$

Припустимо, що швидкість зміни відносних флуктуацій показника заломлення $\mu = \mu(\vec{R}, t)$ у підінтегральному виразі достатньо мала. У цьому випадку у часовому аргументі функції $\mu = \mu(\vec{R}, t)$ можна знехтувати доданками, залежними від \vec{R}' :

$$\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) \approx \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon}\right). \quad (14.49)$$

Для обґрунтування можливості проведення такого спрощення введемо до розгляду характерний час τ_μ зміни $\mu(\vec{R}, t)$:

$$\left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| \approx \frac{1}{\tau_\mu}$$

і розкладемо у ряд Тейлора $\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right)$ за малою добавкою

$$\Delta t' = \vec{k}\vec{R}'/\omega_0:$$

$$\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) \approx \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \cdot \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}. \quad (14.50)$$

Другим доданком у (14.50) можна знехтувати, якщо він малий порівняно з першим. Для цього необхідно, щоб виконувалася така нерівність:

$$\left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| \left| \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0} \right| \leq \frac{k_\epsilon L}{\omega_0 \tau_\mu} \ll 1. \quad (14.51)$$

Якщо зміна $\mu(\vec{R}, t)$ у часі пов'язана тільки з перенесенням поля $\mu(\vec{R})$ як цілого зі швидкістю v (так зване перенесення „заморожених” неоднорідностей), то $\tau_\mu \approx l_\mu/v$, і нерівність (14.51) набуває вигляду

$$\frac{L}{l_\mu} \cdot \frac{v}{v_\epsilon} \ll 1. \quad (14.52)$$

Останні дві нерівності означають, що ми перейшли до квазістатистичного наближення: час $\Delta t' \sim L/v_\epsilon$ відносного запізнення хвиль, що приходять у точку спостереження з різних точок об'єму розсіювання, має бути значно меншим, ніж час τ_μ , за який суттєво змінюються неоднорідності.

За рахунок змін μ у часі поле U_1 вже не є монохроматичним з частотою ω_0 , а носить випадковий часовий характер, тобто є випадковим процесом. Знайдемо **енергетичний спектр випадкового процесу** $U_1(\vec{R}, t)$, вважаючи випадкове поле флуктуацій $\mu(\vec{R}, t)$ статистично однорідним за просторовими змінними \vec{R} і стаціонарним за часом t . Автокореляційна функція B_μ у цьому випадку має вигляд

$$\langle \mu(\vec{R}', t') \mu(\vec{R}'', t'') \rangle = B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'', t' - t''). \quad (14.53)$$

Енергетичний спектр $S_{U_1}(\vec{R}, \omega)$ випадкового процесу $U_1(\vec{R}, t)$ (радіус-вектор \vec{R} точки спостереження відіграє тут роль фіксованого параметра) визначимо за формулою Вінера-Хінчіна, маючи на увазі, що $U_1(\vec{R}, t)$ є аналітичним сигналом:

$$S_{U_1}(\bar{R}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle U_1(\bar{R}, t) U_1^*(\bar{R}, t + \tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (14.54)$$

Підставляючи сюди $U_1(\bar{R}, t)$ у вигляді (14.23) з урахуванням (14.49), отримаємо

$$S_{U_1}(\bar{R}, \omega) = \frac{k_\epsilon^4}{32\pi^3 R^2} \int_V d\bar{R}' \int_V d\bar{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega - \omega_0)\tau - i\bar{q}(\bar{R}' - \bar{R}'')} \times \\ \times \langle \mu\left(\bar{R}', t + \tau - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \mu\left(\bar{R}'', t - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \rangle. \quad (14.55)$$

Згідно з (14.53), кореляційна функція під знаком інтеграла дорівнює

$$\langle \mu\left(\bar{R}', t + \tau - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \mu\left(\bar{R}'', t - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \rangle = B_\mu(\bar{\rho}, \tau),$$

де $\bar{\rho} = \bar{R}' - \bar{R}''$. Перейшовши далі у (14.55) до нових змінних інтегрування $\bar{R}_1 = (\bar{R}' + \bar{R}'')/2$, $\bar{\rho} = \bar{R}' - \bar{R}''$ для випадку великої кількості неоднорідностей всередині об'єму розсіювання ($l_\mu \ll L$), приходимо до такої формули:

$$S_{U_1}(\bar{R}, \omega) = \frac{k_\epsilon^4 V}{32\pi^3 R^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_\mu(\bar{\rho}, \tau) e^{-i[\bar{q}\bar{\rho} - (\omega - \omega_0)\tau]} = \\ = \frac{\pi k_\epsilon^4 V}{2 R^2} S_\mu(\bar{q}, \omega - \omega_0). \quad (14.56)$$

Тут введено просторово-часовий енергетичний спектр $S_\mu(\bar{\chi}, \nu)$ випадкового поля $\mu(\bar{R}, t)$, що узагальнює формулу Вінера-

Хінчіна на випадок залежності автокореляційної функції B_μ від часу і просторових координат (див. § 13) і взятий для фіксованих значень просторової і часової частот: $\bar{\chi} = \bar{q}$, $\nu = \omega - \omega_0$:

$$S_\mu(\bar{q}, \omega - \omega_0) = S_\mu(\bar{\chi}, \nu) \Big|_{\substack{\bar{\chi}=\bar{q}, \\ \nu=\omega-\omega_0}} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_\mu(\bar{\rho}, \tau) e^{-i(\bar{\chi}\bar{\rho} - \nu\tau)} \Big|_{\substack{\bar{\chi}=\bar{q}, \\ \nu=\omega-\omega_0}}. \quad (14.57)$$

У реальних умовах флуктуації показника заломлення $n(\bar{R}, t)$ визначаються просторово-часовими змінами фізичних параметрів, що описують стан середовища, в якому відбувається поширення хвиль: температурою, тиском, концентрацією домішок (зокрема, для атмосфери – водяної пари, тобто вологості), густиною заряджених частинок (електронів та іонів – в іоносферній і космічній плазмі) та ін. Ці фізичні параметри, у свою чергу, описуються рівняннями, які пов'язують між собою їх просторові і часові зміни. Якщо рівняння, що описують стан середовища, лінійні, то амплітуда кожної просторової гармоніки $C_\mu(\bar{\chi}, t)$ у розкладанні Фур'є $\mu(\bar{R}, t)$ за плоскими хвилями

$$\mu(\bar{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_\mu(\bar{\chi}, t) e^{i\bar{\chi}\bar{R}} d\bar{\chi} \quad (14.58)$$

може мінятися з часом тільки у певний спосіб, за гармонійним законом з фіксованою частотою $\Omega = \Omega(\bar{\chi})$:

$$C_\mu(\bar{\chi}, t) = C_\mu^{(+)}(\bar{\chi}) e^{-i\Omega(\bar{\chi})t} + C_\mu^{(-)}(\bar{\chi}) e^{i\Omega(\bar{\chi})t}. \quad (14.59)$$

Просторово-часові флуктуації $\mu(\vec{R}, t)$ (14.58) при цьому можуть бути подані у вигляді інтеграла Фур'є за плоскими хвилями:

$$\mu(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) e^{i[\vec{\chi}\vec{R} - \Omega(\vec{\chi})t]} + C_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i[\vec{\chi}\vec{R} + \Omega(\vec{\chi})t]} \right\} d\vec{\chi}. \quad (14.60)$$

Рівняння $\Omega = \Omega(\vec{\chi})$ визначає так званий **закон дисперсії** відповідних хвиль (тиску, температури, густини електричного заряду та ін). Для кожної просторової гармоніки $\vec{\chi}$ два доданки під знаком інтеграла у (14.60) відповідають хвилям, що біжать у взаємно протилежних напрямках і мають однакову кругову частоту $\Omega(\vec{\chi})$ і довжину хвилі $\Lambda = 2\pi/\chi$. Це легко показати, якщо прослідкувати за швидкістю перенесення фіксованого значення фази хвилі. Справді, припустивши $\Phi^{(\pm)} = \vec{\chi}\vec{R} \mp \Omega(\vec{\chi})t = \text{Const}$, швидкість \vec{v}_{Φ} переміщення сталої фази (**фазової швидкості**), визначимо шляхом диференціювання $\Phi^{(\pm)}$ за часом:

$$\frac{\partial \Phi^{(\pm)}}{\partial t} = \vec{\chi}\vec{v}_{\Phi} \mp \Omega(\vec{\chi}) = 0.$$

Тут $\vec{v}_{\Phi} = d\vec{R}/dt$. Звідси видно, що введені нами знаки \pm відповідають хвилям, для яких зв'язок між частотою $\Omega(\vec{\chi})$ і фазовою швидкістю \vec{v}_{Φ} має вигляд $\Omega(\vec{\chi}) = \pm \vec{\chi}\vec{v}_{\Phi}$, що характерно для хвиль, що біжать у протилежних напрямках відносно вектора $\vec{\chi}$.

Скориставшись представленням $\mu(\vec{R}, t)$ у вигляді (14.60), побудуємо тепер просторово-часову автокореляційну функцію $B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau)$:

$$\begin{aligned} B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau) &= \langle \mu(\vec{R} + \vec{\rho}, t + \tau) \mu(\vec{R}, t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} \left[S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) e^{-i\Omega(\vec{\chi})\tau} + S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i\Omega(\vec{\chi})\tau} \right] d\vec{\chi}, \end{aligned} \quad (14.61)$$

де з урахуванням просторової однорідності поля флуктуацій $\mu(\vec{R}, t)$ введено просторові енергетичні спектри $S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi})$ і $S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi})$ хвиль, що поширюються у взаємно протилежних напрямках:

$$\begin{aligned} \langle C_{\mu}^{(\pm)}(\vec{\chi}) C_{\mu}^{(\pm)*}(\vec{\chi}') \rangle &= S_{\mu}^{(\pm)}(\vec{\chi}) \delta(\vec{\chi} - \vec{\chi}'), \\ \langle C_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) C_{\mu}^{(-)*}(\vec{\chi}') \rangle &= \langle C_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) C_{\mu}^{(+)*}(\vec{\chi}') \rangle = 0. \end{aligned} \quad (14.62)$$

Просторово-часовий енергетичний спектр $S_{\mu}(\vec{\chi}, \nu)$ після цього можна отримати, обчисливши інтеграл (14.57) з $B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau)$ у вигляді (14.61):

$$S_{\mu}(\vec{\chi}, \nu) = S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) \delta[\nu - \Omega(\vec{\chi})] + S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) \delta[\nu + \Omega(\vec{\chi})]. \quad (14.63)$$

Після виконаних обчислень енергетичний спектр розсіяного випромінювання $S_{U_1}(\vec{R}, \omega)$, згідно з формулою (14.56), подається так:

$$S_{U_1}(\vec{R}, \omega) = \frac{\pi k_{\epsilon}^4 V}{2R^2} \sum_{\pm} S_{\mu}^{(\pm)}(\vec{q}) \delta[\omega - \omega_0 \mp \Omega(\vec{q})]. \quad (14.64)$$

Видно, що енергетичний спектр $S_{U_1}(\vec{R}, \omega)$ складається з двох ліній на частотах $\omega = \omega_0 \pm \Omega(\vec{q})$, інтенсивності яких

визначаються енергіями $S^{(\pm)}(\vec{q})$, пропорційними до квадратів амплітуд просторових гармонік поля $\mu(\vec{R}, t)$, причому знак "плюс" відповідає хвилям, що поширюються вздовж напрямку вектора \vec{q} , а знак "мінус" — в протилежному напрямку.

Коментарі

Ефект зміни частоти сигналу при розсіюванні на флуктуючих неоднорідностях показника заломлення на величину $\pm\Omega(\vec{q})$, що відповідає частоті власних хвиль у середовищі з хвильовим вектором \vec{q} , отримав назву **комбінаційного розсіювання** (частота розсіяного сигналу отримується з частоти падаючого сигналу ω_0 шляхом простої комбінації збільшення (або зменшення) її на величину $\Omega(\vec{q})$).

Вимірювання спектра розсіяного сигналу є чутливим методом дистанційного зондування – визначення параметрів середовища за розташуванням та інтенсивністю спектральних ліній у відбитому сигналі. При цьому для різних середовищ можуть спостерігатися різні ситуації.

Приклади

1. Одному й тому самому значенню вектора розсіювання \vec{q} можуть відповідати кілька гілок коливань з різними частотами $\Omega_m(\vec{q})$ ($m=1,2,\dots$). У цьому випадку у спектрі розсіяного сигналу буде спостерігатися серія спектральних ліній на частотах $\omega = \omega_0 \pm \Omega_m(\vec{q})$.

2. При розсіюванні радіохвиль на неоднорідностях нейтральної атмосфери частота $\Omega(\vec{q})$ визначається швидкістю звуку v_{36} $\{\Omega(\vec{q}) = qv_{36}\}$, яка, у свою чергу, залежить від температури та

інших термодинамічних параметрів атмосфери. Цей факт лежить в основі методів радіоакустичного зондування нижньої атмосфери.

3. Радіохвилі, відбиті від іоносфери за рахунок розсіювання на плазмових неоднорідностях, мають у своєму спектрі максимуми,

що відповідають плазмовій частоті $\Omega_p = \left[\frac{4\pi N_e e^2}{m_e} \right]^{1/2}$ (e —

заряд, m_e — маса електрона, N_e — просторова густина електронів), що дає змогу визначити, наприклад, профіль електронної концентрації, залежність N_e від висоти ділянки розсіювання.

4. Рухові неоднорідностей як цілого зі швидкістю \vec{v} («заморожене» перенесення) формально відповідає закон дисперсії $\Omega(\vec{q}) = \vec{q}\vec{v}$, зміщення частоти розсіяного сигналу в цьому випадку викликане ефектом Доплера: $\omega = \omega_0 + \vec{q}\vec{v}$ (у формулі (14.64) при цьому наявний тільки один доданок — $S_{\mu}^{(+)}(\vec{q})$).

Урахування дисипації енергії

Механізми дисипації енергії, обов'язково наявні у будь-якій фізичній системі, призводять до згасання її власних коливань, тому (14.59) слід записувати у вигляді

$$C_{\mu}(\vec{\chi}, t) = \left[C_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) e^{-i\Omega(\vec{\chi})t} + C_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i\Omega(\vec{\chi})t} \right] e^{-\Gamma(\vec{\chi})t}, \quad t \geq 0; \quad (14.65)$$

де $\Gamma(\vec{\chi})$ — **декремент згасання**. Відповідним чином змінюється й автокореляційна функція (14.61): замість гармонійної залежності від часу у ній з'являються експоненціально згасаючі множники $\exp\{-\Gamma(\vec{\chi})|\tau|\}$:

$$B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\chi}\vec{\rho} - \Gamma(\vec{\chi})|\tau|} \left[S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) e^{-i\Omega(\vec{\chi})\tau} + S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i\Omega(\vec{\chi})\tau} \right] d\vec{\chi}, \quad (14.66)$$

а просторово-часовий енергетичний спектр $S_\mu(\vec{\chi}, \nu)$ „розминається” за частотою ν . Кожній просторовій гармоніці з хвильовим вектором $\vec{\chi}$ відповідають вже не дві частоти $\pm\Omega(\vec{\chi})$ (див. (14.63)), а дві смуги частот з шириною $\sim \Gamma(\vec{\chi})$:

$$S_\mu(\vec{\chi}, \nu) = \frac{1}{\pi} \sum_{\pm} S_\mu^{(\pm)}(\vec{\chi}) \frac{\Gamma(\vec{\chi})}{[\nu \mp \Omega(\vec{\chi})]^2 + \Gamma^2(\vec{\chi})}. \quad (14.67)$$

Формально цей вираз можна отримати з (14.64), якщо δ -функції, що входять сюди, замінити „передграничними” значеннями (див. (2.19 а)):

$$\delta(\nu \pm \Omega) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\nu \mp \Omega)^2 + \Gamma^2} \right]. \quad (14.68)$$

У результаті, спектр розсіяного сигналу $S_\mu(\vec{q}, \omega - \omega_0) = S_\mu(\vec{\chi}, \nu) \Big|_{\substack{\vec{\chi}=\vec{q}, \\ \nu=\omega-\omega_0}}$ з дискретного (14.64) (відмінного

від нуля тільки на двох частотах $\omega = \omega_0 \pm \Omega(\vec{q})$) стає неперервним, з двома максимумами, ширина яких пропорційна декременту згасання „власних” хвиль у середовищі (рис. 14.5). Таким чином, за видом спектра розсіяного сигналу можна визначити не тільки власні частоти коливань у середовищі (для плазми, наприклад, це дає змогу з'ясувати густину заряджених частинок в об'ємі розсіювання), а й оцінити декремент згасання цих коливань (для плазми він визначається частотою зіткнень електронів з нейтральними атомами й молекулами).

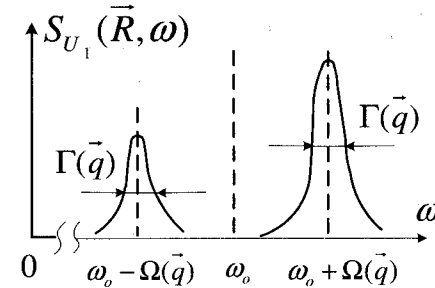


Рис. 14.5

ЗАДАЧІ

1. У результаті розсіювання плоскої хвилі на випадкових неоднорідностях середовища виникло випромінювання, інтенсивність якого спадає за законом $\sim \exp(-\theta^2/\theta_0^2)$ зі зростанням кута розсіювання θ . Визначити за цими даними коефіцієнт кореляції показника заломлення, вважаючи кут θ_0 малим ($\theta_0 \ll 1$).

Розв'язок. Розглядаємо розсіювання у борнівському наближенні (одноразове розсіювання). Згідно з умовою,

$$\bar{I}_1 \sim e^{-\theta^2/\theta_0^2}.$$

Оскільки $\bar{I}_1 \sim S_\mu(\vec{q})$, то

$$S_\mu(\vec{q}) \sim e^{-\theta^2/\theta_0^2}. \quad (1)$$

Перейдемо від θ до q з використанням співвідношення $q = 2k_e \sin \theta/2$ (див. рис. 14.6).

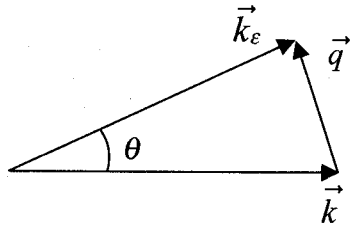


Рис. 14.6

Врахуємо також, що, згідно з умовою, кут θ_0 малий. Відповідно до (1), енергетичний спектр $S_\mu(\vec{q})$ відмінний від нуля тільки для кутів $\theta \leq \theta_0 \ll 1$. Тому можна обмежитися розглядом тільки малих значень θ (у яких зосереджена основна енергія розсіяного випромінювання). У цьому випадку $q \approx k_\epsilon \theta$. Отже, (1) можна подати таким чином:

$$S_\mu(\vec{q}) \sim e^{-q^2/\theta_0^2 k_\epsilon^2}. \quad (2)$$

Тепер з формул Вінера-Хінчіна випливає

$$\begin{aligned} B_\mu(\rho) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2}} e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{q} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2}} e^{i(q_x \rho_x + q_y \rho_y + q_z \rho_z)} dq_x dq_y dq_z = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_x \rho_x} dq_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_y^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_y \rho_y} dq_y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_z^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_z \rho_z} dq_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Кожен з трьох однакових за виглядом інтегралів у (3) зводиться до інтеграла Пуассона. Розглянемо один із цих інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_x \rho_x} dq_x = \theta_0 k_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi^2 - \frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_\epsilon^2}{4}} d\psi = \theta_0 k_\epsilon \sqrt{\pi} e^{-\frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_\epsilon^2}{4}}. \quad (4)$$

Тут

$$\psi = \frac{q_x}{\theta_0 k_\epsilon} - \frac{i \rho_x \theta_0 k_\epsilon}{2}.$$

З (3) і (4) для $B_\mu(\vec{\rho})$ можна остаточно записати

$$B_\mu(\vec{\rho}) \sim \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_\epsilon)^3 e^{-\frac{\theta_0^2 k_\epsilon^2}{4} (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)} = \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_\epsilon)^3 e^{-\frac{\theta_0^2 k_\epsilon^2}{4} \rho^2}.$$

Отже, коефіцієнт кореляції показника заломлення має вигляд

$$K_\mu(\rho) = \frac{B_\mu(\rho)}{B_\mu(0)} = e^{-\frac{\rho^2 \theta_0^2 k_\epsilon^2}{4}} = e^{-\frac{\rho^2}{l_\mu^2}},$$

де $l_\mu = 2/\theta_0 k_\epsilon$.

2. Хвиля поширюється у статистично однорідному та ізотропному середовищі з гауссовою функцією кореляції $B_\mu(\vec{\rho}) = \overline{\mu}^2 e^{-\rho^2/l_\mu^2}$. Визначити у борнівському наближенні індикатрису розсіювання і повну потужність, розсіяну об'ємом V за всіма напрямками.

Відповідь:

$$F(\theta) = \exp\left(-l_\mu^2 k_\epsilon^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\bar{I}_{1\text{повн}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} k_{\varepsilon}^2 V l_{\mu} \bar{\mu}^2 \left[1 - \exp(-k_{\varepsilon}^2 l_{\mu}^2) \right].$$

§ 15. Методи геометричної оптики і плавних збурень

Нерівності (14.47) і (14.48), що обмежують область застосування методу малих збурень, унеможливають використання його для розрахунку полів, розсіяних на дуже великих неоднорідностях, у разі великих розмірів об'єму розсіювання L або для дуже коротких довжин хвиль, коли $k_{\varepsilon} l_{\mu} \gg 1$ і $k_{\varepsilon} L \gg 1$. Альтернативою методу малих збурень у певному сенсі є методи геометричної оптики (МГО) і плавних збурень (МПЗ), які із самого початку припускають, що лінійні розміри неоднорідностей l_{μ} великі порівняно з довжиною хвилі λ_{ε} ($k_{\varepsilon} l_{\mu} \gg 1$), тобто неоднорідності є достатньо „плавними”. Як ми бачили, індикатриса розсіювання на таких неоднорідностях сильно витягнута „вперед” (у напрямку поширення первинного поля), що дає змогу під час розрахунків знехтувати хвилями, розсіяними назад.

Для спрощення обмежимося випадком нерухомих неоднорідностей, коли флуктуації показника заломлення n не залежать від часу $n(\vec{R}, t) = n(\vec{R})$ і хвильове рівняння для поля U має вигляд (див. (14.1))

$$\left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{n^2(\vec{R})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = 0. \quad (15.1)$$

При цьому, як було показано у попередньому параграфі, для монохроматичного первинного поля $U_0 \sim e^{-i\omega t}$ залежність від часу

t розсіяного поля зберігається, що дає змогу шукати розв'язок для $U(\vec{R}, t)$ у вигляді $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R}) e^{-i\omega t}$ (тут і далі ми опускаємо індекс “0” у частоті ω_0). Після підставлення цього виду розв'язку у хвильове рівняння (15.1) воно переходить у рівняння Гельмгольца:

$$\left[\Delta_{\vec{R}} + k^2 \varepsilon(\vec{R}) \right] U(\vec{R}) = 0, \quad (15.2)$$

де $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — хвильове число, λ — довжина хвилі у вакуумі ($n=1$), а $\varepsilon(\vec{R}) = n^2(\vec{R})$ — діелектрична проникність середовища.

15.1. Метод геометричної оптики

Якби середовище було однорідним $\{\varepsilon(\vec{R}) = \text{Const}\}$, то рівняння Гельмгольца (15.2) мало б розв'язок у вигляді плоскої хвилі:

$$U(\vec{R}) = A \exp\{ik\sqrt{\varepsilon} \cdot \vec{t} \cdot \vec{R}\}, \quad (15.3)$$

де \vec{t} — одиничний вектор у напрямку поширення хвилі. Зауважимо, що у попередніх позначеннях (див. (14.17)) ми мали б $k_{\varepsilon} = k\sqrt{\varepsilon}$ і $k\sqrt{\varepsilon} \vec{t} = k_{\varepsilon} \vec{t} = \vec{k}_{\varepsilon}$. Для $\varepsilon = \varepsilon(\vec{R})$ введемо у розгляд характерний масштаб l_{ε} зміни діелектричної проникності:

$$\left| \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right| \approx \frac{1}{l_{\varepsilon}}.$$

Якщо середовище плавно неоднорідне, тобто $\lambda \ll l_{\varepsilon}$, то розв'язок вихідного рівняння (15.2) можна шукати у вигляді квазіплоских хвиль:

$$U(\vec{R}) = A(\vec{R}) e^{iS(\vec{R})}, \quad (15.4)$$

де амплітуда $A(\vec{R})$ і фаза $S(\vec{R})$ — повільно змінні (у масштабі λ) функції координат. Скориставшись малою швидкістю зміни $A(\vec{R})$ і $S(\vec{R})$, нескладно отримати рівняння для A і S або для величини $\varphi(\vec{R}) = S(\vec{R})/k$, яка є **фазовим шляхом хвилі** і називається **ейконалом**.

Запропонований для цього **Дебаєв** спосіб виведення рівнянь полягає у наступному. Розкладемо амплітуду $A(\vec{R})$ у ряд за оберненими степенями хвильового числа k :

$$U(\vec{R}) = \left(A_0 + \frac{A_1}{ik} + \frac{A_2}{(ik)^2} + \dots \right) e^{ik\varphi}. \quad (15.5)$$

Фактично, розклад $A(\vec{R})$ у ряд проводиться за безрозмірним малим параметром $1/kl_\epsilon \ll 1$. Коефіцієнти A_m у розкладанні (15.5) у загальному випадку комплексні і тому роблять внесок й у фазу результуючого поля.

Підставивши ряд (15.5) у рівняння Гельмгольца і прирівнявши до нуля коефіцієнти при однакових степенях k , отримуємо систему рекурентних рівнянь для φ, A_0, A_1, \dots :

$$\begin{aligned} (k^2) \quad (\vec{\nabla} \varphi)^2 &= \epsilon, \\ (k^1) \quad 2(\vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A_0) + A_0 \Delta \varphi &= 0, \\ (k^0) \quad 2(\vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A_1) + A_1 \Delta \varphi &= -\Delta A_0, \\ &\dots \dots \dots \\ (k^{1-n}) \quad 2(\vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A_n) + A_n \Delta \varphi &= -\Delta A_{n-1}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Перше рівняння у системі (15.6) називається **рівнянням ейконалу**, а наступні рівняння для A_m ($m=0,1,2,\dots$) називають **рівняннями переносу** для амплітуд, відповідно, нульового, першого і m -го наближень. Звичайно у МГО обмежуються нульовим наближенням, залишаючи у розкладанні (15.5) тільки член A_0 . Наступні члени у (15.5) відкидаються не тільки через складність їх обчислення, а, головним чином, тому, що ряд (15.5) є асимптотичним, а для асимптотичних рядів, як відомо, збільшення кількості членів, що враховуються, не завжди призводить до покращення апроксимації.

Побудова розв'язків рівнянь ейконалу і переносу випромінювання

Рівняння ейконалу

$$(\vec{\nabla} \varphi)^2 = \epsilon(\vec{R}) \quad (15.7)$$

це **рівняння типу Гамільтона-Якобі**. Йому відповідають характеристики (**промені**), на яких функціонал $\int \sqrt{\epsilon} ds$ екстремальний (**принцип Ферма**). Розв'язок (рівняння променів) можна записати у різних формах. Для наших цілей зручно його подати у вигляді залежності $\vec{R} = \vec{R}(s)$, де s — геометрична довжина, що обчислюється вздовж променя від якої-небудь початкової точки (див. рис. 15.1).

За відомою залежністю $\vec{R}(s)$ легко визначити і рівняння дотичної до променя у кожній точці $\vec{t}(s)$:

$$\vec{t}(s) = d\vec{R}(s)/ds. \quad (15.8)$$

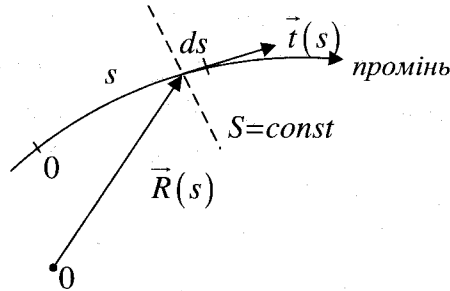


Рис. 15.1

Тут ds – елемент довжини на промені. З іншого боку, вектор $\vec{t}(s)$ одночасно є і нормаллю до фазового фронту $S = k\varphi = \text{Const}$: $\vec{t} = \vec{\nabla}S / |\vec{\nabla}S| = \vec{\nabla}\varphi / |\vec{\nabla}\varphi|$. Оскільки, згідно з рівнянням ейконалу (15.7), $|\vec{\nabla}\varphi| = \sqrt{\varepsilon}$, звідси випливає, що

$$\vec{t}(s) = \vec{\nabla}\varphi / \sqrt{\varepsilon}. \quad (15.9)$$

Якщо у той чи інший спосіб розв'язання $\vec{R}(s)$ і, отже, $\vec{t}(s)$ променевих рівнянь знайдене, то рівняння ейконалу (15.7) і перенесення нульового наближення

$$2(\vec{\nabla}\varphi \vec{\nabla}A_0) + A_0\Delta\varphi = 0 \quad (15.10)$$

можуть бути проінтегровані вздовж променевих траєкторій. Дійсно, помноживши обидві частини рівності (15.9) скалярно на \vec{t} і враховуючи, що $\vec{t}\vec{t} = 1$, а $\vec{t}\vec{\nabla}\varphi = d\varphi/ds$ (похідна вздовж заданого напрямку \vec{t}), отримаємо $d\varphi/ds = \sqrt{\varepsilon}$. Звідси ейконал φ на відстані s від обраного початку відліку ($s=0$) знаходиться шляхом інтегрування вздовж криволінійного променя:

$$\varphi(s) = \int_0^s \sqrt{\varepsilon} ds' = \int_0^s \sqrt{\varepsilon[\vec{R}(s')]} ds'. \quad (15.11)$$

З іншого боку, вважаючи, що $A_0 \neq 0$, рівняння перенесення (15.10) можна переписати у такому вигляді:

$$\text{div}(A_0^2 \nabla \varphi) = \text{div}(\vec{t} \sqrt{\varepsilon} A_0^2) = \text{div}(\vec{t} I) = 0, \quad (15.12)$$

де введена величина $I = \sqrt{\varepsilon} A_0^2$ пропорційна **інтенсивності**. Згідно з відомою геометрією променів $\vec{R}(s)$, тепер побудуємо „нескінченно тонку” **променеву трубку** і проінтегруємо (15.12) за об'ємом, вміщеним між двома перерізами: $d\Sigma_0$ — “на вході” і $d\Sigma$ — “на виході” з трубки (див. рис.15.2).

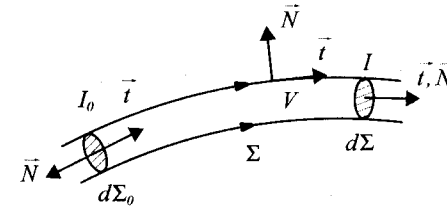


Рис. 15.2

Скориставшись при цьому теоремою Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\int_V \text{div}(\vec{t} I) dv = \oint_{\Sigma} \vec{t} I \vec{N} d\Sigma. \quad (15.13)$$

Тут \vec{N} – зовнішня нормаль до поверхні променевої трубки. Враховуючи, що на бічній поверхні трубки вектори \vec{t} і

\vec{N} ортогональні, а на торцях напрямки \vec{t} і \vec{N} або збігаються, або протилежні (див. рис. 15.2), з (15.13) отримуємо **закон збереження інтенсивності всередині променевої трубки**:

$$I_0 d\Sigma_0 = I d\Sigma. \quad (15.14 \text{ а})$$

Тут I_0 і I – відповідно інтенсивності на вході й виході трубки.

Звідси знаходимо шукану інтенсивність I :

$$I = I_0 \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma}. \quad (15.14 \text{ б})$$

15.2. Наближення малих збурень у методи геометричної оптики

Тепер розглянемо випадково-неоднорідне середовище. Отримати аналітичний розв'язок рівняння ейконалу (рівняння променів) при довільній залежності ε від координат неможливо. Тому під час розв'язання статистичних задач застосовують різні наближені методи і, в першу чергу, – **метод збурень**.

Флуктуації ейконалу

Так само, як і в ММЗ, подамо діелектричну проникність $\varepsilon(\vec{R})$ у вигляді суми регулярної і випадкової складових:

$$\varepsilon(\vec{R}) = \langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle + \varepsilon_1(\vec{R}). \quad (15.15)$$

Припустивши, що флуктуаційна компонента ε_1 є малою порівняно з регулярною $\bar{\varepsilon}$: $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll \bar{\varepsilon}$, подамо ейконал у вигляді ряду

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (15.16)$$

Вважаємо, що φ_0 відповідає „незбуреному” рівнянню ейконалу

$$(\vec{\nabla} \varphi_0)^2 = \bar{\varepsilon}(\vec{R}), \quad (15.17)$$

а $|\nabla \varphi_m| \sim \sigma_\varepsilon^m$. Підставимо (15.16) у рівняння ейконалу (15.7)

$$[\vec{\nabla}(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots)]^2 = \bar{\varepsilon} + \varepsilon_1$$

і вимагатимемо, щоб отримане рівняння задовольнялося для кожного доданка за малою величиною σ_ε^m незалежно від інших доданків. Тоді, з урахуванням (15.17), отримуємо для поправок φ_m таку систему рекурентних лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2(\vec{\nabla} \varphi_0 \vec{\nabla} \varphi_1) &= \varepsilon_1, \\ 2(\vec{\nabla} \varphi_0 \vec{\nabla} \varphi_2) &= -(\vec{\nabla} \varphi_1)^2, \end{aligned} \quad (15.18)$$

.....

Розв'язок системи рівнянь (15.18) можна виразити у квадратурах, якщо відомі незбурені характеристики $\vec{R}_0(s)$ і $\vec{t}_0(s)$ регулярного рівняння ейконалу (15.17). Дійсно, припустимо, що розв'язання $\vec{R}_0(s)$ і $\vec{t}_0(s)$ відомі. Тоді, згідно з (15.17), маємо $\vec{\nabla} \varphi_0 = \vec{t}_0 \sqrt{\bar{\varepsilon}}$. З урахуванням цього рівняння для поправки першого порядку φ_1 , згідно з (15.18), набуває вигляду

$$2(\vec{\nabla} \varphi_0 \vec{\nabla} \varphi_1) = 2\sqrt{\bar{\varepsilon}}(\vec{t}_0 \vec{\nabla} \varphi_1) = 2\sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{d\varphi_1}{ds} = \varepsilon_1. \quad (15.19)$$

Звідси випливає, що поправка φ_1 до незбуреного ейконалу φ_0 на відрізок променя довжиною s дорівнює

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon}} ds'. \quad (15.20)$$

Інтегрування тут ведеться вздовж незбуреного променя $\vec{R}_0(s)$.

Флуктуації кутів приходу

Кути приходу хвилі визначаються напрямком нормалі до фазового фронту, який в ізотропному середовищі збігається з напрямком одиничного вектора $\vec{i} = \vec{\nabla} \varphi / \sqrt{\varepsilon}$. Визначимо відхилення цього вектора від незбуреного значення $\vec{i}_0 = \vec{\nabla} \varphi_0 / \sqrt{\varepsilon}$. Згідно з формулами (15.15) і (15.16), з точністю до лінійних за $\varepsilon_1/\bar{\varepsilon} \ll 1$ доданків, отримаємо

$$\vec{i} = \frac{\vec{\nabla} \varphi}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\vec{\nabla} (\varphi_0 + \varphi_1 + \dots)}{\sqrt{\varepsilon + \varepsilon_1}} = \frac{\vec{\nabla} \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\vec{\nabla} \varphi_1 - \frac{\varepsilon_1 \vec{\nabla} \varphi_0}{2\varepsilon} + \dots \right]. \quad (15.21)$$

Враховуючи далі, що $\vec{\nabla} \varphi_0 = \vec{i}_0 \sqrt{\varepsilon}$ і $\varepsilon_1 = 2(\vec{\nabla} \varphi_0 \vec{\nabla} \varphi_1) = 2\sqrt{\varepsilon}(\vec{i}_0 \vec{\nabla} \varphi_1)$ (див. (15.19)), отримуємо

$$\vec{i} \approx \vec{i}_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{i}_0 (\vec{i}_0 \vec{\nabla} \varphi_1) \right].$$

Звідси знаходимо вираз для поправки першого порядку до напрямку незбуреного променя \vec{i}_0 :

$$\vec{i}_1 \approx \vec{i} - \vec{i}_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{i}_0 (\vec{i}_0 \vec{\nabla} \varphi_1) \right] \equiv \frac{\vec{\nabla}_\perp \varphi_1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (15.22)$$

де $\vec{\nabla}_\perp$ – вектор-оператор поперечного (відносно незбуреного променя) диференціювання.

Флуктуації рівня

Введемо поняття **рівня амплітуди** або просто **рівня**, яким називають величину

$$\chi = \ln \frac{A_0}{\hat{A}}, \quad (15.23)$$

де \hat{A} – певна стала величина тієї самої розмірності, що й амплітуда A_0 . З урахуванням визначення (15.23), рівняння перенесення нульового наближення (15.10) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} 2(\vec{\nabla} A_0 \vec{\nabla} \varphi) + A_0 \Delta \varphi &= A_0 \left[2 \left(\frac{1}{A_0} \vec{\nabla} A_0 \vec{\nabla} \varphi \right) + \Delta \varphi \right] = \\ &= A_0 \left[2 \left(\vec{\nabla} \ln \frac{A_0}{\hat{A}} \vec{\nabla} \varphi \right) + \Delta \varphi \right] = A_0 [2\vec{\nabla} \chi \vec{\nabla} \varphi + \Delta \varphi] = 0. \end{aligned}$$

Вважаючи, що $A_0 \neq 0$, остаточно отримаємо

$$2\vec{\nabla} \chi \vec{\nabla} \varphi + \Delta \varphi = 0. \quad (15.24)$$

Розв'язання цього рівняння знову шукатимемо у вигляді розкладів у ряди теорії збурень:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, \end{aligned} \quad (15.25)$$

де $\varphi_m \sim \sigma_\varepsilon^m$ і $\chi_m \sim \sigma_\varepsilon^m$. Підставивши (15.25) у (15.24) та прирівнявши доданки одного порядку малості за малою величиною σ_ε , отримаємо систему рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2\vec{\nabla} \chi_0 \vec{\nabla} \varphi_0 + \Delta \varphi_0 &= 0, \\ 2\vec{\nabla} \chi_1 \vec{\nabla} \varphi_0 + \Delta \varphi_1 + 2\vec{\nabla} \chi_0 \vec{\nabla} \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (15.26)$$

Значення ейконалу φ_0 і рівня χ_0 знаходяться з незбуреної задачі із заданою регулярною діелектричною проникністю $\langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle$. За знайденими φ_0 і χ_0 з другого рівняння (15.26) знаходиться величина флуктуацій рівня у першому наближенні χ_1 та ін.

Як найпростіший **приклад** розглянемо задачу поширення плоскої хвилі у статистично однорідному середовищі, коли $\langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle = \text{Const}$. З регулярної частини задачі випливає, що при поширенні в однорідному середовищі вихідна плоска хвиля не змінюється. Це означає, що сім'я незбурених (регулярних) променів є системою плоско-паралельних ліній, тобто $\vec{t}_0 = \text{Const}$. З рівняння ейконалу нульового наближення $\vec{\nabla} \varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{t}_0$ отримаємо, що $\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \cdot s$, де s відлічується від обраного початку відліку ($s = 0$) вздовж прямолінійного променя, заданого напрямком \vec{t}_0 . Для зручності подання ми можемо, наприклад, спрямувати вздовж \vec{t}_0 вісь OZ декартової системи координат XYZ . У цьому випадку $s \equiv z$, $\vec{t}_0 = \vec{e}_z$, $\vec{\nabla} \varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{e}_z$, $\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} z$ і $\Delta \varphi_0 = 0$. З іншого боку, для сім'ї плоско-паралельних променів перерізи незбурених променевих трубок не змінюються за дистанцією, і, згідно із законом збереження інтенсивності всередині променевої трубки, отримуємо, що $\chi_0 = \text{Const}$. Отже, $\vec{\nabla} \chi_0 = 0$. З урахуванням вищевикладеного, перше рівняння у системі (15.26) задовольняється автоматично, а друге (для χ_1) приводиться до такого вигляду:

$$2\vec{\nabla} \varphi_0 \vec{\nabla} \chi_1 + \Delta \varphi_1 = 2\sqrt{\varepsilon} \frac{d\chi_1}{dz} + \Delta \varphi_1 = 0. \quad (15.27)$$

Знайдене рівняння легко інтегрується, і ми отримуємо вираз для флуктуаційного додатку до рівня:

$$\chi_1(x, y, z) = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \Delta \varphi_1 dz'. \quad (15.28)$$

Інтегрування тут ведеться вздовж прямолінійного променя, паралельного до осі OZ , а φ_1 , згідно з (15.20), визначається як

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \varepsilon_1(x, y, z') dz'. \quad (15.29)$$

15.3. Метод плавних збурень (метод Ритова)

У цьому розділі ми розглянемо ще один широко застосовуваний наближений метод розв'язання рівнянь електродинаміки — так званий метод плавних збурень (МПЗ). Уперше цей метод було використано у 1937 році С. М. Ритовим для розв'язання детермінованої задачі про дифракцію світла на ультразвуковій хвилі і пізніше було застосовано для вирішення статистичних задач О. М. Обуховим.

Для простоти знову обмежимося випадком нерухомих неоднорідностей, коли флуктуації діелектричної проникності не залежать від часу: $\varepsilon(\vec{R}, t) = \varepsilon(\vec{R})$. На відміну від ММЗ у МГО і МПЗ об'єм розсіювання V , всередині якого знаходяться випадкові неоднорідності ε_1 , достатньо великий, і спостерігач може перебувати навіть всередині V (принаймні, неоднорідності ε_1 займають якщо й не всю, то значну частину траси поширення хвиль).

Припустимо, що нам необхідно визначити розсіяне поле у точці спостереження P , що знаходиться безпосередньо всередині об'єму

розсіювання V . У поставленій задачі цікавим є не стільки розсіяне поле, що виникає в неоднорідному середовищі під дією поля первинної хвилі $U_0(\vec{R})$, скільки зміна параметрів $U_0(\vec{R})$. Як такі параметри звичайно розглядають амплітуду $A(\vec{R})$ і фазу $S(\vec{R})$ хвилі. Так само, як і в МГО, подамо шукане поле $U(\vec{R})$ у комплексній формі:

$$U(\vec{R}) = A(\vec{R})e^{iS(\vec{R})} = \hat{A} \frac{A(\vec{R})}{\hat{A}} e^{iS(\vec{R})} = \hat{A} e^{\psi(\vec{R})}, \quad (15.30)$$

де введено нову функцію

$$\psi(\vec{R}) = iS(\vec{R}) + \ln \frac{A(\vec{R})}{\hat{A}} = iS(\vec{R}) + \chi(\vec{R}), \quad (15.31)$$

так звану „**комплексну фазу**” поля $U(\vec{R})$. Уявна частина ψ збігається із, власне, фазою S ($\text{Im} \psi = S$), а дійсна частина $\chi = \ln \frac{A}{\hat{A}} = \text{Re} \psi$ є **рівнем амплітуди** або просто рівнем. Фізичний смисл у поданні (15.30) має тільки $\text{Re} U$, тому комплексне поле $U(\vec{R})$ можна розглядати як узагальнення поняття „аналітичний сигнал” на функції не часу t , а просторових змінних \vec{R} .

Підставивши шуканий вигляд розв’язку (15.30) у рівняння Гельмгольца (15.2), перейдемо до нового рівняння для комплексної фази $\psi(\vec{R})$. При цьому скористаємося відомими правилами диференціально-векторного аналізу:

$$\begin{aligned} \text{grad} U &= \vec{\nabla} U = \hat{A} \vec{\nabla} e^{\psi} = \hat{A} e^{\psi} \vec{\nabla} \psi = U \vec{\nabla} \psi, \\ \Delta U &= \text{div}(\text{grad} U) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} U) = \vec{\nabla}(U \vec{\nabla} \psi) = \\ &= \vec{\nabla} U \vec{\nabla} \psi + U \Delta \psi = U (\vec{\nabla} \psi)^2 + U \Delta \psi. \end{aligned} \quad (15.32)$$

Ще раз нагадаємо визначення операторів $\vec{\nabla}$ (набла) і Δ (лапласіан): $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — орти декартової системи координат. Підставляючи тепер ΔU у (15.2) і скорочуючи на функцію U , яка припускається відмінною від нуля, приходимо до рівняння для комплексної фази ψ :

$$(\vec{\nabla} \psi)^2 + \Delta \psi + k^2 [\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R})] = 0. \quad (15.33)$$

На відміну від (15.2), ми отримали рівняння зі сталими коефіцієнтами, і в цьому розумінні воно є „кращим” за (15.2), де перед невідомою функцією $U(\vec{R})$ стоїть змінний множник $k^2 \varepsilon(\vec{R}) = k^2 [\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R})]$. Але за це спрощення доводиться „платити” тим, що рівняння (15.33) нелінійне відносно $\vec{\nabla} \psi$.

15.4. Наближення малих збурень у методі Ритова

Так само, як і в МГО, розглянемо випадок, коли флуктуююча компонента ε_1 мала порівняно з регулярною складовою $\bar{\varepsilon}$: $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll \bar{\varepsilon}$. Розв’язок рівняння (15.33) шукатимемо у вигляді ряду теорії збурень:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad (15.34)$$

за степенями малого параметра $\mu = \varepsilon_1 / \bar{\varepsilon}$ ($\sigma_\mu = \sigma_\varepsilon / \bar{\varepsilon} \ll 1$), вважаючи, що $\psi_m \sim \sigma_\mu^m$. Оскільки у рівнянні (15.33) є тільки похідні від функції ψ , а сама функція ψ не входить у рівняння, природно припустити, що фактичним параметром розкладу (15.33) є не сама величина μ , а її похідні $\nabla \mu \sim \mu / l_\mu$, де l_μ — характерний лінійний розмір неоднорідностей $\mu(\vec{R})$. Звідси випливає, що чим більший розмір неоднорідностей l_μ , тобто чим вони більш „плавні”, тим краще має сходитися ряд (15.34) для ψ .

Підставимо ряд (15.34) у (15.33):

$$\left[\bar{\nabla}(\psi_0 + \psi_1 + \dots) \right]^2 + \Delta(\psi_0 + \psi_1 + \dots) = -k^2 \left[\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R}) \right]. \quad (15.35)$$

Вважатимемо, що ψ_0 задовольняє „незбурене” рівняння (15.33) з $\varepsilon_1 \equiv 0$, а для решти доданків вимагатимемо, щоб рівність (15.35) виконувалась у кожному порядку за ε_1 . У результаті, отримаємо таку систему рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1^0) \quad & (\bar{\nabla} \psi_0)^2 + \Delta \psi_0 = -k^2 \bar{\varepsilon}(\vec{R}), \\ (\varepsilon_1^1) \quad & 2\bar{\nabla} \psi_0 \bar{\nabla} \psi_1 + \Delta \psi_1 = -k^2 \varepsilon_1(\vec{R}), \\ (\varepsilon_1^2) \quad & 2\bar{\nabla} \psi_0 \bar{\nabla} \psi_2 + \Delta \psi_2 = -(\bar{\nabla} \psi_1)^2, \\ & \dots \end{aligned} \quad (15.36)$$

Розв’язок ψ_0 першого рівняння (15.36) визначає просторову залежність незбуреного хвильового поля $U_0 = e^{\psi_0}$, яка мала б місце,

якби флуктуації показника заломлення $\varepsilon_1(\vec{R})$ були відсутніми ($\varepsilon_1 \equiv 0$). Цей розв’язок ми вважаємо відомим. Друге рівняння у (15.36) відносно ψ_1 є лінійним із заданою правою частиною і відомим коефіцієнтом $\bar{\nabla} \psi_0$ перед похідною $\bar{\nabla} \psi_1$. Наступні рівняння для ψ_2 , ψ_3 тощо утворюють ланцюжок „зачеплених” одне за одне рівнянь: знаючи ψ_m , можна визначити коефіцієнти $\bar{\nabla} \psi_m$ і праві частини рівнянь для ψ_{m+1} .

Як *ілюстрацію* методу плавних збурень застосуємо його для розв’язання найпростішої задачі. Нехай нескінченне статистично однорідне середовище ($\langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle = \text{Const}$) поділене на два півпростори ($z > 0$ і $z < 0$ на рис. 15.3).

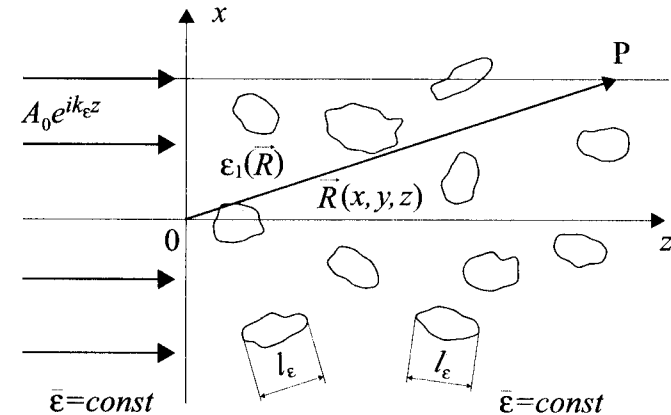


Рис. 15.3

На півпростір $z > 0$, у якому знаходяться випадкові неоднорідності $\varepsilon_1(\vec{R})$, з лівого півпростору ($z < 0$), де неоднорідності

відсутні ($\varepsilon_1 \equiv 0$), падає нормально до границі поділу ($z = 0$) плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди

$$U_0(\vec{R}, t) = e^{i(k_\varepsilon z - \omega t)}, \quad (15.37)$$

де $k_\varepsilon = k\sqrt{\varepsilon}$ — модуль хвильового вектора в статистично однорідному середовищі (див. (14.17)). Вимагається у довільній точці P з координатами $\vec{R} = (z, y, z)$, що знаходиться всередині неоднорідного середовища ($z > 0$), знайти поправки до амплітуди і фази хвилі, що виникають за рахунок неоднорідностей діелектричної проникності $\varepsilon_1(\vec{R})$.

Згідно з (15.37), комплексна фаза незбуреного поля дорівнює $\psi_0 = iS_0 + \chi_0$, де $S_0 = k_\varepsilon z$ і $\chi_0 = \text{Const}$. Обчисливши $\vec{\nabla} \psi_0 = ik_\varepsilon \vec{e}_z$, $\Delta \psi_0 = 0$, переконуємося у тому, що перше рівняння для ψ_0 у системі (15.36) перетворюється у тотожність: $-k_\varepsilon^2 = -k_\varepsilon^2$.

Рівняння для поправки ψ_1 (друге рівняння у (15.36)) набуває вигляду

$$2ik\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \Delta \psi_1 = -k^2 \varepsilon_1(\vec{R}). \quad (15.38)$$

Подавши ψ_1 у вигляді $\psi_1 = iS_1 + \chi_1$ і вимагаючи виконання рівняння (15.38) для дійсної й уявної частин окремо, приходимо до системи двох рівнянь для двох невідомих функцій S_1 і χ_1 :

$$\begin{aligned} -2k\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial S_1}{\partial z} + \Delta \chi_1 &= -k^2 \varepsilon_1, \\ 2k\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta S_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15.39)$$

Тепер перейдемо від фази S_1 до відповідного їй ейконалу $\varphi_1 = S_1/k$. Розділивши після цього перше рівняння у системі (15.39) на k^2 , а друге на k , отримаємо

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{k^2} \Delta \chi_1 &= \varepsilon_1(\vec{R}), \\ 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta \varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Для достатньо коротких довжин хвиль ($k \rightarrow \infty$) другим доданком у лівій частині першого рівняння в (15.40) можна знехтувати, після чого приходимо до рівнянь

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \varepsilon_1(\vec{R}), \\ 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (15.41)$$

які точно збігаються з отриманими раніше у наближенні МГО (див. (15.19) і (15.27)).

Граничні умови для рівнянь (15.41) можна задати на площині $z = 0$, якщо знехтувати хвилями, відбитими від границі поділу двох середовищ і розсіяними неоднорідностями у зворотному порядку, тобто вважати, що

$$U(\vec{R}) \Big|_{z=0} = U_0(\vec{R}) \Big|_{z=0}. \quad (15.42)$$

Звідси випливає, що $S = S_0$, $\chi = \chi_0$ при $z = 0$ або $S_1 = 0$, $\chi_1 = 0$ при $z = 0$. Інтегруючи перше рівняння у (15.41), за умови, що $\varphi_1(x, y, 0) = 0$, отримуємо

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \varepsilon_1(x, y, z') dz' = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz', \quad (15.43)$$

звідки поправка першого порядку малості S_1 до фази S_0 дорівнює

$$S_1(x, y, z) = k\varphi_1 = \frac{k\varepsilon}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz'. \quad (15.44)$$

Ввівши позначення $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_\perp$, де $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – поперечна складова лапласіана, згідно з правилом диференціювання інтеграла за верхньою границею (за z), знаходимо $\Delta\varphi_1$:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \mu(x, y, z) + \int_0^z \Delta_\perp \mu(x, y, z') dz' \right].$$

При цьому друге рівняння для χ_1 (15.41), якщо $\chi_1(x, y, 0) = 0$, має розв'язок:

$$\begin{aligned} \chi_1(x, y, z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \Delta\varphi_1(x, y, z') dz' = \\ &= -\frac{1}{4} \mu(x, y, z) - \frac{1}{4} \int_0^z dz' \int_0^{z'} \Delta_\perp \mu(x, y, z'') dz''. \end{aligned} \quad (15.45)$$

Позначимо через $dV(z') = dz'$ і $U(z') = \int_0^{z'} \Delta_\perp \mu(x, y, z'') dz''$,

після чого обчислимо інтеграл у (15.45) за частинами:

$$\int_0^z dV(z') U(z') = V(z') \cdot U(z') \Big|_0^z - \int_0^z dU(z') \cdot V(z').$$

Після цього (15.45) набуває остаточного вигляду:

$$\chi_1(x, y, z) = -\frac{1}{4} \mu(x, y, z) - \frac{1}{4} \int_0^z (z - z') \Delta_\perp \mu(x, y, z') dz'. \quad (15.46)$$

Формули (15.43) і (15.46) для φ_1 і χ_1 , відповідно, не залежать від довжини хвилі випромінювання, оскільки отримані з розв'язку системи рівнянь (15.41) при $k \rightarrow \infty$, тобто у наближенні геометричної оптики. Як було показано у попередньому розділі, в рамках МГО фаза хвилі $S = k\varphi$ визначалась шляхом інтегрування показника заломлення n вздовж криволінійного променя $\vec{R}(s)$ (15.11):

$$S(s) = k \int_0^s \sqrt{\varepsilon(s')} ds' = k \int_0^s n(s') ds' \quad (15.47)$$

(для знаходження фази S у заданій точці спостереження P з координатами $\vec{R} = (x, y, z)$ інтегрування необхідно проводити за променем, що проходить через цю точку). Подамо $n(s)$ у вигляді

$$n(s) = \sqrt{\varepsilon(s)} = \sqrt{\varepsilon(s) + \varepsilon_1(s)} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 + \mu(s)}.$$

Для відносно слабких флуктуацій, коли $|\mu| \ll 1$, $n(s)$ можна розкласти у ряд за степенями μ і обмежитися тільки лінійним за μ доданком. У межах цієї точності інтегрування за дійсним

променем $\vec{R}(s)$ у (15.47) можна замінити на інтегрування за „спрямленим” променем (відрізком прямої), паралельним до осі OZ , що проходить через точку спостереження $\vec{R} = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\approx k\sqrt{\varepsilon} \int_0^z \left[1 + \frac{1}{2} \mu(x, y, z') \right] dz' = \\ &= k_\varepsilon z + \frac{k_\varepsilon}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz'. \end{aligned} \quad (15.48)$$

Видно, що перший доданок у правій частині (15.48) збігається з S_0 , а другий – з виразом (15.44) для S_1 .

15.5. Визначення статистичних характеристик

Формули (15.44) і (15.46) вирішують так звану динамічну частину задачі, вони дають змогу обчислити поправки до фази, рівня і кута приходу, якщо відомий явний вигляд функції $\mu(\vec{R})$. Якщо ж $\mu(\vec{R})$ є тільки реалізацією випадкового поля, то S_1 і χ_1 у кожній точці \vec{R} також є випадковими величинами. Усереднюючи (15.44) і (15.46) за ансамблем реалізацій $\mu(\vec{R})$, отримуємо

$$\langle S_1 \rangle = \langle \chi_1 \rangle = 0, \quad (15.49)$$

і, отже, середнє значення фази S_0 у цьому наближенні збігається з її незбуреним значенням S_0 , а флуктуації фази наближено збігаються з поправкою S_1 :

$$\delta S = S - \langle S \rangle = S - S_0 \approx S_1. \quad (15.50)$$

Знайдені розв'язки (15.44) (15.46) також дають змогу обчислити і моменти другого порядку для флуктуацій фази, рівня і кутів приходу. Для прикладу ми розглянемо тільки дисперсію флуктуацій фази σ_S^2 , яку можна обчислити, усереднюючи квадрат інтеграла (15.44):

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \langle S_1^2 \rangle = \frac{k_\varepsilon^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' \langle \mu(x, y, z') \mu(x, y, z'') \rangle = \\ &= \frac{k_\varepsilon^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' B_\mu(z' - z''). \end{aligned} \quad (15.51)$$

При цьому, як і раніше, ми припустили, що поле $\mu(\vec{R})$ статистично однорідне, і ввели автокореляційну функцію флуктуацій $\mu(\vec{R})$ на промені:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle &= B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'') = \\ &= B_\mu(0, 0, z' - z'') = B_\mu(z' - z''). \end{aligned} \quad (15.52)$$

Для розглядуваної задачі $\vec{R}' = (x, y, z')$, а $\vec{R}'' = (x, y, z'')$ — тому різницевий вектор має компоненти $\vec{R}' - \vec{R}'' = (0, 0, z' - z'')$.

Введемо у формулі (15.51) замість z'' нову змінну інтегрування $\xi = z'' - z'$, а до інтеграла за dz' застосуємо операцію інтегрування за частинами (див. (15.46)):

$$\sigma_S^2 = \frac{k_\varepsilon^2}{4} \int_0^z dz' \int_{-z'}^{z-z'} d\xi B_\mu(\xi) = \frac{k_\varepsilon^2}{4} \left\{ z' \int_{-z'}^{z-z'} d\xi B_\mu(\xi) \right\}_{z'=0}^{z'=z} - \int_0^z dz' z' [-B_\mu(z-z') + B_\mu(-z')] \Bigg\} = \frac{k_\varepsilon^2}{2} \int_0^z (z-\xi) B_\mu(\xi) d\xi. \quad (15.53)$$

При цьому ми врахували, що $B_\mu(\xi)$ – парна функція. У формулі (15.53) винесемо z з-під знака інтеграла і введемо замість $B_\mu(\xi)$ коефіцієнт кореляції $K_\mu(\xi) = B_\mu(\xi) / \sigma_\mu^2$:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{2} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 z \int_0^z \left(1 - \frac{\xi}{z}\right) K_\mu(\xi) d\xi. \quad (15.54)$$

Підінтегральна функція $K_\mu(\xi)$ при $\xi=0$ дорівнює 1 ($K_\mu(0)=1$) і швидко спадає до 0 при $\xi \geq l_\mu$, де l_μ — характерний масштаб спадання $K_\mu(\xi)$. З урахуванням цього оцінімо інтеграл (15.54) у двох граничних випадках.

1. **Короткі траси або великі неоднорідності** ($z \ll l_\mu$). Оскільки змінна ξ змінюється у межах від 0 до z , виконується нерівність $\xi \leq z \ll l_\mu$, і під знаком інтеграла (15.54) можна покласти $K_\mu(\xi) \approx K_\mu(0) = 1$. Після цього інтеграл легко обчислюється і дорівнює $z/2$:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{4} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 z^2. \quad (15.55)$$

2. **Довгі траси або дрібні неоднорідності** ($z \gg l_\mu$, але, як і раніше, неоднорідності великі порівняно з довжиною хвилі —

$k_\varepsilon l_\mu \gg 1$). З урахуванням того, що $K_\mu(\xi)$ перетворюється на нуль при $\xi > l_\mu$, ефективна область інтегрування у (15.54) лежить у межах $0 \leq \xi < l_\mu \ll z$. При цьому інтеграл від другого члена у дужках малий — відповідно до малого параметра $\xi/z \leq l_\mu/z \ll 1$, а для першого доданка, що залишився, область інтегрування можна розширити до ∞ . Ввівши, за визначенням,

$$\int_0^\infty K_\mu(\xi) d\xi = l_\mu \quad (15.56)$$

радіус кореляції неоднорідностей l_μ , отримаємо

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{2} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu z. \quad (15.57)$$

Схематично залежність дисперсії флуктуацій фази σ_S^2 від довжини шляху z , який хвиля проходить у неоднорідному середовищі, наведено на рис. 15.4.

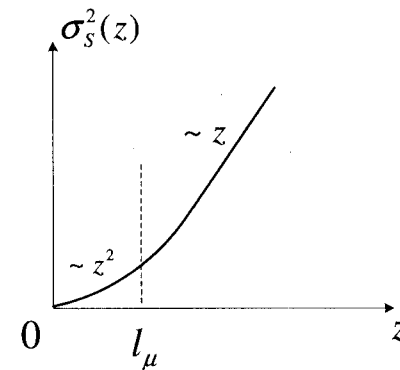


Рис. 15.4

Якісні оцінки

Наприкінці цього розділу отримаємо деякі зі знайдених вище формул за допомогою простих міркувань якісного характеру.

З наближення геометричної оптики випливає, що фаза хвилі, яка прийшла у точку спостереження, дорівнює добутку модуля хвильового вектора k на оптичну довжину променя (ейконал) φ : $S = k\varphi$, де φ визначається шляхом інтегрування показника заломлення n вздовж променя $\vec{R}(s)$, що проходить через точку спостереження $\vec{R} = (x, y, z)$. Для малих флуктуацій показника заломлення інтегрування можна наближено проводити вздовж спрямованого променя (див. формулу (15.48) та рис. 15.5). Припустимо, що довжина z спрямованого променя набагато перевищує характерні розміри неоднорідностей l_m ($m = 1, 2, \dots, N$).

Це означає, що на промені вкладається достатньо велика кількість неоднорідностей ($N \approx z/l_m \gg 1$).

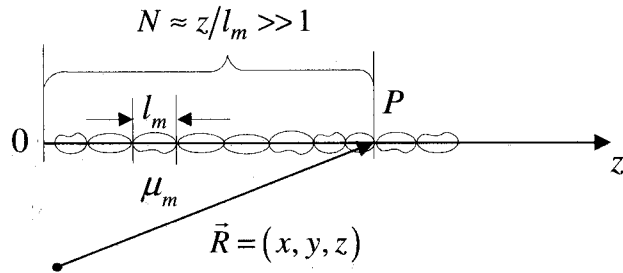


Рис. 15.5

Після проходження m -ї неоднорідності відбувається набігання фази хвилі, що дорівнює

$$S_m \approx k\sqrt{\varepsilon} l_m \approx k\sqrt{\bar{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\varepsilon_{1m}}{2\bar{\varepsilon}}\right) l_m = k_\varepsilon l_m + \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m, \text{ де } k_\varepsilon = k\sqrt{\bar{\varepsilon}}, \text{ а}$$

$\mu_m = \varepsilon_{1m}/\bar{\varepsilon}$ – випадкове значення відносної флуктуації. Повна фаза хвилі S після проходження всієї траси довжиною z є сумою всіх локальних складових:

$$S = \sum_{m=1}^N S_m = \sum_{m=1}^N \left(k_\varepsilon l_m + \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \right). \quad (15.58)$$

З одного боку, сума $\sum k_\varepsilon l_m = k_\varepsilon \sum l_m \approx k_\varepsilon N l_m \approx k_\varepsilon z$ — не що інше, як регулярне набігання фази хвилі \bar{S} вздовж всієї траси, а з іншого — доданки

$$\delta S_m = \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \quad (15.59)$$

є випадковими набіганнями фаз на окремих неоднорідностях середовища. Величину $S_1 = \sum \delta S_m$ можна розглядати як суму (в граничному випадку — інтеграл) великої кількості $N \approx z/l_m \gg 1$ некорельованих доданків δS_m . Тепер вважаємо, що всі неоднорідності приблизно однакові: $\mu_m \approx \mu$ і $l_m \approx 2l_\mu$ (тут l_μ , як і раніше, — характерний масштаб спадання автокореляційної функції $B_\mu(z)$) і, отже, величину δS_m можна оцінити як

$$\delta S_m \approx \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \approx k_\varepsilon \mu l_\mu. \quad (15.60)$$

З урахуванням того, що $\langle \mu \rangle = 0$, середнє набігання фази на одній неоднорідності $\langle \delta S_m \rangle = 0$. Дисперсія флуктуацій фази на одній неоднорідності приблизно дорівнює

$$\sigma_{S_m}^2 = \langle (\delta S_m)^2 \rangle \approx k_\varepsilon^2 \langle \mu^2 \rangle l_\mu^2 = k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu^2. \quad (15.61)$$

Між собою випадкові набігання фази не корелюють, тому сумарна дисперсія фази хвилі після проходження всієї траси дорівнює сумі дисперсій на окремих неоднорідностях:

$$\sigma_S^2 = \sum_{m=1}^N \sigma_{S_m}^2 \approx k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu^2 N \approx \frac{k_\varepsilon^2}{2} \sigma_\mu^2 l_\mu z. \quad (15.62)$$

У (15.62) ми врахували, що $N \approx z/l_m = z/2l_\mu$. Видно, що внаслідок якісних міркувань і оцінок ми отримали результат, що точно збігається зі строгим розрахунком (15.57). На підставі центральної граничної теореми можна стверджувати, що $S_1 = \sum \delta S_m$ має нормальний розподіл.

Ще одну якісну оцінку проведемо для дисперсії флуктуацій кутів приходу променів у результаті багаторазових заломлень на неоднорідностях. У малокутовому наближенні вектор нормалі $\vec{t} = \vec{\nabla} S / |\vec{\nabla} S| = \vec{\nabla} \varphi / |\vec{\nabla} \varphi|$ до фазового фронту хвилі наближено дорівнює $\vec{t} \approx \vec{t}_0 + \vec{t}_1$, де $\vec{t}_0 = \vec{\nabla} \bar{S} / |\vec{\nabla} \bar{S}|$ — регулярний вектор, а $\vec{t}_1 = \vec{\nabla}_\perp S_1 / k_\varepsilon$ — випадковий малий доданок, ортогональний до незбуреного напрямку променя \vec{t}_0 (див. (15.22)). З урахуванням подання $S_1 = \sum \delta S_m$, де δS_m визначається формулою (15.59), випадкове результуюче відхилення променя \vec{t}_1 також можна подати у вигляді суми:

$$\vec{t}_1 = \sum_{m=1}^N \delta \vec{t}_m, \quad (15.63)$$

де $\delta \vec{t}_m \approx \frac{\vec{\nabla}_\perp (\delta S_m)}{k_\varepsilon} \approx \frac{l_m}{2} \vec{\nabla}_\perp \mu_m \approx l_\mu \vec{\nabla}_\perp \mu$ — характерна величина випадкового кута відхилення на m -й неоднорідності. З урахуванням того, що $\langle \mu \rangle = 0$, отримуємо $\langle \delta \vec{t}_m \rangle = 0$ і, отже, $\langle \vec{t}_1 \rangle = 0$. Окремі акти заломлення некорельовані, звідси сумарна дисперсія кута відхилення променя $\sigma_t^2 = \langle \vec{t}_1^2 \rangle$ від його початкового напрямку \vec{t}_0 дорівнює сумі дисперсій $\sigma_{t_m}^2$: $\sigma_t^2 = \sum \sigma_{t_m}^2 \approx \sigma_{t_m}^2 N$, де

$$\sigma_{t_m}^2 = \langle \delta \vec{t}_{1m}^2 \rangle \approx \frac{l_m^2}{4} \langle (\vec{\nabla}_\perp \mu_m)^2 \rangle = l_\mu^2 \langle (\vec{\nabla}_\perp \mu)^2 \rangle. \quad (15.64)$$

Скориставшись оцінкою, що є справедливою тільки для ізотропного поля флуктуацій, —

$\langle (\vec{\nabla}_\perp \mu)^2 \rangle \approx \langle \mu^2 \rangle / l_\mu^2 = \sigma_\mu^2 / l_\mu^2$ і враховуючи, що $N \approx z/2l_\mu$, остаточно отримаємо

$$\sigma_t^2 \approx \frac{\sigma_\mu^2}{2l_\mu} z. \quad (15.65)$$

15.6. Область застосування методу геометричної оптики

1. Одна з умов застосування МГО полягає у вимозі плавного характеру зміни параметрів середовища:

$$l_\mu \gg \lambda. \quad (15.66)$$

2. **Формули МГО не враховують дифракційних ефектів.** Можливість такого нехтування покажемо на прикладі наступного якісного міркування. Якщо неоднорідність середовища μ з характерним розміром l_μ освітлюється плоскою хвилею, то розмір її геометричної тіні не залежить від відстані і дорівнює l_μ (див. рис. 15.6.).

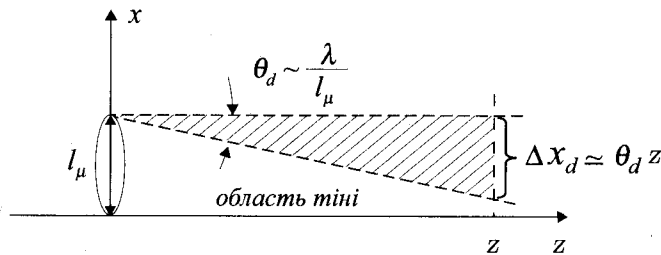


Рис. 15.6

Дифракція ж хвилі призводить до „розпливання” різких меж тіні. Розмір Δx_d перехідної області світло-тінь на віддалі z від неоднорідності можна наближено оцінити як $\Delta x_d \approx \theta_d z$, де $\theta_d \sim \lambda/l_\mu$ — кут дифракції хвилі. Нехтування дифракцією можливе тільки якщо розмір дифракційної області Δx_d значно менший порівняно з розміром області геометричної тіні l_μ . У результаті, отримаємо умову $\Delta x_d \ll l_\mu$, яка приводиться до вигляду $\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu$. Таким чином, **розмір першої зони Френеля ($\sqrt{\lambda z}$) має бути набагато меншим за характерний розмір неоднорідності l_μ :**

$$\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu. \quad (15.67)$$

3. Застосовуючи метод збурень для розрахунку флуктуацій фази й амплітуди хвилі, ми скористалися тим, що

флуктуації показника заломлення середовища малі: $\sigma_\epsilon \ll \bar{\epsilon}$, ($\sigma_\mu \ll 1$) і обмежилися тільки лінійним наближенням, відкидаючи доданки другого порядку малості відносно σ_ϵ . Умови, за яких можна знехтувати членами другого порядку малості, зводяться до вимоги **малості дисперсії рівня амплітуди $\chi = \ln(A/\hat{A})$:**

$$\sigma_\chi^2 = \langle (\chi - \bar{\chi})^2 \rangle \ll 1, \quad (15.68)$$

що еквівалентно (за малих σ_χ) умові $\sigma_A \ll \bar{A}$. Помітні флуктуації рівня χ настають вочевидь там, де промені починають перетинатися й утворюються випадкові фокуси та каустики. Таким чином, **МГО не працює поблизу фокальних утворень.**

4. Наступна умова пов'язана з **вимогою однопроменевості** (ми, по суті, знехтували викривленням променів і можливістю приходу в точку спостереження не одного, а кількох променів). Крім цього, в результаті багаторазових заломлень на неоднорідностях можливі відхилення променя на великі кути \vec{l} відносно початкового напрямку \vec{l}_0 і навіть поява променів, що поширюються у протилежному напрямку. Вимогу малості характерних кутів розсіювання (до якої зводиться й умова однопроменевості, і можливість нехтування зворотним розсіюванням) з урахуванням отриманої раніше оцінки (15.65) можна записати у вигляді нерівності

$$\sigma_t^2 \approx \sigma_\mu^2 \frac{z}{2l_\mu} \ll 1. \quad (15.69)$$

Під час розв'язання конкретної задачі у наближеннях МГО або МПВ необхідно слідкувати за тим, щоб ми не виходили за межі

області застосування цих методів. Залежно від виду $\varepsilon(\vec{R})$ і геометрії задачі, превалюючою серед чотирьох зазначених вище вимог може бути та чи інша. Наприклад, в оптичному діапазоні ($\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см) для атмосфери Землі найбільш критичною є вимога 2. Умова $\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu$ виконується тільки для дистанцій $z \leq 200$ м.

Коментарі

Лінійна залежність σ_s^2 від z у розглядуваному випадку $z \gg l_\mu$ є результатом додавання великої кількості некорельованих між собою набігань фази δS_m на кожній неоднорідності. Якщо формально розглядати z не як просторову координату, а як час t , то характер залежності $\sigma_s^2 \sim t$, як ми бачили у попередніх параграфах, є ознакою дифузійних процесів. Згідно із цим же законом, від часу залежить дисперсія флуктуації координати x броунівської частинки $\sigma_x^2 \sim t$ (9.37), а також дисперсія σ_φ^2 флуктуацій фази в автогенераторі як функція „повільного” часу θ (12.53 б). Хоча ці процеси мають зовсім різну фізичну природу, всі вони описуються дуже схожими динамічними рівняннями.

ЗАДАЧІ

1. Коефіцієнт кореляції флуктуацій показника заломлення має гауссову форму

$$K_\mu(\rho) = e^{-\rho^2/l_\mu^2}, \quad (1)$$

де $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$ — тривимірний різницевий вектор. Розрахувати

дисперсію флуктуацій фази σ_s^2 і показати, що на малих трасах $\sigma_s^2 \sim z^2$, а на великих — $\sigma_s^2 \sim z$.

Розв'язок. Скористаємося формулою (15.54) для дисперсії флуктуацій фази, у якій $K_\mu(\xi) = K_\mu(\rho_x = 0, \rho_y = 0, \rho_z = \xi) = K_\mu(0, 0, \xi)$ — коефіцієнт кореляції (нормована кореляційна функція), що розглядається у суміщених точках ($x' = x''$, $y' = y''$) у поперечному до променя напрямку і в рознесених ($\xi = \rho_z = z' - z''$) — у поздовжньому (вздовж променя). Згідно з визначенням (1), маємо

$$K_\mu(\xi) = \exp\left\{-\frac{\xi^2}{l_\mu^2}\right\}. \quad (2)$$

З урахуванням (2), формула (15.54) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(z) &= \frac{k_\varepsilon^2 z \sigma_\mu^2}{2} \int_0^z \left(1 - \frac{\xi}{z}\right) e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi = \\ &= \frac{k_\varepsilon^2 z \sigma_\mu^2}{2} \left[\int_0^z e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi - \int_0^z \frac{\xi}{z} e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Перший інтеграл у (3) після заміни змінних $x = \xi/l_\mu$ приводиться до стандартного вигляду інтеграла ймовірностей:

$$\int_0^z e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi = l_\mu \int_0^{z/l_\mu} e^{-x^2} dx = l_\mu \Phi(z/l_\mu). \quad (4)$$

Другий інтеграл легко обчислюється

$$\frac{1}{z} \int_0^z \xi e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi = \frac{l_\mu^2}{z} \int_0^{z/l_\mu} x e^{-x^2} dx = \frac{l_\mu^2}{2z} \int_0^{z^2/l_\mu^2} e^{-t} dt = \frac{l_\mu^2}{2z} \left(1 - e^{-z^2/l_\mu^2}\right). \quad (5)$$

Отже,

$$\sigma_s^2(z) = \frac{k_\varepsilon^2 \bar{\mu}^2 z}{2} l_\mu \left[\Phi(z/l_\mu) - \frac{l_\mu}{2z} \left(1 - e^{-z^2/l_\mu^2}\right) \right]. \quad (6)$$

Проаналізуємо цей вираз для двох граничних випадків.

I. Короткі траси ($z/l_\mu \ll 1$).

Згідно з (4), для малих значень аргументу інтеграл ймовірностей можна наближено записати як

$$\Phi(z/l_\mu) \approx \int_0^{z/l_\mu} (1-x^2) dx = \frac{z}{l_\mu} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{l_\mu}\right)^3 \approx z/l_\mu. \quad (7)$$

Другий доданок (5) також можна спростити і привести до вигляду

$$\frac{l_\mu}{2z} \left(1 - e^{-z^2/l_\mu^2}\right) \approx \frac{l_\mu}{2z} \left(1 - 1 + z^2/l_\mu^2\right) = z/2l_\mu. \quad (8)$$

З урахуванням (7) і (8), для коротких трас отримуємо таке значення дисперсії:

$$\sigma_s^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 z \sigma_\mu^2}{2} \left(z - \frac{z}{2}\right) = \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2}{4} z^2, \quad (9)$$

тобто $\sigma_s^2 \sim z^2$.

II. Довгі траси ($z \gg l_\mu$).

При $z \gg l_\mu$ інтеграл ймовірностей $\Phi(z/l_\mu)$ в (6) можна замінити його граничним значенням, коли $z/l_\mu \rightarrow \infty$. При цьому $\Phi(z/l_\mu)$ переходить в інтеграл Пуассона, який дорівнює $\sqrt{\pi}/2$. З іншого боку, в (6) можна знехтувати експонентою $\left(e^{-z^2/l_\mu^2} \approx 0\right)$. У результаті, вираз (6) для дисперсії флуктуацій фази набуває вигляду

$$\sigma_s^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{l_\mu}{2z}\right) z \approx \frac{\sqrt{\pi} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{4} z.$$

2. Визначити залежність від довжини траси z дисперсії флуктуацій фази $\sigma_s^2(z)$ плоскої хвилі, що поширюється в неоднорідному статистично ізотропному середовищі з коефіцієнтом кореляції флуктуацій показника заломлення вигляду

$$K_\mu(\vec{\rho}) = \left(1 + \frac{\rho^2}{l_\mu^2}\right)^{-1}.$$

Дослідити граничні випадки при

- а) $z \ll l_\mu$ (короткі траси);
- б) $z \gg l_\mu$ (довгі траси).

Відповідь:

$$\sigma_s^2(z) = \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu z}{2} \left[\arctg \frac{z}{l_\mu} - \frac{l_\mu}{2z} \ln \left(1 + \frac{z^2}{l_\mu^2}\right) \right]$$

$$\text{а) } \sigma_s^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2}{4} z^2, \quad z \ll l_\mu,$$

$$\text{б) } \sigma_s^2(z) \approx \frac{\pi k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{4} z, \quad z \gg l_\mu.$$

§ 16. Флуктуації показника заломлення в турбулентній атмосфері

З попередніх розділів видно, що розв'язання задач щодо розсіювання хвиль на випадкових неоднорідностях показника заломлення середовища або флуктуацій їх параметрів при поширенні у випадкових середовищах (як у теорії збурень, так і в наближенні геометричної оптики) виражається або через автокореляційну функцію флуктуацій показника заломлення $B_\mu(\vec{\rho})$, або через її просторовий енергетичний спектр $S_\mu(\vec{\chi})$.

Визначення явного вигляду цих функцій, загалом, виходить за межі того кола питань, які розв'язуються статистичною радіофізикою, а є предметом дослідження статистичної гідромеханіки або газодинаміки (якщо йдеться про поширення хвиль у рідині або газі, що складається з нейтральних молекул). Якщо ж йдеться про іоносферну або космічну плазму, то це є предметом дослідження статистичної теорії руху в іонізованих середовищах та ін. Проте існує широко розповсюджений тип випадково-неоднорідних середовищ, у яких функції $B_\mu(\vec{\rho})$ і $S_\mu(\vec{\chi})$ мають універсальний вигляд, що практично не залежить від конкретних фізичних параметрів середовища, а визначається тільки загальним характером їх руху. Йдеться про таке досить часте явище, як **турбулентність** – стан суцільного середовища (газу, рідини, плазми), при якому локальні параметри його руху (швидкість, тиск, температура та ін.) є величинами, що швидко і нерегулярно змінюються у часі й просторі. При цьому виявляється, що чим складнішим і хаотичнішим є цей рух, тим адекватніший його статистичний опис, який є універсальним для суцільних середовищ зовсім різної фізичної природи. Турбулентні переміщення у природі зустрічаються досить часто, і кожен з нас неодноразово спостерігав їх. Зокрема, рух води річкою у міру збільшення його швидкості з плавного і спокійного на рівнинних ділянках переходить у бурхливий, хаотичний на бистринах, зумовлених збільшенням

ухилу або звуженням річки. Збільшення швидкості руху призводить до порушення плавного (ламінарного) руху, появи характерних завихрень різних масштабів від великих вирів до малих пульсацій, що проявляються у вигляді невеликих вирів на поверхні. Рух повітряних мас у земній атмосфері також супроводжується появою подібних вихрових структур. Хоч ми і не можемо безпосередньо спостерігати рух повітряних мас, проте присутні в них у вигляді „домішок” конденсовані випари води, які ми бачимо у вигляді хмар або клаптів туману, дають змогу міркувати про дуже складний характер цього руху (форма хмар, їхня швидка й хаотична мінливість, характерні вихрові структури – все це є ознакою турбулентного руху). У цьому параграфі ми на якісному рівні без строгих доказів познайомимося з основними фізичними ідеями, що лежать в основі опису турбулентності, яка і є основною причиною флуктуацій показника заломлення середовища.

16.1. Рівняння Нав'є—Стокса

Для конкретності розглянемо рух рідини (або газу), що має об'ємну щільність ρ_0 . Рух одиничного об'єму середовища, маса якого дорівнює ρ_0 , підпорядковується другому закону Ньютона:

$$\rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad (16.1)$$

де $\vec{V} = \vec{V}(\vec{R}, t)$ — швидкість руху одиничного об'єму середовища у точці \vec{R} в момент часу t , а $\vec{F} = \vec{F}(\vec{R}, t)$ — сила, що діє на цей об'єм з боку оточуючої рідини:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}p + \gamma \Delta \vec{V}. \quad (16.2)$$

Тут p – тиск, $\vec{\nabla}$ і Δ – відповідно, оператори градієнта і Лапласа, а γ – коефіцієнт динамічної в'язкості. Перший доданок у правій частині (16.2) – рівнодійна всіх сил тиску p на розглядуваний елемент об'єму, а другий – сили внутрішнього тертя, що виникають за рахунок в'язкості рідини, коли об'єми, що дотикаються,

рухаються з різними швидкостями. У лівій частині вихідної формули (16.1) стоїть швидкість $\vec{V} = \vec{V}(\vec{R}, t)$ елементарного об'єму середовища, який рухається у просторі за траєкторією, визначеною рівнянням $\vec{R} = \vec{R}(t)$. Швидкість \vec{V} залежить від часу t у подвійний спосіб: по-перше, через нестационарність середовища у кожній фіксованій точці простору \vec{R} швидкість може залежати від часу t явним чином; по-друге, оскільки розглядуваний об'єм пересувається у просторі за траєкторією $\vec{R} = \vec{R}(t)$, швидкість може бути різною на різних ділянках траєкторії навіть у випадку стаціонарної течії, коли явна залежність \vec{V} від t відсутня. Тому повну похідну $d\vec{V}/dt$ у лівій частині рівняння (16.1) можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}, \quad (16.3)$$

де $\vec{V} = d\vec{R}/dt$. Підставляючи (16.2) і (16.3) у (16.1), отримуємо рівняння Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} - (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \nu \Delta \vec{V}. \quad (16.4)$$

При переході від (16.1) до (16.4) ми розділили обидві частини рівняння на густину рідини ρ_0 і ввели кінематичну в'язкість середовища $\nu = \gamma/\rho_0$.

Таким чином, рух елемента об'єму рідини з одиничною масою описується рівнянням (16.4). Доданок $(\vec{V} \nabla) \vec{V}$ у правій частині можна розглядати як своєрідну силу, що виникає за рахунок нерівномірності руху, викликаного, наприклад, викривленням траєкторії, – це так звана **сила інерції**, яка є причиною нестійкості

руху — перетворення великомасштабних рухів у дрібномасштабні. Щоб переконатися у цьому, розглянемо перетворення будь-якої просторової гармоніки Фур'є поля швидкостей $V \sim \sin(\chi x)$ з характерним просторовим масштабом $l_\chi \approx 2\pi/\chi$. Очевидно, що $|\vec{\nabla} V| \sim \chi \cos(\chi x)$, тому сила інерції $|(\vec{V} \nabla) \vec{V}| \sim \chi \sin(\chi x) \times \chi \cos(\chi x) \sim \sin(2\chi x)$, що виникає, має вдвічі менший просторовий масштаб — $l'_\chi \approx 2\pi/2\chi = l_\chi/2$. Під дією цієї сили, згідно з рівнянням (16.4), виникають рухи з тим самим ($\sim l_\chi/2$) просторовим масштабом швидкості V , які, у свою чергу, перетворюються у ще дрібніші ($\sim l_\chi/4$) та ін. Оскільки турбулентний рух має вихровий характер, то, по суті, йдеться про поділ вихорів на все дрібніші. Цей процес триває доти, поки сила інерції $(\vec{V} \nabla) \vec{V}$ не дорівнюватиме силі в'язкого тертя $\nu \Delta \vec{V}$, яка перешкоджає подальшому поділу вихорів і, таким чином, стабілізує рух. Відношення цих двох сил називається **числом Рейнольдса**:

$$Re = \frac{|(\vec{V} \nabla) \vec{V}|}{\nu |\Delta \vec{V}|}. \quad (16.5)$$

Якщо для оцінок прийняти $|(\vec{V} \nabla) \vec{V}| \sim V^2/l_V$, а $|\Delta \vec{V}| \sim V/l_V^2$, де l_V — характерний лінійний масштаб зміни швидкості \vec{V} руху середовища, то число Рейнольдса можна записати у вигляді

$$Re = \frac{|(\vec{V} \nabla) \vec{V}|}{\nu |\Delta \vec{V}|} \sim \frac{V^2/l_V}{\nu V/l_V^2} = \frac{V l_V}{\nu}. \quad (16.6)$$

Коли $Re \gg 1$, тобто сили інерції набагато перевищують сили тертя, рух — через вказані вище причини — є нестійким, виникає

турбулентність. У протилежному граничному випадку, коли $Re \ll 1$, сили в'язкості перевищують сили інерції і не дають можливості розвинутих нестійкостям, що призводять до поділу великомасштабних рухів на більш дрібномасштабні, — рух є ламінарним. У реальних умовах турбулентність виникає тільки при достатньо великих значеннях числа Рейнольдса $Re = 100 \div 1000$.

Позначимо через L максимальний лінійний розмір системи (діаметр труби або глибина каналу, якими тече рідина, товщина атмосфери або висота точки спостереження над межею поділу та ін.). При значеннях $Re = VL/\nu \gg 1$ великомасштабні рухи перетворюються на вихори чимраз менших розмірів (виникає так звана ієрархія вихорів). У міру зменшення їхніх лінійних розмірів зменшується і число Рейнольдса. Мінімальний розмір вихору l_0 , що оцінюється з умови $Re = Vl_0/\nu \sim 1$, називають внутрішнім масштабом турбулентності, а L — зовнішнім. Звичайно вони відрізняються на багато порядків — тому практично завжди існує область розмірів l_v , що відповідає умові $L \gg l_v \gg l_0$. У цьому інтервалі сили інерції превалюють над силами в'язкості, його так і називають — „інерційний інтервал”, на відміну від „в'язкого інтервалу”, коли $l_v < l_0$.

16.2. Структурна функція швидкості.

Закон Обухова—Колмогорова

У турбулентному потоці швидкість $\vec{V}(\vec{R}, t)$ є випадковою функцією трьох просторових координат $\vec{R} = (x, y, z)$ і часу t . Можна припустити, що в інтервалі масштабів $l_v \ll L$ поле швидкостей $\vec{V}(\vec{R}, t)$ є статистично однорідним і ізотропним за просторовими змінними (гіпотеза Обухова—Колмогорова), — тому його структурна функція

$$\langle [\vec{V}(\vec{R}_1) - \vec{V}(\vec{R}_2)]^2 \rangle = D_V(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = D_V(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \quad (16.7)$$

є універсальною функцією тільки відстані $\rho = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$ між двома просторово віддаленими точками: $D_V = D_V(\rho)$.

Виявляється, що явний вигляд цієї функції можна з'ясувати за допомогою теорії розмірностей. Крім параметру ν , що має розмірність $[\nu] = \text{см}^2/\text{сек}$, турбулентний рух характеризується також швидкістю передачі кінетичної енергії одиничної маси ($w = V^2/2$) від великих вихорів — до малих: $\eta = dw/dt$. Кінетична енергія одиничної маси має розмірність $[w] = \text{см}^2/\text{с}^2$, а швидкість її зміни $[\eta] = [dw/dt] = \text{см}^2/\text{с}^3$. З двох параметрів ν і η можна скласти дві величини з розмірністю швидкості: $V_0 = (\nu\eta)^{1/4}$ і довжини $l_0 = \nu/V_0 = (\nu^3/\eta)^{1/4}$. У найбільш загальному вигляді структурну функцію $D_V(\rho)$ можна подати у вигляді

$$D_V(\rho) = a V_0^2 f\left(\frac{\rho}{l_0}\right) = a (\nu\eta)^{1/2} f\left(\frac{\eta^{1/4}}{\nu^{3/4}} \rho\right), \quad (16.8)$$

де a — безрозмірна стала, а f — безрозмірна функція безрозмірного аргументу $x = \rho/l_0$.

В інерційному інтервалі масштабів $L \gg l_v \gg l_0$ сили інерції набагато більші за сили в'язкості, якими взагалі можна знехтувати, оскільки вони не можуть хоч якось суттєво змінити характер руху. Це означає, що $D_V(\rho)$ не повинна залежати від ν . Для того, щоб у формулі (16.8) зникла залежність від ν , необхідно, щоб

$f(x) \sim x^{2/3}$ (безрозмірну константу як спільний множник можна включити до a). У результаті, з (16.8) випливає:

$$D_V(\rho) = a\eta^{2/3} \rho^{2/3} \equiv C_V^2 \rho^{2/3}. \quad (16.9)$$

Отримана залежність $D_V(\rho)$ називається „законом двох третин” або „законом Обухова—Колмогорова”. Таким чином, єдиним параметром, що описує турбулентність в інерційному інтервалі масштабів ($L \gg l_V \gg l_0$) є так звана **структурна стала** $C_V^2 = a\eta^{2/3}$, величина якої залежить тільки від швидкості η передачі енергії від великих вихорів до малих.

Так званий „в’язкий інтервал” характеризується невеликими просторовими масштабами $\rho \ll l_0$. При $\rho \rightarrow 0$ структурна функція $D_V(\rho)$, згідно з визначенням (16.7), повинна перетворюватися на нуль, будучи при цьому парною функцією відстані ρ . Це означає, що розклад функції $f(x)$ за степенями x при $x \rightarrow 0$ має починатися у загальному випадку з членів $\sim x^2$, тобто

$$D_V(\rho) = aV_0^2 \frac{\rho^2}{l_0^2} = C_V^2 l_0^{-4/3} \rho^2, \quad (\rho \ll l_0). \quad (16.10)$$

Нарешті, при $\rho > L$ кореляція між значеннями швидкості у точках, віддалених одна від одної на гранично великі відстані, повинна спадати — тому (подібно до (5.30))

$$D_V(\rho) = 2\sigma_V^2, \quad (\rho > L). \quad (16.11)$$

Схематично графік функції $D_V(\rho)$ зображено на рис. 16.1 відповідно до формул (16.9), (16.10) і (16.11).

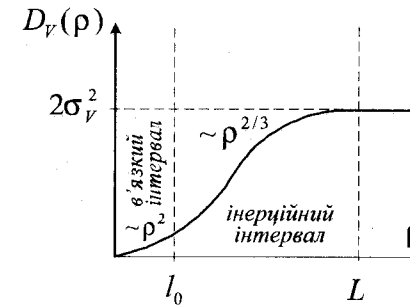


Рис. 16.1

16.3. Структурна функція і просторовий енергетичний спектр показника заломлення

Значення показника заломлення n суцільного середовища визначається його термодинамічними параметрами:

$$n = n(p, T, e_1, e_2, \dots),$$

де p — тиск, T — температура, e_m — концентрація домішок різних сортів. Наприклад, для показника заломлення чистого повітря має місце **емпірична формула**:

$$n - 1 = 10^{-6} \frac{79}{T} \left(p + \frac{4800}{T} e \right). \quad (16.12)$$

Тут $[T] = K$ — температура, $[p] = \text{мбар}$ — тиск повітря, $[e] = \text{мбар}$ — тиск водяної пари. Всі параметри, що входять до формули (16.12), можна розглядати як „пасивні” домішки, які не чинять ніякого впливу на розвиток турбулентності, а тільки переміщуються полем швидкостей $\vec{V}(\vec{R})$. Це означає, що структурні функції параметрів з точністю до сталих множників повинні збігатися за структурною функцією флуктуації швидкості

$D_V(\rho)$. Зокрема, структурна функція показника заломлення $n(\vec{R})$ має описуватися тими самими законами, що й $D_V(\rho)$:

$$D_n(\rho) = \langle [n(\vec{R} + \vec{\rho}) - n(\vec{R})]^2 \rangle = \begin{cases} C_n^2 l_0^{-4/3} \rho^2, & \rho \ll l_0; \\ C_n^2 \rho^{2/3}, & L \gg \rho \gg l_0; \\ 2\sigma_n^2, & \rho > L. \end{cases} \quad (16.13)$$

До формул борнівського наближення для середньої інтенсивності та індикатриси розсіювання хвиль на флуктуаціях показника заломлення δn (див. § 14) входять не самі структурні або кореляційні функції показника заломлення, а їхні просторові енергетичні спектри. Для того щоб з'ясувати, який просторовий спектр відповідає структурній функції вигляду (16.13), припустимо спочатку, що існує автокореляційна функція

$$B_n(\vec{\rho}) = \langle \delta n(\vec{R} + \vec{\rho}) \delta n(\vec{R}) \rangle, \quad (16.14)$$

якій відповідає просторовий спектр (див. (13.27))

$$S_n(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (16.15)$$

У свою чергу, відповідно до формули Вінера—Хінчіна, $B_n(\vec{\rho})$ можна подати у вигляді

$$B_n(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi}. \quad (16.16)$$

Для статистично однорідних полів структурну функцію $D_n(\vec{\rho})$ можна виразити через автокореляційну $B_n(\vec{\rho})$ і дисперсію $\sigma_n^2 = B_n(0)$ (подібно до (5.29)):

$$D_n(\vec{\rho}) = 2 \left[\sigma_n^2 - B_n(\vec{\rho}) \right]. \quad (16.17)$$

Підставляючи сюди (16.16), отримуємо

$$D_n(\vec{\rho}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} \right] S_n(\vec{\chi}') d\vec{\chi}'. \quad (16.18)$$

Для того щоб отримати обернену до цієї формули, тобто виразити $S_n(\vec{\chi})$ через $D_n(\vec{\rho})$, необхідно звести її до вигляду перетворення Фур'є. З цією метою продиференціюємо рівність (16.18) за $\vec{\rho}$:

$$\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} D_n(\vec{\rho}) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\chi}' e^{i\vec{\chi}'\vec{\rho}} S_n(\vec{\chi}') d\vec{\chi}'. \quad (16.19)$$

Помножимо обидві частини цієї формули на $\vec{\chi} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}}$ і проінтегруємо за $d\vec{\rho}$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} (\vec{\chi} \vec{\nabla}_{\vec{\rho}}) D_n(\vec{\rho}) d\vec{\rho} = \\ & = -2i \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{\chi} \vec{\chi}') S_n(\vec{\chi}') d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{\chi}' - \vec{\chi})\vec{\rho}} d\vec{\rho} = -i 16\pi^3 \chi^2 S_n(\vec{\chi}). \end{aligned} \quad (16.20)$$

При цьому ми скористалися визначенням тривимірної δ -функції:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{\chi}' - \vec{\chi})\vec{\rho}} d\vec{\rho} = \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}).$$

З (16.20) випливає, що

$$S_n(\vec{\chi}) = \frac{i}{16\pi^3 \chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} (\vec{\chi} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\rho}}) D_n(\vec{\rho}) d\vec{\rho}. \quad (16.21)$$

Для статистично однорідного та ізотропного поля $D_n(\vec{\rho}) = D_n(\rho)$ і $\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} D_n(\rho) = \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} \vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \rho = \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. При цьому інтеграл (16.21) зручніше обчислювати у сферичних координатах $\vec{\rho} = (\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho)$, де θ_ρ відлічується від полярної осі, спрямованої уздовж вектора $\vec{\chi}$ (рис. 16.2).

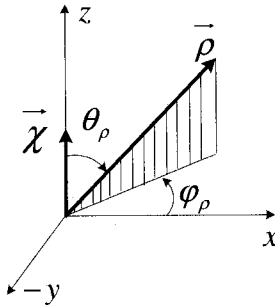


Рис. 16.2

Враховуючи, що в обраній системі координат елементарний об'єм записується у вигляді $d\vec{\rho} = \rho^2 \sin \theta_\rho d\rho d\theta_\rho d\varphi_\rho$, а $\vec{\chi}\vec{\rho} = \chi\rho \cos \theta_\rho$, отримаємо

$$S_n(\vec{\chi}) = \frac{i}{16\pi^3 \chi^2} \int_0^\infty \rho^2 \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} d\rho \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \cos \theta_\rho \sin \theta_\rho d\theta_\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho. \quad (16.22)$$

Інтеграл за $d\varphi_\rho$ дорівнює 2π , а інтегрування за $d\theta_\rho$ легко виконується за допомогою заміни змінних $\xi = \cos \theta_\rho$:

$$\int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \cos \theta_\rho \sin \theta_\rho d\theta_\rho = \int_{-1}^1 e^{-i\chi\rho \xi} \xi d\xi = 2i \frac{\chi\rho \cos \chi\rho - \sin \chi\rho}{(\chi\rho)^2}. \quad (16.23)$$

Підставляючи (16.23) в (16.22), отримаємо

$$S_n(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \chi^3} \int_0^\infty (\sin \chi\rho - \chi\rho \cos \chi\rho) \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} d\rho = S_n(\chi). \quad (16.24)$$

Таким чином, для статистично ізотропного поля флуктуацій показника заломлення енергетичний спектр залежить тільки від модуля хвильового числа $\vec{\chi}$: $S_n(\vec{\chi}) = S_n(\chi)$.

Аналогічним чином, враховуючи, що для ізотропних флуктуацій $S_n(\vec{\chi}) = S_n(\chi)$, можна переписати і формулу (16.18):

$$D_n(\rho) = 8\pi \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin \chi\rho}{\chi\rho}\right) S_n(\chi) \chi^2 d\chi. \quad (16.25)$$

Побудова спектра Кармана

Використаємо тепер формули (16.24) і (16.25) для визначення енергетичного спектра $S_n(\chi)$ за заданим розподілом $D_n(\rho)$ у вигляді (16.13).

1. Припустимо спочатку, що структурна функція $D_n(\rho)$

підкорюється законові двох третин на всьому інтервалі змін ρ :

$$D_n(\rho) = C_n^2 \rho^{2/3}, \quad \rho \geq 0.$$

Підставляючи цю залежність $D_n(\rho)$ у формулу (16.24) і проводячи заміну змінних $\zeta = \chi\rho$, отримаємо

$$S_n(\chi) = \frac{2C_n^2}{3(2\pi)^2 \chi^{11/3}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^{1/3}} (\sin \zeta - \zeta \cos \zeta). \quad (16.26)$$

Інтеграл за $d\zeta$ є табличним і виражається через гамма-функцію Ейлера — $\Gamma(z)$ — тому в результаті маємо

$$S_n(\chi) = \frac{\Gamma(4/3) \sin(\pi/3)}{4\pi^2} C_n^2 \chi^{-11/3}. \quad (16.27)$$

Враховуючи, що $\Gamma(4/3) \approx 0,893$, остаточно отримаємо

$$S_n(\chi) = 0,033 C_n^2 \chi^{-11/3}. \quad (16.28)$$

2. Як вже відзначалося вище, при малих ρ флуктуації дрібних масштабів ($\rho < l_0$) пригнічуються силами в'язкості і структурна функція має бути пропорційною до ρ^2 : $D_n(\rho) \sim \rho^2$. Енергетичний спектр $S_n(\chi)$, що відповідає цьому інтервалу просторових частот ($\chi > 2\pi/l_0$), можна отримати, „підкоригувавши” відповідним чином залежність (16.28). Так, з (16.25) видно, що при $\chi\rho \ll 1$ під знаком інтеграла ми можемо отримати залежність $\sim \rho^2$:

$$1 - \frac{\sin \chi\rho}{\chi\rho} \approx \frac{1}{3} (\chi\rho)^2 \sim \rho^2.$$

Щоб ця залежність зберігалась і для всього інтеграла, необхідно усунути у спектрі (16.27) високі просторові частоти χ . Усунення високих частот ($\chi > 2\pi/l_0$), що відповідають в'язкому інтервалу ($\rho < l_0$), можна здійснити шляхом введення експоненціального множника („ріжучого” фактора): $\exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}$, де $\chi_m = 5,92/l_0$.

У результаті, отримаємо такий скоригований вигляд спектра:

$$S_n(\chi) \approx 0,033 C_n^2 \chi^{-11/3} \exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}. \quad (16.29)$$

3. В області великих масштабів турбулентностей ($\rho \geq L$), очевидно, відсутній універсальний закон поведінки спектра. Необмежене зростання спектра (16.29) при $\chi \rightarrow 0$ передбачає існування вихорів з безмежно великими розмірами. Зрозуміло, що при цьому ми виходимо за зовнішній масштаб турбулентності L , і зростання спектра на малих просторових частотах $\chi \leq \chi_0 = \frac{2\pi}{L}$ має припинитися. Звичайно для обмеження зростання $S_n(\chi)$ при $\chi \rightarrow 0$ використовують такий прийом: замінюють множник $\chi^{-11/3}$ у формулі (16.29) на $(\chi^2 + \chi_0^2)^{-11/6}$, де $\chi_0 = 2\pi/L$. У результаті, приходимо до остаточного вигляду спектра:

$$S_n(\chi) \approx \frac{0,033 C_n^2}{(\chi^2 + \chi_0^2)^{11/6}} \exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}, \quad (16.30)$$

який називається **спектром Кармана**.

Таким чином, спектр Кармана збігається зі спектром Обухова—Колмогорова (16.28) в інерційному інтервалі ($\chi_0 \ll \chi \ll \chi_m$), експоненціально згасає у в'язкому інтервалі ($\chi > \chi_m$) і

залишається обмеженим на малих просторових частотах ($\chi < \chi_0$). Знайдена залежність (16.30), вигляд якої показано на рис. 16.3, достатньо добре описує просторовий спектр турбулентних флуктуацій у багатьох задачах радіофізики.

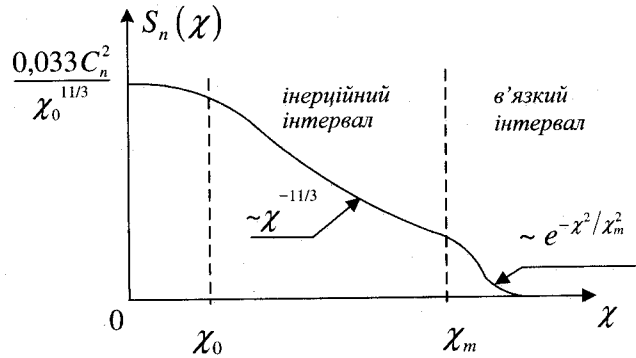


Рис. 16.3

§ 17. Метод фазового екрана

Досить велику кількість проблем, пов'язаних із поширенням і розсіюванням хвиль у випадково-неоднорідних середовищах, вдається звести до розв'язання задачі про проходження хвилі через неоднорідний шар скінченної товщини, на виході з якого її амплітуда і фаза виявляються випадковими функціями координат. При подальшому поширенні в однорідному просторі (або вакуумі) виникає інтерференція флуктуюючих хвиль, що приходять у точку спостереження з різних напрямків (рис. 17.1).

Для спрощення задачі ми знову розглядатимемо нерухомі неоднорідності середовища: $n(\vec{R}, t) = n(\vec{R})$. У цьому випадку, як вже було відзначено у попередніх розділах, для монохроматичного первинного поля $U_0 \sim e^{-i\omega t}$ залежність від часу t у поля на виході з

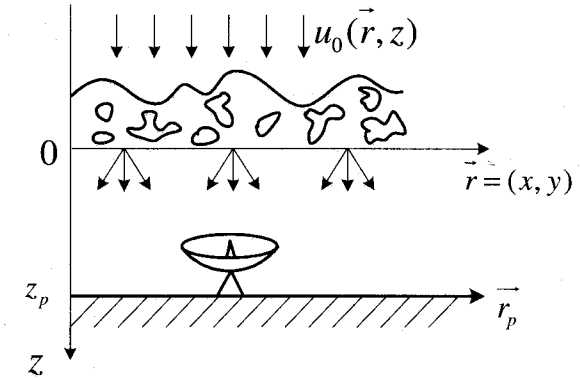


Рис. 17.1

неоднорідного шару зберігається, що дає змогу знову шукати розв'язок для $U(\vec{R}, t)$ у вигляді $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R})e^{-i\omega t}$. Опускаючи далі залежність полів від часу у вигляді $\sim e^{-i\omega t}$, позначимо через

$$U_0(\vec{r}) = A_0(\vec{r})e^{iS_0(\vec{r})} \quad (17.1)$$

поле первинної хвилі, яке було б у площині $z = 0$ за відсутності шару із неоднорідностями показника заломлення ($\vec{r} = (x, y)$ — радіус-вектор у площині $z = 0$). Після проходження хвилі через шар виникають спотворення незбурених амплітуди — $A_0(\vec{r})$ і фази — $S_0(\vec{r})$, тому на нижній межі шару ($z = 0$) поле $U(\vec{r})$ можна подати у вигляді

$$U(\vec{r}) = A_0(\vec{r})\alpha(\vec{r})e^{[S_0(\vec{r}) + \tilde{S}(\vec{r})]} = A_0(\vec{r})\alpha(\vec{r})e^{iS(\vec{r})}. \quad (17.2)$$

Тут $S(\vec{r}) = S_0(\vec{r}) + \tilde{S}(\vec{r})$, $\tilde{S}(\vec{r})$ — додатковий набіг фази, що виникає при проходженні хвилі через шар з неоднорідностями; $\alpha(\vec{r})$ — множник, що враховує зміни амплітуди поля $U(\vec{r})$ у порівнянні з $A_0(\vec{r})$. Площина $z = 0$, на якій задано розподіл поля

$U(\vec{r})$ формулою (17.2), називають **амплітудно-фазовим екраном**.

Задача знаходження $\alpha(\vec{r})$ і $\tilde{S}(\vec{r})$ після проходження хвилею шару з неоднорідностями може бути розв'язана, наприклад, у рамках попередньо розглянутих МГО та МПЗ. У нашому ж випадку, вважаючи розподіл поля у площині $z=0$ заданим (17.2), необхідно визначити параметри хвильового поля $U(\vec{R})$ у довільній точці спостереження $\vec{R} = \vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$, що знаходиться за екраном ($z_p > 0$) в однорідному просторі або вакуумі (див. рис. 17.1).

17.1. Формула Гріна

Як перший крок отримаємо формулу Гріна, що дає змогу розрахувати поле U в будь-якій точці $\vec{R} = \vec{R}_p$ довільного об'єму V , якщо задано значення U та його нормальної похідної $\partial U / \partial N$ на поверхні Σ , що обмежує цей об'єм (рис. 17.2).

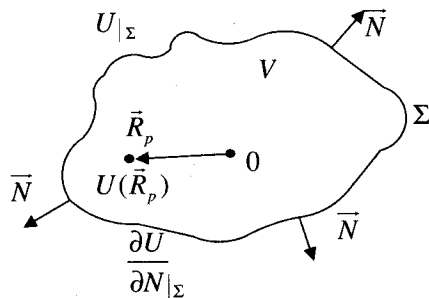


Рис. 17.2

Формула або теорема Гріна (1824 р.) безпосередньо впливає з теореми про дивергенцію (теореми Остроградського—Гаусса)

$$\int_V \text{div} \vec{H} \, dv = \oint_{\Sigma} \vec{N} \vec{H} \, d\Sigma, \quad (17.3)$$

яка справедлива для будь-якого векторного поля \vec{H} , визначеного в об'ємі V , обмеженого замкнутою поверхнею Σ . Тут \vec{N} – зовнішня нормаль до поверхні Σ . Нехай $\vec{H} = \Upsilon \text{grad} \Psi = \Upsilon \vec{\nabla} \Psi$, де $\Upsilon = \Upsilon(\vec{R})$ та $\Psi = \Psi(\vec{R})$ – довільні скалярні функції. Тоді

$$\text{div} \vec{H} = \text{div}(\Upsilon \text{grad} \Psi) = \Upsilon \Delta \Psi + \text{grad} \Upsilon \text{grad} \Psi \quad (17.4 \text{ a})$$

і

$$\vec{N} \vec{H} = \vec{N}(\Upsilon \text{grad} \Psi) = \Upsilon \vec{N} \text{grad} \Psi = \Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N}, \quad (17.4 \text{ б})$$

де $\partial / \partial N$ – нормальна похідна на поверхні Σ (за напрямком зовнішньої нормалі до об'єму V). Підставивши (17.4) в (17.3), отримаємо так звану **першу формулу Гріна**

$$\int_V (\Upsilon \Delta \Psi + \vec{\nabla} \Upsilon \vec{\nabla} \Psi) \, dv = \oint_{\Sigma} \Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N} \, d\Sigma. \quad (17.5 \text{ a})$$

Напишемо такий самий вираз, помінявши в ньому місцями Υ і Ψ , і віднімемо його з (17.5 а). При цьому члени з добутком $\vec{\nabla} \Upsilon \vec{\nabla} \Psi$ скоротяться, і ми отримаємо **другу формулу Гріна**:

$$\int_V (\Upsilon \Delta \Psi - \Psi \Delta \Upsilon) \, dv = \oint_{\Sigma} \left[\Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N} - \Psi \frac{\partial \Upsilon}{\partial N} \right] d\Sigma. \quad (17.5 \text{ б})$$

Як функцію Υ виберемо хвильове поле $U(\vec{R})$, яке в однорідному середовищі (вакуумі) задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2) U(\vec{R}) = -4\pi Q(\vec{R}), \quad (17.6)$$

де $k = \omega/c$, а $Q(\vec{R})$ – густина розподілу джерел. З іншого боку, як Ψ виберемо хвильове поле, що створюється точковим одиничним

джерелом (функція Гріна) $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ і задовольняє те саме рівняння (17.6), де $Q(\vec{R}) = \delta(\vec{R} - \vec{R}_p)$:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)G(\vec{R}, \vec{R}_p) = -4\pi\delta(\vec{R} - \vec{R}_p). \quad (17.7)$$

Помноживши (17.6) на $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$, а (17.7) – на $U(\vec{R})$ і віднявши після цього отримані вирази, маємо

$$\begin{aligned} U(\vec{R})\Delta_{\vec{R}}G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p)\Delta_{\vec{R}}U(\vec{R}) = \\ = -4\pi[U(\vec{R})\delta(\vec{R} - \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p)Q(\vec{R})]. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз у ліву частину (17.5б) і виконаємо інтегрування за об'ємом $dV \equiv d\vec{R} = dxdydz$. У результаті, з урахуванням відомої властивості δ -функції:

$$\int_V U(\vec{R})\delta(\vec{R} - \vec{R}_p)d\vec{R} = U(\vec{R}_p),$$

отримаємо

$$\begin{aligned} U(\vec{R}_p) = \int_V G(\vec{R}, \vec{R}_p)Q(\vec{R})d\vec{R} - \\ - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[U(\vec{R}) \frac{\partial G(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial N} - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma. \end{aligned} \quad (17.8)$$

17.2. Визначення поля за фазовим екраном.

Принцип Гюйгенса

Застосуємо тепер формулу Гріна (17.8) для розрахунку поля $U(\vec{R}_p)$ за фазовим екраном. Для цього побудуємо півсферу C_a

(рис. 17.3) радіусом a з центром у точці початку координат (точка O) і розглянемо об'єм V , що міститься між цією півсферою і частиною поверхні Σ_0 площини $z = 0$.

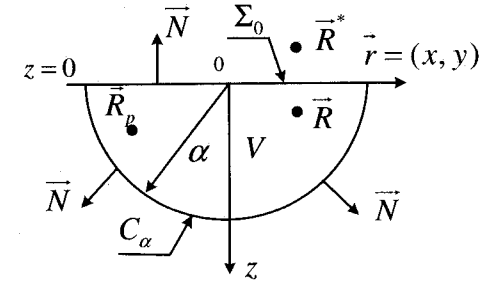


Рис. 17.3

У розглядуваній постановці задачі всередині об'єму V джерела відсутні, тобто $Q(\vec{R}) = 0$. При достатньо великому радіусі півсфери ($a \rightarrow \infty$) інтеграл за C_a зникає (через принцип випромінювання), і ми приходимо до формули:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \left[U(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial z} G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial}{\partial z} U(\vec{R}) \right]_{z=0}. \quad (17.9)$$

При отриманні (17.9) ми врахували, що $\left. \frac{\partial}{\partial N} \right|_{\Sigma_0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{z=0}$ і ввели позначення $d\Sigma = d\vec{r} = dxdy$. Видно, що поле у точці спостереження $U(\vec{R}_p)$ визначається значеннями на екрані не тільки самого поля $U(\vec{r})$, але і його нормальної похідної $\partial U / \partial z$.

Вибір функції Гріна $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$, що задовольняє рівняння (17.7), є досить довільним. Наприклад, як $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ ми могли б вибрати функцію Гріна $G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)$ для однорідного необмеженого простору (сферичну хвилю, що розходить):

$$G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|}. \quad (17.10)$$

Але $G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)$ — тільки одна із багатьох функцій, які відповідають неоднорідному рівнянню (17.7). Насправді, у загальному випадку рівняння (17.7) задовольняє будь-яка функція виду $G(\vec{R}, \vec{R}_p) = G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) + B(\vec{R}, \vec{R}_p)$, де $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$ є розв'язком однорідного рівняння Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)B(\vec{R}, \vec{R}_p) = 0. \quad (17.11)$$

Оскільки функція $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$ не визначена однозначно, її можна вибрати, наприклад, так, що у формулі (17.9) один із двох поверхневих інтегралів перетворюється на нуль. Цю умову задовольняє функція у вигляді тієї самої сферичної хвилі (17.10), але створюваної «дзеркально» відбитим джерелом (одиничним, точковим і розташованим у точці $\vec{R} = \vec{R}^* = (x, y, -z) = (\vec{r}, -z)$):

$$B(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}^*-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}^*-\vec{R}_p|}. \quad (17.12)$$

Оскільки точка $\vec{R} = \vec{R}^*$ знаходиться поза розглядуваним об'ємом V (на рис. 17.3 вона знаходиться у верхньому півпросторі), то $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$ не має особливостей всередині V (при $z > 0$) і, що легко перевірити, задовольняє однорідне рівняння Гельмгольца (17.11).

З урахуванням (17.12) введемо до розгляду дві функції Гріна:

$$G_{\pm}(\vec{R}, \vec{R}_p) = G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) \pm B(\vec{R}, \vec{R}_p), \quad (17.13)$$

які мають очевидні властивості:

$$G_+(\vec{R}, \vec{R}_p) \Big|_{z=0} = 2G_0(\vec{r}, \vec{R}_p), \quad (17.14 \text{ а})$$

$$G_-(\vec{R}, \vec{R}_p) \Big|_{z=0} = 0 \quad (17.14 \text{ б})$$

і

$$\frac{\partial G_+(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (17.15 \text{ а})$$

$$\frac{\partial G_-(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2 \frac{\partial}{\partial z} G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) \Big|_{z=0}. \quad (17.15 \text{ б})$$

Якщо у формулі (17.9) як G вибрати G_- , то з урахуванням визначень (17.14 б) і (17.15 б) вона набуде вигляду

$$U(\vec{R}_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_0} U(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) \Big|_{z=0} d\vec{r}. \quad (17.16)$$

Припустимо тепер, що точка спостереження $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ знаходиться на достатньо великій відстані за екраном (у хвильовій зоні, коли $kz_p \gg 1$). У цьому випадку при обчисленні похідної $\partial G_0 / \partial z$ достатньо обмежитися тільки диференціюванням експоненти в (17.10):

$$\frac{\partial}{\partial z} G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) \approx ik \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial}{\partial z} |\vec{R}-\vec{R}_p|. \quad (17.17)$$

Враховуючи, що $|\vec{R}-\vec{R}_p| = \sqrt{(z-z_p)^2 + (\vec{r}-\vec{r}_p)^2}$, де

$\vec{r}_p = (x_p, y_p)$, а $\vec{r} = (x, y)$, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial z} \left| \vec{R} - \vec{R}_p \right|_{z=0} = \left. \frac{z - z_p}{\left| \vec{R} - \vec{R}_p \right|} \right|_{z=0} = \frac{-z_p}{\left| \vec{r} - \vec{R}_p \right|} = -\cos \theta(\vec{r}), \quad (17.18)$$

де $\theta(\vec{r})$ – кут між променем, проведеним з точки спостереження P ($\vec{R} = \vec{R}_p$) в поточну точку інтегрування \vec{r} , і перпендикуляром, опущеним з P на площину $z = 0$ (див. рис. 17.4).

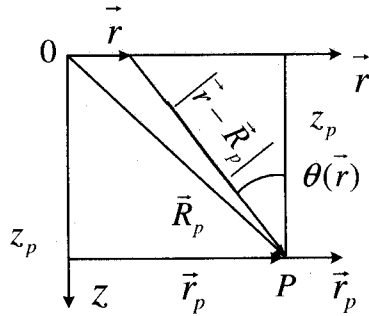


Рис. 17.4

Підставляючи (17.17) і (17.18) в (17.16), приходимо до формули, що виражає **принцип Гюйгенса**:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} U(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (17.19)$$

Згідно з (17.19), кожна точка екрана $\vec{r} \in \Sigma_0$ є джерелом сферичної хвилі $e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}/|\vec{r}-\vec{R}_p|$, що розходить, амплітуда якої визначається значенням поля $U(\vec{r})$ у цій точці і величиною кута $\theta(\vec{r})$ між напрямком з \vec{r} в точку спостереження \vec{R}_p і нормаллю до площини екрана (оссю OZ).

Скориставшись тепер поданням поля $U(\vec{r})$ на екрані у вигляді (17.2) і обмежившись тільки випадком чисто „фазового” екрана, коли амплітудна модуляція відсутня ($\alpha(\vec{r}) \approx 1$), отримаємо

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r}) e^{ik[|\vec{r}-\vec{R}_p| + \varphi(\vec{r})]}. \quad (17.20)$$

Тут ми позначили через $\varphi(\vec{r}) = S(\vec{r})/k$ сумарний ейконал хвилі, який, згідно з (17.2), складається із суми $\varphi_0(\vec{r}) = S_0(\vec{r})/k$ — незбуреного ейконалу падаючої хвилі і додатка $\tilde{\varphi}(\vec{r}) = \tilde{S}(\vec{r})/k$, що виникає після проходження хвилею шару з неоднорідностями.

До інтегральних зображень виду (17.20) зводяться розв’язки значної кількості задач фізики і, особливо, радіофізики. Тому цікаво провести детальний аналіз можливостей методу фазового екрана. Спочатку ми дослідимо задачу в наближенні МГО, тоді проаналізуємо можливості розв’язання дифракційної задачі і, нарешті, покажемо, як необхідно враховувати випадкові фактори.

17.3. Розв’язання задачі в рамках методу геометричної оптики

У цьому розділі ми покажемо, як за заданими у площині $z = 0$ розподілами фази $S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r}) = k[\varphi_0(\vec{r}) + \tilde{\varphi}(\vec{r})]$ і амплітуди $A_0(\vec{r})$ хвилі, що пройшла через шар з неоднорідностями, можна обчислити геометрооптичне значення інтенсивності поля у точці спостереження \vec{R}_p , не застосовуючи інтегрального зображення (17.20).

Визначимо спочатку рівняння поверхні $Z = Z_s(\vec{r})$, на якій фаза хвилі $S(\vec{r}, z)$ на виході з шару з неоднорідностями стала (див. рис.17.5):

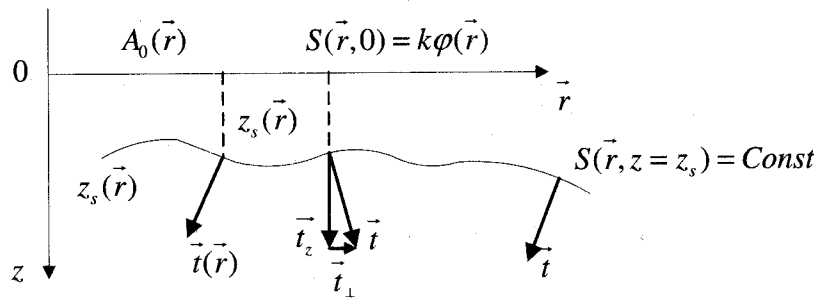


Рис. 17.5

$$S(\vec{r}, z) = S(x, y, z_s) = \text{Const}. \quad (17.21)$$

Для спрощення задачі вважатимемо, що після проходження шару з неоднорідностями напрямком поширення хвилі \vec{t} незначно відрізняється від первинного \vec{t}_0 , який, у свою чергу, мало відрізняється від напрямку осі OZ (так зване малокутове або наближення параксiальної оптики). Спроєктуємо поверхню постійної фази, заданої рівнянням (17.21), на площину $z = 0$:

$$S(\vec{r}, z)|_{z=0} = S(\vec{r}, 0) = \text{Const} - kz_s(\vec{r}).$$

Отримана величина $S(\vec{r}, z)|_{z=0}$ повинна збігатися із заданим розподілом фази на екрані – $S(\vec{r}) = k\phi(\vec{r})$. У результаті отримуємо таку рівність:

$$S(\vec{r}, 0) = \text{Const} - kz_s(\vec{r}) = k\phi(\vec{r}). \quad (17.22)$$

Звідси знаходимо рівняння поверхні сталої фази (фазового фронту хвилі):

$$z = z_s(\vec{r}) = \text{Const} - \phi(\vec{r}). \quad (17.23)$$

Рівняння нормалі $\vec{t}(\vec{r})$ до поверхні сталої фази $z = z_s(\vec{r})$ визначається як рівняння нормалі до поверхні рівня, яка, згідно з (17.23), задається у вигляді $\Phi(x, y, z) = z + \phi(\vec{r}) = \text{Const}$:

$$\vec{t} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} = \frac{\vec{e}_z + \vec{\gamma}}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad (17.24)$$

де $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_r \phi(\vec{r})$. Проекції вектора \vec{t} на осі координат дорівнюють $\vec{t}_z = \vec{e}_z / \sqrt{1 + \gamma^2}$ і $\vec{t}_\perp = t_x \vec{e}_x + t_y \vec{e}_y = \vec{\gamma} / \sqrt{1 + \gamma^2}$. Напрямок променів, якими поле $U(\vec{r})$ переноситься з площини $z = 0$ в область простору $z > 0$, визначається полем нормалей $\vec{t}(\vec{r})$. Для малих кутів відхилення $|\vec{\gamma}| = \gamma \ll 1$, і наближено можна вважати, що

$$\vec{t}_z \approx \vec{e}_z \text{ і } \vec{t}_\perp \approx \vec{\gamma} = \vec{\nabla}_r \phi(\vec{r}). \quad (17.25)$$

Зауважимо, що знайдений для \vec{t}_\perp вираз збігається з отриманою раніше у рамках МГО поправкою до кута приходу \vec{t}_1 .

Отже, за відомим сумарним ейконалом хвилі $\phi(\vec{r})$ на виході з шару з неоднорідностями ($z = 0$) можна знайти закон відхилення променів $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_r \phi(\vec{r})$. Далі заломлені у площині фазового екрана промені вздовж прямих ліній досягають площини спостереження ($z = z_p > 0$). Визначимо координати променів, які, заломившись на фазовому екрані, пройшли через точку спостереження $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$. Згідно з рис. 17.6, в малокутовому наближенні можна записати таку рівність:

$$\frac{\vec{r}_p - \vec{r}}{z_p} = \vec{\gamma}(\vec{r}),$$

звідки отримуємо

$$\vec{r}_p = \vec{r} + z_p \vec{\gamma}(\vec{r}). \quad (17.26)$$

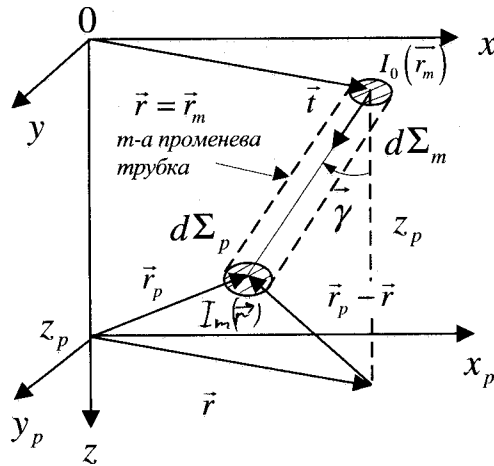


Рис. 17.6

Векторне рівняння (17.26) називається **абераційним**. Воно є системою двох рівнянь (проекції $\vec{r}_p = \vec{r}_p(\vec{r})$ на осі OX, OY) з двома невідомими (координати x, y).

Припустимо, що заданому положенню спостерігача $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ відповідає $N \geq 1$ дійсних коренів $\vec{r} = \vec{r}_m$, ($m = 1, 2, \dots, N$) аберційного рівняння (17.26). Наявність кількох коренів говорить про те, що у точку спостереження \vec{R}_p приходять одночасно кілька променів. Розглянемо один із коренів, наприклад, $\vec{r} = \vec{r}_m$ і припустимо, що спостерігач здійснює невеликі

переміщення поблизу вихідної точки \vec{r}_p , залишаючись при цьому у площині спостереження: $\vec{r}_p \rightarrow \vec{r}_p + \delta\vec{r}_p$. Координати кореня \vec{r}_m в площині фазового екрана ($z=0$) при цьому також зазнають невеликих змін: $\vec{r}_m \rightarrow \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m$, причому і $\vec{r}_p + \delta\vec{r}_p$, і $\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m$, як і раніше, задовольняють вихідне абераційне рівняння (17.26):

$$\vec{r}_p + \delta \vec{r}_p = \vec{r}_m + \delta \vec{r}_m + z \vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta \vec{r}_m).$$

Зв'язок між малими зміщеннями $\delta \vec{r}_p$ і $\delta \vec{r}_m$ можна визначити після лінеаризування цього рівняння. Для цього розкладемо $\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta \vec{r}_m)$ у ряд Тейлора за малою величиною $\delta \vec{r}_m$ і обмежимося тільки лінійними доданками: $\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta \vec{r}_m) \approx \vec{\gamma}(\vec{r}_m) + (\delta \vec{r}_m \vec{\nabla}) \vec{\gamma}(\vec{r}_m)$. У результаті, отримуємо

$$\begin{aligned}\vec{r}_p + \delta\vec{r}_p &= \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m + z_p \vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m) \approx \\ &\approx \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m + z_p \vec{\gamma}(\vec{r}_m) + z_p (\delta\vec{r}_m \vec{\nabla}) \vec{\gamma}(\vec{r}_m).\end{aligned}\quad (17.27)$$

Враховуючи, що $\vec{r} = \vec{r}_m$ задовольняє вихідне рівняння $\vec{r}_p = \vec{r}_m + z_p \mathcal{Y}(\vec{r}_m)$, отримуємо

$$\delta \vec{r}_p \approx \delta \vec{r}_m + z_p \left(\delta \vec{r}_m \vec{\nabla} \right) \vec{\gamma}(\vec{r}_m). \quad (17.28)$$

Скористаємося тепер одним з основних рівнянь МГО – законом збереження інтенсивності всередині нескінченно тонкої променевої трубки (див. (15.14)) побудованої поблизу променя, що з'єднує точки $\vec{r} = \vec{r}_m$ (на вході) і \vec{r}_p (на виході). Позначимо через $I_m(\vec{r}_p)$ значення інтенсивності у точці спостереження, що відповідає m -му променю. Враховуючи, що інтенсивність хвилі у площині фазового екрана у точці $\vec{r} = \vec{r}_m$ дорівнює $I_0(\vec{r}_m) = A_0^2(\vec{r}_m)$, згідно з рис.17.6, можемо записати таку рівність (див. 15.14):

$$I_0(\vec{r}_m) d\Sigma_m = I_m(\vec{r}_p) d\Sigma_p. \quad (17.29)$$

Тут $d\Sigma_p \equiv \delta\vec{r}_p$ – площа поперечного перерізу на виході променевої трубки (у площині спостереження), а $d\Sigma_m \equiv \delta\vec{r}_m$ – на вході (у площині фазового екрана). З (17.29) знаходимо внесок у значення інтенсивності в точці спостереження від m -ї променевої трубки:

$$I_m(\vec{r}_p) = I_0(\vec{r}_m) \frac{d\Sigma_m}{d\Sigma_p}. \quad (17.30)$$

Відношення площ $d\Sigma_m/d\Sigma_p \equiv \delta\vec{r}_m/\delta\vec{r}_p$ легко визначається з лінеаризованого рівняння (17.28) через якобіан перетворення від змінних x_p, y_p до змінних x, y :

$$\frac{d\Sigma_m}{d\Sigma_p} \equiv \frac{\delta\vec{r}_m}{\delta\vec{r}_p} = \left| \frac{\partial(x_m, y_m)}{\partial(x_p, y_p)} \right| = \left| \frac{\partial(x_p, y_p)}{\partial(x, y)} \right|^{-1}_{\vec{r}=\vec{r}_m} =$$

$$= \left[\left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1}_{\vec{r}=\vec{r}_m}. \quad (17.31)$$

Тут ми скористалися відомим зв'язком між „прямим” і „зворотним” якобіанами і врахували, що, згідно з визначенням $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\varphi(\vec{r})$, для змішаних похідних повинна виконуватися рівність: $\partial\gamma_x/\partial y = \partial\gamma_y/\partial x$.

Повну інтенсивність у точці спостереження $I(\vec{r}_p)$ отримаємо, підсумувавши внески від всіх променевих трубок:

$$I(\vec{r}_p) = \sum_{m=1}^N I_m(\vec{r}_p) = \sum_{m=1}^N I_0(\vec{r}_m) \left[\left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1}_{\vec{r}=\vec{r}_m}. \quad (17.32)$$

17.4. Дифракційне розв'язання задачі

Кількісний аналіз інтегрального подання (17.20) при довільних залежностях амплітуди $A_0(\vec{r})$ і фази $k\varphi(\vec{r})$ у загальному випадку не є можливим. Проте для коротких довжин хвиль, коли λ набагато менша за характерний масштаб l_φ змін ейконалу $\varphi(\vec{r})$ у площині екрана ($kl_\varphi \gg 1$), інтеграл (17.20) можна оцінити методом стаціонарної фази. При цьому задача суттєво спрощується і в результаті вдається отримати достатньо прості асимптотичні оцінки для значення поля у точці спостереження.

Метод стаціонарної фази

У цьому розділі ми в загальних рисах подамо один із найрезультативніших математичних методів асимптотичної оцінки інтегралів виду (17.20), який у фізиці називається короткохвильовою асимптотикою, а в математиці — асимптотичною оцінкою швидко осцилюючих інтегралів.

Нехай необхідно обчислити одинарний інтеграл виду

$$J(\Lambda) = \int_a^b q(x) e^{i\Lambda\Phi(x)} dx, \quad (17.33)$$

де $\Lambda \gg 1$ (великий параметр), а $q(x)$ і $\Phi(x)$ — дійсні повільно змінювані функції (порівняно з періодом зміни функції $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$). Поведінка підінтегрального виразу нагадує розглянутий раніше в § 6 амплітудно модульований процес: при цьому $q(x)$ грає роль обвідної, а $\Phi(x)$ визначає миттєву частоту заповнення обвідної.

Припустимо спочатку, що на інтервалі (a, b) , де $b > a$, функції $q(x)$ і $\Phi(x)$ змінюються монотонно. На рис. 17.7 а показано характерний вигляд реальної $\text{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$ або уявної $\text{Im}(qe^{i\Lambda\Phi})$

частин підінтегральної функції. Визначений інтеграл на інтервалі (a, b) за визначенням дорівнює сумі елементарних „площадок”, що містяться всередині кривої $\text{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$ (або $\text{Im}(qe^{i\Lambda\Phi})$). Довільно оберемо один з періодів зміни підінтегральної функції, наприклад, $\text{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$. Внаслідок повільного характеру змін $q(x)$ і $\Phi(x)$ при $\Lambda \gg 1$ площадки, що відповідають двом півперіодам, мають приблизно рівні амплітуди, але різні знаки $(+, -)$. У процесі підсумовування вони дають мізерно малий внесок у загальний інтеграл (17.33). У результаті підсумовування всіх півперіодів із додатними і від’ємними значеннями ми отримаємо незначну величину $J(\Lambda)$. Можна показати, що за рахунок швидкої осциляції $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$ значення інтеграла $J(\Lambda)$ буде обернено пропорційним величині Λ : $J(\Lambda) \sim \Lambda^{-1}$.

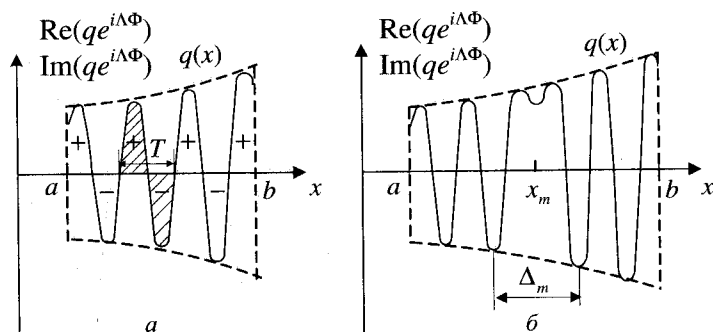


Рис. 17.7

Ситуація суттєво змінюється, якщо всередині інтервалу (a, b) функція $\Phi(x)$ досягає екстремуму. У цьому випадку основний внесок у інтеграл (17.33) дає невеликий окіл значень x , що лежать поблизу

точки екстремуму $x = x_m$ (рис. 17.7 б), де функція $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$ перестає осцилювати. Області інтегрування, віддалені від точки екстремуму, і в яких функції $q(x)$ і $\Phi(x)$ монотонно змінюються, дають значно менший внесок у величину інтеграла $J(\Lambda)$.

Асимптотичну оцінку інтеграла за наявності стаціонарних точок можна отримати, виконавши такі спрощення.

1. Припустимо спочатку, що $x = x_m$ є єдиною на інтервалі (a, b) точкою екстремуму, що визначається з умови:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0. \quad (17.34)$$

В околі $x = x_m$ розкладемо $\Phi(x)$ у ряд Тейлора і залишимо тільки квадратичний доданок:

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_m) + \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(x_m)}{dx^2} (x - x_m)^2 = \Phi(x_m) + \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2. \quad (17.35)$$

Тут $\Delta x = x - x_m$. З урахуванням (17.35) показник степеню експоненти поблизу стаціонарної точки подається у вигляді

$$\Lambda\Phi(x) \approx \Lambda\Phi(x_m) + \frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2. \quad (17.36)$$

Розмір області $\Delta_m = \Delta x$, у межах якої підінтегральна функція в (17.33) не осцилює, і, отже, дає основний внесок в інтеграл (див. рис.

17.7б), можна оцінити з умови $\frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2 \approx \pi$:

$$\Delta_m \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda |\Phi''_{xx}(x_m)|}}. \quad (17.37)$$

2. Амплітудна функція $q(x)$ практично не змінюється у межах області $x_m - \Delta_m < x < x_m + \Delta_m$ (внаслідок її повільності), тому її

можна просто винести за знак інтеграла в точці $x = x_m$, тобто покласти $q(x) \approx q(x_m)$.

3. Якщо область змін аргументу $x_m - \Delta_m < x < x_m + \Delta_m$ розташована на значній відстані від меж інтервалу (a, b) , то границі інтегрування можна розтягнути від $-\infty$ до $+\infty$.

Після виконаних спрощень отримаємо

$$\begin{aligned} J_m(\Lambda) &\approx q(x_m) e^{i\Lambda\Phi(x_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{\Lambda}{2}\Phi''_{xx}(x_m)(\Delta x)^2\right\} d(\Delta x) = \\ &= q(x_m) \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda|\Phi''_{xx}(x_m)|}} \exp\left\{i\left[\Lambda\Phi(x_m) + \frac{\pi}{4}\text{sgn}\Phi''_{xx}(x_m)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (17.38)$$

4. Якщо рівняння для визначення точок стаціонарності фази (17.34) має не один, а кілька дійсних коренів $x = x_m$, ($m = 1, 2, \dots, N$), і

області Δ_m не перекриваються та розташовані далеко від границь області інтегрування (випадок так званих ізольованих коренів), то асимптотична оцінка (17.33) при $\Lambda \gg 1$ дорівнює сумі внесків від кожної стаціонарної точки (17.38):

$$J(\Lambda) = \sum_{m=1}^N J_m(\Lambda), \quad (17.39)$$

Метод стаціонарної фази можна узагальнити і для випадку кратних інтегралів. Цікавим для наших розрахунків є алгоритм оцінок подвійного інтеграла виду

$$J(\Lambda) = \int_{\Sigma} q(\vec{r}) e^{i\Lambda\Phi(\vec{r})} d\vec{r}, \quad (17.40)$$

де знову Λ — великий параметр ($\Lambda \gg 1$), $q(\vec{r})$ і $\Phi(\vec{r})$ — функції, що „повільно” змінюються, а Σ — задана область інтегрування.

1.3 рівняння

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi(\vec{r}) = 0 \quad (17.41)$$

знаходяться точки (дійсні корені) стаціонарності фази: $\vec{r} = \vec{r}_m$, ($m = 1, 2, \dots, N$).

2. В околі кожної точки $\vec{r} = \vec{r}_m$ функція $\Phi(\vec{r})$ подається у вигляді двовимірного ряду Тейлора з точністю до квадратичних членів включно:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &\approx \Phi(\vec{r}_m) + \frac{1}{2}\Phi''_{xx}(\vec{r}_m)(\Delta x)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\Phi''_{yy}(\vec{r}_m)(\Delta y)^2 + \Phi''_{xy}(\vec{r}_m)\Delta x\Delta y, \end{aligned} \quad (17.42)$$

де $\Delta x = x - x_m$, $\Delta y = y - y_m$, а $\Phi''_{ij}(\vec{r}_m)$ — частинні похідні другого порядку за змінними x і y .

3. В околі \vec{r}_m „повільно” змінювану функцію $q(\vec{r})$ вважаємо приблизно сталою і виносимо за знак інтеграла в точці $\vec{r} = \vec{r}_m$: $q(\vec{r}) \approx q(\vec{r}_m)$.

4. Розміри областей Δ_m , які дають основні внески у значення інтеграла $J(\Lambda)$, оцінюються за допомогою (17.42) з умови $|\Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_m)| \approx \pi$. Видно, що визначені у такий спосіб області Δ_m — не що інше, як перші зони Френеля, описані навколо стаціонарних точок $\vec{r} = \vec{r}_m$.

5. Якщо області Δ_m розташовані на значній відстані між собою і від меж області інтегрування (випадок ізольованих коренів), то при оцінці внеску кожної стаціонарної точки $J_m(\Lambda)$ границі інтегрування можна розтягнути від $-\infty$ до ∞ .

У результаті, для внеску m -ї стаціонарної точки виходить така асимптотична оцінка:

$$J_m(\Lambda) \approx q(\vec{r}_m) e^{i\Lambda\Phi(\vec{r}_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i\Lambda \left[\frac{1}{2} \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) (\Delta y)^2 + \Phi''_{xy}(\vec{r}_m) \Delta x \Delta y \right] \right\} d(\Delta x) d(\Delta y) = \frac{2\pi q(\vec{r}_m)}{\Lambda \sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[\Lambda \Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \quad (17.43)$$

Тут $D_m = \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) - \Phi''_{xy}^2(\vec{r}_m)$ — визначник, утворений із других похідних функції Φ ; $\varepsilon_m = 1$, якщо \vec{r}_m — точка max; $\varepsilon_m = -1$, якщо \vec{r}_m — точка min; $\varepsilon_m = 0$, якщо \vec{r}_m — сідлова точка.

Асимптотичну оцінку всього інтеграла (17.40) отримують шляхом підсумовування внесків від всіх стаціонарних точок:

$$J(\Lambda) = \sum_{m=1}^N J_m(\Lambda) \approx \frac{2\pi}{\Lambda} \sum_{m=1}^N \frac{q(\vec{r}_m)}{\sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[\Lambda \Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \quad (17.44)$$

Скористаємося тепер наведеними вище формулами для отримання короткохвильової оцінки інтегрального подання (17.20). Для цього достатньо провести формальну заміну позначень:

$$\Lambda \rightarrow k, \quad q(\vec{r}) \rightarrow \frac{A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{R}_p|}, \quad \Phi(\vec{r}) \rightarrow |\vec{r} - \vec{R}_p| + \varphi(\vec{r}).$$

У малокутовому наближенні ($|\vec{\gamma}| \ll 1$) основний внесок по полю в точці спостереження \vec{R}_p дає тільки малий окіл \vec{r} на фазовому екрані, що лежить поблизу значень $\vec{r} = \vec{r}_p$, — тому виконується нерівність

$|\vec{r} - \vec{r}_p| \ll z_p$. У цьому випадку у підінтегральному виразі (17.20) можна приблизно покласти

$$\begin{aligned} \cos \theta(\vec{r}) &\approx \cos \theta(\vec{r}_p) = 1, \\ |\vec{r} - \vec{R}_p| &= \sqrt{z_p^2 + (\vec{r} - \vec{r}_p)^2} \approx z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p}, \\ q(\vec{r}) &\approx \frac{A_0(\vec{r})}{z_p}, \\ \Phi(\vec{r}) &\approx z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p} + \varphi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (17.45)$$

У результаті виконаних спрощень отримуємо

$$U(\vec{R}_p) \approx \frac{k}{2\pi z_p i} \int_{\Sigma_0} A_0(\vec{r}) \exp \{ ik\Phi(\vec{r}) \} d\vec{r}, \quad (17.46)$$

де $\Phi(\vec{r}) = z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p} + \varphi(\vec{r})$. Зауважимо, що для достатньо коротких довжин хвиль $\lambda \ll l_\varphi$, де l_φ — характерний масштаб зміни ейконалу $\varphi(\vec{r})$ (радіус кривизни поверхні постійної фази $z = z_s(\vec{r})$), як великий параметр Λ в (17.46) фактично виступає безрозмірна величина kl_φ ($kl_\varphi \gg 1$).

За методом стаціонарної фази, з умови

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{z_p} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r}) = 0 \quad (17.47)$$

отримуємо рівняння

$$\vec{r}_p = \vec{r} + z_p \vec{\gamma}(\vec{r}), \quad (17.48)$$

розв'язання якого $\vec{r} = \vec{r}_m$ визначає точки (дійсні корені) стаціонарності фази (ми знову врахували, що $\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r})$). З порівняння з (17.26) видно, що (17.48) — вже відоме нам абераційне рівняння у наближенні МГО, тобто точки стаціонарності фази $\vec{r} = \vec{r}_m$ є саме координатами променів, що приходять з екрана в точку спостереження.

Якщо рівняння (17.48) має декілька дійсних ізольованих коренів ($\vec{r} = \vec{r}_m, m = 1, 2, \dots, N$), які лежать у рамках області інтегрування $\Sigma_0(\vec{r}_m \in \Sigma_0)$ і далеко від її межі, то асимптотична оцінка інтеграла (17.46), згідно з (17.44), дорівнює

$$U(\vec{R}_p) = \sum_{m=1}^N U_m(\vec{R}_p), \quad (17.49)$$

де $U_m(\vec{R}_p)$ — внесок від m -ї стаціонарної точки, що визначається як

$$U_m(\vec{R}_p) \approx \frac{A_0(\vec{r}_m)}{z_p \sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[k\Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \quad (17.50)$$

Тут

$$D(\vec{r}_m) = \left[\Phi''_{xx} \Phi''_{yy} - (\Phi''_{xy})^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m} = \frac{1}{z_p^2} \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m}. \quad (17.51)$$

Отже, за наявності кількох дійсних коренів $\vec{r} = \vec{r}_m$ у точку спостереження \vec{R}_p одночасно приходять кілька променів (хвиль), причому кожна з хвиль $U_m(\vec{R}_p)$, що прийшли, має свою амплітуду

$A_0(\vec{r}_m) / z_p \sqrt{|D(\vec{r}_m)|}$ і фази $k\Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_m)$. Сумарне поле $U(\vec{R}_p)$ утворюється в результаті когерентного додавання всіх складових $U_m(\vec{R}_p)$.

Скориставшись формулою (17.49), визначимо тепер інтенсивність поля у точці спостереження:

$$I(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p) U^*(\vec{R}_p) = \sum_{m=1}^N |U_m(\vec{R}_p)|^2 + \sum_{n \neq j}^N U_n(\vec{R}_p) U_j^*(\vec{R}_p) = \sum_{m=1}^N I_m(\vec{R}_p) + \sum_{n \neq j}^N \sqrt{I_n(\vec{R}_p)} \sqrt{I_j(\vec{R}_p)} \exp \left\{ i \left[k(\Phi(\vec{r}_n) - \Phi(\vec{r}_j)) + \frac{\pi}{2}(\varepsilon_n - \varepsilon_j) \right] \right\}. \quad (17.52)$$

Тут

$$I_m(\vec{R}_p) = |U_m(\vec{R}_p)|^2 = \frac{A_0^2(\vec{r}_m)}{z_p^2 |D(\vec{r}_m)|} = I_0(\vec{r}_m) \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m}^{-1} \quad (17.53)$$

інтенсивність хвилі, що прийшла у точку спостереження вздовж m -го променя.

Порівнюючи формули для $I(\vec{R}_p)$, отримані у наближеннях МГО (17.32) і дифракційному короткохвильовому наближенні (17.52), бачимо, що некогерентна складова у дифракційному наближенні $\sum I_m(\vec{R}_p)$ точно збігається із геометрооптичною величиною. Врахування дифракції під час розгляду тільки ізольованих коренів абераційного рівняння зводиться лише до врахування інтерференції хвиль між собою (доданок $\sim \sum \sum$ у формулі (17.52)).

Коментарі

За допомогою методу стаціонарної фази у наближенні методу фазового екрана можна аналізувати і більш складні поведінки полів. Ми розглянули тільки випадок скінченної кількості ізольованих коренів \vec{r}_m , який відповідає одночасному приходу у точку спостереження кількох променів. Проте за наявності у площині спостереження фокальних утворень (фокуси і каустики) в абераційному рівнянні (17.48), залежно від положення спостерігача, деякі з коренів можуть наближатися один до одного і навіть зливатися в один – кратний. Для коренів, що зливаються, $D(\vec{r}_m) \rightarrow 0$, а інтенсивності I_m нескінченно зростають ($I_m(\vec{R}_p) \rightarrow \infty$). У цьому випадку МГО просто припиняє діяти. Проте у наближенні методу фазового екрана і у цьому випадку можна отримати скінченні (дифракційні) значення полів. Для цього у розкладі ейконалу $\Phi(\vec{r})$ у ряд Тейлора (17.42) необхідно врахувати доданки більш високого порядку по Δx і Δy , ніж квадратичні. Наприклад, при перебуванні спостерігача поблизу гладкої каустики в абераційному рівнянні буде присутній корінь кратності 2, і у розкладі ейконалу необхідно враховувати члени третього порядку малості по Δx і Δy . Внесок у результуюче поле від подвійного кореня у цьому випадку виражатиметься через спецфункцію – функцію Ейрі. Поведінка полів за наявності коренів ще вищої кратності складає предмет аналізу теорії хвильових катастроф.

17.5. Дифракція флюктуюючих хвиль

Згідно з (17.2), сумарний набіг фази хвилі на екрані $S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r})$ включає в себе складову фази вихідної падаючої хвилі — $S_0(\vec{r}) = k\varphi_0(\vec{r})$ і додаток $\tilde{S}(\vec{r}) = k\tilde{\varphi}(\vec{r})$, пов'язаний з набігом у шарі з неоднорідностями. Виділимо у повній фазі $k\varphi(\vec{r})$ регулярну й випадкову складову:

$$S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r}) = k <\varphi(\vec{r})> + k\delta\varphi(\vec{r}) = <S(\vec{r})> + \delta S(\vec{r}), \quad (17.54)$$

де, за визначенням, $<\delta S(\vec{r})> \equiv 0$. Регулярна складова фази — $<S(\vec{r})> = k <\varphi(\vec{r})>$ у загальному випадку може містити не тільки фазу падаючої хвилі — $k\varphi_0(\vec{r})$, а й регулярний доданок за рахунок неоднорідностей середовища — $k <\tilde{\varphi}(\vec{r})>$, якщо він не дорівнює 0:

$$k <\varphi(\vec{r})> = k\varphi_0(\vec{r}) + k <\tilde{\varphi}(\vec{r})> = S_0(\vec{r}) + <\tilde{S}(\vec{r})>. \quad (17.55)$$

Як приклад середовищ, у яких, крім випадкових „дрібномасштабних” неоднорідностей, наявні ще й “великомасштабні” регулярні утворення, можна зазначити такі, як іоносфера Землі, корона Сонця, так звані великомасштабні „лінзи” у космосі, атмосфері Землі, морській воді та ін. Для перелічених середовищ великомасштабні і довготривалі утворення зручніше відносити до регулярної складової, вважаючи, що флюктууюча частина пов'язана з дрібномасштабними і швидко змінюваними неоднорідностями.

Наявність регулярної й випадкової складових у фазі хвилі призводить до того, що кут виходу променів з екрана $\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \varphi(\vec{r})$ також включатиме в себе як регулярну $<\vec{\gamma}(\vec{r})> = \vec{\nabla}_r <\varphi(\vec{r})>$, так і флюктууючу $\delta\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \delta\varphi(\vec{r})$ компоненти: $\vec{\gamma}(\vec{r}) = <\vec{\gamma}(\vec{r})> + \delta\vec{\gamma}(\vec{r})$. З урахуванням цього абераційне рівняння (17.26) можна подати як

$$\vec{r}_p = <\vec{f}(\vec{r})> + \delta\vec{f}(\vec{r}), \quad (17.56)$$

де $<\vec{f}(\vec{r})> = \vec{r} + z_p <\vec{\gamma}(\vec{r})>$ — регулярна, а $\delta\vec{f}(\vec{r}) = z_p \delta\vec{\gamma}(\vec{r})$ — випадкова складові. Через наявність випадкового доданка $\delta\vec{f}(\vec{r})$ дійсні корені \vec{r}_m рівняння (17.56) мають випадковий характер. Перерізи променевих трубок $d\Sigma_m$ будуть при цьому флюктуувати (від реалізації до реалізації) і, як результат, інтенсивність хвилі у точці спостереження (17.32) є випадковою величиною.

З іншого боку, у дифракційній формулі (17.52) вплив випадкової складової фази $k\delta\varphi(\vec{r})$ проявляє себе двояко. По-перше, наявність $\delta\varphi(\vec{r})$ призводить до флуктуацій кута приходу $\vec{\gamma}(\vec{r})$, що призводить до випадкових змін у положеннях точок стаціонарної фази \vec{r}_m рівняння (17.48). По-друге, у формулу (17.52) в явному вигляді входять випадкові різниці фаз хвиль, що приходять з різних ділянок фазового екрана.

Урахування випадкових факторів можна було б здійснювати, користуючись вже отриманими у рамках МГО і дифракційного аналізу формулами, задаючи статистику випадкових флуктуацій фази $k\delta\varphi(\vec{r})$, кутів приходу $\delta\vec{\gamma}(\vec{r})$ і визначаючи відповідним чином статистику коренів аберацийного рівняння (17.48). Проте зручніше це зробити на основі вихідного інтегрального зображення (17.20), яке, з урахуванням (17.54), набуває вигляду

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} e^{ik\bar{\varphi}(\vec{r})} e^{ik\delta\varphi(\vec{r})} d\vec{r}. \quad (17.57)$$

17.6. Статистичні моменти поля.

Принцип Гюйгенса для інтенсивності

Обчислимо *середнє поле* у точці спостереження $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$.

При усередненні (17.57) за ансамблем реалізацій випадкової функції $\delta\varphi(\vec{r})$ під інтегралом виникає множник $\langle e^{ik\delta\varphi(\vec{r})} \rangle$. При його обчисленні припустимо, що випадкові флуктуації фази $\delta S(\vec{r}) = k\delta\varphi(\vec{r})$ статистично однорідні й розподілені за нормальним законом:

$$W(\delta S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_S^2}} \exp \left\{ -\frac{(\delta S)^2}{2\sigma_S^2} \right\}, \quad (17.58)$$

де $\sigma_S^2 = \langle (\delta S)^2 \rangle = \text{Const}$ — дисперсія флуктуацій фази на екрані. Для нормально розподіленої величини δS маємо

$$\langle e^{i\delta S} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta S} W(\delta S) d(\delta S) = e^{-\sigma_S^2/2}. \quad (17.59)$$

З урахуванням цього приходимо до такого визначення середнього поля:

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_S^2/2} U_d(\vec{R}_p). \quad (17.60)$$

Тут $U_d(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p)|_{\delta S=0}$ — це поле $U(\vec{R}_p)$ (17.57), яке було б у точці спостереження \vec{R}_p , якби на екрані не було випадкових флуктуацій фази ($\delta S \equiv 0$). При цьому $e^{i\delta S} \equiv 1$ і (17.57) є представленням дифрагovanого поля за екраном.

Таким чином, середнє (когерентне) поле за фазовим екраном із просторово-однорідними флуктуаціями фази δS відрізняється від незбуреного $U_d(\vec{R}_p)$ тільки сталим множником $e^{-\sigma_S^2/2}$. Поведінка $U_d(\vec{R}_p)$ може бути досліджена, наприклад, методом стаціонарної фази.

Середню інтенсивність, як і раніше, ототожнюватимемо з другим статистичним моментом:

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \langle U(\vec{R}_p) U^*(\vec{R}_p) \rangle = \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r}' \int_{\Sigma_0} d\vec{r}'' \frac{A_0(\vec{r}') A_0(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{R}_p| |\vec{r}'' - \vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}') \cos \theta(\vec{r}'') \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p| + \bar{\varphi}(\vec{r}') - \bar{\varphi}(\vec{r}'') \right] \right\} \times \\ &\times \langle \exp \{ i [\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'')] \} \rangle. \end{aligned} \quad (17.61)$$

Якщо $\delta S(\vec{r})$ описується нормальним розподілом, то й різниця фаз $\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'')$ також нормально розподілена. У результаті, для статистично однорідних флуктуацій маємо

$$\langle \exp \{ i [\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'')] \} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_S(\vec{r}' - \vec{r}'') \right\}, \quad (17.62)$$

де $D_S(\vec{r}' - \vec{r}'') = \langle [\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'')]^2 \rangle$ — структурна функція флуктуацій фази.

Перед тим, як аналізувати отриману формулу (17.61), виконаємо деякі спрощення.

1. Скористаємося спрощеннями (17.45), які можна виконати у малокутовому наближенні. При цьому (17.61) приводиться до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r}' \int_{\Sigma_0} d\vec{r}'' A_0(\vec{r}') A_0(\vec{r}'') \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_S(\vec{r}' - \vec{r}'') \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[\frac{(\vec{r}' - \vec{r}_p)^2}{2z_p} - \frac{(\vec{r}'' - \vec{r}_p)^2}{2z_p} + \bar{\varphi}(\vec{r}') - \bar{\varphi}(\vec{r}'') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.63)$$

2. Введемо до розгляду сумарні й різницеві координати:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{r}' + \vec{r}''), \\ \vec{\rho} &= \vec{r}' - \vec{r}''. \end{aligned} \quad (17.64)$$

При цьому, як легко перевірити, старі змінні виражаються через нові у вигляді $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\rho}/2$, $\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{\rho}/2$, а модуль якобіана

переходу $J = \left| \frac{\partial(\vec{r}', \vec{r}'')}{\partial(\vec{r}, \vec{\rho})} \right| = 1$. Після заміни формула (17.63) подається

у вигляді

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_r} d\vec{r} \int_{\Sigma_\rho} d\vec{\rho} A_0(\vec{r} + \vec{\rho}/2) A_0(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_S(\vec{\rho}) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}_p) \vec{\rho}}{z_p} + \bar{\varphi}(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \bar{\varphi}(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (17.65)$$

де $\Sigma_{r,\rho}$ — нові області інтегрування для змінних \vec{r} і $\vec{\rho}$.

3. Розглядатимемо статистично однорідні й ізотропні флуктуації фази і виразимо $D_S(\vec{\rho}) = D_S(\rho)$ через автокореляційну функцію флуктуацій фази $B_S(\rho) = \langle \delta S(\vec{r}) \delta S(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle$:

$$D_S(\rho) = 2 \left[\sigma_S^2 - B_S(\rho) \right] = 2\sigma_S^2 \left[1 - K_S(\rho) \right], \quad (17.66)$$

де $\sigma_S^2 = B_S(0)$ — дисперсія флуктуацій фази, а $K_S(\rho) = B_S(\rho)/\sigma_S^2$ — коефіцієнт кореляції.

4. Коефіцієнт кореляції $K_S(\rho)$ за визначенням дорівнює 1 при $\rho = 0$ і швидко спадає до 0 для рознесення між точками, що перевищує характерний масштаб спадання l_S ($K_S(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho > l_S$). При сильних флуктуаціях фази на екрані, коли $\sigma_S^2 \gg 1$, основний внесок в інтеграл (17.65) дає лише невеликий окіл значень ρ , що лежать поблизу $\rho = 0$, там, де функція $D_S(\rho)$ є достатньо малою (нагадаємо, що $D_S(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$). Для малих ρ коефіцієнт кореляції $K_S(\rho)$ можна розкласти в ряд Тейлора і обмежитися першими неznикаючими членами:

$$K_S(\rho) \approx K_S(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} K_S(0) \rho^2 = 1 - \frac{\rho^2}{2l_S^2} = 1 - \frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{2l_S^2}. \quad (17.67)$$

Тут через співвідношення $l_S^{-2} = -\frac{d^2}{d\rho^2} K_S(0)$ введено радіус

кореляції флуктуацій фази l_s , що збігається за порядком величини із характерним лінійним розміром неоднорідностей фази на екрані. У результаті, “ріжучий” фактор у формулі (17.65) наближено набуває вигляду

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}D_s(\rho)\right\} \approx \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_s^2}{l_s^2}\rho^2\right\}. \quad (17.68)$$

Характерний розмір області $\rho = \rho_{ef}$, який дає основний внесок в інтеграл за $d\vec{\rho}$, можна оцінити з умови $\sigma_s^2 \rho_{ef}^2 / 2l_s^2 \approx 1$, звідки отримуємо $\rho_{ef} \approx l_s / \sigma_s$.

5. Якщо значення ρ_{ef} є набагато меншим за характерні масштаби $L_{x,y}$ змін регулярної складової ейконалу $\bar{\varphi}(\vec{r})$, що визначаються вздовж осей координат x і y зі співвідношень

$$\left|\frac{1}{\bar{\varphi}(\vec{r})}\frac{\partial}{\partial x}\bar{\varphi}(\vec{r})\right| \approx \frac{1}{L_x}, \quad \left|\frac{1}{\bar{\varphi}(\vec{r})}\frac{\partial}{\partial y}\bar{\varphi}(\vec{r})\right| \approx \frac{1}{L_y}, \quad (17.69)$$

то регулярну різницю фаз у рознесених точках можна розкласти в ряд Тейлора в точці $\vec{\rho} = 0$ і обмежитися першими неznикаючими членами:

$$\bar{\varphi}\left(\vec{r} + \frac{\vec{\rho}}{2}\right) - \bar{\varphi}\left(\vec{r} - \frac{\vec{\rho}}{2}\right) \approx \vec{\nabla}_{\vec{r}}\bar{\varphi}(\vec{r})\vec{\rho} = \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle \vec{\rho}. \quad (17.70)$$

6. “Повільно” змінюваний амплітудний фактор в (17.65) $A_0(\vec{r} + \vec{\rho}/2)A_0(\vec{r} - \vec{\rho}/2)$ з тих самих причин, що й у п.5, можна наближено взяти у суміщених точках, тобто при $\vec{\rho} = 0$:

$$A_0(\vec{r} + \vec{\rho}/2)A_0(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \approx A_0^2(\vec{r}) = I_0(\vec{r}). \quad (17.71)$$

7. З урахуванням того, що при сильних флуктуаціях фази $\rho_{ef} \approx l_s / \sigma_s \ll l_s$, інтегрування за $d\vec{\rho}$ у (17.65) можна проводити у

нескінченних межах, а область інтегрування за сумарною координатою \vec{r} практично збігається зі старою Σ_0 ($\Sigma_r \approx \Sigma_0$).

У результаті виконаних спрощень отримуємо

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\vec{r}) d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \exp\left\{-\frac{\sigma_s^2}{2l_s^2}\rho^2\right\} \times \\ &\times \exp\left\{ik\left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{z_p} + \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle\right]\vec{\rho}\right\}. \end{aligned} \quad (17.72)$$

Обчислення інтеграла виду

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \exp\{-\alpha\rho^2 + i\vec{\beta}\vec{\rho}\} \quad (17.73)$$

зручніше проводити у полярних координатах $\vec{\rho} = (\rho, \varphi_\rho)$ і $\vec{\beta} = (\beta, \varphi_\beta)$. При цьому інтегрування за $d\varphi_\rho$ приводить до функції Бесселя першого роду нульового порядку — $J_0(x)$, а інтеграл за $d\rho$, що залишився, — табличний інтеграл:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_0^{\infty} \rho \exp\{-\alpha\rho^2\} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho \exp\{i\beta\rho \cos(\varphi_\rho - \varphi_\beta)\} = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\alpha\rho^2} J_0(\beta\rho) d\rho = \frac{\pi}{\alpha} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right\}. \end{aligned} \quad (17.74)$$

У нашому випадку $\alpha = \sigma_s^2 / 2l_s^2$, $\vec{\beta} = k\left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{z_p} + \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle\right]$, й

інтегрування (17.72) за різницевою змінною $d\vec{\rho}$ приводить до такого виразу:

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{k^2 l_S^2}{2\pi z_p^2 \sigma_S^2} \int I_0(\bar{r}) \exp \left\{ -\frac{k^2 l_S^2}{2z_p^2 \sigma_S^2} [\bar{r}_p - \langle \bar{f}(\bar{r}) \rangle]^2 \right\} d\bar{r}, \quad (17.75)$$

Згідно з визначенням, випадкові флуктуації фази δS і кута $\delta \bar{\gamma}$ пов'язані між собою співвідношенням $\delta \bar{\gamma}(\bar{r}) = \bar{\nabla}_{\bar{r}} \delta \varphi(\bar{r}) = \frac{1}{k} \bar{\nabla}_{\bar{r}} \delta S(\bar{r})$. У §7, присвяченому лінійним перетворенням випадкових процесів, нами було показано, що автокореляційна функція $B_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ стаціонарного процесу $x(t)$ і автокореляційна функція $B_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle$ його похідної $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ пов'язані між собою співвідношенням $B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau)$ (див. (7.29)). Аналогічний зв'язок можна записати і для статистично однорідних полів $\delta \varphi(\bar{r})$ і $\delta \bar{\gamma}(\bar{r})$.

З урахуванням того, що вектор $\delta \bar{\gamma}(\bar{r})$ є сумою двох ортогональних складових

$$\delta \bar{\gamma}(\bar{r}) = \delta \gamma_x(\bar{r}) \bar{e}_x + \delta \gamma_y(\bar{r}) \bar{e}_y,$$

де $\delta \gamma_x(\bar{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \delta \varphi(\bar{r})$ і $\delta \gamma_y(\bar{r}) = \frac{\partial}{\partial y} \delta \varphi(\bar{r})$, дисперсія випадкового векторного поля відхилень променів $\delta \bar{\gamma}$ має вигляд

$$\sigma_{\bar{\gamma}}^2 = \langle \delta \bar{\gamma}^2 \rangle = \langle \delta \gamma_x^2 \rangle + \langle \delta \gamma_y^2 \rangle. \quad (17.76)$$

Для визначення зв'язку між дисперсіями флуктуацій кутів виходу з екрана $\langle \delta \gamma_x^2 \rangle$, $\langle \delta \gamma_y^2 \rangle$ і дисперсією флуктуацій фази на екрані σ_S^2 побудуємо спочатку такі автокореляційні функції:

$$\begin{aligned} B_{xx}^{\gamma}(\bar{r}', \bar{r}'') &= \langle \delta \gamma_x(\bar{r}') \delta \gamma_x(\bar{r}'') \rangle = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x''} \langle \delta \varphi(\bar{r}') \delta \varphi(\bar{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x''} B_{\varphi}(\bar{r}', \bar{r}''), \end{aligned} \quad (17.77 \text{ а})$$

$$\begin{aligned} B_{yy}^{\gamma}(\bar{r}', \bar{r}'') &= \langle \delta \gamma_y(\bar{r}') \delta \gamma_y(\bar{r}'') \rangle = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y''} \langle \delta \varphi(\bar{r}') \delta \varphi(\bar{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y''} B_{\varphi}(\bar{r}', \bar{r}''). \end{aligned} \quad (17.77 \text{ б})$$

Подібні формули можна записати і для змішаних кореляторів у рознесених точках: B_{xy}^{γ} і B_{yx}^{γ} . Для статистично однорідного поля $B_{\varphi}(\bar{r}', \bar{r}'') = B_{\varphi}(\bar{r}' - \bar{r}'') = B_{\varphi}(\bar{\rho})$ і формули (17.77) аналогічно (7.19) можна переписати у вигляді

$$B_{xx}^{\gamma}(\bar{\rho}) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} B_{\varphi}(\bar{\rho}), \quad (17.78 \text{ а})$$

$$B_{yy}^{\gamma}(\bar{\rho}) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} B_{\varphi}(\bar{\rho}). \quad (17.78 \text{ б})$$

Враховуючи тепер, що $\langle \delta \gamma_x^2 \rangle = B_{xx}^{\gamma}(0)$, $\langle \delta \gamma_y^2 \rangle = B_{yy}^{\gamma}(0)$, а також зв'язок між автокореляційними функціями ейконалу і фази:

$$B_{\varphi}(\bar{\rho}) = \frac{1}{k^2} B_S(\bar{\rho}) = \frac{\sigma_S^2}{k^2} K_S(\bar{\rho}), \text{ врешті-решт отримаємо}$$

$$\sigma_{\gamma}^2 = -\frac{\sigma_S^2}{k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} K_S(\bar{\rho}) + \frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} K_S(\bar{\rho}) \right]_{\bar{\rho}=0}. \quad (17.79)$$

Похідні $\frac{\partial^2}{\partial \rho_{x,y}^2} K_S(0)$ визначають характерні масштаби кореляції

(розміри неоднорідностей) уздовж осей координат l_{sx} і l_{sy} . Для

ізоотропних флуктуацій ці значення збігаються: $l_{sx} = l_{sy} = l_s$, $K_s(\vec{\rho})$ подається у вигляді (17.67), і, згідно з (17.79), ми отримаємо таке співвідношення:

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k^2 l_s^2}. \quad (17.80)$$

З урахуванням знайденого зв'язку між дисперсіями перепишемо (17.75) в остаточному вигляді:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (17.81)$$

Отримана формула відіграє точно таку ж роль для середньої інтенсивності $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$, що й дифракційний принцип Гюйгенса для поля $U(\vec{R}_p)$: середня інтенсивність у довільній точці спостереження \vec{R}_p подається у вигляді суми інтенсивностей від кожного елемента поверхні $d\vec{r}$ фазового екрана з урахуванням діаграми спрямованості розсіяного випромінювання (індикатрис розсіювання), яка визначається як

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\}. \quad (17.82)$$

Таким чином, при $\sigma_s^2 \gg 1$ у точці спостереження \vec{R}_p хвильові поля, що приходять від різних точок фазового екрана ($z = 0$), складаються „за інтенсивністю”, тобто некогерентно.

Проведемо тепер порівняння отриманого виразу (17.81) з результатами дифракційного і геометрооптичного аналізу. Вираз для $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$ подається у вигляді інтеграла Лапласівського типу. Якщо $z_p \sigma_\gamma \ll L_{x,y}$, то основний внесок в інтеграл дають невеликі

області \vec{r} фазового екрана, розташовані поблизу точок, де перетворюється на 0 показник степеню експоненти:

$$\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle. \quad (17.83)$$

Ми знову отримали добре відоме нам абераційне рівняння, але тільки для регулярної складової фази хвилі. Його розв'язками є регулярні значення дійсних коренів: $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$, $m = 1, 2, \dots, N$.

Асимптотичну оцінку інтеграла можна отримати, виконавши деякі спрощення аналогічно до того, як ми це робили в методі стаціонарної фази. Для довільно обраного кореня, наприклад, m -го, аналогічно до (17.27), лінеаризуємо $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle$ в околі точки $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$. Поклавши $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle + \delta\vec{r}$, для невеликих зміщень $\delta\vec{r}$ можна покласти:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle &= \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle + \delta\vec{r}) \rangle \approx \\ &\approx \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle + (\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle. \end{aligned} \quad (17.84)$$

З урахуванням того, що $\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle$, у показнику степеню експоненти в (17.81) поблизу від кореня $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$ можна наближено записати:

$$\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle \approx (\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle. \quad (17.85)$$

Характерні розміри області $\Delta_m = |\delta\vec{r}|$, що дає головний внесок в інтеграл (17.81), можна оцінити, прирівнявши показник степеню експоненти до одиниці, тобто поклавши

$$|(\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle| \approx z_p \sigma_\gamma.$$

Якщо всі області Δ_m є достатньо малими, не перекриваються і лежать далеко від межі області інтегрування (ізольовані корені), то

при оцінюванні внеску кожного кореня можна, по-перше, множник $I_0(\vec{r})$ в околі точки $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$ вважати сталим і таким, що дорівнює $I_0(\langle \vec{r}_m \rangle)$, по-друге, межі інтегрування за $d\vec{r}$ розтягнути від $-\infty$ до ∞ . У результаті, для внеску m -го кореня отримуємо таку асимптотичну оцінку:

$$\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} I_0(\langle \vec{r}_m \rangle) \int_{-\infty}^{\infty} d(\delta\vec{r}) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \left[(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle \right]^2 \right\} = \frac{I_0(\langle \vec{r}_m \rangle)}{|\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle)|}, \quad (17.86)$$

де $\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle)$ — визначник, побудований з перших похідних від регулярної складової $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$ і обчислений у точці $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$:

$$\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle) = \left[\frac{\partial \langle f_x \rangle}{\partial x} \frac{\partial \langle f_y \rangle}{\partial y} - \left(\frac{\partial \langle f_x \rangle}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \langle f_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle} = \\ = \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle}. \quad (17.87)$$

Повна середня інтенсивність у точці спостереження визначиться як сума внесків від усіх регулярних коренів:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \sum_{m=1}^N \langle I_m(\vec{R}_p) \rangle \approx \quad (17.88)$$

$$\approx \sum_{m=1}^N I_0(\langle \vec{r}_m \rangle) \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle}^{-1}.$$

Коментарі

1. Під час розгляду методу фазового екрана ми використовували тільки спрощення, пов'язане з малокутовим поширенням і не накладали умов дальньої зони, коли у розкладі фази хвилі на екрані (17.46) можна було б знехтувати доданком $kr^2/2z_p \leq kL^2/2z_p \ll 1$ (тут $L \approx \sqrt{\Sigma_0}$ — характерний розмір області інтегрування). Це означає, що отримані формули справедливі й у ближній зоні, коли $kL^2/2z_p > 1$.

2. З порівняння формул, отриманих у наближенні МГО, врахування дифракції і випадкових факторів видно, що випадкові флуктуації фази на екрані призводять до знищення когерентності хвиль, які приходять у точку спостереження від різних ділянок екрана (когерентна складова в (17.52) при сильних флуктуаціях фази перетворюється на 0). Як результат, середня інтенсивність у точці спостереження визначається так само, як і в наближенні МГО, але тільки з урахуванням не повної фази, а її регулярної складової (регулярного кута відхилення).

3. Відсутність у кінцевому результаті (17.88) характерного кута розсіювання σ_γ пов'язана із розглядом випадку ізольованих коренів. Якщо в площині спостереження після проходження хвилею шару з неоднорідностями показника заломлення — $n(\vec{R})$ виникають регулярні фокальні утворення (фокуси, каустики), то серед коренів абераційного рівняння так само, як і в разі дифракції, з'являються збіжні (кратні). У цьому випадку для збіжної пари (корінь кратності 2) $\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rightarrow 0$ і внесок $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle \rightarrow \infty$.

Це означає, що у розкладі (17.84) вже недостатньо лінійних доданків, а необхідно враховувати члени більш високого порядку. У результаті, у кінцеві вирази для внесків увійде кут розсіювання σ_γ , а саме значення $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle$ подаватиметься через відповідні

спецфункції. Наприклад, у разі перебування спостерігача поблизу гладкої каустики середня інтенсивність $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle$ виражатиметься через функцію параболічного циліндра.

Як найпростіший **приклад** розглянемо задачу про проходження плоскої хвилі

$$U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ikz}, \quad A_0 = \text{Const} \quad (17.89)$$

через нескінченний у поперечному напрямку (за \vec{r}) і скінченої товщини у поздовжньому напрямку (за z) випадково-неоднорідний шар. Припускається, що хвиля падає на шар ортогонально, шар з неоднорідностями статистично однорідний і ізотропний. При ортогональному падінні плоскої хвилі регулярна рефракція променів у шарі відсутня. Отже, $\langle \gamma(\vec{r}) \rangle = 0$, $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r}$, і формула (17.81) набуває такого вигляду:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} (\vec{r}_p - \vec{r})^2 \right\} d\vec{r} = A_0^2 = I_0. \quad (17.90)$$

Виявилось, що середня інтенсивність у довільній точці спостереження за необмеженим фазовим екраном збігається з інтенсивністю падаючої хвилі I_0 . Цей несподіваний результат легко пояснюється із закону збереження енергії.

ЗАДАЧІ

1. На необмежений фазовий екран ($z=0$) ортогонально

падає плоска хвиля $U_0(\vec{R}, t) = A_0 e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega t)}$, де $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $k = \omega/c$.

Скориставшись принципом Гюйгенса, розрахувати середнє поле і середню інтенсивність за екраном для повністю когерентного поля ($\sigma_s^2 = 0$).

Розв'язок. Згідно з визначенням, фаза вихідної хвилі у площині фазового екрана ($z=0$) дорівнює нулю ($S_0 = 0$). Крім цього, випадкові флуктуації фази у „нескінченно тонкому” екрані відсутні ($\delta S = 0$). Отже, поле на виході з екрана ($z=0$) має вигляд

$$U|_{z=0} \equiv U_0(\vec{r}, t) \equiv U_0(x, y, t) = A_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Оскільки напрямок поширення вихідної плоскої хвилі збігається з напрямком осі OZ ($\vec{k} = k\vec{e}_z$), розв'язання задачі можна проводити у малокутовому наближенні. У цьому випадку у формулі (17.57), що виражає принцип Гюйгенса, можна покласти $\cos \theta = 1$. У результаті, з урахуванням (1) у довільній точці спостереження за екраном поле визначається так:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k U_0 e^{-i\omega t}}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ikR}}{R} dx dy, \quad \text{де } R = |\vec{r} - \vec{R}_p|. \quad (2)$$

Через те, що у розглядуваній задачі випадкові флуктуації фази відсутні, статистично середнє поле $\bar{U}(\vec{R}_p)$ збігається з дифракційним значенням (2): $\bar{U}(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p)$. У наближенні френелівської дифракції (в малокутовому наближенні) подано відстань $R = |\vec{r} - \vec{R}_p|$ від довільної точки екрана $\vec{R} = (0, \vec{r})$ до точки спостереження $\vec{R}_p = (z_p, x_p, y_p)$ (див. рис.17.8) у вигляді

$$R = \left[z_p^2 + (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 \right]^{1/2} \approx z_p + \frac{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}{2z_p}. \quad (3)$$

Виконавши далі у виразі (2) заміну змінних $x' = x - x_p$, $y' = y - y_p$, отримаємо

$$\bar{U}(\bar{R}_p) = \frac{k}{2\pi i z_p} A_0 e^{i(kz_p - \omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ ik \left(\frac{x'^2}{2z_p} + \frac{y'^2}{2z_p} \right) \right\} dx' dy'. \quad (4)$$

У знаменнику підінтегрального виразу для $\bar{U}(\bar{R}_p)$ ми наближено поклали $R \approx z_p$.

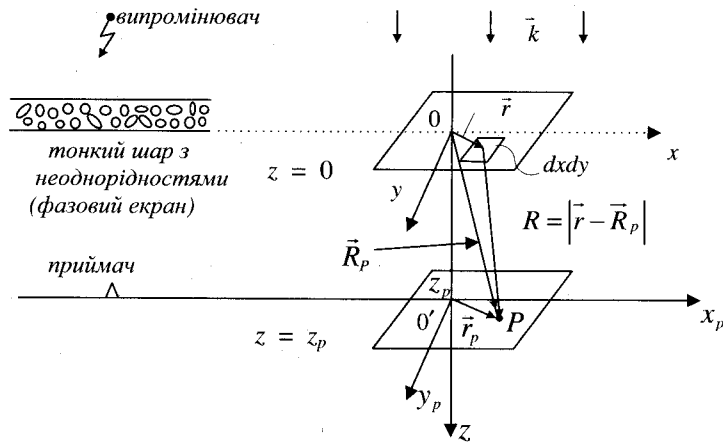


Рис. 17.8

Кожен з інтегралів в останньому виразі дорівнює $\sqrt{\frac{2\pi z_p}{ik}}$. Таким чином, остаточно можна записати

$$\bar{U}(\bar{R}_p) = A_0 e^{i(kz_p - \omega t)}, \quad |\bar{U}(\bar{R}_p)| = A_0. \quad (5)$$

Тепер нескладно визначити когерентну складову середньої інтенсивності $\bar{I}_{\text{коз}} = |\bar{U}(\bar{R}_p)|^2$. Оскільки $U(\bar{R}_p) = \bar{U}(\bar{R}_p)$, то $|U(\bar{R}_p)| = |\bar{U}(\bar{R}_p)|$ і

$$\bar{I}_{\text{коз}} = A_0^2 = I_0. \quad (6)$$

Отримані результати цілком природні. Оскільки флуктуації фази і поглинання хвилі на екрані відсутні, то при нескінченному фазовому екрані (нескінченному фронті хвилі) хвиля за екраном й далі залишається плоскою зі сталими амплітудою й інтенсивністю.

2. На „тонкий” шар, безмежний у поперечному напрямку і скінченної товщини у поздовжньому, зі статистично однорідними неоднорідностями показника заломлення ортогонально падає плоска хвиля. На виході з шару ($z=0$) знаходиться непрозора круга заслінка радіусом a . Вважаючи, що регулярна рефракція в неоднорідному шарі відсутня, визначити середню інтенсивність поля $\bar{I}(z_p)$ на осі заслінки, користуючись принципом Гюйгенса для повністю некогерентного поля ($\sigma_s^2 \gg 1$).

Розв’язок. Як вихідний використовуємо вираз (17.90), отриманий для випадку сильних флуктуацій фази ($\sigma_s^2 \gg 1$). Розташувавши початок декартової системи координат у центр заслінки, у довільній точці спостереження за екраном отримаємо

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} (\bar{r}_p - \bar{r})^2 \right\} d\bar{r}. \quad (1)$$

Тут Σ_0 – область інтегрування, що являє собою нескінченну площину $z=0$, за вирахуванням круга радіусом a . Згідно з умовою задачі, точка спостереження знаходиться на осі заслінки, отже, ми повинні покласти $\bar{r}_p = 0$. Інтеграл у (1) простіше обчислювати у полярних координатах $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $\varphi = \arctg(x/y)$, у яких він набуває вигляду

$$\bar{I} = \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{I_0}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty e^{-\frac{t}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} dt = I_0 e^{-\frac{a^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}}. \quad (2)$$

Проаналізуємо отриманий результат. Дисперсія флуктуацій кутів розсіювання σ_γ^2 пов'язана з дисперсією флуктуацій фази σ_s^2

співвідношенням (17.80): $\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k^2 l_s^2}$. Отже,

$$\bar{I} = I_0 \exp \left\{ -\frac{a^2 k^2 l_s^2}{2 \sigma_s^2 z_p^2} \right\} = I_0 \exp \left\{ -\frac{2 \pi^2 a^2 l_s^2}{\sigma_s^2 z_p^2 \lambda^2} \right\}. \quad (3)$$

З отриманого виразу видно, що при $\sigma_s^2 \rightarrow \infty$ $\bar{I} \rightarrow I_0$. З іншого боку, при великій, але фіксованій дисперсії флуктуацій фази на екрані ($\sigma_s^2 \gg 1$) граничне значення $\bar{I} = I_0$ буде досягнуте тим швидше, чим більша довжина хвилі λ і відстань до екрана z_p , а також чим менший радіус заслінки a і масштаб неоднорідностей фази l_s . Фізично це означає, що хвиля з достатньо великою (порівняно з радіусом заслінки a) довжиною λ „не помічає” заслінки. При нескінченно великому радіусі заслінки ($a \rightarrow \infty$), як і слід було сподіватися, $\bar{I} \rightarrow 0$ (заслінка перекриває все падаюче випромінювання).

Випадок $\sigma_s^2 \rightarrow 0$ отриманим виразом не описується, оскільки, відповідно до умови задачі, як вихідний було взято вираз для \bar{I} , справедливий тільки для $\sigma_s^2 \gg 1$.

3. На довгофокусну тонку лінзу з дрібномасштабними неоднорідностями показника заломлення всередині ортогонально падає плоска хвиля $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ikz}$ (рис. 17.9). У наближенні

сильних, статистично однорідних й ізотропних флуктуацій фази ($\sigma_s^2 \gg 1$) у круглому розкритті лінзи ($0 \leq r \leq a$) і заданій кореляційній функції $B_s(\rho)$ визначити розподіли середнього поля і середньої інтенсивності у фокальній площині лінзи ($z_p = F$, де F – фокальна довжина лінзи). Вважати, що відбувається випадкове розсіювання променів на малі кути.

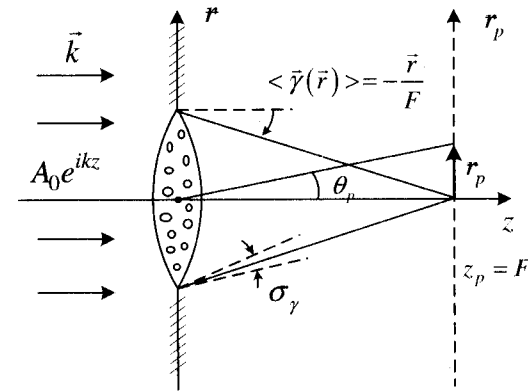


Рис. 17.9

Розв'язок. Тонку лінзу, через яку проходить плоска хвиля, можна розглядати як тонкий фазовий коректор (фазовий екран). Після проходження на виході лінзи падаюче поле набуває вигляду

$$U(\vec{R}) = A_0 \exp \{ i [\bar{S}(\vec{r}) + \delta S(\vec{r})] \}, \quad (1)$$

де регулярний набіг фази для ідеальної лінзи дорівнює

$$\bar{S}(\vec{r}) = -k \frac{r^2}{2F}. \quad (2)$$

Регулярний кут заломлення $\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$ променів на виході довгофокусної лінзи визначається, згідно з формулою (17.70), як

$$\langle \bar{\gamma}(\bar{r}) \rangle = \frac{1}{k} \bar{\nabla}_{\bar{r}} \langle \bar{S}(\bar{r}) \rangle = -\frac{\bar{r}}{F}. \quad (3)$$

Для довгофокусних лінз повинна виконуватися нерівність $r/F \leq a/F \ll 1$. При цьому, враховуючи, що, згідно з визначенням, відбувається випадкове розсіювання променів на малі кути поблизу регулярного відхилення (3), розв'язання задачі проводитимемо у рамках малокутового наближення.

Середнє поле у довільній точці спостереження, розташованій за фазовим екраном (лінзою), задається виразом (17.60), де $U_d(\bar{R}_p)$ — дифракційне значення поля, що визначається формулою (17.57) за відсутності випадкових флуктуацій фази ($\delta S \equiv 0$). Скориставшись визначенням середньої фази (2) і спрощенням (3) у першій задачі, для фокальної площини лінзи ($z_p = F$) дифракційне поле $U_d(\bar{R}_p)$ ми визначаємо так:

$$U_d(F, \bar{r}_p) \approx \frac{kA_0}{2\pi i F} e^{ik(F+r_p^2/2F)} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \exp\left\{ik \frac{r r_p}{F} \cos(\varphi - \varphi_p)\right\} d\varphi. \quad (4)$$

Ми записали інтеграл за поверхнею фазового екрана Σ_0 у полярних координатах $\bar{r} = (r, \varphi)$ і $\bar{r}_p = (r_p, \varphi_p)$. Інтегрування за кутом приводить до такого виразу:

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{kA_0}{iF} e^{ik(F+r_p^2/2F)} \int_0^a r J_0\left(k \frac{r_p}{F} r\right) dr. \quad (5)$$

При обчисленні залишкового інтеграла за dr введемо нову змінну $x = kr\theta_p$ і позначення $t = ka\theta_p$, де $\theta_p = r_p/F$ — кутове зміщення спостерігача відносно центра лінзи (див. рис. 17.9). У результаті, (5) набуває вигляду

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{ka^2 A_0}{iF} e^{ikF(1+\theta_p^2/2)} \frac{1}{t^2} \int_0^t x J_0(x) dx = U_F \cdot \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right], \quad (6)$$

де $U_F = \frac{ka^2 A_0}{2iF} e^{ikF(1+\theta_p^2/2)}$. При обчисленні ми скористалися табличним значенням невизначеного інтеграла

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

де $J_1(x)$ — функція Бесселя першого роду першого порядку.

Таким чином, для середнього поля у фокальній площині отримуємо такий вираз:

$$\langle U(F, r_p) \rangle \approx U_F \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right] e^{-\sigma_s^2/2}. \quad (7)$$

Для відповіді на друге питання скористаємося виразом для середньої інтенсивності (17.81), який для нашої задачі набуває вигляду

$$\langle I(F, \bar{r}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi F^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} \exp\left\{-\frac{1}{F^2 \sigma_\gamma^2} [\bar{r}_p - \langle \bar{f}(\bar{r}) \rangle]^2\right\} d\bar{r}. \quad (8)$$

Згідно з формулою (17.56), визначимо $\langle \bar{f}(\bar{r}) \rangle = \bar{r} + z_p \langle \bar{\gamma}(\bar{r}) \rangle$.

Враховуючи (3) для відстані $z_p = F$, отримаємо

$$\langle f(\bar{r}) \rangle = \bar{r} - F \frac{\bar{r}}{F} = 0. \text{ У результаті, обчислення (8) дає:}$$

$$\langle I(F, r_p) \rangle = I_{\max} e^{-\theta_p^2/\sigma_\gamma^2}, \text{ де } I_{\max} = \frac{a^2 A_0^2}{F^2 \sigma_\gamma^2}.$$

Для остаточної відповіді нам необхідно виразити дисперсію кутів розсіювання випромінювання σ_γ^2 через задану кореляційну функцію фази $B_s(\rho)$. Скориставшись зв'язком (17.80) між

дисперсіями σ_y^2 і σ_s^2 ($\sigma_y^2 = 2\sigma_s^2/k^2 l_s^2$), а також визначенням (17.67) характерного розміру l_s неоднорідностей фази ($l_s^{-2} = -B_s''(0)/\sigma_s^2$), отримаємо

$$\sigma_y^2 = \frac{2}{k^2} |B_s''(0)|.$$

4. Плоска хвиля $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ik\vec{R}}$, де $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $k = \omega/c$ падає

ортогонально на неоднорідний шар скінченної товщини у поздовжньому напрямку. Показник заломлення середовища всередині шару $n = \text{const}$. Товщина шару h змінюється випадковим чином від точки до точки ($h = h(x, y)$). Випадкове поле товщин $h = h(x, y)$ статистично однорідне й ізотропне: $\langle h \rangle = h_0$, $\sigma_h^2 = \text{const}$, $B_h(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = B_h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Виразити середнє значення поля й інтенсивності плоскої хвилі після проходження шару як функції h, n, B_h , розглядаючи шар як фазовий екран.

Розв'язок. Вважатимемо, що поза шаром хвиля поширюється у вакуумі ($n=1$). Зобразимо заданий шар у системі координат x, y, z (див. рис. 17.10) і визначимо середнє значення фази $\bar{S}(\vec{r})$ і дисперсію флуктуацій σ_s^2 на виході з шару. У малокутовому наближенні додаткова фазова модуляція, що виникає внаслідок відмінності n від 1 і різної товщини шару, дорівнює

$$S(x, y) = kh(x, y)(n-1). \quad (1)$$

Оскільки $n = \text{Const}$ і $\bar{h} = \text{Const}$, середній набіг фази $S(\vec{r})$ на екрані також є сталою величиною:

$$\bar{S} = k(n-1)\bar{h} = \text{Const}. \quad (2)$$

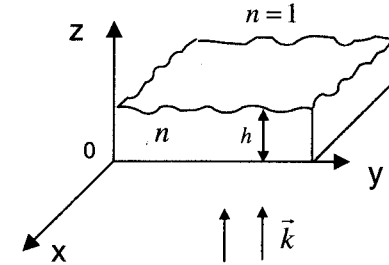


Рис.17.10

Флуктуації фази $\delta S(x, y)$ на екрані, зумовлені випадковим полем товщин $h(\vec{r})$, згідно з (1) і (2), можна записати у вигляді

$$\delta S(x, y) = S - \bar{S} = k(n-1) \delta h(x, y). \quad (3)$$

Звідси знаходимо зв'язок між кореляційними функціями фази $B_s(\rho)$ і товщин $B_h(\rho)$:

$$B_s(\rho) = k^2(n-1)^2 B_h(\rho). \quad (4)$$

Поклавши $\rho = 0$, знаходимо також зв'язок між дисперсіями флуктуацій фази на екрані σ_s^2 і товщини шару σ_h^2 :

$$\sigma_s^2 = k^2(n-1)^2 \sigma_h^2. \quad (5)$$

Враховуючи, що, згідно з умовою задачі, $\sigma_h^2 = \text{Const}$, доходимо висновку, що й $\sigma_s^2 = \text{Const}$.

Для обчислення середнього поля скористаємося формулою (17.60):

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (6)$$

де $U_d(\vec{R}_p)$ – дифракційне значення поля в точці спостереження, яке, згідно з (17.57), дорівнює

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kA_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}(\vec{r})} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|}. \quad (7)$$

Знайдений вираз є остаточною відповіддю на перше питання задачі. Для конкретизації $U_d(\vec{R}_p)$ необхідно задати область інтегрування Σ_0 . Наприклад, якщо Σ_0 — це нескінченна площина, то, як було показано в задачі 1, у процесі інтегрування ми отримуємо результат:

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kA_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} d\vec{r} = A_0 e^{i(\bar{S}+kz_p)}. \quad (8)$$

Тепер, враховуючи знайдені значення середньої фази \bar{S} та її дисперсії σ_S^2 , середнє поле (6) у довільній точці за екраном визначається так:

$$\bar{U}(P) = U_0 \exp \left\{ ik \left[z_p + (n-1)\bar{h} \right] - \frac{k^2(n-1)^2 \sigma_h^2}{2} \right\}. \quad (9)$$

Перед тим, як переходити до другого питання задачі, розглянемо деякі співвідношення між статистичними характеристиками фази хвилі й товщин неоднорідного шару. Згідно з (4), обчислимо другу похідну від $B_S(\rho)$ в точці $\rho = 0$:

$$B_S''(0) = k^2(n-1)^2 B_h''(0). \quad (10)$$

За другими похідними $B_S''(0)$ і $B_h''(0)$ введемо до розгляду характерні розміри флуктуацій фази l_S і товщин l_h :

$$\frac{1}{l_S^2} = -\frac{B_S''(0)}{\sigma_S^2}, \quad \frac{1}{l_h^2} = -\frac{B_h''(0)}{\sigma_h^2}. \quad (11)$$

При цьому формулу (10) можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{\sigma_S^2}{l_S^2} = k^2(n-1)^2 \frac{\sigma_h^2}{l_h^2}. \quad (12)$$

З останньої рівності з урахуванням співвідношення для дисперсій (5) впливає, що $l_S \equiv l_h$, тобто характерні масштаби флуктуацій товщини шару і фази на виході з екрана збігаються.

Перейдемо тепер до визначення середньої інтенсивності поля, яка визначається виразом (17.90):

$$\bar{I}(\vec{R}_p) = \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{R}_p)^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} d\vec{r}. \quad (13)$$

Щоб визначити \bar{I} за цією формулою, у цій задачі необхідно знати дисперсію кутів розкиду променів σ_γ^2 на виході з шару (екрана). Ця дисперсія може бути виражена через дисперсію флуктуацій фази (див. формулу (17.80)):

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_S^2}{k^2 l_S^2}.$$

Отже, для того, щоб знайти σ_γ^2 , потрібно знати дисперсію σ_S^2 і радіус кореляції l_S випадкової фази. Враховуючи співвідношення (12), отримаємо

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2}. \quad (14)$$

З іншого боку, скориставшись визначенням l_h (11), перепишемо цей вираз у вигляді:

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2} = 2(n-1)^2 |B_h''(0)|. \quad (15)$$

Таким чином, шукана середня інтенсивність (13) визначається як

$$\bar{I}(\vec{R}_p) = \frac{I_0}{2\pi z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{(\vec{r}_p - \vec{r})^2}{2z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \right\} d\vec{r}. \quad (16)$$

Цей вираз є остаточною відповіддю на друге питання задачі, оскільки інтегрування у (16) можна виконати тільки при заданій формі екрана Σ_0 .

5. У скільки разів тропосферою Землі ослаблюється середнє поле сигналу, що передається із Землі на Місяць? Вважати, що товщина тропосфери $h(\vec{r})$ розподілена за нормальним законом із середнім значенням $\bar{h} = 10 \text{ км}$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma_h = 10^{-2} \bar{h}$, а коефіцієнт заломлення тропосфери n дорівнює 1,0001. Розрахунки провести для $\lambda = 10 \text{ см}$.

Розв'язок. Товщина тропосфери набагато менша за відстань між Землею і Місяцем. Тому тропосферу можна розглядати як фазовий екран і скористатися співвідношенням (17.60) для середнього поля

$$\bar{U}(\vec{R}_p) = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p),$$

де σ_s^2 – дисперсія флуктуацій фази хвилі на виході з тропосфери, а $U_d(\vec{R}_p)$ – поле у точці спостереження за відсутності випадкових збурень.

Отже, ослаблення середнього поля

$$N = \frac{U_d(\vec{R}_p)}{\bar{U}(\vec{R}_p)} = e^{\sigma_s^2/2}. \quad (1)$$

Згідно з формулою (5) попередньої задачі, маємо

$$\sigma_s^2 = k^2 (n-1)^2 \sigma_h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n-1)^2 \sigma_h^2. \quad (2)$$

Згідно з умовою задачі, $\sigma_h = 10^{-2} \bar{h} = 100 \text{ м}$, отже, $\sigma_h^2 = 10^4 \text{ м}^2$. Крім того, $n-1 = 10^{-4}$. Враховуючи ці оцінки, згідно з (2), маємо $\sigma_s^2/2 \approx 0,2$ і, відповідно до (1), отримуємо таке значення ослаблення: $N \approx 1,2$.

§ 18. Діаграма спрямованості дзеркальної антени з випадковими спотвореннями фази на апертурі

Як приклад використання отриманих у попередньому параграфі формул розглянемо вплив випадкових флуктуацій фази на діаграму спрямованості дзеркальної антени з параболічним відбивачем M (рис.18.1 а).

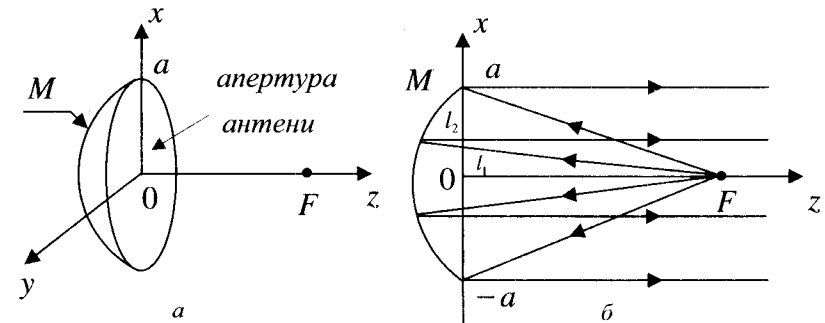


Рис. 18.1

Джерелом випромінювання є „точковий” опромінювач, розташований у фокусі ($r=0$, $z=F$) параболоїда обертання. Сферична хвиля, що падає із джерела, відбиваючись за законами геометричної оптики від параболічного дзеркала M , стає плоскою хвилею, фаза якої на апертурі $z=0$ є сталою величиною. Ця

властивість параболічного дзеркала є наслідком визначення параболоїда обертання. На рис. 18.16 зображено переріз параболоїда обертання у площині XOZ (площина рисунка). Рівняння параболі M у площині XOZ визначається як геометричне місце точок, для яких сума відстаней l_1 (від фокуса F до довільної точки кривої M) і l_2 (від точки M до прямої $z=0$) є сталою величиною: $l_1 + l_2 = l = \text{Const}$. Можна отримати всю сім'ю променів, обертаючи площину рисунка навколо осі OZ . Частина площини $z=0$, розташована всередині параболоїда обертання, називається **розкритом**, або **апертурою антени**. Для розглядуваної антени апертура являє собою круг радіусом $r = \sqrt{x^2 + y^2} = a$. Таким чином, довжини всіх променів, що вийшли з опромінювача і відбилися від дзеркала, виявляються сталими у всіх точках розкриття, тобто у площині розкриття фаза $S = kl$ є сталою величиною. Сформована таким чином плоска хвиля із обмеженим хвильовим фронтом, поширюючись у півпростір $z > 0$, дифрагує на апертурі $r \leq a$, в результаті чого й формується **діаграма спрямованості у дальній зоні**. У реальних умовах фаза S у площині апертури не є сталою величиною, а зазнає флуктуацій $\delta S(\vec{r})$. Причин цих флуктуацій може бути декілька. По-перше, неточності у виготовленні параболоїда призводять до відхилень $\delta z(\vec{r})$ його поверхні від розрахункової (див. рис. 18.2), у результаті чого хвиля набуває додаткового набігу фази $\delta S(\vec{r}) = 2k\delta z(\vec{r})$. По-друге, навіть при ідеально точно виготовленому дзеркалі ніколи не можна повністю усунути флуктуації показника заломлення середовища $\delta n(\vec{R})$ між опромінювачем і дзеркалом, які також призводять до додаткових набігів фази. У результаті, поле $U(\vec{r})$ у площині апертури ($z=0, r \leq a$) відрізняється від розрахункового $U_0 = A_0 e^{ikl} = \text{Const}$

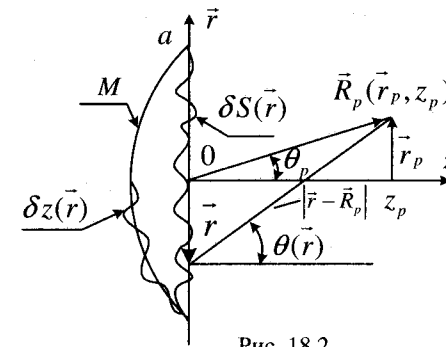


Рис. 18.2

змінним множником $e^{i\delta S(\vec{r})}$. Таким чином, у розкритті антени в реальних умовах наявне поле

$$U(\vec{r}) = U_0 e^{i\delta S(\vec{r})}, \quad U_0 = A_0 e^{ikl}. \quad (18.1)$$

Для розрахунку поля U у точці спостереження з радіус-вектором $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ (рис.18.2) скористаємося принципом Гюйгенса (17.20):

$$U(\vec{R}_p) = \frac{kU_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} e^{i\delta S(\vec{r})} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (18.2)$$

18.1. Обчислення середнього поля

Якщо флуктуації фази на апертурі $\delta S(\vec{r})$ статистично однорідні й розподілені за нормальним законом, то середнє (когерентне) поле $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ у хвильовій зоні ($kR_p \gg 1$) визначається формулою (17.60)

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (18.3)$$

де $U_d(\vec{R}_p)$ – незбурене (дифракційне) поле, створюване ідеальною антеною:

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kU_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (18.4)$$

Нехай точка спостереження $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ достатньо віддалена від антени і знаходиться поблизу її осі (**малокутове наближення**). У цьому випадку виконуються нерівності $r/z_p \leq a/Z_p \ll 1$, $r_p/z_p \ll 1$, і у вихідній формулі (18.4) можна виконати деякі спрощення:

$$\operatorname{tg} \theta_p \approx \theta_p \approx \frac{r_p}{z_p} \ll 1, \quad (18.5 \text{ а})$$

$$\operatorname{tg} \theta(\vec{r}) \approx \theta(\vec{r}) \approx \frac{|\vec{r}-\vec{r}_p|}{z_p} \leq \frac{\max(r_p, a)}{z_p} \ll 1, \quad \cos \theta(\vec{r}) \approx 1; \quad (18.5 \text{ б})$$

$$|\vec{r}-\vec{R}_p| = \sqrt{z_p^2 + (\vec{r}-\vec{r}_p)^2} \approx z_p + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_p)^2}{2z_p}. \quad (18.5 \text{ в})$$

Після виконаних спрощень у полярних координатах $\vec{r} = (r, \varphi)$, $\vec{r}_p = (r_p, \varphi_p)$ формула (18.4) подається у вигляді

$$\begin{aligned} U_d(\vec{R}_p) &\approx \frac{kU_0}{2\pi i z_p} e^{ik(z_p + r_p^2/2z_p)} \int_0^a e^{ikr^2/2z_p} r dr \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -ik \frac{rr_p}{z_p} \cos(\varphi - \varphi_p) \right\} d\varphi = \\ &= \frac{kU_0}{iz_p} e^{ik(z_p + r_p^2/2z_p)} \int_0^a e^{ikr^2/2z_p} J_0 \left(k \frac{r_p}{z_p} r \right) r dr. \end{aligned} \quad (18.6)$$

При обчисленні інтеграла за dr обмежимося областю дальньої зони (зони Фраунгофера) відносно антени, коли під знаком інтеграла можна покласти $e^{ikr^2/2z_p} \approx 1$. Це припустимо, якщо виконується нерівність

$$\frac{kr^2}{2z_p} \leq \frac{ka^2}{2z_p} \ll 1. \quad (18.7)$$

Нерівність (18.7) можна записати також у вигляді

$$\theta_a \ll \theta_d, \quad (18.8)$$

де $\theta_a = a/z_0$ — кут, під яким антенний розкриття видно з точки спостереження, а $\theta_d = 1/ka \sim \lambda/a$ — кут дифракції на апертурі антени. Врахувавши нерівність (18.7) і виконавши заміну змінних $x = kr\theta_p = kr \frac{r_p}{z_p}$, отримаємо

$$U_d(\vec{R}_p) \approx \frac{kU_0}{iz_p} \cdot \frac{1}{(k\theta_p)^2} \cdot e^{ikz_p(1+\theta_p^2/2)} \int_0^{ka\theta_p} x J_0(x) dx. \quad (18.9)$$

Невизначений інтеграл за dx виражається через функцію Бесселя першого роду першого порядку — $J_1(x)$:

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x). \quad (18.10)$$

Перелічимо деякі основні властивості функції $J_1(x)$: $J_1(x)$ функція непарна, обмежена за модулем ($|J_1(x)| < 1$), при малих значеннях аргументу ($x \ll 1$) подається у вигляді $J_1(x) \approx x/2$, має асимптотичне зображення при великих значеннях x :

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right), \quad x \gg 1. \quad (18.11)$$

Крім того, при дійсному x функція $J_1(x)$ має нескінченну кількість дійсних нулів: $J_1(x) = 0$ у точках $x = x_m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Наведемо наближені значення кількох перших нулів: $x_1 = 0$; $x_2 \approx 3,83$; $x_3 \approx 7,02$; $x_4 \approx 10,17$.

Враховуючи (18.10), обчислення (18.9) приводить до такого результату:

$$U_d(\vec{R}_p) \approx U_P \cdot \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right], \quad (18.12)$$

де параметр $t = ka\theta_p$, а

$$U_P = U_0 \frac{ka^2}{2iz_p} e^{ikz_p(1+\theta_p^2/2)}. \quad (18.13)$$

Графік залежності, нормованої на $|U_P|$ амплітуди $|U_d|$ від безрозмірного параметра t , зображено на рис. 18.3 суцільною лінією. Зображена функція називається **діаграмою спрямованості (ДС) антени "за полем" або "за амплітудою"**.

Згідно з формулою (18.3), напруженість середнього (когерентного) поля $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ відрізняється від $U_d(\vec{R}_p)$ тільки сталим множником $\langle e^{i\delta S} \rangle$, який для нормального розподілу флукутації фази δS дорівнює $e^{-\sigma_s^2/2}$. Графік залежності амплітуди середнього поля $|\langle U(\vec{R}_p) \rangle|$ від параметра $t = ka\theta_p$ зображено на тому ж рис. 18.3 штриховою лінією. Видно, що ДС антени за середнім полем так само, як і для ідеальної антени ($\sigma_s = 0$), має „пелюстковий” характер. Максимум „головного” пелюстка

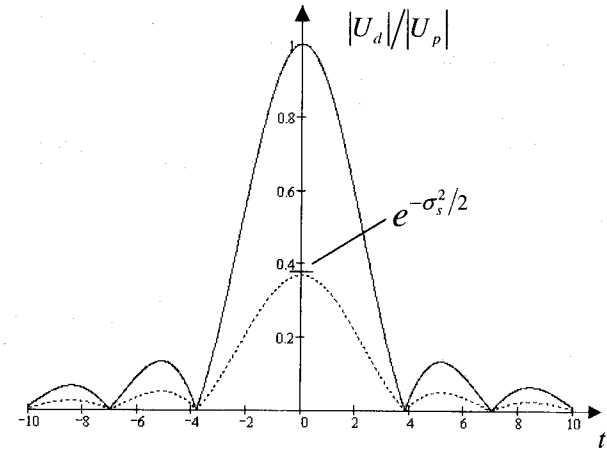


Рис. 18.3

спрямовано вздовж осі антени, а його кутова ширина $\Delta\theta_p$ може бути визначена за першим нулем функції $J_1(t)$. Поклавши $\Delta t = ka\Delta\theta_p \approx 4$, отримаємо $\Delta\theta_p \approx \frac{4}{ka}$, що збігається з кутом дифракції $\theta_d \sim \lambda/a$: $\Delta\theta_p \approx \theta_d$.

18.2. Визначення середньої інтенсивності

Для ідеальної антени у дальній зоні розподіл інтенсивності за кутами, згідно з (18.12), має такий вигляд:

$$I_d(\vec{R}_p) = U_d(\vec{R}_p) U_d^*(\vec{R}_p) \approx I_{d \max} \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right]^2, \quad (18.14)$$

де

$$I_{d \max} = |U_P|^2 = \left(\frac{ka^2}{2z_p} \right)^2 A_0^2 \quad (18.15)$$

максимальне значення інтенсивності, що досягається при

$t=0$ ($\theta_p=0$). Відношення $I_d/I_{d \max}$ визначає ДС ідеальної антени за інтенсивністю.

Подамо тепер поле у точці спостереження $U(\vec{R}_p)$ у вигляді регулярної $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ і флюктууючої $\delta U(\vec{R}_p)$ складових:

$$U(\vec{R}_p) = \langle U(\vec{R}_p) \rangle + \delta U(\vec{R}_p), \quad (18.16)$$

де, за визначенням, $\langle \delta U(\vec{R}_p) \rangle = 0$. За допомогою (18.16) побудуємо вираз для середньої інтенсивності:

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \langle U(\vec{R}_p) U^*(\vec{R}_p) \rangle = \\ &= \langle |U(\vec{R}_p)|^2 \rangle + \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (18.17)$$

Доданок $\langle |U| \rangle^2$ являє собою інтенсивність когерентної складової — $I_{\text{ког}} = \langle |U| \rangle^2$. З наведених вище формул (18.3) і (18.12) випливає, що залежність $I_{\text{ког}}$ від кута θ_p визначається ДС за інтенсивністю ідеальної антени (18.14):

$$I_{\text{ког}}(\vec{R}_p) = \langle |U(\vec{R}_p)|^2 \rangle = e^{-\sigma_s^2} I_d(\vec{R}_p) = I_{\text{ког} \max} \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right]^2. \quad (18.18)$$

Тут

$$I_{\text{ког} \max} = I_{d \max} e^{-\sigma_s^2} = \left(\frac{ka^2}{2z_p} \right)^2 A_0^2 e^{-\sigma_s^2} \quad (18.19)$$

максимальне значення когерентної складової інтенсивності, що досягається для кута спостереження $\theta_p = 0$ ($t=0$).

Згідно з (18.18), $I_{\text{ког}}(\vec{R}_p)$ відрізняється від $I_d(\vec{R}_p)$ тільки

сталім множником $e^{-\sigma_s^2}$. Зменшення інтенсивності когерентної складової (середнього поля) легко пояснюється тим, що за рахунок флюктуації фази δS у розкритті антени хвилі, що приходять у точку спостереження \vec{R}_p , також мають випадкову фазу, усереднення за якою і призводить до зменшення інтерференційних максимумів поля у $e^{-\sigma_s^2}$ разів. Зазначимо важливий факт: $I_{\text{ког}} \sim a^4$, що є наслідком когерентного додавання полів. Справді, при когерентному додаванні полів у точці спостереження підсумовуються хвилі, що приходять від усіх елементарних площадок апертури (або від різних частин дзеркала). Результуюче поле при цьому виявляється пропорційним до площі всієї апертури антени, тобто $\langle U \rangle \sim U_d \sim a^2$, а $I_{\text{ког}} = \langle U \rangle^2 \sim a^4$.

Другий доданок у формулі (18.17) являє собою інтенсивність некогерентної компоненти — $I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) = \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle$. При аналізі цього доданка розглянемо найцікавіший випадок, коли флюктуації фази δS у розкритті антени є великими ($\sigma_s^2 \gg 1$). При сильних флюктуаціях фази в розкритті когерентна складова інтенсивності, згідно з (18.18), мала ($I_{\text{ког}} \rightarrow 0$) і нею можна взагалі знехтувати, тобто у формулі (18.17) наближено вважати, що некогерентна складова практично збігається із середньою інтенсивністю:

$$I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) = \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle \approx \langle I(\vec{R}_p) \rangle. \quad (18.20)$$

При обчисленні $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$ ми могли б відразу скористатися принципом Гюйгенса для інтенсивності у вигляді (17.81),

переписавши формулу для дальньої зони ($kr^2/2z_p \leq ka^2/2z_p \ll 1$) і відсутності регулярної рефракції ($\langle \bar{\gamma}(\bar{r}) \rangle = 0$). Нескладно показати, що цей перехід легко здійснити, якщо в індикатрисі розсіювання (17.82) просто покласти $\langle \bar{f}(\bar{r}) \rangle = 0$, після чого вона набуває вигляду

$$F(\bar{r}) = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\bar{r}_p - \langle \bar{f}(\bar{r}) \rangle]^2 \right\} \approx \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{\theta_p^2}{\sigma_\gamma^2} \right\}. \quad (18.21)$$

Отримаємо той самий результат, обчисливши $\langle I(\bar{R}_p) \rangle$ дещо інакше, ніж у попередньому параграфі. З урахуванням спрощень (18.5) і нерівності (18.7) перепишемо формулу (18.2) для дальньої зони в малокутовому наближенні:

$$U(\bar{R}_p) \approx \frac{kU_0}{2\pi i z_p} e^{ik(z_p + r_p^2/2z_p)} \int_{-\infty}^{\infty} M(\bar{r}) e^{i\delta S(\bar{r})} e^{-ik \frac{\bar{r} \bar{r}_p}{z_p}} d\bar{r}. \quad (18.22)$$

Ми розтягнули границі інтегрування від $-\infty$ до ∞ , проте ввели так звану функцію зіниці — $M(\bar{r})$, яка, за визначенням, дорівнює

$$M(\bar{r}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } r \leq a; \\ 0, & \text{якщо } r > a. \end{cases} \quad (18.23)$$

Для другого статистичного моменту (середньої інтенсивності) маємо

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{R}_p) \rangle &= \langle U(\bar{R}_p) U^*(\bar{R}_p) \rangle \approx \\ &\approx \left(\frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r}'' M(\bar{r}') M(\bar{r}'') e^{-ik \frac{\bar{r}_p}{z_p} (\bar{r}' - \bar{r}'')} \langle e^{i[\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')]} \rangle. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Аналогічно до попереднього параграфу, виконаємо деякі спрощення.

1. Для статистично однорідного й ізотропного поля флуктуацій $\delta S(\bar{r})$ при $\sigma_S^2 \gg 1$, згідно з (17.68), можна записати:

$$\langle e^{i[\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')]} \rangle = e^{-\frac{1}{2} D_S(\bar{r}' - \bar{r}'')} \approx \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} (\bar{r}' - \bar{r}'')^2 \right\}, \quad (18.25)$$

де $\sigma_S^2 = \text{const}$, а l_S — характерний розмір неоднорідностей фази в розкриві антени.

2. З урахуванням (18.25) перепишемо (18.24) у сумарних — $\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}' + \bar{r}'')$ і різницевих — $\bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}''$ координатах:

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{R}_p) \rangle &\approx \left(\frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} M(\bar{r} + \bar{\rho}/2) M(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} \rho^2 - i \frac{k}{z_0} \bar{r}_p \bar{\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (18.26)$$

3. Характерний розмір області $\rho = \rho_{ef}$, який дає основний внесок в інтеграл за $d\bar{\rho}$, можна оцінити з умови $\sigma_S^2 \rho_{ef}^2 / 2l_S^2 \approx 1$, звідки отримуємо $\rho_{ef} \approx l_S / \sigma_S$. Якщо $\rho_{ef} \ll a$ ($l_S \ll \sigma_S a$), то у функціях зіниці $M(\bar{r} \pm \bar{\rho}/2)$ можна знехтувати залежністю від змінної $\bar{\rho}$:

$$M(\bar{r} + \bar{\rho}/2) M(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \approx M^2(\bar{r}) = M(\bar{r}). \quad (18.27)$$

У результаті виконаних спрощень ми приходимо до такого виразу для середньої інтенсивності:

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle \approx \left(\frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(\bar{r}) d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} \rho^2 - i \frac{k}{z_p} \bar{r}_p \bar{\rho} \right\}. \quad (18.28)$$

Видно, що чотирикратний інтеграл розпався на добуток двох подвійних, причому інтеграл за $d\vec{r}$ дорівнює площі апертури антени — $\Sigma_0 = \pi a^2$, а обчислення інтеграла за $d\vec{\rho}$ було проведене у попередньому параграфі (див. (17.73)). У результаті, після обчислень отримуємо

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2 a^2}{z_p^2} \cdot \frac{k^2 l_S^2}{2\sigma_S^2} \exp \left\{ - \frac{k^2 l_S^2}{2\sigma_S^2} \theta_p^2 \right\}. \quad (18.29)$$

Зауважимо, що такий самий вираз ми б отримали, якби скористалися формулою (17.81) з індикатрисою розсіювання у дальній зоні у вигляді (18.21).

З урахуванням зв'язку між дисперсіями флуктуацій фази

$$\sigma_S^2 = \langle \delta S^2 \rangle \text{ і кутів приходу } \sigma_\gamma^2 = \langle (\delta \gamma)^2 \rangle : \sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_S^2}{k^2 l_S^2} \quad (\text{див.}$$

(17.80)) некогерентну складову інтенсивності можна подати в такому остаточному вигляді:

$$I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) \approx I_{\text{нек max}} e^{-\theta_p^2 / \sigma_\gamma^2}, \quad (18.30)$$

де

$$I_{\text{нек max}} = \frac{a^2 A_0^2}{\sigma_\gamma^2 z_p^2} \quad (18.31)$$

максимальне значення некогерентної складової інтенсивності, що досягається при куті спостереження $\theta_p = 0$.

Висновки

Із порівняння результатів розрахунку дифракційних і середніх полів, а також середніх інтенсивностей у фокальній площині ідеальної лінзи з неоднорідностями (див. задачу 3 попереднього параграфу) і в дальній зоні неспокерованої антени з випадковими

флуктуаціями фази у розкритті видно, що формули з точністю до нормувальних коефіцієнтів повністю збігаються. Цей факт часто використовують для експериментального визначення ДС антени. За визначенням, ДС (за полем або за інтенсивністю) формується в дальній зоні антени, що ускладнює вимірювання через великі відстані. Проте, якщо ми сфокусуємо антену на певну (прийнятну) відстань (для дзеркальних антен це можна зробити, наприклад, шляхом невеликого зміщення опромінювача вздовж осі OZ з точки фокусу дзеркала) і поміряємо розподіл полів та інтенсивності у фокальній площині, то, цим самим, визначимо ДС антени у дальній зоні.

Згідно з (18.30), ДС антени за інтенсивністю при нехтуванні когерентною компонентою поля є гауссоїдою, кутова ширина якої $\Delta\theta_p$ не залежить від розміру антени a і збігається з дисперсією кутів виходу променів з апертури σ_γ : $\Delta\theta_p \approx \sigma_\gamma$.

Слід звернути увагу на те, що $I_{\text{нек max}}$ виявляється пропорційною до площі апертури антени ($I_{\text{нек max}} \sim a^2$), а не до квадрата площі, як це мало місце для когерентної компоненти ($I_{\text{ког max}} \sim a^4$). Звідси випливає, що якими б великими не були флуктуації фази σ_S^2 і, отже, наскільки малою б не була когерентна компонента поля $I_{\text{ког}}$, при достатньо великих розмірах антени a ($a > a_{кр}$) все одно виконуватиметься нерівність $I_{\text{ког}} > I_{\text{нек}}$.

З рівності $I_{\text{ког max}} = I_{\text{нек max}}$, згідно з формулами (18.19) і (18.31), визначимо величину $a_{кр}$:

$$a_{кр} = \sqrt{2} \frac{l_s}{\sigma_s} e^{\sigma_s^2/2}. \quad (18.32)$$

Таким чином, при $a < a_{кр}$ когерентна компонента інтенсивності $I_{нек}(\bar{R}_p)$ менша за некогерентну, і ширина $\Delta\theta_p$ ДС антени за інтенсивністю визначається тільки дисперсією кутів виходу променів σ_γ^2 і не залежить від розміру антени a (і довжини хвилі λ , якщо флуктуації фази δS пов'язані тільки з нерівностями δz дзеркала антени, оскільки у цьому випадку $\sigma_\gamma^2 \sim \sigma_z^2/l_s^2$). Ширина ДС антени досить великих лінійних розмірів, для яких виконується зворотна нерівність $a > a_{кр}$, визначається когерентною компонентою інтенсивності і збігається з кутом дифракції $\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$.

Якісну залежність $\Delta\theta_p$ від a при $\sigma_s^2 \gg 1$ наведено на рис. 18.4, де виділено три області:

1. Радіус антени a менший, ніж характерний розмір неоднорідностей l_s у розкритті ($a < l_s$). Спотворення фази $\delta S(\bar{r})$ на апертурі практично не впливають на ДС антени, оскільки розмір антени значно менший за радіус кореляції флуктуацій фази, і в межах апертури фаза поля може вважатися сталою. Ширина ДС антени у цьому випадку наближено збігається з кутом дифракції ($\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$).

2. Радіус антени — у межах $l_s < a < a_{кр}$. У цьому діапазоні при $\sigma_s^2 \gg 1$ когерентна компонента мала порівняно з некогерентною, і ширина ДС антени не залежить від розміру антени a ($\Delta\theta_p \approx \sigma_\gamma$).

3. Надвеликі розміри антени ($a > a_{кр}$). Когерентна компонента інтенсивності стає більшою, ніж некогерентна.

ДС розпочинає звужуватися зі збільшенням a , і її ширина прямує до кута дифракції ($\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$).

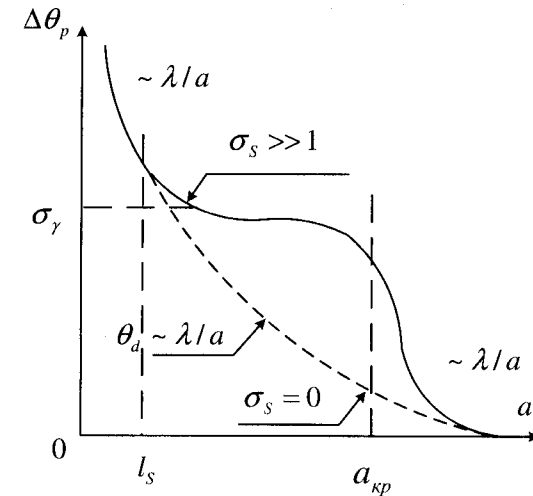


Рис. 18.4

ЗАДАЧІ

1. Параболічна антена працює на хвилі з $\lambda = 10$ см. Яка допустима похибка у виготовленні параболоїда, якщо допускається зменшення поля в e разів. Вважати, що випадкові відхилення форми рефлектора від параболоїда розподілені за нормальним законом.

Розв'язок. Оскільки флуктуації фази у площині апертури антени викликані похибками виготовлення поверхні відбивача антени δz , то, з урахуванням подвійного шляху хвилі від випромінювача до відбивача і назад до апертури, маємо

$$\delta S = 2k\delta z, \quad \sigma_s^2 = 4k^2\sigma_z^2. \quad (1)$$

З лінійності зв'язку між δS і δz випливає, що флуктуації фази δS так само, як і флуктуації відхилень форми поверхні δz , розподілені

за нормальним законом. Для нормально розподілених флуктуацій фази у розкритті середнє поле у хвильовій зоні визначається виразом (18.3)

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p). \quad (2)$$

Звідси видно, що середнє поле $\langle U \rangle$ відрізняється від дифракційного U_d тільки множником $\exp(-\sigma_s^2/2)$. Тому ослаблення поля дорівнює

$$N = \frac{U_d(\vec{R}_p)}{\bar{U}(\vec{R}_p)} = e^{\frac{\sigma_s^2}{2}}. \quad (3)$$

Зменшення поля у e разів можливе при $\sigma_s^2 = 2$. Отже, для заданих умов задачі можна записати

$$2k^2\sigma_z^2 = 1, \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}k}.$$

Враховуючи, що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ і підставляючи задане значення $\lambda = 10 \text{ см}$, знаходимо допустиму середньоквадратичну похибку виготовлення відбивача $\sigma_z = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi} \approx 1,1 \text{ см}$.

2. Випадкові відхилення форми поверхні, що виникають при виготовленні відбивача параболічної антени, розподілені за нормальним законом із середньоквадратичним відхиленням $\sigma_z = 1 \text{ мм}$. На якій довжині хвилі амплітуда середнього поля у напрямку максимуму випромінювання зменшиться у e разів?

Відповідь: $\lambda = 8,9 \text{ мм}$.

РОЗДІЛ V РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ НА ВИПАДКОВО НЕРІВНИХ ПОВЕРХНЯХ

§ 19. Розсіювання хвиль на слабкошорсткій поверхні

При поширенні радіохвиль у природних умовах часто необхідно враховувати не тільки їх розсіювання на неоднорідностях показника заломлення, а й перетворення їх на межах поділу різних середовищ. Наприклад, відбивання радіохвиль від земної поверхні призводить до багатопроменевого характеру поширення, коли у точку спостереження приходить не тільки „пряма” хвиля, а й розсіяні на поверхні „вторинні” хвилі. У результаті інтерференції „прямих” і „вторинних” хвиль спостерігаються флуктуації параметрів радіосигналів, що, як правило, погіршує характеристики радіотехнічних систем. У той самий час послідовні відбивання радіохвиль від земної поверхні та від іоносфери роблять можливим поширення радіохвиль навколо Землі на тисячі та десятки тисяч кілометрів, тобто відіграють у певному розумінні позитивну роль. Статистичні параметри такого каналу зв'язку також багато в чому визначаються характером відбивання і розсіювання хвиль на поверхні суші та акваторій. У радіолокації при оцінюванні відбивальних властивостей реальних цілей доводиться враховувати природну шорсткість їхніх поверхонь. У радіоастрономії шорсткість поверхні небесних тіл є, по суті, єдиним чинником, що дає змогу досліджувати поверхневі характеристики радіолокаційними методами. Дослідження земної поверхні з борту літальних, у тому числі й космічних апаратів методами дистанційного радіозондування також ґрунтується на відмінностях у здатності до відбивання і розсіювання ділянок земної поверхні, що відрізняються як характером шорсткості, так і електродинамічними параметрами (діелектричною проникністю, провідністю та ін.). Такі самі завдання виникають і в оптичному, і

навіть у рентгенівському діапазоні довжин хвиль, оскільки реальні межі поділу середовищ завжди мають „природну” шорсткість з широким спектром масштабів (від атомних мікроскопічних розмірів до великих нерівностей, наприклад, рельєфу земної поверхні або хвиль на поверхні океану). З аналогічними проблемами доводиться стикатися у задачах акустики, наприклад, розсіювання звуку на поверхні поділу різних середовищ призводить до явища реверберації. У гідроакустиці суттєвими є ефекти відбивання звуку від водної поверхні і дна океану, плаваючого льоду та ін.

Щодо математики всі перелічені вище фізичні задачі зводяться до розв'язання рівнянь Максвелла або простішого хвильового рівняння (наприклад, для задач акустики) з граничними умовами, які мають задовольняти хвильові поля на поверхні поділу двох різних електродинамічних середовищ. Далі ми обмежимося розглядом задачі про розсіювання скалярної хвилі на нерівностях у середньому плоскій поверхні, яку завжди можна сумістити з координатною площиною $z=0$. Відхилення реальної поверхні від цієї площини (рис. 19.1) будемо описувати рівнянням $z=\xi(\vec{r})$, де $\vec{r}=(x,y)$, а $\xi(\vec{r})$ – випадкова функція двох змінних (випадкове поле підвищень), в середньому дорівнює нулю: $\langle \xi(\vec{r}) \rangle = 0$.

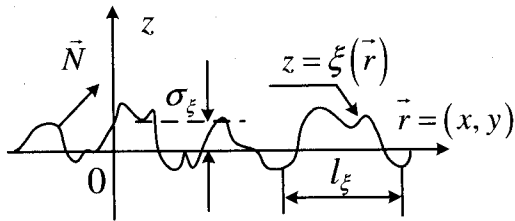


Рис. 19.1

При розв'язанні широкого класу задач (наприклад, розсіювання радіохвиль або звуку на морській поверхні) функція ξ може залежати також і від часу t : $\xi = \xi(\vec{r}, t)$.

19.1. Граничні умови

Із курсу електродинаміки відомо, що на межі поділу двох середовищ $z=\xi(\vec{r}, t)$ при відсутності поверхневих струмів мають бути неперервними тангенціальні (дотичні до поверхні) компоненти напруженостей електричних \vec{E}_t і магнітних \vec{H}_t полів, а також нормальні компоненти індукцій $D_N = (\vec{D}\vec{N})$ і $B_N = (\vec{B}\vec{N})$, де \vec{N} – одиничний вектор нормалі до межі поділу. Не обмежуючи суттєво загальності, верхній півпростір $z > \xi(\vec{r}, t)$, де розташовані джерела хвильового поля, можна вважати вакуумом ($\epsilon=1$), а нижній $z < \xi(\vec{r}, t)$ – однорідним середовищем із довільним значенням комплексної діелектричної проникності $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$, що залежить, загалом, від частоти випромінювання ω . Якщо форма межі поділу не залежить від часу: $\xi(\vec{r}, t) = \xi(\vec{r})$, то виходячи з принципу суперпозиції достатньо розглядати тільки монохроматичні поля $\vec{E}, \vec{H} \sim e^{-i\omega t}$, опускаючи залежний від t експоненціальний множник. Електромагнітна хвиля, що падає з вакууму на межу поділу $z = \xi(\vec{r})$, частково відбивається, а частково, заломлюючись, проникає всередину середовища. При цьому, якщо середовище має велику провідність (велика уявна складова ϵ''), хвиля всередині середовища швидко згасає. Характерний масштаб згасання визначається скін-шаром $\delta \sim \lambda / \sqrt{|\epsilon|}$. Для середовищ з $|\epsilon| \gg 1$ можна наближено вважати, що поле всередині середовища взагалі відсутнє, і замість „двосторонніх” граничних умов, що пов'язують поля по обидва боки від межі поділу, можна скористатися **імпедансною граничною умовою** (М.О. Леонтович, 1948 р.), що пов'язує між собою \vec{E} та \vec{H} на границі тільки з боку вакууму:

$$\vec{E}_t = \eta [\vec{N} \vec{H}_t]. \quad (19.1)$$

Введена тут величина $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ називається **поверхневим імпедансом**. Далі ми будемо розглядати тільки середовища, в яких магнітна проникність μ вважається дорівняною до одиниці й, отже, $\eta = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Наближені **граничні умови Леонтовича** (19.1) можуть застосовуватися для середовищ, у яких $|\eta| \ll 1$ і має місце сильний скін-ефект, коли товщина скін-шару δ є малою порівняно з характерними розмірами поверхні в усіх напрямках. Їх зручність полягає в тому, що при розв'язанні задачі розсіювання хвилі, що падає на таку поверхню згори, поле у нижньому середовищі $z < \xi(\vec{r})$ можна взагалі не розглядати, а розв'язувати хвильові рівняння тільки у вакуумі $z > \xi(\vec{r})$ з граничною умовою (19.1). Зокрема, із (19.1) випливає, що у граничному випадку ідеально провідної поверхні, коли $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ і, отже, $|\eta| \rightarrow 0$, тангенціальна компонента електричного поля \vec{E}_t на поверхні перетворюється на нуль:

$$\vec{E}_t \Big|_{z=\xi(\vec{r})} = 0. \quad (19.2)$$

19.2. Побудова наближеного розв'язку

Як і раніше, для простоти ми розглядатимемо дифракцію не векторних електромагнітних хвиль (\vec{E}, \vec{H}) , а скалярного хвильового поля $U(\vec{R})$, що при $z > \xi(\vec{r})$ задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)U(\vec{R}) = 0 \quad (19.3)$$

і найпростішу граничну умову на поверхні поділу $z = \xi(\vec{r})$:

$$U(\vec{R}) \Big|_{z=\xi(\vec{r})} = U[\vec{r}, z = \xi(\vec{r})] = 0. \quad (19.4)$$

В акустиці в ролі $U(\vec{R})$ звичайно виступає потенціал швидкості (звуковий тиск), а поверхня, на якій виконується гранична умова (19.4), називається „**абсолютно м'якою**” на відміну від „**абсолютно жорсткої**”, на якій має місце гранична умова

$$\left. \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right|_{z=\xi(\vec{r})} = 0. \quad (19.5)$$

В електромагнітній задачі граничним умовам (19.4) і (19.5) відповідає **ідеально провідна поверхня** $(\vec{E}_t = 0)$ і **поверхня ідеального магнетика** $(\vec{H}_t = 0)$.

Загальних аналітичних методів розв'язання рівняння (19.3) з граничними умовами, заданими на поверхні довільної форми (навіть у найпростіших випадках абсолютно м'якої або абсолютно жорсткої поверхні) не існує. Тому доводиться застосовувати або чисельні, або різні наближені методи. У цьому розділі як приклад розглянемо розсіювання скалярного хвильового поля $U(\vec{R})$ на шорсткій абсолютно м'якій поверхні з малими нерівностями, коли можна скористатися методом збурень.

Якщо величина $\xi(\vec{r})$ достатньо мала (справжній зміст безрозмірного малого параметра ми встановимо пізніше), то ліву частину граничної умови (19.4) можна розкласти в ряд Тейлора за степенями $\xi(\vec{r})$ і обмежитися кількома першими членами ряду:

$$U[\vec{r}, z = \xi(\vec{r})] = U(\vec{r}, 0) + \xi(\vec{r}) \left. \frac{\partial U(\vec{r}, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \left. \frac{\partial^2 U(\vec{r}, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots = 0. \quad (19.6)$$

Уявимо собі тепер хвильове поле $U(\vec{R})$ у вигляді суми відомого (заданого) падаючого на поверхню поля $U_{nad}(\vec{R})$ і шуканого відбитого (розсіяного) поля $U_{відб}(\vec{R})$:

$$U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_{відб}(\vec{R}), \quad (19.7)$$

яке будемо шукати у вигляді ряду теорії збурень:

$$U_{відб} = U_0 + U_1 + \dots + U_m + \dots, \quad (19.8)$$

де $U_m \sim \xi^m$. Підставляючи $U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_{відб}(\vec{R})$ в (19.6) і користуючись для $U_{відб}(\vec{R})$ поданням (19.8), отримаємо такий вид граничної умови для абсолютно м'якої поверхні:

$$\begin{aligned} & (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots) \Big|_{z=0} + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots) \Big|_{z=0} + \\ & + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots) \Big|_{z=0} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Зберемо разом члени одного порядку малості за ξ та вимагатимемо, щоб умова (19.9) задовольнялася у кожному порядку, незалежно від інших. У результаті з (19.9) отримуємо систему пов'язаних між собою (рекурентних) граничних умов для полів U_m , заданих, проте, вже не на нерівній поверхні, а на площині $z=0$:

$$(\xi^0) \quad [U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0} = 0, \quad (19.10 \text{ а})$$

$$(\xi^1) \quad \left[U_1(\vec{R}) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} (U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})) \right]_{z=0} = 0, \quad (19.10 \text{ б})$$

$$(\xi^2) \quad \left[U_2(\vec{R}) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} U_1(\vec{R}) + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})) \right]_{z=0} = 0. \quad (19.10 \text{ в})$$

Припустимо тепер, що кожне з полів U_{nad} , U_0 , U_1 та ін. задовольняє рівняння Гельмгольца (19.3). В силу принципу суперпозиції повне поле $U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R}) + U_1(\vec{R}) + \dots$ також задовольнятиме це рівняння. В результаті поля U_0 , U_1 та ін. можна знаходити, послідовно розв'язуючи рівняння Гельмгольца з відповідними граничними умовами (19.10).

Наближення нульового порядку

У нульовому порядку за ξ , виходячи із викладеного, ми маємо розв'язати наступну задачу.

$$\begin{cases} (\Delta_{\vec{R}} + k^2) U_0(\vec{R}) = 0, \\ U_0(\vec{r}, 0) = -U_{nad}(\vec{r}, 0). \end{cases} \quad (19.11)$$

Видно, що задача знаходження поля U_0 звелася до задачі про відбивання падаючої хвилі U_{nad} від площини $z=0$, на якій значення U_0 виражається через відоме (задане) поле U_{nad} (19.10 а). Як падаюче поле виберемо плоску монохроматичну хвилю з амплітудою A_0 :

$$U_{nad}(\vec{R}) = A_0 e^{i\vec{k}_0 \vec{R}} = A_0 e^{i(\vec{k}_{0\perp} \vec{r} + k_{0z} z)}. \quad (19.12)$$

Тут уведені тангенціальна $\vec{k}_{0\perp}$ і нормальна $\vec{k}_{0z} = k_{0z} \vec{e}_z$ компоненти хвильового вектора \vec{k}_0 падаючої хвилі ($\vec{k}_0 = \vec{k}_{0\perp} + \vec{k}_{0z}$).

Спрямуємо вісь OX декартової системи координат XYZ уздовж тангенціальної складової $\vec{k}_{0\perp}$ хвильового вектора \vec{k}_0

(рис. 19.2). У цьому випадку \vec{k}_0 буде лежати в площині XOZ (її називають **площиною падіння**), а його проекції на осі вибраної системи координат будуть дорівнювати $\vec{k}_{0\perp} = k_{0\perp}\vec{e}_x$, $\vec{k}_{0z} = k_{0z}\vec{e}_z$, де $k_{0\perp} = k \sin \theta_0$, $k_{0z} = -k \cos \theta_0$, θ_0 — кут падіння.

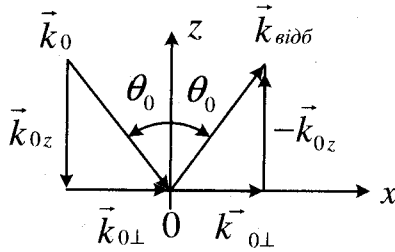


Рис. 19.2

Згідно з законом відбивання хвилі від плоскої межі поле U_0 буде подаватися також плоскою хвилею з хвильовим вектором \vec{k}_{vib} , що лежить у тій самій площині, що й \vec{k}_0 (площині падіння XOZ). При цьому тангенціальна компонента \vec{k}_{vib} збігається з $\vec{k}_{0\perp}$, а нормальна протилежна за знаком \vec{k}_{0z} ($\vec{k}_{vib} = \vec{k}_{0\perp} - \vec{k}_{0z}$). Таким чином поле U_0 подається в такому вигляді:

$$U_0(\vec{R}) = A_{vib} e^{i\vec{k}_{vib}\vec{R}} = A_{vib} e^{i(\vec{k}_{0\perp}\vec{R} - k_{0z}z)}. \quad (19.13)$$

Тут через A_{vib} позначена амплітуда відбитої хвилі. Підставляючи (19.12) і (19.13) у граничну умову (19.10 а), отримаємо

$$A_{vib} e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}} = -A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}}, \quad (19.14)$$

звідки випливає, що $A_{vib} = -A_0$.

Таким чином, розв'язок задачі у наближенні нульового порядку має вигляд

$$U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R}) = A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}} (e^{ik_{0z}z} - e^{-ik_{0z}z}). \quad (19.15)$$

Наближення першого порядку

Для знаходження відбитого поля першого порядку $U_1(\vec{R})$ ми маємо розв'язати рівняння Гельмгольца з граничними умовами (19.10 б):

$$\begin{cases} (\Delta_{\vec{R}} + k^2) U_1(\vec{R}) = 0, \\ U_1(\vec{r}, 0) = -\xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} [U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0}. \end{cases} \quad (19.16)$$

Користуючись знайденим розв'язком (19.15), визначимо значення поля U_1 на площині $z = 0$:

$$\begin{aligned} U_1(\vec{r}, 0) &= -\xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} [U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0} = \\ &= -2ik_{0z} \xi(\vec{r}) A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}}. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Із (19.16) і (19.17) видно, що задача знаходження $U_1(\vec{R})$ звелася до визначення поля U_1 у довільній точці спостереження $\vec{R} = \vec{R}_p$, що перебуває у верхньому півпросторі (див. рис. 19.3), при заданому його розподілі на площині $z = 0$.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося формулою Гюйгенса (17.19):

$$U_1(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} U_1(\vec{r}, 0) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{R}_p|}}{|\vec{r} - \vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (19.18)$$

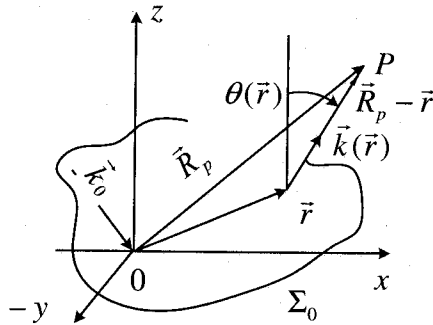


Рис. 19.3

де інтегрування проводиться за тією частиною Σ_0 площини $z=0$, яка вкрита нерівностями, $\theta(\vec{r})$ — кут між нормаллю до площини $z=0$ і напрямком у точку спостереження P ($\vec{R} = \vec{R}_p$) з довільної точки \vec{r} області інтегрування Σ_0 (рис.19.3). Підставляючи тепер у (19.18) знайдене значення поля $U_1(\vec{r}, 0)$ (19.17), остаточно отримаємо

$$U_1(\vec{R}_p) = -\frac{A_0 k^2 \cos \theta_0}{\pi} \int_{\Sigma_0} \xi(\vec{r}) e^{i(k|\vec{r}-\vec{R}_p| + \vec{k}_{0\perp} \vec{r})} \frac{\cos \theta(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} d\vec{r}. \quad (19.19)$$

Формула (19.19) є розв'язком „динамічної” частини задачі, встановлюючи зв'язок між розсіяним полем $U_1(\vec{R}_p)$ (у першому порядку теорії збурень) і формою $z = \xi(\vec{r})$ кожної реалізації випадкової поверхні. Видно, що зв'язок між U_1 і ξ є лінійним. Якщо в області інтегрування Σ_0 є багато некорельованих нерівностей, тобто якщо виконується нерівність $L \gg l_\xi$, де $L \sim \sqrt{\Sigma_0}$ — лінійний розмір розсіюючої поверхні, а l_ξ — радіус кореляції випадкової функції $\xi(\vec{r})$ (характерний горизонтальний

розмір або "довжина" нерівностей в площині $z=0$), то відповідно до центральної граничної теореми теорії ймовірностей поле $U_1(\vec{R}_p)$ буде розподілене за законом Гаусса навіть при негауссовому розподілі $\xi(\vec{r})$. Це випливає з того, що (19.19) вказує на адитивний внесок кожної нерівності у сумарне розсіяне поле у точці спостереження \vec{R}_p . Враховуючи викладене, при аналізі можна обмежитися дослідженням тільки перших двох статистичних моментів поля $U_1(\vec{R}_p)$, оскільки для нормально розподілених величин в них і міститься вся статистична інформація.

19.3. Середнє поле і середня інтенсивність

Безпосереднє усереднення формули (19.19) з урахуванням того, що $\langle \xi(\vec{r}) \rangle = 0$, призводить до такого результату:

$$\langle U_1(\vec{R}_p) \rangle = 0.$$

Таким чином, у першому порядку за $\xi(\vec{r})$ розсіяне поле $U_1(\vec{R}_p)$ є некогерентним.

Середня інтенсивність розсіяного поля $\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle = \langle |U_1(\vec{R}_p)|^2 \rangle$ згідно з (19.19) виражається через другий момент випадкової функції $\xi(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \langle I_1(\vec{R}_p) \rangle = & \frac{I_0 k^4 \cos^2 \theta_0}{\pi^2} \int_{\Sigma_0} \int_{\Sigma_0} \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}'') \rangle \exp \left\{ i k (|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p|) + \right. \\ & \left. + i \vec{k}_{0\perp} (\vec{r}' - \vec{r}'') \right\} \frac{\cos \theta(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{R}_p|} \frac{\cos \theta(\vec{r}'')}{|\vec{r}'' - \vec{R}_p|} d\vec{r}' d\vec{r}'', \end{aligned} \quad (19.20)$$

де $I_0 = |A_0|^2$ — інтенсивність падаючої плоскої хвилі. Для

статистично просторово однорідних нерівностей („стаціонарних” за просторовими змінними) маємо

$$\langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}'') \rangle = B_\xi(\vec{r}' - \vec{r}''),$$

де B_ξ — просторова автокореляційна функція нерівностей. Замість \vec{r}', \vec{r}'' введемо в (19.20) нові сумарні $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}' + \vec{r}'')$ і різниці змінні інтегрування. При цьому старі змінні виражаються через нові як $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\rho}/2$, $\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{\rho}/2$. Враховуючи, що $B_\xi(\vec{\rho})$ відмінна від нуля тільки для „невеликих” значень $\rho \sim l_\xi$, при $L \gg l_\xi$ у формулі (19.20) можна дещо спростити. По-перше, інтегрування за $d\vec{\rho}$ можна проводити у нескінченних межах, а область інтегрування за сумарною координатою \vec{r} практично збігається зі старою Σ_0 . По-друге, різницю $|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p|$ у показниках степеня експоненти можна розкласти в ряд Тейлора у точці $\vec{\rho} = 0$ до першого ненульового доданка:

$$|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p| = \left| \vec{r} - \vec{R}_p + \frac{\vec{\rho}}{2} \right| - \left| \vec{r} - \vec{R}_p - \frac{\vec{\rho}}{2} \right| \approx \frac{\vec{r} - \vec{R}_p}{|\vec{r} - \vec{R}_p|} \vec{\rho}.$$

По третє, співмножники з напрямними косинусами, що повільно змінюються, можна наближено взяти у точці $\vec{\rho} = 0$:

$$\frac{\cos[\theta(\vec{r} + \vec{\rho}/2)] \cos[\theta(\vec{r} - \vec{\rho}/2)]}{\left| \vec{r} - \vec{R}_p + \frac{\vec{\rho}}{2} \right| \left| \vec{r} - \vec{R}_p - \frac{\vec{\rho}}{2} \right|} \approx \frac{\cos^2 \theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2}.$$

Після виконаних спрощень отримаємо

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{I_0 k^4 \cos^2 \theta_0}{\pi^2} \int_{\Sigma_0} \frac{\cos^2 \theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp(\vec{r})\vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho}). \quad (19.21)$$

Тут ми ввели поточний **вектор розсіювання** $\vec{q}(\vec{r}) = \vec{k}(\vec{r}) - \vec{k}_0$, де

$$\vec{k}(\vec{r}) = k \frac{\vec{R}_p - \vec{r}}{|\vec{R}_p - \vec{r}|} \quad \text{— вектор, спрямований із поточної точки}$$

поверхні \vec{r} у точку спостереження \vec{R}_p (див. рис. 19.3). При цьому ми врахували, що у скалярному добутку $\vec{q}(\vec{r})\vec{\rho}$ можна \vec{q} замінити на $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y)$ (проекцію \vec{q} на площину $z = 0$).

За аналогією до (14.32) введемо в розгляд просторово-енергетичний спектр нерівностей $S_\xi(\vec{\chi})$, взятий для фіксованої „хвильової” гармоніки $\vec{\chi} = \vec{q}_\perp(\vec{r})$:

$$S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})] = S_\xi(\vec{\chi}) \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}_\perp(\vec{r})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho}) \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}_\perp(\vec{r})}. \quad (19.22)$$

З урахуванням (19.22) формула (19.21) набуває вигляду

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx 4I_0 k^4 \cos^2 \theta_0 \int_{\Sigma_0} \frac{\cos^2 \theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})] d\vec{r}. \quad (19.23)$$

Згідно з (19.23) кожен елемент поверхні $d\vec{r}$ із центром у точці \vec{r} робить внесок у сумарну інтенсивність $\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle$

$$d\bar{I}(\vec{R}_p) = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\vec{r}) S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})] \frac{I_0 d\vec{r}}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2}. \quad (19.24)$$

Величина

$$\sigma[\vec{q}_\perp(\vec{r})] = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\vec{r}) S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})], \quad (19.25)$$

тобто коефіцієнт при $I_0 d\vec{r} / (\vec{r} - \vec{R}_p)^2$ у формулі (19.24) має назву **перерізу розсіювання** одиничної площадки абсолютно м'якої

поверхні у напрямку $(\vec{R}_p - \vec{r})/|\vec{R}_p - \vec{r}|$. Враховуючи (19.25), формула (19.23) набуває остаточного і простого вигляду

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx I_0 \int_{\Sigma_0} \frac{\sigma[\vec{q}_\perp(\vec{r})]}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} d\vec{r}. \quad (19.26)$$

Припустимо тепер, що спостерігач перебуває у дальній зоні відносно поверхні Σ_0 (в зоні Фраунгофера). Умова дальньої зони, як уже було показано раніше, формулюється у вигляді таких нерівностей:

$$\frac{r}{R_p} \leq \frac{L}{R_p} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{kL^2}{R_p} \ll 1, \quad (19.27)$$

де $R_p = |\vec{R}_p|$. Природно, ми припускаємо, що початок декартової системи координат XYZ уміщений у центр розсіюючої площадки Σ_0 . Якщо виконуються нерівності (19.27), у формулі (19.23) можна наближено вважати, що вектор $\vec{k}(\vec{r})$, напрямний косинус $\cos \theta(\vec{r})$ і відстань від поточної точки поверхні до точки спостереження $|\vec{r} - \vec{R}_p|$ в межах області інтегрування практично не змінюються, і їх можна вибрати при $\vec{r} = 0$: $\vec{k}(\vec{r}) \approx \vec{k}(0) = k\vec{R}_p/R_p$, $\cos \theta(\vec{r}) \approx \cos \theta(0) = \cos \theta_p$ і $|\vec{r} - \vec{R}_p| \approx R_p$. Враховуючи ці спрощення, під знаком інтеграла в (19.23) можна покласти

$$\vec{q}(\vec{r}) = \vec{k}(\vec{r}) - \vec{k}_0 \approx \vec{q}(0) = k \frac{\vec{R}_p}{R_p} - \vec{k}_0,$$

$$\frac{\cos \theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} \approx \frac{\cos \theta(0)}{R_p^2} = \frac{\cos \theta_p}{R_p^2},$$

і в дальній зоні для середньої інтенсивності отримуємо такий вираз:

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{I_0 \sigma(\vec{q}_\perp)}{R_p^2} \Sigma_0. \quad (19.28)$$

Тут Σ_0 — сумарна площа розсіюючої поверхні, а

$$\sigma(\vec{q}_\perp) = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p S_\xi(\vec{q}_\perp) — \quad (19.29)$$

фіксоване значення перерізу розсіювання.

Висновки

1. Формули (19.26) і (19.28) відіграють у теорії розсіювання хвиль на статистично шорсткій поверхні ту саму роль, що й формула (14.31) у теорії об'ємного розсіювання на флуктуаціях показника заломлення. Фізичний зміст цих формул також практично збігається, і наближення, в якому отримано формулу (19.26) та (19.28), що випливає з (19.26), також називається „борнівським”.

2. У формулі (19.26) з урахуванням визначення (19.25) під знаком інтеграла стоїть множник $\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\vec{r})$, який перетворюється на нуль при ковзних кутах падіння і відбиття, тобто при $\theta_0, \theta(\vec{r}) \rightarrow \pi/2$. Саме тому інтеграл (19.26) збігається навіть при інтегруванні по всій нескінченній площині $z = 0$.

3. Залежність $\langle I_1 \rangle \sim 1/R_p^2$ у формулі (19.28) говорить про те, що у дальній зоні поле U_1 , розсіяне на малій шорсткій площадці, має вигляд сферичної хвилі, що розходить (середня інтенсивність спадає зі зростанням відстані R_p тільки за рахунок сферичної розбіжності).

4. Зі збільшенням розмірів площі поверхні Σ_0 середня інтенсивність $\langle I_1 \rangle$ зростає пропорційно до Σ_0 , що є ознакою

некогерентного додавання полів, розсіяних на окремих нерівностях поверхні. Справді, середню кількість N окремих нерівностей можна оцінити як $N \approx \Sigma_0 / \Sigma_l$, де $\Sigma_l \sim l_\xi^2$ — площа, що припадає на одну нерівність, і, отже, $\langle I_1 \rangle \sim \Sigma_0 \sim N$, тобто $\langle I_1 \rangle$ зростає пропорційно кількості елементів розсіювання, а не пропорційно їх квадрата, як це має місце при когерентному додаванні полів.

5. Так само, як і в теорії розсіювання на слабких флуктуаціях показника заломлення, розсіювання на слабо шорсткій поверхні є **резонансним**: з усього спектра нерівностей $S_\xi(\vec{\chi})$ при розсіюванні з напрямку \vec{k}_0 у напрямку \vec{k} бере участь тільки одна єдина просторова гармоніка Фур'є з „хвильовим” вектором $\vec{\chi} = \vec{q}_\perp$.

6. Нарешті, в (19.26) і (19.28) присутній той самий, що й у (14.31), „релеївський” множник k^4 , завдяки якому інтенсивність розсіювання на дрібних нерівностях ($kl_\xi \ll 1$) виявляється пропорційною четвертому степеню частоти. Справді, через швидке спадання до нуля автокореляційної функції $B_\xi(\vec{\rho})$ для просторових частот, коли $|\vec{q}_\perp \vec{\rho}| \leq 2kl_\xi \ll 1$, експоненціальний множник $e^{i\vec{q}_\perp \vec{\rho}}$ можна наближено замінити на одиницю. При цьому спектр $S_\xi(\vec{q}_\perp)$ виявляється незалежним від частоти:

$$\begin{aligned} S_\xi(\vec{q}_\perp) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho}) \approx \\ &\approx S_\xi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\vec{\rho}) d\vec{\rho} \approx \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (19.30)$$

і, отже, $\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \sim k^4$. Тут $\sigma_\xi^2 = B_\xi(0) = \langle \xi^2 \rangle$ — дисперсія відхилень нерівної поверхні $z = \xi(\vec{r})$ від середньої площини $z = 0$.

19.4. Індикатриса розсіювання

Аналіз залежності середньої інтенсивності від напрямку розсіювання проведемо на основі формули (19.28), що справджується для дальньої зони. При цьому положення точки спостереження задаватимемо у сферичних координатах $\vec{R}_p = (R_p, \theta_p, \varphi_p)$, де θ_p — полярний кут, що відраховується від осі OZ , а φ_p — азимутальний кут, що відраховується від осі OX в площині XOY (рис. 19.4).

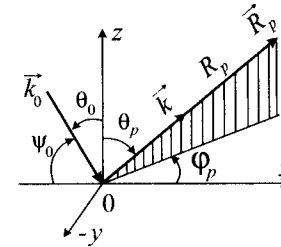


Рис. 19.4

Розподіл за кутами θ_p і φ_p середньої інтенсивності зручно описувати індикатрисою розсіювання, яку за аналогією з §14 ми визначимо як відношення $\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle$ до середньої інтенсивності, розсіяної у дзеркальному напрямку ($\vec{q}_\perp = 0 \rightarrow \theta_p = \theta_0, \varphi_p = 0$):

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_1(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{S_\xi(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_p}{S_\xi(0) \cos^2 \theta_0}. \quad (19.31)$$

Для подальшого аналізу доцільно навести в явному вигляді декартові компоненти вектора \vec{q} , записані у сферичних координатах:

$$\vec{q} = \begin{cases} q_x = k(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0), \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p, \\ q_z = k(\cos \theta_p + \cos \theta_0). \end{cases} \quad (19.32)$$

Дослідимо загальний вигляд індикатрисы розсіювання $F(\theta_p, \varphi_p)$ у двох граничних випадках — дрібних ($kl_\xi \ll 1$) і великих ($kl_\xi \gg 1$) нерівностей (тут великими вважаються нерівності з великим горизонтальним лінійним розміром l_ξ , тобто „довгі”, а висоти їх ξ і далі вважаються достатньо малими для того, щоб можна було застосовувати метод збурень).

1. Для **дрібних нерівностей**, коли $kl_\xi \ll 1$ ($l_\xi \ll \lambda$), можна скористатися формулою (19.30), тобто вважати $S_\xi(\vec{q}_\perp) \approx S_\xi(0)$, після чого з (19.31) випливає

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\cos^2 \theta_p}{\cos^2 \theta_0}. \quad (19.33)$$

На відміну від об'ємного розсіювання, яке у цьому випадку було ізотропним: ($F(\theta_p, \varphi_p) \approx 1$), індикатриса розсіювання від шорсткої поверхні виявляється залежною від полярного кута θ_p . Проте, враховуючи, що ця залежність дуже плавна ($\sim \cos^2 \theta_p$), наближено можна і далі вважати розсіювання **дифузним**, оскільки кутова ширина $\Delta\theta_p$ індикатрисы розсіювання має порядок одиниці, а положення її максимуму не залежить від напрямку опромінення θ_0 (воно відповідає розсіюванню у нормальному до площини $z=0$ напрямку $\theta_p=0$, див. рис. 19.5 а).

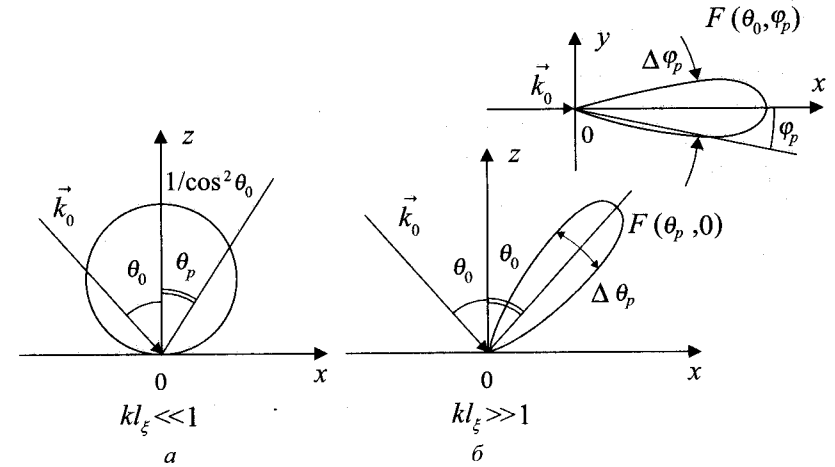


Рис. 19.5

2. У протилежному граничному випадку, коли $kl_\xi \gg 1$ ($l_\xi \gg \lambda$, **довгі пологі нерівності**), кутова ширина індикатрисы розсіювання $F(\theta_p, \varphi_p)$ визначається поведінкою спектра $S_\xi(\vec{q}_\perp)$, який виявляється швидко змінною функцією кутів θ_p і φ_p . Ширину спектра можна оцінити зі співвідношення невизначеності (див. §13). Наприклад, для ізотропних нерівностей згідно з (13.34) це співвідношення має вигляд $q_\perp l_\xi \approx 1$, де $q_\perp = |\vec{q}_\perp| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$. Підставивши сюди взяті з (19.32) значення проекцій вектора розсіювання, отримуємо

$$kl_\xi \sqrt{(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + (\sin \theta_p \sin \varphi_p)^2} \approx 1. \quad (19.34)$$

У площині падіння XOZ ($\varphi_p=0$) кутова ширина $\Delta\theta_p$ індикатрисы розсіювання згідно з (19.34) визначається з такого співвідношення:

$$kl_\xi |\sin \theta_p - \sin \theta_0| \approx 1. \quad (19.35)$$

Оскільки $kl_\xi \gg 1$, ця рівність може виконуватися тільки поблизу напрямку дзеркального відображення ($\theta_p = \theta_0$). Поклавши $\theta_p = \theta_0 + \Delta\theta_p$, розкладемо $\sin \theta_p = \sin(\theta_0 + \Delta\theta_p)$ у степеневий ряд за малим доданком $\Delta\theta_p$:

$$\sin \theta_p = \sin(\theta_0 + \Delta\theta_p) \approx \sin \theta_0 + \Delta\theta_p \cos \theta_0 - \frac{1}{2}(\Delta\theta_p)^2 \sin \theta_0. \quad (19.36)$$

Якщо у правій частині обмежитися тільки лінійним за $\Delta\theta_p$ доданком, то після підстановки (19.36) у (19.35) отримаємо оцінку для кутової ширини $\Delta\theta_p$ індикатриси розсіювання у вертикальній площині

$$\Delta\theta_p \approx \frac{1}{kl_\xi \cos \theta_0} \sim \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1. \quad (19.37)$$

Зазначимо, що знайдена величина $\Delta\theta_p$ правдива при не надто ковзних кутах падіння, коли у розкладі (19.36) можна знехтувати третім доданком у правій частині порівняно з другим. Це можливо, якщо виконується нерівність:

$$\cos \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0 \ll \frac{1}{kl_\xi}. \quad (19.38)$$

При $kl_\xi \gg 1$ умова (19.38) може порушуватися тільки при дуже малих кутах ковзання $\Psi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ (див. рис. 19.4):

$$\Psi_0^2 \leq \frac{1}{kl_\xi} \ll 1. \quad (19.39)$$

Таким чином, при достатньо крутих кутах опромінення ($\Psi_0 \gg 1/\sqrt{kl_\xi}$) ширина індикатриси розсіювання $\Delta\theta_p$ визначається кутом дифракції на горизонтальному лінійному розмірі нерівностей l_ξ :

$$\Delta\theta_p \approx \frac{1}{kl_\xi} \sim \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1 \quad (19.40)$$

(безрозмірний множник 2π , як завжди, при якісних оцінках можна опустити). Слід, проте, зазначити, що, строго кажучи, згідно з (19.37) кут дифракції визначається не самим горизонтальним розміром l_ξ , а його проекцією $l_\xi \cos \theta_0$ на площину, перпендикулярну до напрямку опромінення, що падає на поверхню.

Аналогічно зі співвідношення невизначеності оцінюється і ширина індикатриси $\Delta\varphi_p$ у горизонтальній площині. Поклавши у (19.34) $\theta_p = \theta_0$, отримаємо

$$kl_\xi \sin \theta_0 \sqrt{(\cos \varphi_p - 1)^2 + \sin^2 \varphi_p} \approx 1.$$

При $kl_\xi \gg 1$ і похилому падінні хвилі ($\sin \theta_0 \neq 0$) ця умова може бути реалізована тільки в області малих кутів φ_p ($\varphi_p \ll 1$). Розклавши $\cos \varphi_p$ і $\sin \varphi_p$ у ряд Тейлора, з точністю до лінійних доданків за φ_p , отримуємо таку оцінку:

$$\Delta\varphi_p = \varphi_p \approx \frac{1}{kl_\xi \sin \theta_0} \sim \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1. \quad (19.41)$$

Таким чином, при $kl_\xi \gg 1$ індикатриса розсіювання $F(\theta_p, \varphi_p)$ має гострий максимум у напрямку дзеркального відбиття, ширина якого має порядок кута дифракції $\theta_d \sim \lambda/l_\xi \ll 1$ (див. рис. 19.5 б).

19.5. Область застосування „борнівського” наближення

Наприкінці цього параграфа встановимо межі застосування наближення першого порядку теорії збурень („борнівського”

наближення). Це можна зробити на основі формули (19.28), виходячи з достатньо природної, з фізичної точки зору, вимоги малості потоку розсіяної у верхній півпростір енергії P_1 , який відноситься від поверхні полем U_1 , порівняно з повним потоком енергії P_0 , що приноситься на поверхню Σ_0 полем падаючої хвилі U_{nad} :

$$P_1 \ll P_0. \quad (19.42)$$

Оскільки густина потоку енергії пропорційна середній інтенсивності поля, то повний потік розсіяної енергії можна записати у такому вигляді (порівняйте з (14.42)):

$$P_1 = a \int_{C_R} \langle I_1(\vec{R}_p) \rangle d\Sigma, \quad (19.43)$$

де інтегрування ведеться за C_R — поверхнею верхньої півсфери великого радіуса $R = R_p$ із центром у початку координат O (див. рис. 19.6), a — неважливий для подальшого аналізу сталий множник (рівний, наприклад, $c/4\pi$, якщо U_1 — компонента електричного або магнітного поля, при цьому величина $\frac{c}{4\pi} \langle |U_1|^2 \rangle$ буде збігатися з густиною потоку енергії — модулем вектора Умова-Пойтинга розсіяного поля).

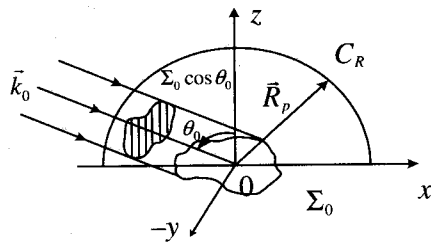


Рис. 19.6

Потік енергії P_0 , що падає на поверхню Σ_0 , очевидно, дорівнює (порівняйте з (14.43))

$$P_0 = a I_0 \Sigma_0 \cos \theta_0. \quad (19.44)$$

Переходячи у (19.43) до сферичних координат (див. рис. 19.4), в яких елемент поверхні $d\Sigma = R_p^2 \sin \theta_p d\theta_p d\varphi_p$, і користуючись формулою (19.28), отримуємо

$$P_1 = 4a I_0 k^4 \Sigma_0 \cos^2 \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\vec{q}_\perp) d\varphi_p. \quad (19.45)$$

З урахуванням (19.44) і (19.45) нерівність (19.42) може бути записана у формі

$$4k^4 \cos \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\vec{q}_\perp) d\varphi_p \ll 1. \quad (19.46)$$

Інтеграл у лівій частині цієї нерівності оцінимо у двох граничних випадках — дрібних ($kl_\xi \ll 1$) і великих пологих ($kl_\xi \gg 1$) нерівностей.

1. При $kl_\xi \ll 1$ для $S_\xi(\vec{q}_\perp)$ можна скористатися оцінкою (19.30), після чого інтеграли за кутами θ_p і φ_p легко обчислюються, і нерівність (19.46) набуває вигляду

$$\frac{2}{3\pi} (k\sigma_\xi)^2 (kl_\xi)^2 \cos \theta_0 \ll 1. \quad (19.47)$$

2. У протилежному граничному випадку, коли $kl_\xi \gg 1$, функція $S_\xi(\vec{q}_\perp)$, як було показано, має гострий максимум у напрямку дзеркального відображення ($\theta_p = \theta_0$, $\varphi_p = 0$). Це дає змогу оцінити інтеграл (19.46), винісши підінтегральну функцію за знак інтеграла

при $\theta_p = \theta_0$ і $\varphi_p = 0$, а інтеграл за $d\theta_p d\varphi_p$, що залишився, замінити на добуток $\Delta\theta_p \Delta\varphi_p$:

$$4k^4 \Sigma_0 \cos \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\bar{q}_\perp) d\varphi_p \approx \\ \approx 4k^4 \Sigma_0 \cos^3 \theta_0 \sin \theta_0 S_\xi(0) \Delta\theta_p \Delta\varphi_p. \quad (19.48)$$

Якщо ми тепер врахуємо отримані раніше оцінки (19.37) і (19.41), то умову застосовності борнівського наближення (19.42) можемо записати у вигляді

$$\frac{1}{\pi^2} (k\sigma_\xi \cos \theta_0)^2 \ll 1. \quad (19.49)$$

Точніші обчислення інтеграла в (19.46) приводять до нерівності

$$(2k\sigma_\xi \cos \theta_0)^2 \ll 1. \quad (19.50)$$

Відмінність (19.49) від (19.50) на множник $(2\pi)^2$ у лівій частині пов'язана з якісним характером оцінок інтеграла (19.48), а також кутових розмірів $\Delta\theta_p$ і $\Delta\varphi_p$ індикатриси розсіювання, виходячи зі співвідношення невизначеності (13.34).

Величина $P = 2k\sigma_\xi \cos \theta_0$ називається **параметром Релея**, і вимога його малості, як видно з (19.50), є умовою застосовності борнівського наближення в задачі розсіювання хвиль на шорсткій поверхні з пологими ($kl_\xi \gg 1$) нерівностями. При $kl_\xi \ll 1$ застосування борнівського наближення обмежується нерівністю (19.47).

Висновки

З отриманих нерівностей випливає, що теорія збурень при невеликих кутах падіння ($\cos \theta_0 \approx 1$) може застосовуватися тільки для

невисоких нерівностей $\xi(\bar{r})$ порівняно з довжиною хвилі λ .

З іншого боку, чим менший кут ковзання $\Psi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$, тим до вищих нерівностей можна застосовувати теорію збурень (див. (19.50)). Проте при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ ($\Psi_0 \rightarrow 0$) наведені вище оцінки виявляються надто грубими (нерівності (19.47) і (19.50) при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ виконуються для будь-яких високих нерівностей). Випадок ковзного поширення хвиль уздовж шорсткої поверхні потребує окремого, суворішого розгляду, що пов'язано з необхідністю врахування ефектів затінення й перевідбивання хвиль. Коло цих питань виходить за межі цього курсу.

ЗАДАЧІ

1. Розрахувати методом малих збурень розподіл середньої інтенсивності у дальній зоні, вважаючи, що характерний розмір розсіюючої поверхні $L \sim \sqrt{\Sigma_0}$ набагато перевищує масштаб неоднорідностей l_ξ випадкової поверхні

$$z(x, y) = \xi(x, y) \sin(\alpha x + \nu). \quad (1)$$

Тут $\xi(x, y)$ — нормально розподілене статистично однорідне та ізотропне поле випадкових амплітуд підвишень (із нульовим середнім значенням $\bar{\xi} = 0$ і дисперсією σ_ξ^2), α — детермінована величина, обернено пропорційна періоду „ґратки” L_p ($\alpha = 2\pi/L_p$), а ν — випадкова величина, рівномірно розподілена у інтервалі $[-\pi, \pi]$. Вважаючи $\xi(x, y)$ і ν статистично незалежними, побудувати схематичний графік $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$.

Розв'язок. Щоб знайти розподіл $\overline{I_1}(\theta_p, \varphi_p)$, необхідно знати просторовий спектр шорсткостей $S_z(\vec{q}_\perp)$ (див. формули (19.28) і (19.29)), який може бути отриманий шляхом Фур'є-перетворення кореляційної функції шорсткостей $B_z(\vec{r}', \vec{r})$. Позначення, що використовуються у розв'язанні, наведені на рис. 19.7.

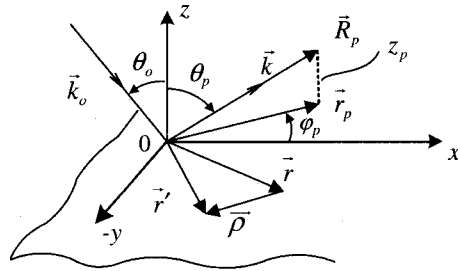


Рис. 19.7

При обчисленні статистичних характеристик випадкової поверхні скористаємося властивістю густини розподілу ймовірностей для незалежних величин:

$$W(\xi, \nu) = W(\xi)W(\nu).$$

Позначатимемо $\langle \dots \rangle_\xi$ і $\langle \dots \rangle_\nu$ відповідно усереднення за ξ і за ν . Відповідно до визначення (1) середнє відхилення $\langle z(x, y) \rangle$ дорівнює:

$$\langle z(x, y) \rangle = \langle \xi(x, y) \rangle_\xi \langle \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu = 0.$$

Побудуємо тепер автокореляційну функцію шорсткостей поверхні

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \langle z(\vec{r}')z(\vec{r}) \rangle = \langle \xi(\vec{r}')\xi(\vec{r}) \rangle_\xi \times \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu.$$

Згідно з умовою задачі

$$\langle \xi(\vec{r}')\xi(\vec{r}) \rangle_\xi = \sigma_\xi^2 \exp \left\{ -\frac{(\vec{r}' - \vec{r})^2}{l_\xi^2} \right\}. \quad (2)$$

Усереднення за випадковою величиною ν дає

$$\begin{aligned} & \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu = \\ &= \frac{1}{2} \langle \{ \cos[\alpha(x' - x)] - \cos[\alpha(x' - x) + 2\nu] \} \rangle_\nu = \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha(x' - x) - \frac{1}{2} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_\nu. \end{aligned} \quad (3)$$

Неважко показати, що другий доданок у (3) дорівнює нулю. Справді,

$$\begin{aligned} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] W(\nu) d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] d\nu \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким чином, кореляційна функція для заданої випадкової поверхні має вигляд

$$B_z(\vec{\rho}) = \frac{\sigma_\xi^2}{2} e^{-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{l_\xi^2}} \cos \alpha \rho_x, \quad (4)$$

де $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r} = (\rho_x, \rho_y)$. За допомогою формули Вінера-Хінчіна знаходимо спектральну густину розсіяного випромінювання

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} d\vec{\rho} =$$

$$= \frac{\sigma_\xi^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - iq_x \rho_x} \cos \alpha \rho_x d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_y^2}{l_\xi^2} - iq_y \rho_y} d\rho_y. \quad (5)$$

Представивши $\cos \alpha \rho_x = \frac{1}{2}(e^{i\alpha \rho_x} + e^{-i\alpha \rho_x})$ після інтегрування, отримаємо

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i(q_x + \alpha)\rho_x} d\rho_x + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i(q_x - \alpha)\rho_x} d\rho_x \right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_y^2}{l_\xi^2} - iq_y \rho_y} d\rho_y = \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{16\pi} \left[e^{-\frac{(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} \right] e^{-\frac{q_y^2 l_\xi^2}{4}}. \quad (6)$$

Шукана інтенсивність розсіяного поля, згідно з (19.28), пропорційна $S_z(\vec{q}_\perp)$:

$$\bar{I}(\theta_p, \varphi_p) \sim S_z(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p. \quad (7)$$

Проаналізуємо тепер знайдену залежність $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ від кутів спостереження. Для цього скористаємося формулою (19.32) для проекцій вектора розсіювання:

$$\begin{cases} q_x = k \sin \theta_p \cos \varphi_p - k \sin \theta_0 = k(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0), \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p - k \sin 0 = k \sin \theta_p \sin \varphi_p. \end{cases} \quad (8)$$

Із (6) і (7) видно, що функція $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ має максимуми при кутах спостереження, що задовольняють умови $q_x = \mp \alpha$ і $q_y = 0$. Звідси, враховуючи (8), отримуємо

$$\begin{cases} q_x = k \sin \theta_p \cos \varphi_p - k \sin \theta_0 = \mp \alpha, \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Після ділення другого рівняння на перше при $k \sin \theta_0 \mp \alpha \neq 0$ отримуємо співвідношення $\tan \varphi_p = 0$, тобто $\varphi_p = 0, \pi$. Це означає, що максимуми розсіяного випромінювання лежать у площині падіння. Перше рівняння у (9) при цьому набуває вигляду

$$k \sin \theta_p = \pm [k \sin \theta_0 \mp \alpha], \quad (10)$$

де знак „+” перед квадратними дужками відповідає азимутальному куту $\varphi_p = 0$, а знак „-” відповідно $\varphi_p = \pi$. Під час знаходження дійсних коренів рівняння (10) ми повинні враховувати, що області зміни кутів θ_p і θ_0 лежать у межах $0 \leq \theta_{p,0} \leq \pi/2$. Якщо ми припустимо, що полярний кут θ_p може набувати і від’ємних значень $-\pi/2 \leq \theta_p \leq \pi/2$, то аналізувати (10) можна з одним знаком „+” перед квадратними дужками, вважаючи, що від’ємним кутам θ_p відповідає азимутальний кут $\varphi_p = \pi$. Враховуючи, що $L_p = 2\pi/\alpha$ і $k = 2\pi/\lambda$, остаточно отримуємо

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}, \quad (11)$$

де $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$. Розв’язок цього рівняння

$$\theta_p = \theta_{1,2} = \arcsin \left(\sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p} \right) \quad (12)$$

легко проілюструвати за допомогою рис. 19.8. Видно, що корені рівняння (11) визначаються як точки перетину кривої $y(\theta_p) = \sin \theta_p$ і двох прямих $y_{1,2}(\theta_p) = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}$. Для заданого кута падіння θ_0 залежно від величини відношення λ/L_p можуть спостерігатися або два дійсних корені, або один, або взагалі жодного.

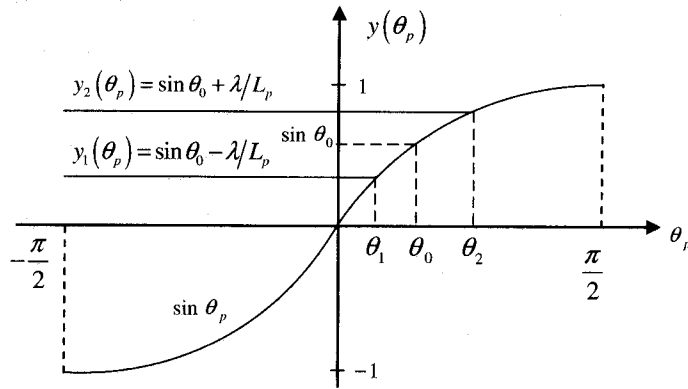


Рис. 19.8

Відсутність дійсних коренів (це можливо при $\lambda/L_p > 1$) свідчить про те, що вони стають уявними. Відповідна цим умовам розсіяна хвиля буде неоднорідною (не поширюваною від поверхні: уявність величини k_z для неї означає експоненційне згасання інтенсивності у напрямку від поверхні). У другому граничному випадку, коли $\lambda/L_p \ll 1$, розсіяна хвиля поширюється у „майже дзеркальних” напрямках ($\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0$). Кути, під якими розсіюються хвилі у випадку, що розглядається, визначимо, поклавши у (11) $\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0 + \Delta\theta_p$, де $\Delta\theta_p \ll \theta_0$. При цьому у лінійному за малим параметром $\lambda/L_p \ll 1$ наближенні розв’язок (12) має вигляд

$$\theta_{1,2} \approx \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p \cos \theta_0}. \quad (13)$$

Таким чином, напрямки максимальної інтенсивності у площині падіння збігаються з напрямками $\varphi_p = 0, \pi$; $\theta_p = \theta_{1,2}$. Схематично індикурису розсіювання зображено на рис. 19.9.

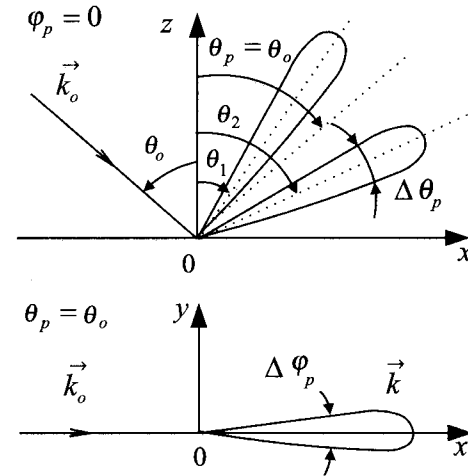


Рис. 19.9

Згідно з (6) ширина пелюсток $\Delta\theta_p$ на рівні $1/e$ оцінюється з таких співвідношень:

$$(q_x \pm \alpha)^2 l_\xi^2 = 4, \\ q_y^2 l_\xi^2 = 4.$$

Для першої пелюстки ($\theta_p = \theta_1$), поклавши у (8) $\varphi_p = 0$, $\theta_p = \theta_1 + \Delta\theta_p$, отримуємо

$$l_\xi^2 \{ k [\sin(\theta_1 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0] + \alpha \}^2 = 4. \quad (14)$$

Припустивши $|\Delta\theta_p| \ll \theta_1$, спростимо (14):

$$\begin{aligned}
& l_\xi^2 \left\{ k \left[\sin \theta_1 + \Delta \theta_p \cos \theta_1 - \sin \theta_0 \right] + \alpha \right\}^2 \approx \\
& \approx l_\xi^2 \left\{ k \left[\cancel{\sin \theta_0} - \frac{\alpha}{k} + \Delta \theta_p \cos \theta_1 - \cancel{\sin \theta_0} \right] + \alpha \right\}^2 = \\
& = k^2 l_\xi^2 (\Delta \theta_p)^2 \cos^2 \theta_1 \approx 4.
\end{aligned} \quad (15)$$

Звідси отримуємо

$$\Delta \theta_p \approx \frac{2}{k l_\xi \cos \theta_1} \ll 1. \quad (16)$$

Аналогічну оцінку можна отримати і для другої пелюстки ($\theta_p = \theta_2$):

$$\Delta \theta_p \approx \frac{2}{k l_\xi \cos \theta_2} \ll 1. \quad (17)$$

Якщо $\alpha/k \ll 1$, то, як було показано, $\theta_{1,2} \approx \theta_0$, і ми приходимо до такої оцінки:

$$\Delta \theta_p \approx \frac{2}{k l_\xi \cos \theta_0}. \quad (18)$$

Для практичного використання дифракційних ґраток цікавим є тільки випадок $\Delta \theta_p \ll \theta_2 - \theta_1$. У рамках прийнятих допущень, згідно з (13) маємо $\theta_2 - \theta_1 \approx 2\alpha/k \cos \theta_0$. Звідси з урахуванням (18) отримуємо $1/l_\xi \ll \alpha = 2\pi/L_p$. Отже, для періодичної структури, що розглядається, на l_ξ накладається обмеження $l_\xi \gg L_p/2\pi$.

Розглянутий випадок наочно демонструє резонансний характер розсіювання: кожній гармоніці неоднорідностей відповідає своє розсіяне поле. Оскільки у цій задачі збурення границі описується однією гармонікою, то у розсіяному полі існує тільки дві хвилі з векторами розсіювання $\vec{q}_{1,2} = (\pm\alpha, 0, 0)$.

Для фізичної інтерпретації отриманих формул розглянемо випадок нормального падіння хвилі ($\theta_0 = 0$) на поверхню, задану виразом (1). На рис. 19.10 показано процес відбиття плоскої хвилі від ідеальної синусоїдальної дифракційної ґратки з періодом $L_p = 2\pi/\alpha$ і початковою фазою ν .

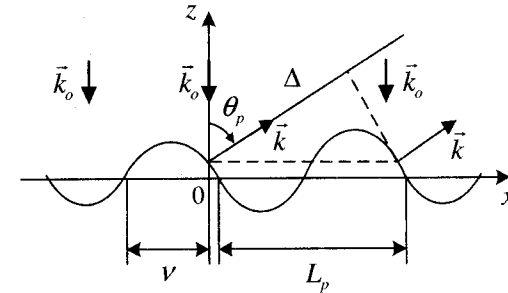


Рис. 19.10

Кожна точка поверхні є джерелом сферичної хвилі, що розходиться. Хвилі, розсіяні різними ділянками поверхні, когерентно складаються. Видно, що в одному і тому ж напрямку θ_p хвилі, розсіяні ділянками поверхні, зсунутими одна від одної на період $L_p, 2L_p, \dots, nL_p$, будуть мати оптичні різниці ходу $\Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta$, де $\Delta = L_p \sin \theta_p$. Розсіяне від всіх ділянок поверхні випромінювання буде синфазним, якщо $\Delta = \pm m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). У результаті ми приходимо до умови $L_p \sin \theta_p = \pm m\lambda$. При $m = 0$ кут синфазного відбиття збігається із падаючим кутом $\theta_p = \theta_0 = 0$. Значенню $m = 1$ відповідає перша відбита гармоніка з кутами відбиття $\theta_p = \theta_{1,2} = \mp \arcsin(\lambda/L_p)$ та ін.

У міру зростання m інтенсивності розсіяних гармонік швидко спадають. Найбільш інтенсивними є гармоніки з $m = 0$ і $m = 1$. У наближенні слабкошорстких неоднорідностей, коли $k\sigma_\xi \ll 1$ ($\lambda \gg \sigma_\xi$), у розсіяному полі враховуються тільки гармоніки з

$m = 0$ і $m = 1$. При цьому кути розсіювання для першої гармоніки $\theta_p = \theta_{1,2} = \pm \arcsin(\lambda/L_p)$ і залежать від довжини хвилі падаючого випромінювання. Отримане співвідношення фізично означає тільки те, що незважаючи на те, що розсіяне випромінювання формується всією поверхнею, синфазно розсіюють тільки ті точки поверхні, просторове рознесення яких задовольняє умову $L_p \sin \theta_p = \pm \lambda$.

2. При тих самих припущеннях, що і в задачі 1, розрахувати методом збурень розподіл інтенсивності розсіяної хвилі для випадкової поверхні виду

$$z(x, y) = \xi(x, y) \sin(\alpha x + \nu) \sin(\beta y + \psi). \quad (1)$$

Тут α, β — сталі величини, що визначають періоди ґратки L_{px} , L_{py} уздовж напрямків x і y ($\alpha = 2\pi/L_{px}$, $\beta = 2\pi/L_{py}$). Випадкові величини ξ , ν і ψ незалежні, причому ν і ψ рівномірно розподілені в інтервалі $[-\pi, \pi]$, а $\xi(\vec{r})$ — статистично однорідне й ізотропне нормально розподілене поле амплітуд підвищень. Побудувати схематичний графік $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$.

Розв'язок. Використаємо алгоритм і результати обчислень, наведені у задачі 1:

$$z(x, y) \rightarrow B_z(\vec{r}', \vec{r}) \rightarrow S_z(\vec{q}_\perp) \rightarrow \bar{I}_1(\theta, \varphi).$$

Згідно з цією схемою для заданої поверхні $z(x, y)$ побудуємо спочатку автокореляційну функцію $B_z(\vec{r}', \vec{r})$:

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_\xi \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu \times \\ \times \langle \sin(\beta y' + \psi) \sin(\beta y + \psi) \rangle_\psi = \frac{\sigma_\xi^2}{4} e^{-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{l_\xi^2}} \cos(\alpha \rho_x) \cos(\beta \rho_y). \quad (2)$$

За знайденим виглядом $B_z(\vec{\rho})$ і формулою Вінера-Хінчіна визначаємо $S_z(\vec{q}_\perp)$:

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} d\vec{\rho} = \\ = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{l_\xi^2}} \cos \alpha \rho_x \cos \beta \rho_y e^{-i(q_x \rho_x + q_y \rho_y)} d\rho_x d\rho_y = \\ = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha \rho_x) e^{-\frac{\rho_x^2}{l_x^2} - i q_x \rho_x} d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} \cos \beta \rho_y e^{-\frac{\rho_y^2}{l_y^2} - i q_y \rho_y} d\rho_y. \quad (3)$$

Кожен з інтегралів обчислюється аналогічно до того, як це було зроблено у задачі 1. В результаті ми приходимо до такого виразу:

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{32\pi} \left[e^{-\frac{(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} \right] \left[e^{-\frac{(q_y + \beta)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_y - \beta)^2 l_\xi^2}{4}} \right]. \quad (4)$$

Згідно з (19.28) значення $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$ дорівнює

$$\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p) = I_0 \frac{k^4 \sigma_\xi^2 l_\xi^2 \Sigma_0 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p}{8R_p^2} \times \\ \times \left[e^{-\frac{(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} \right] \left[e^{-\frac{(q_y + \beta)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_y - \beta)^2 l_\xi^2}{4}} \right]. \quad (5)$$

Зі знайденого виразу видно, що максимуми випромінювання спостерігаються під кутами, для яких виконуються такі рівності: $q_x = \mp \alpha$, $q_y = \mp \beta$, тобто

$$\begin{cases} \sin \theta_p \cos \varphi_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\alpha}{k}, \\ \sin \theta_p \sin \varphi_p = \pm \frac{\beta}{k}. \end{cases} \quad (6)$$

Аналіз цієї системи рівнянь засвідчує, що для розглянутої поверхні характерні чотири „викиди” розсіяного випромінювання під кутами $\theta_p = \theta_{1,2}$, $\varphi_p = \varphi_{1-4}$, де

$$\begin{cases} \theta_1 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 - \frac{\alpha}{k}\right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}, & \theta_2 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 + \frac{\alpha}{k}\right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}, \\ \varphi_{1,3} = \pm \arctg \left(\frac{\beta}{k \sin \theta_0 + \alpha} \right); & \varphi_{2,4} = \pm \arctg \left(\frac{\beta}{k \sin \theta_0 - \alpha} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Таким чином, для розглянутої поверхні розсіяне випромінювання $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$ має складну багатопелюсткову структуру, яку схематично зображено на рис. 19.11.

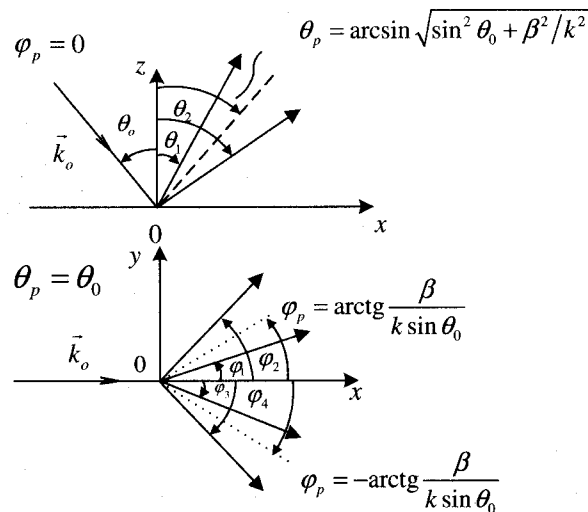


Рис. 19.11

§ 20. Розсіювання на поверхні з великими нерівностями (метод Кірхгофа)

Наведені наприкінці попереднього параграфа нерівності (19.47) і (19.50) обмежують область застосування отриманих за допомогою теорії збурень результатів або малими нерівностями, або достатньо довгими хвилями. У цьому ж розділі ми розглянемо протилежний граничний випадок, коли розміри нерівностей можуть бути настільки завгодно великими порівняно з довжиною хвилі випромінювання, що падає на поверхню. Фактично мова йтиметься про наближення фізичної оптики у задачі відбиття (розсіювання) хвиль від неплоскої (криволінійної) границі поділу двох середовищ.

20.1. Граничні умови

Так само, як і в §19, будемо розв'язувати задачу розсіювання скалярного поля U на нерівностях в середньому плоскій поверхні $\Sigma(\vec{R})$, з якою ми сумістимо площину $z=0$ декартової системи координат XYZ (рис. 20.1). Для визначення вигляду граничних умов проведемо спочатку деякі допоміжні перетворення. Так, у довільній точці $\vec{R}=(x, y, z)$ поверхні $\Sigma(\vec{R})$ проведемо дотичну площину Σ' і розташуємо у точці дотику O' початок нової штрихованої декартової системи координат $X'Y'Z'$. Вісь $O'Z'$ спрямуємо вздовж вектора нормалі \vec{N} до поверхні $\Sigma(\vec{R})$ (див. рис. 20.1). У побудованій таким чином системі координат $X'Y'Z'$ рівняння дотичної площини Σ' визначається як $z'=0$, а радіус-вектор має компоненти $\vec{R}'=(x', y', z')$. Шукане поле $U(\vec{R})$ у невеликому околі точки O' , як і в попередньому параграфі, подамо у вигляді суми заданого падаючого $U_{nad}(\vec{R}')$ і відбитого $U_{відб}(\vec{R}')$ полів: $U(\vec{R}') = U_{nad}(\vec{R}') + U_{відб}(\vec{R}')$. При цьому, природно,

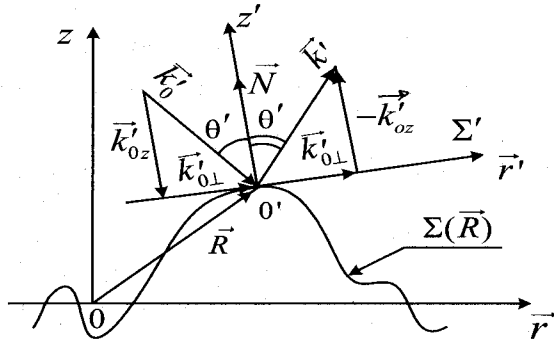


Рис. 20.1

припускається, що, по-перше, точка O' не затінена іншими ділянками поверхні стосовно падаючого випромінювання, а по-друге, що до неї, крім U_{nad} , не надходять жодні інші хвилі, які вже відбилися від інших ділянок поверхні. Іншими словами, ми припускати, що затінення поверхні і багаторазові відбиття від неї не відіграють суттєвої ролі, і ними можна знехтувати. Очевидно, що виконання цих вимог можливе тільки для достатньо пологих нерівностей ($\sigma_\xi/l_\xi \ll 1$) і при не надто ковзному опроміненні ($\Psi_0 \gg \sigma_\xi/l_\xi$).

Припустимо далі, що довжина хвилі λ випромінювання, що падає на поверхню $\Sigma(\vec{R})$, достатньо мала, і розміри першої зони Френеля поблизу $\Sigma(\vec{R})$ набагато менші за характерні масштаби зміни $\Sigma(\vec{R})$ у всіх напрямках (такими можуть, наприклад, виступати радіуси кривизни поверхні). У цьому разі у малому околі точки O' можна наближено вважати, що, по-перше, поле падаючої хвилі $U_{nad}(\vec{R}')$ є плоскою (квазіплоскою) хвилею:

$$U_{nad}(\vec{R}') = A(\vec{R}') e^{i\vec{k}_0' \vec{R}'} = A(\vec{R}') e^{i(\vec{k}_{0\perp}' \vec{r} + k_{0z}' z')}, \quad (20.1)$$

де $A(\vec{R}')$ — повільно змінна (порівняно з експоненційним множником) амплітуда падаючого випромінювання, \vec{k}_0' — хвильовий вектор падаючої хвилі, що має відповідно тангенціальну — $(\vec{k}_{0\perp}')$ і нормальну $(\vec{k}_{0z}' = k_{0z}' \vec{e}_z)$ складові: $\vec{k}_0' = \vec{k}_{0\perp}' + \vec{k}_{0z}'$ (залежний від часу множник $e^{-i\omega t}$, як завжди, опускається). По-друге, процес відбиття $U_{відб}(\vec{R}')$ від істинної криволінійної поверхні $\Sigma(\vec{R})$ можна розглядати як відбиття від дотичної площини Σ' ($z'=0$). При цьому відбите від площини $z'=0$ за законами геометричної оптики хвильове поле $U_{відб}(\vec{R}')$ також є плоскою (квазіплоскою) хвилею, амплітуда якої відрізняється від $A(\vec{R}')$ на множник \mathbb{R} , що називається **коефіцієнтом відбиття**, а хвильовий вектор $\vec{k}'_{відб} = (\vec{k}'_{\perp відб}, \vec{k}'_{z відб})$, має такі компоненти: тангенціальна (дотична до поверхні Σ' , тобто така, що лежить у площині $z'=0$) компонента зберігається, а нормальна (спрямована вздовж осі $O'Z'$) змінює знак на протилежний ($\vec{k}'_{z відб} = -\vec{k}'_{0z}$):

$$U_{відб}(\vec{R}') = \mathbb{R} A(\vec{R}') e^{i\vec{k}'_{відб} \vec{R}'} = \mathbb{R} A(\vec{R}') e^{i(\vec{k}_{0\perp}' \vec{r} - k_{0z}' z')}. \quad (20.2)$$

Виконані спрощення дають змогу виразити значення повного поля $U(\vec{R}') = U_{nad}(\vec{R}') + U_{відб}(\vec{R}')$ на дотичній площині $z'=0$ через задане поле $U_{nad}(\vec{R}')$, що падає на поверхню. Так, із формул (20.1) і (20.2) отримаємо такі співвідношення:

$$U(\vec{R}')_{z'=0} = [U_{nad}(\vec{R}') + U_{відб}(\vec{R}')]_{z'=0} = (1 + \mathbb{R}) U_{nad}(\vec{R}') \Big|_{z'=0}. \quad (20.3 \text{ a})$$

Аналогічно обчислюємо і значення нормальної похідної:

$$\left. \frac{\partial U(\vec{R}')}{\partial N} \right|_{z'=0} = \frac{\partial}{\partial z'} [U_{nad}(\vec{R}') + U_{відб}(\vec{R}')] \Big|_{z'=0} = (1 - \mathbb{R}) \frac{\partial}{\partial z'} U_{nad}(\vec{R}') \Big|_{z'=0} \quad (20.3 \text{ б})$$

(при виведенні цієї формули амплітуду $A(\vec{R}')$ можна наближено вважати сталою величиною у малому околі точки O' і знехтувати похідною від неї за $\partial z'$).

Повертаючись тепер до старої (нештрихованої) системи координат XYZ , ми можемо записати

$$U(\vec{R}) \Big|_{\Sigma} = [U_{nad}(\vec{R}) + U_{відб}(\vec{R})]_{\Sigma} = (1 + \mathbb{R}) U_{nad}(\vec{R}) \Big|_{\Sigma}, \quad (20.4 \text{ а})$$

$$\left. \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right|_{\Sigma} = \frac{\partial}{\partial N} [U_{nad}(\vec{R}) + U_{відб}(\vec{R})]_{\Sigma} = (1 - \mathbb{R}) \frac{\partial}{\partial N} U_{nad}(\vec{R}) \Big|_{\Sigma}. \quad (20.4 \text{ б})$$

Слід зазначити, що знайдений зв'язок між полями і їх нормальними похідними є точним для пласкої хвилі, що падає на плоску межу поділу, і наближено справджується для локально пласкої хвилі (20.1), що падає на локально плоску поверхню Σ , тобто на поверхню з плавними неоднорідностями.

20.2. Побудова наближеного динамічного розв'язку

Формули (20.4) визначають значення поля U і його нормальної похідної $\partial U / \partial N$ у кожній точці \vec{R} поверхні $\Sigma(\vec{R})$, і для знаходження поля U в довільній точці спостереження \vec{R}_p можна скористатися формулою Гріна (17.8). Для цього доповнимо розсіюючу нерівну поверхню $\Sigma(\vec{R})$ до замкнутої поверхні (див. рис. 20.2) за допомогою півсфери C_a (достатньо великого радіуса

a і з центром у точці початку координат O) і плоскими ділянками Σ_{nl} (від межі Σ в площині $z=0$ до кола радіусом a). Тоді згідно з (17.8) маємо:

$$U(\vec{R}_p) = \int_V G(\vec{R}, \vec{R}_p) Q(\vec{R}) d\vec{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a} \left[U(\vec{R}) \frac{\partial G(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial N} - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma. \quad (20.5)$$

Тут нормаль \vec{N} спрямована всередину замкнутої поверхні, з цим і пов'язана відмінність знаків перед другим інтегралом у (20.5) і (17.8). У першому доданку інтегрування проводиться за об'ємом V , обмеженим поверхнею $\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a$.

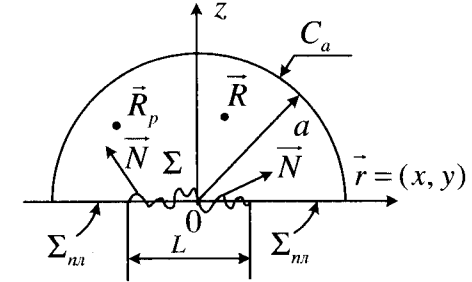


Рис. 20.2

Якщо як функцію $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ взяти функцію Гріна необмеженого (вільного) простору

$$G(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R} - \vec{R}_p|}}{|\vec{R} - \vec{R}_p|}, \quad (20.6)$$

то об'ємний інтеграл у (20.5) описує поле заданих джерел $Q(\vec{R})$ у вільному просторі (за відсутності відбиваючої поверхні Σ), тобто дає поле падаючої хвилі:

$$U_{nad}(\vec{R}_p) = \int_V \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} Q(\vec{R}) d\vec{R}, \quad (20.7)$$

а поверхневий інтеграл описує розсіювання цього поля на поверхні.

Якщо у поверхневому інтегралі в (20.5) замість повного поля U підставити тільки поле падаючої хвилі U_{nad} , то цей інтеграл тотожно перетвориться у нуль:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a} \left[U_{nad}(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} - \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial U_{nad}(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma \equiv 0. \quad (20.8)$$

Для доведення цього твердження розглянемо безмежний простір із заданим розподілом джерел $Q(\vec{R})$ і проведемо у ньому уявну поверхню, що збігається з замкнутою поверхнею $\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a$. Формула Гріна (20.5) буде справджуватися й у цьому випадку. Для функції Гріна $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$, що відповідає безмежному просторові, об'ємний інтеграл визначає поле падаючої хвилі U_{nad} . Повне ж поле U , що стоїть у лівій частині рівності (20.5), також має збігатися з U_{nad} ($U = U_{nad}$) (інших полів, окрім U_{nad} , у просторі немає). В результаті формула Гріна (20.5) набуває вигляду

$$U_{nad}(\vec{R}_p) = U_{nad}(\vec{R}_p) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a} \left[U_{nad}(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} - \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial U_{nad}(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma.$$

Ця рівність може задовольнятися тільки при виконанні умови (20.8). Таким чином, заміна повного поля U на поле падаючої хвилі U_{nad} у кожній точці поверхні $\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a$ означає відсутність будь-якої реальної фізичної поверхні взагалі, бо на реальній поверхні обов'язково виникають відбиті хвилі, і повне поле U відрізняється від поля U_{nad} вільного простору.

Віднімемо тепер від правої частини (20.5) вираз (20.8). Ліва частина формули (20.5) при цьому не повинна змінитися, оскільки величина, що віднімається, дорівнює нулю:

$$U(\vec{R}_p) = U_{nad}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma+\Sigma_{nl}+C} d\Sigma \left\{ [U(\vec{R}) - U_{nad}(\vec{R})] \frac{\partial}{\partial N} G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial}{\partial N} [U(\vec{R}) - U_{nad}(\vec{R})] \right\}. \quad (20.9)$$

Так само, як і у методі фазового екрана (див. (17.9)), спрямуємо радіус півсфери a у нескінченність ($a \rightarrow \infty$). При цьому інтеграл за C_a зникає (в силу принципу випромінювання). Крім цього, на уявній поверхні Σ_{nl} повне поле U замінимо полем падаючої хвилі U_{nad} , нехтуючи розсіяними на реальній поверхні Σ хвилями. Цей прийом був застосований ще Кірхгофом при розв'язуванні задач дифракції на плоских екранах: припускалося, що поле на поверхні, котра доповнює екран до повної площини, є таким самим, яким воно було б і за відсутності екрана, тобто збігається із полем падаючої хвилі U_{nad} . Звідси походить ще одна

часто вживана назва методу розрахунку розсіяного на нерівній поверхні поля – **метод Кірхгофа**. Після заміни U на U_{nad} на Σ_{nl} інтеграл за поверхнею перетворюється на нуль (за рахунок того, що підінтегральний вираз дорівнює нулю). На реальній поверхні Σ скористаємося формулами (20.4), що пов'язуються U і $\partial U/\partial N$ з полем падаючої хвилі. В результаті формула (20.9) набуває такого вигляду:

$$U(\vec{R}_p) = U_{nad}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ \mathcal{R} \frac{\partial}{\partial N} [U_{nad}(\vec{R}) G(\vec{R}, \vec{R}_p)] \right\} d\Sigma. \quad (20.10)$$

Формула (20.10) розв'язує (звичайно, наближено) „динамічну” частину задачі, подаючи розсіяне на нерівній поверхні хвильове поле у вигляді інтеграла від відомих функцій. Якщо поверхня Σ є випадковою, поле $U(\vec{R}_p)$ також виявляється випадковим, і для його опису необхідний статистичний підхід. Далі ми обмежимося обчисленням перших двох моментів поля U – когерентної складової $\langle U \rangle$ (середнього поля) та середньої інтенсивності $\langle I \rangle = \langle |U|^2 \rangle$. Перед тим, як обчислювати вказані статистичні моменти поля U , приймемо низку припущень для спрощення.

1. Як $Q(\vec{R})$ розглянемо точкове одиничне джерело, розташоване у точці \vec{R}_s :

$$Q(\vec{R}) = \delta(\vec{R} - \vec{R}_s), \quad (20.11)$$

яке породжує U_{nad} у вигляді сферичної хвилі, що розходитьсь:

$$U_{nad}(\vec{R}) = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_s|}}{|\vec{R}-\vec{R}_s|}. \quad (20.12)$$

Ця формула впливає з (20.7) після підстановки у неї (20.11) і виконання інтегрування за об'ємом за допомогою δ -функції.

2. Коефіцієнт відбиття \mathcal{R} наближено вважатимемо сталою величиною в усіх точках поверхні Σ , що дає змогу винести його за знак інтеграла у формулі (20.10). Підставляючи (20.6) і (20.12) у (20.10), для розсіяного поля $U_{roz}(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p) - U_{nad}(\vec{R}_p)$ отримуємо

$$U_{roz}(\vec{R}_p) = \frac{\mathcal{R}}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik(|\vec{R}_p-\vec{R}|+|\vec{R}_s-\vec{R}|)}}{|\vec{R}_p-\vec{R}||\vec{R}_s-\vec{R}|} d\Sigma. \quad (20.13)$$

3. Якщо джерело поля \vec{R}_s і точка спостереження \vec{R}_p знаходяться достатньо далеко від розсіюючої поверхні Σ (в зоні Фраунгофера), і виконуються нерівності

$$\frac{L}{R_p}, \frac{kL^2}{R_p} \ll 1; \quad \frac{L}{R_s}, \frac{kL^2}{R_s} \ll 1, \quad (20.14)$$

(тут, як і в попередньому параграфі, через L позначено лінійний розмір розсіюючої поверхні у площині $z=0$ (див. рис. 20.2)), то відстані $|\vec{R}_p - \vec{R}|$ і $|\vec{R}_s - \vec{R}|$ можуть бути розкладені в ряд Тейлора за малими величинами $R/R_s, R/R_p \ll 1$:

$$|\vec{R}_p - \vec{R}| \approx R_p - \frac{\vec{R}_p \vec{R}}{R_p}, \quad |\vec{R}_s - \vec{R}| \approx R_s - \frac{\vec{R}_s \vec{R}}{R_s}.$$

При цьому формула (20.13) суттєво спрощується:

$$U_{roz}(\vec{R}_p) \approx \frac{\mathcal{R}}{4\pi R_p R_s} e^{ik(R_p+R_s)} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial N} e^{-i\vec{q}\vec{R}} d\Sigma. \quad (20.15)$$

Тут $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$ — вектор розсіювання ($\vec{k} = k\vec{R}_p/R_p$ — хвильовий вектор розсіяного поля у точці спостереження, $\vec{k}_0 = -k\vec{R}_s/R_s$ — хвильовий вектор падаючої хвилі поблизу поверхні Σ).

4. Радіус-вектор \vec{R} точок, що належать поверхні Σ , можна записати у вигляді суми двох ортогональних векторів (рис. 20.3):

$$\vec{R} = \vec{r} + \xi(\vec{r})\vec{e}_z, \quad (20.16)$$

де $\vec{r} = (x, y)$ — проекція \vec{R} на площину $z=0$, а $\xi(\vec{r})$ — випадкова функція, що описує відхилення поверхні Σ від середньої площини. Похідна за нормаллю N у формулі (20.15) легко обчислюється за відомим правилом обчислення похідної уздовж заданого напрямку:

$$\frac{\partial}{\partial N} e^{-i\vec{q}\vec{R}} = (\vec{N}\vec{\nabla}_{\vec{R}}) e^{-i\vec{q}\vec{R}} = -i(\vec{N}\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{R}}. \quad (20.17)$$

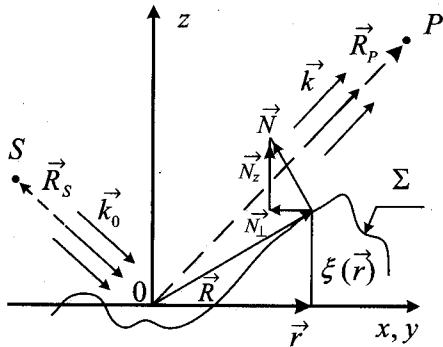


Рис. 20.3

Одиничний вектор нормалі \vec{N} до поверхні Σ у змінній точці має компоненти $\vec{N} = (\vec{N}_\perp, \vec{N}_z)$, де

$$\vec{N}_\perp = -\frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad \vec{N}_z = \frac{\vec{e}_z}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad (20.18)$$

а $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\xi(\vec{r})$ — векторне поле градієнтів підвищень $\xi(\vec{r})$ випадкової поверхні Σ .

5. Нарешті, у формулі (20.15) перейдемо від інтегрування за криволінійною поверхнею Σ до інтегрування за її проекцією Σ_0 на площину $z=0$ (див. рис. 20.4):

$$d\Sigma = \frac{d\Sigma_0}{N_z} = \frac{d\vec{r}}{N_z}. \quad (20.19)$$

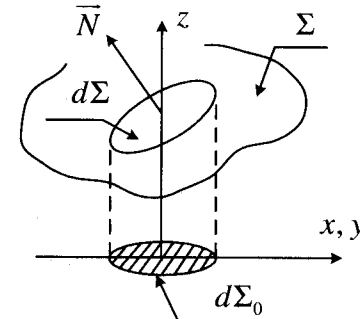


Рис. 20.4

Після пророблених спрощень для розсіяного поля у дальній зоні отримаємо

$$U_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \approx \frac{\mathbb{R}}{4\pi i R_s R_p} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} [q_z - \vec{q}_\perp \vec{\gamma}(\vec{r})] e^{-i[\vec{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})]} d\vec{r}, \quad (20.20)$$

де $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y)$ — проекція вектора \vec{q} на площину $z=0$.

6. При розсіюванні коротких хвиль на високих нерівностях спостерігаються великі флуктуації фази у показнику експоненти, що у свою чергу призводить до швидких осциляцій підінтегральної функції у (20.20). У цьому випадку при оцінці інтеграла можна скористатися методом стаціонарної фази (див. §19). Роль випадкової фази у (20.20) відіграє величина $S(\vec{r}) = \vec{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})$, що описує додатковий набіг фази у кожній точці (екрана) \vec{r} за рахунок відхилення поверхні Σ від площини $z=0$ на величину $\xi(\vec{r})$. У короткохвильовому наближенні основний внесок у інтеграл (20.20) дають точки, де функція $S(\vec{r})$ досягає екстремуму:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} S(\vec{r}) = \vec{q}_\perp + q_z \vec{\gamma}(\vec{r}) = 0. \quad (20.21)$$

Припустимо, що векторне рівняння (абераційне) має дійсні корені $\vec{r} = \vec{r}_m$, $m=1, 2, \dots$. Згідно з (20.21) у точках стаціонарності фази

нахили поверхні $\vec{\gamma}(\vec{r})$ мають одне і те саме незалежне від m значення:

$$\vec{\gamma}(\vec{r} = \vec{r}_m) = -\frac{\vec{q}_\perp}{q_z}. \quad (20.22)$$

Звідси випливає, що і вектор нормалі \vec{N} , проведений до поверхні у точках $\vec{r} = \vec{r}_m$, також не залежить від m . Дійсно, згідно з (20.18) маємо:

$$\vec{N}(\vec{r}_m) = \frac{-\vec{\gamma}(\vec{r}_m) + \vec{e}_z}{\sqrt{1 + \gamma^2(\vec{r}_m)}} = \frac{\vec{q}_\perp + q_z \vec{e}_z}{\sqrt{q_\perp^2 + q_z^2}} = \frac{\vec{q}}{q}. \quad (20.23)$$

Видно, що нормалі $\vec{N}(\vec{r}_m)$ спрямовані вздовж фіксованого вектора розсіювання $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$ для всіх без винятку стаціонарних точок.

У свою чергу вектор \vec{q} спрямований за бісектрисою кута між \vec{k}_0 і \vec{k} . Звідси випливає, що нормаль \vec{N} у точках стаціонарної фази $\vec{r} = \vec{r}_m$, як видно з рис. 20.5, утворює рівні кути θ' з хвильовими векторами \vec{k}_0 і \vec{k} .

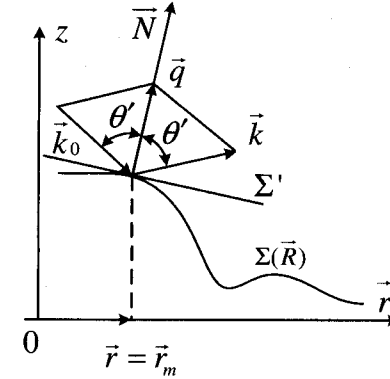


Рис. 20.5

Таким чином, нормаль \vec{N} у стаціонарних точках спрямована так, що падаюча хвиля (з хвильовим вектором \vec{k}_0) дзеркально відбивається від дотичної площини ($z'=0$) у напрямку \vec{k} , тобто у точку спостереження. Отже, **точки стаціонарної фази підінтегрального виразу (20.20) є дзеркальними точками**, які й чинять головний вплив на поле $U_{роз}$, розсіяне у заданому напрямку \vec{k} .

Згідно з методом стаціонарної фази, передекспоненційний множник у (20.20) виводиться за знак інтеграла у точках $\vec{r} = \vec{r}_m$:

$$[q_z - \vec{q}_\perp \vec{\gamma}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_m} = q_z + \frac{q_\perp^2}{q_z} = \frac{q^2}{q_z}, \quad (20.24)$$

після чого формула (20.20) подається у вигляді

$$U_{poz}(\bar{R}_p) \approx \frac{\mathbb{R}}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i[\bar{q}_\perp \bar{r} + q_z \xi(\bar{r})]}. \quad (20.25)$$

Зауважимо, що при отриманні (20.25) ми використали метод стаціонарної фази тільки частково, винісши передекспоненційний множник $q_z - \bar{q}_\perp \bar{r}(\bar{r})$ у точках стаціонарної фази за знак інтеграла, але не розкладаючи фазу $S(\bar{r}) = \bar{q}_\perp \bar{r} + q_z \xi(\bar{r})$ у ряд Тейлора у точках екстремуму і не підсумовуючи внески від усіх точок $\bar{r} = \bar{r}_m$.

20.3. Середнє розсіяне поле

У формулу (20.25) у явному вигляді входить тільки випадкове поле підвищень $\xi(\bar{r})$. Враховуючи це, запишемо вираз для середнього розсіяного поля у точці спостереження:

$$\langle U_{poz}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{\mathbb{R}}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_\perp \bar{r}} \langle e^{-iq_z \xi(\bar{r})} \rangle. \quad (20.26)$$

Для спрощення задачі вважатимемо, що $\xi(\bar{r})$ є нормальним (гауссовим) просторово однорідним („стаціонарним” за просторовими змінними) випадковим полем. У цьому випадку маємо

$$\langle e^{-iq_z \xi(\bar{r})} \rangle = e^{-\frac{1}{2} q_z^2 \sigma_\xi^2},$$

де $\sigma_\xi^2 = \langle \xi^2 \rangle = \text{Const}$ і враховано, що $\langle \xi \rangle = 0$.

У результаті вираз (20.26) приводиться до вигляду

$$\langle U_{poz}(\bar{R}_p) \rangle = \mathbb{R}_{ef} U_d(\bar{R}_p). \quad (20.27)$$

Тут

$$U_d(\bar{R}_p) = \frac{1}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_\perp \bar{r}} \quad (20.28)$$

поле у точці спостереження, що виникає у дальній зоні при відбитті від ідеально відбиваючої ($\mathbb{R} = 1$) плоскої поверхні Σ_0 , а

$$\mathbb{R}_{ef} = \mathbb{R} e^{-\frac{1}{2} q_z^2 \sigma_\xi^2} \quad (20.29)$$

ефективний коефіцієнт відбиття середнього поля.

Якщо лінійні розміри відбиваючої поверхні Σ_0 у всіх напрямках (у площині $z = 0$) достатньо великі порівняно з довжиною хвилі, то інтеграл (20.28) відмінний від нуля тільки у напрямку дзеркального відбиття ($\bar{q}_\perp = 0$) від середньої площини $z = 0$. Справді,

$$\lim_{k^2 \Sigma_0 \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_\perp \bar{r}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_\perp \bar{r}} = (2\pi)^2 \delta(\bar{q}_\perp). \quad (20.30)$$

Таким чином, і середнє розсіяне поле $\langle U_{poz} \rangle$ виявляється відмінним від нуля тільки у напрямку дзеркального відбиття від середньої площини $z = 0$, причому коефіцієнт відбиття \mathbb{R}_{ef} відрізняється від коефіцієнта відбиття від плоскої поверхні \mathbb{R} тим самим експоненціальним множником, який виникає при дифракції на хаотичному фазовому екрані (17.60)).

Враховуючи, що у напрямку дзеркального відбиття $\bar{q}_\perp = 0$, а $q_z = 2k \cos \theta_0$, формулу (20.29) можна переписати у такому вигляді:

$$\mathbb{R}_{ef} = \mathbb{R} e^{-P^2/2}, \quad (20.31)$$

де $P = 2k \sigma_\xi \cos \theta_0$ — введений раніше параметр Релея.

20.4. Середня інтенсивність

Так само, як і під час розгляду середнього поля, при обчисленні середньої інтенсивності $\langle I_{\text{роз}} \rangle = \langle |U_{\text{роз}}|^2 \rangle$ обмежимося тільки випадком великих значень параметра Релея ($P \gg 1$), маючи на увазі, що протилежний граничний випадок ($P \ll 1$) був докладно вивчений у попередньому параграфі методом малих збурень. Великим значенням параметра Релея відповідає розсіювання коротких хвиль на високих нерівностях. Згідно з (20.25) обчислення другого моменту поля зводиться до усереднення подвійного інтеграла за поверхнею Σ_0 (тобто чотирикратного інтеграла):

$$\langle I_{\text{роз}}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r}' \int_{\Sigma_0} d\vec{r}'' e^{-i\vec{q}_\perp(\vec{r}' - \vec{r}'')} \langle e^{-iq_z[\xi(\vec{r}') - \xi(\vec{r}'')]} \rangle. \quad (20.32)$$

Якщо випадкове поле відхилень поверхні $\xi(\vec{r})$ статистично однорідне і нормально розподілене, то усереднення під знаком інтеграла призводить до такого результату (див. (17.62)):

$$\langle e^{-iq_z[\xi(\vec{r}') - \xi(\vec{r}'')]} \rangle = e^{-\frac{1}{2}q_z^2 D_\xi(\vec{r}' - \vec{r}'')}, \quad (20.33 \text{ а})$$

де $D_\xi(\vec{r}', \vec{r}'') = \langle [\xi(\vec{r}') - \xi(\vec{r}'')]^2 \rangle = 2\sigma_\xi^2 - 2B_\xi(\vec{r}' - \vec{r}'') = 2\sigma_\xi^2 [1 - K_\xi(\vec{r}' - \vec{r}'')] -$ структурна функція нерівностей, що легко виражається через автокореляційну функцію $B_\xi(\vec{r}' - \vec{r}'')$ або коефіцієнт кореляції $K_\xi(\vec{r}' - \vec{r}'') = B_\xi(\vec{r}' - \vec{r}'')/\sigma_\xi^2$. Для ізотропного поля флуктуацій підвищень $D_s(\vec{r}' - \vec{r}'') = D_s(|\vec{r}' - \vec{r}''|) = D_s(\rho)$ і у короткохвильовому наближенні ($q_z^2 \sigma_\xi^2 \gg 1$) аналогічно до (17.68) можна скористатися спрощенням

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}q_z^2 D_\xi(\rho)\right\} \approx \exp\left\{-\frac{q_z^2 \sigma_\xi^2}{2l_\xi^2} \rho^2\right\}. \quad (20.33 \text{ б})$$

Тут $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$, а $l_\xi = \left[-\frac{d^2 K''(\rho)}{d\rho^2} \right]_{\rho=0}^{-1/2}$ — характерний масштаб

спадання (горизонтальний розмір неоднорідностей) коефіцієнта кореляції.

Перейдемо тепер у (20.32) від інтегрування за $d\vec{r}', d\vec{r}''$ до нових сумарних $\vec{r} = (\vec{r}' + \vec{r}'')/2$ і різницевих $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$ змінних. Якщо характерний розмір неоднорідностей l_ξ значно менший за лінійні розміри L ($L \gg l_\xi$) всієї розсіюючої поверхні Σ_0 ($L \sim \sqrt{\Sigma_0}$), то інтегрування за $\vec{\rho}$ можна провести у нескінченних межах, а область інтегрування за $d\vec{r}$ буде практично збігатися зі старою — Σ_0 . З урахуванням вищевикладеного формула (20.32) набуває вигляду

$$\langle I_{\text{роз}}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-\frac{q_z^2 \sigma_\xi^2}{2l_\xi^2} \rho^2 - i\vec{q}_\perp \vec{\rho}}. \quad (20.34)$$

Ми знову прийшли до результату, коли чотирикратний інтеграл розпався на добуток двох двократних, причому інтеграл за $d\vec{r}$ дорівнює розсіюючій площі Σ_0 , а обчислення інтеграла за $d\vec{\rho}$ проводилося у параграфі 17 (див. (17.73)):

$$\langle I_{\text{роз}}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|\mathcal{R}|^2 \Sigma_0}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^4} \cdot \frac{1}{\pi \sigma_\gamma^2} \cdot e^{-\frac{q_\perp^2}{q_z^2 \sigma_\gamma^2}}. \quad (20.35)$$

Тут за аналогією з (17.80) враховано зв'язок між дисперсією висот σ_ξ^2 випадкового поля підвищень $\xi(\vec{r})$ і дисперсією ухилів — σ_γ^2 випадкового поля градієнтів $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_\vec{r} \xi(\vec{r})$:

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_\xi^2}{l_\xi^2}. \quad (20.36)$$

Розширимо тепер можливості оцінки вихідного інтегрального подання, не накладаючи заздалегідь умов нормальності розподілу висот $\xi(\vec{r})$. Для цього перепишемо (20.32) у сумарних і різницевих координатах:

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_r} d\vec{r} \int_{\Sigma_\rho} d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} \times \\ &\times \langle e^{-iq_z [\xi(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \xi(\vec{r} - \vec{\rho}/2)]} \rangle. \end{aligned} \quad (20.37)$$

Тут $\Sigma_{r,\rho}$ — відповідні області інтегрування за $d\vec{r}$ і $d\vec{\rho}$. Із попереднього розгляду нормального розподілу $\xi(\vec{r})$ випливало, що у короткохвильовому наближенні основний внесок в інтеграл за $d\vec{\rho}$ дають тільки невеликі ділянки поверхні, що лежать поблизу точок, де $\vec{\rho} = 0$. Скористаємося цим і розкладемо різницю $\xi(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \xi(\vec{r} - \vec{\rho}/2)$ у ряд Тейлора у точці $\vec{\rho} = 0$. У результаті з точністю до лінійних членів отримаємо (див. (17.70)):

$$\xi(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \xi(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \approx \vec{\nabla}_\vec{r} \xi(\vec{r}) \vec{\rho} = \vec{\gamma}(\vec{r}) \vec{\rho}. \quad (20.38)$$

Окрім того, границі інтегрування за $d\vec{\rho}$ можна поширити на всю нескінченну площину, а $\Sigma_\vec{r}$ практично збігається з вихідною поверхнею Σ_0 . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \langle e^{-i[\vec{q}_\perp + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] \vec{\rho}} \rangle = \\ &= \frac{|\mathcal{R}|^2}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \langle \delta[\vec{q}_\perp + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] \rangle. \end{aligned} \quad (20.39)$$

Усереднення щодо випадкових нахилів $\vec{\gamma}$ можна виконати звичайним способом, користуючись густиною розподілу ймовірностей $W_\gamma(\vec{\gamma})$. Якщо $f(\vec{\gamma})$ є детермінованою функцією випадкового аргумента $\vec{\gamma}$, то середнє значення $\langle f(\vec{\gamma}) \rangle$ обчислюється за формулою

$$\langle f(\vec{\gamma}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\gamma}) W_\gamma(\vec{\gamma}) d\vec{\gamma}. \quad (20.40)$$

У результаті усереднена формула (20.39) набуває такого остаточного вигляду:

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\gamma} \delta[\vec{q}_\perp + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] W_\gamma(\vec{\gamma}) = \\ &= \frac{|\mathcal{R}|^2 \Sigma_0}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^4} W_\gamma\left(-\frac{\vec{q}_\perp}{q_z}\right). \end{aligned} \quad (20.41)$$

При обчисленні інтеграла по $d\vec{\gamma}$ ми скористалися відомою властивістю δ -функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(a + bx) dx = \frac{1}{|b|} f\left(-\frac{a}{b}\right).$$

Легко перевірити, що для нормального закону розподілу нахилів

$$W_\gamma(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{\pi\sigma_\gamma^2} e^{-\gamma^2/\sigma_\gamma^2} \quad (20.42)$$

формула (20.41) точно переходить у раніше знайдену (20.35).

20.5. Індикатриса розсіювання

Згідно з (19.31) індикатриса розсіювання $F(\theta_p, \varphi_p)$ була визначена як відношення середньої інтенсивності, розсіяної у довільному напрямку \vec{k} , до середньої інтенсивності, розсіяної у дзеркальному напрямку ($\vec{q}_\perp = 0$):

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_p(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_p(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot \frac{W_\gamma(-\vec{q}_\perp/q_z)}{W_\gamma(0)}. \quad (20.43)$$

Для кількісних оцінок розглянемо нормальний закон розподілу (20.42), для якого формула (20.43) набуває конкретного вигляду

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot e^{-\frac{q_\perp^2}{q_z^2 \sigma_\gamma^2}}. \quad (20.44)$$

Скориставшись значенням проекцій вектора $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$, записаних у сферичних координатах (див.(19.32)), отримаємо

$$F(\theta_p, \varphi_p) = 4 \frac{(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \exp \left\{ -\frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}. \quad (20.45)$$

Для пологих неоднорідностей, коли $\sigma_\gamma^2 \ll 1$, можна знехтувати повільною змінною за кутами θ_p і φ_p передекспоненційного множника у (20.45) і вважати, що ширина індикатриса розсіювання визначається в основному показником степеня експоненти, тобто тією ділянкою кутів (θ_p, φ_p) , у якій показник степеня експоненти у (20.45) не перевищує одиниці (за порядком величини):

$$\frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \leq 1. \quad (20.46)$$

Так само, як і в попередньому параграфі, оцінимо спочатку ширину індикатриса у площині падіння. Вважаючи у (20.46) $\varphi_p = 0$, отримуємо

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \leq 1.$$

При $\sigma_\gamma^2 \ll 1$ ця нерівність може виконуватися тільки для кутів θ_p , що відрізняються від θ_0 на малу величину $\Delta\theta_p$. Поклавши $\theta_p = \theta_0 + \Delta\theta_p$, з точністю до лінійних доданків за $\Delta\theta_p$, маємо $\sin \theta_p - \sin \theta_0 = \sin(\theta_0 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0 \approx \Delta\theta_p \cos \theta_0$, $\cos \theta_p + \cos \theta_0 \approx 2 \cos \theta_0$. При цьому показник степеня наближено подається у вигляді

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \approx \frac{(\Delta\theta_p)^2}{4\sigma_\gamma^2}. \quad (20.47)$$

Передекспоненційний множник у (20.45) можна наближено визначити для фіксованих значень кутів $\theta_p = \theta_0$, $\varphi_p = 0$, що відповідають максимальному значенню експоненти:

$$4 \frac{(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \bigg|_{\substack{\theta_p = \theta_0 \\ \varphi_p = 0}} = 1. \quad (20.48)$$

У результаті для індикатрисы розсіювання у площині падіння отримуємо таке наближене подання:

$$F(\theta_p, 0) \approx e^{-\frac{(\Delta\theta_p)^2}{4\sigma_\gamma^2}}. \quad (20.49)$$

Видно, що максимум індикатрисы припадає на напрямок дзеркального відбиття від середньої площини ($\Delta\theta_p = 0$, $\varphi_p = 0$), а залежність $F(\theta_p, 0)$ в околі θ_0 має вигляд гауссової кривої з характерною шириною

$$\Delta\theta_p = 2\sigma_\gamma. \quad (20.50)$$

Для оцінки ширини $F(\theta_p, \varphi_p)$ за кутом φ_p (у площині, перпендикулярній до площини падіння — XOZ) покладемо у показнику степеня експоненти у (20.45) $\theta_p = \theta_0$, а $\cos \varphi_p$ представимо у вигляді $\cos \varphi_p \approx 1 - \varphi_p^2/2$. При цьому формула (20.45) в околі напрямку дзеркального відбиття ($\theta_p = \theta_0$, $\varphi_p \ll 1$) набуває вигляду

$$F(\theta_0, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{\varphi_p^2}{4\sigma_\gamma^2 \text{ctg}^2 \theta_0} \right\}. \quad (20.51)$$

Звідси видно, що характерна ширина індикатрисы розсіювання за кутами φ_p дорівнює

$$\Delta\varphi_p = 2\sigma_\gamma \text{ctg} \theta_0. \quad (20.52)$$

Висновки

Із формул (20.49) і (20.51) випливає, що індикатриса розсіювання при $\sigma_\gamma^2 \ll 1$ має різкий максимум у напрямку дзеркального відбиття ($\theta_p = \theta_0$, $\varphi_p = 0$) від середньої площини. Залежність $F(\theta_p, \varphi_p)$ в околі максимуму має вигляд гауссової кривої. Характерні „розміри” $F(\theta_p, \varphi_p)$ за кутами θ_p і φ_p , дорівнюють $\Delta\theta_p = 2\sigma_\gamma$, $\Delta\varphi_p = 2\sigma_\gamma \text{ctg} \theta_0$ і визначаються дисперсією кутів нахилу нерівностей поверхні — σ_γ^2 .

Формули (20.50) і (20.52) дають змогу дійти важливого у практичному відношенні висновку про те, що при ковзному поширенні ($\theta_0 \rightarrow \pi/2$) ширина індикатрисы розсіювання у горизонтальній площині (за азимуту) може бути у багато разів меншою за ширину у вертикальній площині. Дійсно, згідно з (20.50) і (20.52) маємо:

$$\frac{\Delta\varphi_p}{\Delta\theta_p} = \text{ctg} \theta_0, \quad (20.53)$$

тобто при ковзному опроміненні поверхні $\theta_0 \rightarrow \pi/2$, $\text{ctg} \theta_0 \rightarrow 0$, і розсіювання випромінювання відбувається головним чином у вертикальній площині, а не в горизонтальній. Слід, проте, нагадати,

що наведені результати не враховують затінь і багаторазових відбивань, тому завжди припускається виконання нерівності $\text{ctg } \theta_0 \gg \sigma_\gamma$.

ЗАДАЧІ

1. У наближенні Кірхгофа розрахувати індикатрису розсіювання для випадкової поверхні

$$\xi(x, y) = \alpha x + \beta y, \quad (1)$$

де α і β – незалежні випадкові величини, розподілені за нормальним законом із нульовими середніми ($\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$) і дисперсіями $\sigma_\alpha^2 = \alpha_0^2$ і $\sigma_\beta^2 = \beta_0^2$. Побудувати схематичний графік індикатриси розсіювання.

Розв'язок. Задана поверхня розсіювання є випадково орієнтованою у просторі площиною. При цьому коефіцієнти α і β є тангенсами кутів нахилів площини відносно осей координат x та y відповідно ($\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma_x$, $\beta = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \gamma_y$). Унаслідок незалежності величин γ_x і γ_y для густини ймовірності нахилів $W_\gamma(\vec{\gamma})$ виконується співвідношення $W_\gamma(\gamma_x, \gamma_y) = W_\gamma(\gamma_x)W_\gamma(\gamma_y)$. Отже, з урахуванням нормальності розподілу нахилів γ_x і γ_y отримуємо

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{\gamma_x^2}{2\alpha_0^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\beta_0^2} \right\}. \quad (2)$$

Для визначення індикатриси розсіювання ми маємо, згідно з (20.43) виконати у (2) заміну $\vec{\gamma} \rightarrow -\vec{q}_\perp/q_z$, у результаті чого (2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} W_\gamma(\vec{\gamma}) \Big|_{\vec{\gamma} = -\vec{q}_\perp/q_z} &= \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2}{2\alpha_0^2 q_z^2} - \frac{q_y^2}{2\beta_0^2 q_z^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Обчислимо $W_\gamma(\vec{\gamma})$ у напрямку дзеркального відбиття, коли $\vec{q}_\perp = 0$:

$$W_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0}. \quad (4)$$

Підставляючи тепер отримані значення (3) і (4) у формулу (20.43), знаходимо вираз для індикатриси розсіювання:

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}. \quad (5)$$

Ураховуючи зв'язок (19.32) між проекціями вектора розсіювання q_x , q_y і q_z і кутами спостереження θ_p і φ_p , остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} F(\theta_p, \varphi_p) &= \frac{4(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\beta_0^2 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \theta_p \sin^2 \varphi_p}{2\alpha_0^2 \beta_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Побудуємо схематичне зображення $F(\theta_p, \varphi_p)$ у двох площинах: $XOZ - F(\theta_p, 0)$ і $XOY - F(\theta_0, \varphi_p)$. Ці окремі випадки легко отримуються з виразу (6):

$$F(\theta_p, 0) = \frac{4[1 + \cos(\theta_p + \theta_0)]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \exp \left\{ -\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}, \quad (7)$$

$$F(\theta_0, \varphi_p) = \frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4 \cos^4 \theta_0} \times \exp \left\{ -\frac{\text{tg}^2 \theta_0^2}{8\alpha_0^2 \beta_0^2} [\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \right\}. \quad (8)$$

Згідно з (7) і (8) при $\alpha_0^2 \ll 1$ і $\beta_0^2 \ll 1$ у розподілах $F(\theta_p, \varphi_p)$ спостерігатимуться гострі максимуми (рис. 20.6) під кутами $\theta_p = \theta_0$ — для $F(\theta_p, 0)$ і $\varphi_p = 0$ — для $F(\theta_0, \varphi_p)$.

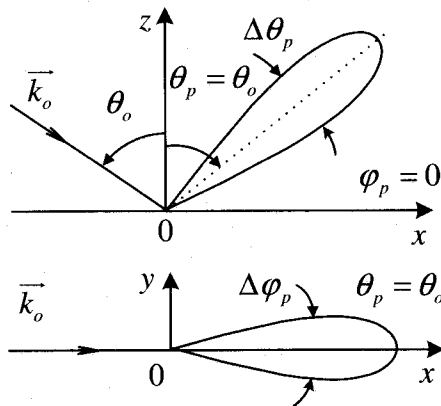


Рис. 20.6

Характерну ширину індикатриси розсіювання за рівнем e^{-1} легко оцінити за допомогою простих оцінок. Так, ураховуючи, що при $\alpha_0^2, \beta_0^2 \ll 1$ передекспоненційні множники у (7) і (8) повільно

змінюються порівняно з експонентами, наближено візьмемо їх для фіксованих кутів $\theta_p = \theta_0$ і $\varphi_p = 0$:

$$\left. \frac{4[1 + \cos(\theta_p + \theta_0)]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \right|_{\theta_p = \theta_0} = 1 \quad \text{для } F(\theta_p, 0), \quad (9)$$

$$\left. \frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4 \cos^4 \theta_0} \right|_{\varphi_p = 0} = 1 \quad \text{для } F(\theta_0, \varphi_p). \quad (10)$$

У показнику степеня (7) покладемо $\theta_p = \theta_0 + \Delta\theta_p$ і, вважаючи, що $\Delta\theta_p \ll \theta_0$, проведемо спрощення

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} = \frac{[\sin(\theta_0 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0]^2}{2\alpha_0^2 [\cos(\theta_0 + \Delta\theta_p) + \cos \theta_0]^2} \approx \frac{(\Delta\theta_p)^2}{8\alpha_0^2}. \quad (11)$$

Аналогічно і для (8) з точністю до квадратичних доданків за $\alpha_0^2, \beta_0^2, \varphi^2 \ll 1$ знаходимо спрощене подання

$$\frac{[\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \sin^2 \theta_0}{8\alpha_0^2 \beta_0^2 \cos^2 \theta_0} \approx \frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \text{ctg}^2 \theta_0}. \quad (12)$$

У результаті отримуємо такі наближені розподіли індикатриси розсіювання в околі максимумів:

$$F(\theta_p, 0) \approx \exp \left\{ -\frac{(\Delta\theta_p)^2}{8\alpha_0^2} \right\}, \quad (13)$$

$$F(\theta_0, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \text{ctg}^2 \theta_0} \right\}. \quad (14)$$

Звідси характерні масштаби зміни індикатриси розсіювання за кутами θ_p і φ_p дорівнюють:

$$\Delta\theta_p \approx 2\sqrt{2}\alpha_0,$$

$$\Delta\varphi_p \approx 2\sqrt{2}\beta_0 \operatorname{ctg}\theta_0.$$

2. Здійснити перехід у розглянутому у попередній задачі анізотропному розподілі нахилів до ізотропного випадку.

Розв'язок. Для ізотропного розподілу нахилів у густині ймовірності (2) задачі 1 ми маємо покласти $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$. З іншого боку, з урахуванням того, що

$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{e}_x + \gamma_y \vec{e}_y = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y,$$

для дисперсій модуля і проекцій отримуємо такий зв'язок:

$$\sigma_\gamma^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 = 2\sigma^2.$$

Враховуючи викладене, формули (2) і (6) попередньої задачі зводяться до вигляду (див. (20.42) и (20.45))

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\pi\sigma_\gamma^2} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{\sigma_\gamma^2}\right\} = W_\gamma(\gamma),$$

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{4(1 + \cos\theta_p \cos\theta_0 - \sin\theta_p \sin\theta_0 \cos\varphi_p)^2}{(\cos\theta_p + \cos\theta_0)^4} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\sin^2\theta_p + \sin^2\theta_0 - 2\sin\theta_p \sin\theta_0 \cos\varphi_p}{\sigma_\gamma^2(\cos\theta_p + \cos\theta_0)^2}\right\}.$$

Післямова

Розглянуті в підручнику задачі і методи їхнього розв'язання звичайно далеко не вичерпують усе коло питань сучасної радіофізики. Поза розглядом опинилися, наприклад, такі, як розсіювання хвиль у розряджених хмарах дискретних розсіювачів; теорія перенесення випромінювання в межах наближення параболічного рівняння; питання когерентності й інтерферометрії, адаптивної оптики, радіотомографії, дистанційного зондування, радіолокації і розпізнавання цілей. Серед радіотехнічних проблем цікаво було розглянути такі, як перетворення випадкових процесів у нелінійних системах, адаптивне приймання сигналів, різноманітні види шумів та існуючі методи їхнього аналізу в інтегральних, напівпровідникових і квантових приладах, способи боротьби з завадами тощо. Проте основною метою авторів було не всебічне охоплення всіх сучасних радіофізичних задач і методів їхнього розв'язання, а, за можливістю, в межах невеликого курсу, який відповідає сучасним вимогам вищої освіти, сформулювати у студентів загальне уявлення про необхідність урахування випадкових факторів, про фізичні процеси, котрі викликають випадкові зміни вимірюваних параметрів і про існуючі способи і методи їхнього статистичного аналізу і прогнозування. Використовуючи цей підручник, як базовий, можна розробляти спеціальні курси, присвячені окремим конкретним питанням статистичної радіофізики.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Блиох П.В.* Статистическая радиофизика. — Х.: Рукопись. Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, 1976. — 126 с.
2. *Фукс И.М.* Статистическая радиофизика и теория информации// Препринт. Харьк. гос. ун-т: Ч. I, 1985. — 60 с.; Ч. II, 1986. — 88 с.; Ч. III, 1992. — 91 с.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. Радио, 1974. — 550 с.
4. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.
5. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976. — 494 с.
6. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 463 с.
7. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
8. *Шифрин Я. С.* Вопросы статистической теории антенн. — М.: Сов. радио, 1970. — 384 с.
9. *Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. — М.: Сов. радио, 1980. — 544 с.

Додаткові джерела

1. *Татарский В.И.* Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. — 548 с.
2. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
3. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. Радио, 1961. — 558 с.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
5. *Ваништейн Л.А., Зубаков В.Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. Радио, 1960. — 447 с.
6. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 276 с.
7. *Гуткин Л.С.* Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. — М.: Сов. Радио, 1972. — 448 с.
8. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.

Навчальне видання

Мінаков Анатолій Олексійович
Тирнов Олег Федорович

СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

Редактор *А.М. Цимбал*
Коректори *Н.А. Балабуха, О.О. Шапошникова*
Комп'ютерна верстка *В.А. Паланський*



Підписано до друку 14.05.2003 р. Формат 60 × 84 1/16. Папір офсетний.

Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 30,69.

Ум. фарбовідб. 31,39. Обл.-вид. арк. 32,48. Тираж 1500 прим.

Вид. № 204. Зам. №409/041.

Видавництво «Факт»

Україна, 61057, м. Харків, вул. Донець-Захаржевського, 4а/4б.

Тел./факс: (057)712-81-24, 712-77-12.

Свідоцтво про держреєстрацію: серія ДК №314 від 23.01.2001 р.

Виготовлено у ТОВ «Навчальний друк»

Україна, 61001, м. Харків, вул. Державінська, 38.

Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК №58 від 10.06.2002 р.