

32-84273

М62

**А. О. Мінаков  
О. Ф. Тирнов**



# **СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА**

**Частина III**

За основу підручника, який складається з трьох частин, став курс лекцій зі статистичної радіофізики, що викладається у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна. Уперше цей курс було прочитано понад тридцять років тому професором кафедри космічної радіофізики П.В. Блюхом. У 1980-ті роки професор цієї ж кафедри І.М. Фукс доповнив лекційний курс розділами з розсіювання електромагнітних хвиль на випадкових поверхнях. Починаючи з 1998 р. суттєво перероблений і доповнений курс читається авторами підручника.

Без сумніву, охопити широкі коло питань, що належать до статистичної радіофізики, неможливо. Головна мета авторів — стисло, строго і логічно викласти матеріал відповідно до сучасних стандартів освіти. Книги написано у самодостатній формі таким чином, щоб під час вивчення курсу у студента не виникало необхідності звертатися до додаткових літературних джерел. Окрім цього, на прикладах простих фізичних моделей отримано формули і виведено закони, що мають загальний характер і широкий спектр застосування.

У частині III висвітлено проблему розсіювання хвиль на випадково нерівних поверхнях.

Автори висловлюють подяку фаховому редактору — акад. НАН України, д-ру фіз.-мат. наук проф. В.М. Шульзі; рецензен-

тиву ка-  
нального  
ківський  
О.О. Зе-  
корисні  
опомогу,

**А. О. Мінаков    О. Ф. Тирнов**

## **СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА**

**Частина III. Вплив випадкових неоднорідностей  
на поширення та розсіювання хвиль**

*Затверджено Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

НБ ПНУС



733525

Харків  
«Веста»  
2007

УДК 538.56  
ББК 32.84я73  
М62

Затверджено Міністерством освіти і науки України  
(Лист № 1.4/18-Г-1476.1 від 06.09.2007)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено.

Редактор за спеціальністю — В. М. Шульга, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, лауреат Державної премії України, завідувач відділу Радіоастрономічного інституту НАН України

**Рецензенти:**

Кафедра прийому, передачі та обробки сигналів Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» (завідувач — доктор технічних наук, професор О. О. Зеленський); В. Б. Рассказовський, доктор технічних наук, професор, лауреат премії АН України ім. акад. К. Д. Синельникова, завідувач відділу Інституту радіофізики і електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України

*Statistical Radio Physics* provides a rigorous, condensed and logical treatment of the subject and meets high education standards. The textbook is written in a self-consistent manner, and no additional literature is required to have the subject studied. Simple physical models are used to derive the formulae and laws that are general in nature and of much practical use. There are problems that illustrate the theory and others that apply the theory to issues of current interest in order to facilitate the assimilation of the material.

The book has been planned for MS and Ph.D. students and as a reference book for researchers.

**Мінаков А. О., Тирнов О. Ф.**

М62 Статистична радіофізика: Підруч. для студ. вищ. навч. закл.: У 3 ч. — Х.: Веста, 2007. — Ч. 3: Вплив випадкових неоднорідностей на поширення та розсіювання хвиль. — 2007. — 160 с.  
ISBN 978-966-08-3051-6  
ISBN 978-966-08-3054-7 (ч. 3)

У частині III підручника висвітлено питання аналізу впливу випадкових неоднорідностей на поширення та розсіювання хвиль. Книгу написано в самодостатній формі, що не потребує використання додаткової літератури. Теоретичний матеріал супроводжуються типовими прикладами, які полегшують розуміння та засвоєння матеріалу.

Призначається для студентів старших курсів, аспірантів і наукових співробітників радіофізичних і радіотехнічних спеціальностей університетів.

Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника  
код 02125266

**НАУКОВА БІБЛІОТЕКА**

УДК 538.56  
ББК 32.84я73

ISBN 978-966-08-3051-6 © Мінаков А. О., Тирнов О. Ф., 2007  
ISBN 978-966-08-3054-7 (ч. 3) © Видавництво «Веста», 2007

**Зміст**

**Розділ V. ВПЛИВ ВИПАДКОВИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ  
НА ПОШИРЕННЯ ТА РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ**

§ 16. Флуктуації показника заломлення в турбулентній атмосфері .....	5
16.1. Рівняння Нав'є—Стокса .....	6
16.2. Структурна функція швидкості. Закон Обухова—Колмогорова.....	10
16.3. Структурна функція і просторовий енергетичний спектр показника заломлення .....	13
§ 17. Метод фазового екрана .....	20
17.1. Формула Гріна .....	22
17.2. Визначення поля за фазовим екраном. Принцип Гюйгенса .....	25
17.3. Розв'язання задачі в рамках методу геометричної оптики .....	30
17.4. Дифракційне розв'язання задачі .....	35
17.5. Дифракція флюктуючих хвиль .....	45
17.6. Статистичні моменти поля. Принцип Гюйгенса для інтенсивності .....	47
Задачі .....	59
§ 18. Діаграма спрямованості дзеркальної антени з випадковими спотвореннями фази на апертурі .....	72
18.1. Обчислення середнього поля .....	75
18.2. Визначення середньої інтенсивності .....	79
Задачі .....	87



§ 19. Розсіювання хвиль на слабкошорсткій поверхні .....	89
19.1. Граничні умови.....	91
19.2. Побудова наближеного розв'язку.....	92
19.3. Середнє поле і середня інтенсивність .....	99
19.4. Індикатриса розсіювання.....	105
19.5. Область застосування «борнівського» наближення.....	111
Задачі.....	115
§ 20. Розсіювання на поверхні з великими нерівностями (метод Кірхгофа) .....	129
20.1. Граничні умови.....	129
20.2. Побудова наближеного динамічного розв'язку .....	133
20.3. Середнє розсіяне поле.....	143
20.4. Середня інтенсивність .....	145
20.5. Індикатриса розсіювання.....	149
Задачі.....	153
Література .....	159

*Розділ V*  
**ВПЛИВ ВИПАДКОВИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ  
НА ПОШИРЕННЯ ТА РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ**

**§ 16. Флуктуації показника заломлення  
в турбулентній атмосфері**

З попередніх розділів видно, що розв'язання задач щодо розсіювання хвиль на випадкових неоднорідностях показника заломлення середовища або флуктуацій їх параметрів при поширенні у випадкових середовищах (як у теорії збурень, так і в наближенні геометричної оптики) виражається або через автокореляційну функцію флуктуацій показника заломлення  $B_{\mu}(\vec{\rho})$ , або через її просторовий енергетичний спектр  $S_{\mu}(\vec{\chi})$ . Визначення явного вигляду цих функцій, загалом, виходить за межі того кола питань, які розв'язуються статистичною радіофізикою, а є предметом дослідження статистичної гідромеханіки або газодинаміки (якщо йдеться про поширення хвиль у рідині або газі, що складається з нейтральних молекул). Якщо ж йдеться про іоносферну або космічну плазму, то це є предметом дослідження статистичної теорії руху в іонізованих середовищах та ін. Проте існує широко розповсюджений тип випадково-неоднорідних середовищ, у яких функції  $B_{\mu}(\vec{\rho})$  і  $S_{\mu}(\vec{\chi})$  мають універсальний вигляд, що практично не залежить від конкретних фізичних параметрів середовища, а визначається тільки загальним характером їх руху. Йдеться про таке досить часте явище, як турбулентність – стан суцільного середовища (газу, рідини, плазми), при якому локальні параметри його руху

(швидкість, тиск, температура та ін.) є величинами, що швидко і нерегулярно змінюються у часі й просторі. При цьому виявляється, що чим складнішим і хаотичнішим є цей рух, тим адекватніший його статистичний опис, який є універсальним для суцільних середовищ зовсім різної фізичної природи. Турбулентні переміщення у природі зустрічаються досить часто, і кожен з нас неодноразово спостерігав їх. Зокрема, рух води річкою у міру збільшення його швидкості з плавного і спокійного на рівнинних ділянках переходить у бурхливий, хаотичний на бистринах, зумовлених збільшенням ухилу або звуженням річки. Збільшення швидкості руху призводить до порушення плавного (ламінарного) руху, появи характерних завихрень різних масштабів від великих вирів до малих пульсацій, що проявляються у вигляді невеликих вирв на поверхні. Рух повітряних мас у земній атмосфері також супроводжується появою подібних вихрових структур. Хоч ми і не можемо безпосередньо спостерігати рух повітряних мас, проте присутні в них у вигляді „домішок” конденсовані випари води, які ми бачимо у вигляді хмар або клаптів туману, дають змогу міркувати про дуже складний характер цього руху (форма хмар, їхня швидка й хаотична мінливість, характерні вихрові структури – все це є ознакою турбулентного руху). У цьому параграфі ми на якісному рівні без строгих доказів познайомимося з основними фізичними ідеями, що лежать в основі опису турбулентності, яка і є основною причиною флуктуацій показника заломлення середовища.

### 16.1. Рівняння Нав'є—Стокса

Для конкретності розглянемо рух рідини (або газу), що має об'ємну щільність  $\rho_0$ . Рух одиничного об'єму середовища, маса якого дорівнює  $\rho_0$ , підпорядковується другому закону Ньютона:

$$\rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad (16.1)$$

де  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{R}, t)$  — швидкість руху одиничного об'єму середовища у точці  $\vec{R}$  в момент часу  $t$ , а  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{R}, t)$  — сила, що діє на цей об'єм з боку оточуючої рідини:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}p + \gamma \Delta \vec{V}. \quad (16.2)$$

Тут  $p$  — тиск,  $\vec{\nabla}$  і  $\Delta$  — відповідно, оператори градієнта і Лапласа, а  $\gamma$  — коефіцієнт динамічної в'язкості. Перший доданок у правій частині (16.2) — рівнодійна всіх сил тиску  $p$  на розглядуваний елемент об'єму, а другий — сили внутрішнього тертя, що виникають за рахунок в'язкості рідини, коли об'єми, що дотикаються, рухаються з різними швидкостями. У лівій частині вихідної формули (16.1) стоїть швидкість  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{R}, t)$  елементарного об'єму середовища, який рухається у просторі за траєкторією, визначеною рівнянням  $\vec{R} = \vec{R}(t)$ . Швидкість  $\vec{V}$  залежить від часу  $t$  у подвійний спосіб: по-перше, через нестационарність середовища у кожній фіксованій точці простору  $\vec{R}$  швидкість може залежати від часу  $t$  явним чином; по-друге, оскільки розглядуваний об'єм пересувається у просторі за траєкторією  $\vec{R} = \vec{R}(t)$ , швидкість може бути різною на різних ділянках траєкторії навіть у випадку стаціонарної течії, коли явна залежність  $\vec{V}$  від  $t$  відсутня. Тому повну похідну  $d\vec{V}/dt$  у лівій частині рівняння (16.1) можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V}, \quad (16.3)$$

де  $\vec{V} = d\vec{R}/dt$ . Підставляючи (16.2) і (16.3) у (16.1), отримуємо рівняння Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} - (\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V} + \nu \Delta \vec{V}. \quad (16.4)$$

При переході від (16.1) до (16.4) ми розділили обидві частини рівняння на густину рідини  $\rho_0$  і ввели кінематичну в'язкість середовища  $\nu = \gamma/\rho_0$ .

Таким чином, рух елемента об'єму рідини з одиничною масою описується рівнянням (16.4). Доданок  $(\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V}$  у правій частині можна розглядати як своєрідну силу, що виникає за рахунок нерівномірності руху, викликаного, наприклад, викривленням траєкторії, — це так звана **сила інерції**, яка є причиною нестійкості руху — перетворення великомасштабних рухів у дрібномасштабні. Щоб переконатися у цьому, розглянемо перетворення будь-якої просторової гармоніки Фур'є поля швидкостей  $V \sim \sin(\chi x)$  з характерним просторовим масштабом  $l_\chi \approx 2\pi/\chi$ . Очевидно, що  $|\vec{\nabla} V| \sim \chi \cos(\chi x)$ , тому сила інерції  $|(\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V}| \sim \chi \sin(\chi x) \times \cos(\chi x) \sim \sin(2\chi x)$ , що виникає, має вдвічі менший просторовий масштаб —  $l'_\chi \approx 2\pi/2\chi = l_\chi/2$ . Під дією цієї сили, згідно з рівнянням (16.4), виникають рухи з тим самим ( $\sim l_\chi/2$ ) просторовим масштабом швидкості  $V$ , які, у свою чергу, перетворюються у ще дрібніші ( $\sim l_\chi/4$ ) та ін. Оскільки турбулентний рух має вихровий характер, то, по суті, йдеться про поділ вихорів на все дрібніші. Цей процес триває доти, поки сила

інерції  $(\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V}$  не дорівнюватиме силі в'язкого тертя  $\nu \Delta \vec{V}$ , яка перешкоджає подальшому поділу вихорів і, таким чином, стабілізує рух. Відношення цих двох сил називається числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{|(\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V}|}{\nu |\Delta \vec{V}|}. \quad (16.5)$$

Якщо для оцінок прийняти  $|(\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V}| \sim V^2/l_V$ , а  $|\Delta \vec{V}| \sim V/l_V^2$ , де  $l_V$  — характерний лінійний масштаб зміни швидкості  $\vec{V}$  руху середовища, то число Рейнольдса можна записати у вигляді

$$Re = \frac{|(\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V}|}{\nu |\Delta \vec{V}|} \sim \frac{V^2/l_V}{\nu V/l_V^2} = \frac{V l_V}{\nu}. \quad (16.6)$$

Коли  $Re \gg 1$ , тобто сили інерції набагато перевищують сили тертя, рух — через вказані вище причини — є нестійким, виникає турбулентність. У протилежному граничному випадку, коли  $Re \ll 1$ , сили в'язкості перевищують сили інерції і не дають можливості розвинути нестійкостям, що призводять до поділу великомасштабних рухів на більш дрібномасштабні, — рух є ламінарним. У реальних умовах турбулентність виникає тільки при достатньо великих значеннях числа Рейнольдса  $Re = 100 \div 1000$ .

Позначимо через  $L$  максимальний лінійний розмір системи (діаметр труби або глибина каналу, якими тече рідина, товщина атмосфери або висота точки спостереження над межею поділу та ін.). При значеннях  $Re = VL/\nu \gg 1$  великомасштабні рухи перетворюються на вихори чимраз менших розмірів (виникає так звана ієрархія вихорів). У міру зменшення їхніх лінійних розмірів

зменшується і число Рейнольдса. Мінімальний розмір вихору  $l_0$ , що оцінюється з умови  $Re = V l_0 / \nu \sim 1$ , називають внутрішнім масштабом турбулентності, а  $L$  – зовнішнім. Звичайно вони відрізняються на багато порядків — тому практично завжди існує область розмірів  $l_V$ , що відповідає умові  $L \gg l_V \gg l_0$ . У цьому інтервалі сили інерції превалюють над силами в'язкості, його так і називають — „інерційний інтервал”, на відміну від „в'язкого інтервалу”, коли  $l_V < l_0$ .

## 16.2. Структурна функція швидкості.

### Закон Обухова—Колмогорова

У турбулентному потоці швидкість  $\vec{V}(\vec{R}, t)$  є випадковою функцією трьох просторових координат  $\vec{R} = (x, y, z)$  і часу  $t$ . Можна припустити, що в інтервалі масштабів  $l_V \ll L$  поле швидкостей  $\vec{V}(\vec{R}, t)$  є статистично однорідним і ізотропним за просторовими змінними (гіпотеза Обухова—Колмогорова), — тому його структурна функція

$$\langle [\vec{V}(\vec{R}_1) - \vec{V}(\vec{R}_2)]^2 \rangle = D_V(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = D_V(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \quad (16.7)$$

є універсальною функцією тільки відстані  $\rho = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$  між двома просторово віддаленими точками:  $D_V = D_V(\rho)$ .

Виявляється, що явний вигляд цієї функції можна з'ясувати за допомогою теорії розмірностей. Крім параметру  $\nu$ , що має розмірність  $[\nu] = \text{см}^2/\text{сек}$ , турбулентний рух характеризується також швидкістю передачі кінетичної енергії одиничної маси

( $w = V^2/2$ ) від великих вихорів — до малих:  $\eta = dw/dt$ . Кінетична енергія одиничної маси має розмірність  $[w] = \text{см}^2/\text{сек}^2$ , а швидкість її зміни  $[\eta] = [dw/dt] = \text{см}^2/\text{сек}^3$ . З двох параметрів  $\nu$  і  $\eta$  можна скласти дві величини з розмірністю швидкості:  $V_0 = (\nu\eta)^{1/4}$  і довжини  $l_0 = \nu/V_0 = (\nu^3/\eta)^{1/4}$ . У найбільш загальному вигляді структурну функцію  $D_V(\rho)$  можна подати у вигляді

$$D_V(\rho) = a V_0^2 f\left(\frac{\rho}{l_0}\right) = a (\nu\eta)^{1/2} f\left(\frac{\eta^{1/4}}{\nu^{3/4}} \rho\right), \quad (16.8)$$

де  $a$  – безрозмірна стала, а  $f$  – безрозмірна функція безрозмірного аргументу  $x = \rho/l_0$ .

В інерційному інтервалі масштабів  $L \gg l_V \gg l_0$  сили інерції набагато більші за сили в'язкості, якими взагалі можна знехтувати, оскільки вони не можуть хоч якось суттєво змінити характер руху. Це означає, що  $D_V(\rho)$  не повинна залежати від  $\nu$ . Для того, щоб у формулі (16.8) зникла залежність від  $\nu$ , необхідно, щоб  $f(x) \sim x^{2/3}$  (безрозмірну константу як спільний множник можна включити до  $a$ ). У результаті, з (16.8) випливає:

$$D_V(\rho) = a \eta^{2/3} \rho^{2/3} \equiv C_V^2 \rho^{2/3}. \quad (16.9)$$

Отримана залежність  $D_V(\rho)$  називається „законом двох третин” або „законом Обухова—Колмогорова”. Таким чином, єдиним параметром, що описує турбулентність в інерційному інтервалі масштабів ( $L \gg l_V \gg l_0$ ) є так звана структурна стала

$C_V^2 = a\eta^{2/3}$ , величина якої залежить тільки від швидкості  $\eta$  передачі енергії від великих вихорів до малих.

Так званий „в'язкий інтервал” характеризується невеликими просторовими масштабами  $\rho \ll l_0$ . При  $\rho \rightarrow 0$  структурна функція  $D_V(\rho)$ , згідно з визначенням (16.7), повинна перетворюватися на нуль, будучи при цьому парною функцією відстані  $\rho$ . Це означає, що розклад функції  $f(x)$  за степенями  $x$  при  $x \rightarrow 0$  має починатися у загальному випадку з членів  $\sim x^2$ , тобто

$$D_V(\rho) = aV_0^2 \frac{\rho^2}{l_0^2} = C_V^2 l_0^{-4/3} \rho^2, \quad (\rho \ll l_0). \quad (16.10)$$

Нарешті, при  $\rho > L$  кореляція між значеннями швидкості у точках, віддалених одна від одної на гранично великій відстані, повинна спадати — тому (подібно до (5.30))

$$D_V(\rho) = 2\sigma_V^2, \quad (\rho > L). \quad (16.11)$$

Схематично графік функції  $D_V(\rho)$  зображено на рис. 16.1 відповідно до формул (16.9), (16.10) і (16.11).

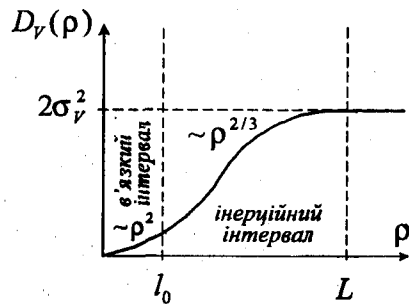


Рис. 16.1

### 16.3. Структурна функція і просторовий енергетичний спектр показника заломлення

Значення показника заломлення  $n$  суцільного середовища визначається його термодинамічними параметрами:

$$n = n(p, T, e_1, e_2, \dots),$$

де  $p$  — тиск,  $T$  — температура,  $e_m$  — концентрація домішок різних сортів. Наприклад, для показника заломлення чистого повітря має місце емпірична формула:

$$n - 1 = 10^{-6} \frac{79}{T} \left( p + \frac{4800}{T} e \right). \quad (16.12)$$

Тут  $[T] = K$  — температура,  $[p] = \text{мбар}$  — тиск повітря,  $[e] = \text{мбар}$  — тиск водяної пари. Всі параметри, що входять до формули (16.12), можна розглядати як „пасивні” домішки, які не чинять ніякого впливу на розвиток турбулентності, а тільки перемішуються полем швидкостей  $\vec{V}(\vec{R})$ . Це означає, що структурні функції параметрів з точністю до сталих множників повинні збігатися за структурною функцією флуктуації швидкості  $D_V(\rho)$ . Зокрема, структурна функція показника заломлення  $n(\vec{R})$  має описуватися тими самими законами, що й  $D_V(\rho)$ :

$$D_n(\rho) = \langle [n(\vec{R} + \vec{\rho}) - n(\vec{R})]^2 \rangle = \begin{cases} C_n^2 l_0^{-4/3} \rho^2, & \rho \ll l_0; \\ C_n^2 \rho^{2/3}, & L \gg \rho \gg l_0; \\ 2\sigma_n^2, & \rho > L. \end{cases} \quad (16.13)$$



До формул борнівського наближення для середньої інтенсивності та індикатриси розсіювання хвиль на флуктуаціях показника заломлення  $\delta n$  (див. § 14) входять не самі структурні або кореляційні функції показника заломлення, а їхні просторові енергетичні спектри. Для того щоб з'ясувати, який просторовий спектр відповідає структурній функції вигляду (16.13), припустимо спочатку, що існує автокореляційна функція

$$B_n(\vec{\rho}) = \langle \delta n(\vec{R} + \vec{\rho}) \delta n(\vec{R}) \rangle, \quad (16.14)$$

якій відповідає просторовий спектр (див. (13.27))

$$S_n(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (16.15)$$

У свою чергу, відповідно до формули Вінера—Хінчіна,  $B_n(\vec{\rho})$  можна подати у вигляді

$$B_n(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi}. \quad (16.16)$$

Для статистично однорідних полів структурну функцію  $B_n(\vec{\rho})$  можна виразити через автокореляційну  $B_n(\vec{\rho})$  і дисперсію  $\sigma_n^2 = B_n(0)$  (подібно до (5.29)):

$$D_n(\vec{\rho}) = 2 \left[ \sigma_n^2 - B_n(\vec{\rho}) \right]. \quad (16.17)$$

Підставляючи сюди (16.16), отримуємо

$$D_n(\vec{\rho}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} \right] S_n(\vec{\chi}) d\vec{\chi}. \quad (16.18)$$

Для того щоб отримати обернену до цієї формулу, тобто виразити  $S_n(\vec{\chi})$  через  $D_n(\vec{\rho})$ , необхідно звести її до вигляду перетворення Фур'є. З цією метою продиференціюємо рівність (16.18) за  $\vec{\rho}$ :

$$\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} D_n(\vec{\rho}) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\chi}' e^{i\vec{\chi}'\vec{\rho}} S_n(\vec{\chi}') d\vec{\chi}'. \quad (16.19)$$

Помножимо обидві частини цієї формули на  $\vec{\chi} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}}$  і проінтегруємо за  $d\vec{\rho}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} (\vec{\chi} \vec{\nabla}_{\vec{\rho}}) D_n(\vec{\rho}) d\vec{\rho} = \\ & = -2i \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{\chi} \vec{\chi}') S_n(\vec{\chi}') d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{\chi}' - \vec{\chi})\vec{\rho}} d\vec{\rho} = \\ & = -i 16\pi^3 \chi^2 S_n(\vec{\chi}). \end{aligned} \quad (16.20)$$

При цьому ми скористалися визначенням тривимірної  $\delta$ -функції:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{\chi}' - \vec{\chi})\vec{\rho}} d\vec{\rho} = \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}).$$

З (16.20) випливає, що

$$S_n(\bar{\chi}) = \frac{i}{16\pi^3 \chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{\chi}\bar{\rho}} (\bar{\chi} \bar{\nabla}_{\bar{\rho}}) D_n(\bar{\rho}) d\bar{\rho}. \quad (16.21)$$

Для статистично однорідного та ізотропного поля  $D_n(\bar{\rho}) = D_n(\rho)$  і  $\bar{\nabla}_{\bar{\rho}} D_n(\rho) = \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} \bar{\nabla}_{\bar{\rho}} \rho = \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} \frac{\bar{\rho}}{\rho}$ . При цьому інтеграл (16.21) зручніше обчислювати у сферичних координатах  $\bar{\rho} = (\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho)$ , де  $\theta_\rho$  відлічується від полярної осі, спрямованої уздовж вектора  $\bar{\chi}$  (рис. 16.2).

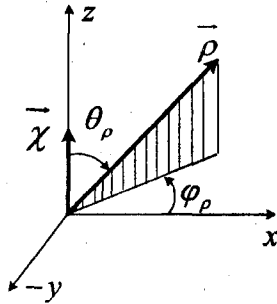


Рис. 16.2

Враховуючи, що в обраній системі координат елементарний об'єм записується у вигляді  $d\bar{\rho} = \rho^2 \sin \theta_\rho d\rho d\theta_\rho d\varphi_\rho$ , а  $\bar{\chi}\bar{\rho} = \chi\rho \cos \theta_\rho$ , отримаємо

$$S_n(\bar{\chi}) = \frac{i}{16\pi^3 \chi^2} \int_0^\infty \rho^2 \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} d\rho \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \cos \theta_\rho \sin \theta_\rho d\theta_\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho. \quad (16.22)$$

Інтеграл за  $d\varphi_\rho$  дорівнює  $2\pi$ , а інтегрування за  $d\theta_\rho$  легко виконується за допомогою заміни змінних  $\xi = \cos \theta_\rho$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \cos \theta_\rho \sin \theta_\rho d\theta_\rho = \\ & = \int_{-1}^1 e^{-i\chi\rho \xi} \xi d\xi = 2i \frac{\chi\rho \cos \chi\rho - \sin \chi\rho}{(\chi\rho)^2} \end{aligned} \quad (16.23)$$

Підставляючи (16.23) в (16.22), отримаємо

$$S_n(\bar{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \chi^3} \int_0^\infty (\sin \chi\rho - \chi\rho \cos \chi\rho) \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} d\rho = S_n(\chi). \quad (16.24)$$

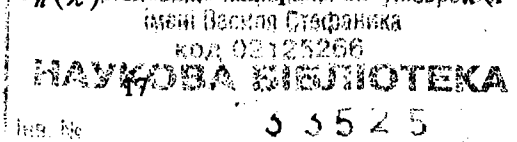
Таким чином, для статистично ізотропного поля флуктуацій показника заломлення енергетичний спектр залежить тільки від модуля хвильового числа  $\bar{\chi}$ :  $S_n(\bar{\chi}) = S_n(\chi)$ .

Аналогічним чином, враховуючи, що для ізотропних флуктуацій  $S_n(\bar{\chi}) = S_n(\chi)$ , можна переписати і формулу (16.18):

$$D_n(\rho) = 8\pi \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin \chi\rho}{\chi\rho}\right) S_n(\chi) \chi^2 d\chi. \quad (16.25)$$

### Побудова спектра Кармана

Використаємо тепер формули (16.24) і (16.25) для визначення енергетичного спектра  $S_n(\chi)$  за заданим розподілом  $D_n(\rho)$  у вигляді (16.13).



1. Припустимо спочатку, що структурна функція  $D_n(\rho)$  підкорюється законові двох третин на всьому інтервалі змін  $\rho$ :

$$D_n(\rho) = C_n^2 \rho^{2/3}, \quad \rho \geq 0.$$

Підставляючи цю залежність  $D_n(\rho)$  у формулу (16.24) і проводячи заміну змінних  $\zeta = \chi\rho$ , отримаємо

$$S_n(\chi) = \frac{2C_n^2}{3(2\pi)^2 \chi^{11/3}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^{1/3}} (\sin \zeta - \zeta \cos \zeta). \quad (16.26)$$

Інтеграл за  $d\zeta$  є табличним і виражається через гамма-функцію Ейлера —  $\Gamma(z)$  — тому в результаті маємо

$$S_n(\chi) = \frac{\Gamma(4/3) \sin(\pi/3)}{4\pi^2} C_n^2 \chi^{-11/3}. \quad (16.27)$$

Враховуючи, що  $\Gamma(4/3) \approx 0,893$ , остаточно отримаємо

$$S_n(\chi) = 0,033 C_n^2 \chi^{-11/3}. \quad (16.28)$$

2. Як вже відзначалося вище, при малих  $\rho$  флуктуації дрібних масштабів ( $\rho < l_0$ ) пригнічуються силами в'язкості і структурна функція має бути пропорційною до  $\rho^2$ :  $D_n(\rho) \sim \rho^2$ . Енергетичний спектр  $S_n(\chi)$ , що відповідає цьому інтервалу просторових частот ( $\chi > 2\pi/l_0$ ), можна отримати, „підкоригувавши” відповідним чином залежність (16.28). Так, з (16.25) видно, що при  $\chi\rho \ll 1$  під знаком інтеграла ми можемо отримати залежність  $\sim \rho^2$ :

$$1 - \frac{\sin \chi\rho}{\chi\rho} \approx \frac{1}{3} (\chi\rho)^2 \sim \rho^2.$$

Щоб ця залежність зберігалась і для всього інтеграла, необхідно усунути у спектрі (16.27) високі просторові частоти  $\chi$ . Усунення високих частот ( $\chi > 2\pi/l_0$ ), що відповідають в'язкому інтервалу ( $\rho < l_0$ ), можна здійснити шляхом введення експоненціального множника („ріжучого” фактора):  $\exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}$ , де  $\chi_m = 5,92/l_0$ . У результаті, отримаємо такий скоригований вигляд спектра:

$$S_n(\chi) \approx 0,033 C_n^2 \chi^{-11/3} \exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}. \quad (16.29)$$

3. В області великих масштабів турбулентностей ( $\rho \geq L$ ), очевидно, відсутній універсальний закон поведінки спектра. Необмежене зростання спектра (16.29) при  $\chi \rightarrow 0$  передбачає існування вихорів з безмежно великими розмірами. Зрозуміло, що при цьому ми виходимо за зовнішній масштаб турбулентності  $L$ , і зростання спектра на малих просторових частотах  $\chi \leq \chi_0 = \frac{2\pi}{L}$  має припинитися. Звичайно для обмеження зростання  $S_n(\chi)$  при  $\chi \rightarrow 0$  використовують такий прийом: замінюють множник  $\chi^{-11/3}$  у формулі (16.29) на  $(\chi^2 + \chi_0^2)^{-11/6}$ , де  $\chi_0 = 2\pi/L$ . У результаті, приходимо до остаточного вигляду спектра:

$$S_n(\chi) \approx \frac{0,033 C_n^2}{(\chi^2 + \chi_0^2)^{11/6}} \exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}, \quad (16.30)$$

який називається спектром Кармана.

Таким чином, спектр Кармана збігається зі спектром Обухова—Колмогорова (16.28) в інерційному інтервалі ( $\chi_0 \ll \chi \ll \chi_m$ ), експоненціально згасає у в'язкому інтервалі ( $\chi > \chi_m$ ) і залишається обмеженим на малих просторових частотах ( $\chi < \chi_0$ ). Знайдена залежність (16.30), вигляд якої показано на рис. 16.3, достатньо добре описує просторовий спектр турбулентних флуктуацій у багатьох задачах радіофізики.

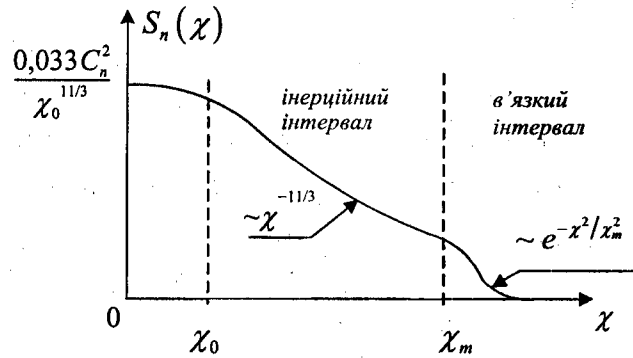


Рис. 16.3

## § 17. Метод фазового екрана

Досить велику кількість проблем, пов'язаних із поширенням і розсіюванням хвиль у випадково-неоднорідних середовищах, вдається звести до розв'язання задачі про проходження хвилі через неоднорідний шар скінченної товщини, на виході з якого її амплітуда і фаза виявляються випадковими функціями координат. При подальшому поширенні в однорідному просторі (або вакуумі) виникає інтерференція флуктуюючих хвиль, що приходять у точку спостереження з різних напрямків (рис. 17.1).

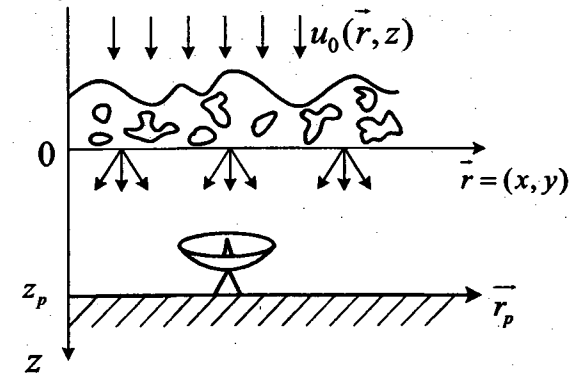


Рис. 17.1

Для спрощення задачі ми знову розглядатимемо нерухомі неоднорідності середовища:  $n(\vec{R}, t) = n(\vec{R})$ . У цьому випадку, як вже було відзначено у попередніх розділах, для монохроматичного первинного поля  $U_0 \sim e^{-i\omega t}$  залежність від часу  $t$  у поля на виході з неоднорідного шару зберігається, що дає змогу знову шукати розв'язок для  $U(\vec{R}, t)$  у вигляді  $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R})e^{-i\omega t}$ . Опускаючи далі залежність полів від часу у вигляді  $\sim e^{-i\omega t}$ , позначимо через

$$U_0(\vec{r}) = A_0(\vec{r})e^{iS_0(\vec{r})} \quad (17.1)$$

поле первинної хвилі, яке було б у площині  $z = 0$  за відсутності шару із неоднорідностями показника заломлення ( $\vec{r} = (x, y)$  — радіус-вектор у площині  $z = 0$ ). Після проходження хвилі через шар виникають спотворення незбурених амплітуди —  $A_0(\vec{r})$  і фази —  $S_0(\vec{r})$ , тому на нижній межі шару ( $z = 0$ ) поле  $U(\vec{r})$  можна подати у вигляді

$$U(\vec{r}) = A_0(\vec{r})\alpha(\vec{r})e^{i[S_0(\vec{r}) + \bar{S}(\vec{r})]} = A_0(\vec{r})\alpha(\vec{r})e^{iS(\vec{r})}. \quad (17.2)$$

Тут  $S(\vec{r}) = S_0(\vec{r}) + \tilde{S}(\vec{r})$ ,  $\tilde{S}(\vec{r})$  – додатковий набіг фази, що виникає при проходженні хвилі через шар з неоднорідностями;  $\alpha(\vec{r})$  — множник, що враховує зміни амплітуди поля  $U(\vec{r})$  у порівнянні з  $A_0(\vec{r})$ . Площина  $z = 0$ , на якій задано розподіл поля  $U(\vec{r})$  формулою (17.2), називають **амплітудно-фазовим екраном**. Задача знаходження  $\alpha(\vec{r})$  і  $\tilde{S}(\vec{r})$  після проходження хвилею шару з неоднорідностями може бути розв'язана, наприклад, у рамках попередньо розглянутих МГО та МПЗ. У нашому ж випадку, вважаючи розподіл поля у площині  $z = 0$  заданим (17.2), необхідно визначити параметри хвильового поля  $U(\vec{R})$  у довільній точці спостереження  $\vec{R} = \vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ , що знаходиться за екраном ( $z_p > 0$ ) в однорідному просторі або вакуумі (див. рис. 17.1).

### 17.1. Формула Гріна

Як перший крок отримаємо формулу Гріна, що дає змогу розрахувати поле  $U$  в будь-якій точці  $\vec{R} = \vec{R}_p$  довільного об'єму  $V$ , якщо задано значення  $U$  та його нормальної похідної  $\partial U / \partial N$  на поверхні  $\Sigma$ , що обмежує цей об'єм (рис. 17.2).

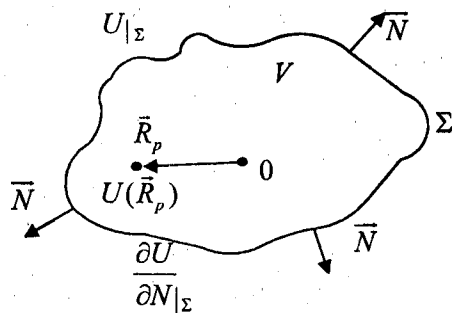


Рис. 17.2

Формула або теорема Гріна (1824 р.) безпосередньо випливає з теореми про дивергенцію (теореми Остроградського—Гаусса)

$$\int_V \text{div} \vec{H} \, dv = \oint_{\Sigma} \vec{N} \vec{H} \, d\Sigma, \quad (17.3)$$

яка справедлива для будь-якого векторного поля  $\vec{H}$ , визначеного в об'ємі  $V$ , обмеженого замкнутою поверхнею  $\Sigma$ . Тут  $\vec{N}$  – зовнішня нормаль до поверхні  $\Sigma$ . Нехай  $\vec{H} = \Upsilon \text{grad} \Psi = \Upsilon \vec{\nabla} \Psi$ , де  $\Upsilon = \Upsilon(\vec{R})$  та  $\Psi = \Psi(\vec{R})$  — довільні скалярні функції. Тоді

$$\text{div} \vec{H} = \text{div}(\Upsilon \text{grad} \Psi) = \Upsilon \Delta \Psi + \text{grad} \Upsilon \text{grad} \Psi \quad (17.4 \text{ a})$$

і

$$\vec{N} \vec{H} = \vec{N}(\Upsilon \text{grad} \Psi) = \Upsilon \vec{N} \text{grad} \Psi = \Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N}, \quad (17.4 \text{ б})$$

де  $\partial / \partial N$  – нормальна похідна на поверхні  $\Sigma$  (за напрямком зовнішньої нормалі до об'єму  $V$ ). Підставивши (17.4) в (17.3), отримаємо так звану **першу формулу Гріна**

$$\int_V (\Upsilon \Delta \Psi + \vec{\nabla} \Upsilon \vec{\nabla} \Psi) \, dv = \oint_{\Sigma} \Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N} \, d\Sigma. \quad (17.5 \text{ a})$$

Напишемо такий самий вираз, помінявши в ньому місцями  $\Upsilon$  і  $\Psi$ , і віднімемо його з (17.5 а). При цьому члени з добутком  $\vec{\nabla} \Upsilon \vec{\nabla} \Psi$  скоротяться, і ми отримаємо **другу формулу Гріна**:

$$\int_V (\Upsilon \Delta \Psi - \Psi \Delta \Upsilon) \, dv = \oint_{\Sigma} \left[ \Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N} - \Psi \frac{\partial \Upsilon}{\partial N} \right] \, d\Sigma. \quad (17.5 \text{ б})$$

Як функцію  $\Upsilon$  виберемо хвильове поле  $U(\vec{R})$ , яке в однорідному середовищі (вакуумі) задовольняє рівняння Гельмгольца:



$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)U(\vec{R}) = -4\pi Q(\vec{R}), \quad (17.6)$$

де  $k = \omega/c$ , а  $Q(\vec{R})$  – густина розподілу джерел. З іншого боку, як  $\Psi$  виберемо хвильове поле, що створюється точковим одиничним джерелом (функція Гріна)  $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$  і задовольняє те саме рівняння (17.6), де  $Q(\vec{R}) = \delta(\vec{R} - \vec{R}_p)$ :

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)G(\vec{R}, \vec{R}_p) = -4\pi\delta(\vec{R} - \vec{R}_p). \quad (17.7)$$

Помноживши (17.6) на  $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ , а (17.7) – на  $U(\vec{R})$  і віднявши після цього отримані вирази, маємо

$$\begin{aligned} U(\vec{R})\Delta_{\vec{R}}G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p)\Delta_{\vec{R}}U(\vec{R}) = \\ = -4\pi[U(\vec{R})\delta(\vec{R} - \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p)Q(\vec{R})]. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз у ліву частину (17.56) і виконаємо інтегрування за об'ємом  $dv \equiv d\vec{R} = dxdydz$ . У результаті, з урахуванням відомої властивості  $\delta$ -функції:

$$\int_V U(\vec{R})\delta(\vec{R} - \vec{R}_p)d\vec{R} = U(\vec{R}_p),$$

отримаємо

$$\begin{aligned} U(\vec{R}_p) = \int_V G(\vec{R}, \vec{R}_p)Q(\vec{R})d\vec{R} - \\ - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[ U(\vec{R}) \frac{\partial G(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial N} - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma. \end{aligned} \quad (17.8)$$

## 17.2. Визначення поля за фазовим екраном. Принцип Гюйгенса

Застосуємо тепер формулу Гріна (17.8) для розрахунку поля  $U(\vec{R}_p)$  за фазовим екраном. Для цього побудуємо півсферу  $C_a$  (рис. 17.3) радіусом  $a$  з центром у точці початку координат (точка  $O$ ) і розглянемо об'єм  $V$ , що міститься між цією півсферою і частиною поверхні  $\Sigma_0$  площини  $z = 0$ .

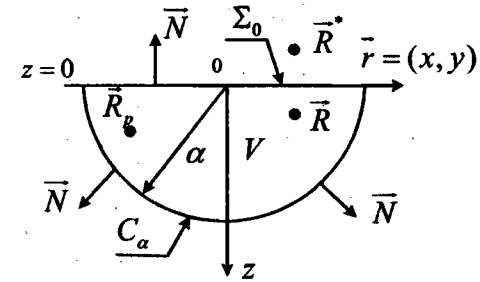


Рис. 17.3

У розглядуваній постановці задачі всередині об'єму  $V$  джерела відсутні, тобто  $Q(\vec{R}) \equiv 0$ . При достатньо великому радіусі півсфери ( $a \rightarrow \infty$ ) інтеграл за  $C_a$  зникає (через принцип випромінювання), і ми приходимо до формули:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \left[ U(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial z} G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial}{\partial z} U(\vec{R}) \right]_{z=0}. \quad (17.9)$$

При отриманні (17.9) ми врахували, що  $\left. \frac{\partial}{\partial N} \right|_{\Sigma_0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{z=0}$  і ввели позначення  $d\Sigma = d\vec{r} = dxdy$ . Видно, що поле у точці спостереження  $U(\vec{R}_p)$  визначається значеннями на екрані не тільки самого поля  $U(\vec{r})$ , але і його нормальної похідної  $\partial U / \partial z$ .

Вибір функції Гріна  $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ , що задовольняє рівняння (17.7), є досить довільним. Наприклад, як  $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$  ми могли б вибрати функцію Гріна  $G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)$  для однорідного необмеженого простору (сферичну хвилю, що розходитьсся):

$$G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|}. \quad (17.10)$$

Але  $G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)$  — тільки одна із багатьох функцій, які відповідають неоднорідному рівнянню (17.7). Насправді, у загальному випадку рівняння (17.7) задовольняє будь-яка функція виду  $G(\vec{R}, \vec{R}_p) = G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) + B(\vec{R}, \vec{R}_p)$ , де  $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$  є розв'язком однорідного рівняння Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)B(\vec{R}, \vec{R}_p) = 0. \quad (17.11)$$

Оскільки функція  $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$  не визначена однозначно, її можна вибрати, наприклад, так, що у формулі (17.9) один із двох поверхневих інтегралів перетворюється на нуль. Цю умову задовольняє функція у вигляді тієї самої сферичної хвилі (17.10), але створюваної «дзеркально» відбитим джерелом (одиничним, точковим і розташованим у точці  $\vec{R} = \vec{R}^* = (x, y, -z) = (\vec{r}, -z)$ ):

$$B(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}^*-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}^*-\vec{R}_p|}. \quad (17.12)$$

Оскільки точка  $\vec{R} = \vec{R}^*$  знаходиться поза розглядуваним об'ємом  $V$  (на рис. 17.3 вона знаходиться у верхньому півпросторі), то

$B(\vec{R}, \vec{R}_p)$  не має особливостей всередині  $V$  (при  $z > 0$ ) і, що легко перевірити, задовольняє однорідне рівняння Гельмгольца (17.11).

З урахуванням (17.12) введемо до розгляду дві функції Гріна:

$$G_{\pm}(\vec{R}, \vec{R}_p) = G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) \pm B(\vec{R}, \vec{R}_p), \quad (17.13)$$

які мають очевидні властивості:

$$G_+(\vec{R}, \vec{R}_p)|_{z=0} = 2G_0(\vec{r}, \vec{R}_p), \quad (17.14 \text{ а})$$

$$G_-(\vec{R}, \vec{R}_p)|_{z=0} = 0 \quad (17.14 \text{ б})$$

і

$$\left. \frac{\partial G_+(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (17.15 \text{ а})$$

$$\left. \frac{\partial G_-(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial z} \right|_{z=0} = 2 \frac{\partial}{\partial z} G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)|_{z=0}. \quad (17.15 \text{ б})$$

Якщо у формулі (17.9) як  $G$  вибрати  $G_-$ , то з урахуванням визначень (17.14 б) і (17.15 б) вона набуде вигляду

$$U(\vec{R}_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_0} U(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)|_{z=0} d\vec{r}. \quad (17.16)$$

Припустимо тепер, що точка спостереження  $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$  знаходиться на достатньо великій відстані за екраном (у хвильовій зоні, коли  $kz_p \gg 1$ ). У цьому випадку при обчисленні похідної  $\partial G_0 / \partial z$  достатньо обмежитися тільки диференціюванням експоненти в (17.10):

$$\frac{\partial}{\partial z} G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) \approx ik \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial}{\partial z} |\vec{R}-\vec{R}_p|. \quad (17.17)$$

Враховуючи, що  $|\vec{R}-\vec{R}_p| = \sqrt{(z-z_p)^2 + (\vec{r}-\vec{r}_p)^2}$ , де

$\vec{r}_p = (x_p, y_p)$ , а  $\vec{r} = (x, y)$ , отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial z} |\vec{R}-\vec{R}_p|_{z=0} = \frac{z-z_p}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \Big|_{z=0} = \frac{-z_p}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} = -\cos\theta(\vec{r}), \quad (17.18)$$

де  $\theta(\vec{r})$  – кут між променем, проведеним з точки спостереження  $P$  ( $\vec{R} = \vec{R}_p$ ) в поточну точку інтегрування  $\vec{r}$ , і перпендикуляром, опущеним з  $P$  на площину  $z = 0$  (див. рис. 17.4).

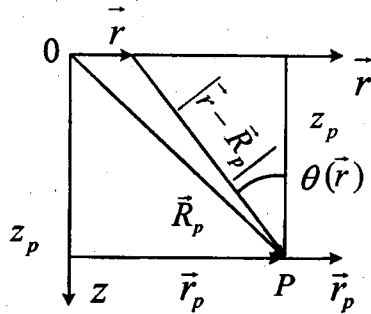


Рис. 17.4

Підставляючи (17.17) і (17.18) в (17.16), приходимо до формули, що виражає принцип Гюйгенса:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} U(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos\theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (17.19)$$

Згідно з (17.19), кожна точка екрана  $\vec{r} \in \Sigma_0$  є джерелом сферичної хвилі  $e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}/|\vec{r}-\vec{R}_p|$ , що розходить, амплітуда якої визначається значенням поля  $U(\vec{r})$  у цій точці і величиною кута  $\theta(\vec{r})$  між напрямком з  $\vec{r}$  в точку спостереження  $\vec{R}_p$  і нормаллю до площини екрана (оссю  $OZ$ ).

Скориставшись тепер поданням поля  $U(\vec{r})$  на екрані у вигляді (17.2) і обмежившись тільки випадком чисто „фазового” екрана, коли амплітудна модуляція відсутня ( $\alpha(\vec{r}) \approx 1$ ), отримаємо

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} A_0(\vec{r}) \cos\theta(\vec{r}) e^{ik[|\vec{r}-\vec{R}_p| + \varphi(\vec{r})]}. \quad (17.20)$$

Тут ми позначили через  $\varphi(\vec{r}) = S(\vec{r})/k$  сумарний ейконал хвилі, який, згідно з (17.2), складається із суми  $\varphi_0(\vec{r}) = S_0(\vec{r})/k$  — незбуреного ейконалу падаючої хвилі і додатка  $\tilde{\varphi}(\vec{r}) = \tilde{S}(\vec{r})/k$ , що виникає після проходження хвилею шару з неоднорідностями.

До інтегральних зображень виду (17.20) зводяться розв'язки значної кількості задач фізики і, особливо, радіофізики. Тому цікаво провести детальний аналіз можливостей методу фазового екрана. Спочатку ми дослідимо задачу в наближенні МГО, тоді проаналізуємо можливості розв'язання дифракційної задачі і, нарешті, покажемо, як необхідно враховувати випадкові фактори.

### 17.3. Розв'язання задач в рамках методу геометричної оптики

У цьому розділі ми покажемо, як за заданими у площині  $z = 0$  розподілами фази  $S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r}) = k[\varphi_0(\vec{r}) + \tilde{\varphi}(\vec{r})]$  і амплітуди  $A_0(\vec{r})$  хвилі, що пройшла через шар з неоднорідностями, можна обчислити геометрооптичне значення інтенсивності поля у точці спостереження  $\vec{R}_p$ , не застосовуючи інтегрального зображення (17.20).

Визначимо спочатку рівняння поверхні  $Z = Z_s(\vec{r})$ , на якій фаза хвилі  $S(\vec{r}, z)$  на виході з шару з неоднорідностями стала (див. рис.17.5):

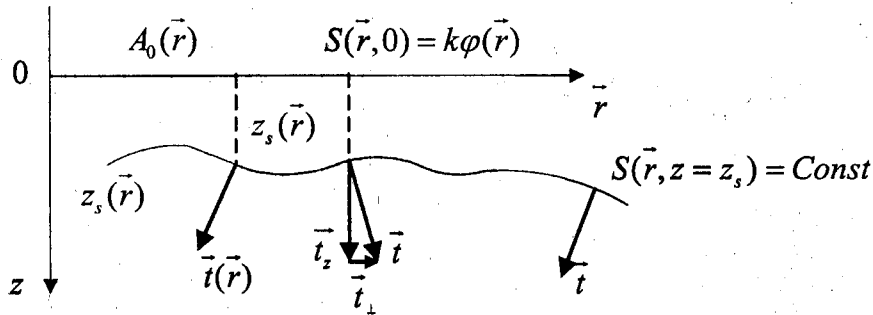


Рис. 17.5

$$S(\vec{r}, z) = S(x, y, z_s) = Const. \quad (17.21)$$

Для спрощення задачі вважатимемо, що після проходження шару з неоднорідностями напрямок поширення хвилі  $\vec{t}$  незначно відрізняється від первинного  $\vec{t}_0$ , який, у свою чергу, мало відрізняється від напрямку осі  $OZ$  (так зване малокутове або наближення параксiальної оптики). Спроектуємо поверхню постійної фази, заданої рівнянням (17.21), на площину  $z = 0$ :

$$S(\vec{r}, z)|_{z=0} = S(\vec{r}, 0) = Const - kz_s(\vec{r}).$$

Отримана величина  $S(\vec{r}, z)|_{z=0}$  повинна збігатися із заданим розподілом фази на екрані –  $S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r})$ . У результаті отримуємо таку рівність:

$$S(\vec{r}, 0) = Const - kz_s(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r}). \quad (17.22)$$

Звідси знаходимо рівняння поверхні сталої фази (фазового фронту хвилі):

$$z = z_s(\vec{r}) = Const - \varphi(\vec{r}). \quad (17.23)$$

Рівняння нормалі  $\vec{t}(\vec{r})$  до поверхні сталої фази  $z = z_s(\vec{r})$  визначається як рівняння нормалі до поверхні рівня, яка, згідно з (17.23), задається у вигляді  $\Phi(x, y, z) = z + \varphi(\vec{r}) = Const$ :

$$\vec{t} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} = \frac{\vec{e}_z + \vec{\gamma}}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad (17.24)$$

де  $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_r \varphi(\vec{r})$ . Проекції вектора  $\vec{t}$  на осі координат дорівнюють  $\vec{t}_z = \vec{e}_z / \sqrt{1 + \gamma^2}$  і  $\vec{t}_\perp = t_x \vec{e}_x + t_y \vec{e}_y = \vec{\gamma} / \sqrt{1 + \gamma^2}$ . Напрямок променів, якими поле  $U(\vec{r})$  переноситься з площини  $z = 0$  в область простору  $z > 0$ , визначається полем нормалей  $\vec{t}(\vec{r})$ . Для малих кутів відхилення  $|\vec{\gamma}| = \gamma \ll 1$ , і наближено можна вважати, що

$$\vec{t}_z \approx \vec{e}_z \text{ і } \vec{t}_\perp \approx \vec{\gamma} = \vec{\nabla}_r \varphi(\vec{r}). \quad (17.25)$$

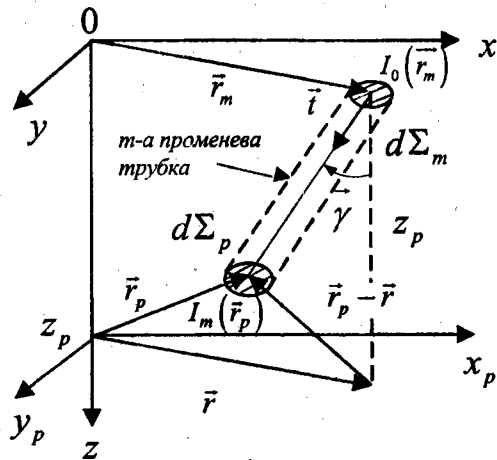
Зауважимо, що знайдений для  $\vec{t}_\perp$  вираз збігається з отриманою раніше у рамках МГО поправкою до кута приходу  $\vec{t}_1$ .

Отже, за відомим сумарним ейконалом хвилі  $\varphi(\vec{r})$  на виході з шару з неоднорідностями ( $z=0$ ) можна знайти закон відхилення променів  $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r})$ . Далі заломлені у площині фазового екрана промені вздовж прямих ліній досягають площини спостереження ( $z=z_p > 0$ ). Визначимо координати променів, які, заломившись на фазовому екрані, пройшли через точку спостереження  $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ . Згідно з рис. 17.6, в малокутовому наближенні можна записати таку рівність:

$$\frac{\vec{r}_p - \vec{r}}{z_p} = \vec{\gamma}(\vec{r}),$$

**звідки отримуємо**

$$\vec{r}_p = \vec{r} + z_p \vec{\gamma}(\vec{r}). \quad (17.26)$$



**Рис. 17.6**

Векторне рівняння (17.26) називається **абераційним**. Воно є системою двох рівнянь (проекції  $\vec{r}_p = \vec{r}_p(\vec{r})$  на осі  $OX, OY$ ) з двома невідомими (координати  $x, y$ ).

Припустимо, що заданому положенню спостерігача  $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$  відповідає  $N \geq 1$  дійсних коренів  $\vec{r} = \vec{r}_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) аберацийного рівняння (17.26). Наявність кількох коренів говорить про те, що у точку спостереження  $\vec{R}_p$  приходять одночасно кілька променів. Розглянемо один із коренів, наприклад,  $\vec{r} = \vec{r}_m$  і припустимо, що спостерігач здійснює невеликі переміщення поблизу вихідної точки  $\vec{r}_p$ , залишаючись при цьому у площині спостереження:  $\vec{r}_p \rightarrow \vec{r}_p + \delta\vec{r}_p$ . Координати кореня  $\vec{r}_m$  в площині фазового екрана ( $z = 0$ ) при цьому також зазнають невеликих змін:  $\vec{r}_m \rightarrow \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m$ , причому і  $\vec{r}_p + \delta\vec{r}_p$ , і  $\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m$ , як і раніше, задовольняють вихідне аберацийне рівняння (17.26):

$$\vec{r}_p + \delta \vec{r}_p = \vec{r}_m + \delta \vec{r}_m + z\bar{\gamma}(\vec{r}_m + \delta \vec{r}_m).$$

Зв'язок між малими зміщеннями  $\delta \vec{r}_p$  і  $\delta \vec{r}_m$  можна визначити після лінеаризування цього рівняння. Для цього розкладемо  $\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta \vec{r}_m)$  у ряд Тейлора за малою величиною  $\delta \vec{r}_m$  і обмежимося тільки лінійними доданками:  $\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta \vec{r}_m) \approx \vec{\gamma}(\vec{r}_m) + (\delta \vec{r}_m \vec{\nabla}) \vec{\gamma}(\vec{r}_m)$ . У результаті, отримуємо

$$\begin{aligned}\vec{r}_p + \delta\vec{r}_p &= \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m + z_p\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m) \approx \\ &\approx \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m + z_p\vec{\gamma}(\vec{r}_m) + z_p(\delta\vec{r}_m\vec{\nabla})\vec{\gamma}(\vec{r}_m).\end{aligned}\quad (17.27)$$

Враховуючи, що  $\vec{r} = \vec{r}_m$  задовольняє вихідне рівняння

$$\vec{r}_p = \vec{r}_m + z_p \gamma(\vec{r}_m), \text{ отримуємо}$$



$$\delta \vec{r}_p \approx \delta \vec{r}_m + z_p (\delta \vec{r}_m \vec{\nabla}) \vec{\gamma}(\vec{r}_m). \quad (17.28)$$

Скористаємося тепер одним з основних рівнянь МГО – законом збереження інтенсивності всередині нескінченно тонкої променевої трубки (див. (15.14)) побудованої поблизу променя, що з'єднує точки  $\vec{r} = \vec{r}_m$  (на вході) і  $\vec{r}_p$  (на виході). Позначимо через  $I_m(\vec{r}_p)$  значення інтенсивності у точці спостереження, що відповідає  $m$ -му променю. Враховуючи, що інтенсивність хвилі у площині фазового екрана у точці  $\vec{r} = \vec{r}_m$  дорівнює  $I_0(\vec{r}_m) = A_0^2(\vec{r}_m)$ , згідно з рис.17.6, можемо записати таку рівність (див. 15.14):

$$I_0(\vec{r}_m) d\Sigma_m = I_m(\vec{r}_p) d\Sigma_p. \quad (17.29)$$

Тут  $d\Sigma_p \equiv \delta \vec{r}_p$  – площа поперечного перерізу на виході променевої трубки (у площині спостереження), а  $d\Sigma_m \equiv \delta \vec{r}_m$  – на вході (у площині фазового екрана). З (17.29) знаходимо внесок у значення інтенсивності в точці спостереження від  $m$ -ї променевої трубки:

$$I_m(\vec{r}_p) = I_0(\vec{r}_m) \frac{d\Sigma_m}{d\Sigma_p}. \quad (17.30)$$

Відношення площ  $d\Sigma_m/d\Sigma_p \equiv \delta \vec{r}_m/\delta \vec{r}_p$  легко визначається з лінеаризованого рівняння (17.28) через якобіан перетворення від змінних  $x_p, y_p$  до змінних  $x, y$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_m}{d\Sigma_p} &\equiv \frac{\delta \vec{r}_m}{\delta \vec{r}_p} = \left| \frac{\partial(x_m, y_m)}{\partial(x_p, y_p)} \right| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_p, y_p)} \right|^{-1} = \\ &= \left| \left( 1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \left( 1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left( \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right|^{-1} \Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_m}. \end{aligned} \quad (17.31)$$

Тут ми скористалися відомим зв'язком між „прямим” і „зворотним” якобіанами і врахували, що, згідно з визначенням  $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r})$ , для змішаних похідних повинна виконуватися рівність:  $\partial \gamma_x / \partial y = \partial \gamma_y / \partial x$ .

Повну інтенсивність у точці спостереження  $I(\vec{r}_p)$  отримаємо, підсумувавши внески від всіх променевих трубок:

$$\begin{aligned} I(\vec{r}_p) &= \sum_{m=1}^N I_m(\vec{r}_p) = \\ &= \sum_{m=1}^N I_0(\vec{r}_m) \left| \left( 1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \left( 1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left( \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right|^{-1} \Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_m}. \end{aligned} \quad (17.32)$$

#### 17.4. Дифракційне розв'язання задачі

Кількісний аналіз інтегрального подання (17.20) при довільних залежностях амплітуди  $A_0(\vec{r})$  і фази  $k\varphi(\vec{r})$  у загальному випадку не є можливим. Проте для коротких довжин хвиль, коли  $\lambda$  набагато менша за характерний масштаб  $l_\varphi$  змін ейконалу  $\varphi(\vec{r})$  у площині екрана ( $kl_\varphi \gg 1$ ), інтеграл (17.20) можна оцінити методом стаціонарної фази. При цьому задача суттєво спрощується і в результаті вдається отримати достатньо прості асимптотичні оцінки для значення поля у точці спостереження.

##### Метод стаціонарної фази

У цьому розділі ми в загальних рисах подамо один із найрезультативніших математичних методів асимптотичної оцінки інтегралів виду (17.20), який у фізиці називається короткохвильовою 2\*

асимптотикою, а в математиці — асимптотичною оцінкою швидко осцилюючих інтегралів.

Нехай необхідно обчислити одинарний інтеграл виду

$$J(\Lambda) = \int_a^b q(x) e^{i\Lambda\Phi(x)} dx, \quad (17.33)$$

де  $\Lambda \gg 1$  (великий параметр), а  $q(x)$  і  $\Phi(x)$  — дійсні повільно змінювані функції (порівняно з періодом зміни функції  $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$ ). Поведінка підінтегрального виразу нагадує розглянутий раніше в § 6 амплітудно модульований процес: при цьому  $q(x)$  грає роль обвідної, а  $\Phi(x)$  визначає миттєву частоту заповнення обвідної.

Припустимо спочатку, що на інтервалі  $(a, b)$ , де  $b > a$ , функції  $q(x)$  і  $\Phi(x)$  змінюються монотонно. На рис. 17.7 а показано характерний вигляд реальної  $\operatorname{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$  або уявної  $\operatorname{Im}(qe^{i\Lambda\Phi})$  частин підінтегральної функції. Визначений інтеграл на інтервалі  $(a, b)$  за визначенням дорівнює сумі елементарних „площадок”, що містяться всередині кривої  $\operatorname{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$  (або  $\operatorname{Im}(qe^{i\Lambda\Phi})$ ). Довільно оберемо один з періодів зміни підінтегральної функції, наприклад,  $\operatorname{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$ . Внаслідок повільного характеру змін  $q(x)$  і  $\Phi(x)$  при  $\Lambda \gg 1$  площадки, що відповідають двом півперіодам, мають приблизно рівні амплітуди, але різні знаки  $(+, -)$ . У процесі підсумовування вони дають мізерно малий внесок у загальний інтеграл (17.33). У результаті підсумовування всіх півперіодів із додатними і від’ємними значеннями ми отримаємо незначну величину  $J(\Lambda)$ . Можна показати, що за рахунок швидкої осциляції  $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$  значення інтеграла  $J(\Lambda)$  буде обернено пропорційним величині  $\Lambda$ :  $J(\Lambda) \sim \Lambda^{-1}$ .

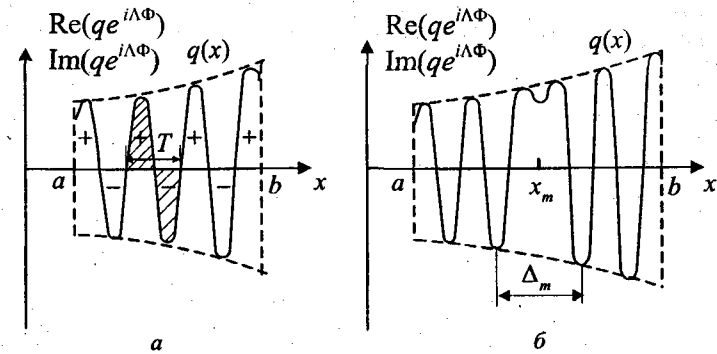


Рис. 17.7

Ситуація суттєво змінюється, якщо всередині інтервалу  $(a, b)$  функція  $\Phi(x)$  досягає екстремуму. У цьому випадку основний внесок у інтеграл (17.33) дає невеликий окіл значень  $x$ , що лежать поблизу точки екстремуму  $x = x_m$  (рис. 17.7 б), де функція  $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$  перестає осцилювати. Області інтегрування, віддалені від точки екстремуму, і в яких функції  $q(x)$  і  $\Phi(x)$  монотонно змінюються, дають значно менший внесок у величину інтеграла  $J(\Lambda)$ .

Асимптотичну оцінку інтеграла за наявності стаціонарних точок можна отримати, виконавши такі спрощення.

1. Припустимо спочатку, що  $x = x_m$  є єдиною на інтервалі  $(a, b)$  точкою екстремуму, що визначається з умови:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0. \quad (17.34)$$

В околі  $x = x_m$  розкладемо  $\Phi(x)$  у ряд Тейлора і залишимо тільки квадратичний доданок:

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_m) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi(x_m)}{dx^2} (x - x_m)^2 = \Phi(x_m) + \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2. \quad (17.35)$$

Тут  $\Delta x = x - x_m$ . З урахуванням (17.35) показник степеню експоненти поблизу стаціонарної точки подається у вигляді

$$\Lambda \Phi(x) \approx \Lambda \Phi(x_m) + \frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2. \quad (17.36)$$

Розмір області  $\Delta_m = \Delta x$ , у межах якої підінтегральна функція в (17.33) не осцилює, і, отже, дає основний внесок в інтеграл (див. рис.

17.7б), можна оцінити з умови  $\frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2 \approx \pi$ :

$$\Delta_m \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda |\Phi''_{xx}(x_m)|}}. \quad (17.37)$$

2. Амплітудна функція  $q(x)$  практично не змінюється у межах області  $x_m - \Delta_m < x < x_m + \Delta_m$  (внаслідок її повільності), тому її можна просто винести за знак інтеграла в точці  $x = x_m$ , тобто покласти  $q(x) \approx q(x_m)$ .

3. Якщо область змін аргументу  $x_m - \Delta_m < x < x_m + \Delta_m$  розташована на значній відстані від меж інтервалу  $(a, b)$ , то границі інтегрування можна розтягнути від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Після виконаних спрощень отримаємо

$$\begin{aligned} J_m(\Lambda) &\approx q(x_m) e^{i\Lambda \Phi(x_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2 \right\} d(\Delta x) = \\ &= q(x_m) \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda |\Phi''_{xx}(x_m)|}} \exp \left\{ i \left[ \Lambda \Phi(x_m) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \Phi''_{xx}(x_m) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.38)$$

4. Якщо рівняння для визначення точок стаціонарності фази (17.34) має не один, а кілька дійсних коренів  $x = x_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, N$ ), і

області  $\Delta_m$  не перекриваються та розташовані далеко від границь області інтегрування (випадок так званих ізольованих коренів), то асимптотична оцінка (17.33) при  $\Lambda \gg 1$  дорівнює сумі внесків від кожної стаціонарної точки (17.38):

$$J(\Lambda) = \sum_{m=1}^N J_m(\Lambda), \quad (17.39)$$

Метод стаціонарної фази можна узагальнити і для випадку кратних інтегралів. Цікавим для наших розрахунків є алгоритм оцінок подвійного інтеграла виду

$$J(\Lambda) = \int_{\Sigma} q(\vec{r}) e^{i\Lambda \Phi(\vec{r})} d\vec{r}, \quad (17.40)$$

де знову  $\Lambda$  — великий параметр ( $\Lambda \gg 1$ ),  $q(\vec{r})$  і  $\Phi(\vec{r})$  — функції, що „повільно” змінюються, а  $\Sigma$  — задана область інтегрування.

1. З рівняння

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi(\vec{r}) = 0 \quad (17.41)$$

знаходяться точки (дійсні корені) стаціонарності фази:  $\vec{r} = \vec{r}_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, N$ ).

2. В околі кожної точки  $\vec{r} = \vec{r}_m$  функція  $\Phi(\vec{r})$  подається у вигляді двовимірного ряду Тейлора з точністю до квадратичних членів включно:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &\approx \Phi(\vec{r}_m) + \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) (\Delta x)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) (\Delta y)^2 + \Phi''_{xy}(\vec{r}_m) \Delta x \Delta y, \end{aligned} \quad (17.42)$$

де  $\Delta x = x - x_m$ ,  $\Delta y = y - y_m$ , а  $\Phi''_{ij}(\vec{r}_m)$  — частинні похідні другого порядку за змінними  $x$  і  $y$ .

3. В околі  $\vec{r}_m$  „повільно” змінювану функцію  $q(\vec{r})$  вважаємо приблизно сталою і виносимо за знак інтеграла в точці  $\vec{r} = \vec{r}_m$ :  $q(\vec{r}) \approx q(\vec{r}_m)$ .

4. Розміри областей  $\Delta_m$ , які дають основні внески у значення інтеграла  $J(\Lambda)$ , оцінюються за допомогою (17.42) з умови  $|\Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_m)| \approx \pi$ . Видно, що визначені у такий спосіб області  $\Delta_m$  — не що інше, як перші зони Френеля, описані навколо стаціонарних точок  $\vec{r} = \vec{r}_m$ .

5. Якщо області  $\Delta_m$  розташовані на значній відстані між собою і від меж області інтегрування (випадок ізольованих коренів), то при оцінці внеску кожної стаціонарної точки  $J_m(\Lambda)$  границі інтегрування можна розтягнути від  $-\infty$  до  $\infty$ .

У результаті, для внеску  $m$ -ї стаціонарної точки виходить така асимптотична оцінка:

$$\begin{aligned} J_m(\Lambda) &\approx q(\vec{r}_m) e^{i\Lambda\Phi(\vec{r}_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i\Lambda \left[ \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) (\Delta x)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) (\Delta y)^2 + \Phi''_{xy}(\vec{r}_m) \Delta x \Delta y \right] \right\} d(\Delta x) d(\Delta y) = \\ &= \frac{2\pi q(\vec{r}_m)}{\Lambda \sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[ \Lambda \Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.43)$$

Тут  $D_m = \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) - \Phi''_{xy}^2(\vec{r}_m)$  — визначник, утворений із других похідних функції  $\Phi$ ;  $\varepsilon_m = 1$ , якщо  $\vec{r}_m$  — точка  $\max$ ;  $\varepsilon_m = -1$ , якщо  $\vec{r}_m$  — точка  $\min$ ;  $\varepsilon_m = 0$ , якщо  $\vec{r}_m$  — сідлова точка.

Асимптотичну оцінку всього інтеграла (17.40) отримують шляхом підсумовування внесків від всіх стаціонарних точок:

$$\begin{aligned} J(\Lambda) &= \sum_{m=1}^N J_m(\Lambda) \approx \\ &\approx \frac{2\pi}{\Lambda} \sum_{m=1}^N \frac{q(\vec{r}_m)}{\sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[ \Lambda \Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.44)$$

Скористаємося тепер наведеними вище формулами для отримання короткохвильової оцінки інтегрального подання (17.20). Для цього достатньо провести формальну заміну позначень:

$$\Lambda \rightarrow k, \quad q(\vec{r}) \rightarrow \frac{A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{R}_p|}, \quad \Phi(\vec{r}) \rightarrow |\vec{r} - \vec{R}_p| + \varphi(\vec{r}).$$

У малокутовому наближенні ( $|\vec{r}| \ll 1$ ) основний внесок по полю в точці спостереження  $\vec{R}_p$  дає тільки малий окіл  $\vec{r}$  на фазовому екрані, що лежить поблизу значень  $\vec{r} = \vec{r}_p$ , — тому виконується нерівність  $|\vec{r} - \vec{r}_p| \ll z_p$ . У цьому випадку у підінтегральному виразі (17.20) можна приблизно покласти

$$\begin{aligned} \cos \theta(\vec{r}) &\approx \cos \theta(\vec{r}_p) = 1, \\ |\vec{r} - \vec{R}_p| &= \sqrt{z_p^2 + (\vec{r} - \vec{r}_p)^2} \approx z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p}, \\ q(\vec{r}) &\approx \frac{A_0(\vec{r})}{z_p}, \\ \Phi(\vec{r}) &\approx z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p} + \varphi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (17.45)$$

У результаті виконаних спрощень отримуємо

$$U(\bar{R}_p) \approx \frac{k}{2\pi i z_p} \int_{\Sigma_0} A_0(\bar{r}) \exp\{ik\Phi(\bar{r})\} d\bar{r}, \quad (17.46)$$

де  $\Phi(\bar{r}) = z_p + \frac{(\bar{r} - \bar{r}_p)^2}{2z_p} + \varphi(\bar{r})$ . Зауважимо, що для достатньо коротких довжин хвиль  $\lambda \ll l_\varphi$ , де  $l_\varphi$  — характерний масштаб зміни ейконалу  $\varphi(\bar{r})$  (радіус кривизни поверхні постійної фази  $z = z_s(\bar{r})$ ), як великий параметр  $\Lambda$  в (17.46) фактично виступає безрозмірна величина  $kl_\varphi$  ( $kl_\varphi \gg 1$ ).

За методом стаціонарної фази, з умови

$$\bar{\nabla}_{\bar{r}} \Phi(\bar{r}) = \frac{\bar{r} - \bar{r}_p}{z_p} + \bar{\nabla}_{\bar{r}} \varphi(\bar{r}) = 0 \quad (17.47)$$

отримуємо рівняння

$$\bar{r}_p = \bar{r} + z_p \bar{\gamma}(\bar{r}), \quad (17.48)$$

розв'язання якого  $\bar{r} = \bar{r}_m$  визначає точки (дійсні корені) стаціонарності фази (ми знову врахували, що  $\bar{\gamma}(\bar{r}) = \bar{\nabla}_{\bar{r}} \varphi(\bar{r})$ ). З порівняння з (17.26) видно, що (17.48) — вже відоме нам абераційне рівняння у наближенні МГО, тобто точки стаціонарності фази  $\bar{r} = \bar{r}_m$  є саме координатами променів, що приходять з екрана в точку спостереження.

Якщо рівняння (17.48) має декілька дійсних ізольованих коренів ( $\bar{r} = \bar{r}_m, m = 1, 2, \dots, N$ ), які лежать у рамках області інтегрування  $\Sigma_0$  ( $\bar{r}_m \in \Sigma_0$ ) і далеко від її межі, то асимптотична оцінка інтеграла (17.46), згідно з (17.44), дорівнює

$$U(\bar{R}_p) = \sum_{m=1}^N U_m(\bar{R}_p), \quad (17.49)$$

де  $U_m(\bar{R}_p)$  — внесок від  $m$ -ї стаціонарної точки, що визначається як

$$U_m(\bar{R}_p) \approx \frac{A_0(\bar{r}_m)}{z_p \sqrt{|D(\bar{r}_m)|}} \exp\left\{i\left[k\Phi(\bar{r}_m) - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_m)\right]\right\}. \quad (17.50)$$

Тут

$$D(\bar{r}_m) = \left[ \Phi''_{xx} \Phi''_{yy} - (\Phi''_{xy})^2 \right]_{\bar{r}=\bar{r}_m} = \frac{1}{z_p^2} \left[ \left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}\right) \left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}\right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y}\right)^2 \right]_{\bar{r}=\bar{r}_m}. \quad (17.51)$$

Отже, за наявності кількох дійсних коренів  $\bar{r} = \bar{r}_m$  у точку спостереження  $\bar{R}_p$  одночасно приходять кілька променів (хвиль), причому кожна з хвиль  $U_m(\bar{R}_p)$ , що прийшли, має свою амплітуду  $A_0(\bar{r}_m)/z_p \sqrt{|D(\bar{r}_m)|}$  і фазу  $k\Phi(\bar{r}_m) - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_m)$ . Сумарне поле  $U(\bar{R}_p)$  утворюється в результаті когерентного додавання всіх складових  $U_m(\bar{R}_p)$ .

Скориставшись формулою (17.49), визначимо тепер інтенсивність поля у точці спостереження:

$$I(\bar{R}_p) = U(\bar{R}_p) U^*(\bar{R}_p) = \sum_{m=1}^N |U_m(\bar{R}_p)|^2 + \sum_{n \neq j}^N U_n(\bar{R}_p) U_j^*(\bar{R}_p) = \sum_{m=1}^N I_m(\bar{R}_p) + \sum_{n \neq j}^N \sqrt{I_n(\bar{R}_p)} \sqrt{I_j(\bar{R}_p)} \exp\left\{i\left[k(\Phi(\bar{r}_n) - \Phi(\bar{r}_j)) + \frac{\pi}{2}(\varepsilon_n - \varepsilon_j)\right]\right\}. \quad (17.52)$$



Тут

$$I_m(\bar{R}_p) = |U_m(\bar{R}_p)|^2 = \frac{A_0^2(\bar{r}_m)}{z_p^2 |D(\bar{r}_m)|} =$$

$$= I_0(\bar{r}_m) \left| \left( 1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \left( 1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left( \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right|^{-1} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_m} \quad (17.53)$$

інтенсивність хвилі, що прийшла у точку спостереження вздовж  $m$ -го променя.

Порівнюючи формули для  $I(\bar{R}_p)$ , отримані у наближеннях МГО (17.32) і дифракційному короткохвильовому наближенні (17.52), бачимо, що некогерентна складова у дифракційному наближенні  $\sum I_m(\bar{R}_p)$  точно збігається із геометрооптичною величиною. Врахування дифракції під час розгляду тільки ізольованих коренів абераційного рівняння зводиться лише до врахування інтерференції хвиль між собою (доданок  $\sim \sum \sum$  у формулі (17.52)).

### Коментарі

За допомогою методу стаціонарної фази у наближенні методу фазового екрана можна аналізувати і більш складні поведінки полів. Ми розглянули тільки випадок скінченної кількості ізольованих коренів  $\bar{r}_m$ , який відповідає одночасному приходу у точку спостереження кількох променів. Проте за наявності у площині спостереження фокальних утворень (фокуси і каустики) в абераційному рівнянні (17.48), залежно від положення спостерігача, деякі з коренів можуть наближатися один до одного і навіть зливатися в один – кратний. Для коренів, що зливаються,  $D(\bar{r}_m) \rightarrow 0$ , а інтенсивності  $I_m$  нескінченно

зростають ( $I_m(\bar{R}_p) \rightarrow \infty$ ). У цьому випадку МГО просто припиняє діяти. Проте у наближенні методу фазового екрана і у цьому випадку можна отримати скінченні (дифракційні) значення полів. Для цього у розкладі ейконалу  $\Phi(\bar{r})$  у ряд Тейлора (17.42) необхідно врахувати доданки більш високого порядку по  $\Delta x$  і  $\Delta y$ , ніж квадратичні. Наприклад, при перебуванні спостерігача поблизу гладкої каустики в абераційному рівнянні буде присутній корінь кратності 2, і у розкладі ейконалу необхідно враховувати члени третього порядку малості по  $\Delta x$  і  $\Delta y$ . Внесок у результуюче поле від подвійного кореня у цьому випадку виражатиметься через спецфункцію – функцію Ейрі. Поведінка полів за наявності коренів ще вищої кратності складає предмет аналізу теорії хвильових катастроф.

### 17.5. Дифракція флуктуючих хвиль

Згідно з (17.2), сумарний набіг фази хвилі на екрані  $S(\bar{r}) = k\varphi(\bar{r})$  включає в себе складову фази вихідної падаючої хвилі —  $S_0(\bar{r}) = k\varphi_0(\bar{r})$  і доданок  $\tilde{S}(\bar{r}) = k\tilde{\varphi}(\bar{r})$ , пов'язаний з набігом у шарі з неоднорідностями. Виділимо у повній фазі  $k\varphi(\bar{r})$  регулярну й випадкову складову:

$$S(\bar{r}) = k\varphi(\bar{r}) = k \langle \varphi(\bar{r}) \rangle + k\delta\varphi(\bar{r}) = \langle S(\bar{r}) \rangle + \delta S(\bar{r}), \quad (17.54)$$

де, за визначенням,  $\langle \delta S(\bar{r}) \rangle \equiv 0$ . Регулярна складова фази —  $\langle S(\bar{r}) \rangle = k \langle \varphi(\bar{r}) \rangle$  у загальному випадку може містити не тільки фазу падаючої хвилі —  $k\varphi_0(\bar{r})$ , а й регулярний доданок за рахунок неоднорідностей середовища —  $k \langle \tilde{\varphi}(\bar{r}) \rangle$ , якщо він не дорівнює 0:

$$k \langle \varphi(\bar{r}) \rangle = k\varphi_0(\bar{r}) + k \langle \tilde{\varphi}(\bar{r}) \rangle = S_0(\bar{r}) + \langle \tilde{S}(\bar{r}) \rangle. \quad (17.55)$$

Як приклад середовищ, у яких, крім випадкових „дрібно-масштабних” неоднорідностей, наявні ще й “великомасштабні” регулярні утворення, можна зазначити такі, як іоносфера Землі, корона Сонця, так звані великомасштабні „лінзи” у космосі, атмосфері Землі, морській воді та ін. Для перелічених середовищ великомасштабні і довготривалі утворення зручніше відносити до регулярної складової, вважаючи, що флюктууюча частина пов’язана з дрібномасштабними і швидко змінюваними неоднорідностями.

Наявність регулярної й випадкової складових у фазі хвилі призводить до того, що кут виходу променів з екрана  $\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r})$  також включатиме в себе як регулярну  $\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \langle \varphi(\vec{r}) \rangle$ , так і флюктууючу  $\delta \vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta \varphi(\vec{r})$  компоненти:  $\vec{\gamma}(\vec{r}) = \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle + \delta \vec{\gamma}(\vec{r})$ . З урахуванням цього абераційне рівняння (17.26) можна подати як

$$\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle + \delta \vec{f}(\vec{r}), \quad (17.56)$$

де  $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$  — регулярна, а  $\delta \vec{f}(\vec{r}) = z_p \delta \vec{\gamma}(\vec{r})$  — випадкова складові. Через наявність випадкового доданка  $\delta \vec{f}(\vec{r})$  дійсні корені  $\vec{r}_m$  рівняння (17.56) мають випадковий характер. Перерізи променевих трубок  $d\Sigma_m$  будуть при цьому флюктуувати (від реалізації до реалізації) і, як результат, інтенсивність хвилі у точці спостереження (17.32) є випадковою величиною.

З іншого боку, у дифракційній формулі (17.52) вплив випадкової складової фази  $k\delta\varphi(\vec{r})$  проявляє себе двояко. По-перше, наявність  $\delta\varphi(\vec{r})$  призводить до флюктуацій кута приходу  $\vec{\gamma}(\vec{r})$ , що призводить до випадкових змін у положеннях точок стаціонарної фази  $\vec{r}_m$  рівняння (17.48). По-друге, у формулу (17.52) в явному вигляді входять

випадкові різниці фаз хвиль, що приходять з різних ділянок фазового екрана.

Урахування випадкових факторів можна було б здійснювати, користуючись вже отриманими у рамках МГО і дифракційного аналізу формулами, задаючи статистику випадкових флюктуацій фази  $k\delta\varphi(\vec{r})$ , кутів приходу  $\delta\vec{\gamma}(\vec{r})$  і визначаючи відповідним чином статистику коренів абераційного рівняння (17.48). Проте зручніше це зробити на основі вихідного інтегрального зображення (17.20), яке, з урахуванням (17.54), набуває вигляду

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} e^{ik\varphi(\vec{r})} e^{ik\delta\varphi(\vec{r})} d\vec{r}. \quad (17.57)$$

#### 17.6. Статистичні моменти поля.

##### Принцип Гюйгенса для інтенсивності

Обчислимо *середнє поле* у точці спостереження  $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ .

При усередненні (17.57) за ансамблем реалізацій випадкової функції  $\delta\varphi(\vec{r})$  під інтегралом виникає множник  $\langle e^{ik\delta\varphi(\vec{r})} \rangle$ . При його обчисленні припустимо, що випадкові флюктуації фази  $\delta S(\vec{r}) = k\delta\varphi(\vec{r})$  статистично однорідні й розподілені за нормальним законом:

$$W(\delta S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_S} \exp \left\{ -\frac{(\delta S)^2}{2\sigma_S^2} \right\}, \quad (17.58)$$

де  $\sigma_S^2 = \langle (\delta S)^2 \rangle = \text{Const}$  — дисперсія флюктуацій фази на екрані. Для нормально розподіленої величини  $\delta S$  маємо

$$\langle e^{i\delta S} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta S} W(\delta S) d(\delta S) = e^{-\sigma_S^2/2}. \quad (17.59)$$

З урахуванням цього приходимо до такого визначення середнього поля:

$$\langle U(\bar{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_S^2/2} U_d(\bar{R}_p). \quad (17.60)$$

Тут  $U_d(\bar{R}_p) = U(\bar{R}_p)|_{\delta S=0}$  — це поле  $U(\bar{R}_p)$  (17.57), яке було б у точці спостереження  $\bar{R}_p$ , якби на екрані не було випадкових флюктуацій фази ( $\delta S \equiv 0$ ). При цьому  $e^{i\delta S} \equiv 1$  і (17.57) є представленням дифрагованого поля за екраном.

Таким чином, середнє (когерентне) поле за фазовим екраном із просторово-однорідними флюктуаціями фази  $\delta S$  відрізняється від незбуреного  $U_d(\bar{R}_p)$  тільки сталим множником  $e^{-\sigma_S^2/2}$ . Поведінка  $U_d(\bar{R}_p)$  може бути досліджена, наприклад, методом стаціонарної фази.

**Середню інтенсивність**, як і раніше, ототожнюватимемо з другим статистичним моментом:

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{R}_p) \rangle &= \langle U(\bar{R}_p) U^*(\bar{R}_p) \rangle = \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\Sigma_0} d\bar{r}' \int_{\Sigma_0} d\bar{r}'' \frac{A_0(\bar{r}') A_0(\bar{r}'')}{|\bar{r}' - \bar{R}_p| |\bar{r}'' - \bar{R}_p|} \cos \theta(\bar{r}') \cos \theta(\bar{r}'') \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[ |\bar{r}' - \bar{R}_p| - |\bar{r}'' - \bar{R}_p| + \bar{\varphi}(\bar{r}') - \bar{\varphi}(\bar{r}'') \right] \right\} \times \\ &\times \langle \exp \left\{ i [\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')] \right\} \rangle. \end{aligned} \quad (17.61)$$

Якщо  $\delta S(\bar{r})$  описується нормальним розподілом, то й різниця фаз  $\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')$  також нормально розподілена. У результаті, для статистично однорідних флюктуацій маємо

$$\langle \exp \left\{ i [\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')] \right\} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_S(\bar{r}' - \bar{r}'') \right\}, \quad (17.62)$$

де  $D_S(\bar{r}' - \bar{r}'') = \langle [\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')]^2 \rangle$  — структурна функція флюктуацій фази.

Перед тим, як аналізувати отриману формулу (17.61), виконаємо деякі спрощення.

1. Скористаємося спрощеннями (17.45), які можна виконати у малокутовому наближенні. При цьому (17.61) приводиться до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{R}_p) \rangle &= \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_0} d\bar{r}' \int_{\Sigma_0} d\bar{r}'' A_0(\bar{r}') A_0(\bar{r}'') \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_S(\bar{r}' - \bar{r}'') \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[ \frac{(\bar{r}' - \bar{r}_p)^2}{2z_p} - \frac{(\bar{r}'' - \bar{r}_p)^2}{2z_p} + \bar{\varphi}(\bar{r}') - \bar{\varphi}(\bar{r}'') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.63)$$

2. Введемо до розгляду сумарні й різницьві координати:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{2}(\bar{r}' + \bar{r}''), \\ \bar{\rho} &= \bar{r}' - \bar{r}''. \end{aligned} \quad (17.64)$$

При цьому, як легко перевірити, старі змінні виражаються через нові у вигляді  $\bar{r}' = \bar{r} + \bar{\rho}/2$ ,  $\bar{r}'' = \bar{r} - \bar{\rho}/2$ , а модуль якобіана

переходу  $J = \left| \frac{\partial(\bar{r}', \bar{r}'')}{\partial(\bar{r}, \bar{\rho})} \right| = 1$ . Після заміни формула (17.63) подається у вигляді

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{R}_p) \rangle &= \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_r} d\bar{r} \int_{\Sigma_\rho} d\bar{\rho} A_0(\bar{r} + \bar{\rho}/2) A_0(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_S(\bar{\rho}) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[ \frac{(\bar{r} - \bar{r}_p)\bar{\rho}}{z_p} + \bar{\varphi}(\bar{r} + \bar{\rho}/2) - \bar{\varphi}(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (17.65)$$

де  $\Sigma_{r,\rho}$  — нові області інтегрування для змінних  $\vec{r}$  і  $\vec{\rho}$ .

3. Розглядатимемо статистично однорідні й ізотропні флуктуації фази і виразимо  $D_S(\vec{\rho}) = D_S(\rho)$  через автокореляційну функцію флуктуацій фази  $B_S(\rho) = \langle \delta S(\vec{r}) \delta S(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle$ :

$$D_S(\rho) = 2 \left[ \sigma_S^2 - B_S(\rho) \right] = 2 \sigma_S^2 [1 - K_S(\rho)], \quad (17.66)$$

де  $\sigma_S^2 = B_S(0)$  — дисперсія флуктуацій фази, а  $K_S(\rho) = B_S(\rho) / \sigma_S^2$  — коефіцієнт кореляції.

4. Коефіцієнт кореляції  $K_S(\rho)$  за визначенням дорівнює 1 при  $\rho = 0$  і швидко спадає до 0 для рознесення між точками, що перевищує характерний масштаб спадання  $l_S$  ( $K_S(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho > l_S$ ). При сильних флуктуаціях фази на екрані, коли  $\sigma_S^2 \gg 1$ , основний внесок в інтеграл (17.65) дає лише невеликий окіл значень  $\rho$ , що лежать поблизу  $\rho = 0$ , там, де функція  $D_S(\rho)$  є достатньо малою (нагадаємо, що  $D_S(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ ). Для малих  $\rho$  коефіцієнт кореляції  $K_S(\rho)$  можна розкласти в ряд Тейлора і обмежитися першими неznикаючими членами:

$$K_S(\rho) \approx K_S(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} K_S(0) \rho^2 = 1 - \frac{\rho^2}{2l_S^2} = 1 - \frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{2l_S^2}. \quad (17.67)$$

Тут через співвідношення  $l_S^{-2} = -\frac{d^2}{d\rho^2} K_S(0)$  введено радіус

кореляції флуктуацій фази  $l_S$ , що збігається за порядком величини із характерним лінійним розміром неоднорідностей фази на екрані. У результаті, “ріжучий” фактор у формулі (17.65) наближено набуває вигляду

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} D_S(\rho) \right\} \approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sigma_S^2}{l_S^2} \rho^2 \right\}. \quad (17.68)$$

Характерний розмір області  $\rho = \rho_{ef}$ , який дає основний внесок в інтеграл за  $d\vec{\rho}$ , можна оцінити з умови  $\sigma_S^2 \rho_{ef}^2 / 2l_S^2 \approx 1$ , звідки отримуємо  $\rho_{ef} \approx l_S / \sigma_S$ .

5. Якщо значення  $\rho_{ef}$  є набагато меншим за характерні масштаби  $L_{x,y}$  змін регулярної складової ейконалу  $\bar{\varphi}(\vec{r})$ , що визначаються вздовж осей координат  $x$  і  $y$  зі співвідношень

$$\left| \frac{1}{\bar{\varphi}(\vec{r})} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\varphi}(\vec{r}) \right| \approx \frac{1}{L_x}, \quad \left| \frac{1}{\bar{\varphi}(\vec{r})} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\varphi}(\vec{r}) \right| \approx \frac{1}{L_y}, \quad (17.69)$$

то регулярну різницю фаз у рознесених точках можна розкласти в ряд Тейлора в точці  $\vec{\rho} = 0$  і обмежитися першими неznикаючими членами:

$$\bar{\varphi} \left( \vec{r} + \frac{\vec{\rho}}{2} \right) - \bar{\varphi} \left( \vec{r} - \frac{\vec{\rho}}{2} \right) \approx \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{\varphi}(\vec{r}) \vec{\rho} = \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle \vec{\rho}. \quad (17.70)$$

6. “Повільно” змінюваний амплітудний фактор в (17.65)  $A_0(\vec{r} + \vec{\rho}/2) A_0(\vec{r} - \vec{\rho}/2)$  з тих самих причин, що й у п.5, можна наближено взяти у суміщених точках, тобто при  $\vec{\rho} = 0$ :

$$A_0(\vec{r} + \vec{\rho}/2) A_0(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \approx A_0^2(\vec{r}) = I_0(\vec{r}). \quad (17.71)$$

7. З урахуванням того, що при сильних флуктуаціях фази  $\rho_{ef} \approx l_S / \sigma_S \ll l_S$ , інтегрування за  $d\vec{\rho}$  у (17.65) можна проводити у нескінченних межах, а область інтегрування за сумарною координатою  $\vec{r}$  практично збігається зі старою  $\Sigma_0$  ( $\Sigma_r \approx \Sigma_0$ ).

У результаті виконаних спрощень отримуємо

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\vec{r}) d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} \rho^2 \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ ik \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{z_p} + \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle \right] \vec{\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (17.72)$$

Обчислення інтеграла виду

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \exp \left\{ -\alpha \rho^2 + i\vec{\beta} \vec{\rho} \right\} \quad (17.73)$$

зручніше проводити у полярних координатах  $\vec{\rho} = (\rho, \varphi_\rho)$  і  $\vec{\beta} = (\beta, \varphi_\beta)$ . При цьому інтегрування за  $d\varphi_\rho$  приводить до функції Бесселя першого роду нульового порядку —  $J_0(x)$ , а інтеграл за  $d\rho$ , що залишився, — табличний інтеграл:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_0^{\infty} \rho \exp \left\{ -\alpha \rho^2 \right\} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho \exp \left\{ i\beta \rho \cos(\varphi_\rho - \varphi_\beta) \right\} = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\alpha \rho^2} J_0(\beta \rho) d\rho = \frac{\pi}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (17.74)$$

У нашому випадку  $\alpha = \sigma_S^2 / 2l_S^2$ ,  $\vec{\beta} = k \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{z_p} + \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle \right]$ , й інтегрування (17.72) за різницевою змінною  $d\vec{\rho}$  приводить до такого виразу:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{k^2 l_S^2}{2\pi z_p^2 \sigma_S^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{k^2 l_S^2}{2z_p^2 \sigma_S^2} \left[ \vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle \right]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (17.75)$$

Згідно з визначенням, випадкові флукутації фази  $\delta S$  і кута  $\delta \vec{\gamma}$  пов'язані між собою співвідношенням  $\delta \vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{k} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta S(\vec{r})$ . У §7, присвяченому лінійним перетворенням випадкових процесів, нами було показано, що автокореляційна функція  $B_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$  стаціонарного процесу  $x(t)$  і автокореляційна функція  $B_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle$  його похідної  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  пов'язані між собою співвідношенням  $B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau)$  (див. (7.29)). Аналогічний зв'язок можна записати і для статистично однорідних полів  $\delta \varphi(\vec{r})$  і  $\delta \vec{\gamma}(\vec{r})$ .

З урахуванням того, що вектор  $\delta \vec{\gamma}(\vec{r})$  є сумою двох ортогональних складових

$$\delta \vec{\gamma}(\vec{r}) = \delta \gamma_x(\vec{r}) \vec{e}_x + \delta \gamma_y(\vec{r}) \vec{e}_y,$$

де  $\delta \gamma_x(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \delta \varphi(\vec{r})$  і  $\delta \gamma_y(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial y} \delta \varphi(\vec{r})$ , дисперсія випадкового векторного поля відхилень променів  $\delta \vec{\gamma}$  має вигляд

$$\sigma_{\vec{\gamma}}^2 = \langle \delta \vec{\gamma}^2 \rangle = \langle \delta \gamma_x^2 \rangle + \langle \delta \gamma_y^2 \rangle. \quad (17.76)$$

Для визначення зв'язку між дисперсіями флукутацій кутів виходу з екрана  $\langle \delta \gamma_x^2 \rangle$ ,  $\langle \delta \gamma_y^2 \rangle$  і дисперсією флукутацій фази на екрані  $\sigma_S^2$  побудуємо спочатку такі автокореляційні функції:

$$\begin{aligned} B'_{xx}(\vec{r}', \vec{r}'') &= \langle \delta \gamma_x(\vec{r}') \delta \gamma_x(\vec{r}'') \rangle = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x''} \langle \delta \varphi(\vec{r}') \delta \varphi(\vec{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x''} B_\varphi(\vec{r}', \vec{r}''), \end{aligned} \quad (17.77 \text{ а})$$



$$B_{yy}^{\gamma}(\vec{r}', \vec{r}'') = \langle \delta\gamma_y(\vec{r}') \delta\gamma_y(\vec{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y''} \langle \delta\varphi(\vec{r}') \delta\varphi(\vec{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y''} B_{\varphi}(\vec{r}', \vec{r}''). \quad (17.77 \text{ б})$$

Подібні формули можна записати і для змішаних кореляторів у рознесених точках:  $B_{xy}^{\gamma}$  і  $B_{yx}^{\gamma}$ . Для статистично однорідного поля  $B_{\varphi}(\vec{r}', \vec{r}'') = B_{\varphi}(\vec{r}' - \vec{r}'') = B_{\varphi}(\vec{\rho})$  і формули (17.77) аналогічно (7.29) можна переписати у вигляді

$$B_{xx}^{\gamma}(\vec{\rho}) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} B_{\varphi}(\vec{\rho}), \quad (17.78 \text{ а})$$

$$B_{yy}^{\gamma}(\vec{\rho}) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} B_{\varphi}(\vec{\rho}). \quad (17.78 \text{ б})$$

Враховуючи тепер, що  $\langle \delta\gamma_x^2 \rangle = B_{xx}^{\gamma}(0)$ ,  $\langle \delta\gamma_y^2 \rangle = B_{yy}^{\gamma}(0)$ , а також зв'язок між автокореляційними функціями ейконалу і фази:

$$B_{\varphi}(\vec{\rho}) = \frac{1}{k^2} B_S(\vec{\rho}) = \frac{\sigma_S^2}{k^2} K_S(\vec{\rho}), \text{ в решті-решт отримаємо}$$

$$\sigma_{\gamma}^2 = -\frac{\sigma_S^2}{k^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} K_S(\vec{\rho}) + \frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} K_S(\vec{\rho}) \right]_{\vec{\rho}=0}. \quad (17.79)$$

Похідні  $\frac{\partial^2}{\partial \rho_{x,y}^2} K_S(0)$  визначають характерні масштаби кореляції

(розміри неоднорідностей) уздовж осей координат  $l_{sx}$  і  $l_{sy}$ . Для ізотропних флуктуацій ці значення збігаються:  $l_{sx} = l_{sy} = l_s$ ,  $K_S(\vec{\rho})$  подається у вигляді (17.67), і, згідно з (17.79), ми отримаємо таке співвідношення:

$$\sigma_{\gamma}^2 = 2 \frac{\sigma_S^2}{k^2 l_s^2}. \quad (17.80)$$

З урахуванням знайденого зв'язку між дисперсіями перепишемо (17.75) в остаточному вигляді:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_{\gamma}^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_{\gamma}^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (17.81)$$

Отримана формула відіграє точно таку ж роль для середньої інтенсивності  $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$ , що й дифракційний принцип Гюйгенса для поля  $U(\vec{R}_p)$ : середня інтенсивність у довільній точці спостереження  $\vec{R}_p$  подається у вигляді суми інтенсивностей від кожного елемента поверхні  $d\vec{r}$  фазового екрана з урахуванням діаграми спрямованості розсіяного випромінювання (індикатриси розсіювання), яка визначається як

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_{\gamma}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_{\gamma}^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\}. \quad (17.82)$$

Таким чином, при  $\sigma_S^2 \gg 1$  у точці спостереження  $\vec{R}_p$  хвильові поля, що приходять від різних точок фазового екрана ( $z = 0$ ), складаються „за інтенсивністю”, тобто некогерентно.

Проведемо тепер порівняння отриманого виразу (17.81) з результатами дифракційного і геометрооптичного аналізу. Вираз для  $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$  подається у вигляді інтеграла лапласівського типу.

Якщо  $z_p \sigma_{\gamma} \ll L_{x,y}$ , то основний внесок в інтеграл дають невеликі області  $\vec{r}$  фазового екрана, розташовані поблизу точок, де перетворюється на 0 показник степеню експоненти:

$$\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle. \quad (17.83)$$

Ми знову отримали добре відоме нам абераційне рівняння, але тільки для регулярної складової фази хвилі. Його розв'язками є

регулярні значення дійсних коренів:  $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

Асимптотичну оцінку інтеграла можна отримати, виконавши деякі спрощення аналогічно до того, як ми це робили в методі стаціонарної фази. Для довільно обраного кореня, наприклад,  $m$ -го, аналогічно до (17.27), лінеаризуємо  $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle$  в околі точки  $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$ . Поклавши  $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle + \delta\vec{r}$ , для невеликих зміщень  $\delta\vec{r}$  можна покласти:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle &= \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle + \delta\vec{r}) \rangle \approx \\ &\approx \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle + (\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle. \end{aligned} \quad (17.84)$$

З урахуванням того, що  $\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle$ , у показнику степеню експоненти в (17.81) поблизу від кореня  $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$  можна наближено записати:

$$\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle \approx (\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle. \quad (17.85)$$

Характерні розміри області  $\Delta_m = |\delta\vec{r}|$ , що дає головний внесок в інтеграл (17.81), можна оцінити, прирівнявши показник степеню експоненти до одиниці, тобто поклавши

$$|(\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle| \approx z_p \sigma_\gamma.$$

Якщо всі області  $\Delta_m$  є достатньо малими, не перекриваються і лежать далеко від межі області інтегрування (ізолювані корені), то при оцінюванні внеску кожного кореня можна, по-перше, множник  $I_0(\vec{r})$  в околі точки  $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$  вважати сталим і таким, що дорівнює  $I_0(\langle \vec{r}_m \rangle)$ , по-друге, межі інтегрування за  $d\vec{r}$  розтягнути від  $-\infty$  до  $\infty$ . У результаті, для внеску  $m$ -го кореня отримуємо таку асимптотичну оцінку:

$$\begin{aligned} \langle I_m(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} I_0(\langle \vec{r}_m \rangle) \int_{-\infty}^{\infty} d(\delta\vec{r}) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \left[ (\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle \right]^2 \right\} = \frac{I_0(\langle \vec{r}_m \rangle)}{|\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle)|}, \end{aligned} \quad (17.86)$$

де  $\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle)$  — визначник, побудований з перших похідних від регулярної складової  $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$  і обчислений у точці  $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$ :

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle) &= \left[ \frac{\partial \langle f_x \rangle}{\partial x} \frac{\partial \langle f_y \rangle}{\partial y} - \left( \frac{\partial \langle f_x \rangle}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \langle f_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle} = \\ &= \left[ \left( 1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial x} \right) \left( 1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial y} \right) - z_p^2 \left( \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle} \end{aligned} \quad (17.87)$$

Повна середня інтенсивність у точці спостереження визначиться як сума внесків від усіх регулярних коренів:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \sum_{m=1}^N \langle I_m(\vec{R}_p) \rangle \approx \quad (17.88)$$

$$\approx \sum_{m=1}^N I_0(\langle \vec{r}_m \rangle) \left[ \left( 1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial x} \right) \left( 1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial y} \right) - z_p^2 \left( \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle}^{-1}.$$

### Коментарі

1. Під час розгляду методу фазового екрана ми використовували тільки спрощення, пов'язане з малокутовим поширенням і не накладали умов дальньої зони, коли у розкладі фази хвилі на екрані (17.46) можна було б знехтувати доданком  $kr^2/2z_p \leq kL^2/2z_p \ll 1$  (тут  $L \approx \sqrt{\Sigma_0}$  — характерний розмір області інтегрування). Це означає, що отримані формули справедливі й у ближній зоні, коли  $kL^2/2z_p > 1$ .

2. З порівняння формул, отриманих у наближенні МГО, врахування дифракції і випадкових факторів видно, що випадкові флуктуації фази на екрані призводять до знищення когерентності хвиль, які приходять у точку спостереження від різних ділянок екрана (когерентна складова в (17.52) при сильних флуктуаціях фази перетворюється на 0). Як результат, середня інтенсивність у точці спостереження визначається так само, як і в наближенні МГО, але тільки з урахуванням не повної фази, а її регулярної складової (регулярного кута відхилення).

3. Відсутність у кінцевому результаті (17.88) характерного кута розсіювання  $\sigma_\gamma$  пов'язана із розглядом випадку ізольованих коренів. Якщо в площині спостереження після проходження хвилею шару з неоднорідностями показника заломлення —  $n(\vec{R})$  виникають регулярні фокальні утворення (фокуси, каустики), то серед коренів абераційного рівняння так само, як і в разі дифракції, з'являються збіжні (кратні). У цьому випадку для збіжної пари (корінь кратності 2)  $\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rightarrow 0$  і внесок  $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle \rightarrow \infty$ . Це означає, що у розкладі (17.84) вже недостатньо лінійних доданків, а необхідно враховувати члени більш високого порядку. У результаті, у кінцеві вирази для внесків увійде кут розсіювання  $\sigma_\gamma$ , а саме значення  $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle$  подаватиметься через відповідні спецфункції. Наприклад, у разі перебування спостерігача поблизу гладкої каустики середня інтенсивність  $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle$  виражатиметься через функцію параболічного циліндра.

Як найпростіший *приклад* розглянемо задачу про проходження плоскої хвилі

$$U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ikz}, \quad A_0 = \text{Const} \quad (17.89)$$

через нескінченний у поперечному напрямку (за  $\vec{r}$ ) і скінченної товщини у поздовжньому напрямку (за  $z$ ) випадково-неоднорідний шар. Припускається, що хвиля падає на шар ортогонально, шар з неоднорідностями статистично однорідний і ізотропний. При ортогональному падінні плоскої хвилі регулярна рефракція променів у шарі відсутня. Отже,  $\langle \gamma(\vec{r}) \rangle = 0$ ,  $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r}$ , і формула (17.81) набуває такого вигляду:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} (\vec{r}_p - \vec{r})^2 \right\} d\vec{r} = A_0^2 = I_0. \quad (17.90)$$

Виявилось, що середня інтенсивність у довільній точці спостереження за необмеженим фазовим екраном збігається з інтенсивністю падаючої хвилі  $I_0$ . Цей несподіваний результат легко пояснюється із закону збереження енергії.

### ЗАДАЧІ

1. На необмежений фазовий екран ( $z=0$ ) ортогонально падає плоска хвиля  $U_0(\vec{R}, t) = A_0 e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega t)}$ , де  $\vec{k} = k\vec{e}_z$ ,  $k = \omega/c$ . Скориставшись принципом Гюйгенса, розрахувати середнє поле і середню інтенсивність за екраном для повністю когерентного поля ( $\sigma_s^2 = 0$ ).

**Розв'язок.** Згідно з визначенням, фаза вихідної хвилі у площині фазового екрана ( $z=0$ ) дорівнює нулю ( $S_0 = 0$ ). Крім цього, випадкові флуктуації фази у „нескінченно тонкому” екрані відсутні ( $\delta S = 0$ ). Отже, поле на виході з екрана ( $z=0$ ) має вигляд

$$U|_{z=0} \equiv U_0(\vec{r}, t) \equiv U_0(x, y, t) = A_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Оскільки напрямок поширення вихідної плоскої хвилі збігається з напрямком осі  $OZ$  ( $\vec{k} = k\vec{e}_z$ ), розв'язання задачі можна проводити у малокутовому наближенні. У цьому випадку у формулі (17.57), що виражає принцип Гюйгенса, можна покласти  $\cos \theta = 1$ . У результаті, з урахуванням (1) у довільній точці спостереження за екраном поле визначається так:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{kU_0 e^{-i\omega t}}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ikR}}{R} dx dy, \text{ де } R = |\vec{r} - \vec{R}_p|. \quad (2)$$

Через те, що у розглядуваній задачі випадкові флуктуації фази відсутні, статистично середнє поле  $\bar{U}(\vec{R}_p)$  збігається з дифракційним значенням (2):  $\bar{U}(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p)$ . У наближенні френелевської дифракції (в малокутовому наближенні) подано відстань  $R = |\vec{r} - \vec{R}_p|$  від довільної точки екрана  $\vec{R} = (0, \vec{r})$  до точки спостереження  $\vec{R}_p = (z_p, x_p, y_p)$  (див. рис.17.8) у вигляді

$$R = [z_p^2 + (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{1/2} \approx z_p + \frac{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}{2z_p}. \quad (3)$$

Виконавши далі у виразі (2) заміну змінних  $x' = x - x_p$ ,  $y' = y - y_p$ , отримаємо

$$\bar{U}(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i z_p} A_0 e^{i(kz_p - \omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp \left\{ ik \left( \frac{x'^2}{2z_p} + \frac{y'^2}{2z_p} \right) \right\} dx' dy'. \quad (4)$$

У знаменнику підінтегрального виразу для  $\bar{U}(\vec{R}_p)$  ми наближено поклали  $R \approx z_p$ .

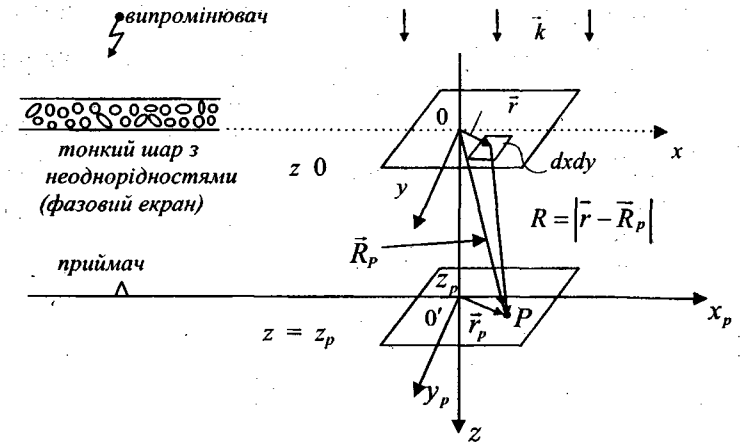


Рис. 17.8

Кожен з інтегралів в останньому виразі дорівнює  $\sqrt{\frac{2\pi z_p}{ik}}$ . Таким чином, остаточно можна записати

$$\bar{U}(\vec{R}_p) = A_0 e^{i(kz_p - \omega t)}, \quad |\bar{U}(\vec{R}_p)| = A_0. \quad (5)$$

Тепер нескладно визначити когерентну складову середньої інтенсивності  $\bar{I}_{\text{ког}} = |\bar{U}(\vec{R}_p)|^2$ . Оскільки  $U(\vec{R}_p) = \bar{U}(\vec{R}_p)$ , то  $|U(\vec{R}_p)| = |\bar{U}(\vec{R}_p)|$  і

$$\bar{I}_{\text{ког}} = A_0^2 = I_0. \quad (6)$$

Отримані результати цілком природні. Оскільки флуктуації фази і поглинання хвилі на екрані відсутні, то при нескінченному фазовому екрані (нескінченному фронті хвилі) хвиля за екраном й далі залишається плоскою зі сталими амплітудою й інтенсивністю.

2. На „тонкий” шар, безмежний у поперечному напрямку і скінченної товщини у поздовжньому, зі статистично однорідними неоднорідностями показника заломлення ортогонально падає плоска хвиля. На виході з шару ( $z=0$ ) знаходиться непрозора кругла заслінка радіусом  $a$ . Вважаючи, що регулярна рефракція в неоднорідному шарі відсутня, визначити середню інтенсивність поля  $\bar{I}(z_p)$  на осі заслінки, користуючись принципом Гюйгенса для повністю некогерентного поля ( $\sigma_s^2 \gg 1$ ).

**Розв'язок.** Як вихідний використовуємо вираз (17.90), отриманий для випадку сильних флуктуацій фази ( $\sigma_s^2 \gg 1$ ). Розташувавши початок декартової системи координат у центр заслінки, у довільній точці спостереження за екраном отримаємо

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} (\vec{r}_p - \vec{r})^2 \right\} d\vec{r}. \quad (1)$$

Тут  $\Sigma_0$  – область інтегрування, що являє собою нескінченну площину  $z=0$ , за вирахуванням круга радіусом  $a$ . Згідно з умовою задачі, точка спостереження знаходиться на осі заслінки, отже, ми повинні покласти  $\vec{r}_p = 0$ . Інтеграл у (1) простіше обчислювати у полярних координатах  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  і  $\varphi = \arctg(x/y)$ , у яких він набуває вигляду

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{I_0}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty e^{-\frac{t}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} dt = I_0 e^{-\frac{a^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Проаналізуємо отриманий результат. Дисперсія флуктуацій кутів розсіювання  $\sigma_\gamma^2$  пов'язана з дисперсією флуктуацій фази  $\sigma_s^2$  співвідношенням (17.80):  $\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k^2 l_s^2}$ . Отже,

$$\bar{I} = I_0 \exp \left\{ -\frac{a^2 k^2 l_s^2}{2 \sigma_s^2 z_p^2} \right\} = I_0 \exp \left\{ -\frac{2\pi^2 a^2 l_s^2}{\sigma_s^2 z_p^2 \lambda^2} \right\}. \quad (3)$$

З отриманого виразу видно, що при  $\sigma_s^2 \rightarrow \infty$   $\bar{I} \rightarrow I_0$ . З іншого боку, при великій, але фіксованій дисперсії флуктуацій фази на екрані ( $\sigma_s^2 \gg 1$ ) граничне значення  $\bar{I} = I_0$  буде досягнуте тим швидше, чим більша довжина хвилі  $\lambda$  і відстань до екрана  $z_p$ , а також чим менший радіус заслінки  $a$  і масштаб неоднорідностей фази  $l_s$ . Фізично це означає, що хвиля з достатньо великою (порівняно з радіусом заслінки  $a$ ) довжиною  $\lambda$  „не помічає” заслінки. При нескінченно великому радіусі заслінки ( $a \rightarrow \infty$ ), як і слід було сподіватися,  $\bar{I} \rightarrow 0$  (заслінка перекриває все падаюче випромінювання).

Випадок  $\sigma_s^2 \rightarrow 0$  отриманим виразом не описується, оскільки, відповідно до умови задачі, як вихідний було взято вираз для  $\bar{I}$ , справедливий тільки для  $\sigma_s^2 \gg 1$ .

3. На довгофокусну тонку лінзу з дрібномасштабними неоднорідностями показника заломлення всередині ортогонально падає плоска хвиля  $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ikz}$  (рис. 17.9). У наближенні сильних, статистично однорідних й ізотропних флуктуацій фази ( $\sigma_s^2 \gg 1$ ) у круглому розкритті лінзи ( $0 \leq r \leq a$ ) і заданій кореляційній функції  $B_s(\rho)$  визначити розподіли середнього поля і

середньої інтенсивності у фокальній площині лінзи ( $z_p = F$ , де  $F$  – фокальна довжина лінзи). Вважати, що відбувається випадкове розсіювання променів на малі кути.

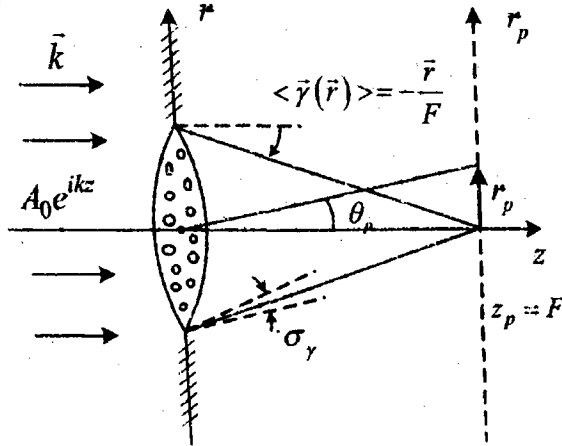


Рис. 17.9

**Розв'язок.** Тонку лінзу, через яку проходить плоска хвиля, можна розглядати як тонкий фазовий коректор (фазовий екран). Після проходження на виході лінзи падаюче поле набуває вигляду

$$U(\vec{r}) = A_0 \exp\{i[\bar{S}(\vec{r}) + \delta S(\vec{r})]\}, \quad (1)$$

де регулярний набіг фази для ідеальної лінзи дорівнює

$$\bar{S}(\vec{r}) = -k \frac{r^2}{2F}. \quad (2)$$

Регулярний кут заломлення  $\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$  променів на виході довгофокусної лінзи визначається, згідно з формулою (17.70), як

$$\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{k} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \langle \bar{S}(\vec{r}) \rangle = -\frac{\vec{r}}{F}. \quad (3)$$

Для довгофокусних лінз повинна виконуватися нерівність  $r/F \leq a/F \ll 1$ . При цьому, враховуючи, що, згідно з визначенням, відбувається випадкове розсіювання променів на малі кути поблизу регулярного відхилення (3), розв'язання задачі проводитимемо у рамках малокутового наближення.

Середнє поле у довільній точці спостереження, розташованій за фазовим екраном (лінзою), задається виразом (17.60), де  $U_d(\vec{R}_p)$  — дифракційне значення поля, що визначається формулою (17.57) за відсутності випадкових флуктуацій фази ( $\delta S \equiv 0$ ). Скориставшись визначенням середньої фази (2) і спрощенням (3) у першій задачі, для фокальної площини лінзи ( $z_p = F$ ) дифракційне поле  $U_d(\vec{R}_p)$  ми визначимо так:

$$U_d(F, \vec{r}_p) \approx \frac{kA_0}{2\pi i F} e^{ik(F+r_p^2/2F)} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \exp\left\{ik \frac{r r_p}{F} \cos(\varphi - \varphi_p)\right\} d\varphi. \quad (4)$$

Ми записали інтеграл за поверхнею фазового екрана  $\Sigma_0$  у полярних координатах  $\vec{r} = (r, \varphi)$  і  $\vec{r}_p = (r_p, \varphi_p)$ . Інтегрування за кутом приводить до такого виразу:

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{kA_0}{iF} e^{ik(F+r_p^2/2F)} \int_0^a r J_0\left(k \frac{r_p}{F} r\right) dr. \quad (5)$$

При обчисленні залишкового інтеграла за  $dr$  введемо нову змінну  $x = kr\theta_p$  і позначення  $t = ka\theta_p$ , де  $\theta_p = r_p/F$  – кутове зміщення спостерігача відносно центра лінзи (див. рис. 17.9). У результаті, (5) набуває вигляду

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{ka^2 A_0}{iF} e^{ikF(1+\theta_p^2/2)} \frac{1}{t^2} \int_0^t x J_0(x) dx = U_F \cdot \left[ \frac{2J_1(t)}{t} \right], \quad (6)$$

де  $U_F = \frac{ka^2 A_0}{2iF} e^{ikF(1+\theta_p^2/2)}$ . При обчисленні ми скористалися табличним значенням невизначеного інтеграла

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

де  $J_1(x)$  – функція Бесселя першого роду першого порядку.

Таким чином, для середнього поля у фокальній площині отримуємо такий вираз:

$$\langle U(F, r_p) \rangle \approx U_F \left[ \frac{2J_1(t)}{t} \right] e^{-\sigma_s^2/2}. \quad (7)$$

Для відповіді на друге питання скористаємося виразом для середньої інтенсивності (17.81), який для нашої задачі набуває вигляду

$$\langle I(F, \vec{r}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi F^2 \sigma_r^2} \int \exp \left\{ -\frac{1}{F^2 \sigma_r^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (8)$$

Згідно з формулою (17.56), визначимо  $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$ .

Враховуючи (3), для відстані  $z_p = F$  отримаємо

$\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} - F \frac{\vec{r}}{F} = 0$ . У результаті, обчислення (8) дає:

$$\langle I(F, r_p) \rangle = I_{\max} e^{-\theta_p^2/\sigma_r^2}, \text{ де } I_{\max} = \frac{a^2 A_0^2}{F^2 \sigma_r^2}.$$

Для остаточної відповіді нам необхідно виразити дисперсію кутів розсіювання випромінювання  $\sigma_r^2$  через задану кореляційну функцію фази  $B_s(\rho)$ . Скориставшись зв'язком (17.80) між дисперсіями  $\sigma_r^2$  і  $\sigma_s^2$  ( $\sigma_r^2 = 2\sigma_s^2/k^2 l_s^2$ ), а також визначенням

(17.67) характерного розміру  $l_s$  неоднорідностей фази ( $l_s^2 = -B_s''(0)/\sigma_s^2$ ), отримаємо

$$\sigma_r^2 = \frac{2}{k^2} |B_s''(0)|.$$

4. Плоска хвиля  $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ik\vec{R}}$ , де  $\vec{k} = k\vec{e}_z$ ,  $k = \omega/c$  падає

ортогонально на неоднорідний шар скінченної товщини у поздовжньому напрямку. Показник заломлення середовища всередині шару  $n = \text{const}$ . Товщина шару  $h$  змінюється випадковим чином від точки до точки ( $h = h(x, y)$ ). Випадкове поле товщин  $h = h(x, y)$  статистично однорідне й ізотропне:  $\langle h \rangle = h_0$ ,  $\sigma_h^2 = \text{const}$ ,  $B_h(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = B_h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ . Виразити середнє значення поля й інтенсивності плоскої хвилі після проходження шару як функції  $h, n, B_h$ , розглядаючи шар як фазовий екран.

**Розв'язок.** Вважатимемо, що поза шаром хвиля поширюється у вакуумі ( $n=1$ ). Зобразимо заданий шар у системі координат  $x, y, z$  (див. рис. 17.10) і визначимо середнє значення фази  $\bar{S}(\vec{r})$  і дисперсію флуктуацій  $\sigma_s^2$  на виході з шару. У малокутовому наближенні додаткова фазова модуляція, що виникає внаслідок відмінності  $n$  від 1 і різної товщини шару, дорівнює

$$S(x, y) = kh(x, y)(n-1). \quad (1)$$

Оскільки  $n = \text{Const}$  і  $\bar{h} = \text{Const}$ , середній набіг фази  $\bar{S}(\vec{r})$  на екрані також є сталою величиною:

$$\bar{S} = k(n-1)\bar{h} = \text{Const}. \quad (2)$$

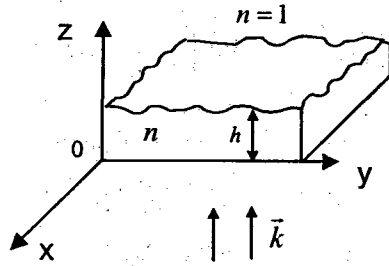


Рис.17.10

Флуктуації фази  $\delta S(x, y)$  на екрані, зумовлені випадковим полем товщин  $h(\vec{r})$ , згідно з (1) і (2), можна записати у вигляді

$$\delta S(x, y) = S - \bar{S} = k(n-1)\delta h(x, y). \quad (3)$$

Звідси знаходимо зв'язок між кореляційними функціями фази  $B_S(\rho)$  і товщин  $B_h(\rho)$ :

$$B_S(\rho) = k^2(n-1)^2 B_h(\rho). \quad (4)$$

Поклавши  $\rho = 0$ , знаходимо також зв'язок між дисперсіями флуктуацій фази на екрані  $\sigma_S^2$  і товщини шару  $\sigma_h^2$ :

$$\sigma_S^2 = k^2(n-1)^2 \sigma_h^2. \quad (5)$$

Враховуючи, що, згідно з умовою задачі,  $\sigma_h^2 = \text{Const}$ , доходимо висновку, що й  $\sigma_S^2 = \text{Const}$ .

Для обчислення середнього поля скористаємося формулою (17.60):

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_S^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (6)$$

де  $U_d(\vec{R}_p)$  – дифракційне значення поля в точці спостереження, яке, згідно з (17.57), дорівнює

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kA_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}(\vec{r})} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|}. \quad (7)$$

Знайдений вираз є остаточною відповіддю на перше питання задачі. Для конкретизації  $U_d(\vec{R}_p)$  необхідно задати область інтегрування  $\Sigma_0$ . Наприклад, якщо  $\Sigma_0$  — це нескінченна площина, то, як було показано в задачі 1, у процесі інтегрування ми отримуємо результат:

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kA_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} d\vec{r} = A_0 e^{i(\bar{S}+kz_p)}. \quad (8)$$

Тепер, враховуючи знайдені значення середньої фази  $\bar{S}$  та її дисперсії  $\sigma_S^2$ , середнє поле (6) у довільній точці за екраном визначається так:

$$\bar{U}(P) = U_0 \exp \left\{ ik \left[ z_p + (n-1)\bar{h} \right] - \frac{k^2(n-1)^2 \sigma_h^2}{2} \right\}. \quad (9)$$

Перед тим, як переходити до другого питання задачі, розглянемо деякі співвідношення між статистичними характеристиками фази хвилі й товщин неоднорідного шару. Згідно з (4), обчислимо другу похідну від  $B_S(\rho)$  в точці  $\rho = 0$ :

$$B_S''(0) = k^2(n-1)^2 B_h''(0). \quad (10)$$

За другими похідними  $B_S''(0)$  і  $B_h''(0)$  введемо до розгляду характерні розміри флуктуацій фази  $l_S$  і товщин  $l_h$ :

$$\frac{1}{l_S^2} = -\frac{B_S''(0)}{\sigma_S^2}, \quad \frac{1}{l_h^2} = -\frac{B_h''(0)}{\sigma_h^2}. \quad (11)$$



При цьому формулу (10) можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{\sigma_s^2}{l_s^2} = k^2 (n-1)^2 \frac{\sigma_h^2}{l_h^2}. \quad (12)$$

З останньої рівності з урахуванням співвідношення для дисперсій (5) впливає, що  $l_s \equiv l_h$ , тобто характерні масштаби флуктуацій товщини шару і фази на виході з екрана збігаються.

Перейдемо тепер до визначення середньої інтенсивності поля, яка визначається виразом (17.90):

$$\bar{I}(\bar{R}_p) = \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{r}_p)^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} d\bar{r}. \quad (13)$$

Щоб визначити  $\bar{I}$  за цією формулою, у цій задачі необхідно знати дисперсію кутів розкиду променів  $\sigma_\gamma^2$  на виході з шару (екрана). Ця дисперсія може бути виражена через дисперсію флуктуацій фази (див. формулу (17.80)):

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k^2 l_s^2}.$$

Отже, для того, щоб знайти  $\sigma_\gamma^2$ , потрібно знати дисперсію  $\sigma_s^2$  і радіус кореляції  $l_s$  випадкової фази. Враховуючи співвідношення (12), отримаємо

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2}. \quad (14)$$

З іншого боку, скориставшись визначенням  $l_h$  (11), перепишемо цей вираз у вигляді:

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2} = 2(n-1)^2 |B_h''(0)|. \quad (15)$$

Таким чином, шукана середня інтенсивність (13) визначається як

$$\bar{I}(\bar{R}_p) = \frac{I_0}{2\pi z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{(\bar{r}_p - \bar{r})^2}{2z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \right\} d\bar{r}. \quad (16)$$

Цей вираз є остаточною відповіддю на друге питання задачі, оскільки інтегрування у (16) можна виконати тільки при заданій формі екрана  $\Sigma_0$ .

5. У скільки разів тропосферою Землі ослаблюється середнє поле сигналу, що передається із Землі на Місяць? Вважати, що товщина тропосфери  $h(\bar{r})$  розподілена за нормальним законом із середнім значенням  $\bar{h} = 10 \text{ км}$  і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_h = 10^{-2} \bar{h}$ , а коефіцієнт заломлення тропосфери  $n$  дорівнює 1,0001. Розрахунки провести для  $\lambda = 10 \text{ см}$ .

**Розв'язок.** Товщина тропосфери набагато менша за відстань між Землею і Місяцем. Тому тропосферу можна розглядати як фазовий екран і скористатися співвідношенням (17.60) для середнього поля

$$\bar{U}(\bar{R}_p) = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\bar{R}_p),$$

де  $\sigma_s^2$  – дисперсія флуктуацій фази хвилі на виході з тропосфери, а  $U_d(\bar{R}_p)$  – поле у точці спостереження за відсутності випадкових збурень.

Отже, ослаблення середнього поля

$$N = \frac{U_d(\bar{R}_p)}{\bar{U}(\bar{R}_p)} = e^{\sigma_s^2/2}. \quad (1)$$

Згідно з формулою (5) попередньої задачі, маємо

$$\sigma_s^2 = k^2 (n-1)^2 \sigma_h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n-1)^2 \sigma_h^2. \quad (2)$$

Згідно з умовою задачі,  $\sigma_h = 10^{-2} \bar{h} = 100 \text{ м}$ , отже,  $\sigma_h^2 = 10^4 \text{ м}^2$ .

Крім того,  $n-1 = 10^{-4}$ . Враховуючи ці оцінки, згідно з (2), маємо  $\sigma_s^2/2 \approx 0,2$  і, відповідно до (1), отримуємо таке значення ослаблення:  $N \approx 1,2$ .

### § 18. Діаграма спрямованості дзеркальної антени з випадковими спотвореннями фази на апертурі

Як приклад використання отриманих у попередньому параграфі формул розглянемо вплив випадкових флуктуацій фази на діаграму спрямованості дзеркальної антени з параболічним відбивачем  $M$  (рис. 18.1 а).

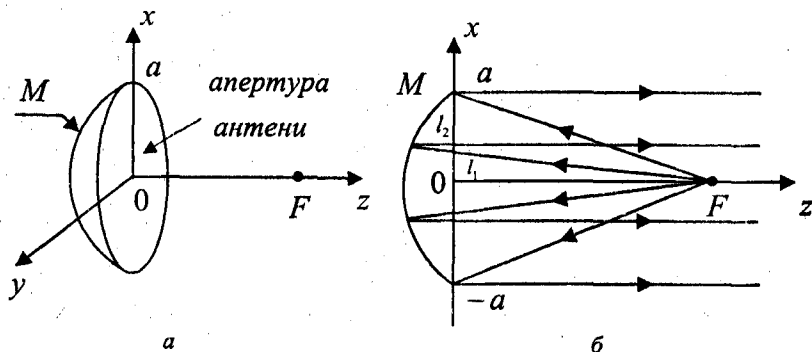


Рис. 18.1

Джерелом випромінювання є „точковий” опромінювач, розташований у фокусі ( $r=0$ ,  $z=F$ ) параболоїда обертання. Сферична хвиля, що падає із джерела, відбиваючись за законами геометричної оптики від параболічного дзеркала  $M$ , стає плоскою хвилею, фаза якої на апертурі  $z=0$  є сталою величиною. Ця властивість параболічного дзеркала є наслідком визначення параболоїда обертання. На рис. 18.1б зображено переріз параболоїда обертання у площині  $XOZ$  (площина рисунка). Рівняння параболі  $M$  у площині  $XOZ$  визначається як геометричне місце точок, для яких сума відстаней  $l_1$  (від фокуса  $F$  до довільної точки кривої  $M$ ) і  $l_2$  (від точки  $M$  до прямої  $z=0$ ) є сталою величиною:  $l_1 + l_2 = l = \text{Const}$ . Можна отримати всю сім'ю променів, обертаючи площину рисунка навколо осі  $OZ$ . Частина площини  $z=0$ , розташована всередині параболоїда обертання, називається **розкритом**, або **апертурою антени**. Для розглядуваної антени апертура являє собою круг радіусом  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = a$ . Таким чином, довжини всіх променів, що вийшли з опромінювача і відбилися від дзеркала, виявляються сталими у всіх точках розкриття, тобто у площині розкриття фаза  $S = kl$  є сталою величиною. Сформована таким чином плоска хвиля із обмеженим хвильовим фронтом, поширюючись у півпростір  $z > 0$ , дифрагує на апертурі  $r \leq a$ , в результаті чого й формується **діаграма спрямованості у дальній зоні**. У реальних умовах фаза  $S$  у площині апертури не є сталою величиною, а зазнає флуктуацій  $\delta S(\vec{r})$ . Причин цих флуктуацій може бути декілька. По-перше, неточності у виготовленні параболоїда призводять до відхилень  $\delta z(\vec{r})$  його поверхні від

розрахункової (див. рис. 18.2), у результаті чого хвиля набуває додаткового набігу фази  $\delta S(\vec{r}) = 2k\delta z(\vec{r})$ . По-друге, навіть при ідеально точно виготовленому дзеркалі ніколи не можна повністю усунути флуктуації показника заломлення середовища  $\delta n(\vec{R})$  між опромінювачем і дзеркалом, які також призводять до додаткових набігів фази. У результаті, поле  $U(\vec{r})$  у площині апертури ( $z = 0, r \leq a$ ) відрізняється від розрахункового  $U_0 = A_0 e^{ikl} = \text{Const}$

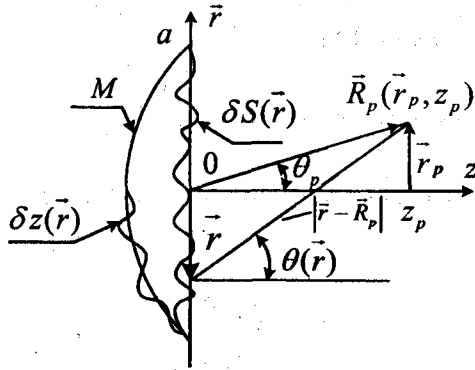


Рис. 18.2

змінним множником  $e^{i\delta S(\vec{r})}$ . Таким чином, у розкритті антени в реальних умовах наявне поле

$$U(\vec{r}) = U_0 e^{i\delta S(\vec{r})}, \quad U_0 = A_0 e^{ikl}. \quad (18.1)$$

Для розрахунку поля  $U$  у точці спостереження з радіус-вектором  $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$  (рис.18.2) скористаємося принципом Гюйгенса (17.20):

$$U(\vec{R}_p) = \frac{kU_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} e^{i\delta S(\vec{r})} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (18.2)$$

### 18.1. Обчислення середнього поля

Якщо флуктуації фази на апертурі  $\delta S(\vec{r})$  статистично однорідні й розподілені за нормальним законом, то середнє (когерентне) поле  $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$  у хвильовій зоні ( $kR_p \gg 1$ ) визначається формулою (17.60)

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (18.3)$$

де  $U_d(\vec{R}_p)$  – незбурене (дифракційне) поле, створюване ідеальною антеною:

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kU_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (18.4)$$

Нехай точка спостереження  $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$  достатньо віддалена від антени і знаходиться поблизу її осі (малокутове наближення). У цьому випадку виконуються нерівності  $r/z_p \leq a/Z_p \ll 1$ ,  $r_p/z_p \ll 1$ , і у вихідній формулі (18.4) можна виконати деякі спрощення:

$$\text{tg } \theta_p \approx \theta_p \approx \frac{r_p}{z_p} \ll 1, \quad (18.5 \text{ a})$$

$$\operatorname{tg} \theta(\bar{r}) \approx \theta(\bar{r}) \approx \frac{|\bar{r} - \bar{r}_p|}{z_p} \leq \frac{\max(r_p, a)}{z_p} \ll 1, \quad \cos \theta(\bar{r}) \approx 1; \quad (18.5 \text{ б})$$

$$|\bar{r} - \bar{R}_p| = \sqrt{z_p^2 + (\bar{r} - \bar{r}_p)^2} \approx z_p + \frac{(\bar{r} - \bar{r}_p)^2}{2z_p}. \quad (18.5 \text{ в})$$

Після виконаних спрощень у полярних координатах  $\bar{r} = (r, \varphi)$ ,  $\bar{r}_p = (r_p, \varphi_p)$  формула (18.4) подається у вигляді

$$\begin{aligned} U_d(\bar{R}_p) &\approx \frac{kU_0}{2\pi iz_p} e^{ik(z_p + r_p^2/2z_p)} \int_0^a e^{ikr^2/2z_p} r dr \int_0^{2\pi} \exp\left\{-ik \frac{rr_p}{z_p} \cos(\varphi - \varphi_p)\right\} d\varphi = \\ &= \frac{kU_0}{iz_p} e^{ik(z_p + r_p^2/2z_p)} \int_0^a e^{ikr^2/2z_p} J_0\left(k \frac{r_p}{z_p} r\right) r dr. \end{aligned} \quad (18.6)$$

При обчисленні інтеграла за  $dr$  обмежимося областю дальньої зони (зони Фраунгофера) відносно антени, коли під знаком інтеграла можна покласти  $e^{ikr^2/2z_p} \approx 1$ . Це припустимо, якщо виконується нерівність

$$\frac{kr^2}{2z_p} \leq \frac{ka^2}{2z_p} \ll 1. \quad (18.7)$$

Нерівність (18.7) можна записати також у вигляді

$$\theta_a \ll \theta_d, \quad (18.8)$$

де  $\theta_a = a/z_0$  — кут, під яким антенний розкриття видно з точки спостереження, а  $\theta_d = 1/ka \sim \lambda/a$  — кут дифракції на апертурі антени. Врахувавши нерівність (18.7) і виконавши заміну змінних  $x = kr\theta_p = kr \frac{r_p}{z_p}$ , отримаємо

$$U_d(\bar{R}_p) \approx \frac{kU_0}{iz_p} \cdot \frac{1}{(k\theta_p)^2} \cdot e^{ikz_p(1+\theta_p^2/2)} \int_0^{ka\theta_p} x J_0(x) dx. \quad (18.9)$$

Невизначений інтеграл за  $dx$  виражається через функцію Бесселя першого роду першого порядку —  $J_1(x)$ :

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x). \quad (18.10)$$

Перелічимо деякі основні властивості функції  $J_1(x)$ :  $J_1(x)$  функція непарна, обмежена за модулем ( $|J_1(x)| < 1$ ), при малих значеннях аргументу ( $x \ll 1$ ) подається у вигляді  $J_1(x) \approx x/2$ , має асимптотичне зображення при великих значеннях  $x$ :

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right), \quad x \gg 1. \quad (18.11)$$

Крім того, при дійсному  $x$  функція  $J_1(x)$  має нескінченну кількість дійсних нулів:  $J_1(x) = 0$  у точках  $x = x_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Наведемо наближені значення кількох перших нулів:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 \approx 3,83$ ;  $x_3 \approx 7,02$ ;  $x_4 \approx 10,17$ .

Враховуючи (18.10), обчислення (18.9) приводить до такого результату:

$$U_d(\bar{R}_p) \approx U_p \cdot \left[ \frac{2J_1(t)}{t} \right], \quad (18.12)$$

де параметр  $t = ka\theta_p$ , а

$$U_p = U_0 \frac{ka^2}{2iz_p} e^{ikz_p(1+\theta_p^2/2)}. \quad (18.13)$$

Графік залежності, нормованої на  $|U_p|$  амплітуди  $|U_d|$  від безрозмірного параметра  $t$ , зображено на рис. 18.3 суцільною лінією. Зображена функція називається діаграмою спрямованості (ДС) антени "за полем" або "за амплітудою".

Згідно з формулою (18.3), напруженість середнього (когерентного) поля  $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$  відрізняється від  $U_d(\vec{R}_p)$  тільки сталим множником  $\langle e^{i\delta S} \rangle$ , який для нормального розподілу флуктуації фази  $\delta S$  дорівнює  $e^{-\sigma_s^2/2}$ . Графік залежності амплітуди середнього поля  $|\langle U(\vec{R}_p) \rangle|$  від параметра  $t = ka\theta_p$  зображено на тому ж рис. 18.3 штриховою лінією. Видно, що ДС антени за середнім полем так само, як і для ідеальної антени ( $\sigma_s = 0$ ), має „пелюстковий” характер. Максимум „головного” пелюстка

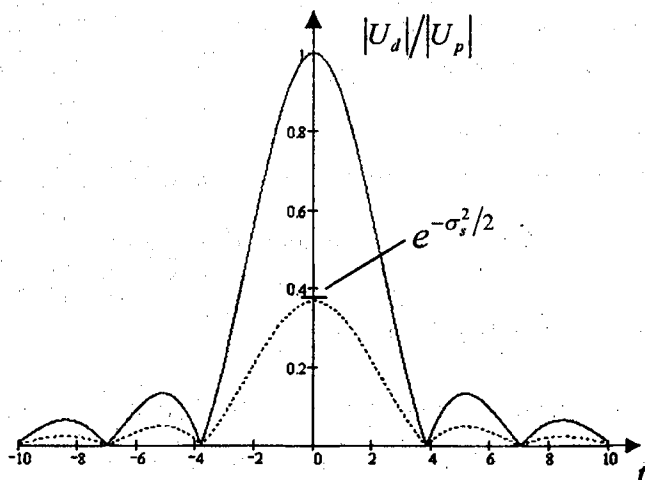


Рис. 18.3

спрямовано вздовж осі антени, а його кутова ширина  $\Delta\theta_p$  може бути визначена за першим нулем функції  $J_1(t)$ . Поклавши  $\Delta t = ka\Delta\theta_p \approx 4$ , отримаємо  $\Delta\theta_p \approx \frac{4}{ka}$ , що збігається з кутом дифракції  $\theta_d \sim \lambda/a$ :  $\Delta\theta_p \approx \theta_d$ .

## 18.2. Визначення середньої інтенсивності

Для ідеальної антени у дальній зоні розподіл інтенсивності за кутами, згідно з (18.12), має такий вигляд:

$$I_d(\vec{R}_p) = U_d(\vec{R}_p) U_d^*(\vec{R}_p) \approx I_{d \max} \left[ \frac{2J_1(t)}{t} \right]^2, \quad (18.14)$$

де

$$I_{d \max} = |U_p|^2 = \left( \frac{ka^2}{2z_p} \right)^2 A_0^2 \quad (18.15)$$

максимальне значення інтенсивності, що досягається при  $t = 0$  ( $\theta_p = 0$ ). Відношення  $I_d/I_{d \max}$  визначає ДС ідеальної антени за інтенсивністю.

Подамо тепер поле у точці спостереження  $U(\vec{R}_p)$  у вигляді регулярної  $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$  і флуктуючої  $\delta U(\vec{R}_p)$  складових:

$$U(\vec{R}_p) = \langle U(\vec{R}_p) \rangle + \delta U(\vec{R}_p), \quad (18.16)$$

де, за визначенням,  $\langle \delta U(\vec{R}_p) \rangle = 0$ . За допомогою (18.16) побудуємо вираз для середньої інтенсивності:

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \langle U(\vec{R}_p) U^*(\vec{R}_p) \rangle = \\ &= \langle |U(\vec{R}_p)|^2 \rangle = \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (18.17)$$

Доданок  $\langle |U| \rangle^2$  являє собою інтенсивність когерентної складової —  $I_{\text{ког}} = \langle |U| \rangle^2$ . З наведених вище формул (18.3) і (18.12) випливає, що залежність  $I_{\text{ког}}$  від кута  $\theta_p$  визначається ДС за інтенсивністю ідеальної антени (18.14):

$$I_{\text{ког}}(\vec{R}_p) = \langle |U(\vec{R}_p)|^2 \rangle = e^{-\sigma_s^2} I_d(\vec{R}_p) = I_{\text{ког max}} \left[ \frac{2J_1(t)}{t} \right]^2. \quad (18.18)$$

Тут

$$I_{\text{ког max}} = I_{d \text{ max}} e^{-\sigma_s^2} = \left( \frac{ka^2}{2z_p} \right)^2 A_0^2 e^{-\sigma_s^2} \quad (18.19)$$

максимальне значення когерентної складової інтенсивності, що досягається для кута спостереження  $\theta_p = 0$  ( $t = 0$ ).

Згідно з (18.18),  $I_{\text{ког}}(\vec{R}_p)$  відрізняється від  $I_d(\vec{R}_p)$  тільки сталим множником  $e^{-\sigma_s^2}$ . Зменшення інтенсивності когерентної складової (середнього поля) легко пояснюється тим, що за рахунок флуктуації фази  $\delta S$  у розкритті антени хвилі, що приходять у точку спостереження  $\vec{R}_p$ , також мають випадкову фазу, усереднення за якою і призводить до зменшення інтерференційних максимумів поля у  $e^{-\sigma_s^2}$  разів. Зазначимо важливий факт:  $I_{\text{ког}} \sim a^4$ , що є наслідком когерентного додавання полів. Справді, при когерентному додаванні полів у точці спостереження під-

сумовуються хвилі, що приходять від усіх елементарних площадок апертури (або від різних частин дзеркала). Результируюче поле при цьому виявляється пропорційним до площі всієї апертури антени, тобто  $\langle U \rangle \sim U_d \sim a^2$ , а  $I_{\text{ког}} = \langle |U| \rangle^2 \sim a^4$ .

Другий доданок у формулі (18.17) являє собою інтенсивність некогерентної компоненти —  $I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) = \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle$ . При аналізі цього доданка розглянемо найцікавіший випадок, коли флуктуації фази  $\delta S$  у розкритті антени є великими ( $\sigma_s^2 \gg 1$ ). При сильних флуктуаціях фази в розкритті когерентна складова інтенсивності, згідно з (18.18), мала ( $I_{\text{ког}} \rightarrow 0$ ) і нею можна взагалі знехтувати, тобто у формулі (18.17) наближено вважати, що некогерентна складова практично збігається із середньою інтенсивністю:

$$I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) = \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle \approx \langle I(\vec{R}_p) \rangle. \quad (18.20)$$

При обчисленні  $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$  ми могли б відразу скористатися принципом Гюйгенса для інтенсивності у вигляді (17.81), переписавши формулу для дальньої зони ( $kr^2/2z_p \leq ka^2/2z_p \ll 1$ ) і відсутності регулярної рефракції ( $\langle \vec{r}(\vec{r}) \rangle = 0$ ). Нескладно показати, що цей перехід легко здійснити, якщо в індикатрисі розсіювання (17.82) просто покласти  $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = 0$ , після чого вона набуває вигляду

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_r^2} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_r^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} \approx \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_r^2} \exp \left\{ -\frac{\theta_p^2}{\sigma_r^2} \right\}. \quad (18.21)$$

Отримаємо той самий результат, обчисливши  $\langle I(\bar{R}_p) \rangle$  дещо інакше, ніж у попередньому параграфі. З урахуванням спрощень (18.5) і нерівності (18.7) перепишемо формулу (18.2) для дальньої зони в малокутовому наближенні:

$$U(\bar{R}_p) \approx \frac{kU_0}{2\pi iz_p} e^{ik(z_p + r_p^2/2z_p)} \int_{-\infty}^{\infty} M(\bar{r}) e^{i\delta S(\bar{r})} e^{-ik \frac{\bar{r} \bar{r}_p}{z_p}} d\bar{r}. \quad (18.22)$$

Ми розтягнули границі інтегрування від  $-\infty$  до  $\infty$ , проте ввели так звану функцію зіниці —  $M(\bar{r})$ , яка, за визначенням, дорівнює

$$M(\bar{r}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } r \leq a; \\ 0, & \text{якщо } r > a. \end{cases} \quad (18.23)$$

Для другого статистичного моменту (середньої інтенсивності) маємо

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{R}_p) \rangle &= \langle U(\bar{R}_p) U^*(\bar{R}_p) \rangle \approx \\ &\approx \left( \frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r}'' M(\bar{r}') M(\bar{r}'') e^{-ik \frac{\bar{r}_p}{z_p} (\bar{r}' - \bar{r}'')} \langle e^{i[\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')]} \rangle. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Аналогічно до попереднього параграфу, виконаємо деякі спрощення.

1. Для статистично однорідного й ізотропного поля флуктуацій  $\delta S(\bar{r})$  при  $\sigma_S^2 \gg 1$ , згідно з (17.68), можна записати:

$$\langle e^{i[\delta S(\bar{r}') - \delta S(\bar{r}'')]} \rangle = e^{-\frac{1}{2} D_S(\bar{r}' - \bar{r}'')} \approx \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} (\bar{r}' - \bar{r}'')^2 \right\}, \quad (18.25)$$

де  $\sigma_S^2 = \text{const}$ , а  $l_S$  — характерний розмір неоднорідностей фази в розкритті антени.

2. З урахуванням (18.25) перепишемо (18.24) у сумарних —  $\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}' + \bar{r}'')$  і різницевих —  $\bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}''$  координатах:

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{R}_p) \rangle &\approx \left( \frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} M(\bar{r} + \bar{\rho}/2) M(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} \rho^2 - i \frac{k}{z_0} \bar{r}_p \bar{\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (18.26)$$

3. Характерний розмір області  $\rho = \rho_{ef}$ , який дає основний внесок в інтеграл за  $d\bar{\rho}$ , можна оцінити з умови  $\sigma_S^2 \rho_{ef}^2 / 2l_S^2 \approx 1$ , звідки отримуємо  $\rho_{ef} \approx l_S / \sigma_S$ . Якщо  $\rho_{ef} \ll a$  ( $l_S \ll \sigma_S a$ ), то у функціях зіниці  $M(\bar{r} \pm \bar{\rho}/2)$  можна знехтувати залежністю від змінної  $\bar{\rho}$ :

$$M(\bar{r} + \bar{\rho}/2) M(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \approx M^2(\bar{r}) = M(\bar{r}). \quad (18.27)$$

У результаті виконаних спрощень ми приходимо до такого виразу для середньої інтенсивності:

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle \approx \left( \frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(\bar{r}) d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} \rho^2 - i \frac{k}{z_p} \bar{r}_p \bar{\rho} \right\}. \quad (18.28)$$

Видно, що чотирикратний інтеграл розпався на добуток двох подвійних, причому інтеграл за  $d\bar{r}$  дорівнює площі апертури антени —  $\Sigma_0 = \pi a^2$ , а обчислення інтеграла за  $d\bar{\rho}$  було проведене у попередньому параграфі (див. (17.73)). У результаті, після обчислень отримуємо

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2 a^2}{z_p^2} \cdot \frac{k^2 l_S^2}{2\sigma_S^2} \exp \left\{ -\frac{k^2 l_S^2}{2\sigma_S^2} \theta_p^2 \right\}. \quad (18.29)$$

Зауважимо, що такий самий вираз ми б отримали, якби скористалися формулою (17.81) з індикатрисою розсіювання у дальній зоні у вигляді (18.21).

З урахуванням зв'язку між дисперсіями флуктуацій фази  $\sigma_S^2 = \langle \delta S^2 \rangle$  і кутів приходу  $\sigma_\gamma^2 = \langle (\delta \vec{\gamma})^2 \rangle$ :  $\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_S^2}{k^2 l_S^2}$  (див. (17.80)) некогерентну складову інтенсивності можна подати в такому остаточному вигляді:

$$I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) \approx I_{\text{нек max}} e^{-\theta_p^2 / \sigma_\gamma^2}, \quad (18.30)$$

де

$$I_{\text{нек max}} = \frac{a^2 A_0^2}{\sigma_\gamma^2 z_p^2} \quad (18.31)$$

максимальне значення некогерентної складової інтенсивності, що досягається при куті спостереження  $\theta_p = 0$ .

### Висновки

Із порівняння результатів розрахунку дифракційних і середніх полів, а також середніх інтенсивностей у фокальній площині ідеальної лінзи з неоднорідностями (див. задачу 3 попереднього параграфу) і в дальній зоні неспокерованої антени з випадковими флуктуаціями фази у розкритті видно, що формули з точністю до нормувальних коефіцієнтів повністю збігаються. Цей факт часто використовують для експериментального визначення ДС антени. За визначенням, ДС (за полем або за інтенсивністю) формується в дальній зоні антени, що ускладнює вимірювання через великі відстані. Проте, якщо ми сфокусуємо антену на певну (прийнятну) відстань (для дзеркальних антен це можна зробити,

наприклад, шляхом невеликого зміщення опромінювача вздовж осі  $OZ$  з точки фокусу дзеркала) і вимірюємо розподіл полів та інтенсивності у фокальній площині, то, цим самим, визначимо ДС антени у дальній зоні.

Згідно з (18.30), ДС антени за інтенсивністю при нехтуванні когерентною компонентою поля є гауссоїдою, кутова ширина якої  $\Delta\theta_p$  не залежить від розміру антени  $a$  і збігається з дисперсією кутів виходу променів з апертури  $\sigma_\gamma$ :  $\Delta\theta_p \approx \sigma_\gamma$ .

Слід звернути увагу на те, що  $I_{\text{нек max}}$  виявляється пропорційною до площі апертури антени ( $I_{\text{нек max}} \sim a^2$ ), а не до квадрата площі, як це мало місце для когерентної компоненти ( $I_{\text{ког max}} \sim a^4$ ). Звідси випливає, що якими б великими не були флуктуації фази  $\sigma_S^2$  і, отже, наскільки малою б не була когерентна компонента поля  $I_{\text{ког}}$ , при достатньо великих розмірах антени  $a$  ( $a > a_{\text{кр}}$ ) все одно виконуватиметься нерівність  $I_{\text{ког}} > I_{\text{нек}}$ .

З рівності  $I_{\text{ког max}} = I_{\text{нек max}}$ , згідно з формулами (18.19) і (18.31), визначимо величину  $a_{\text{кр}}$ :

$$a_{\text{кр}} = \sqrt{2} \frac{l_S}{\sigma_S} e^{\sigma_S^2/2}. \quad (18.32)$$

Таким чином, при  $a < a_{\text{кр}}$  когерентна компонента інтенсивності  $I_{\text{ког}}(\vec{R}_p)$  менша за некогерентну, і ширина  $\Delta\theta_p$  ДС антени за інтенсивністю визначається тільки дисперсією кутів виходу променів  $\sigma_\gamma^2$  і не залежить від розміру антени  $a$  (і довжини



хвилі  $\lambda$ , якщо флуктуації фази  $\delta S$  пов'язані тільки з нерівностями  $\delta z$  дзеркала антени, оскільки у цьому випадку  $\sigma_y^2 \sim \sigma_z^2 / l_S^2$ ). Ширина ДС антени досить великих лінійних розмірів, для яких виконується зворотна нерівність  $a > a_{кр}$ , визначається когерентною компонентою інтенсивності і збігається з кутом дифракції  $\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$ .

Якісну залежність  $\Delta\theta_p$  від  $a$  при  $\sigma_s^2 \gg 1$  наведено на рис. 18.4, де виділено три області:

1. Радіус антени  $a$  менший, ніж характерний розмір неоднорідностей  $l_S$  у розкриві ( $a < l_S$ ). Спотворення фази  $\delta S(\vec{r})$  на апертурі практично не впливають на ДС антени, оскільки розмір антени значно менший за радіус кореляції флуктуацій фази, і в межах апертури фаза поля може вважатися сталою. Ширина ДС антени у цьому випадку наближено збігається з кутом дифракції ( $\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$ ).

2. Радіус антени — у межах  $l_S < a < a_{кр}$ . У цьому діапазоні при  $\sigma_s^2 \gg 1$  когерентна компонента мала порівняно з некогерентною, і ширина ДС антени не залежить від розміру антени  $a$  ( $\Delta\theta_p \approx \sigma_y$ ).

3. Надвеликі розміри антени ( $a > a_{кр}$ ). Когерентна компонента інтенсивності стає більшою, ніж некогерентна. ДС розпочинає звужуватися зі збільшенням  $a$ , і її ширина прямує до кута дифракції ( $\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$ ).

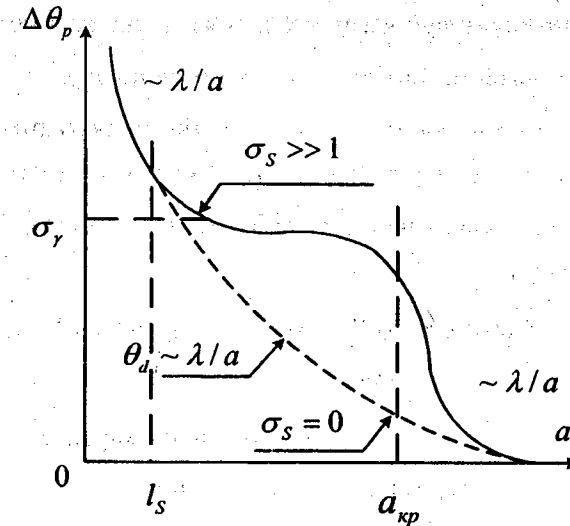


Рис. 18.4

### ЗАДАЧІ

1. Параболічна антена працює на хвилі з  $\lambda = 10 \text{ см}$ . Яка допустима похибка у виготовленні параболоїда, якщо допускається зменшення поля в  $e$  разів. Вважати, що випадкові відхилення форми рефлектора від параболоїда розподілені за нормальним законом.

**Розв'язок.** Оскільки флуктуації фази у площині апертури антени викликані похибками виготовлення поверхні відбивача антени  $\delta z$ , то, з урахуванням подвійного шляху хвилі від випромінювача до відбивача і назад до апертури, маємо

$$\delta S = 2k\delta z, \quad \sigma_s^2 = 4k^2\sigma_z^2. \quad (1)$$

З лінійності зв'язку між  $\delta S$  і  $\delta z$  випливає, що флуктуації фази  $\delta S$  так само, як і флуктуації відхилень форми поверхні  $\delta z$ , розподілені за нормальним законом. Для нормально розподілених флуктуацій

фази у розкритті середнє поле у хвильовій зоні визначається виразом (18.3)

$$\langle U(\bar{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\bar{R}_p). \quad (2)$$

Звідси видно, що середнє поле  $\langle U \rangle$  відрізняється від дифракційного  $U_d$  тільки множителем  $\exp(-\sigma_s^2/2)$ . Тому ослаблення поля дорівнює

$$N = \frac{U_d(\bar{R}_p)}{\bar{U}(\bar{R}_p)} = e^{\frac{\sigma_s^2}{2}}. \quad (3)$$

Зменшення поля у  $e$  разів можливе при  $\sigma_s^2 = 2$ . Отже, для заданих умов задачі можна записати

$$2k^2\sigma_z^2 = 1, \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}k}.$$

Враховуючи, що  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  і підставляючи задане значення  $\lambda = 10 \text{ см}$ , знаходимо допустиму середньоквадратичну похибку виготовлення відбивача  $\sigma_z = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi} \approx 1,1 \text{ см}$ .

2. Випадкові відхилення форми поверхні, що виникають при виготовленні відбивача параболічної антени, розподілені за нормальним законом із середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_z = 1 \text{ мм}$ . На якій довжині хвилі амплітуда середнього поля у напрямку максимуму випромінювання зменшиться у  $e$  разів?

**Відповідь:**  $\lambda = 8,9 \text{ мм}$ .

## § 19. Розсіювання хвиль на слабкошорсткій поверхні

При поширенні радіохвиль у природних умовах часто необхідно враховувати не тільки їх розсіювання на неоднорідностях показника заломлення, а й перетворення їх на межах поділу різних середовищ. Наприклад, відбивання радіохвиль від земної поверхні призводить до багатопроменевого характеру поширення, коли у точку спостереження приходять не тільки „пряма” хвиля, а й розсіяні на поверхні „вторинні” хвилі. У результаті інтерференції „прямих” і „вторинних” хвиль спостерігаються флуктуації параметрів радіосигналів, що, як правило, погіршує характеристики радіотехнічних систем. У той самий час послідовні відбивання радіохвиль від земної поверхні та від іоносфери роблять можливим поширення радіохвиль навколо Землі на тисячі та десятки тисяч кілометрів, тобто відіграють у певному розумінні позитивну роль. Статистичні параметри такого каналу зв'язку також багато в чому визначаються характером відбивання і розсіювання хвиль на поверхні суші та акваторій. У радіолокації при оцінюванні відбивальних властивостей реальних цілей доводиться враховувати природну шорсткість їхніх поверхонь. У радіоастрономії шорсткість поверхні небесних тіл є, по суті, єдиним чинником, що дає змогу досліджувати поверхневі характеристики радіолокаційними методами. Дослідження земної поверхні з борту літальних, у тому числі й космічних апаратів методами дистанційного радіозондування також ґрунтується на відмінностях у здатності до відбивання і розсіювання ділянок земної поверхні, що відрізняються як характером шорсткості, так і електродинамічними параметрами (діелектричною проникністю, провідністю та ін.). Такі самі завдання виникають і в оптичному, і навіть у рентгенівському діапазонах довжин хвиль, оскільки реальні межі поділу середовищ завжди мають „природну” шорсткість з широким спектром масштабів (від атомних мікроскопічних розмірів до великих нерівностей, напри-

клад, рельєфу земної поверхні або хвиль на поверхні океану). З аналогічними проблемами доводиться стикатися у задачах акустики, наприклад, розсіювання звуку на поверхні поділу різних середовищ призводить до явища реверберації. У гідроакустиці суттєвими є ефекти відбивання звуку від водної поверхні і дна океану, плаваючого льоду та ін.

Щодо математики всі перелічені вище фізичні задачі зводяться до розв'язання рівнянь Максвелла або простішого хвильового рівняння (наприклад, для задач акустики) з граничними умовами, які мають задовольняти хвильові поля на поверхні поділу двох різних електродинамічних середовищ. Далі ми обмежимося розглядом задачі про розсіювання скалярної хвилі на нерівностях у середньому плоскій поверхні, яку завжди можна сумістити з координатною площиною  $z = 0$ . Відхилення реальної поверхні від цієї площини (рис. 19.1) будемо описувати рівнянням  $z = \xi(\vec{r})$ , де  $\vec{r} = (x, y)$ , а  $\xi(\vec{r})$  — випадкова функція двох змінних (випадкове поле підвищень), в середньому дорівнює нулю:  $\langle \xi(\vec{r}) \rangle = 0$ .

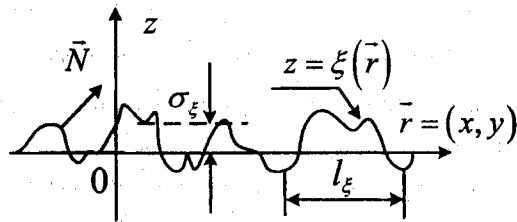


Рис. 19.1

При розв'язанні широкого класу задач (наприклад, розсіювання радіохвиль або звуку на морській поверхні) функція  $\xi$  може залежати також і від часу  $t$ :  $\xi = \xi(\vec{r}, t)$ .

### 19.1. Граничні умови

Із курсу електродинаміки відомо, що на межі поділу двох середовищ  $z = \xi(\vec{r}, t)$  при відсутності поверхневих струмів мають бути неперервними тангенціальні (дотичні до поверхні) компоненти напруженостей електричних  $\vec{E}$ , і магнітних  $\vec{H}$ , полів, а також нормальні компоненти індукцій  $D_N = (\vec{D}\vec{N})$  і  $B_N = (\vec{B}\vec{N})$ , де  $\vec{N}$  — одиничний вектор нормалі до межі поділу. Не обмежуючи суттєво загальності, верхній півпростір  $z > \xi(\vec{r}, t)$ , де розташовані джерела хвильового поля, можна вважати вакуумом ( $\epsilon = 1$ ), а нижній  $z < \xi(\vec{r}, t)$  — однорідним середовищем із довільним значенням комплексної діелектричної проникності  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ , що залежить, загалом, від частоти випромінювання  $\omega$ . Якщо форма межі поділу не залежить від часу:  $\xi(\vec{r}, t) = \xi(\vec{r})$ , то виходячи з принципу суперпозиції достатньо розглядати тільки монохроматичні поля  $\vec{E}, \vec{H} \sim e^{-i\omega t}$ , опускаючи залежний від  $t$  експоненціальний множник. Електромагнітна хвиля, що падає з вакууму на межу поділу  $z = \xi(\vec{r})$ , частково відбивається, а частково, заломлюючись, проникає всередину середовища. При цьому, якщо середовище має велику провідність (велика уявна складова  $\epsilon''$ ), хвиля всередині середовища швидко згасає. Характерний масштаб згасання визначається скін-шаром  $\delta \sim \lambda / \sqrt{|\epsilon|}$ . Для середовищ з  $|\epsilon| \gg 1$  можна наближено вважати, що поле всередині середовища взагалі відсутнє, і замість „двосторонніх” граничних умов, що пов'язують поля по обидва боки від межі поділу, можна скористатися імпедансною граничною умовою (М.О. Леонтович, 1948 р.), що пов'язує між собою  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  на границі тільки з боку вакууму:

$$\vec{E}_t = \eta [\vec{N} \vec{H}_t]. \quad (19.1)$$

Введена тут величина  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  називається **поверхневим імпедансом**. Далі ми будемо розглядати тільки середовища, в яких магнітна проникність  $\mu$  вважається дорівняною до одиниці й, отже,  $\eta = 1/\sqrt{\varepsilon}$ . Наближені **граничні умови Леонтовича** (19.1) можуть застосовуватися для середовищ, у яких  $|\eta| \ll 1$  і має місце сильний скін-ефект, коли товщина скін-шару  $\delta$  є малою порівняно з характерними розмірами поверхні в усіх напрямках. Їх зручність полягає в тому, що при розв'язанні задачі розсіювання хвилі, що падає на таку поверхню згори, поле у нижньому середовищі  $z < \xi(\vec{r})$  можна взагалі не розглядати, а розв'язувати хвильові рівняння тільки у вакуумі  $z > \xi(\vec{r})$  з граничною умовою (19.1). Зокрема, із (19.1) випливає, що у граничному випадку ідеально провідної поверхні, коли  $|\varepsilon| \rightarrow \infty$  і, отже,  $|\eta| \rightarrow 0$ , тангенціальна компонента електричного поля  $\vec{E}_t$  на поверхні перетворюється на нуль:

$$\vec{E}_t|_{z=\xi(\vec{r})} = 0. \quad (19.2)$$

### 19.2. Побудова наближеного розв'язку

Як і раніше, для простоти ми розглядатимемо дифракцію не векторних електромагнітних хвиль  $(\vec{E}, \vec{H})$ , а скалярного хвильового поля  $U(\vec{R})$ , що при  $z > \xi(\vec{r})$  задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)U(\vec{R}) = 0 \quad (19.3)$$

і найпростішу граничну умову на поверхні поділу  $z = \xi(\vec{r})$ :

$$U(\vec{R})|_{z=\xi(\vec{r})} = U[\vec{r}, z = \xi(\vec{r})] = 0. \quad (19.4)$$

В акустиці в ролі  $U(\vec{R})$  звичайно виступає потенціал швидкості (звуковий тиск), а поверхня, на якій виконується гранична умова (19.4), називається „**абсолютно м'якою**” на відміну від „**абсолютно жорсткої**”, на якій має місце гранична умова

$$\left. \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right|_{z=\xi(\vec{r})} = 0. \quad (19.5)$$

В електромагнітній задачі граничним умовам (19.4) і (19.5) відповідає **ідеально провідна поверхня**  $(\vec{E}_t = 0)$  і **поверхня ідеального магнетика**  $(\vec{H}_t = 0)$ .

Загальних аналітичних методів розв'язання рівняння (19.3) з граничними умовами, заданими на поверхні довільної форми (навіть у найпростіших випадках абсолютно м'якої або абсолютно жорсткої поверхні) не існує. Тому доводиться застосовувати або чисельні, або різні наближені методи. У цьому розділі як приклад розглянемо розсіювання скалярного хвильового поля  $U(\vec{R})$  на шорсткій абсолютно м'якій поверхні з малими нерівностями, коли можна скористатися методом збурень.

Якщо величина  $\xi(\vec{r})$  достатньо мала (справжній зміст безрозмірного малого параметра ми встановимо пізніше), то ліву частину граничної умови (19.4) можна розкласти в ряд Тейлора за степенями  $\xi(\vec{r})$  і обмежитися кількома першими членами ряду:

$$U[\vec{r}, z = \xi(\vec{r})] = U(\vec{r}, 0) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial U(\vec{r}, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \\ + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2 U(\vec{r}, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots = 0. \quad (19.6)$$

Уявимо собі тепер хвильове поле  $U(\vec{R})$  у вигляді суми відомого (заданого) падаючого на поверхню поля  $U_{nad}(\vec{R})$  і шуканого відбитого (розсіяного) поля  $U_{відб}(\vec{R})$ :

$$U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_{відб}(\vec{R}), \quad (19.7)$$

яке будемо шукати у вигляді ряду теорії збурень:

$$U_{відб} = U_0 + U_1 + \dots + U_m + \dots, \quad (19.8)$$

де  $U_m \sim \xi^m$ . Підставляючи  $U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_{відб}(\vec{R})$  в (19.6) і користуючись для  $U_{відб}(\vec{R})$  поданням (19.8), отримаємо такий вид граничної умови для абсолютно м'якої поверхні:

$$(U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots) \Big|_{z=0} + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots) \Big|_{z=0} + \\ + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots) \Big|_{z=0} + \dots = 0. \quad (19.9)$$

Зберемо разом члени одного порядку малості за  $\xi$  та вимагатимемо, щоб умова (19.9) задовольнялася у кожному порядку, незалежно від інших. У результаті з (19.9) отримуємо систему пов'язаних між собою (рекурентних) граничних умов для полів  $U_m$ , заданих, проте, вже не на нерівній поверхні, а на площині  $z = 0$ :

$$(\xi^0) \quad [U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0} = 0, \quad (19.10 \text{ а})$$

$$(\xi^1) \quad \left[ U_1(\vec{R}) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} (U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})) \right]_{z=0} = 0, \quad (19.10 \text{ б})$$

$$(\xi^2) \quad \left[ U_2(\vec{R}) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} U_1(\vec{R}) + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})) \right]_{z=0} = 0. \quad (19.10 \text{ в})$$

Припустимо тепер, що кожне з полів  $U_{nad}$ ,  $U_0$ ,  $U_1$  та ін. задовольняє рівняння Гельмгольца (19.3). В силу принципу суперпозиції повне поле  $U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R}) + U_1(\vec{R}) + \dots$  також задовольнятиме це рівняння. В результаті поля  $U_0$ ,  $U_1$  та ін. можна знаходити, послідовно розв'язуючи рівняння Гельмгольца з відповідними граничними умовами (19.10).

#### Наближення нульового порядку

У нульовому порядку за  $\xi$ , виходячи із викладеного, ми маємо розв'язати наступну задачу.

$$\begin{cases} (\Delta_{\vec{R}} + k^2) U_0(\vec{R}) = 0, \\ U_0(\vec{r}, 0) = -U_{nad}(\vec{r}, 0). \end{cases} \quad (19.11)$$

Видно, що задача знаходження поля  $U_0$  звелася до задачі про відбивання падаючої хвилі  $U_{nad}$  від площини  $z = 0$ , на якій значення  $U_0$  виражається через відоме (задане) поле  $U_{nad}$  (19.10 а). Як падаюче поле виберемо плоску монохроматичну хвилю з амплітудою  $A_0$ :

$$U_{nad}(\vec{R}) = A_0 e^{i\vec{k}_0 \vec{R}} = A_0 e^{i(\vec{k}_{01} \vec{r} + k_{0z} z)}. \quad (19.12)$$

Тут уведені тангенціальна  $\vec{k}_{0\perp}$  і нормальна  $\vec{k}_{0z} = k_{0z}\vec{e}_z$  компоненти хвильового вектора  $\vec{k}_0$  падаючої хвилі ( $\vec{k}_0 = \vec{k}_{0\perp} + \vec{k}_{0z}$ ).

Спрямуємо вісь  $OX$  декартової системи координат  $XYZ$  уздовж тангенціальної складової  $\vec{k}_{0\perp}$  хвильового вектора  $\vec{k}_0$  (рис. 19.2). У цьому випадку  $\vec{k}_0$  буде лежати в площині  $XOZ$  (її називають площиною падіння), а його проекції на осі вибраної системи координат будуть дорівнювати  $\vec{k}_{0\perp} = k_{0\perp}\vec{e}_x$ ,  $\vec{k}_{0z} = k_{0z}\vec{e}_z$ , де  $k_{0\perp} = k \sin \theta_0$ ,  $k_{0z} = -k \cos \theta_0$ ,  $\theta_0$  — кут падіння.

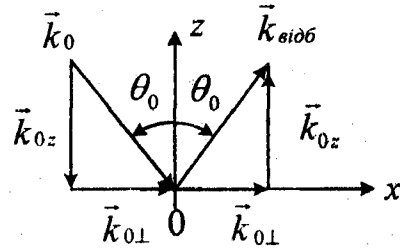


Рис. 19.2

Згідно з законом відбивання хвилі від плоскої межі поле  $U_0$  буде подаватися також плоскою хвилею з хвильовим вектором  $\vec{k}_{\text{відб}}$ , що лежить у тій самій площині, що й  $\vec{k}_0$  (площині падіння  $XOZ$ ). При цьому тангенціальна компонента  $\vec{k}_{\text{відб}}$  збігається з  $\vec{k}_{0\perp}$ , а нормальна протилежна за знаком  $\vec{k}_{0z}$  ( $\vec{k}_{\text{відб}} = \vec{k}_{0\perp} - \vec{k}_{0z}$ ). Таким чином поле  $U_0$  подається в такому вигляді:

$$U_0(\vec{R}) = A_{\text{відб}} e^{i\vec{k}_{\text{відб}}\vec{R}} = A_{\text{відб}} e^{i(\vec{k}_{0\perp}\vec{R} - k_{0z}z)}. \quad (19.13)$$

Тут через  $A_{\text{відб}}$  позначена амплітуда відбитої хвилі. Підставляючи (19.12) і (19.13) у граничну умову (19.10 а), отримаємо

$$A_{\text{відб}} e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}} = -A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}}, \quad (19.14)$$

звідки випливає, що  $A_{\text{відб}} = -A_0$ .

Таким чином, розв'язок задачі у наближенні нульового порядку має вигляд

$$U_{\text{над}}(\vec{R}) + U_0(\vec{R}) = A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}} (e^{ik_{0z}z} - e^{-ik_{0z}z}). \quad (19.15)$$

#### Наближення першого порядку

Для знаходження відбитого поля першого порядку  $U_1(\vec{R})$  ми маємо розв'язати рівняння Гельмгольца з граничними умовами (19.10 б):

$$\begin{cases} (\Delta_{\vec{R}} + k^2) U_1(\vec{R}) = 0, \\ U_1(\vec{r}, 0) = -\xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} [U_{\text{над}}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0}. \end{cases} \quad (19.16)$$

Користуючись знайденим розв'язком (19.15), визначимо значення поля  $U_1$  на площині  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} U_1(\vec{r}, 0) &= -\xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} [U_{\text{над}}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0} = \\ &= -2ik_{0z}\xi(\vec{r}) A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}}. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Із (19.16) і (19.17) видно, що задача знаходження  $U_1(\vec{R})$  звелася до визначення поля  $U_1$  у довільній точці спостереження  $\vec{R} = \vec{R}_p$ , що перебуває у верхньому півпросторі (див. рис. 19.3), при заданому його розподілі на площині  $z = 0$ .

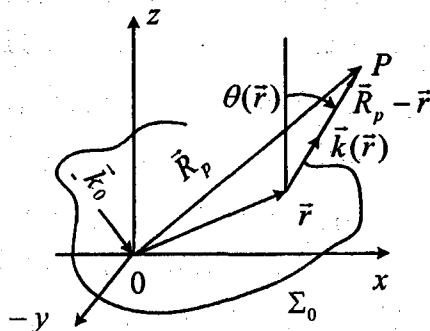


Рис. 19.3

Для розв'язання цієї задачі скористаємося формулою Гюйгенса (17.19):

$$U_1(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} U_1(\vec{r}, 0) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (19.18)$$

де інтегрування проводиться за тією частиною  $\Sigma_0$  площини  $z=0$ , яка вкрита нерівностями,  $\theta(\vec{r})$  — кут між нормаллю до площини  $z=0$  і напрямком у точку спостереження  $P$  ( $\vec{R} = \vec{R}_p$ ) з довільної точки  $\vec{r}$  області інтегрування  $\Sigma_0$  (рис.19.3). Підставляючи тепер у (19.18) знайдене значення поля  $U_1(\vec{r}, 0)$  (19.17), остаточно отримаємо

$$U_1(\vec{R}_p) = -\frac{A_0 k^2 \cos \theta_0}{\pi} \int_{\Sigma_0} \xi(\vec{r}) e^{i(k|\vec{r}-\vec{R}_p| + \vec{k}_{0\perp} \vec{r})} \frac{\cos \theta(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} d\vec{r}. \quad (19.19)$$

Формула (19.19) є розв'язком „динамічної” частини задачі, встановлюючи зв'язок між розсіяним полем  $U_1(\vec{R}_p)$  (у першому порядку теорії збурень) і формою  $z = \xi(\vec{r})$  кожної реалізації випадкової поверхні. Видно, що зв'язок між  $U_1$  і  $\xi$  є лінійним. Якщо в області інтегрування  $\Sigma_0$  є багато некорельованих нерівностей, тобто якщо виконується нерівність  $L \gg l_\xi$ , де  $L \sim \sqrt{\Sigma_0}$  — лінійний розмір розсіюючої поверхні, а  $l_\xi$  — радіус кореляції випадкової функції  $\xi(\vec{r})$  (характерний горизонтальний розмір або "довжина" нерівностей в площині  $z=0$ ), то відповідно до центральної граничної теореми теорії ймовірностей поле  $U_1(\vec{R}_p)$  буде розподілене за законом Гаусса навіть при негауссовому розподілі  $\xi(\vec{r})$ . Це випливає з того, що (19.19) вказує на адитивний внесок кожної нерівності у сумарне розсіяне поле у точці спостереження  $\vec{R}_p$ . Враховуючи викладене, при аналізі можна обмежитися дослідженням тільки перших двох статистичних моментів поля  $U_1(\vec{R}_p)$ , оскільки для нормально розподілених величин в них і міститься вся статистична інформація.

### 19.3. Середнє поле і середня інтенсивність

Безпосереднє усереднення формули (19.19) з урахуванням того, що  $\langle \xi(r) \rangle = 0$ , призводить до такого результату:

$$\langle U_1(\vec{R}_p) \rangle = 0.$$

Таким чином, у першому порядку за  $\xi(\vec{r})$  розсіяне поле  $U_1(\vec{R}_p)$  є некогерентним.

Середня інтенсивність розсіяного поля  $\langle I_1(\bar{R}_p) \rangle = \langle |U_1(\bar{R}_p)|^2 \rangle$  згідно з (19.19) виражається через другий момент випадкової функції  $\xi(\bar{r})$ :

$$\langle I_1(\bar{R}_p) \rangle = \frac{I_0 k^4 \cos^2 \theta_0}{\pi^2} \int_{\Sigma_0} \int_{\Sigma_0} \langle \xi(\bar{r}') \xi(\bar{r}'') \rangle \exp \{ ik(|\bar{r}' - \bar{R}_p| - |\bar{r}'' - \bar{R}_p|) + i\bar{k}_{0\perp}(\bar{r}' - \bar{r}'') \} \frac{\cos \theta(\bar{r}') \cos \theta(\bar{r}'')}{|\bar{r}' - \bar{R}_p| |\bar{r}'' - \bar{R}_p|} d\bar{r}' d\bar{r}'', \quad (19.20)$$

де  $I_0 = |A_0|^2$  — інтенсивність падаючої плоскої хвилі. Для статистично просторово однорідних нерівностей („стаціонарних” за просторовими змінними) маємо

$$\langle \xi(\bar{r}') \xi(\bar{r}'') \rangle = B_\xi(\bar{r}' - \bar{r}''),$$

де  $B_\xi$  — просторова автокореляційна функція нерівностей. Замість  $\bar{r}', \bar{r}''$  введемо в (19.20) нові сумарні  $\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}' + \bar{r}'')$  і різниці  $\bar{r}' - \bar{r}''$  інтегрування. При цьому старі змінні виражаються через нові як  $\bar{r}' = \bar{r} + \bar{\rho}/2$ ,  $\bar{r}'' = \bar{r} - \bar{\rho}/2$ . Враховуючи, що  $B_\xi(\bar{\rho})$  відмінна від нуля тільки для „невеликих” значень  $\rho \sim l_\xi$ , при  $L \gg l_\xi$  у формулі (19.20) можна дещо спростити. По-перше, інтегрування за  $d\bar{\rho}$  можна проводити у нескінченних межах, а область інтегрування за сумарною координатою  $\bar{r}$  практично збігається зі старою  $\Sigma_0$ . По-друге, різницю  $|\bar{r}' - \bar{R}_p| - |\bar{r}'' - \bar{R}_p|$  у показниках степеня експоненти можна розкласти в ряд Тейлора у точці  $\bar{\rho} = 0$  до першого ненульового доданка:

$$|\bar{r}' - \bar{R}_p| - |\bar{r}'' - \bar{R}_p| = \left| \bar{r} - \bar{R}_p + \frac{\bar{\rho}}{2} \right| - \left| \bar{r} - \bar{R}_p - \frac{\bar{\rho}}{2} \right| \approx \frac{\bar{r} - \bar{R}_p}{|\bar{r} - \bar{R}_p|} \bar{\rho}.$$

По третє, співмножники з напрямними косинусами, що повільно змінюються, можна наближено взяти у точці  $\bar{\rho} = 0$ :

$$\frac{\cos[\theta(\bar{r} + \bar{\rho}/2)] \cos[\theta(\bar{r} - \bar{\rho}/2)]}{\left| \bar{r} - \bar{R}_p + \frac{\bar{\rho}}{2} \right| \left| \bar{r} - \bar{R}_p - \frac{\bar{\rho}}{2} \right|} \approx \frac{\cos^2 \theta(\bar{r})}{(\bar{r} - \bar{R}_p)^2}.$$

Після виконаних спрощень отримаємо

$$\langle I_1(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{I_0 k^4 \cos^2 \theta_0}{\pi^2} \int_{\Sigma_0} \frac{\cos^2 \theta(\bar{r})}{(\bar{r} - \bar{R}_p)^2} d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} e^{-i\bar{q}_\perp(\bar{r})\bar{\rho}} B_\xi(\bar{\rho}). \quad (19.21)$$

Тут ми ввели поточний вектор розсіювання  $\bar{q}(\bar{r}) = \bar{k}(\bar{r}) - \bar{k}_0$ , де

$$\bar{k}(\bar{r}) = k \frac{\bar{R}_p - \bar{r}}{|\bar{R}_p - \bar{r}|} - \text{вектор, спрямований із поточної точки}$$

поверхні  $\bar{r}$  у точку спостереження  $\bar{R}_p$  (див. рис. 19.3). При цьому ми врахували, що у скалярному добутку  $\bar{q}(\bar{r})\bar{\rho}$  можна  $\bar{q}$  замінити на  $\bar{q}_\perp = (q_x, q_y)$  (проекцію  $\bar{q}$  на площину  $z = 0$ ).

За аналогією до (14.32) введемо в розгляд просторово-енергетичний спектр нерівностей  $S_\xi(\bar{\chi})$ , взятий для фіксованої „хвильової” гармоніки  $\bar{\chi} = \bar{q}_\perp(\bar{r})$ :

$$S_\xi[\bar{q}_\perp(\bar{r})] = S_\xi(\bar{\chi}) \Big|_{\bar{\chi}=\bar{q}_\perp(\bar{r})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} e^{-i\bar{\chi}\bar{\rho}} B_\xi(\bar{\rho}) \Big|_{\bar{\chi}=\bar{q}_\perp(\bar{r})}. \quad (19.22)$$



З урахуванням (19.22) формула (19.21) набуває вигляду

$$\langle I_1(\bar{R}_p) \rangle \approx 4I_0 k^4 \cos^2 \theta_0 \int_{\Sigma_0} \frac{\cos^2 \theta(\bar{r})}{(\bar{r} - \bar{R}_p)^2} S_\xi[\bar{q}_\perp(\bar{r})] d\bar{r}. \quad (19.23)$$

Згідно з (19.23) кожен елемент поверхні  $d\bar{r}$  із центром у точці  $\bar{r}$  робить внесок у сумарну інтенсивність  $\langle I_1(\bar{R}_p) \rangle$

$$d\bar{I}(\bar{R}_p) = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\bar{r}) S_\xi[\bar{q}_\perp(\bar{r})] \frac{I_0 d\bar{r}}{(\bar{r} - \bar{R}_p)^2}. \quad (19.24)$$

Величина

$$\sigma[\bar{q}_\perp(\bar{r})] = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\bar{r}) S_\xi[\bar{q}_\perp(\bar{r})], \quad (19.25)$$

тобто коефіцієнт при  $I_0 d\bar{r}/(\bar{r} - \bar{R}_p)^2$  у формулі (19.24) має назву **перерізу розсіювання** одиничної площадки абсолютно м'якої поверхні у напрямку  $(\bar{R}_p - \bar{r})/|\bar{R}_p - \bar{r}|$ . Враховуючи (19.25), формула (19.23) набуває остаточного і простого вигляду

$$\langle I_1(\bar{R}_p) \rangle \approx I_0 \int_{\Sigma_0} \frac{\sigma[\bar{q}_\perp(\bar{r})]}{(\bar{r} - \bar{R}_p)^2} d\bar{r}. \quad (19.26)$$

Припустимо тепер, що спостерігач перебуває у дальній зоні відносно поверхні  $\Sigma_0$  (в зоні Фраунгофера). Умова дальньої зони, як уже було показано раніше, формулюється у вигляді таких нерівностей:

$$\frac{r}{R_p} \leq \frac{L}{R_p} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{kL^2}{R_p} \ll 1, \quad (19.27)$$

де  $R_p = |\bar{R}_p|$ . Природно, ми припускаємо, що початок декартової системи координат  $XYZ$  уміщений у центр розсіюючої площадки  $\Sigma_0$ . Якщо виконуються нерівності (19.27), у формулі (19.23) можна наближено вважати, що вектор  $\bar{k}(\bar{r})$ , напрямний косинус  $\cos \theta(\bar{r})$  і відстань від поточної точки поверхні до точки спостереження  $|\bar{r} - \bar{R}_p|$  в межах області інтегрування практично не змінюються, і їх можна вибрати при  $\bar{r} = 0$ :  $\bar{k}(\bar{r}) \approx \bar{k}(0) = k\bar{R}_p/R_p$ ,  $\cos \theta(\bar{r}) \approx \cos \theta(0) = \cos \theta_p$  і  $|\bar{r} - \bar{R}_p| \approx R_p$ . Враховуючи ці спрощення, під знаком інтеграла в (19.23) можна покласти

$$\bar{q}(\bar{r}) = \bar{k}(\bar{r}) - \bar{k}_0 \approx \bar{q}(0) = k \frac{\bar{R}_p}{R_p} - \bar{k}_0,$$

$$\frac{\cos \theta(\bar{r})}{(\bar{r} - \bar{R}_p)^2} \approx \frac{\cos \theta(0)}{R_p^2} = \frac{\cos \theta_p}{R_p^2},$$

і в дальній зоні для середньої інтенсивності отримуємо такий вираз:

$$\langle I_1(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{I_0 \sigma(\bar{q}_\perp)}{R_p^2} \Sigma_0. \quad (19.28)$$

Тут  $\Sigma_0$  — сумарна площа розсіюючої поверхні, а

$$\sigma(\bar{q}_\perp) = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p S_\xi(\bar{q}_\perp) — \quad (19.29)$$

фіксоване значення перерізу розсіювання.

## Висновки

1. Формули (19.26) і (19.28) відіграють у теорії розсіювання хвиль на статистично шорсткій поверхні ту саму роль, що й формула (14.31) у теорії об'ємного розсіювання на флуктуаціях показника заломлення. Фізичний зміст цих формул також практично збігається, і наближення, в якому отримано формулу (19.26) та (19.28), що випливає з (19.26), також називається „борнівським”.

2. У формулі (19.26) з урахуванням визначення (19.25) під знаком інтеграла стоїть множник  $\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\vec{r})$ , який перетворюється на нуль при ковзних кутах падіння і відбиття, тобто при  $\theta_0, \theta(\vec{r}) \rightarrow \pi/2$ . Саме тому інтеграл (19.26) збігається навіть при інтегруванні по всій нескінченній площині  $z = 0$ .

3. Залежність  $\langle I_1 \rangle \sim 1/R_p^2$  у формулі (19.28) говорить про те, що у дальній зоні поле  $U_1$ , розсіяне на малій шорсткій площадці, має вигляд сферичної хвилі, що розходить (середня інтенсивність спадає зі зростанням відстані  $R_p$  тільки за рахунок сферичної розбіжності).

4. Зі збільшенням розмірів площі поверхні  $\Sigma_0$  середня інтенсивність  $\langle I_1 \rangle$  зростає пропорційно до  $\Sigma_0$ , що є ознакою некогерентного додавання полів, розсіяних на окремих нерівностях поверхні. Справді, середню кількість  $N$  окремих нерівностей можна оцінити як  $N \approx \Sigma_0/\Sigma_l$ , де  $\Sigma_l \sim l_\xi^2$  — площа, що припадає на одну нерівність, і, отже,  $\langle I_1 \rangle \sim \Sigma_0 \sim N$ , тобто  $\langle I_1 \rangle$  зростає пропорційно кількості елементів розсіювання, а не пропорційно їх квадрата, як це має місце при когерентному додаванні полів.

5. Так само, як і в теорії розсіювання на слабких флуктуаціях показника заломлення, розсіювання на слабо шорсткій поверхні є резонансним: з усього спектра нерівностей  $S_\xi(\vec{\chi})$  при розсіюванні з напрямку  $\vec{k}_0$  у напрямку  $\vec{k}$  бере участь тільки одна єдина просторова гармоніка Фур'є з „хвильовим” вектором  $\vec{\chi} = \vec{q}_\perp$ .

6. Нарешті, в (19.26) і (19.28) присутній той самий, що й у (14.31), „релеївський” множник  $k^4$ , завдяки якому інтенсивність розсіювання на дрібних нерівностях ( $kl_\xi \ll 1$ ) виявляється пропорційною четвертому степеню частоти. Справді, через швидке спадання до нуля автокореляційної функції  $B_\xi(\vec{\rho})$  для просторових частот, коли  $|\vec{q}_\perp \vec{\rho}| \leq 2kl_\xi \ll 1$ , експоненціальний множник  $e^{i\vec{q}_\perp \vec{\rho}}$  можна наближено замінити на одиницю. При цьому спектр  $S_\xi(\vec{q}_\perp)$  виявляється незалежним від частоти:

$$\begin{aligned} S_\xi(\vec{q}_\perp) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho}) \approx \\ &\approx S_\xi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\vec{\rho}) d\vec{\rho} \approx \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (19.30)$$

і, отже,  $\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \sim k^4$ . Тут  $\sigma_\xi^2 = B_\xi(0) = \langle \xi^2 \rangle$  — дисперсія відхилень нерівної поверхні  $z = \xi(\vec{r})$  від середньої площини  $z = 0$ .

## 19.4. Індикатриса розсіювання

Аналіз залежності середньої інтенсивності від напрямку розсіювання проведемо на основі формули (19.28), що справджується для дальньої зони. При цьому положення точки

спостереження задаватимемо у сферичних координатах  $\vec{R}_p = (R_p, \theta_p, \varphi_p)$ , де  $\theta_p$  — полярний кут, що відраховується від осі  $OZ$ , а  $\varphi_p$  — азимутальний кут, що відраховується від осі  $OX$  в площині  $XOY$  (рис. 19.4).

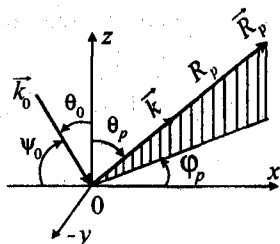


Рис. 19.4

Розподіл за кутами  $\theta_p$  і  $\varphi_p$  середньої інтенсивності зручно описувати індикатрисою розсіювання, яку за аналогією з §14 ми визначимо як відношення  $\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle$  до середньої інтенсивності, розсіяної у дзеркальному напрямку ( $\vec{q}_\perp = 0 \rightarrow \theta_p = \theta_0, \varphi_p = 0$ ):

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_1(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{S_\xi(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_p}{S_\xi(0) \cos^2 \theta_0}. \quad (19.31)$$

Для подальшого аналізу доцільно навести в явному вигляді декартові компоненти вектора  $\vec{q}$ , записані у сферичних координатах:

$$\vec{q} = \begin{cases} q_x = k(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0), \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p, \\ q_z = k(\cos \theta_p + \cos \theta_0). \end{cases} \quad (19.32)$$

Дослідимо загальний вигляд індикатрисы розсіювання  $F(\theta_p, \varphi_p)$  у двох граничних випадках — дрібних ( $kl_\xi \ll 1$ ) і великих ( $kl_\xi \gg 1$ ) нерівностей (тут великими вважаються нерівності з великим горизонтальним лінійним розміром  $l_\xi$ , тобто „довгі”, а висоти їх  $\xi$  і далі вважаються достатньо малими для того, щоб можна було застосовувати метод збурень).

1. Для *дрібних нерівностей*, коли  $kl_\xi \ll 1$  ( $l_\xi \ll \lambda$ ), можна скористатися формулою (19.30), тобто вважати  $S_\xi(\vec{q}_\perp) \approx S_\xi(0)$ , після чого з (19.31) випливає

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\cos^2 \theta_p}{\cos^2 \theta_0}. \quad (19.33)$$

На відміну від об'ємного розсіювання, яке у цьому випадку було ізотропним: ( $F(\theta_p, \varphi_p) \approx 1$ ), індикатриса розсіювання від шорсткої поверхні виявляється залежною від полярного кута  $\theta_p$ . Проте, враховуючи, що ця залежність дуже плавна ( $\sim \cos^2 \theta_p$ ), наближено можна і далі вважати розсіювання дифузним, оскільки кутова ширина  $\Delta\theta_p$  індикатрисы розсіювання має порядок одиниці, а положення її максимуму не залежить від напрямку опромінення  $\theta_0$  (воно відповідає розсіюванню у нормальному до площини  $z = 0$  напрямку  $\theta_p = 0$ , див. рис. 19.5 а).

2. У протилежному граничному випадку, коли  $kl_\xi \gg 1$  ( $l_\xi \gg \lambda$ , *довгі пологі нерівності*), кутова ширина індикатрисы розсіювання  $F(\theta_p, \varphi_p)$  визначається поведінкою спектра  $S_\xi(\vec{q}_\perp)$ ,

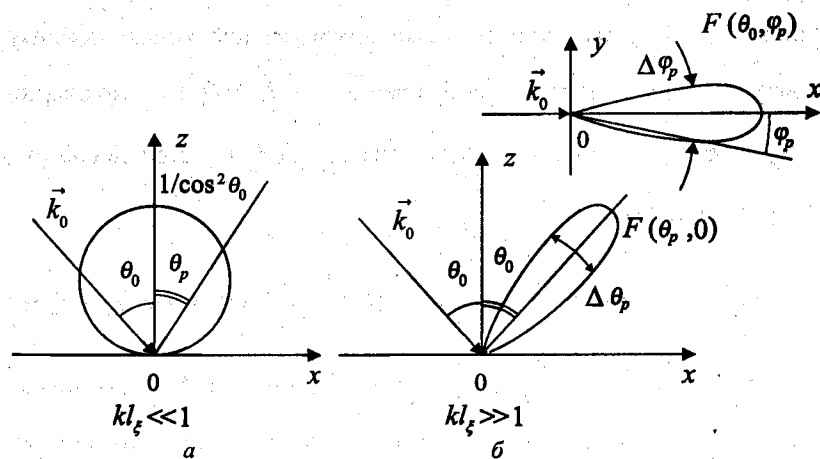


Рис. 19.5

який виявляється швидко змінною функцією кутів  $\theta_p$  і  $\varphi_p$ .

Ширину спектра можна оцінити зі співвідношення невизначеності (див. §13). Наприклад, для ізотропних нерівностей згідно з (13.34)

це співвідношення має вигляд  $q_{\perp} l_{\xi} \approx 1$ , де  $q_{\perp} = |\vec{q}_{\perp}| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ .

Підставивши сюди взяті з (19.32) значення проекцій вектора розсіювання, отримуємо

$$kl_{\xi} \sqrt{(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + (\sin \theta_p \sin \varphi_p)^2} \approx 1. \quad (19.34)$$

У площині падіння  $XOZ$  ( $\varphi_p = 0$ ) кутова ширина  $\Delta \theta_p$  індикатриси розсіювання згідно з (19.34) визначається з такого співвідношення:

$$kl_{\xi} |\sin \theta_p - \sin \theta_0| \approx 1. \quad (19.35)$$

Оскільки  $kl_{\xi} \gg 1$ , ця рівність може виконуватися тільки поблизу напрямку дзеркального відображення ( $\theta_p = \theta_0$ ). Поклавши  $\theta_p = \theta_0 + \Delta \theta_p$ , розкладемо  $\sin \theta_p = \sin(\theta_0 + \Delta \theta_p)$  у степеневий ряд за малим доданком  $\Delta \theta_p$ :

$$\sin \theta_p = \sin(\theta_0 + \Delta \theta_p) \approx \sin \theta_0 + \Delta \theta_p \cos \theta_0 - \frac{1}{2} (\Delta \theta_p)^2 \sin \theta_0. \quad (19.36)$$

Якщо у правій частині обмежитися тільки лінійним за  $\Delta \theta_p$  доданком, то після підстановки (19.36) у (19.35) отримаємо оцінку для кутової ширини  $\Delta \theta_p$  індикатриси розсіювання у вертикальній площині

$$\Delta \theta_p \approx \frac{1}{kl_{\xi} \cos \theta_0} \sim \frac{\lambda}{l_{\xi}} \ll 1. \quad (19.37)$$

Зазначимо, що знайдена величина  $\Delta \theta_p$  правдива при не надто ковзних кутах падіння, коли у розкладі (19.36) можна знехтувати третім доданком у правій частині порівняно з другим. Це можливо, якщо виконується нерівність:

$$\cos \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0 \ll \frac{1}{kl_{\xi}}. \quad (19.38)$$

При  $kl_{\xi} \gg 1$  умова (19.38) може порушуватися тільки при дуже малих кутах ковзання  $\Psi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$  (див. рис. 19.4):

$$\Psi_0^2 \leq \frac{1}{kl_{\xi}} \ll 1. \quad (19.39)$$

Таким чином, при достатньо крутих кутах опромінення ( $\Psi_0 \gg 1/\sqrt{kl_\xi}$ ) ширина індикатриси розсіювання  $\Delta\theta_p$  визначається кутом дифракції на горизонтальному лінійному розмірі нерівностей  $l_\xi$ :

$$\Delta\theta_p \approx \frac{1}{kl_\xi} \sim \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1 \quad (19.40)$$

(безрозмірний множник  $2\pi$ , як завжди, при якісних оцінках можна опустити). Слід, проте, зазначити, що, строго кажучи, згідно з (19.37) кут дифракції визначається не самим горизонтальним розміром  $l_\xi$ , а його проекцією  $l_\xi \cos \theta_0$  на площину, перпендикулярну до напрямку опромінення, що падає на поверхню.

Аналогічно зі співвідношення невизначеності оцінюється і ширина індикатриси  $\Delta\varphi_p$  у горизонтальній площині. Поклавши у (19.34)  $\theta_p = \theta_0$ , отримаємо

$$kl_\xi \sin \theta_0 \sqrt{(\cos \varphi_p - 1)^2 + \sin^2 \varphi_p} \approx 1.$$

При  $kl_\xi \gg 1$  і похилому падінні хвилі ( $\sin \theta_0 \neq 0$ ) ця умова може бути реалізована тільки в області малих кутів  $\varphi_p$  ( $\varphi_p \ll 1$ ). Розклавши  $\cos \varphi_p$  і  $\sin \varphi_p$  у ряд Тейлора, з точністю до лінійних доданків за  $\varphi_p$ , отримуємо таку оцінку:

$$\Delta\varphi_p = \varphi_p \approx \frac{1}{kl_\xi \sin \theta_0} \sim \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1. \quad (19.41)$$

Таким чином, при  $kl_\xi \gg 1$  індикатриса розсіювання  $F(\theta_p, \varphi_p)$  має гострий максимум у напрямку дзеркального відбиття, ширина якого має порядок кута дифракції  $\theta_d \sim \lambda/l_\xi \ll 1$  (див. рис. 19.5 б).

### 19.5. Область застосування „борнівського” наближення

Наприкінці цього параграфа встановимо межі застосування наближення першого порядку теорії збурень („борнівського” наближення). Це можна зробити на основі формули (19.28), виходячи з достатньо природної, з фізичної точки зору, вимоги малості потоку розсіяної у верхній півпростір енергії  $P_1$ , який відноситься від поверхні полем  $U_1$ , порівняно з повним потоком енергії  $P_0$ , що приноситься на поверхню  $\Sigma_0$  полем падаючої хвилі  $U_{пад}$ :

$$P_1 \ll P_0. \quad (19.42)$$

Оскільки густина потоку енергії пропорційна середній інтенсивності поля, то повний потік розсіяної енергії можна записати у такому вигляді (порівняйте з (14.42)):

$$P_1 = a \int_{C_R} \langle I_1(\bar{R}_p) \rangle d\Sigma, \quad (19.43)$$

де інтегрування ведеться за  $C_R$  — поверхнею верхньої півсфери великого радіуса  $R = R_p$  із центром у початку координат  $O$  (див. рис. 19.6),  $a$  — неважливий для подальшого аналізу сталий множник

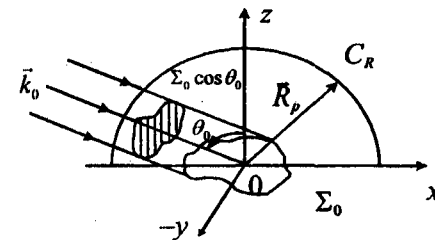


Рис. 19.6

(рівний, наприклад,  $c/4\pi$ , якщо  $U_1$  — компонента електричного або магнітного поля, при цьому величина  $\frac{c}{4\pi} < |U_1|^2 >$  буде збігатися з густиною потоку енергії — модулем вектора Умова-Пойтинга розсіяного поля).

Потік енергії  $P_0$ , що падає на поверхню  $\Sigma_0$ , очевидно, дорівнює (порівняйте з (14.43))

$$P_0 = aI_0 \Sigma_0 \cos \theta_0. \quad (19.44)$$

Переходячи у (19.43) до сферичних координат (див. рис. 19.4), в яких елемент поверхні  $d\Sigma = R_p^2 \sin \theta_p d\theta_p d\varphi_p$ , і користуючись формулою (19.28), отримуємо

$$P_1 = 4aI_0 k^4 \Sigma_0 \cos^2 \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\vec{q}_\perp) d\varphi_p. \quad (19.45)$$

З урахуванням (19.44) і (19.45) нерівність (19.42) може бути записана у формі

$$4k^4 \cos \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\vec{q}_\perp) d\varphi_p << 1. \quad (19.46)$$

Інтеграл у лівій частині цієї нерівності оцінимо у двох граничних випадках — дрібних ( $kl_\xi << 1$ ) і великих пологих ( $kl_\xi >> 1$ ) нерівностей.

1. При  $kl_\xi << 1$  для  $S_\xi(\vec{q}_\perp)$  можна скористатися оцінкою (19.30), після чого інтеграли за кутами  $\theta_p$  і  $\varphi_p$  легко обчислюються, і нерівність (19.46) набуває вигляду

$$\frac{2}{3\pi} (k\sigma_\xi)^2 (kl_\xi)^2 \cos \theta_0 << 1. \quad (19.47)$$

2. У протилежному граничному випадку, коли  $kl_\xi >> 1$ , функція  $S_\xi(\vec{q}_\perp)$ , як було показано, має гострий максимум у напрямку дзеркального відображення ( $\theta_p = \theta_0$ ,  $\varphi_p = 0$ ). Це дає змогу оцінити інтеграл (19.46), винісши підінтегральну функцію за знак інтеграла при  $\theta_p = \theta_0$  і  $\varphi_p = 0$ , а інтеграл за  $d\theta_p d\varphi_p$ , що залишився, замінити на добуток  $\Delta\theta_p \Delta\varphi_p$ :

$$\begin{aligned} 4k^4 \Sigma_0 \cos \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\vec{q}_\perp) d\varphi_p &\approx \\ &\approx 4k^4 \Sigma_0 \cos^3 \theta_0 \sin \theta_0 S_\xi(0) \Delta\theta_p \Delta\varphi_p. \end{aligned} \quad (19.48)$$

Якщо ми тепер врахуємо отримані раніше оцінки (19.37) і (19.41), то умову застосовності борнівського наближення (19.42) можемо записати у вигляді

$$\frac{1}{\pi^2} (k\sigma_\xi \cos \theta_0)^2 << 1. \quad (19.49)$$

Точніші обчислення інтеграла в (19.46) приводять до нерівності

$$(2k\sigma_\xi \cos \theta_0)^2 << 1. \quad (19.50)$$

Відмінність (19.49) від (19.50) на множник  $(2\pi)^2$  у лівій частині пов'язана з якісним характером оцінок інтеграла (19.48), а також кутових розмірів  $\Delta\theta_p$  і  $\Delta\varphi_p$  індикатриси розсіювання, виходячи зі співвідношення невизначеності (13.34).

Величина  $P = 2k\sigma_\xi \cos \theta_0$  називається параметром Релея, і вимога його малості, як видно з (19.50), є умовою застосовності борнівського наближення в задачі розсіювання хвиль на шорсткій поверхні з пологими ( $kl_\xi \gg 1$ ) нерівностями. При  $kl_\xi \ll 1$  застосування борнівського наближення обмежується нерівністю (19.47).

### Висновки

З отриманих нерівностей випливає, що теорія збурень при невеликих кутах падіння ( $\cos \theta_0 \approx 1$ ) може застосовуватися тільки для невисоких нерівностей  $\xi(\vec{r})$  порівняно з довжиною хвилі  $\lambda$ .

З іншого боку, чим менший кут ковзання  $\Psi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ , тим до вищих нерівностей можна застосовувати теорію збурень (див. (19.50)). Проте при  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$  ( $\Psi_0 \rightarrow 0$ ) наведені вище оцінки виявляються надто грубими (нерівності (19.47) і (19.50) при  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$  виконуються для будь-яких високих нерівностей). Випадок ковзного поширення хвиль уздовж шорсткої поверхні потребує окремого, суворішого розгляду, що пов'язано з необхідністю врахування ефектів затінення й перевідбивання хвиль. Коло цих питань виходить за межі цього курсу.

### ЗАДАЧІ

1. Розрахувати методом малих збурень розподіл середньої інтенсивності у дальній зоні, вважаючи, що характерний розмір розсіюючої поверхні  $L \sim \sqrt{\Sigma_0}$  набагато перевищує масштаб неоднорідностей  $l_\xi$  випадкової поверхні

$$z(x, y) = \xi(x, y) \sin(\alpha x + \nu). \quad (1)$$

Тут  $\xi(x, y)$  — нормально розподілене статистично однорідне та ізотропне поле випадкових амплітуд підвищень (із нульовим середнім значенням  $\bar{\xi} = 0$  і дисперсією  $\sigma_\xi^2$ ),  $\alpha$  — детермінована величина, обернено пропорційна періоду „гратки”  $L_p$  ( $\alpha = 2\pi/L_p$ ), а  $\nu$  — випадкова величина, рівномірно розподілена у інтервалі  $[-\pi, \pi]$ . Вважаючи  $\xi(x, y)$  і  $\nu$  статистично незалежними, побудувати схематичний графік  $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ .

**Розв'язок.** Щоб знайти розподіл  $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ , необхідно знати просторовий спектр шорсткостей  $S_z(\vec{q}_\perp)$  (див. формули (19.28) і (19.29)), який може бути отриманий шляхом Фур'є-перетворення кореляційної функції шорсткостей  $B_z(\vec{r}', \vec{r})$ . Позначення, що використовуються у розв'язанні, наведені на рис. 19.7.

При обчисленні статистичних характеристик випадкової поверхні скористаємося властивістю густини розподілу ймовірностей для незалежних величин:

$$W(\xi, \nu) = W(\xi)W(\nu).$$

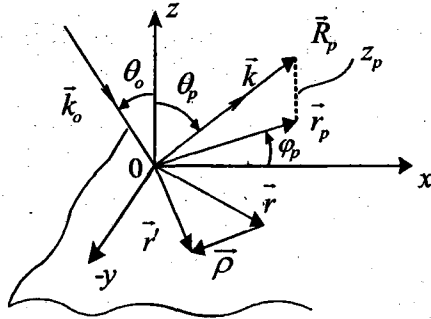


Рис. 19.7

Позначатимемо  $\langle \dots \rangle_\xi$  і  $\langle \dots \rangle_\nu$  відповідно усереднення за  $\xi$  і за  $\nu$ . Відповідно до визначення (1) середнє відхилення  $\langle z(x, y) \rangle$  дорівнює:

$$\langle z(x, y) \rangle = \langle \xi(x, y) \rangle_\xi \langle \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu = 0.$$

Побудуємо тепер автокореляційну функцію шорсткостей поверхні

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \langle z(\vec{r}') z(\vec{r}) \rangle = \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_\xi \times \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x'' + \nu) \rangle_\nu.$$

Згідно з умовою задачі

$$\langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_\xi = \sigma_\xi^2 \exp \left\{ -\frac{(\vec{r}' - \vec{r})^2}{l_\xi^2} \right\}. \quad (2)$$

Усереднення за випадковою величиною  $\nu$  дає

$$\begin{aligned} & \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu = \\ &= \frac{1}{2} \langle \{ \cos[\alpha(x' - x)] - \cos[\alpha(x' - x) + 2\nu] \} \rangle_\nu = \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha(x' - x) - \frac{1}{2} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_\nu. \end{aligned} \quad (3)$$

Неважко показати, що другий доданок у (3) дорівнює нулю. Справді,

$$\begin{aligned} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] \rangle_\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] W(\nu) d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\alpha(x' + x) + 2\nu] d\nu = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, кореляційна функція для заданої випадкової поверхні має вигляд

$$B_z(\vec{\rho}) = \frac{\sigma_\xi^2}{2} e^{-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{l_\xi^2}} \cos \alpha \rho_x, \quad (4)$$

де  $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r} = (\rho_x, \rho_y)$ . За допомогою формули Вінера-Хінчіна знаходимо спектральну густину розсіяного випромінювання

$$\begin{aligned} S_z(\vec{q}_\perp) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}} d\vec{\rho} = \\ &= \frac{\sigma_\xi^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i q_x \rho_x} \cos \alpha \rho_x d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_y^2}{l_\xi^2} - i q_y \rho_y} d\rho_y. \end{aligned} \quad (5)$$



Представивши  $\cos \alpha \rho_x = \frac{1}{2}(e^{i\alpha \rho_x} + e^{-i\alpha \rho_x})$  після інтегрування, отримаємо

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i(q_x + \alpha)\rho_x} d\rho_x + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i(q_x - \alpha)\rho_x} d\rho_x \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_y^2}{l_\xi^2} - iq_y \rho_y} d\rho_y = \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{16\pi} \left[ e^{-\frac{(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} \right] e^{-\frac{q_y^2 l_\xi^2}{4}}. \quad (6)$$

Шукана інтенсивність розсіюного поля, згідно з (19.28), пропорційна  $S_z(\vec{q}_\perp)$ :

$$\bar{I}(\theta_p, \varphi_p) \sim S_z(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p. \quad (7)$$

Проаналізуємо тепер знайдену залежність  $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$  від кутів спостереження. Для цього скористаємося формулою (19.32) для проекцій вектора розсіювання:

$$\begin{cases} q_x = k \sin \theta_p \cos \varphi_p - k \sin \theta_0 = k(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0), \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p - k \sin 0 = k \sin \theta_p \sin \varphi_p. \end{cases} \quad (8)$$

Із (6) і (7) видно, що функція  $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$  має максимуми при кутах спостереження, що задовольняють умови  $q_x = \mp \alpha$  і  $q_y = 0$ . Звідси, враховуючи (8), отримуємо

$$\begin{cases} q_x = k \sin \theta_p \cos \varphi_p - k \sin \theta_0 = \mp \alpha, \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Після ділення другого рівняння на перше при  $k \sin \theta_0 \mp \alpha \neq 0$  отримуємо співвідношення  $\tan \varphi_p = 0$ , тобто  $\varphi_p = 0, \pi$ . Це означає, що максимуми розсіюного випромінювання лежать у площині падіння. Перше рівняння у (9) при цьому набуває вигляду

$$k \sin \theta_p = \pm [k \sin \theta_0 \mp \alpha], \quad (10)$$

де знак „+” перед квадратними дужками відповідає азимутальному куту  $\varphi_p = 0$ , а знак „-” відповідно  $\varphi_p = \pi$ . Під час знаходження дійсних коренів рівняння (10) ми повинні враховувати, що області зміни кутів  $\theta_p$  і  $\theta_0$  лежать у межах  $0 \leq \theta_{p,0} \leq \pi/2$ . Якщо ми припустимо, що полярний кут  $\theta_p$  може набувати і від’ємних значень  $-\pi/2 \leq \theta_p \leq \pi/2$ , то аналізувати (10) можна з одним знаком „+” перед квадратними дужками, вважаючи, що від’ємним кутам  $\theta_p$  відповідає азимутальний кут  $\varphi_p = \pi$ . Враховуючи, що  $L_p = 2\pi/\alpha$  і  $k = 2\pi/\lambda$ , остаточно отримаємо

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}, \quad (11)$$

де  $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ . Розв’язок цього рівняння

$$\theta_p = \theta_{1,2} = \arcsin \left( \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p} \right) \quad (12)$$

легко проілюструвати за допомогою рис. 19.8. Видно, що корені рівняння (11) визначаються як точки перетину кривої  $y(\theta_p) = \sin \theta_p$  і двох прямих  $y_{1,2}(\theta_p) = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}$ . Для заданого

кута падіння  $\theta_0$  залежно від величини відношення  $\lambda/L_p$  можуть спостерігатися або два дійсних корені, або один, або взагалі жодного.

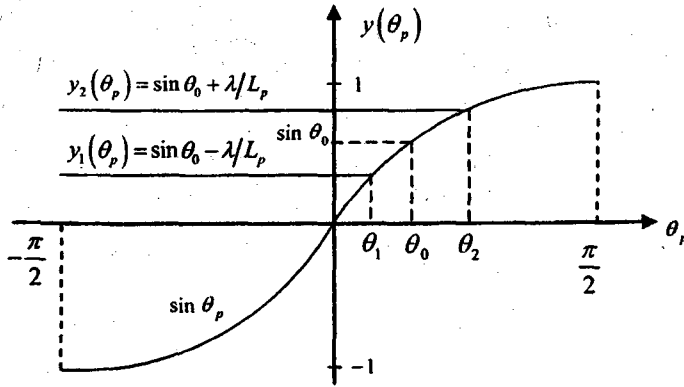


Рис. 19.8

Відсутність дійсних коренів (це можливо при  $\lambda/L_p > 1$ ) свідчить про те, що вони стають уявними. Відповідна цим умовам розсіяна хвиля буде неоднорідною (не поширюваною від поверхні: уявність величини  $k_z$  для неї означає експоненційне згасання інтенсивності у напрямку від поверхні). У другому граничному випадку, коли  $\lambda/L_p \ll 1$ , розсіяна хвиля поширюється у „майже дзеркальних” напрямках ( $\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0$ ). Кути, під якими розсіюються хвилі у випадку, що розглядається, визначимо, поклавши у (11)  $\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0 + \Delta\theta_p$ , де  $\Delta\theta_p \ll \theta_0$ . При цьому у лінійному за малим параметром  $\lambda/L_p \ll 1$  наближенні розв’язок (12) має вигляд

$$\theta_{1,2} \approx \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p \cos \theta_0}. \quad (13)$$

Таким чином, напрямки максимальної інтенсивності у площині падіння збігаються з напрямками  $\varphi_p = 0, \pi$ ;  $\theta_p = \theta_{1,2}$ . Схематично індикатрису розсіювання зображено на рис. 19.9.

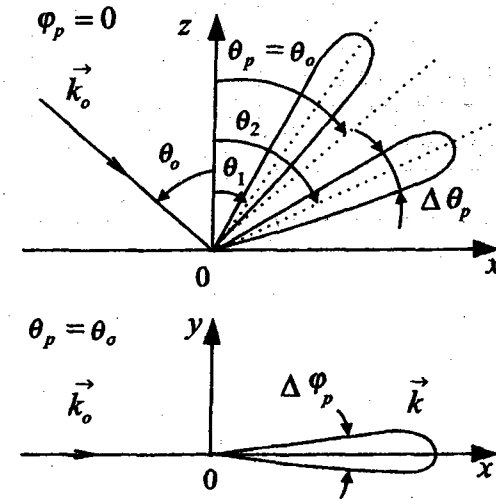


Рис. 19.9

Згідно з (6) ширина пелюсток  $\Delta\theta_p$  на рівні  $1/e$  оцінюється з таких співвідношень:

$$(q_x \pm \alpha)^2 l_\xi^2 = 4, \\ q_y^2 l_\xi^2 = 4.$$

Для першої пелюстки ( $\theta_p = \theta_1$ ), поклавши у (8)  $\varphi_p = 0$ ,  $\theta_p = \theta_1 + \Delta\theta_p$ , отримуємо

$$l_\xi^2 \left\{ k [\sin(\theta_1 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0] + \alpha \right\}^2 = 4. \quad (14)$$

Припустивши  $|\Delta\theta_p| \ll \theta_1$ , спростимо (14):

$$l_\xi^2 \left\{ k [\sin \theta_1 + \Delta\theta_p \cos \theta_1 - \sin \theta_0] + \alpha \right\}^2 \approx$$

$$\approx l_\xi^2 \left\{ k \left[ \cancel{\sin \theta_0} - \frac{\alpha}{k} + \Delta \theta_p \cos \theta_1 - \cancel{\sin \theta_0} \right] + \alpha \right\}^2 =$$

$$= k^2 l_\xi^2 (\Delta \theta_p)^2 \cos^2 \theta_1 \approx 4. \quad (15)$$

Звідси отримуємо

$$\Delta \theta_p \approx \frac{2}{kl_\xi \cos \theta_1} \ll 1. \quad (16)$$

Аналогічну оцінку можна отримати і для другої пелюстки ( $\theta_p = \theta_2$ ):

$$\Delta \theta_p \approx \frac{2}{kl_\xi \cos \theta_2} \ll 1. \quad (17)$$

Якщо  $\alpha/k \ll 1$ , то, як було показано,  $\theta_{1,2} \approx \theta_0$ , і ми приходимо до такої оцінки:

$$\Delta \theta_p \approx \frac{2}{kl_\xi \cos \theta_0}. \quad (18)$$

Для практичного використання дифракційних ґраток цікавим є тільки випадок  $\Delta \theta_p \ll \theta_2 - \theta_1$ . У рамках прийнятих допущень, згідно з (13) маємо  $\theta_2 - \theta_1 \approx 2\alpha/k \cos \theta_0$ . Звідси з урахуванням (18) отримуємо  $1/l_\xi \ll \alpha = 2\pi/L_p$ . Отже, для періодичної структури, що розглядається, на  $l_\xi$  накладається обмеження  $l_\xi \gg L_p/2\pi$ .

Розглянутий випадок наочно демонструє резонансний характер розсіювання: кожній гармоніці неоднорідностей відповідає своє розсіяне поле. Оскільки у цій задачі збурення границі описується однією гармонікою, то у розсіяному полі існує тільки дві хвилі з векторами розсіювання  $\vec{q}_{1,2} = (\pm\alpha, 0, 0)$ .

Для фізичної інтерпретації отриманих формул розглянемо випадок нормального падіння хвилі ( $\theta_0 = 0$ ) на поверхню, задану виразом (1). На рис. 19.10 показано процес відбиття плоскої хвилі від ідеальної синусоїдальної дифракційної ґратки з періодом  $L_p = 2\pi/\alpha$  і початковою фазою  $\nu$ .

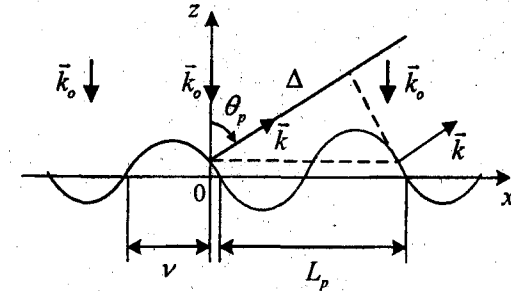


Рис. 19.10

Кожна точка поверхні є джерелом сферичної хвилі, що розходить. Хвилі, розсіяні різними ділянками поверхні, когерентно складаються. Видно, що в одному і тому ж напрямку  $\theta_p$  хвилі, розсіяні ділянками поверхні, зсунутими одна від одної на період  $L_p, 2L_p, \dots, nL_p$ , будуть мати оптичні різниці ходу  $\Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta$ , де  $\Delta = L_p \sin \theta_p$ . Розсіяне від всіх ділянок поверхні випромінювання буде синфазним, якщо  $\Delta = \pm m\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). У результаті ми приходимо до умови  $L_p \sin \theta_p = \pm m\lambda$ . При  $m = 0$  кут синфазного відбиття збігається із падаючим кутом  $\theta_p = \theta_0 = 0$ . Значенню  $m = 1$  відповідає перша відбита гармоніка з кутами відбиття  $\theta_p = \theta_{1,2} = \mp \arcsin(\lambda/L_p)$  та ін.

У міру зростання  $m$  інтенсивності розсіяних гармонік швидко спадають. Найбільш інтенсивними є гармоніки з  $m = 0$  і  $m = 1$ . У наближенні слабкошорстких неоднорідностей, коли  $k\sigma_\xi \ll 1$  ( $\lambda \gg \sigma_\xi$ ), у розсіяному полі враховуються тільки гармоніки з

$m = 0$  і  $m = 1$ . При цьому кути розсіювання для першої гармоніки  $\theta_p = \theta_{1,2} = \pm \arcsin(\lambda/L_p)$  і залежать від довжини хвилі падаючого випромінювання. Отримане співвідношення фізично означає тільки те, що незважаючи на те, що розсіяне випромінювання формується всією поверхнею, синфазно розсіюють тільки ті точки поверхні, просторове рознесення яких задовольняє умову  $L_p \sin \theta_p = \pm \lambda$ .

2. При тих самих припущеннях, що і в задачі 1, розрахувати методом збурень розподіл інтенсивності розсіяної хвилі для випадкової поверхні виду

$$z(x, y) = \xi(x, y) \sin(\alpha x + \nu) \sin(\beta y + \psi). \quad (1)$$

Тут  $\alpha, \beta$  — сталі величини, що визначають періоди ґратки  $L_{px}$ ,  $L_{py}$  уздовж напрямків  $x$  і  $y$  ( $\alpha = 2\pi/L_{px}$ ,  $\beta = 2\pi/L_{py}$ ). Випадкові величини  $\xi$ ,  $\nu$  і  $\psi$  незалежні, причому  $\nu$  і  $\psi$  рівномірно розподілені в інтервалі  $[-\pi, \pi]$ , а  $\xi(\vec{r})$  — статистично однорідне й ізотропне нормально розподілене поле амплітуд підвищень. Побудувати схематичний графік  $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ .

**Розв'язок.** Використаємо алгоритм і результати обчислень, наведені у задачі 1:

$$z(x, y) \rightarrow B_z(\vec{r}', \vec{r}) \rightarrow S_z(\vec{q}_\perp) \rightarrow \bar{I}_1(\theta, \varphi).$$

Згідно з цією схемою для заданої поверхні  $z(x, y)$  побудуємо спочатку автокореляційну функцію  $B_z(\vec{r}', \vec{r})$ :

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_\xi \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu \times \\ \times \langle \sin(\beta y' + \psi) \sin(\beta y + \psi) \rangle_\psi = \frac{\sigma_\xi^2}{4} e^{-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{l_\xi^2}} \cos(\alpha \rho_x) \cos(\beta \rho_y). \quad (2)$$

За знайденим виглядом  $B_z(\vec{\rho})$  і формулою Вінера-Хінчіна визначимо  $S_z(\vec{q}_\perp)$ :

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} d\vec{\rho} = \\ = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{l_\xi^2}} \cos \alpha \rho_x \cos \beta \rho_y e^{-i(q_x \rho_x + q_y \rho_y)} d\rho_x d\rho_y = \\ = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha \rho_x) e^{-\frac{\rho_x^2}{l_\xi^2} - i q_x \rho_x} d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} \cos \beta \rho_y e^{-\frac{\rho_y^2}{l_\xi^2} - i q_y \rho_y} d\rho_y. \quad (3)$$

Кожен з інтегралів обчислюється аналогічно до того, як це було зроблено у задачі 1. В результаті ми приходимо до такого виразу:

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{32\pi} \left[ e^{-\frac{(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} \right] \left[ e^{-\frac{(q_y + \beta)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_y - \beta)^2 l_\xi^2}{4}} \right]. \quad (4)$$

Згідно з (19.28) значення  $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$  дорівнює

$$\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p) = I_0 \frac{k^4 \sigma_\xi^2 l_\xi^2 \Sigma_0 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p}{8R_p^2} \times \\ \times \left[ e^{-\frac{(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2}{4}} \right] \left[ e^{-\frac{(q_y + \beta)^2 l_\xi^2}{4}} + e^{-\frac{(q_y - \beta)^2 l_\xi^2}{4}} \right]. \quad (5)$$

Зі знайденого виразу видно, що максимуми випромінювання спостерігаються під кутами, для яких виконуються такі рівності:  $q_x = \mp \alpha$ ,  $q_y = \mp \beta$ , тобто

$$\begin{cases} \sin \theta_p \cos \varphi_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\alpha}{k}, \\ \sin \theta_p \sin \varphi_p = \mp \frac{\beta}{k}. \end{cases} \quad (6)$$

Аналіз цієї системи рівнянь засвідчує, що для розглянутої поверхні характерні чотири „викиди” розсіяного випромінювання під кутами  $\theta_p = \theta_{1,2}$ ,  $\varphi_p = \varphi_{1-4}$ , де

$$\begin{cases} \theta_1 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 - \frac{\alpha}{k}\right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}, & \theta_2 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 + \frac{\alpha}{k}\right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}, \\ \varphi_{1,3} = \pm \arctg \left( \frac{\beta}{k \sin \theta_0 + \alpha} \right); & \varphi_{2,4} = \pm \arctg \left( \frac{\beta}{k \sin \theta_0 - \alpha} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Таким чином, для розглянутої поверхні розсіяне випромінювання  $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$  має складну багатопелюсткову структуру, яку схематично зображено на рис. 19.11.

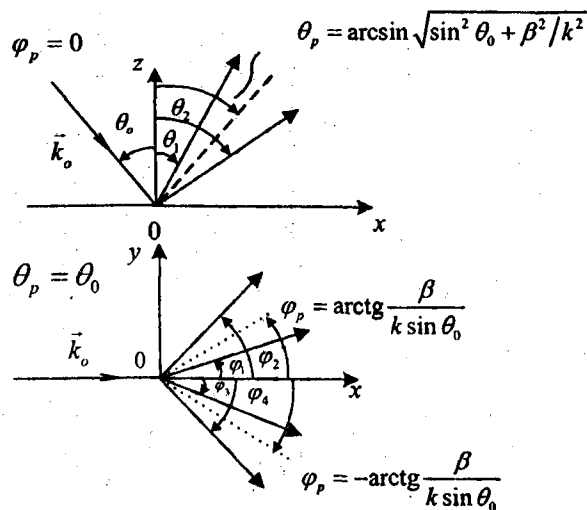


Рис. 19.11

### 3. На поверхню

$$z = \xi(x, y) = \xi,$$

де випадкова величина  $\xi$  рівномірно розподілена в інтервалі  $(-\xi_0, \xi_0]$ , під кутом  $\theta_0$  падає плоска монохроматична хвиля. Розрахувати та навести схематичний розподіл середньої інтенсивності розсіяного випромінювання за напрямками.

**Відповідь:**

$$\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle \sim \delta(q_x) \cdot \delta(q_y),$$

де

$$q_x = k(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0),$$

$$q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p.$$

Залежність середньої інтенсивності розсіяного випромінювання за напрямками показано на рис. 19.12.

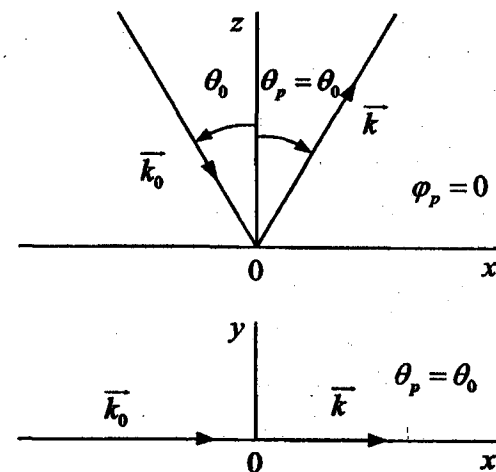


Рис. 19.12

4. Розрахувати та навести схематичний розподіл індикатриси розсіювання випромінювання для слабкошорсткої випадкової поверхні з кореляційною функцією нерівностей вигляду

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \sigma_{\xi}^2 \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{a^2} - \frac{\rho_y^2}{b^2} \right\}.$$

Вважаючи підвищення поверхні  $\xi(\vec{r})$  малими, знайти характерні розміри індикатриси розсіювання  $\Delta\theta_p$  та  $\Delta\varphi_p$  за рівнем  $e^{-1}$  при умові  $|\theta_p - \theta_0| \ll 1$ .

**Відповідь:**

$$F(\theta_p, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \left[ a^2 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + b^2 \sin^2 \theta_p \sin^2 \varphi_p \right] \right\},$$

$$\Delta\theta_p \approx \frac{2}{ka \cos \theta_0}, \quad \Delta\varphi_p \approx \frac{2}{kb \sin \theta_0}.$$

Схематичне зображення індикатриси розсіювання наведено на рис. 19.13 а, б (у випадку дрібних нерівностей:  $kl_{\xi} \ll 1$ ) та рис. 19.14 а, б (у випадку довгих пологих нерівностей:  $kl_{\xi} \gg 1$ ).

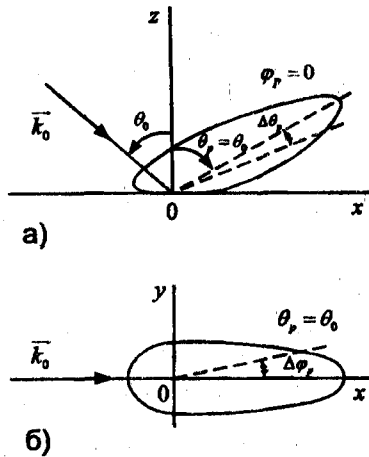


Рис. 19.13

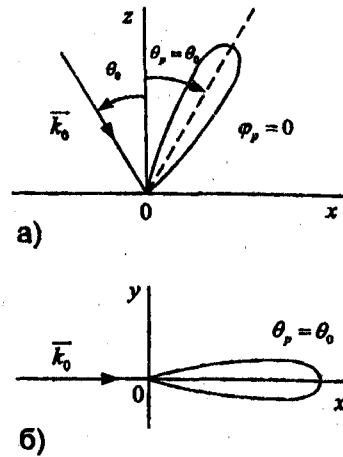


Рис. 19.14

## § 20. Розсіювання на поверхні з великими нерівностями (метод Кірхгофа)

Наведені наприкінці попереднього параграфа нерівності (19.47) і (19.50) обмежують область застосування отриманих за допомогою теорії збурень результатів або малими нерівностями, або достатньо довгими хвилями. У цьому ж розділі ми розглянемо протилежний граничний випадок, коли розміри нерівностей можуть бути настільки завгодно великими порівняно з довжиною хвилі випромінювання, що падає на поверхню. Фактично мова йтиметься про наближення фізичної оптики у задачі відбиття (розсіювання) хвиль від неплоскої (криволінійної) границі поділу двох середовищ.

### 20.1. Граничні умови

Так само, як і в §19, будемо розв'язувати задачу розсіювання скалярного поля  $U$  на нерівностях в середньому плоскій поверхні  $\Sigma(\vec{R})$ , з якою ми сумістимо площину  $z=0$  декартової системи координат  $XYZ$  (рис. 20.1). Для визначення вигляду граничних умов проведемо спочатку деякі допоміжні перетворення. Так, у довільній точці  $\vec{R}=(x, y, z)$  поверхні  $\Sigma(\vec{R})$  проведемо дотичну площину  $\Sigma'$  і розташуємо у точці дотику  $O'$  початок нової штрихованої декартової системи координат  $X'Y'Z'$ . Вісь  $O'Z'$  спрямуємо вздовж вектора нормалі  $\vec{N}$  до поверхні  $\Sigma(\vec{R})$  (див. рис. 20.1). У побудованій таким чином системі координат  $X'Y'Z'$  рівняння дотичної площини  $\Sigma'$  визначається як  $z'=0$ , а радіус-вектор має компоненти  $\vec{R}'=(x', y', z')$ . Шукане поле  $U(\vec{R}')$  у невеликому околі точки  $O'$ , як і в попередньому параграфі, подамо

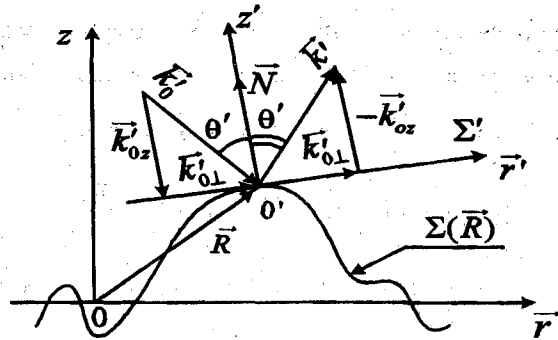


Рис. 20.1

у вигляді суми заданого падаючого  $U_{nad}(\vec{R}')$  і відбитого  $U_{відб}(\vec{R}')$  полів:  $U(\vec{R}') = U_{nad}(\vec{R}') + U_{відб}(\vec{R}')$ . При цьому, природно, припускається, що, по-перше, точка  $O'$  не затінена іншими ділянками поверхні стосовно падаючого випромінювання, а по-друге, що до неї, крім  $U_{nad}$ , не надходять жодні інші хвилі, які вже відбилися від інших ділянок поверхні. Іншими словами, ми припускати, що затінення поверхні і багаторазові відбиття від неї не відіграють суттєвої ролі, і ними можна знехтувати. Очевидно, що виконання цих вимог можливе тільки для достатньо пологих нерівностей ( $\sigma_\xi/l_\xi \ll 1$ ) і при не надто ковзному опроміненні ( $\Psi_0 \gg \sigma_\xi/l_\xi$ ).

Припустимо далі, що довжина хвилі  $\lambda$  випромінювання, що падає на поверхню  $\Sigma(\vec{R})$ , достатньо мала, і розміри першої зони Френеля поблизу  $\Sigma(\vec{R})$  набагато менші за характерні масштаби зміни  $\Sigma(\vec{R})$  у всіх напрямках (такими можуть, наприклад,

виступати радіуси кривизни поверхні). У цьому разі у малому околі точки  $O'$  можна наближено вважати, що, по-перше, поле падаючої хвилі  $U_{nad}(\vec{R}')$  є плоскою (квазіплоскою) хвилею:

$$U_{nad}(\vec{R}') = A(\vec{R}') e^{i\vec{k}_0' \vec{R}'} = A(\vec{R}') e^{i(\vec{k}_{0\perp}' \vec{r}' + k_{0z}' z')}, \quad (20.1)$$

де  $A(\vec{R}')$  — повільно змінна (порівняно з експоненційним множителем) амплітуда падаючого випромінювання,  $\vec{k}_0'$  — хвильовий вектор падаючої хвилі, що має відповідно тангенціальну —  $(\vec{k}_{0\perp}')$  і нормальну  $(\vec{k}_{0z}' = k_{0z}' \vec{e}_z')$  складові:  $\vec{k}_0' = \vec{k}_{0\perp}' + \vec{k}_{0z}'$  (залежний від часу множник  $e^{-i\omega t}$ , як завжди, опускається). По-друге, процес відбиття  $U_{відб}(\vec{R}')$  від істинної криволінійної поверхні  $\Sigma(\vec{R})$  можна розглядати як відбиття від дотичної площини  $\Sigma'$  ( $z' = 0$ ). При цьому відбите від площини  $z' = 0$  за законами геометричної оптики хвильове поле  $U_{відб}(\vec{R}')$  також є плоскою (квазіплоскою) хвилею, амплітуда якої відрізняється від  $A(\vec{R}')$  на множник  $R$ , що називається коефіцієнтом відбиття, а хвильовий вектор  $\vec{k}_{відб}' = (\vec{k}_{\perp \text{ відб}}', \vec{k}_{z \text{ відб}}')$ , має такі компоненти: тангенціальна (дотична до поверхні  $\Sigma'$ , тобто така, що лежить у площині  $z' = 0$ ) компонента зберігається, а нормальна (спрямована вздовж осі  $O'Z'$ ) змінює знак на протилежний ( $\vec{k}_{z \text{ відб}}' = -\vec{k}_{0z}'$ ):

$$U_{відб}(\vec{R}') = R A(\vec{R}') e^{i\vec{k}_{відб}' \vec{R}'} = R A(\vec{R}') e^{i(\vec{k}_{0\perp}' \vec{r}' - k_{0z}' z')}. \quad (20.2)$$

Виконані спрощення дають змогу виразити значення повного поля  $U(\vec{R}') = U_{nad}(\vec{R}') + U_{sidb}(\vec{R}')$  на дотичній площині  $z' = 0$  через задане поле  $U_{nad}(\vec{R}')$ , що падає на поверхню. Так, із формул (20.1) і (20.2) отримаємо такі співвідношення:

$$U(\vec{R}')_{z'=0} = [U_{nad}(\vec{R}') + U_{sidb}(\vec{R}')]_{z'=0} = (1 + \mathcal{R})U_{nad}(\vec{R}')_{z'=0}. \quad (20.3 \text{ а})$$

Аналогічно обчислюємо і значення нормальної похідної:

$$\left. \frac{\partial U(\vec{R}')}{\partial N} \right|_{z'=0} = \frac{\partial}{\partial z'} [U_{nad}(\vec{R}') + U_{sidb}(\vec{R}')]_{z'=0} = (1 - \mathcal{R}) \frac{\partial}{\partial z'} U_{nad}(\vec{R}')_{z'=0} \quad (20.3 \text{ б})$$

(при виведенні цієї формули амплітуду  $A(\vec{R}')$  можна наближено вважати сталою величиною у малому околі точки  $O'$  і знехтувати похідною від неї за  $\partial z'$ ).

Повертаючись тепер до старої (нештрихованої) системи координат  $XYZ$ , ми можемо записати

$$U(\vec{R})|_{\Sigma} = [U_{nad}(\vec{R}) + U_{sidb}(\vec{R})]_{\Sigma} = (1 + \mathcal{R})U_{nad}(\vec{R})|_{\Sigma}, \quad (20.4 \text{ а})$$

$$\left. \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right|_{\Sigma} = \frac{\partial}{\partial N} [U_{nad}(\vec{R}) + U_{sidb}(\vec{R})]_{\Sigma} = (1 - \mathcal{R}) \frac{\partial}{\partial N} U_{nad}(\vec{R})|_{\Sigma}. \quad (20.4 \text{ б})$$

Слід зазначити, що знайдений зв'язок між полями і їх нормальними похідними є точним для плоскої хвилі, що падає на плоску межу поділу, і наближено справджується для локально плоскої хвилі (20.1), що падає на локально плоску поверхню  $\Sigma$ , тобто на поверхню з плавними неоднорідностями.

## 20.2. Побудова наближеного динамічного розв'язку

Формули (20.4) визначають значення поля  $U$  і його нормальної похідної  $\partial U / \partial N$  у кожній точці  $\vec{R}$  поверхні  $\Sigma(\vec{R})$ , і для знаходження поля  $U$  в довільній точці спостереження  $\vec{R}_p$  можна скористатися формулою Гріна (17.8). Для цього доповнимо розсіюючу нерівну поверхню  $\Sigma(\vec{R})$  до замкнутої поверхні (див. рис. 20.2) за допомогою півсфери  $C_a$  (достатньо великого радіуса  $a$  і з центром у точці початку координат  $O$ ) і плоскими ділянками  $\Sigma_{nl}$  (від межі  $\Sigma$  в площині  $z = 0$  до кола радіусом  $a$ ). Тоді згідно з (17.8) маємо:

$$U(\vec{R}_p) = \int_V G(\vec{R}, \vec{R}_p) Q(\vec{R}) d\vec{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a} \left[ U(\vec{R}) \frac{\partial G(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial N} - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma. \quad (20.5)$$

Тут нормаль  $\vec{N}$  спрямована всередину замкнутої поверхні, з цим і пов'язана відмінність знаків перед другим інтегралом у (20.5) і (17.8). У першому доданку інтегрування проводиться за об'ємом  $V$ , обмеженим поверхнею  $\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a$ .

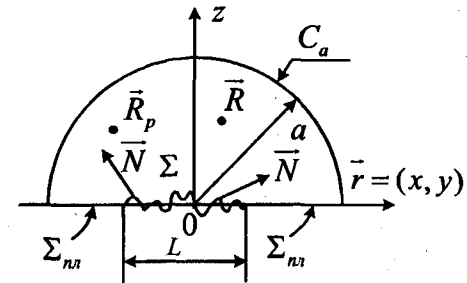


Рис. 20.2



Якщо як функцію  $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$  взяти функцію Гріна необмеженого (вільного) простору

$$G(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|}, \quad (20.6)$$

то об'ємний інтеграл у (20.5) описує поле заданих джерел  $Q(\vec{R})$  у вільному просторі (за відсутності відбиваючої поверхні  $\Sigma$ ), тобто дає поле падаючої хвилі:

$$U_{nad}(\vec{R}_p) = \int_V \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} Q(\vec{R}) d\vec{R}, \quad (20.7)$$

а поверхневий інтеграл описує розсіювання цього поля на поверхні.

Якщо у поверхневому інтегралі в (20.5) замість повного поля  $U$  підставити тільки поле падаючої хвилі  $U_{nad}$ , то цей інтеграл тотожно перетвориться у нуль:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a} \left[ U_{nad}(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} - \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial U_{nad}(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma \equiv 0. \quad (20.8)$$

Для доведення цього твердження розглянемо безмежний простір із заданим розподілом джерел  $Q(\vec{R})$  і проведемо у ньому уявну поверхню, що збігається з замкнутою поверхнею  $\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a$ . Формула Гріна (20.5) буде справджуватися й у цьому випадку. Для функції Гріна  $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ , що відповідає безмежному просторові,

об'ємний інтеграл визначає поле падаючої хвилі  $U_{nad}$ . Повне ж поле  $U$ , що стоїть у лівій частині рівності (20.5), також має збігатися з  $U_{nad}$  ( $U = U_{nad}$ ) (інших полів, окрім  $U_{nad}$ , у просторі немає). В результаті формула Гріна (20.5) набуває вигляду

$$U_{nad}(\vec{R}_p) = U_{nad}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a} \left[ U_{nad}(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} - \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial U_{nad}(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma.$$

Ця рівність може задовольнятися тільки при виконанні умови (20.8). Таким чином, заміна повного поля  $U$  на поле падаючої хвилі  $U_{nad}$  у кожній точці поверхні  $\Sigma+\Sigma_{nl}+C_a$  означає відсутність будь-якої реальної фізичної поверхні взагалі, бо на реальній поверхні обов'язково виникають відбиті хвилі, і повне поле  $U$  відрізняється від поля  $U_{nad}$  вільного простору.

Віднімемо тепер від правої частини (20.5) вираз (20.8). Ліва частина формули (20.5) при цьому не повинна змінитися, оскільки величина, що віднімається, дорівнює нулю:

$$U(\vec{R}_p) = U_{nad}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma+\Sigma_{nl}+C} d\Sigma \left\{ [U(\vec{R}) - U_{nad}(\vec{R})] \frac{\partial}{\partial N} G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial}{\partial N} [U(\vec{R}) - U_{nad}(\vec{R})] \right\}. \quad (20.9)$$

Так само, як і у методі фазового екрана (див. (17.9)), спрямуємо радіус півсфери  $a$  у нескінченність ( $a \rightarrow \infty$ ). При

цьому інтеграл за  $C_a$  зникає (в силу принципу випромінювання). Крім цього, на уявній поверхні  $\Sigma_{nl}$  повне поле  $U$  замінимо полем падаючої хвилі  $U_{nad}$ , нехтуючи розсіяними на реальній поверхні  $\Sigma$  хвилями. Цей прийом був застосований ще Кірхгофом при розв'язуванні задач дифракції на плоских екранах: припускалося, що поле на поверхні, котра доповнює екран до повної площини, є таким самим, яким воно було б і за відсутності екрана, тобто збігається із полем падаючої хвилі  $U_{nad}$ . Звідси походить ще одна часто вживана назва методу розрахунку розсіяного на нерівній поверхні поля – **метод Кірхгофа**. Після заміни  $U$  на  $U_{nad}$  на  $\Sigma_{nl}$  інтеграл за поверхнею перетворюється на нуль (за рахунок того, що підінтегральний вираз дорівнює нулю). На реальній поверхні  $\Sigma$  скористаємося формулами (20.4), що пов'язуються  $U$  і  $\partial U / \partial N$  з полем падаючої хвилі. В результаті формула (20.9) набуває такого вигляду:

$$U(\vec{R}_p) = U_{nad}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ \mathcal{R} \frac{\partial}{\partial N} [U_{nad}(\vec{R}) G(\vec{R}, \vec{R}_p)] \right\} d\Sigma. \quad (20.10)$$

Формула (20.10) розв'язує (звичайно, наближено) „динамічну” частину задачі, подаючи розсіяне на нерівній поверхні хвильове поле у вигляді інтеграла від відомих функцій. Якщо поверхня  $\Sigma$  є випадковою, поле  $U(\vec{R}_p)$  також виявляється випадковим, і для його опису необхідний статистичний підхід. Далі ми обмежимося обчисленням перших двох моментів поля  $U$  – когерентної складової  $\langle U \rangle$  (середнього поля) та середньої інтенсивності  $\langle I \rangle = \langle |U|^2 \rangle$ . Перед тим, як обчислювати

вказані статистичні моменти поля  $U$ , приймемо низку припущень для спрощення.

1. Як  $Q(\vec{R})$  розглянемо точкове одиничне джерело, розташоване у точці  $\vec{R}_s$ :

$$Q(\vec{R}) = \delta(\vec{R} - \vec{R}_s), \quad (20.11)$$

яке породжує  $U_{nad}$  у вигляді сферичної хвилі, що розходить:

$$U_{nad}(\vec{R}) = \frac{e^{ik|\vec{R} - \vec{R}_s|}}{|\vec{R} - \vec{R}_s|}. \quad (20.12)$$

Ця формула випливає з (20.7) після підстановки у неї (20.11) і виконання інтегрування за об'ємом за допомогою  $\delta$ -функції.

2. Коефіцієнт відбиття  $\mathcal{R}$  наближено вважатимемо сталою величиною в усіх точках поверхні  $\Sigma$ , що дає змогу винести його за знак інтеграла у формулі (20.10). Підставляючи (20.6) і (20.12) у (20.10), для розсіяного поля  $U_{roz}(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p) - U_{nad}(\vec{R}_p)$  отримуємо

$$U_{roz}(\vec{R}_p) = \frac{\mathcal{R}}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik(|\vec{R}_p - \vec{R}| + |\vec{R}_s - \vec{R}|)}}{|\vec{R}_p - \vec{R}| |\vec{R}_s - \vec{R}|} d\Sigma. \quad (20.13)$$

3. Якщо джерело поля  $\vec{R}_s$  і точка спостереження  $\vec{R}_p$  знаходяться достатньо далеко від розсіюючої поверхні  $\Sigma$  (в зоні Фраунгофера), і виконуються нерівності

$$\frac{L}{R_p}, \frac{kL^2}{R_p} \ll 1; \quad \frac{L}{R_s}, \frac{kL^2}{R_s} \ll 1, \quad (20.14)$$

(тут, як і в попередньому параграфі, через  $L$  позначено лінійний розмір розсіюючої поверхні у площині  $z=0$  (див. рис. 20.2)), то відстані  $|\vec{R}_p - \vec{R}|$  і  $|\vec{R}_s - \vec{R}|$  можуть бути розкладені в ряд Тейлора за малими величинами  $R/R_s, R/R_p \ll 1$ :

$$|\vec{R}_p - \vec{R}| \approx R_p - \frac{\vec{R}_p \vec{R}}{R_p}, \quad |\vec{R}_s - \vec{R}| \approx R_s - \frac{\vec{R}_s \vec{R}}{R_s}.$$

При цьому формула (20.13) суттєво спрощується:

$$U_{роз}(\vec{R}_p) \approx \frac{R}{4\pi R_p R_s} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial N} e^{-i\vec{q} \vec{R}} d\Sigma. \quad (20.15)$$

Тут  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$  — вектор розсіювання ( $\vec{k} = k\vec{R}_p/R_p$  — хвильовий вектор розсіяного поля у точці спостереження,  $\vec{k}_0 = -k\vec{R}_s/R_s$  — хвильовий вектор падаючої хвилі поблизу поверхні  $\Sigma$ ).

4. Радіус-вектор  $\vec{R}$  точок, що належать поверхні  $\Sigma$ , можна записати у вигляді суми двох ортогональних векторів (рис. 20.3):

$$\vec{R} = \vec{r} + \xi(\vec{r}) \vec{e}_z, \quad (20.16)$$

де  $\vec{r} = (x, y)$  — проекція  $\vec{R}$  на площину  $z=0$ , а  $\xi(\vec{r})$  — випадкова функція, що описує відхилення поверхні  $\Sigma$  від середньої площини. Похідна за нормаллю  $N$  у формулі (20.15) легко обчислюється за відомим правилом обчислення похідної уздовж заданого напрямку:

$$\frac{\partial}{\partial N} e^{-i\vec{q} \vec{R}} = (\vec{N} \vec{\nabla}_{\vec{R}}) e^{-i\vec{q} \vec{R}} = -i(\vec{N} \vec{q}) e^{-i\vec{q} \vec{R}}. \quad (20.17)$$

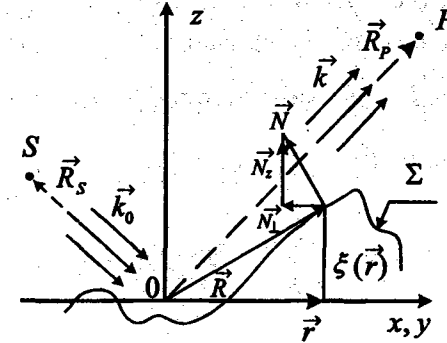


Рис. 20.3

Одиничний вектор нормалі  $\vec{N}$  до поверхні  $\Sigma$  у змінній точці має компоненти  $\vec{N} = (\vec{N}_{\perp}, \vec{N}_z)$ , де

$$\vec{N}_{\perp} = -\frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad \vec{N}_z = \frac{\vec{e}_z}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad (20.18)$$

а  $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \xi(\vec{r})$  — векторне поле градієнтів підвищень  $\xi(\vec{r})$  випадкової поверхні  $\Sigma$ .

5. Нарешті, у формулі (20.15) перейдемо від інтегрування за криволінійною поверхнею  $\Sigma$  до інтегрування за її проекцією  $\Sigma_0$  на площину  $z=0$  (див. рис. 20.4):

$$d\Sigma = \frac{d\Sigma_0}{N_z} = \frac{d\vec{r}}{N_z}. \quad (20.19)$$

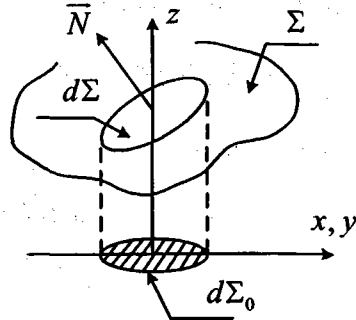


Рис. 20.4

Після пророблених спрощень для розсіяного поля у дальній зоні отримаємо

$$U_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \approx \frac{R}{4\pi i R_s R_p} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} [q_z - \bar{q}_\perp \bar{\gamma}(\vec{r})] e^{-i[\bar{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})]} d\vec{r}, \quad (20.20)$$

де  $\bar{q}_\perp = (q_x, q_y)$  — проекція вектора  $\vec{q}$  на площину  $z = 0$ .

6. При розсіюванні коротких хвиль на високих нерівностях спостерігаються великі флуктуації фази у показнику експоненти, що у свою чергу призводить до швидких осциляцій підінтегральної функції у (20.20). У цьому випадку при оцінці інтеграла можна скористатися методом стаціонарної фази (див. §19). Роль випадкової фази у (20.20) відіграє величина  $S(\vec{r}) = \bar{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})$ , що описує додатковий набіг фази у кожній точці (екрана)  $\vec{r}$  за рахунок відхилення поверхні  $\Sigma$  від площини  $z = 0$  на величину

$\xi(\vec{r})$ . У короткохвильовому наближенні основний внесок у інтеграл (20.20) дають точки, де функція  $S(\vec{r})$  досягає екстремуму:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} S(\vec{r}) = \bar{q}_\perp + q_z \vec{\gamma}(\vec{r}) = 0. \quad (20.21)$$

Припустимо, що векторне рівняння (абераційне) має дійсні корені  $\vec{r} = \vec{r}_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Згідно з (20.21) у точках стаціонарності фази нахили поверхні  $\vec{\gamma}(\vec{r})$  мають одне і те саме незалежне від  $m$  значення:

$$\vec{\gamma}(\vec{r} = \vec{r}_m) = -\frac{\bar{q}_\perp}{q_z}. \quad (20.22)$$

Звідси випливає, що і вектор нормалі  $\vec{N}$ , проведений до поверхні у точках  $\vec{r} = \vec{r}_m$ , також не залежить від  $m$ . Дійсно, згідно з (20.18) маємо:

$$\vec{N}(\vec{r}_m) = \frac{-\vec{\gamma}(\vec{r}_m) + \vec{e}_z}{\sqrt{1 + \gamma^2(\vec{r}_m)}} = \frac{\bar{q}_\perp + q_z \vec{e}_z}{\sqrt{q_\perp^2 + q_z^2}} = \frac{\vec{q}}{q}. \quad (20.23)$$

Видно, що нормалі  $\vec{N}(\vec{r}_m)$  спрямовані вздовж фіксованого вектора розсіювання  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$  для всіх без винятку стаціонарних точок. У свою чергу вектор  $\vec{q}$  спрямований за бісектрисою кута між  $\vec{k}_0$  і  $\vec{k}$ . Звідси випливає, що нормаль  $\vec{N}$  у точках стаціонарної фази  $\vec{r} = \vec{r}_m$ , як видно з рис. 20.5, утворює рівні кути  $\theta'$  з хвильовими векторами  $\vec{k}_0$  і  $\vec{k}$ .

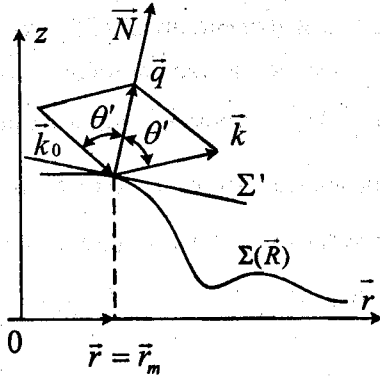


Рис. 20.5

Таким чином, нормаль  $\vec{N}$  у стаціонарних точках спрямована так, що падаюча хвиля (з хвильовим вектором  $\vec{k}_0$ ) дзеркально відбивається від дотичної площини ( $z' = 0$ ) у напрямку  $\vec{k}$ , тобто у точку спостереження. Отже, точки стаціонарної фази підінтегрального виразу (20.20) є дзеркальними точками, які й чинять головний вплив на поле  $U_{\text{роз}}$ , розсіяне у заданому напрямку  $\vec{k}$ .

Згідно з методом стаціонарної фази, передекспоненційний множник у (20.20) виводиться за знак інтеграла у точках  $\vec{r} = \vec{r}_m$ :

$$[q_z - \vec{q}_\perp \vec{\gamma}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_m} = q_z + \frac{q_\perp^2}{q_z} = \frac{q^2}{q_z}, \quad (20.24)$$

після чого формула (20.20) подається у вигляді

$$U_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \approx \frac{\mathbb{R}}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} e^{-i[\vec{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})]}. \quad (20.25)$$

Зауважимо, що при отриманні (20.25) ми використали метод стаціонарної фази тільки частково, винісши передекспоненційний множник  $q_z - \vec{q}_\perp \vec{\gamma}(\vec{r})$  у точках стаціонарної фази за знак інтеграла, але не розкладаючи фазу  $S(\vec{r}) = \vec{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})$  у ряд Тейлора у точках екстремуму і не підсумовуючи внески від усіх точок  $\vec{r} = \vec{r}_m$ .

### 20.3. Середнє розсіяне поле

У формулу (20.25) у явному вигляді входить тільки випадкове поле підвищень  $\xi(\vec{r})$ . Враховуючи це, запишемо вираз для середнього розсіяного поля у точці спостереження:

$$\langle U_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{\mathbb{R}}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{r}} \langle e^{-iq_z \xi(\vec{r})} \rangle. \quad (20.26)$$

Для спрощення задачі вважатимемо, що  $\xi(\vec{r})$  є нормальним (гауссовим) просторово однорідним („стаціонарним” за просторовими змінними) випадковим полем. У цьому випадку маємо

$$\langle e^{-iq_z \xi(\vec{r})} \rangle = e^{-\frac{1}{2} q_z^2 \sigma_\xi^2},$$

де  $\sigma_\xi^2 = \langle \xi^2 \rangle = \text{Const}$  і враховано, що  $\langle \xi \rangle = 0$ .

У результаті вираз (20.26) приводиться до вигляду

$$\langle U_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \rangle = \mathbb{R}_{\text{ef}} U_d(\vec{R}_p). \quad (20.27)$$

Тут

$$U_d(\bar{R}_p) = \frac{1}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_1 \bar{r}} \quad (20.28)$$

поле у точці спостереження, що виникає у дальній зоні при відбитті від ідеально відбиваючої ( $R=1$ ) плоскої поверхні  $\Sigma_0$ , а

$$R_{ef} = R e^{-\frac{1}{2} q_z^2 \sigma_\xi^2} \quad (20.29)$$

ефективний коефіцієнт відбиття середнього поля.

Якщо лінійні розміри відбиваючої поверхні  $\Sigma_0$  у всіх напрямках (у площині  $z=0$ ) достатньо великі порівняно з довжиною хвилі, то інтеграл (20.28) відмінний від нуля тільки у напрямку дзеркального відбиття ( $\bar{q}_\perp = 0$ ) від середньої площини  $z=0$ . Справді,

$$\lim_{k^2 \Sigma_0 \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_1 \bar{r}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_1 \bar{r}} = (2\pi)^2 \delta(\bar{q}_\perp). \quad (20.30)$$

Таким чином, і середнє розсіяне поле  $\langle U_{роз} \rangle$  виявляється відмінним від нуля тільки у напрямку дзеркального відбиття від середньої площини  $z=0$ , причому коефіцієнт відбиття  $R_{ef}$  відрізняється від коефіцієнта відбиття від плоскої поверхні  $R$  тим самим експоненціальним множником, який виникає при дифракції на хаотичному фазовому екрані (17.60)).

Враховуючи, що у напрямку дзеркального відбиття  $\bar{q}_\perp = 0$ , а  $q_z = 2k \cos \theta_0$ , формулу (20.29) можна переписати у такому вигляді:

$$R_{ef} = R e^{-P^2/2}, \quad (20.31)$$

де  $P = 2k \sigma_\xi \cos \theta_0$  — введений раніше параметр Релея.

## 20.4. Середня інтенсивність

Так само, як і під час розгляду середнього поля, при обчисленні середньої інтенсивності  $\langle I_{роз} \rangle = \langle |U_{роз}|^2 \rangle$  обмежимося тільки випадком великих значень параметра Релея ( $P \gg 1$ ), маючи на увазі, що протилежний граничний випадок ( $P \ll 1$ ) був докладно вивчений у попередньому параграфі методом малих збурень. Великим значенням параметра Релея відповідає розсіювання коротких хвиль на високих нерівностях. Згідно з (20.25) обчислення другого моменту поля зводиться до усереднення подвійного інтеграла за поверхнею  $\Sigma_0$  (тобто чотирикратного інтеграла):

$$\langle I_{роз}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|R|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} \int_{\Sigma_0} d\bar{r}' e^{-i\bar{q}_1(\bar{r}-\bar{r}')} \langle e^{-iq_z[\xi(\bar{r})-\xi(\bar{r}')] } \rangle. \quad (20.32)$$

Якщо випадкове поле відхилень поверхні  $\xi(\bar{r})$  статистично однорідне і нормально розподілене, то усереднення під знаком інтеграла призводить до такого результату (див. (17.62)):

$$\langle e^{-iq_z[\xi(\bar{r}')-\xi(\bar{r}'')] } \rangle = e^{-\frac{1}{2} q_z^2 D_\xi(\bar{r}'-\bar{r}'')}, \quad (20.33 \text{ а})$$

де  $D_\xi(\bar{r}', \bar{r}'') = \langle [\xi(\bar{r}') - \xi(\bar{r}'')]^2 \rangle = 2\sigma_\xi^2 - 2B_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'') = 2\sigma_\xi^2 [1 - K_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'')] -$  структурна функція нерівностей, що легко виражається через автокореляційну функцію  $B_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'')$  або коефіцієнт кореляції  $K_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'') = B_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'') / \sigma_\xi^2$ . Для ізотропного поля флуктуацій підвищень  $D_s(\bar{r}' - \bar{r}'') = D_s(|\bar{r}' - \bar{r}''|) = D_s(\rho)$  і у короткохвильово-

вому наближенні ( $q_z^2 \sigma_\xi^2 \gg 1$ ) аналогічно до (17.68) можна скористатися спрощенням

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}q_z^2 D_\xi(\rho)\right\} \approx \exp\left\{-\frac{q_z^2 \sigma_\xi^2}{2l_\xi^2} \rho^2\right\}. \quad (20.33 \text{ б})$$

Тут  $\bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}''$ , а  $l_\xi = \left[-\frac{d^2 K''(\rho)}{d\rho^2}\right]_{\rho=0}^{-1/2}$  — характерний масштаб

спадання (горизонтальний розмір неоднорідностей) коефіцієнта кореляції.

Перейдемо тепер у (20.32) від інтегрування за  $d\bar{r}', d\bar{r}''$  до нових сумарних  $\bar{r} = (\bar{r}' + \bar{r}'')/2$  і різницевих  $\bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}''$  змінних. Якщо характерний розмір неоднорідностей  $l_\xi$  значно менший за лінійні розміри  $L$  ( $L \gg l_\xi$ ) всієї розсіюючої поверхні  $\Sigma_0$  ( $L \sim \sqrt{\Sigma_0}$ ), то інтегрування за  $\bar{\rho}$  можна провести у нескінченних межах, а область інтегрування за  $d\bar{r}$  буде практично збігатися зі старою —  $\Sigma_0$ . З урахуванням вищевикладеного формула (20.32) набуває вигляду

$$\langle I_{\text{роз}}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} e^{-\frac{q_z^2 \sigma_\xi^2}{2l_\xi^2} \rho^2 - i\bar{q}_1 \bar{\rho}}. \quad (20.34)$$

Ми знову прийшли до результату, коли чотирикратний інтеграл розпався на добуток двох двократних, причому інтеграл за  $d\bar{r}$

дорівнює розсіюючій площі  $\Sigma_0$ , а обчислення інтеграла за  $d\bar{\rho}$  проводилося у параграфі 17 (див. (17.73):

$$\langle I_{\text{роз}}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|\mathcal{R}|^2 \Sigma_0}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \cdot \frac{1}{\pi \sigma_\gamma^2} \cdot e^{-\frac{q_1^2}{q_z^2 \sigma_\gamma^2}}. \quad (20.35)$$

Тут за аналогією з (17.80) враховано зв'язок між дисперсією висот  $\sigma_\xi^2$  випадкового поля підвищень  $\xi(\bar{r})$  і дисперсією ухилів —  $\sigma_\gamma^2$  випадкового поля градієнтів  $\bar{\gamma} = \bar{\nabla}_{\bar{r}} \xi(\bar{r})$ :

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_\xi^2}{l_\xi^2}. \quad (20.36)$$

Розширимо тепер можливості оцінки вихідного інтегрального подання, не накладаючи заздалегідь умов нормальності розподілу висот  $\xi(\bar{r})$ . Для цього перепишемо (20.32) у сумарних і різницевих координатах:

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{роз}}(\bar{R}_p) \rangle \approx & \frac{|\mathcal{R}|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_r} d\bar{r} \int_{\Sigma_\rho} d\bar{\rho} e^{-i\bar{q}_1 \bar{\rho}} \times \\ & \times e^{-iq_z [\xi(\bar{r} + \bar{\rho}/2) - \xi(\bar{r} - \bar{\rho}/2)]}. \end{aligned} \quad (20.37)$$

Тут  $\Sigma_{r,\rho}$  — відповідні області інтегрування за  $d\bar{r}$  і  $d\bar{\rho}$ . Із попереднього розгляду нормального розподілу  $\xi(\bar{r})$  випливало, що у короткохвильовому наближенні основний внесок в інтеграл за  $d\bar{\rho}$  дають тільки невеликі ділянки поверхні, що лежать поблизу

точок, де  $\vec{\rho} = 0$ . Скористаємося цим і розкладемо різницю  $\xi(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \xi(\vec{r} - \vec{\rho}/2)$  у ряд Тейлора у точці  $\vec{\rho} = 0$ . У результаті з точністю до лінійних членів отримаємо (див. (17.70)):

$$\xi(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \xi(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \approx \vec{\nabla}_{\vec{r}} \xi(\vec{r}) \vec{\rho} = \vec{\gamma}(\vec{r}) \vec{\rho}. \quad (20.38)$$

Окрім того, границі інтегрування за  $d\vec{\rho}$  можна поширити на всю нескінченну площину, а  $\Sigma_{\vec{r}}$  практично збігається з вихідною поверхнею  $\Sigma_0$ . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \langle e^{-i[\vec{q}_{\perp} + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] \vec{\rho}} \rangle = \\ &= \frac{|\mathcal{R}|^2}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \langle \delta[\vec{q}_{\perp} + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] \rangle. \end{aligned} \quad (20.39)$$

Усереднення щодо випадкових нахилів  $\vec{\gamma}$  можна виконати звичайним способом, користуючись густиною розподілу ймовірностей  $W_{\gamma}(\vec{\gamma})$ . Якщо  $f(\vec{\gamma})$  є детермінованою функцією випадкового аргумента  $\vec{\gamma}$ , то середнє значення  $\langle f(\vec{\gamma}) \rangle$  обчислюється за формулою

$$\langle f(\vec{\gamma}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\gamma}) W_{\gamma}(\vec{\gamma}) d\vec{\gamma}. \quad (20.40)$$

У результаті усереднена формула (20.39) набуває такого остаточного вигляду:

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{роз}}(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{|\mathcal{R}|^2}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\gamma} \delta[\vec{q}_{\perp} + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] W_{\gamma}(\vec{\gamma}) = \\ &= \frac{|\mathcal{R}|^2 \Sigma_0}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^4} W_{\gamma}\left(-\frac{\vec{q}_{\perp}}{q_z}\right). \end{aligned} \quad (20.41)$$

При обчисленні інтеграла по  $d\vec{\gamma}$  ми скористалися відомою властивістю  $\delta$ -функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(a + bx) dx = \frac{1}{|b|} f\left(-\frac{a}{b}\right).$$

Легко перевірити, що для нормального закону розподілу нахилів

$$W_{\gamma}(\vec{\gamma}) = \frac{1}{\pi \sigma_{\gamma}^2} e^{-r^2/\sigma_{\gamma}^2} \quad (20.42)$$

формула (20.41) точно переходить у раніше знайдену (20.35).

## 20.5. Індикатриса розсіювання

Згідно з (19.31) індикатриса розсіювання  $F(\theta_p, \varphi_p)$  була визначена як відношення середньої інтенсивності, розсіяної у довільному напрямку  $\vec{k}$ , до середньої інтенсивності, розсіяної у дзеркальному напрямку ( $\vec{q}_{\perp} = 0$ ):

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_p(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_p(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot \frac{W_{\gamma}(-\vec{q}_{\perp}/q_z)}{W_{\gamma}(0)}. \quad (20.43)$$

Для кількісних оцінок розглянемо нормальний закон розподілу (20.42), для якого формула (20.43) набуває конкретного вигляду



$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot e^{-\frac{q_1^2}{q_z^2 \sigma_\gamma^2}} \quad (20.44)$$

Скориставшись значенням проекцій вектора  $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ , записаних у сферичних координатах (див.(19.32)), отримаємо

$$F(\theta_p, \varphi_p) = 4 \frac{(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \exp \left\{ -\frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\} \quad (20.45)$$

Для пологих неоднорідностей, коли  $\sigma_\gamma^2 \ll 1$ , можна знехтувати повільною змінною за кутами  $\theta_p$  і  $\varphi_p$  передекспоненційного множника у (20.45) і вважати, що ширина індикатриси розсіювання визначається в основному показником степеня експоненти, тобто тією ділянкою кутів  $(\theta_p, \varphi_p)$ , у якій показник степеня експоненти у (20.45) не перевищує одиниці (за порядком величини):

$$\frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \leq 1. \quad (20.46)$$

Так само, як і в попередньому параграфі, оцінимо спочатку ширину індикатриси у площині падіння. Вважаючи у (20.46)  $\varphi_p = 0$ , отримуємо

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \leq 1.$$

При  $\sigma_\gamma^2 \ll 1$  ця нерівність може виконуватися тільки для кутів  $\theta_p$ , що відрізняються від  $\theta_0$  на малу величину  $\Delta \theta_p$ . Поклавши  $\theta_p = \theta_0 + \Delta \theta_p$ , з точністю до лінійних доданків за  $\Delta \theta_p$ , маємо  $\sin \theta_p - \sin \theta_0 = \sin(\theta_0 + \Delta \theta_p) - \sin \theta_0 \approx \Delta \theta_p \cos \theta_0$ ,  $\cos \theta_p + \cos \theta_0 \approx 2 \cos \theta_0$ . При цьому показник степеня наближено подається у вигляді

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \approx \frac{(\Delta \theta_p)^2}{4 \sigma_\gamma^2}. \quad (20.47)$$

Передекспоненційний множник у (20.45) можна наближено визначити для фіксованих значень кутів  $\theta_p = \theta_0$ ,  $\varphi_p = 0$ , що відповідають максимальному значенню експоненти:

$$4 \frac{(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \bigg|_{\substack{\theta_p = \theta_0 \\ \varphi_p = 0}} = 1. \quad (20.48)$$

У результаті для індикатриси розсіювання у площині падіння отримуємо таке наближене подання:

$$F(\theta_p, 0) \approx e^{-\frac{(\Delta \theta_p)^2}{4 \sigma_\gamma^2}}. \quad (20.49)$$

Видно, що максимум індикатриси припадає на напрямок дзеркального відбиття від середньої площини ( $\Delta \theta_p = 0, \varphi_p = 0$ ), а залежність  $F(\theta_p, 0)$  в околі  $\theta_0$  має вигляд гауссової кривої з характерною шириною

$$\Delta \theta_p = 2 \sigma_\gamma. \quad (20.50)$$

Для оцінки ширини  $F(\theta_p, \varphi_p)$  за кутом  $\varphi_p$  (у площині, перпендикулярній до площини падіння —  $XOZ$ ) покладемо у показнику степеня експоненти у (20.45)  $\theta_p = \theta_0$ , а  $\cos \varphi_p$  представимо у вигляді  $\cos \varphi_p \approx 1 - \varphi_p^2/2$ . При цьому формула (20.45) в околі напрямку дзеркального відбиття ( $\theta_p = \theta_0$ ,  $\varphi_p \ll 1$ ) набуває вигляду

$$F(\theta_0, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{\varphi_p^2}{4\sigma_\gamma^2 \text{ctg}^2 \theta_0} \right\}. \quad (20.51)$$

Звідси видно, що характерна ширина індикатрисы розсіювання за кутами  $\varphi_p$  дорівнює

$$\Delta \varphi_p = 2\sigma_\gamma \text{ctg} \theta_0. \quad (20.52)$$

### Висновки

Із формул (20.49) і (20.51) випливає, що індикатриса розсіювання при  $\sigma_\gamma^2 \ll 1$  має різкий максимум у напрямку дзеркального відбиття ( $\theta_p = \theta_0$ ,  $\varphi_p = 0$ ) від середньої площини. Залежність  $F(\theta_p, \varphi_p)$  в околі максимуму має вигляд гауссової кривої. Характерні „розміри”  $F(\theta_p, \varphi_p)$  за кутами  $\theta_p$  і  $\varphi_p$ , дорівнюють  $\Delta \theta_p = 2\sigma_\gamma$ ,  $\Delta \varphi_p = 2\sigma_\gamma \text{ctg} \theta_0$  і визначаються дисперсією кутів нахилу нерівностей поверхні —  $\sigma_\gamma^2$ .

Формули (20.50) і (20.52) дають змогу дійти важливого у практичному відношенні висновку про те, що при ковзному

поширенні ( $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ ) ширина індикатрисы розсіювання у горизонтальній площині (за азимутом) може бути у багато разів меншою за ширину у вертикальній площині. Дійсно, згідно з (20.50) і (20.52) маємо:

$$\frac{\Delta \varphi_p}{\Delta \theta_p} = \text{ctg} \theta_0, \quad (20.53)$$

тобто при ковзному опроміненні поверхні  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ ,  $\text{ctg} \theta_0 \rightarrow 0$ , і розсіювання випромінювання відбувається головним чином у вертикальній площині, а не в горизонтальній. Слід, проте, нагадати, що наведені результати не враховують затінь і багаторазових відбивань, тому завжди припускається виконання нерівності  $\text{ctg} \theta_0 \gg \sigma_\gamma$ .

### ЗАДАЧІ

1. У наближенні Кірхгофа розрахувати індикатрису розсіювання для випадкової поверхні

$$\xi(x, y) = \alpha x + \beta y, \quad (1)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  — незалежні випадкові величини, розподілені за нормальним законом із нульовими середніми ( $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$ ) і дисперсіями  $\sigma_\alpha^2 = \alpha_0^2$  і  $\sigma_\beta^2 = \beta_0^2$ . Побудувати схематичний графік індикатрисы розсіювання.

**Розв'язок.** Задана поверхня розсіювання є випадково орієнтованою у просторі площиною. При цьому коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$  є тангенсами кутів нахилів площини відносно осей координат  $x$

та у відповідно ( $\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma_x$ ,  $\beta = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \gamma_y$ ). Унаслідок незалежності величин  $\gamma_x$  і  $\gamma_y$  для густини ймовірності нахилів  $W_\gamma(\vec{\gamma})$  виконується співвідношення  $W_\gamma(\gamma_x, \gamma_y) = W_\gamma(\gamma_x) W_\gamma(\gamma_y)$ . Отже, з урахуванням нормальності розподілу нахилів  $\gamma_x$  і  $\gamma_y$  отримуємо

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{\gamma_x^2}{2\alpha_0^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\beta_0^2} \right\}. \quad (2)$$

Для визначення індикатрис розсіювання ми маємо, згідно з (20.43) виконати у (2) заміну  $\vec{\gamma} \rightarrow -\vec{q}_\perp/q_z$ , у результаті чого (2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} W_\gamma(\vec{\gamma})|_{\vec{\gamma} = -\vec{q}_\perp/q_z} &= \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2}{2\alpha_0^2 q_z^2} - \frac{q_y^2}{2\beta_0^2 q_z^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Обчислимо  $W_\gamma(\vec{\gamma})$  у напрямку дзеркального відбиття, коли  $\vec{q}_\perp = 0$ :

$$W_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0}. \quad (4)$$

Підставляючи тепер отримані значення (3) і (4) у формулу (20.43), знаходимо вираз для індикатрис розсіювання:

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}. \quad (5)$$

Ураховуючи зв'язок (19.32) між проєкціями вектора розсіювання  $q_x$ ,  $q_y$  і  $q_z$  і кутами спостереження  $\theta_p$  і  $\varphi_p$ , остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} F(\theta_p, \varphi_p) &= \frac{4(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\beta_0^2 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \theta_p \sin^2 \varphi_p}{2\alpha_0^2 \beta_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Побудуємо схематичне зображення  $F(\theta_p, \varphi_p)$  у двох площинах:  $XOZ - F(\theta_p, 0)$  і  $XOY - F(\theta_0, \varphi_p)$ . Ці окремі випадки легко отримуються з виразу (6):

$$F(\theta_p, 0) = \frac{4[1 + \cos(\theta_p + \theta_0)]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \exp \left\{ -\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F(\theta_0, \varphi_p) &= \frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4\cos^4 \theta_0} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\tan^2 \theta_0}{8\alpha_0^2 \beta_0^2} [\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Згідно з (7) і (8) при  $\alpha_0^2 \ll 1$  і  $\beta_0^2 \ll 1$  у розподілах  $F(\theta_p, \varphi_p)$  спостерігатимуться гострі максимуми (рис. 20.6) під кутами  $\theta_p = \theta_0$  — для  $F(\theta_p, 0)$  і  $\varphi_p = 0$  — для  $F(\theta_0, \varphi_p)$ .

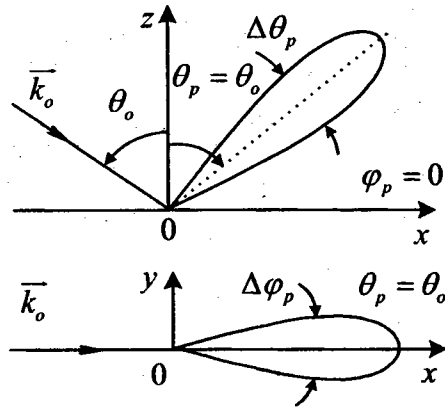


Рис. 20.6

Характерну ширину індикатриси розсіювання за рівнем  $e^{-1}$  легко оцінити за допомогою простих оцінок. Так, ураховуючи, що при  $\alpha_0^2, \beta_0^2 \ll 1$  передекспоненційні множники у (7) і (8) повільно змінюються порівняно з експонентами, наближено візьмемо їх для фіксованих кутів  $\theta_p = \theta_0$  і  $\varphi_p = 0$ :

$$\left. \frac{4[1 + \cos(\theta_p + \theta_0)]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \right|_{\theta_p = \theta_0} = 1 \text{ для } F(\theta_p, 0), \quad (9)$$

$$\left. \frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4 \cos^4 \theta_0} \right|_{\varphi_p = 0} = 1 \text{ для } F(\theta_0, \varphi_p). \quad (10)$$

У показнику степеня (7) покладемо  $\theta_p = \theta_0 + \Delta \theta_p$  і, вважаючи, що  $\Delta \theta_p \ll \theta_0$ , проведемо спрощення

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} = \frac{[\sin(\theta_0 + \Delta \theta_p) - \sin \theta_0]^2}{2\alpha_0^2 [\cos(\theta_0 + \Delta \theta_p) + \cos \theta_0]^2} \approx \frac{(\Delta \theta_p)^2}{8\alpha_0^2}. \quad (11)$$

Аналогічно і для (8) з точністю до квадратичних доданків за  $\alpha_0^2, \beta_0^2, \varphi^2 \ll 1$  знаходимо спрощене подання

$$\frac{[\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \sin^2 \theta_0}{8\alpha_0^2 \beta_0^2 \cos^2 \theta_0} \approx \frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0}. \quad (12)$$

У результаті отримуємо такі наближені розподіли індикатриси розсіювання в околі максимумів:

$$F(\theta_p, 0) \approx \exp \left\{ -\frac{(\Delta \theta_p)^2}{8\alpha_0^2} \right\}, \quad (13)$$

$$F(\theta_0, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0} \right\}. \quad (14)$$

Звідси характерні масштаби зміни індикатриси розсіювання за кутами  $\theta_p$  і  $\varphi_p$  дорівнюють:

$$\Delta \theta_p \approx 2\sqrt{2}\alpha_0,$$

$$\Delta \varphi_p \approx 2\sqrt{2}\beta_0 \operatorname{ctg} \theta_0.$$

2. Здійснити перехід у розглянутому у попередній задачі анізотропному розподілі нахилів до ізотропного випадку.

**Розв'язок.** Для ізотропного розподілу нахилів у густині ймовірності (2) задачі 1 ми маємо покласти  $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$ . З іншого боку, з урахуванням того, що

$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{e}_x + \gamma_y \vec{e}_y = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y,$$

для дисперсій модуля і проекцій отримуємо такий зв'язок:

$$\sigma_\gamma^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 = 2\sigma^2.$$

Враховуючи викладене, формули (2) і (6) попередньої задачі зводяться до вигляду (див. (20.42) и (20.45))

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\pi\sigma_\gamma^2} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{\sigma_\gamma^2}\right\} = W_\gamma(\gamma),$$

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{4(1 + \cos\theta_p \cos\theta_0 - \sin\theta_p \sin\theta_0 \cos\varphi_p)^2}{(\cos\theta_p + \cos\theta_0)^4} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\sin^2\theta_p + \sin^2\theta_0 - 2\sin\theta_p \sin\theta_0 \cos\varphi_p}{\sigma_\gamma^2(\cos\theta_p + \cos\theta_0)^2}\right\}.$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. Блюх П.В. Статистическая радиофизика. — Х.: Рукопись. Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, 1976. — 126 с.
2. Фукс И.М. Статистическая радиофизика и теория информации. Препринт. — Х.: ХГУ. — Ч. 1. — 1985. — 60 с.; Ч. 2. — 1986. — 88 с.; Ч. 3. — 1992. — 91 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974. — 550 с.
4. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.
5. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976. — Ч. 1. Случайные процессы. — 494 с.
6. Рытов С.М., Крацов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2. Случайные поля. — 463 с.
7. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
8. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. — М.: Сов. радио, 1970. — 384 с.
9. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. — М.: Сов. радио, 1980. — 544 с.

## Додаткові джерела

1. Татарский В.И. Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. — 548 с.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
3. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
5. Ваништейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960. — 447 с.
6. Харкевич А.А. Борьба с помехами. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 276 с.
7. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. — М.: Сов. радио, 1972. — 448 с.
8. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.

*Навчальне видання*

**Мінаков Анатолій Олексійович**

**Тирнов Олег Федорович**

## **СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА**

**Частина III. Вплив випадкових неоднорідностей  
на поширення та розсіювання хвиль**

*Затверджено Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

Редактор *А.М. Цимбал*

Коректори *Н.А. Балабуха, О.О. Шапошникова*

Комп'ютерна верстка *В.А. Паланський*

Підписано до друку 5.12.2007 р. Формат 60×90 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс.  
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 10. Обл.-вид. арк. 13,0. Тираж 3500 прим.  
Зам. №

ТОВ «Веста». Свідоцтво ДК № 2540 від 26.06.2006.  
61064, м. Харків, вул. Бакуніна, 8а.

Адреса редакції: 61145, м. Харків, вул. Космічна, 21а.  
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Виготовлено у ТОВ «Навчальний друк»  
Україна, 62300, Харківська обл., м. Дергачі, вул. Петровського, 163а. Тел./факс (263) 3-03-81.  
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК №58 від 10.06.2002 р.

НБ ПНУС



733525