М. І. Шкіль
М. А. Сотніченко

Звичайні диференціальні рівняння

М. І. ШКІЛЬ
М. А. СОТНІЧЕНКО

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Допущено Міністерством освіти України як навчальний посібник для студентів педагогічних інститутів

Київ
«Вища школа»
1992

ББК 22.161.6я73
Ш 66
УДК 517.9 (07)

Рецензенти: кандидати фіз.-мат. наук, доценти *В. В. Мисак* (Київський політехнічний інститут), *І. І. Старун* і *В. П. Яковець* (Ніжинський педагогічний інститут)

Редакція літератури з математики, фізики, інформатики
Редактори *О. О. Діптан, Г. П. Трофімчук*

Шкіль М. І., Сотніченко М. А.
Ш66 Звичайні диференціальні рівняння: Навч. посібник.— К.: Вища шк., 1992.— 303 с.: іл.
ISBN 5-11-004056-7

Викладено теорію інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем, елементи теорії стійкості, основні методи наближеного інтегрування. Теоретичний матеріал супроводжується розв'язанням багатьох прикладів і задач, зокрема з фізики, механіки, техніки, геометрії. Вміщено вправи для самостійного розв'язування та контрольні завдання, наведено теми курсових і контрольних робіт.

Для студентів педагогічних інститутів; буде корисний для студентів технічних вузів.

Ш $\frac{1602070100-131}{211-92}$ БЗ—6—8—92 ББК 22.161.6я73

ISBN 5-11-004056-7

ЗМІСТ

ВСТУП

При математичному моделюванні різноманітних процесів, явищ і залежностей часто доводиться мати справу з такими задачами, в яких невідомою є функція.

Наприклад, для визначення закону швидкості руху за даним законом прискорення треба знайти швидкість як функцію часу з рівняння

$$\dot{v} = a \left(\dot{} = \frac{d}{dt} \right).$$

Щоб знайти закон пройденого шляху за даним законом швидкості, треба визначити шлях як функцію часу з рівняння

$$\dot{s} = at + v_0.$$

Задача про закон охолодження тіла розв'язується за допомогою рівняння

$$\dot{\theta} = -k(\theta - a).$$

Отже, розглядаються рівняння, які крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій містять також похідні (диференціали) від невідомих функцій. Такі рівняння називають *диференціальними**, а знаходження невідомої функції — *інтегруванням* диференціального рівняння або *зведенням до квадратур* (тобто знаходження невідомої функції за допомогою інтегрування даних функцій).

Розробка методів інтегрування диференціальних рівнянь і дослідження властивостей їхніх розв'язків є предметом теорії диференціальних рівнянь.

Задачу визначення розв'язків диференціальних рівнянь через квадратури можна здійснити лише в окремих випад-

* Термін «диференціальні рівняння» ввів Г. В. Лейбніц у 1676 р.

ках, а для деяких простих типів диференціальних рівнянь, наприклад рівняння Ріккаті,

$$y' = ay^2 + bx^m \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

як довів Ж. Ліувіль, не можна визначити розв'язок через скінченне число знаків елементарних функцій та квадратур. Тому виникають задачі знаходження наближеного виразу для розв'язку диференціального рівняння.

Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

1. Визначити форму дзеркала з симетричними осями, яке збирає промені, паралельні осі, в одну точку.

Використаємо закон геометричної оптики, за яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття.

Нехай

$$y - f(x) = 0$$

є рівняння осьового перерізу дзеркала, а фокус дзеркала знаходиться в початку координат (рис. В1). Тоді

$$y' = \frac{MK}{AK},\ MK = y;$$

$$AK = AO + OK = AO + x;$$

$$AO = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отже, дістаємо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

яке містить незалежну змінну x, залежну від неї змінну y та її похідну y' шуканої функції y.

Таким чином, маємо динамічну модель задачі, яка не дає відповіді про залежність між змінними x і y. Щоб дістати цю залежність, треба з динамічної моделі виключенням змінної y' побудувати кінематичну модель задачі. Це можна здійснити, не знаючи навіть методів інтегрування диференціальних рівнянь.

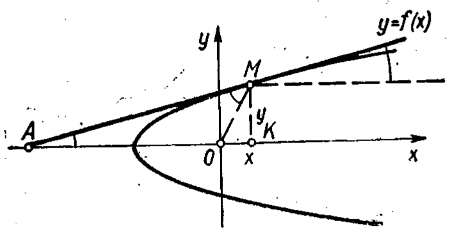

Рис. В.1

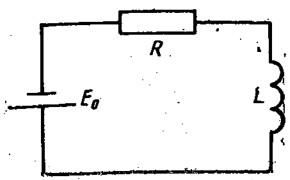

Рис. В.2

Задане диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Позначивши $\sqrt{x^2+y^2} = u$, дістанемо відоме з інтегрального числення елементарне рівняння $u' = 1$. Проінтегрувавши його, дістанемо

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} = x + C,$$

де C — довільна стала.

Таким чином дістали рівняння осьового перерізу у площині xOy:

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

Отже, поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox матиме вигляд

$$y^2 + z^2 = 2Cx + C^2.$$

Шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання.

2. Знайти залежність сили струму i від часу t в контурі, який складається з електрорушійної сили E_0, опору R та індуктивності L (рис. В2), де E_0, R, L — сталі.

Згідно із законом Ома

$$E_0 = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Це є динамічна модель задачі, а відповідна її кінематична модель матиме вигляд

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R},$$

де C — довільна стала.

3. Обчислити невласний інтеграл, залежний від параметра α:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2-2\alpha x}dx.$$

Обчислімо $dI/d\alpha$. Користуючись правилом Лейбніца та інтегруючи частинами, дістанемо

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\int_0^\infty 2xe^{-x^2-2\alpha x}dx = \int_0^\infty e^{-x^2-2\alpha x}d(-x^2 - 2\alpha x) +$$

$$+ 2\alpha I(\alpha) = 2\alpha I(\alpha) - 1.$$

Отже, маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dI}{d\alpha} = 2\alpha I(\alpha) - 1.$$

При цьому $I(0) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Отже, щоб знайти розв'язок задачі, треба розв'язати дане диференціальне рівняння і здобутий результат узгодити із значенням $I(0)$. Неважко побачити, що інтеграл

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\alpha^2} - \int\limits_0^\alpha e^{\alpha^2 - t^2}dt$$

є розв'язком задачі.

4. Дослідити рух небесних тіл під впливом взаємного тяжіння за законом Ньютона.

Обмежимося випадком трьох тіл (Сонця, Землі і Місяця), не враховуючи впливу інших планет. Вважатимемо ці тіла матеріальними точками з відповідно координатами: (x_3, y_3, z_3), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). Тоді віддаль 1-ї точки від 2-ї є

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

і т. д.

Складемо диференціальні рівняння руху:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = X_{12} + X_{13}; \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = X_{21} + X_{23}; \\ m_3 \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = X_{31} + X_{32}, \end{cases}$$

де

$$X_{ji} = \frac{km_j m_i}{r_{ji}^2} \cdot \frac{x_i - x_j}{r_{ji}}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Такі ж рівняння маємо для y_i та z_i.

Задачу про знаходження x_i, y_i, z_i як функцій часу t за даними для будь-якого моменту положення та швидкістю повністю ще не розв'язано і записану вище систему рівнянь остаточно не проінтегровано.

5. Відомо, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна його кількості. Знайти закон зміни маси радію залежно від часу.

Нехай $R(t)$ — кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідна. Отже, закон розпаду можна записати так:

$$\dot{R} = -kR, \; k > 0, \tag{1}$$

де k — коефіцієнт пропорційності (знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується і відповідно $\frac{dR}{dt} < 0$).

Щоб розв'язати диференціальне рівняння (1), запишемо його у вигляді

$$dt = -\frac{dR}{kR}. \tag{2}$$

З інтегрального числення відомо, що рівняння (2) задовольняє функція

$$t + C = -\frac{1}{k}\ln R,$$

де C — довільна стала. Звідси визначаємо R як функцію t:

$$R = e^{-kt - kC} = C_1 e^{-kt}, \; C_1 \overset{\text{def}}{=} e^{-kC}. \tag{3}$$

Нехай R_0 — кількість радію в момент часу $t = t_0$. Тоді з (3) маємо

$$R_0 = C_1 e^{-kt_0},$$

звідки $C_1 = R_0 e^{kt_0}$. Підставивши знайдене значення C_1 в (3) матимемо

$$R = R_0 e^{-k(t - t_0)}.$$

При $t_0 = 0$

$$R = R_0 e^{-kt}.$$

Це і є закон зміни початкової маси радію залежно від зміни часу.

Експериментально встановлено, що для радію $k = 0{,}000436$.

Знайдемо період піврозпаду радію, тобто відрізок часу, за який розпадається половина початкової маси. Маємо

$$\frac{R_0}{2} = R_0 e^{-0{,}000436T},$$

звідки

$$-0{,}000436T = -\ln 2$$

і

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}000436} = 1590 \text{ р.}$$

Так само визначено період піврозпаду для елементів, наведених у таблиці.

Нуклід	Період піврозпаду, років
Вуглець - 14	5600
Натрій - 22	2,6
Кобальт - 60	5,27
Стронцій - 89	54,5 дн.
Йод - 131	8,05 —»—
Цезій - 137	26,6
Радій - 226	1620
Уран - 238	$4{,}5 \cdot 10^9$
Плутоній - 239	$2{,}4 \cdot 10^4$

Розділ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ОЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Основні поняття й означення

Вище було розглянуто деякі задачі, розв'язування яких приводить до рівнянь, що містять шукану функцію разом із своїми похідними певного порядку.

Означення. *Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке містить невідому функцію, похідні від неї та незалежні змінні.*

При цьому невідома функція і незалежні змінні можуть явно і не входити до диференціального рівняння, але обов'язково повинні міститися похідні, бо в противному разі це вже не буде диференціальне рівняння. Наприклад,

$$(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0; \tag{1.1}$$

$$\ddot{x} + m^2 x = A \sin \omega t \left(\ddot{\cdot} = \frac{d^2}{dt^2}\right); \tag{1.2}$$

$$(y')^2 - \frac{x}{a^2}\,y = 0; \tag{1.3}$$

$$y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x + 1)\,e^x; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \tag{1.5}$$

Диференціальне рівняння називають *звичайним*, якщо невідома функція, яка входить в нього, залежить від однієї незалежної змінної. Рівняння (1.1) — (1.4) є звичайними диференціальними рівняннями.

Якщо рівняння містить частинні похідні невідомих функцій від кількох незалежних змінних, то воно називається *диференціальним рівнянням з частинними похідними*. Наприклад, рівняння (1.5).

Порядок диференціального рівняння визначається порядком найвищої похідної (диференціала), яка міститься в диференціальному рівнянні.

Так, (1.1) і (1.3) — є диференціальні рівняння першого порядку, (1.2) і (1.5) — другого порядку, (1.4) — четвертого порядку.

Якщо рівняння лінійне відносно сукупності невідомої функції та її похідних, то воно називається *лінійним диференціальним рівнянням*. Це рівняння (1.1), (1.2), (1.4), (1.5). Рівняння (1.3) — нелінійне, бо воно містить першу похідну в другому степені.

Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку в загальному виді записують так:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \qquad (1.6)$$

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \qquad (1.7)$$

а якщо його можна розв'язати відносно похідної, то його записують так:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \qquad (1.8)$$

Означення. *Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називають неперервно диференційовану функцію $y = \varphi(x)$, яка задовольняє рівняння (1.8):*

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Отже, початкове рівняння перетворюється в тотожність. Наприклад, розв'язком диференціального рівняння

$$y'' + y = 0 \qquad (1.9)$$

є функція $y = \sin x$, $y = 2\cos x$, $y = 3\sin x - \cos x$ і взагалі функція виду $y = C_1 \cos x$, $y = C_2 \sin x$, де C_1, C_2— довільні сталі, або

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \qquad (1.10)$$

У цьому легко впевнитися підстановкою даних функцій в рівняння.

Диференціальне рівняння

$$y'(x) = ky,$$

де k — стала, має розв'язком функцію $\tilde{y} = Ce^{kx}$, де C — довільна стала. Характерна особливість диференціального рівняння це те, що воно має нескінченну множину розв'язків.

ВПРАВИ

Показати, що задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь.

1. $y = Cx$	$ydx - xdy = 0.$
2. $y = \dfrac{C}{\cos x}$	$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$
3. $x = \ln \dfrac{C}{e^y - 1}$	$e^y (y' + 1) = 1.$
4. $y = 2x^5 + C$	$\dfrac{1}{x^4} dy = 10\, dx.$
5. $y = \ln x + C$	$dx - xdy = 0.$
6. $y = a \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{a} + C$	$(x+y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2.$
7. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$	$y'' - y = 0.$
8. $y = Cx + C - C^2$	$y = xy' + y' - (y')^2.$
9. $y = Ce^x \sin x$	$y'' - 2y' + 2y = 0.$
10. $x^2 - y^2 = Cx$	$(y^2 + x^2)\, dx - 2xydy = 0.$
11. $\ln xy + x - y = C$	$(1 + x)\, y + (1 - y)\, x \cdot y'' = 0.$
12. $\arcsin \dfrac{y}{x} = C - x$	$xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$
13. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$	$y' = -\dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}.$
14. $y = C_1 + C_2 \sin(x + C_3)$	$y''' + y' = 0.$
15. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$	$y'' + y = 0.$
16. $y = x\left(\int \dfrac{e^x}{x} dx + C\right)$	$xy' - y = xe^x.$
17. $e^{-y} - Cx = 1$	$xy' + 1 = e^y.$
18. $y = Ce^{-2x} + \dfrac{1}{3} e^x$	$y' + 2y = e^x.$
19. $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$	$(1 + xy)\, y' + y^2 = 0.$
20. $\ln x \ln y = C,$	$y \ln y\, dx + x \ln x\, dy = 0.$

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Як зазначалося вище, диференціальне рівняння першого порядку має вид

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0. \qquad (1.11)$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y'(x)$, то його можна записати у вигляді

$$y'(x) = f(x, y(x)). \qquad (1.12)$$

Тоді матимемо рівняння, розв'язане відносно похідної. Вище ми бачили, що диференціальне рівняння може мати безліч розв'язків. У подальшому сформулюємо умови, які визначають існування і єдиність розв'язків диференціального рівняння (1.12) при

$$y(x_0) = y_0.$$

Умова, що при $x = x_0$ функція набуватиме значення y_0, називається *початковою* і її записують так:

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0. \qquad (1.13)$$

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію*

$$y = \varphi(x, C), \qquad (1.14)$$

яка залежить від однієї довільної сталої C, і якщо виконують такі умови:

1) *функція (1.14) задовольняє диференціальне рівняння при довільному значенні сталої C;*

2) *яка б не була початкова умова (1.13), можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє цю умову.*

Частинним розв'язком називають довільну функцію $y = \varphi(x, C_0)$, утворену із загального розв'язку (1.14), якщо в останньому довільній сталій C надати конкретне значення $C = C_0$.

Наприклад, загальним розв'язком (інтегралом) диференціального рівняння

$$ydy + xdx = 0$$

є функція

$$x^2 + y^2 = C, \ (C > 0).$$

З геометричної точки зору загальний інтеграл визначає на координатній площині сім'ю кривих, залежну від до-

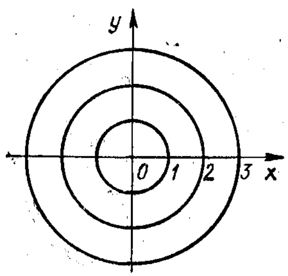

Рис. 1.1

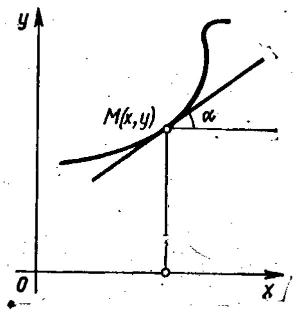

Рис. 1.2

вільної сталої C (рис. 1.1). Частинному розв'язку відповідає одна крива цієї сім'ї, що проходить через задану точку.

Розв'язати, або проінтегрувати диференціальне рівняння означає:

1) знайти його загальний розв'язок, або загальний інтеграл, якщо початкові умови не задано,

або

2) знайти той частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, якщо такі є.

Слід зазначити, що диференціальне рівняння (1.12) встановлює відповідність між координатами точки $M(x, y)$ і кутовим коефіцієнтом дотичної dy/dx до інтегральної кривої в цій точці (рис. 1.2):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Говорять, що рівняння (1.12) в точках визначення функції $f(x, y)$ задає на площині xOy поле напрямків дотичних до його інтегральних кривих.

Отже, беручи деяке фіксоване значення k цього поля, включаючи невласні значення $k = \pm \infty$, з рівняння

$$k = f(x, y) \qquad (1.15)$$

дістанемо лінії $y = g(x, k)$ однакового нахилу дотичних до інтегральних кривих диференціального рівняння. Ці лінії називають *ізоклінами.* Змінюючи в (1.15) значення k, матимемо множину ізоклін на площині xOy (рис. 1.3). За допомогою цих ізоклін і сталих кутів $\alpha(x)$, $k = \operatorname{tg} \alpha$, нахилу дотичних до перетинаючих їх інтегральних кривих можна відтворити якісну картину поля інтегральних

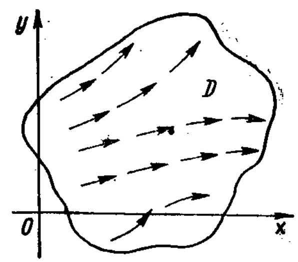

Рис. 1.3

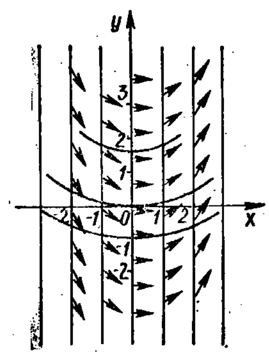

Рис. 1.4

кривих досліджуваного рівняння. Такий метод дослідження диференціального рівняння називають *методом ізоклін*.

Приклад. Побудувати за допомогою ізоклін поле напрямків, визначених рівнянням $y' = \frac{1}{2}x$.

Розв'язання. Запишемо рівнянням сім'ї ізоклін:

$$\frac{1}{2}x = k, \text{ або } x = 2k.$$

Ізоклінами є прямі, паралельні осі Oy (рис. 1.4). При $k = 0$ маємо ізокліну $x = 0$, в кожній точці якої поле паралельне осі Ox. При $k = 1$ маємо ізокліну $x = 2$, в кожній точці якої поле утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{4}$. Взявши $k = -\frac{1}{2}$, знайдемо рівняння ізокліни $x = -1$, в кожній точці якої кут нахилу до осі Ox є $-\frac{\pi}{4}$.

ВПРАВИ

Для заданих диференціальних рівнянь дослідити поле напрямків і зробити відповідний рисунок.

1. $y' = x^2 + y^2 - 1$.	2. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $y' = x^2 + 4y^2$.	4. $y' = x - y^2$.
5. $y' = x + y$.	6. $y' = y - x$.
7. $y' = (y - 1)^2$.	8. $y' = x^2 - y^2$.
+ 9. $y' = y - x^2$.	10. $y' = x^2 + 2x - y$.
11. $y' = 2x - y$.	12. $y' = x^2 + y$.
13. $y' = y^2$.	14. $y' = y$.
15. $y' = 2y + 8x$.	16. $y' = x^2 + y^2$.
17. $y' = x + y^2$.	18. $yy' + x = 0$.
19. $xy' + y = 0$.	20. $xy' = 2y$.

Розглянемо таку задачу: знайти диференціальне рівняння для заданої сім'ї кривих.

З наведених вище прикладів випливає, що кожному диференціальному рівнянню першого порядку відповідає деяка сім'я кривих (загальний розв'язок). Іноді не можна знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в явному виді $y = \varphi(x, C)$, але можна записати його неявно, тобто

$$F(x, y, C) = 0. \tag{1.16}$$

Співвідношення (1.16) називають *загальним інтегралом диференціального рівняння*.

Поставимо тепер задачу: скласти диференціальне рівняння, для якого сім'я кривих (1.16) є загальним інтегралом. Диференціюючи (1.16) по x, матимемо

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0. \tag{1.17}$$

Виключаючи з (1.16) і (1.17) довільний параметр C, дістанемо певну залежність між x, y і y', тобто матимемо шукане диференціальне рівняння першого порядку:

$$f(x, y, y') = 0.$$

Приклад. Нехай маємо залежність

$$y(x) = \sin x + C\cos x.$$

Знайти диференціальне рівняння, що відповідає цій сім'ї кривих.

Розв'язання. Диференціюючи задане рівняння, знаходимо

$$y' = \cos x - C\sin x.$$

Для виключення C складемо систему

$$\begin{cases} y(x) = \sin x + C\cos x, \\ y' = \cos x - C\sin x. \end{cases}$$

Помноживши перше з рівнянь на $\sin x$, а друге — на $\cos x$ і додавши результати, дістанемо диференціальне рівняння

$$y'\cos x + y\sin x = 1.$$

Якщо сім'я кривих задана рівнянням виду

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{1.18}$$

тобто маємо залежність від двох параметрів C_1 і C_2, то спочатку треба двічі продиференціювати по x рівняння (1.18)

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

а потім із системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, C_1, C_2) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

виключити параметри C_1 і C_2. Дістанемо диференціальне рівняння

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

яке і є диференціальним рівнянням сім'ї кривих (1.18).

Аналогічно міркуємо й щодо співвідношення

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

яке залежить від n параметрів $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Приклад. Знайти диференціальне рівняння сім'ї верхніх і нижніх півеліпсів, заданих рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a і b параметри.

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{yy''}{b^2} = 0. \end{cases}$$

Виключивши звідси параметри a і b, дістанемо диференціальне рівняння

$$yy' - x(y'^2 + yy'') = 0,$$

яке є шуканим.

ВПРАВИ

Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані такими рівняннями:

1. $y = Cx$.
2. $y = Cxe^x$.
3. $(x - C)^2 + y^2 - C^2 = 0$.
4. $\cos y = C\cos x$.
5. $y + x = C(1 - xy)$.
6. $y - a = Ce^{\frac{1}{x}}$.
7. $(1 + y)(1 - x) = C$.
8. $y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$.
9. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
10. $x^2 + Cy^2 = 2y$.

1.3. Теорема Коші про існування та єдиність розв'язку

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{1.19}$$

і початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.20}$$

Тоді справджується така теорема.

ТЕОРЕМА (Коші). *Якщо функція $f(x, y)$ задовольняє умовам:*

1) *є неперервною в замкненому прямокутнику R: $\{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a;\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$, де a і b — деякі відомі додатні числа, а отже, є обмеженою в прямокутнику R, тобто існує число $M > 0$ таке, що для всіх точок $(x, y) \in R$*

$$|f(x, y)| \leqslant M; \tag{1.21}$$

2) *задовольняє умові Ліпшиця*[1] *у прямокутнику R по змінній y*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \tag{1.22}$$

де L — стала Ліпшиця, а (x, y_1), (x, y_2) — довільні точки з прямокутника R, то на відрізку $[x_0 - h;\ x_0 + h]$, де $h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$ (менше з чисел a і $\frac{b}{M}$), існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (1.19), *який при $x \in [x_0 - h;\ x_0 + h]$ не виходить з прямокутника R і задовольняє початкову умову (1.20), тобто $y(x_0) = y_0$.*

Доведення. Доводитемо теорему методом Пікара[2]. Побудуємо інтегральне рівняння виду:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{1.23}$$

Рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтеграла, називають *інтегральним*. Легко побачити, що коли рівняння (1.23) має неперервний розв'язок $y = y(x)$ (неперервну функцію, яка задовольняє це рівняння) на відрізку $[x_0 - h;\ x_0 + h)$, то цей розв'язок є розв'язком також диференціального рівняння (1.19) і задовольняє початкову умову (1.20).

Справді, диференціюючи по x ліву і праву частини тотожності (1.23), маємо

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Отже, функція $y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (1.19). Підставивши в ліву і праву частини (1.23) значення $x = x_0$, дістанемо $y(x_0) = y_0$, тобто функція $y = y(x)$ задовольняє й початкову умову (1.20).

Справедливим є і обернене твердження: якщо функція $y = y(x)$ на відрізку $[x_0 - h;\ x_0 + h]$ є розв'язком диференціального рівняння (1.19) і $y(x_0) = y_0$, то функція $y = y(x)$ на цьому ж відрізку є розв'язком інтегрального рівняння (1.23).

Справді, якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння (1.19), то при $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ виконуються тотожність

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \tag{1.24}$$

і рівність

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.25}$$

[1] Рудольф Ліпшіц — німецький математик, 1832—1903 рр.
[2] Еміль Пікар — французький математик, 1856—1941 рр.

Проінтегрувавши обидві частини тотожності (1.24) у межах від x_0 до x і врахувавши (1.25), матимемо

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

або

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt,$$

що й треба було довести.

При цьому говорять, що інтегральне рівняння (1.23) *еквівалентне* диференціальному рівнянню (1.19) з початковою умовою (1.20). Тому далі доведемо існування і єдиність розв'язку для інтегрального рівняння (1.23).

Для цього застосуємо метод послідовних наближень (метод Пікара).

Побудуємо послідовність функцій $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, де $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$, таким чином:

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt,$$

$$y_2(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt, \ \ldots,$$

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt, \ \ldots \tag{1.26}$$

Відносно цих функцій можна стверджувати, що

1) при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ вони є неперервними. Справді, оскільки за умовою функція $f(x, y(x))$ у прямокутнику R неперервна, то й інтеграл $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, будучи функцією верхньої змінної межі, є неперервною функцією;

2) кожна функція $y_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, є визначеною при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ і не виходить з прямокутника R. Справді, з (1.26) маємо

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))|\,dt \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

Отже, функція $y_1(x)$ не виходить за межі прямокутника R, функція $y_0(x) \equiv y_0$ знаходиться в центрі R (рис. 1.5).

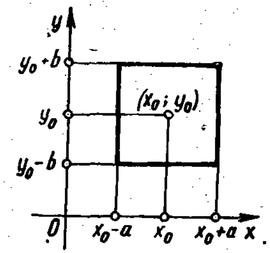

Рис. 1.5

Далі знаходимо

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t))|\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b, \ \ldots,$$

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))|\,dt \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b, \ldots$$

За методом математичної індукції дістаємо доводжуване твердження;

3) кожна з функцій $y_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, задовольняє початкову умову $y_k(x_0) = y_0$. Це випливає безпосередньо з формул (1.26).

Доведемо, що послідовність наближень (функцій) (1.26) збігається рівномірно для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ або для всіх x, для яких $|x - x_0| \leqslant h$. Розглянемо функціональний ряд

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \cdots + \\ + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \cdots \tag{1.27}$$

Легко побачити, що k-та частинна сума ряду (1.27) збігається з k-м наближенням послідовності функцій (1.26). Тому з рівномірної збіжності ряду (1.27) випливає рівномірна збіжність послідовності наближень (1.26). Знайдемо оцінку за модулем кожного члена ряду (1.27), починаючи з другого:

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_0))\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)|\,dt \right|.$$

Застосувавши до $|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)|$ умову Ліпшіца і врахувавши оцінку попереднього члена ряду, дістанемо

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant L\int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_0|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M\int_{x_0}^{x} |t - x_0|\,dt = LM\frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Аналогічно

$$|y_3(x) - y_2(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t)))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\int_{x_0}^{x} |y_2(t) - y_1(t)|\,dt \leqslant L^2M\int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^2}{2!}\,dt =$$

$$= \frac{L^2M}{3!}|x - x_0|^3.$$

Застосувавши метод математичної індукції, доводимо справедливість такої оцінки:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{L^{n-1}M}{n!}|x - x_0|^n. \qquad (1.28)$$

Оскільки $|x - x_0| < h$, то

$|y_1(x) - y_0| \leqslant Mh,$

$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant ML\frac{h^2}{2!},$

$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant ML^2\frac{h^3}{3!},$

. . . .

$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}.$

. . . .

Отже, члени функціонального ряду (1.27) за модулем менші, ніж відповідні члени додатного числового ряду

$$y_0 + Mh + ML\frac{h^2}{2!} + ML^2\frac{h^3}{3!} + \cdots + ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} + \cdots \qquad (1.29)$$

Застосуємо до останнього ряду ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ML^{n-1}h^n(n-1)!}{ML^{n-2}h^{n-1}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{Lh}{n} = 0 < 1.$$

Отже, числовий ряд (1.29) збігається. Тому функціональний ряд (1.27) за ознакою Вейєрштраса рівномірно збігається на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$.

Нехай

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = Y(x).$$

Згідно з доведеним функція $Y(x)$ є неперервною на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$.

Доведемо, що $Y(x)$ задовольняє початкову умову $Y(x_0) = y_0$ і не виходить з прямокутника R.

Справді,

$$Y(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_0 = y_0.$$

Перейшовши при $n \to \infty$ до границі в нерівності $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$, дістаємо $|Y(x) - y_0| \leqslant b$. Доведемо тепер, що $Y(x)$ є розв'язком рівняння (1.23).

Оскільки послідовність функцій $y_n(x)$ рівномірно збігається до $Y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що при $n > N$ і всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ виконуватиметься нерівність

$$|y_n(x) - Y(x)| < \varepsilon.$$

Тому, використавши умову Ліпшіца, матимемо

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, Y(t))|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_n(t) - Y(t)|\,dt\right| \leqslant L\varepsilon|x - x_0| \leqslant L\varepsilon h \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt$$

для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$.

Перейшовши при $n \to \infty$ до границі в співвідношенні

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt,$$

дістанемо

$$Y(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt.$$

Цим самим доведено, що функція $y = Y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ є розв'язком інтегрального рівняння (1.23), а отже, і розв'язком диференціального рівняння (1.19), який задовольняє початковій умові (1.20).

Доведемо єдиність розв'язку $y = Y(x)$. Нехай на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, крім розв'язку $Y(x)$, існує й інший розв'язок $\varphi(x)$ такий, що $\varphi(x_0) = y_0$. Розглянемо досить малий відрізок $[x_0; x_0 + \eta]$, $\eta \leq h$, на якому $\varphi(x) - Y(x) \not\equiv 0$. Оскільки функція $|\varphi(x) - Y(x)| \not\equiv 0$ є неперервною на відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$, то $\theta(x) = |\varphi(x) - Y(x)|$ досягає в деякій точці x_1, $x_0 < x_1 \leq x_0 + \eta$ свого найбільшого значення $m > 0$.

Тоді

$$m = |\varphi(x_1) - Y(x_1)| = \left|\int_{x_0}^{x_1} f(t, \varphi(t))\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{x_0}^{x_1} f(t, Y(t))\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_1} |f(t, \varphi(t)) - \right.$$

$$- f(t, Y(t))|\,dt| \leq L \int_{x_0}^{x_1} |\varphi(t) - Y(t)|\,dt.$$

Розповсюдивши інтегрування на відрізок $[x_0; x_0 + \eta]$, матимемо

$$m \leq L \int_{x_0}^{x_0+\eta} |\varphi(t) - Y(t)|\,dt < Lm\eta.$$

Звідси $1 < L\eta$, що неможливо, оскільки число η може бути вибраним як завгодно малим. Зайшли у суперечність. Тому на відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$

$$\varphi(x) \equiv Y(x).$$

Так само можна довести, що й на відрізку $[x_0 - \eta; x_0]$ ці функції збігаються.

Теорему доведено.

Зазначимо, що на практиці умову Ліпшіца в теоремі Коші перевіряти досить складно. Тому користуються іншою ознакою, яку дає така теорема.

ТЕОРЕМА. *Якщо права частина в диференціальному рівнянні* (1.19) *у розглядуваній області має обмежену частинну похідну по y, $|f'_y(x, y)| \leq N$, то умова Ліпшіца для такої функції виконується.*

Доведення. Розглянемо обмежену область D, в якій функція $f(x, y)$ має обмежену частинну похідну $f'_y(x, y)$, тобто

$$|f'_y(x, y)| \leq N.$$

Тоді за теоремою Лагранжа про скінченний приріст маємо

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2),$$
$$0 < \theta < 1.$$

Якщо $|f'_y| \leq N$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|.$$

Теорему доведено.

Приклади

1. Знайти область існування і єдиності розв'язків диференціального рівняння

$$y' = y\sin x + e^x.$$

Розв'язання. Оскільки права частина заданого рівняння є неперервною функцією в усій дійсній площині, а $|f'_y| = |\sin x| \leq 1$, то в будь-якому прямокутнику площини xOy виконуються умови теореми Коші. Тому через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива розглядуваного рівняння.

2. Знайти область єдиності розв'язку рівняння

$$y' = \sqrt{y}. \tag{1.30}$$

Розв'язання. Права частина заданого рівняння визначена і неперервна при $y \geq 0$, тобто у верхній частині площини xOy. Оскільки частинна похідна

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

стає необмеженою при $y \to 0$, $y > 0$, то в точках прямої $y = 0$ умова Ліпшіца може не виконуватися. Отже, через ці точки може проходити більше ніж один розв'язок (одна інтегральна крива). Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що функція $y = 0$ є розв'язком рівняння (1.30). Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо його загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x \geq -C, \tag{1.31}$$

що є сім'єю квадратичних парабол (рис. 1.6). Через кожну точку осі Ox проходить два розв'язки (дві інтегральні криві), а саме вісь Ox, тобто розв'язок $y = 0$ і одна крива із сім'ї інтегральних кривих (1.31). У решті точок верхньої площини, де $y > 0$, виконуються обидві умови теореми Коші. Тому через кожну таку точку проходить лише один розв'язок (інтегральна крива) диференціального рівняння (1.30).

Розв'язок $y = y(x)$, у кожній точці якого порушується вимога єдиності розв'язку задачі Коші, називають *особ-*

ливим розв'язком, його не можна дістати з формули загального розв'язку при конкретному значенні довільної сталої. У прикладі 2 особливим розв'язком рівняння (1.30) є $y = 0$.

Щоб знайти особливий розв'язок рівняння (1.19), треба знайти геометричне місце точок, в яких функція $f(x, y)$ неперервна, а $f'_y(x, y)$ необмежена, і перевірити, чи знайдено розв'язок рівняння, а також чи є цей розв'язок особливим.

Для диференціального рівняння першого порядку, не розв'язаного відносно похідної $F(x, y, y') = 0$, особливий розв'язок знаходимо, виключаючи y' із системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0. \end{cases} \tag{1.32}$$

Приклад. Знайти друге наближення до розв'язку диференціального рівняння

$$y' = x^2 + y^2 \tag{1.33}$$

з початковою умовою $y(0) = 1$.

Розв'язання. Скористаємося формулами (1,26), поклавши $n = 0, 1, 2$. Нульовим наближенням $y_0(x)$ є стала функція $y_0 = 1$. Будуємо перше і друге наближення:

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_0(t))\, dt = 1 + \int_0^x (t^2 + 1)\, dt =$$

$$= 1 + \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = 1 + x + \frac{1}{3}x^3;$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_1(t))\, dt =$$

$$= 1 + \int_0^x \left(t^2 + \left(1 + t + \frac{1}{3}t^3\right)^2\right) dt =$$

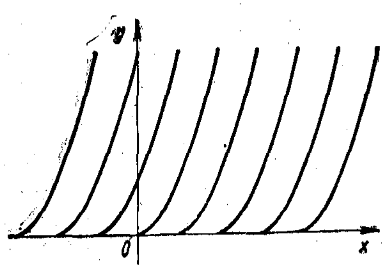

Рис. 1.6

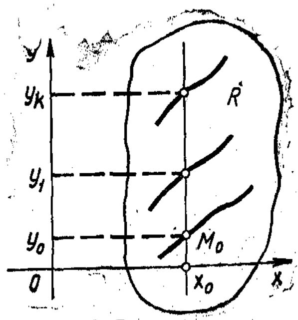

Рис. 1.7

$$= 1 + \left(\frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7 + t^2 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{2}{15}t^5\right)\Big|_0^x =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7.$$

Геометричний зміст теореми Коші полягає в тому, що існує і при тому єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку (x_0, y_0) (рис. 1.7). Крім того, з теореми випливає, що рівняння (1.19) має нескінченне число різних розв'язків. Наприклад, розв'язок, графік якого проходить через точку (x_0, y_0); розв'язок, графік якого проходить через точку (x_0, y_1), і т. д., якщо ці точки лежать в області R. Отже, надаючи y_0 різних значень у деякому проміжку, наприклад в інтервалі $\left(y_0 - \frac{b}{2},\ y_0 + \frac{b}{2}\right)$, дістаємо різні частинні розв'язки рівняння (1.19). Якщо під y_0 розуміти будь-яке його значення в заданому інтервалі, то матимемо загальний розв'язок. Отже, у формулі загального розв'язку

$$y = \varphi(x, C) \tag{1.34}$$

роль довільної сталої відіграє початкове значення y_0 шуканої функції $y(x)$ при деякому фіксованому значенні x_0 аргументу x, так що формула (1.34) набирає вигляду $y = \varphi(x, x_0, y_0)$.

Таку форму запису загального розв'язку називають загальним розв'язком у формі Коші.

Наприклад, маємо рівняння $y' = ky$, $k = \text{const}$. Умови теореми Коші виконуються в довільній точці (x_0, y_0) деякої області D площини xOy. Загальним розв'язком є функція $y = Ce^{kx}$. Якщо маємо початкові дані (1.20), то $y_0 = Ce^{kx_0}$. Звідси $C = y_0 e^{-kx_0}$, і розв'язком є

$$y = y_0 e^{k(x - x_0)}. \tag{1.35}$$

Якщо x_0 зафіксувати, а y_0 вважати довільним, то розв'язок (1.35) є загальним розв'язком заданого рівняння у формі Коші.

Таким чином, із теореми Коші випливає існування й загального розв'язку диференціального рівняння (1.19). Він охоплюватиме всі частинні розв'язки і матиме один параметр y_0, тобто одну довільну сталу. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку має одну довільну сталу.

1.4. Основні класи рівнянь, інтегровних у квадратурах

Рівняння з відокремлюваними змінними. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y), \tag{1.36}$$

в якому права частина є добуток функції, залежної тільки від x, на функцію, залежну тільки від y. Запишемо його у вигляді

$$\frac{1}{f_2(y)}\, dy = f_1(x)\, dx, \quad f_2(y) \neq 0. \tag{1.37}$$

Вважаючи y відомою функцією змінної x, розглянемо рівність (1.37) як рівність двох диференціалів. Тоді невизначені інтеграли від них відрізнятимуться на сталу величину. Інтегруючи ліву частину рівності (1.37) по y, а праву — по x, дістанемо

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\, dy = \int f_1(x)\, dx + C,$$

де C — довільна стала (стала інтегрування).

Диференціальне рівняння типу (1.37)

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{1.38}$$

де $M(x)$ і $N(y)$ — неперервні функції, називають рівнянням в відокремленими змінними. Загальний інтеграл його за доведеним вище має вид

$$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C, \tag{1.39}$$

тобто загальний інтеграл рівняння (1.38) знаходимо почленним інтегруванням.

Наприклад, нехай дано рівняння $2xdx + e^y dy = 0$, інтегруючи його почленно, дістанемо $x^2 + e^y = C$.

У більш загальному випадку рівняння з відокремлюваними змінними є рівняння виду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{1.40}$$

Воно зводиться до рівняння (1.38) діленням обох частин на вираз $N_1(y)M_2(x)$ (припускаємо, що $N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$). Тоді дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\, dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\, dy = 0. \tag{1.41}$$

Загальний інтеграл цього рівняння записуємо згідно з формулою (1.39).

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Розв'язання. Розділимо змінні

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, знайдемо

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

тобто

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|; \ \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Звідси загальний розв'язок є

$$y = \frac{C}{x}.$$

Зауваження

1. Найпростішим диференціальним рівнянням з відокремленими змінними є рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \ \text{ або } \ dy = f(x)\, dx,$$

його загальним розв'язком є функція

$$y = \int f(x)\, dx + C.$$

Як бачимо з цією задачею ми зустрічалися в теорії невизначеного інтегрування.

2. Рівняння виду

$$y' = f(ax + by + c),$$

де a, b, c — задані сталі величини, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$u = ax + by + c.$$

Тоді

$$y = \frac{1}{b}(u - ax - c), \quad y' = \frac{1}{b}(u' - a),$$

дістаємо рівняння

$$u' = a + bf(u),$$

яке допускає відокремлення змінних.

Справді, якщо $a + bf(u) \neq 0$, то

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx.$$

Інтегруючи, дістаємо загальний інтеграл

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = x + C.$$

Якщо $\varphi(u)$ — первісна для $\int \frac{du}{a + bf(u)}$, то $\varphi(u) = x + C$.

Тобто приходимо до загального інтегралу виду

$$\varphi(ax + by + c) - x = C.$$

Якщо $a + bf(u) = 0$, то рівняння матиме ще розв'язки виду

$$ax + by + c = \text{const}.$$

3. Розв'язування диференціальних рівнянь зводиться до обчислення невизначених інтегралів. Проте, як відомо, не кожний невизначений інтеграл можна обчислити в скінченному вигляді. Тоді вважають, що диференціальне рівняння розв'язано, якщо воно зведене до квадратур.

Наприклад, якщо в рівнянні

$$y' = \frac{x}{2y \ln x}$$

відокремити змінні, то дістанемо

$$\frac{x dx}{\ln x} = 2y dy,$$

звідки

$$\int \frac{x dx}{\ln x} + C = y^2.$$

Перший інтеграл не виражається через елементарні функції, проте говорять, що маємо загальний розв'язок у квадратурах.

Загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(x - xy)dy - ydx = 0$$

є

$$xe^y - Cy = 0.$$

Він записаний у неявному вигляді. Виразити явно y через x тут неможливо, але можна виразити x через y:

$$x = Cye^{-y}.$$

Звичайно, бажано виразити розв'язок в явному вигляді $y = \varphi(x, C)$, але якщо це неможливо, то під розв'язком розуміють функцію (задану явно, неявно, у квадратурах, параметрично), яка перетворює дане рівняння в тотожність.

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $y' = ky$ 2. $xy^2 + x + (y - x^2y)y' = 0$
3. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$
4. $(1 + x^2)y^3 + (1 - y^2)x^3y' = 0$
5. $e^y\sqrt{1 + x^2}\,dy + dx = 0$ 6. $\sqrt{1 - x^2}\,y' + \sqrt{1 - y^2} = 0$
7. $\operatorname{tg} y \sec^2 x dx + \operatorname{tg} x \sec^2 y dy = 0$ 8. $y' = 10^{x+y}$
9. $\sin x \cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$
10. $y - xy' = b(1 + x^2y')$
11. $(2 + y)\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + y^2}\,y'$
12. $e^y(y' + 1) = 1$ 13. $y^2 = xy' + y$
14. $x^2y' = a - y$ 15. $xy' = y^3 + y$
16. $\sin x dy - y \cos x dx = 0$ 17. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{xy(1 + x^2)}{1 + y^2}$

18. $y' \sin x = y \ln y$ 19. $y \ln y dx + x dy = 0$
20. $y' = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2 + 2} - \dfrac{1}{x(y^2 + 2)}$
21. $xdy - ydx = \sqrt{1 + x^2}\,dy + \sqrt{1 + y^2}\,dx$
22. $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$
23. $(1 + x^2)dy - xydx = 0$
24. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$ 25. $2x^2yy' + y^2 = 2$
26. $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$ 27. $y' - xy^2 = 2xy$
28. $x\dot{x} + t = 1$ 29. $xydx + (x + 1)dy = 0$
30. $y' + y^2 = 1$.

Задача про другу космічну швидкість. Знайти найменшу швидкість, з якою повинно рухатися тіло вертикально вгору, щоб воно не повернулося на Землю. Опором повітря нехтувати.

Нехай M — маса Землі, m — маса тіла. За законом всесвітнього тяжіння сила f взаємодії між тілом і Землею є:

$$f = k\frac{Mm}{r^2},$$

де r — віддаль від центра Землі до центра тіла масою m, k — гравітаційна стала.

Диференціальне рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{r} = -k\frac{Mm}{r^2} \quad \text{або} \quad \ddot{r} = -k\frac{M}{r^2}. \qquad (1.42)$$

Знак мінус показує, що тут прискорення від'ємне. Рівняння (1.42) розв'язуємо при початковій умові

$$r = R, \quad \dot{r} = v_0, \text{ якщо } t = 0,$$

де R — радіус Землі, v_0 — початкова швидкість. Позначимо

$$\dot{r} = v, \quad \ddot{r} = \dot{v} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr},$$

де v — швидкість руху. Тоді

$$v\frac{dv}{dr} = -k\frac{M}{r^2}.$$

Розділимо змінні:

$$vdv = -kM\frac{dr}{r^2}.$$

Інтегруюч , знаходимо

$$\frac{1}{2}v^2 = kM\frac{1}{r} + C_1. \qquad (1.43)$$

З умови, що на поверхні Землі $v = v_0$ при $r = R$ визначимо C_1:

$$\frac{1}{2}v_0^2 = kM\frac{1}{R} + C_1, \text{ або } C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{1}{2}v_0^2.$$

З рівняння (1.43) знаходимо

$$\frac{1}{2}v^2 = kM\frac{1}{r} + \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{kM}{R},$$

або

$$\frac{1}{2}v^2 = kM\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{kM}{R}\right). \qquad (1.44)$$

За умовою тіло повинно рухатися так, щоб швидкість завжди була додатною, тобто $\frac{1}{2}v^2 > 0$. Оскільки величина kM/r при необмеженому зростанні r є як завгодно малою, то умова $\frac{1}{2}v^2 > 0$ виконуватиметься при довільному r тільки тоді, коли

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{kM}{R} \geqslant 0, \qquad (1.45)$$

або

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Отже, найменша швидкість визначається рівністю

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}, \qquad (1.46)$$

де

$$k = 6{,}66\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2},\quad R = 63\cdot 10^5 \text{ м}.$$

На поверхні Землі при $r = R$ прискорення сили земного тяжіння $g = 9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. З рівності (1.42) маємо

$$g = k\frac{M}{R^2},\ \text{або}\ M = \frac{gR^2}{k}.$$

Підставляючи значення M в (1.46), дістаємо

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 63\cdot 10^5} \approx 11{,}2\cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = \left(11{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{с}}\right).$$

Однорідні диференціальні рівняння. Функцію $f(x, y)$ називають *однорідною степеня m*, якщо для довільних x, y і $\lambda > 0$ справджується тотожність $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Наприклад, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ є однорідна функція степеня 1, оскільки

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda\sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y),$$

а

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y};\ f(x, y) = \frac{x^3 + y^3 - 2xy^2}{x^2y - xy^2 + 2x^3 - y^3}$$

є однорідні функції нульового степеня, $m = 0$.

***Означення.** Диференціальне рівняння першого порядку*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1.47)$$

називають однорідним, якщо $f(x, y)$ є однорідна функція нульового степеня.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

За означенням

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Взявши $\lambda = 1/x$, дістанемо

$$f(x, y) = f(1, y/x).$$

Тому рівняння (1.47) запишуть так:

$$\frac{dy}{dx} = f(1, y/x).$$

Як бачимо, в однорідних рівняннях виду (1.47) права частина фактично залежить від змінної y/x. Застосуємо підстановку $u = y/x$, тобто $y = ux$.

Тоді $y' = u'x + u$, і однорідне рівняння (1.47) матиме вигляд

$$u'x + u = f(1, u),\ \text{або}\ u'x = f(1, u) - u.$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Звідси інтегруванням знаходимо

$$\int\frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C.$$

Якщо $F(u)$ — деяка первісна лівої частини цієї рівності то загальний інтеграл рівняння (1.47) є

$$F(y/x) = \ln|x| + C.$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + 1.$$

Розв'язання. Застосовуючи підстановку $u = \frac{y}{x}$, матимемо $u'x + u = u + 1$, або $u' = \frac{1}{x}$. Звідси $u = \ln|x| + C$, або остаточно $y = x\ln|x| + Cx$.

2. Розв'язати рівняння

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Розв'язання. Після підстановки $y = ux$ матимемо

$$xu' = u^2 - u.$$

Звідси

$$\frac{du}{u^2-u}=\frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=\ln|Cx|,$$

або

$$\frac{u-1}{u}=Cx, \quad u=\frac{1}{1+Cx}.$$

Загальний розв'язок:

$$y=\frac{x}{1+Cx}.$$

При розв'язуванні даного рівняння було виконано ділення на u^2-u, що можливо при $u^2-u\neq 0$. Отже, мабуть, було втрачено деякі розв'язки, що є коренями рівняння

$$u^2-u=0, \text{ тобто } \left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}=0.$$

З цього рівняння знаходимо дві функції

$$y=0 \quad \text{і} \quad y=x.$$

Функцію $y=x$ дістанемо як частинний розв'язок із загального при $C=0$. Функція $y=0$ є розв'язком даного рівняння, але його не можна дістати із загального ні при якому значенні довільної сталої C.

Розв'язок диференціального рівняння, який не можна дістати із загального ні при якому значенні довільної сталої C, називають *особливим* розв'язком.

У розглянутому вище прикладі $y=0$ є особливим розв'язком.

Диференціальне рівняння

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{1.48}$$

при

$$a_1b_2\neq a_2b_1, \text{ тобто } \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.49}$$

зводиться до однорідного підстановкою

$$x=x_1+h, \; y=y_1+k, \tag{1.50}$$

де сталі h і k добираються так, що

$$\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1=0,\\ a_2h+b_2k+c_2=0.\end{cases} \tag{1.51}$$

Система (1.51), згідно з (1.49), має єдиний розв'язок. Підставивши в (1.48) замість x і y їх значення з (1.50), дістанемо

$$\frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}{a_2x_1+b_2y_1+a_2h+b_2k+c_2}\right),$$

і, беручи до уваги (1.51), матимемо

$$\frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right). \tag{1.52}$$

У цьому рівнянні права частина є однорідна функція нульового степеня.

Якщо в рівнянні (1.48)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0, \text{ тобто } a_1b_2=a_2b_1, \tag{1.53}$$

то

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda \text{ і } a_1=\lambda a_2, \; b_1=\lambda b_2.$$

Тоді

$$y'=f\left(\frac{\lambda a_2x+\lambda b_2y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

Застосовуючи підстановку

$$z=a_2x+b_2y,$$

дістанемо

$$\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx}-\frac{a_2}{b_2}=f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right),$$

або

$$z'=b_2f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)+a_2.$$

Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Знайшовши його розв'язок і підставивши a_2x+b_2y замість z, дістанемо загальний розв'язок рівняння (1.48) при умові (1.53).

Перехід від рівняння (1.48) до (1.52) з геометричної точки зору означає, що початок системи координат переносимо в точку (h, k) перетину прямих

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ і } a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Умова (1.53) свідчить про те, що ці прямі паралельні.

Рівняння

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{1.54}$$

буде однорідним, якщо функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ є однорідні одного й того самого степеня m.

Наприклад, рівняння

$$(2x+3y)dx+(x-2y)dy=0,$$
$$(x^2+y^2)\,dx-2xydy=0$$

є однорідними.

Якщо коефіцієнти рівняння (1.54) задовольняють умови

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda^k y)&=\lambda^m M(x, y),\\ N(\lambda x, \lambda^k y)&=\lambda^{m-k+1}N(x, y),\end{aligned} \tag{1.55}$$

то його називають *узагальнено-однорідним* рівнянням. Інакше кажучи, якщо існує таке число k, що при підстановці в рівняння (1.54) замість x, y і dy відповідно λx, $\lambda^k y$, $\lambda^{k-1}dy$ дістанемо те саме рівняння (1.54), то воно називається узагальнено-однорідним рівнянням.

Нехай у (1.55) $\lambda = 1/x$. Тоді

$$M(x, y) = x^m M(1, y/x^k); \quad N(x, y) = x^{m-k+1} N(1, y/x^k)$$

і рівняння (1.54) можна записати так:

$$x^m M(1, y/x^k)\,dx + x^{m-k+1} N(1, y/x^k)\,dy = 0.$$

Поклавши $y = z^k$, $dy = kz^{k-1}dz$ і скоротивши на x^m, дістанемо

$$M(1, z^k/x^k)\,dx + k\frac{x^{1-k}}{z^{1-k}} N(1, z^k/x^k)\,dz = 0. \qquad (1.56)$$

Це рівняння не зміниться, якщо в ньому x і z замінити відповідно на λx і λz. Отже, це рівняння однорідне.

Таким чином, узагальнено-однорідне рівняння підстановкою

$$y = z^k \qquad (1.57)$$

зводиться до однорідного.

Для того щоб рівняння (1.56) звести до рівняння в відокремлюваними змінними, треба ввести змінну

$$u = z^k/x^k. \qquad (1.58)$$

З (1.57) і (1.58) випливає, що узагальнено-однорідне рівняння заміною

$$u = y/x^k,$$

де u — нова невідома функція, зводиться до рівняння в відокремлюваними змінними.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$4xydx + (y - x^2)dy = 0.$$

Розв'язання. Зробимо заміну x, y і dy відповідно на λx, $\lambda^k y$, $\lambda^{k-1}dy$:

$$4\lambda x\lambda^k ydx + (\lambda^k y - \lambda^2 x^2)\lambda^{k-1}dy = 0,$$

або

$$4\lambda^{k+1} xydx + (\lambda^{2k-1}y - \lambda^{k+1}x^2)\,dy = 0.$$

При цьому щоб рівняння не змінилося, треба число k взяти таким, яке задовольняло б рівність

$$k + 1 = 2k - 1 = k + 1,$$

звідки $k = 2$.

Отже, маємо узагальнено-однорідне рівняння і $k = 2$.

Виконаємо заміну

$$y = zx^2, \quad dy = x^2dz + 2xzdx.$$

Тоді

$$4x^3zdx + (zx^2 - x^2)(x^2dz + 2xzdx) = 0;$$
$$2z(1 + z)dx + x(z - 1)dz = 0;$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{(z-1)}{2z(z+1)}dz = 0.$$

Звідси

$$\ln x - \frac{1}{2}\ln z + \ln(z+1) = \ln C.$$

Потенціюючи і переходячи до попередніх змінних, дістаємо загальний інтеграл $(y + x^2)^2 = Cy$.

Так само розв'язують рівняння

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0;$$
$$(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0;$$
$$9ydy + (4x^3 - 18xy)dx = 0.$$

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$
2. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$
3. $y^2dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$
4. $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)\,dx - x^2e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0$
5. $(x^2 + y^2)\,dx + xydy = 0$
6. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ 7. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
8. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$
9. $ydx + (x + y)\,dy = 0$ 10. $ydx - (x + y)\,dy = 0$
11. $(2\sqrt{xy} - y)\,dx + xdy = 0$
12. $(x^2 - y^2)\,dy - 2xydx = 0$
13. $(3xy^2 + 2x^3)\,dx + y^3dy = 0$
14. $(x + 2y)\,dx - xdy = 0$
15. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$
16. $((x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2)\,dx - xydy = 0$
17. $(x - \sqrt{xy} - y)\,dx + \sqrt{xy}\,dy = 0$
18. $xy' - y\ln\frac{y}{x} = 0$
19. $x\cos\frac{y}{x}(ydx + xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdy - ydx)$
20. $y' = \frac{x + y}{x - y}$ 21. $y - xy' = y\ln\frac{x}{y}$.
22. $y^2 + x^2y' = xyy'$ 23. $(x^2 + y^2)\,y' = 2xy$
24. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ 25. $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2dy = 0$
26. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$ 27. $\dot{s} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$
28. $(y + 2)\,dx = (2x + y - 4)\,dy$
29. $x^3(y' - x) = y^2$ (підстановка $y = x^2z$)
30. $2ydx - (x + y)\,dy = 0.$

Лінійні диференціальні рівняння. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x). \qquad (1.59)$$

Воно лінійне відносно y і y'; $P(x)$, $Q(x)$ — задані неперервні функції в деякому проміжку змінної x. Наприклад,

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}.$$

Тут

$$P(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad Q(x) = \frac{ax}{1-x^2}.$$

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (1.59) набирає вигляд

$$y' + P(x)y = 0 \qquad (1.60)$$

і називається *лінійним однорідним рівнянням*, а якщо $Q(x) \not\equiv 0$, то — *лінійним неоднорідним*.

Розглянемо два способи розв'язання диференціального рівняння (1.59).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Однорідне рівняння (1.60) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Маємо

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx, \; y \neq 0, \; \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)\,dx, \; C \neq 0,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \qquad (1.61)$$

Дістали загальний розв'язок рівняння (1.60), де C — довільна стала. Очевидно, функція (1.61) не задовольнятиме рівняння (1.59), якщо $Q(x)$ не дорівнює тотожно нулю.

Знайдемо розв'язок рівняння (1.59) у вигляді (1.61), замінивши довільну сталу C функцією $C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}. \qquad (1.62)$$

Підставляючи (1.62) у рівняння (1.59), дістаємо

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx} + $$
$$+ P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

або

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

звідки

$$C'(x) = e^{\int P(x)\,dx}Q(x).$$

Отже,

$$C(x) = \int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx + C_1$$

є така функція від x, що (1.62) є загальним інтегралом рівняння (1.59).

Таким чином, загальним інтегралом рівняння (1.59) є функція

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx + C_1\right).$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}. \qquad (1.63)$$

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$y' + \frac{x}{1-x^2} = 0. \qquad (1.64)$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1-x^2}.$$

Звідси

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C,$$

або

$$|y| = e^C\sqrt{1-x^2}$$

і, нарешті,

$$y = C\sqrt{1-x^2}. \qquad (1.65)$$

Дістали загальний інтеграл рівняння (1.64). Підставимо тепер функцію (1.65) у рівняння (1.63), вважаючи, що C є функція від x. Матимемо

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{ax}{(1-x^2)^{3/2}},$$

звідки

$$C(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C_1$$

і остаточно

$$y = a + C_1\sqrt{1-x^2}.$$

Дістали загальний інтеграл рівняння (1.63).

Спосіб підстановки. У рівняння (1.59) підставимо замість функції y добуток двох функцій u і v:

$$y = uv.$$

Дістанемо рівняння

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) = Q(x). \qquad (1.66)$$

Підберемо функцію v так, щоб вираз, який стоїть у дужках, дорівнював нулю, тобто

$$\frac{dv}{dx} + P(x)\,v = 0,$$

звідки

$$v = e^{-\int P(x)\,dx}$$

(беремо частинний розв'язок при $C = 1$). Знайдене значення підставляємо в (1.66):

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x).$$

Звідси

$$du = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx,$$

$$u = \int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + C.$$

Оскільки $y = u \cdot v$, то загальний інтеграл матиме вигляд

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + C\right).$$

П р и к л а д. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Розв'язання. Нехай $y = u \cdot v$, тоді

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + uv\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

або

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\cos x\right) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Прирівнюємо до нуля вираз у дужках:

$$\frac{dv}{dx} + v\cos x = 0.$$

Звідси

$$\frac{dv}{v} = -\cos x\,dx.$$

Отже,

$$\ln|v| = -\sin x, \quad v = e^{-\sin x}.$$

Підставляємо замість v його значення

$$e^{-\sin x}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Звідси

$$du = e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx.$$

Проінтегрувавши цей вираз, дістанемо

$$u = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Оскільки $y = uv$, то загальним розв'язком є функція

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$. 2. $dy - \frac{xydx}{1+x^2} = \frac{adx}{1+x^2}$.

3. $y' - \frac{3y}{x} = x$. 4. $x^2dy - (2xy+3)\,dx = 0$.

5. $y' - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 6. $(1-x^2)\,dy + x(y-a)\,dx = 0$.

7. $y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x\operatorname{ctg} x$. 8. $y' - ay = x$.

9. $(2e^y - x)\,y' = 1$. 10. $y' + \frac{xy}{a^2+x^2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}$.

11. $y'x(1-x^2) + (2x^2-1)\,y = ax^2$. 12. $y'\cos x + y\sin x = 1$.

13. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. 14. $y' + ay - e^{mx} = 0$.

15. $y'x^2 - 2xy = 3y$. 16. $y' - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = a\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. $y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}$. 18. $y' + xy = x^3$.

19. $(1+x)\,y' + y = \cos x$. 20. $(2x+1)\,y' = 4x + 2y$.

21. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$. 22. $xy' - 3y = x^2$.

23. $y' = \frac{y}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\operatorname{arctg} x$.

24. $y'(1-x^2)^{3/2} = xy + e^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(1-x^2)^{3/2}\cos^2 x$.

25. $x^2y' - 2xy = 3$. 26. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^3}y^3$.

27. $xy' - 2y = 2x^4$. 28. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

29. $y' + y = e^x$. 30. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Рівняння Бернуллі. Диференціальне рівняння

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^m; \quad m \neq 0, \ m \neq 1,$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — задані неперервні функції, називають диференціальним рівнянням Бернуллі. Очевидно, при $m = 0$ і при $m = 1$ це рівняння — лінійне, тому вважатимемо, що $m \neq 0$, $m \neq 1$.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного спочатку множенням його на вираз $(1-m)y^{-m}$, $y \neq 0$,

$$(1-m)\,y^{-m}y' + (1-m)\,P(x)\,y^{1-m} = (1-m)\,Q(x),$$

а потім заміною

$$y^{1-m} = z, \ (1-m)\,y^{-m}y' = z'.$$

В результаті дістанемо лінійне диференціальне рівняння

$$z' + (1-m)P(x)z = (1-m)Q(x).$$

Нехай загальним розв'язком його є функція $z(x)$, тоді загальним розв'язком рівняння Бернуллі є

$$y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-m}}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y' + 2y = y^3.$$

Розв'язання. Тут $m = 3$, $1 - m = 1 - 3 = -2$. Отже,

$$-2y^{-3}y' - 4y^{-2} = -2.$$

Зробимо підстановку

$$y^{-2} = z; \quad -2y^{-3}y' = z'.$$

Дістанемо рівняння

$$z' - 4z = -2.$$

Це лінійне рівняння із загальним розв'язком

$$z = Ce^{4x} + \frac{1}{2}.$$

Тоді загальним розв'язком заданого рівняння буде функція

$$y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{4x} + \frac{1}{2}}}.$$

Зазначимо, що рівняння Бернуллі можна відразу розв'язувати за допомогою підстановки $y = u(x)v(x)$. Потім розв'язуємо його як лінійне рівняння.

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $y' = \frac{xy}{1-x^2} + x\sqrt{y}$.
2. $(1-x^2)y' - xy = axy^2$.
3. $y'x + y = xy^2 \ln x$.
4. $y'x^2y^2 + xy^3 = a^2$.
5. $y' + 2y \operatorname{tg} x = ay^2 \operatorname{ctg} x$.
6. $y' + xy = xy^3$.
7. $2ydy = (x + y^2)\,dx$.
8. $y' - \frac{3y}{x} + x^3y^2 = 0$.
9. $xdx - \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy = 0$.
10. $xy' - 2x^3\sqrt{y} = 4y$.

Зауваження. Деякі рівняння зводяться до лінійного за допомогою певних перетворень або підстановок. Так, рівняння

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} + \frac{Q(x)}{\varphi'(y)}$$

зводиться до лінійного підстановкою $z = \varphi(y)$.

Оскільки

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \varphi'(y)\frac{dy}{dx},$$

то задане рівняння можна записати так:

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z + Q(x).$$

Таким чином, дістали лінійне диференціальне рівняння.

Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)e^{ny}$$

зводиться до лінійного діленням на e^{ny} і підстановкою

$$e^{-ny} = z.$$

Деякі рівняння зводяться до лінійних, якщо x вважати функцією, а y — аргументом.

Наприклад, рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C(y)}{A(y)\,x + B(y)}$$

зведемо до лінійного, якщо запишемо його так:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A(y)}{C(y)}x + \frac{B(y)}{C(y)}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy + y^3}.$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним відносно функції x:

$$x' - 2yx = y^3, \text{ де } x' = \frac{dx}{dy}.$$

Отже, його розв'язком є функція

$$x(y) = Ce^{y^2} - \frac{1}{2}(1 + y^2).$$

Рівняння Ріккаті. Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

називають *рівнянням Ріккаті*. Воно може бути зведене до лінійного рівняння, якщо відомо один його частинний розв'язок $y = y_1(x)$.

Справді, виконаємо заміну

$$y = y_1 + z,$$

де z — нова невідома функція. Тоді

$$y_1' + z' = P(x)y_1^2 + 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)y_1 + Q(x)z + R(x).$$

Оскільки

$$y_1' \equiv P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x),$$

то дістанемо рівняння Бернуллі

$$z' - (2P(x)y_1 + Q(x))z = P(x)z^2.$$

Підстановкою $u = \frac{1}{z}$ воно зводиться до лінійного

$$u' + (2P(x)y_1 + Q(x))u = -P(x).$$

Отже, рівняння Ріккаті у випадку, коли відомо один окремий його розв'язок, інтегрується двома квадратурами. На практиці можна відразу виконувати підстановку

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

за якою рівняння Ріккаті безпосередньо зводиться до лінійного рівняння.

ВПРАВА

Розв'язати рівняння

$$y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1,$$

в якого $y_1 = x$ — частинний розв'язок.

Рівняння в повних диференціалах

Означення. *Диференціальне рівняння*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.67}$$

називають рівнянням в повних диференціалах, якщо функції $M(x, y)$ *і* $N(x, y)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні в заданій області, для яких виконується рівність*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.68}$$

Інтегрування рівняння в повних диференціалах. Покажемо, що коли ліва частина рівняння (1.67) є повним диференціалом, то виконується умова (1.68), і навпаки — при виконанні умови (1.68) ліва частина рівняння (1.67) є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, тобто рівняння (1.67) має вигляд

$$dU(x, y) = 0; \tag{1.69}$$

$$(dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy).$$

Загальним інтегралом цього рівняння є функція

$$U(x, y) = C. \tag{1.70}$$

Припустимо спочатку, що ліва частина рівняння (1.67) є повним диференціалом функції $U(x, y)$, тобто

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Тоді

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \qquad 1.71$$

Оскільки за умовою функції M, N мають неперервні частинні похідні, то мішані похідні функції $U(x, y)$ не залежать від порядку диференціювання. Тоді, диференціюючи першу рівність з (1.71) по y, другу — по x, дістаємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Звідси за умовою теореми Ейлера про рівність мішаних похідних матимемо рівність (1.68). Це необхідна умова того, щоб ліва частина рівняння (1.67) була повним диференціалом деякої функції.

Покажемо, що ця умова є і достатньою, тобто при виконанні умови (1.68) ліва частина рівняння (1.67) є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$.

З рівності

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$$

знаходимо

$$U = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y),$$

де x_0— деяка точка з області існування розв'язку. Підберемо $\varphi(y)$ так, щоб виконувалася умова $N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$. Для цього продиференціюємо останню рівність по y і результат прирівняємо до $N(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Оскільки

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

то

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx + \varphi'(y) = N;$$

$$N(x, y)\big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y);$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y);$$

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

або

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C_1.$$

Таким чином, функція $U(x, y)$ матиме вид

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C_1.$$

При цьому $P(x_0, y_0)$ — точка, в околі якої існує розв'язок диференціального рівняння (1.67). Прирівнюючи здобутий вираз до довільної сталої C, дістанемо загальний інтеграл рівняння (1.67):

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \qquad (1.71)$$

Приклади

1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$$

Розв'язання. Тут $M = e^y$, $N = xe^y - 2y$. Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y, \ \frac{\partial N}{\partial x} = e^y.$$

Умову (1.68) виконано. Отже, це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Згідно з (1.71), маємо

$$\int_{x_0}^{x} e^y dt + \int_{y_0}^{y} (x_0 e^t - 2t)\,dt = e^y t\,\Big|_{x_0}^{x} + (x_0 e^t - t^2)\,\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= e^y(x - x_0) + x_0 e^y - y^2 - x_0 e^{y_0} + y_0^2 = xe^y - x_0 e^y +$$

$$+ x_0 e^y - y^2 - x_0 e^{y_0} + y_0^2 = xe^y - y^2 - x_0 e^{y_0} + y_0^2.$$

Оскільки x_0, y_0 — сталі величини, то можна взяти

$$U(x, y) = xe^y - y^2,$$

і, таким чином, шуканий загальний інтеграл заданого рівняння матиме вигляд

$$xe^y - y^2 = C.$$

2. Знайти частинний інтеграл рівняння

$$\frac{x^2 - y}{x^2}\,dx + \frac{x + 1}{x}\,dy = 0$$

при початкових умовах $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Розв'язання. Умова (1.68) виконується. При цьому $M(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2}$, $N(x, y) = 1 + \frac{1}{x}$. Отже, маємо:

$$\int\left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx = x + \frac{y}{x} \ \text{(при сталому } y);$$

$$\int\left(1 + \frac{1}{x}\right) dy = y + \frac{y}{x} \ \text{(при сталому } x).$$

Об'єднуючи ці вирази, беручи y/x тільки один раз, дістанемо загальний інтеграл

$$x + y + \frac{y}{x} = C.$$

Підставивши початкові умови, знайдемо $C = 3$. Отже, маємо такий частинний інтеграл:

$$x + y + \frac{y}{x} = 3.$$

Формула (1.71) дає змогу безпосередньо дістати розв'язок задачі Коші з початковими даними x_0, y_0, якщо точка (x_0, y_0) належить області неперервності функцій $M(x, y)$ і $N(x, y)$. Для цього досить взяти як нижні межі інтегрування ці початкові дані і покласти $C = 0$. Дістанемо єдиний розв'язок задачі Коші.

Для прикладу 2 маємо

$$\int_1^x \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \int_1^y \left(1 + \frac{1}{1}\right) dy = 0;$$

$$\left(x + \frac{y}{x}\right)\Big|_1^x + 2y\Big|_1^y = 0;$$

$$x + \frac{y}{x} - 1 - \frac{y}{1} + 2y - 2 = 0,$$

або

$$x + y + \frac{y}{x} = 3.$$

Інтегруючий множник. Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1.72)$$

не є повним диференціалом, то можна довести, що завжди існує такий відмінний від сталого числа множник, в результаті множення на який вираз стає повним диференціалом. Цей множник називають *інтегруючим множником* диференціального рівняння. Вперше він запроваджений як метод інтегрування Л. Ейлером.

Нехай маємо рівняння

$$xdy - ydx = 0.$$

Ліва частина його не є повним диференціалом. Справді,

$$M = -y, \ N = x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \ \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

тобто

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\frac{1}{x^2}$, дістанемо

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

тобто ліва частина є повним диференціалом функції

$$U = \frac{y}{x}.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння є

$$\frac{y}{x} = C, \text{ або } y = Cx.$$

Знаходження інтегруючих множників диференціального рівняння є досить складною задачею, яка розв'язується лише в окремих випадках і зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних. У загальному випадку ця задача є значно складнішою, ніж інтегрування самого рівняння.

Проте може трапитися так, що інтегруючий множник буде функцією тільки однієї змінної, x або y. Тоді знаходження інтегруючого множника спрощується. При цьому навіть можна вивести для нього формулу.

Справді, нехай $\mu = \mu(x)$ — інтегруючий множник рівняння (4.39):

$$\mu(x) M(x, y) dx + \mu(x) N(x, y) dy = 0.$$

Щоб це рівняння було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x) M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x) N(x, y)),$$

або

$$\mu(x)\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx} N(x, y) + \mu(x)\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Тоді для функції $\mu(x)$ матимемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right)\frac{dx}{N(x, y)} \qquad (1.73)$$

при $N(x, y) \neq 0$.

Якщо в правій частині функція

$$\varphi(x) = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right)\frac{dx}{N(x, y)} \qquad (1.74)$$

є функцією тільки від x, то з рівняння (1.73) знаходимо

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\, dx} \qquad (1.75)$$

(вважаємо, що стала інтегрування дорівнює 1). Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Запишемо диференціальне рівняння (1.73) у вигляді

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\varphi(x).$$

Підставивши сюди значення $\mu(x)$, дістанемо тотожність

$$e^{\int \varphi(x)\, dx}\varphi(x) \equiv e^{\int \varphi(x) \cdot dx}\varphi(x).$$

Отже, функція (1.75) є розв'язком диференціального рівняння (1.73).

Формула (1.73) є формулою для інтегруючого множника при умові, що він залежить тільки від x. Якщо інтегруючий множник залежить тільки від y, то матимемо аналогічну формулу

$$\mu = e^{\int \psi(y)\, dy}, \quad \psi(y) = -\left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right)\frac{1}{M(x, y)}.$$

Приклади

1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(2xy^2 - y)\, dx + (y^2 + x + y)\, dy = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Тоді

$$\frac{1}{M(x,y)} \cdot \left(-\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\right) = -\frac{4xy - 1 - 1}{2xy^2 - y} = -\frac{2}{y} = \psi(y).$$

Скориставшись формулою (1.76), дістанемо

$$\mu(y) = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}.$$

Помноживши обидві частини заданого рівняння на інтегруючий множник $\mu(y) = 1/y^2$, дістанемо

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Це рівняння в повних диференціалах. Справді,

$$M(x, y) = 2x - \frac{1}{y}, \quad N(x, y) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y^2}.$$

Отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Загальний інтеграл знаходимо за формулою (1.71):

$$\int_0^x \left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \int_1^y \left(1 + \frac{0}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = C_1,$$

тобто

$$\left(x^2 - \frac{x}{y}\right)\Big|_0^x + (y + \ln|y|)\Big|_1^y = C_1,$$

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| - 1 = C_1,$$

або

$$x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|=C,\ C\stackrel{\text{def}}{=}C_1+1.$$

2. Розв'язати рівняння

$$\left(1+\frac{5y^2}{x^2}\right)dx=\frac{2y}{x}dy.$$

Розв'язання. Маємо

$$M(x,\ y)=1+\frac{5y^2}{x^2},\quad N(x,\ y)=-\frac{2y}{x}.$$

Тоді

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{10y}{x^2},\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}.$$

Отже,

$$\frac{\partial M(x,\ y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,\ y)}{\partial x}.$$

Щоб скористатися формулою (1.75), знайдемо

$$\varphi(x)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{1}{N}=\left(\frac{10y}{x^2}-\frac{2y}{x^2}\right)\left(-\frac{x}{2y}\right)=-\frac{4}{x}.$$

Інтегруючий множник

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)\,dx}=e^{-4\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x^4}.$$

Помножимо обидві частини заданого рівняння на $\mu(x)=1/x^4$:

$$\left(\frac{1}{x^4}+\frac{5y^2}{x^6}\right)dx-\frac{2y}{x^5}dy=0.$$

У цьому рівнянні

$$M(x,\ y)=\frac{1}{x^4}+\frac{5y^2}{x^6},\quad N(x,\ y)=-\frac{2y}{x^5}.$$

Тоді

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{10y}{x^6},\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{10y}{x^6},$$

тобто дістали рівняння в повних диференціалах. Загальний інтеграл його знаходимо за формулою (1.71).

3. Знайти інтегруючий множник лінійного неоднорідного рівняння

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x).$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді

$$(P(x)\,y-Q(x))\,dx+dy=0,$$

де

$$M(x,\ y)=P(x)\,y-Q(x),\ N(x,\ y)=1.$$

Шукатимемо множник, який задовольняє рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M(x,\ y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N(x,\ y)).$$

Складемо рівняння для $\mu(x,\ y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(Py-Q))-\frac{\partial}{\partial x}(\mu\cdot 1)=0,$$

$$\frac{-\partial\mu}{\partial x}+(Py-Q)\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu P=0.$$

Підберемо таке μ, яке б не залежало від y, тобто $\partial\mu/\partial y=0$. Тоді для μ дістанемо рівняння

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu P,\ \text{або}\ \frac{d\mu}{\mu}=Pdx.$$

Звідси

$$\mu=e^{\int Pdx}.$$

Справді,

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+Pye^{\int Pdx}=\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)$$

і лінійне рівняння зводиться до

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=Qe^{\int Pdx}.$$

Отже,

$$ye^{\int Pdx}=C+\int e^{\int Pdx}Qdx,$$

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int e^{\int Pdx}Qdx+C\right).$$

Зазначимо, що коли $\mu_0(x,\ y)$ є інтегруючий множник рівняння (1.72), а $U_0(x,\ y)$ — відповідний загальний інтеграл, то можна довести, що всі інтегруючі множники цього рівняння задаються формулою

$$\mu(x,\ y)=\mu_0(x,\ y)\varphi(U_0(x,\ y)),$$

де φ — довільна неперервно диференційована функція. Тому інтегруючий множник рівняння (1.72) іноді можна знаходити таким чином. Зобразимо рівняння (1.72) у вигляді

$$M_1(x,\ y)dx+N_1(x,\ y)dy+M_2(x,\ y)dx+N_2(x,\ y)dy=0.$$

Нехай знайдено інтегруючі множники $\mu_1(x,\ y)$, $\mu_2(x,\ y)$ і відповідні інтеграли $U_1(x,\ y)$, $U_2(x,\ y)$ рівнянь

$$M_1(x,\ y)dx+N_1(x,\ y)dy=0,\tag{1.76}$$

$$M_2(x,\ y)dx+N_2(x,\ y)dy=0.\tag{1.77}$$

Знайдемо інтегруючі множники. Для рівняння (1.76) $\mu(x,\ y)=\mu_1(x,\ y)\varphi_1(U_1(x,\ y))$, а для рівняння (1.77) $\mu(x,\ y)=\mu_2(x,\ y)\cdot\varphi_2(U_2(x,\ y))$, де φ_1, φ_2 — довільні неперервно диференційовні функції. Якщо можна підібрати функції $\varphi_1^*(z)$, $\varphi_2^*(z)$ так, щоб виконувалась умова

$$\mu_1(x,\ y)\varphi_1^*(U_1(x,\ y))=\mu_2(x,\ y)\varphi_2^*(U_2(x,\ y)),$$

то функція

$$\mu(x, y) = \mu_1(x, y)\varphi_1^*(U_1(x, y)) \qquad (1.78)$$

є інтегруючим множником рівняння (1.72).

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(x^3 - xy^2 - y)dx + (x^2y - y^3 + x)dy = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння запишемо так:

$$x(x^2 - y^2)dx + y(x^2 - y^2)dy + xdy - ydx = 0.$$

Розглянемо рівняння

$$x(x^2 - y^2)dx + y(x^2 - y^2)dy = 0. \qquad (1.79)$$

Інтегруючим множником його є, наприклад, функція

$$\mu_1^0(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}.$$

Справді, помноживши обидві частини рівняння (1.79) на цей множник, дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$xdx + ydy = 0,$$

або

$$d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0.$$

Звідси $x^2 + y^2 = C$.

Отже, інтегруючі множники рівняння (1.79) знаходяться за формулою

$$\mu_1(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}\varphi_1(x^2 + y^2).$$

Розглянемо рівняння

$$xdy - ydx = 0. \qquad (1.80)$$

Одним з інтегруючих множників його є, наприклад, функція

$$\mu_2^0(x, y) = 1/xy,$$

а відповідний загальний інтеграл

$$\frac{y}{x} = C.$$

Отже, інтегруючі множники рівняння (1.80) знаходяться за формулою

$$\mu_2(x, y) = \frac{1}{xy}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Оскільки функції φ_1 і φ_2 довільні, то виберемо їх так, щоб виконувалася рівність

$$\frac{1}{x^2 - y^2}\varphi_1(x^2 + y^2) = \frac{1}{xy}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тоді матимемо

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

Інтегруючим множником заданного рівняння, згідно з (1.78), може бути функція

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}.$$

Справді, помноживши обидві частини заданного рівняння на цю функцію, дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$\left(x - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0.$$

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $(2x - y)dx + (4y - x)dy = 0$
2. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$
3. $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$
4. $(x + y)dx + (2y + x)dy = 0$
5. $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$
6. $(\ln y - 2x)\,dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$
7. $(2y - xe^y)\,y' = e^y$
8. $e^x(1 + e^y)\,dx + e^y(1 + e^x)\,dy = 0$
9. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$
10. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$

Знайти інтегруючий множник і розв'язати такі рівняння:

11. $\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$
12. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2ydy = 0$
13. $(7xy^3 + y - 5x)y' + y^4 - 5y = 0$
14. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$
15. $y' + P(x)y = Q(x)y^m, \quad m \ne 0, \ m \ne 1$
16. $ye^{-\cos x}\,dx + \frac{\ln y}{\sin x}\,dy = 0$
17. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$
18. $(xy - x^2)dy + (y^2 - 3xy - 2x^2)dx = 0$
19. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$
20. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0.$

1.5. Диференціальні рівняння, не розв'язні відносно похідної

Загальний вид диференціального рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1.81)$$

Вище було розглянуто питання про знаходження розв'язку рівняння (1.81), якщо воно розв'язне відносно похідної.

Проте існують деякі типи рівнянь виду (1.81), не розв'язних відносно похідної, але для яких можна визначити спосіб знаходження розв'язків.

Рівняння степеня n. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0, \qquad (1.82)$$

де $a_k(x, y)$, $k = 0, 1, \ldots, n$,— функції, неперервні в деякій області D площини xOy. Рівняння виду (5.2) називають *диференціальним рівнянням першого порядку степеня n.*

Припустимо, що в області D функція $a_0(x, y) \neq 0$. Тоді, згідно з основною теоремою алгебри, зробимо висновок, що рівняння (1.82) визначає n значень для y'. Відкидаючи уявні значення, матимемо $m \leqslant n$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язних відносно похідної:

$$y'_k = f_k(x, y), \ k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (1.83$$

Кожне з цих рівнянь задає в деякій області D_1 площини xOy своє поле напрямків. Якщо $f_k(x, y)$ в області D_1 задовольняють умови теореми Коші, то через кожну точку області D_1 проходить m інтегральних кривих диференціального рівняння (1.82). Щоб знайти ці криві, треба проінтегрувати кожне з (1.83). Сукупність здобутих таким чином загальних розв'язків

$$y_k = \varphi_k(x, C),$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_k(x, y, C) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

де C — довільна стала, і є загальним інтегралом рівняння (1.82).

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x(y')^2 - 2yy' - x = 0.$$

Розв'язання. Нехай $x \neq 0$. Тоді дістанемо два диференціальних рівняння

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}.$$

Ці диференціальні рівняння є однорідними. Розв'язуючи їх, знайдемо загальний інтеграл заданого рівняння у вигляді

$$y = \frac{1}{2}Cx^2 - \frac{1}{2C}, \ y = -\frac{1}{2}Cx^2 - \frac{1}{2C},$$

де C — довільна стала.

Рівняння, яке містить тільки y'. Нехай функція $F(x, y, y')$ у рівнянні (1.81) залежить тільки від y', тобто маємо диференціальне рівняння

$$F(y') = 0. \qquad (1.84)$$

Нехай рівняння (1.84) має деяке (скінченне або нескінченне) число дійсних коренів

$$y' = k_i, \ i = 1, 2, \ldots, \qquad (1.85)$$

де k_i = const, які не заповнюють повністю деякий інтервал.

З рівняння (1.85) знаходимо

$$y = k_i x + C,$$

або

$$k_i = \frac{y - C}{x}.$$

Отже, диференціальне рівняння (1.84) має загальний інтеграл

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \qquad (1.86)$$

Наприклад, диференціальне рівняння

$$(y')^4 - 4(y')^2 + 1 = 0$$

має загальний інтеграл

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^4 - 4\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Зазначимо, що коли корені (1.85) заповнюють цілком деякий інтервал, то диференціальне рівняння (1.84) матиме розв'язки, відмінні від (1.86).

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y' + |y'| = 0.$$

Розв'язання. Коренями цього рівняння є $y' = k$, де $-\infty < k \leqslant 0$, які повністю заповнюють піввідрізок $(-\infty, 0]$. Тоді, крім інтегральних кривих

$$y = kx + C, \ -\infty < k \leqslant 0,$$

розв'язком заданого рівняння є також функція

$$y = -x^n, \ 0 \leqslant x < +\infty,$$

яка при $n > 1$ не належить до сім'ї здобутих інтегральних кривих.

Рівняння, яке не містить функції y. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$F(x, y') = 0, \qquad (1.87)$$

яке явно не містить y.

Нехай задане рівняння розв'язне відносно y', тоді матимемо

$$y' = f_k(x), \ k = 1, 2, \ldots, \qquad (1.88)$$

де $f_k(x)$ за припущенням є дійсні неперервні функції на деякому проміжку. Інтегруючи рівняння (1.88), знайдемо загальні розв'язки

$$y = \int f_k(x)\,dx + C, \ k = 1, 2, \ldots$$

Сукупність цих розв'язків є загальним інтегралом диференціального рівняння (1.87).

Нехай рівняння (1.87) не розв'язне відносно y', але розв'язне відносно x:

$$x = \varphi(y'), \tag{1.89}$$

де $\varphi(y')$ — диференційовна функція в деякій області зміни y'. Тоді для інтегрування рівняння (1.87) застосуємо такий спосіб.

Введемо позначення $y' = p(x)$. З рівняння (1.89) матимемо

$$x = \varphi(p).$$

Виразимо шукану функцію y через p, скориставшись тотожністю

$$dy = y'dx.$$

Підставляючи сюди значення

$$dx = \varphi'(p)dp,$$

дістанемо

$$dy = p\varphi'(p)dp,$$

звідки

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (1.87) можна записати в параметричному вигляді

$$x = \varphi(p), \ y = \int p\varphi'(p)\,dp + C. \tag{1.90}$$

Якщо із системи рівнянь (1.90) можна виключити параметр p, то знайдемо загальний розв'язок $y = \psi(x, C)$, або загальний інтеграл $\Phi(x, y, C) = 0$ рівняння (1.87).

Слід зазначити, що іноді зручніше за параметр p брати не y', а $p = \omega(y')$.

Припустимо, що диференціальне рівняння (1.87) не розв'язне ні відносно y', ні відносно x. Проте його можна записати в параметричній формі

$$x = \varphi(t), \ y' = \psi(t), \ t \in (\alpha; \beta), \tag{1.91}$$

так, що при $t \in (\alpha; \beta)$ виконується тотожність

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Тоді з рівностей (1.91) знайдемо

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Загальний інтеграл рівняння (1.91) запишеться в параметричній формі

$$x = \varphi(t), \ y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C. \tag{1.92}$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'\sin y' - x = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння можна розв'язати відносно x:

$$x = y'\sin y'.$$

Поклавши $y' = p$ і скориставшись формулами (1.90), матимемо

$$x = p\sin p, \ y = (p^2 - 1)\sin p + p\cos p + C.$$

2. Розв'язати рівняння

$$x - ay' - b\sqrt{1 + (y')^2} = 0.$$

Розв'язання. Введемо позначення

$$y' = \operatorname{tg} p, \ \ p = \operatorname{arctg} y'.$$

Тоді

$$x = a\operatorname{tg} p + b\sec p,$$

$$y = \frac{a}{3}\operatorname{tg}^3 p - \frac{b\sin p}{\cos^2 p} + \frac{b}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{p}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

3. Розв'язати рівняння

$$x^3y' - (1 - y')^3 = 0.$$

Розв'язання. Нехай

$$y' = 1 - tx.$$

Тоді

$$x = \frac{1 - t^3}{t}.$$

Отже, задане рівняння можна записати в параметричній формі

$$x = \frac{1 - t^3}{t}, \ \ y' = t^3.$$

Згідно з рівностями (1.92) загальний інтеграл заданого рівняння матиме вигляд

$$x = \frac{1 - t^3}{t}, \ y = -\frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2 + C,$$

де C — довільна стала.

Рівняння, яке явно не містить незалежної змінної. Нехай диференціальне рівняння (1.81) має вид

$$F(y, y') = 0, \tag{1.93}$$

тобто воно явно не містить x.

Це рівняння можна розглядати так само, як і рівняння (1.87). Зокрема, воно може бути розв'язаним відносно y':

$$y' = f_k(y), \ k = 1, 2, \ldots \tag{1.94}$$

Нехай $f_k(y) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Тоді

$$x = \int \frac{dy}{f_k(y)} + C, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.95}$$

Зрозуміло, що при цьому розв'язками рівняння (1.94) є також $y = b_m$, $m = 1, 2, \ldots$, де b_m — корені рівняння $f_k(y) = 0$. Ці розв'язки можуть не міститися в загальному інтегралі (1.95) і бути особливими розв'язками рівняння (1.93).

Якщо рівняння (1.93) зображується у вигляді

$$y = \varphi(y'),$$

то, ввівши позначення $y' = p$ і використавши тотожність $dy = y'dx$, дістанемо

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{p}.$$

Нехай $p \neq 0$. Тоді загальний інтеграл рівняння (1.93) можна записати в параметричній формі:

$$y = \varphi(p), \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C. \tag{1.96}$$

Зазначимо, що при $p \neq 0$ можна загубити розв'язки $y = \alpha_k$, де α_k — дійсні корені рівняння $F(y, 0) = 0$. Тому цей випадок слід розглядати окремо.

Якщо рівняння $F(y, 0) = 0$ має дійсні корені $y = \alpha_k$, які є розв'язками рівняння (1.93) і не містяться в загальному інтегралі (1.96), то вони можуть бути особливими розв'язками рівняння (1.93).

Рівняння, розв'язане відносно незалежної змінної. Нехай рівняння (1.81) можна записати у вигляді

$$x = F(y, y'). \tag{1.97}$$

Позначимо $y' = p(y)$. Тоді

$$x = F(y, p). \tag{1.98}$$

Знайдемо

$$\frac{dx}{dy} = F'_y(y, p) + F'_p(y, p)\frac{dp}{dy}.$$

Оскільки $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{p}$, то

$$\frac{1}{p} = F'_y(y, p) + F'_p(y, p) \cdot \frac{dp}{dy},$$

або

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - F'_y(y, p)}{F'_p(y, p)} \stackrel{\text{def}}{=} f(y, p). \tag{1.99}$$

Якщо розглядати y як аргумент, p як функцію, то рівняння (1.99) розв'язане відносно похідної. Якщо можна знайти загальний розв'язок цього рівняння

$$p = \psi(y, C),$$

то, підставивши його в рівність (1.98), дістанемо

$$x = F(y, \psi(y, C)).$$

Це є співвідношення між x, y і C виду

$$x = \varphi(y, C),$$

тобто є загальним інтегралом рівняння (1.97).

Рівняння, розв'язане відносно функції. Нехай рівняння (1.81) можна записати у виді

$$y = F(x, y'). \tag{1.100}$$

Введемо позначення

$$y' = p(x).$$

Тоді

$$y = F(x, p),$$
$$\frac{dy}{dx} = F'_x + F'_p \cdot \frac{dp}{dx}, \tag{1.101}$$

або

$$p = F'_x + F'_p \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Звідси

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - F'_x(x, p)}{F'_p(x, p)} \stackrel{\text{def}}{=} f(x, p). \tag{1.102}$$

Маємо диференціальне рівняння між змінними x і p, розв'язане відносно похідної.

Якщо $p = \psi(x, C)$ є загальним розв'язком рівняння (1.102), то згідно з (1.101)

$$y = F(x, \psi(x, C)),$$

тобто дістали загальний інтеграл рівняння (1.100).

Приклади

1. Проінтегрувати рівняння

$$y = (y')^2 + 2xy' + \frac{1}{2}x^2.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = p^2 + 2px + \frac{1}{2}x^2. \tag{1.103}$$

Диференціюємо (1.103) по x:

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + 2p + 2x\frac{dp}{dx} + x,$$

або

$$(p+x)\left(2\frac{dp}{dx}+1\right)=0.$$

Звідси маємо 1) $2\frac{dp}{dx}+1=0$; 2) $p+x=0$. З рівності 1) дістаємо

$$dp=-\frac{1}{2}dx;\ p=-\frac{1}{2}x+C. \qquad (1.104)$$

Підставляючи значення p у (1.103), знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y=-\frac{1}{4}x^2+Cx+C^2.$$

Крім того, з рівності (2) знаходимо $p=-x$. Тоді з (1.103) дістаємо розв'язок $y=-\frac{1}{2}x^2$, який не міститься в загальному інтегралі.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y=a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,\ \text{де}\ a,\ b=\text{const}.$$

Розв'язання. Нехай

$\frac{dy}{dx}=p$, $dy=pdx$. Тоді $y=ap^2+p^3$;

$dy=2apdp+3bp^2dp$, або $pdx=2apdp+3bp^2dp$.

Звідси $dx=2adp+3bpdp$ і $x=2ap+\frac{3}{2}bp^2+C$.

Запишемо загальний розв'язок у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=2ap+\frac{3}{2}bp^2+C; \\ y=ap^2+bp^3. \end{cases}$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{\frac{2}{3}}+(y')^{\frac{2}{3}}=1.$$

Розв'язання. Нехай $y=\cos^3 t$, $y'=p=\sin^3 t$,

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{-3\cos^2 t\sin t\,dt}{\sin^3 t}=-3\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt.$$

Звідси

$$x=\int\left(3-\frac{3}{\sin^2 t}\right)dt=3t+3\,\text{ctg}\,t+C.$$

Загальний розв'язок

$$\begin{cases} x=3t+3\,\text{ctg}\,t+C; \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$$

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $(y')^2+yy'-x^2-xy=0$.
2. $(y')^2+y^2-1=0$.
3. $x(y')^2-2yy'+4x=0$.
4. $x(y')^2+2xy'-y=0$.

5. $y(y')^2+(x-y)y'-x=0$.
6. $y'=e^{y'/y}$.
7. $y^{\frac{2}{5}}+(y')^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}}$.
8. $y^4-(y')^4-y(y')^2=0$.
9. $y(1+(y')^2)=a$ (підстановка $y'=\text{tg}\,\varphi$).
10. $y=(y')^2e^{y'}$.
11. $y=y'\ln y'$.
12. $y=y'(1+y'\cos y')$.
13. $y=(y'-1)e^{y'}$.
14. $x=\ln y'+\sin y'$.
15. $x=e^{y'}+y'$.
16. $x=(y')^2-2y'+2$.
17. $x(y')^3=1+y'$.
18. $x(1+(y')^2)^{3/2}=a$.
19. $x(1+(y')^2)=1$.
20. $x=y'+\sin y'$.
21. $x(y')^2=e^{1/y'}$.

Розглянемо загальні типи диференціальних рівнянь, які розв'язані відносно функції і загальний розв'язок яких виражається через квадратури.

Рівняння Лагранжа. Це рівняння виду

$$y=\varphi(y')x+\psi(y'), \qquad (1.105)$$

де φ і ψ — функції змінної y'. Припустимо, що вони диференційовні по цій змінній. Методом диференціювання це рівняння можна звести до лінійного рівняння першого порядку, тобто проінтегрувати його.

Позначимо

$$y'=p.$$

Тоді

$$y=x\varphi(p)+\psi(p). \qquad (1.106)$$

Диференціюючи по x, маємо

$$y'=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

або

$$p=\varphi(p)+(x\varphi'(p)+\psi'(p))\frac{dp}{dx}. \qquad (1.107)$$

Це рівняння містить тільки x, p, dp/dx.
Запишемо його так:

$$p-\varphi(p)=(x\varphi'(p)+\psi'(p))\frac{dp}{dx}.$$

Помноживши на dx/dp та розділивши на $p-\varphi(p)$, дістанемо

$$\frac{dx}{dp}-\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Це лінійне диференціальне рівняння, що визначає x як функцію p.

Нехай його загальний інтеграл є

$$F(p,x,C)=0. \qquad (1.108)$$

Рівняння (1.106) і (1.108) утворюють загальний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричному вигляді, причому параметром є величина p ($p = y' = \operatorname{tg} \alpha$ може набувати будь-яких значень).

Виключивши, коли це можливо, параметр p з цих двох рівнянь, дістанемо загальний розв'язок у звичайному вигляді

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

П р и к л а д. Проінтегрувати рівняння

$$y = x(y')^2 - (y')^2. \tag{1.109}$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Маємо

$$y = xp^2 - p^2. \tag{1.110}$$

Продиференціюємо по x:

$$y' = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}.$$

Отже,

$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx},$$

$$p\left(1 - p - 2x\frac{dp}{dx} + 2\frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Звідси $p = 0$, $y' = 0$. Тоді

$$y = C. \tag{1.111}$$

Дістали один розв'язок: $y = 0$ при $C = 0$.

Тепер знаходимо

$$1 - p = 2x\frac{dp}{dx} - 2\frac{dp}{dx}.$$

Помноживши цю рівність на $\frac{dx}{dp}$ і спростивши її, дістанемо лінійне рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{p-1},$$

звідки

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} + 1. \tag{1.112}$$

Використовуючи (1.110), дістанемо розв'язок рівняння (1,109) у параметричному вигляді

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} + 1, \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Виключимо параметр p:

$$\frac{y}{x-1} = p^2, \quad p = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}}.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}},$$

звідки

$$\sqrt{y} = \sqrt{x-1} + C.$$

Отже, функція

$$y = (\sqrt{x-1} + C)^2 \tag{1.113}$$

є загальним розв'язком рівняння (1.109).

Розв'язок (1.111) не можна дістати з (1,113) ні при якому значенні сталої C.

Отже, цей розв'язок є особливим для рівняння (1,109).

Рівняння Клеро. Це рівняння виду

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{1.114}$$

Воно є окремим випадком рівняння Лагранжа (1.105), коли $\varphi(y') = y'$. Введемо позначення $y' = p$. Тоді

$$y = px + \psi(p). \tag{1.115}$$

Диференціюючи це рівняння, дістанемо

$$p'(x + \psi'(p)) = 0.$$

Здобута рівність задовольняється при $p' = 0$, тобто при $p = C$, але тоді згідно з (1.115)

$$y = Cx + \psi(c). \tag{1.116}$$

Знайшли загальний розв'язок рівняння Клеро. Запис цього розв'язку легко запам'ятати: досить у рівнянні Клеро замінити y' на C.

Рівняння (1.116) є рівнянням сім'ї прямих, що залежить від одного параметра.

Рівняння

$$x + \psi'(p) = 0$$

разом з диференціальним рівнянням

$$y = px + \psi(p)$$

теж є розв'язком рівняння Клеро, але в параметричному вигляді.

Виключивши з рівнянь

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ y = px + \psi(p) \end{cases} \tag{1.117}$$

параметр p, дістаємо

$$F(x, y) = 0. \tag{1.118}$$

Це рівняння кривої, яка не належить сім'ї (1.116). Отже, (1.118) є особливим розв'язком рівняння Клеро.

Зрозуміло, що сукупність рівнянь (1.117) є той самий особливий розв'язок, але в параметричному вигляді.

П р и к л а д

Проінтегрувати рівняння

$$y = xy' - \frac{1}{2}(y')^2.$$

Розв'язання. Якщо $y' = p$, то

$$y = px - \frac{1}{2}p^2.$$

Диференціюючи, дістаємо

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - p\frac{dp}{dx},$$

або

$$(x - p)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Звідси

$$x - p = 0,$$

або

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

Таким чином,

$$p = x, \text{ або } p = C.$$

Отже, загальний інтеграл є

$$y = Cx - \frac{1}{2}C^2.$$

Виключаючи параметр p з рівнянь

$$\begin{cases} x = p, \\ y = px - \frac{1}{2}p^2, \end{cases}$$

дістаємо особливий розв'язок

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

З геометричної точки зору особливий розв'язок — це парабола, віссю симетрії якої є вісь Oy.

ВПРАВИ

Розв'язати рівняння:

1. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.
2. $xy' - y - y' - (y')^2 = 0$.
3. $y = y' \ln y'$.
4. $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$.
5. $y = x(y')^2 - y'$.
6. $xy' = y + x\sqrt{1 + (y')^2}$.
7. $y = xy' + (y')^2$.
8. $y = 2px + \sqrt{1 + p^2}$, $p = y'$.
9. $y = (1 + y')x + (y')^2$.
10. $y = p(x + 1) - p^2$, $p = y'$.

Слід зазначити, що при інтегруванні диференціальних рівнянь особливу увагу треба звертати на ті випадки, коли під час зведення диференціального рівняння до того чи іншого вигляду виконуються операції ділення або множення, які можуть призвести до втрати або появи розв'язків. Наприклад, диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y^2}{x} \tag{1.119}$$

має розв'язок $y = 0$. При відокремленні змінних треба виконати ділення лівої і правої частини на y^2, що можливо тільки при $y \neq 0$.

Диференціальне рівняння, яке дістали

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x}, \tag{1.120}$$

не має розв'язку $y = 0$. Отже, будь-який розв'язок диференціального рівняння (1.120) є одночасно і розв'язком рівняння (1.119), а крім того, рівняння (1.119) має ще розв'язок $y = 0$.

Диференціальне рівняння

$$\frac{y'}{y} - x = 0 \tag{1.121}$$

при множенні на y перетворюється в лінійне

$$y' - xy = 0.$$

Загальний розв'язок його

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}. \tag{1.122}$$

При $C = 0$ дістанемо функцію $y = 0$, яка не є розв'язком рівняння (1.121). Це тому, що рівняння помножили на y, що можливо при $y \neq 0$. Отже, функція $y = 0$ хоча і дістається із загального розв'язку, але, не будучи розв'язком рівняння (1.121), повинна бути виключена з розв'язків (1.122). Таким чином, функція (1.122) визначає розв'язок рівняння (1.124) при довільних $C \neq 0$.

1.6. Особливі точки

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y). \tag{1.123}$$

Якщо функція $f(x, y)$ в околі деякої точки (x_0, y_0) задовольняє умови теореми Коші, то через точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (1.123).

Нехай $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) не є неперервною. Тоді може бути, що

1) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$, де A — скінченне число;

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \infty$;

3) $f(x, y)$ не має ні скінченної, ні нескінченної границі в точці (x_0, y_0).

Перших два випадки можуть бути зведені до випадків, що задовольняють умови теореми Коші. Справді, в першому випадку $f(x, y)$ можна довизначити до неперервної в точці (x_0, y_0). Для цього досить припустити, що $f(x_0, y_0) = A$. У другому випадку разом з рівнянням (1.123) розглядаємо рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{1.124}$$

Поклавши $\frac{1}{f(x, y)} = 0$, дістанемо, що рівняння (1.124) має єдиний розв'язок $x = \varphi(y)$ з вертикальною дотичною в точці (x_0, y_0).

У третьому випадку функція $f(x, y)$, а отже, і $\frac{1}{f(x, y)}$ в точці (x_0, y_0) не мають границі. Тоді точку (x_0, y_0) називають *ізольованою особливою точкою* рівняння (1.123).

Дослідження ізольованої особливої точки виконаємо на прикладі, використовуючи підхід Пуанкаре. Нехай маємо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ky}, \tag{1.125}$$

де a, b, c, k — дійсні числа, $ak - bc \neq 0$. Якщо $ak - bc = 0$, то рівняння (1.125) вироджується в рівняння $y' = \text{const}$.

Легко побачити, що точка (0, 0) для рівняння (1.125) є ізольованою особливою. Оскільки права частина рівняння (1.125) або права частина рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx + ky}{ax + by} \tag{1.126}$$

у довільному замкненому околі точки (x_0, y_0), де $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, є неперервною функцією і задовольняє по змінній y або змінній x умову Ліпшица, то через кожну точку проходитиме одна інтегральна крива рівняння (1.125) або (1.126). Дослідимо поведінку цих кривих поблизу особливої точки (0, 0). Інакше кажучи, з'ясуємо, як розміщуються інтегральні криві рівняння (1.125) поблизу точки (0, 0). Для цього запишемо рівняння (1.125) у вигляді

$$\frac{dx}{cx + ky} = \frac{dy}{ax + by}.$$

Введемо нову змінну t, диференціал якої задовольняє рівність

$$\frac{dx}{cx + ky} = \frac{dy}{ax + by} = dt.$$

Тоді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + ky, \\ \frac{dy}{dt} = ax + by. \end{cases} \tag{1.127}$$

Таким чином, замість рівняння (1.125) маємо систему двох рівнянь (1.127), яка, очевидно, при $cx + ky \neq 0$ еквівалентна вихідному рівнянню (1.125) у тому розумінні, що кожний розв'язок рівняння (1.125) є траєкторією системи (1.127) і, навпаки, будь-яка траєкторія системи (1.127), відмінна від точки спокою, є розв'язком рівняння (1.125).

Точка спокою системи є ізольована особлива точка типу $\frac{0}{0}$ рівняння (1.125). Якщо $cx + ky = 0$, а $ax + by \neq 0$, то система (1.127) еквівалентна оберненому рівнянню (1.126). Отже, замість рівняння (1.125) розглядатимемо в околі точки (0, 0) систему (1.127). Для цього запишемо систему (1.127) у векторно-матричній формі

$$\frac{dz}{dt} = A z, \tag{1.128}$$

де

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} c & k \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Розглянемо характеристичне рівняння матриці A:

$$\det \| A - \lambda E \| = 0, \tag{1.129}$$

де E — одинична матриця. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$\lambda_{1,2} = \frac{b + c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b - c)^2 + 4ak}. \tag{1.130}$$

Тоді залежно від значення коренів λ_1 і λ_2 окремо розглядатимемо два випадки:

1. λ_1 і λ_2 — різні; 2°. λ_1 і λ_2 — рівні між собою.

1°. Розглянемо випадок простих коренів характеристичного рівняння. Як відомо, для матриці A можна знайти таку неособливу матрицю T, що матриця

$$I = TAT^{-1},$$

де T^{-1} — матриця, обернена до T, має вигляд

$$I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Нехай тепер у системі (1.128)

$$z = T^{-1} q,$$

де

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$T^{-1}\frac{dq}{dt} = AT^{-1}q,$$

або

$$\frac{dq}{dt} = Iq. \qquad (1.131)$$

Система (1.131) розпадається на два скалярних диференціальних рівняння

$$\frac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2. \qquad (1.132)$$

Розглянемо два випадки: а) λ_1 і λ_2— дійсні; б) λ_1 і λ_2—комплексні.

а) Якщо λ_1 і λ_2 дійсні, то не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\lambda_2 \neq 0$. Отже, з (1.132) маємо

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{q_1}{q_2}. \qquad (1.133)$$

Звідси

$$q_1 = C\,|q_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \qquad (1.134)$$

Розглянемо цей розв'язок детальніше. Припустимо, що λ_1 і λ_2 мають однакові знаки і $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тоді $\lambda_1/\lambda_2 > 1$, отже, всі інтегральні криві (1.134) є параболи, які мають спільну точку $q_1 = q_2 = 0$ і дотикаються в ній до осі Oq_2 (рис. 1.8).

Зазначимо, що крім інтегральних кривих (1.134) у цьому випадку траєкторіями є також півпрямі (дві півосі) осі Oq_1, тобто $q_2 = 0$, $q_1 \neq 0$. Точку (0, 0) при цьому називають *вузлом*.

Нехай тепер λ_1 і λ_2 мають різні знаки. Тоді розв'язок (1.134) можна записати так:

$$q_1 = C\,|q_2|^{-\gamma}, \quad \gamma = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

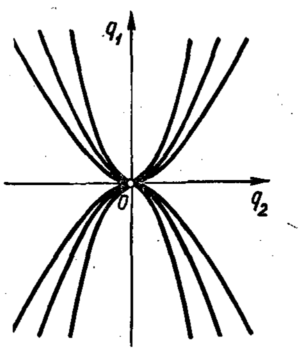

Рис. 1.8

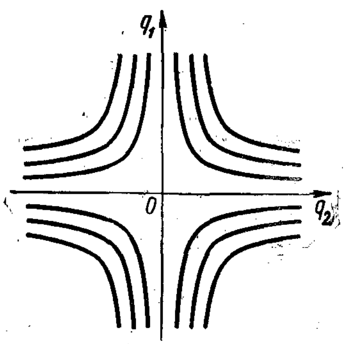

Рис. 1.9

Отже, в цьому випадку чотири інтегральні криві $q_1 = 0$ ($q_2 \neq 0$), $q_2 = 0$ ($q_1 \neq 0$) прилягають до особливої точки (0, 0), решта інтегральних кривих має вигляд, зображений на рис. 1.9. Особливу точку (0, 0) тут називають *сідлом*.

б) Нехай λ_1 і λ_2 — комплексні. Внаслідок того що коефіцієнти рівняння (1.129) дійсні, то λ_1 і λ_2 комплексно-спряжені, тобто

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Тоді матриця перетворення T є комплексною. Проте оскільки елементи першого стовпця матриці T довільні, то їх можна підібрати так, що величини q_1 і q_2 будуть також комплексно-спряжені:

$$q_1 = u + \omega i, \quad q_2 = u - \omega i. \qquad (1.135)$$

Справді, елементи t_{ik}, i, $k = 1, 2$, матриці T визначаються двома системами рівнянь

$$\begin{cases} t_{11}(c - \lambda_1) + t_{12}a = 0, \\ t_{11}k + t_{12}(b - \lambda_1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t_{21}(c - \lambda_2) + t_{22}a = 0, \\ t_{21}k + t_{22}(b - \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник кожної із систем, згідно з (1.129), дорівнює нулю, то ці системи мають ненульові розв'язки:

$$t_{12} = \frac{k}{\lambda_1 - b}\,t_{11}, \quad t_{22} = \frac{k}{\lambda_2 - b}\,t_{21},$$

де $t_{11} \neq 0$, $t_{21} \neq 0$ і знаменники відмінні від нуля. Тоді, нехай

$$t_{21} = \bar{t}_{11},$$

де $\bar{t}_{11}$ — число, спряжене з t_{11}. Маємо

$$t_{22} = \bar{t}_{12}.$$

Крім того,

$$q_1 = t_{11}z_1 + t_{12}z_2, \quad q_2 = t_{21}z_1 + t_{22}z_2.$$

Отже, поклавши

$$u = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad \omega = \frac{q_1 - q_2}{2i}, \qquad (1.136)$$

дістанемо формули $q_1 = u + \omega i$, $q_2 = u - \omega i$, причому величини u, ω, згідно з (1.136), при дійсних значеннях z_1, z_2 мають дійсні значення.

Підставивши в рівняння (1.132) значення q_1, q_2, λ_1, λ_2, матимемо

$$\frac{du + i\,d\omega}{du - i\,d\omega} = \frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i} \cdot \frac{u + \omega i}{u - \omega i},$$

або

$$(du + i\,d\omega)((\alpha u - \beta\omega) - i(\alpha\omega + \beta u)) = (du - i\,d\omega)((\alpha u - \beta\omega) + i(\alpha\omega + \beta u)),$$

а це є рівність типу $z=\bar{z}$. Прирівнявши уявні частини до нуля, дістанемо

$$\frac{du}{d\omega}=\frac{\alpha u-\beta\omega}{\beta u+\alpha\omega},$$

$$\frac{\beta(udu+\omega d\omega)}{u^2+\omega^2}=\frac{\alpha(ud\omega-\omega du)}{u^2-\omega^2},$$

або

$$\frac{1}{2}d\ln(u^2+\omega^2)+\frac{\alpha}{\beta}d\operatorname{arctg}\frac{\omega}{u}=0.$$

Звідси

$$\sqrt{u^2+\omega^2}=Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{u}}.$$

Поклавши $u=r\cos\varphi$, $\omega=r\sin\varphi$, матимемо

$$r=Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}. \tag{1.137}$$

Це рівняння задає сім'ю логарифмічних спіралей в площині $uO\omega$ з асимптотичною точкою в полюсі.

При цьому всі криві (1.137) прилягають до початку координат і роблять нескінченне число обертів навколо точки $u=0$, $\omega=0$ (рис. 1.10).

Те саме матимемо в околі особливої точки $x=0$, $y=0$ диференціального рівняння (1.125). Особливу точку $x=0$, $y=0$ при цьому називають *фокусом.*

Якщо λ_1 і λ_2 чисто уявні, тобто коли $\alpha=0$, то криві (1.137) є сім'єю замкнених кривих. У площині $uO\omega$ матимемо концентричні кола (рис. 1.11). Особливу точку у цьому випадку називають *центром.*

2°. Корені характеристичного рівняння рівні між собою $\lambda_1=\lambda_2\overset{\text{def}}{=}\lambda$. Тоді

$$\lambda=\frac{b+c}{2}.$$

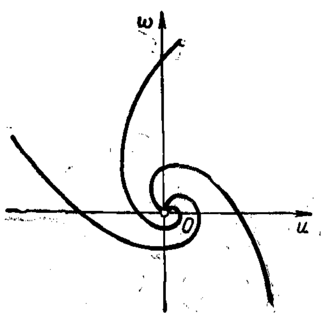

Рис. 1,10

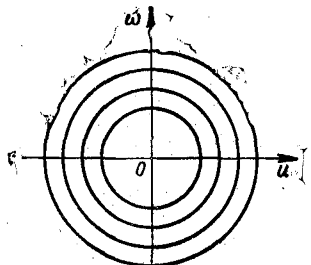

Рис. 1.11

При цьому вид матриці I залежить від кратності елементарного дільника, відповідного кореню λ. Можливі два випадки:

а) кореню λ відповідає два простих елементарних дільника;

б) кореню λ відповідає один елементарний дільник кратності 2.

а) Цей випадок можливий тоді і тільки тоді, коли ранг системи рівнянь

$$\begin{cases}(c-\lambda)t_{11}+kt_{12}=0;\\ at_{11}+(b-\lambda)t_{12}=0,\end{cases} \tag{1.138}$$

в якої визначаються елементи матриці T, дорівнює нулю. Тоді повинна виконуватися рівність

$$a=k=0;\quad b=c=\lambda.$$

Отже, рівняння (6.3) матиме вигляд

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Інтегральні криві цього рівняння визначаються за формулами

$$y=Cx,\ x\neq 0;$$
$$x=0,\quad y\neq 0.$$

Таким чином, маємо сім'ю півпрямих, що прилягають до точки (0, 0) кожна із своїм напрямком (рис. 1.12). Особливу точку (0, 0) називають також *вузлом (дикритичним вузлом).*

б) Цей випадок можливий тоді, коли ранг системи (1.138) дорівнює 1. Тоді матриця I це одна клітина Жордана.

$$I=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

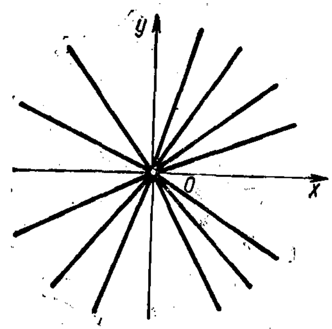

Рис. 1.12

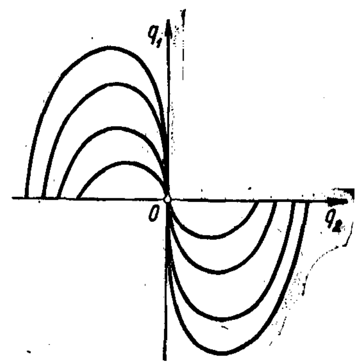

Рис. 1.13

Отже, система (1.131) матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \lambda q_1 + q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} = \lambda q_2. \end{cases}$$

Звідси дістанемо лінійне рівняння

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{q_1}{q_2} + \frac{1}{\lambda},$$

загальним розв'язком якого є функція

$$q_1 = \frac{1}{\lambda} q_2 \ln|q_2| + Cq_2, \quad q_2 \neq 0. \qquad (1.139)$$

Крім розв'язку (1.139), маємо ще два розв'язки

$$q_2 = 0, \ q_1 \neq 0 \text{ і } q_1 = 0, \ q_2 \neq 0.$$

Отже, інтегральні криві прилягають до точки (0, 0), кутовий коефіцієнт дотичних до яких дорівнює $\pm\infty$ (рис. 1.13). Особливу точку (0, 0) при цьому називають *виродженим вузлом.*

На основі здобутих результатів робимо висновок, що для диференціального рівняння (1.139) точка (0, 0) є особливою. Тип особливості визначається коренями характеристичного рівняння (1.129), тобто числом $(b-c)^2 + 4ak$, а саме:

$$(b-c)^2 + 4ak > 0 \begin{cases} bc - ak > 0 - \text{вузол;} \\ bc - ak < 0 - \text{сідло,} \end{cases}$$

$$(b-c)^2 + 4ak < 0 \begin{cases} b + c \neq 0 - \text{фокус;} \\ b + c = 0 - \text{центр,} \end{cases}$$

$(b-c)^2 + 4ak = 0$ — дикритичний вузол — тоді і тільки тоді, коли $a = k = 0$, $b = c$.

П р и к л а д и

Дослідити в околі точки (0, 0) поведінку інтегральних кривих таких рівнянь:

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}.$$

Розв'язання. **З характеристичного рівняння типу (1.129) знаходимо**

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

Отже, λ_1 і λ_2— дійсні і мають різні знаки. Тому точка (0, 0) є сідлом. Інтегральні криві заданого рівняння зображено на рис. 1.14.

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-y}.$$

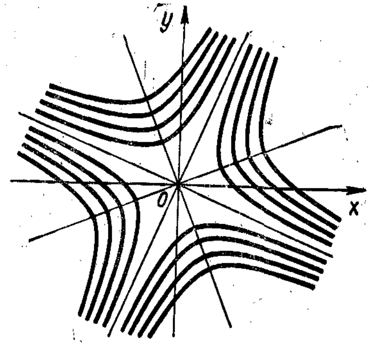

Рис. 1.14

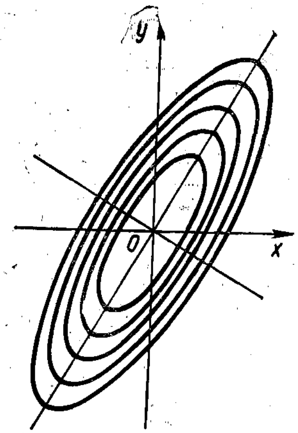

Рис. 1.15

Розв'язання. Тут $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Тому точка (0, 0) для заданого рівняння є центром. Інтегральні криві зображено на рис. 1.15

3. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}.$$

Розв'язання. Тут $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а елементарний дільник, в силу того, що $k = 1 \neq 0$ — кратний. Тому точка (0, 0) для даного рівняння є виродженим вузлом. Інтегральні криві зображено на рис. 1.16.

1.7. Особливі розв'язки. Обвідна сім'ї кривих

Виділимо клас диференціальних рівнянь, для яких можна розглянути таке питання: чи має задане рівняння особливий розв'язок: якщо має, то як його знайти?

1. Нехай маємо диференціальне рівняння, розв'язане відносно похідної

$$\frac{}{dx} = f(x, y). \qquad (1.140)$$

Припустимо, що функція $f(x, y)$ у розглядуваній замкненій області D площини xOy неперервна. Якщо $f(x, y)$ в цій області має обмежену похідну по y, $|f'_y(x, y)| \leq N < +\infty$

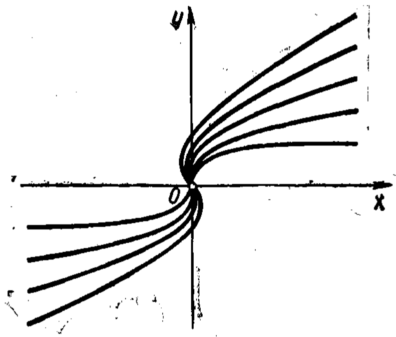

Рис. 1.16

то, згідно з теоремою Коші, через кожну точку області D проходить тільки одна інтегральна крива диференціального рівняння (1.140). Отже, тоді рівняння (7.1) особливих розв'язків не має.

Наприклад, якщо в диференціальному рівнянні

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x)\,y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y + a_n(x)$$

коефіцієнти $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, є функції, неперервні на відрізку $[a, b]$, то це рівняння в будь-якому замкненому прямокутнику $R: [a, b;\ c, d]$ особливих розв'язків не має. Звідси, зокрема, випливає, що лінійне диференціальне рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

з неперервними коефіцієнтами особливих розв'язків не має.

Таким чином, особливі розв'язки рівняння (1.140) можуть проходити через ті точки, в яких не виконуються умови теореми Коші. Так, якщо $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) неперервна, що припускатимемо в подальшому, то особливі розв'язки можуть проходити тільки через ті точки області D, в яких не виконується умова Ліпшіца. Умова Ліпшіца, напевне, виконується, якщо $f(x, y)$ має в області D обмежену частинну похідну по y. Тому особливі розв'язки рівняння (1.140) можуть проходити тільки через ті точки області D, в околі яких $f'_y(x, y)$ стає необмеженою.

Отже, умова

$$|f'_y(x, y)| > N \tag{1.141}$$

при $x \to x_0$, $y \to y_0$, де N — будь-яке, як завгодно велике додатне число, є необхідною умовою того, щоб через точку (x_0, y_0) проходив особливий розв'язок диференціального рівняння (1.140). Звідси дістанемо таке правило знаходження особливого розв'язку рівняння (1.140) з неперервною правою частиною:

1) знайти множину точок області D, в яких виконується умова (1.141). Нехай ця множина точок є крива, задана рівнянням $\varphi(x, y) = 0$;

2) безпосередньою підстановкою в рівняння перевірити, чи є знайдена множина точок розв'язком диференціального рівняння (1.140);

3) перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній точці здобутих таким способом розв'язків.

Якщо пп. 1)—3) виконуються, то вони є достатніми для того, щоб функція $\varphi(x, y) = 0$ була особливим розв'язком диференціального рівняння (1.140).

Приклади

Знайти особливі розв'язки таких диференціальних рівнянь:

1. $$\frac{dy}{dx} = xe^y.$$

Розв'язання. Тут $f(x, y) = xe^y$ є функція, неперервна в будь-якій замкненій області D площини xOy і обмежена в D, $f'_y = xe^y$.

Отже, задане диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

2. $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}. \tag{1.142}$$

Розв'язання. Тут $f(x, y) = \sqrt{y}$ є функція, неперервна в будь-якій замкненій області верхньої півплощини, тобто де $y \geqslant 0$. Проте $f'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ стає необмеженою при $y \to 0$ і $y > 0$. Тому лінія $y = 0$ може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (1.142).

Легко побачити, що функція $y = 0$ є також розв'язком рівняння (1.142).

Рівняння (1.142) допускає відокремлювання змінних

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx.$$

Проінтегрувавши цю рівність, знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (1.142):

$$y = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2, \quad x \geqslant -C, \tag{1.143}$$

де C — стала інтегрування.

Зрозуміло, що через кожну точку осі Ox (розв'язку $y = 0$) проходять дві інтегральні криві рівняння (1.143), а саме — лінія $y = 0$ і крива із сім'ї (1.143) (рис. 1.17).

3. $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + 1.$$

Розв'язання. Частинна похідна $f'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ необмежена при $y \to 0$. Проте $y = 0$ не є розв'язком заданого диференціального рівняння. Оскільки в точках верхньої півплощини, де $y > 0$, права частина $f(x, y) = \sqrt{y} + 1$ задовольняє умови теореми Коші, то рівняння особливих розв'язків не має.

4. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}. \tag{1.144}$$

Розв'язання. Права частина цього рівняння

$$f(x, y) = \frac{y \ln y}{x}$$

є функція, неперервна в будь-якій замкненій області, де $x \neq 0$ $\left(\text{при } y = 0 \text{ маємо } f(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y \ln y}{x} = 0\right)$. Знайдемо похідну

$$f'_y(x, y) = \frac{\ln y + 1}{x}.$$

Звідси

$$\lim_{y\to 0} f'_y(x, y) = -\infty.$$

Отже, множина точок $y = 0$ (вісь Ox) може бути особливим розв'язком рівняння (1.144). Легко побачити, що $y = 0$ є розв'язком даного рівняння. Перевіримо, чи порушується властивість єдиності. Для цього знайдемо загальний розв'язок рівняння (1.144):

$$y = e^{Cx}. \tag{1.145}$$

Розв'язок $y = 0$ можна дістати із загального розв'язку (1.145) при $C = -\infty$. Тому через кожну точку осі Ox (крім точки $x = 0$) проходить тільки одна інтегральна крива $y = 0$. Особливих розв'язків рівняння (1.144) не має.

Розміщення інтегральних кривих рівняння (1.145) на площині xOy показано на рис. 1.18. Зазначимо, що в точці $x = 0$ осі Oy права частина диференціального рівняння (1.144) не визначена. Проте, підставляючи $x = 0$ в загальний розв'язок (1.145), матимемо

$$y = e^{C\cdot 0} = 1.$$

Ця рівність справджується при будь-якому значенні C. Отже, всі інтегральні криві, крім інтегральної кривої $y = 0$, $x \neq 0$, прилягають до точки (0; 1).

2. Розглянемо питання про існування особливих розв'язків для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно п хідної

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.146}$$

Якщо функція $F(x, y, y')$ в деякій області тривимірного простору задовольняє умова теореми п. 1.3, то у відповідній області площини xOy через кожну точку (x_0, y_0) за даним напрямком проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (1.14).

Отже, особливі розв'язки рівняння (1.146) можуть проходити тільки через ті точки, в яких порушуються умови зазначеної теореми. Зокрема, якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то

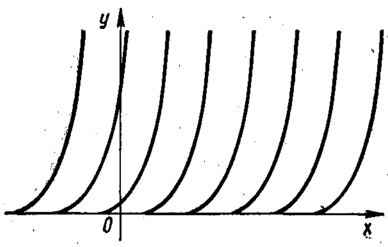

Рис. 1.17

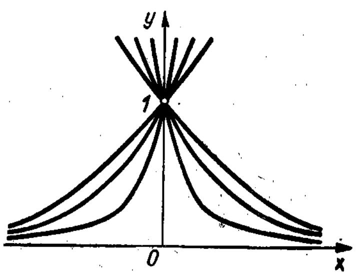

Рис. 1.18

особливі розв'язки слід шукати серед тих точок, координати яких одночасно задовольняють рівняння

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \ p = y'. \end{cases} \tag{1.147}$$

Якщо система рівнянь (1.147) розв'язана, тобто існує значення (x, y), які задовольняють двом рівнянням (1.147), то виключаючи з них параметр p, дістанемо в загальному випадку деяку множину точок

$$\varphi(x, y) = 0,$$

яка може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (1.146). Таку множину точок $\varphi(x, y) = 0$ називають *дискримінантною кривою рівняння (1.146)*.

Отже, дискримінантні криві рівняння (1.146), якщо вони існують, можуть бути особливими розв'язками заданого рівняння.

Звідси випливає один із способів знаходження особливих розв'язків рівняння (1.146). Для цього треба:

знайти дискримінантні криві рівняння;

перевірити, чи будуть дискримінантні криві інтегральними кривими заданого рівняння;

перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній з точок цих інтегральних кривих.

Якщо ці умови виконуються, то розв'язок диференціального рівняння (1.146) є особливим.

Приклад. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y - xy' + e^{y'} = 0. \tag{1.148}$$

Розв'язання. Складемо рівняння для дискримінантної кривої

$$\begin{cases} y - xp + e^p = 0, \\ -x + e^p = 0. \end{cases}$$

Знайдемо дискримінантну криву

$$y = x\ln x - x. \tag{1.149}$$

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що крива (1.149) є розв'язком рівняння (1.148).

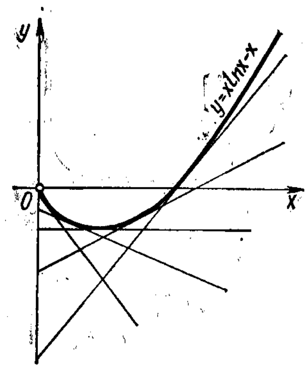

Рис. 1.19

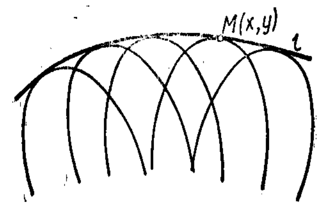

Рис. 1.20

Оскільки рівняння (1.148) є рівнянням Клеро, то його загальним розв'язком є сім'я прямих (рис. 1.19):

$$y = Cx - e^C. \tag{1.150}$$

Як бачимо, що через кожну точку кривої (1.149) проходять дві інтегральні криві: крива (1.149) і пряма із сім'ї (1.150). Розв'язок (1.149) є особливим розв'язком рівняння (1.148).

Розглянутий спосіб знаходження особливого розв'язку передбачає перевірку, чи є дискримінантна крива інтегральною кривою заданого диференціального рівняння. Проте цієї перевірки можна і не робити, скориставшись такою теоремою.

ТЕОРЕМА. *Якщо $F(x, y, p)$, де $p = \frac{dy}{dx}$, в області Ω неперервна разом з частинними похідними першого порядку і в цій області*

$$F'_y(x, y, p) \neq 0, \tag{1.151}$$

то для того, щоб дискримінантна крива рівняння (1.146) була розв'язком заданого рівняння, необхідно і достатньо, щоб поряд з рівнянням (1.146) виконувалася рівність

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0. \tag{1.152}$$

Приклад. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y'^2 - y = 0.$$

Розв'язання. Визначимо дискримінантну криву заданого рівняння. Для цього складемо систему рівнянь (1.147)

$$\begin{cases} p^2 - y = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

Звідси робимо висновок, що дискримінантною кривою є лінія

$$y = 0.$$

Перевіряємо умову (1.152):

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0 + 0(-1) = 0.$$

Отже, $y = 0$ є розв'язком заданого рівняння. Оскільки тут загальним розв'язком є сім'я парабол $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$, то $y = 0$ є особливим розв'язком.

Крім розглянутого способу знаходження особливого розв'язку диференціального рівняння (1.146), існує інший спосіб, в основі якого лежить поняття обвідної однопараметричної сім'ї кривих.

Нехай маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.153}$$

де C — параметр, який набуває значень, наприклад, з деякого проміжку (C_1, C_2).

Криву l називають *обвідною сім'ї кривих (1.153)*, якщо в кожній її точці існує спільна дотична до однієї з кривих даної сім'ї (рис. 1.20).

Припустимо, що сім'я кривих (1.153) є загальним інтегралом диференціального рівняння (1.146). Тоді якщо існує обвідна, то вона є особливим розв'язком рівняння (1.146).

Справді, візьмемо на обвідній довільну точку $M(x, y)$. У цій точці, яка одночасно належить і одній з інтегральних кривих, напрямок дотичної до обвідної збігається з напрямком поля, заданого диференціальним рівнянням (1.146). Отже, крива l є розв'язком заданого диференціального рівняння. Оскільки через кожну точку кривої l проходять дві інтегральні криві (крива l і одна з кривих сім'ї (1.153)), то l є особливим розв'язком рівняння (1.146).

Розглянемо, як, знаючи сім'ю кривих (1.146), знайти обвідну цієї сім'ї, якщо, звичайно, обвідна для цієї сім'ї існує. Зазначимо, що не кожна однопараметрична сім'я кривих має обвідну. Наприклад, сім'я прямих $y = Cx$ та сім'я концентричних кіл $y^2 + x^2 - C^2 = 0$ обвідних не мають, тоді як сім'я парабол $y = (x + C)^2$ має обвідну $y = 0$ (рис. 1.21). Сім'я кіл $(x - C)^2 + y^2 = R^2$ має дві обвідні $y = R$ і $y = -R$ (рис. 1.22).

Виведемо необхідні умови існування обвідної.

Нехай сім'я кривих (1.153) має обвідну, рівняння якої записано в параметричній формі:

$$x = x(t), \; y = y(t), \tag{1.154}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — диференційовні функції на деякому проміжку (α, β).

Оскільки обвідна при різних C дотикається різних кривих із сім'ї (1.153), то величину C в (1.153) можна розглядати як функцію t, тобто

$$C = C(t).$$

Припустимо, що $C'(t) \neq 0$ для $t \in (\alpha, \beta)$. У противному разі обвідна в кожній своїй точці дотикатиметься тієї самої кривої із сім'ї (1.153), а отже, вона зіллється з цією кривою.

Підставивши значення (1.154) у рівняння (1.153), дістанемо тотожність

$$\Phi(x(t),\ y(t),\ C(t)) \equiv 0.$$

Нехай $\Phi(x, y, C)$ має неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді

$$\Phi_x x'(t) + \Phi_y y'(t) + \Phi'_C C'(t)) = 0. \qquad (1.155)$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт k дотичної до кривої із сім'ї (1.153) при умові, що $\Phi_y \neq 0$:

$$k = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}.$$

Кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до обвідної дорівнює

$$k_1 = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Проте $k = k_1$. Тому

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

З рівняння (1.155) маємо

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0.$$

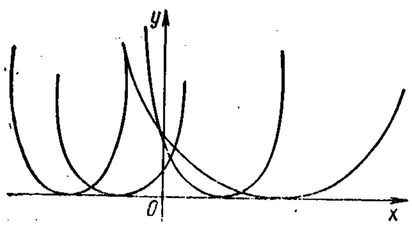

Рис. 1.21

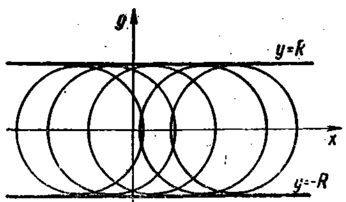

Рис. 1.22

Отже, якщо сім'я кривих (1.153) має обвідну і в кожній точці кривих з цієї сім'ї $\Phi'_y(x, y, C) \neq 0$ або $\Phi'_x(x, y, C) \neq 0$, то координати обвідної одночасно задовольняють рівняння

$$\begin{cases} \Phi(x(t),\ y(t),\ C(t)) = 0, \\ \Phi'_C(x(t),\ y(t),\ C(t)) = 0. \end{cases} \qquad (1.156)$$

Умови (1.156) є, таким чином, необхідними для того, щоб крива (1.154) була обвідною сім'ї кривих (1.153). Криву, координати кожної точки якої задовольняють систему рівнянь (1.156), називають *дискримінантною кривою* сім'ї кривих (1.153).

Доведемо, що умови (1.156) у випадку, коли в кожній точці кривої (1.154) Φ'_y і Φ'_x одночасно не дорівнюють нулю, є достатніми для того, щоб ця крива була обвідною для сім'ї кривих (1.153).

Справді, нехай

$$\Phi'_y(x(t),\ y(t),\ C(t)) \neq 0.$$

Диференціюючи першу тотожність системи (1.156) по t, матимемо

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) + \Phi'_C C'(t) = 0.$$

Звідси, згідно з рівнянням (1.156),

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

Отже,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y},$$

тобто достатність доведено.

Таким чином, для знаходження обвідної однопараметричної сім'ї кривих треба:

із системи рівнянь (1.156) за допомогою виключення параметра C знайти дискримінантну криву даної сім'ї;

із здобутої таким способом дискримінантної кривої вилучити точки, де Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють нулю.

Та частина дискримінантної кривої, що залишилася, і є обвідною заданої сім'ї кривих.

Приклад. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння Клеро

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{1.157}$$

Розв'язання. Загальним розв'язком цього рівняння є сім'я прямих

$$y = Cx + \psi(C), \tag{1.158}$$

де C — довільна стала.

Побудувавши для рівняння (1.157) систему рівнянь (1.156), матимемо

$$\begin{cases} y - Cx - \psi(C) = 0, \\ x + \psi'(C) = 0. \end{cases} \tag{1.159}$$

Припустимо, що з другого рівняння можна виразити C через x:

$$C = \omega(x).$$

Підставимо це значення в перше рівняння системи (1.59):

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{1.160}$$

Оскільки $\Phi'_y = 1 \neq 0$, то дискримінантна крива (1.160) є обвідною сім'ї прямих (1.158).

Отже, розв'язок (1.160) є особливим розв'язком диференціального рівняння Клеро (1.157).

У п. 1.6 було доведено, що (1.160) є розв'язком рівняння Клеро. Тут доведено, що цей розв'язок є особливим і, крім того, він є обвідною загального розв'язку— сім'ї прямих (1.158).

Приклад. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння, якщо задано його загальний розв'язок:

$$y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0.$$

Розв'язання. Складемо систему рівнянь для дискримінантної кривої

$$\begin{cases} y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0; \\ 4Cx - 3C^2x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Звідси дістанемо дві дискримінантні криві

$$y = 0, \quad y = \frac{4}{27x}.$$

Оскільки $\Phi'_y = 1$, то вздовж цих кривих $\Phi'_y \neq 0$. Тому дискримінантні криві є особливими розв'язками диференціального рівняння (рис. 1.23).

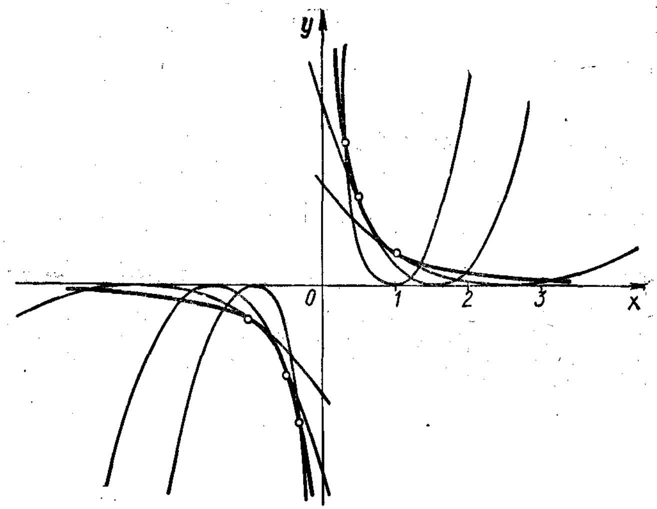

Рис. 1.23

Задача (про знаходження особливого розв'язку рівняння кривої, рівномірно освітленої джерелом світла). Нехай циліндрична поверхня досить малої висоти освітлюється джерелом світла O (рис. 1.24), що розміщене в площині, перпендикулярній до твірних циліндра. Нехай F_0— ступінь освітленості поверхні, яка знаходиться від джерела на відстані, що дорівнює одиниці, при умові, що промені світла перпендикулярні до поверхні. Тоді ступінь освітленості елементарної площадки M дорівнює

$$F = F_0 \frac{\sin\varphi}{r^2},$$

де r — відстань площадки від джерела світла O, φ — кут між радіусом-вектором r і дотичною T в точці M до напрямної лінії циліндра. Знайдемо форму цієї напрямної для випадку, коли ступінь освітленості всіх точок поверхні циліндра один і той самий і дорівнює k. Розмістимо в точці O полюс полярної системи координат і позначимо через θ кут між віссю Ox і радіус-вектором r. Отже, за умовою

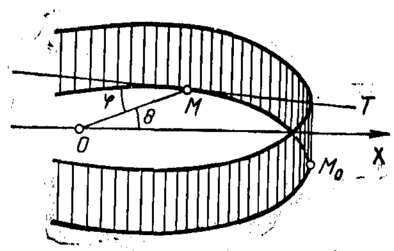

Рис. 1.24

$$F_0 \frac{\sin\varphi}{r^2} = k,$$

де

$$\sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

Це дістаємо з формули $\operatorname{tg}\varphi = r:\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$, де φ — кут між радіусом-вектором і дотичною до кривої. Отже,

$$\frac{F_0}{r\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} = k,$$

звідки

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{F_0 - k^2r^4}}{kr}, \text{ або } \frac{d\left(\frac{kr^2}{F_0}\right)}{\sqrt{1-\frac{k^2r^4}{F^2}}} = 2d\theta.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\arcsin\frac{kr^2}{F_0} = 2\theta + C, \text{ або } r^2 = \frac{F_0}{k}\sin(2\theta + C).$$

Інтегральні криві є лемніскати. На рис. 1.25 показано криві, відповідні значенням C, яке дорівнює 0, $\frac{\pi}{2}$, π і $\frac{3\pi}{2}$. Крім загального інтеграла це диференціальне рівняння має особливий розв'язок, який дістанемо, виключивши параметр C із системи

$$\begin{cases} \frac{kr^2}{F_0} - \sin(2\theta + C) = 0, \\ \quad - \cos(2\theta + C) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\cos(2\theta + C) = 0$, то $\sin(2\theta + C) = 1$ і відповідно $r^2 = F_0/k$. Це і є особливий розв'язок. З геометричної точки зору він задає рівняння кола радіуса $\sqrt{F_0/k}$. Коло є обвідна сім'ї лемніскат, заданих загальним інтегралом (рис. 1.25).

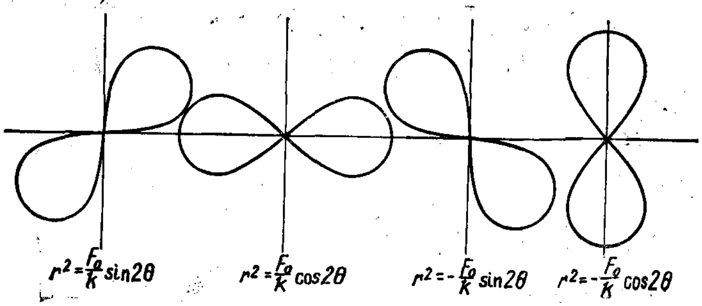

Рис. 1.25

1.8. Ортогональні й ізогональні траєкторії

Нехай маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.161}$$

Лінії, що перетинають усі криві сім'ї (1.161) під сталим кутом, називають *ізогональними траєкторіями*. Якщо цей кут прямий, то траєкторії називають *ортогональними*.

Ортогональні траєкторії. Знайдемо рівняння ортогональних траєкторій. Запишемо диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих, виключивши параметр C із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' = 0. \end{cases}$$

Припустимо, що дістали таке диференціальне рівняння:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.162}$$

де y' — кутовий коефіцієнт дотичної до кривої сім'ї в точці $M(x, y)$. Оскільки ортогональна траєкторія, що проходить через точку $M(x, y)$, перпендикулярна до відповідної кривої сім'ї (рис. 1.27), то кутовий коефіцієнт дотичної до неї dy_T/dx зв'язаний з dy/dx співвідношенням

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (1.162) і опустивши індекс T, дістанемо залежність між координатами довільної точки (x, y) і кутовим коефіцієнтом ортогональної траєкторії в цій точці, тобто диференціальне рівняння ортогональних траєкторій

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0.$$

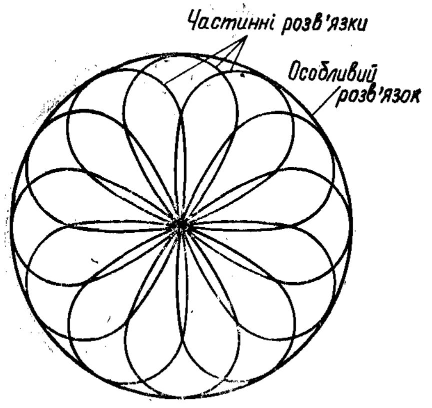

Рис. 1.26

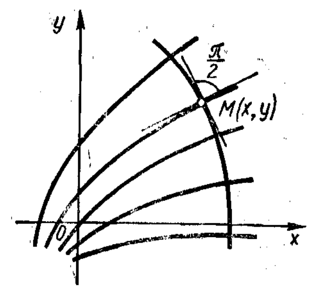

Рис. 1.27

Загальний інтеграл цього рівняння

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

визначає сім'ю ортогональних траєкторій.

З ортогональними траєкторіями доводиться мати справу, наприклад, при дослідженні плоскої течії рідини.

Припустимо, що течія рідини в площині проходить так, що в кожній точці площини xOy визначено вектор $\mathbf{v}(x, y)$ швидкості руху. Якщо цей вектор залежить тільки від положення точки на площині і не залежить від часу, то рух називається *стаціонарним*. Розглянемо його. Припустимо, що існує потенціал швидкостей, тобто така функція $U(x, y)$, що проекції вектора $\mathbf{v}(x, y)$ на осі координат v_x і v_y є її частинними похідними по x і y:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = v_x, \ \frac{\partial U}{\partial y} = v_y. \qquad (1.163)$$

Лінії сім'ї

$$U(x, y) = C \qquad (1.164)$$

називають *еквіпотенціальними*, тобто лініями однакового потенціалу.

Лінії, дотичні до яких у всіх точках збігаються за напрямком з вектором $\mathbf{v}(x, y)$, називають *лініями течії і дають траєкторії руху точок.*

Покажемо, що лінії течії є ортогональними траєкторіями сім'ї еквіпотенціальних ліній.

Нехай φ — кут, утворений вектором $\mathbf{v}$ з віссю Ox (рис. 1.28). Враховуючи (1.163), маємо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = |\mathbf{v}|\cos\varphi, \ \frac{\partial U}{\partial y} = |\mathbf{v}|\sin\varphi,$$

звідки знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до лінії течії

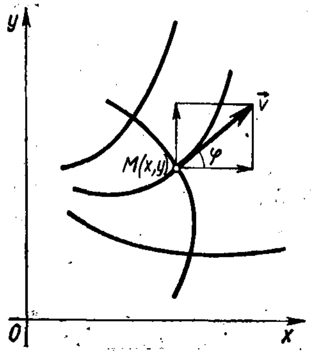

Рис. 1.28

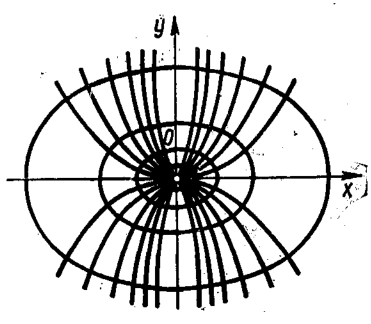

Рис. 1.29

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial U}{\partial x}}, \ U = U(x, y).$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до еквіпотенціальних ліній дістаємо, диференціюючи по x рівність (1.164):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0, \ \text{звідки } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт еквіпотенціальної лінії є оберненим за величиною і протилежним за знаком коефіцієнту дотичної до лінії течії. Отже, еквіпотенціальні лінії і лінії течії взаємно ортогональні.

Для електричного або магнітного поля ортогональними траєкторіями сім'ї еквіпотенціальних ліній є силові лінії цього поля.

Приклад. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї парабол $y = Cx^2$.

Розв'язання. Запишемо диференціальне рівняння сім'ї:

$$\begin{cases} y = Cx^2; \\ y' = 2Cx. \end{cases}$$

Виключивши C, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Замінивши y' на $-\frac{1}{y'}$, матимемо диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x} \ \text{або} \ ydy = -\frac{1}{2}xdx.$$

Отже, маємо загальний інтеграл

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Ортогональними траєкторіями заданої сім'ї парабол є деяка сім'я еліпсів з півосями $a = 2C$, $b = C\sqrt{2}$ (рис. 1.29).

Ізогональні траєкторії. Нехай траєкторії перетинають криві заданої сім'ї під кутом α (рис. 1.130), причому $\operatorname{tg}\alpha = k$. Кутовий коефіцієнт $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ дотичної до кривої сім'ї і кутовий коефіцієнт $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ до ізогональної траєкторії зв'язані співвідношенням

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\alpha},$$

тобто

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{1 + k \cdot \frac{dy_T}{dx}}. \qquad (1.165)$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (1.162) і опустивши індекс T, дістанемо диференціальне рівняння ізогональних траєкторій.

Приклад. Знайти ізогональні траєкторії сім'ї прямих
$$y = Cx,$$
що перетинають лінії заданої сім'ї під кутом α, причому $\operatorname{tg}\alpha = k$.

Розв'язання. Запишемо диференціальне рівняння заданої сім'ї:

$$\begin{cases} y = Cx; \\ y' = C. \end{cases}$$

Звідси

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}, \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Використовуючи (1.165), маємо

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{1 + k\frac{dy_T}{dx}} = \frac{y}{x}.$$

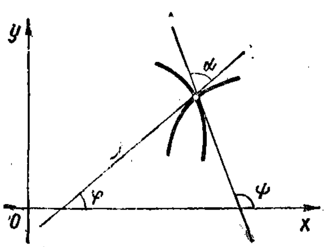

Рис. 1.30

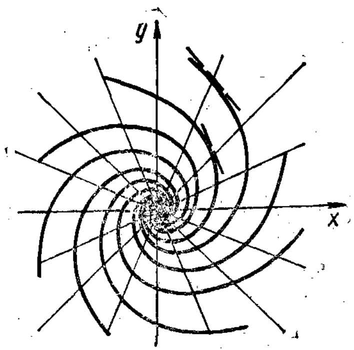

Рис. 1.31

Опустивши індекс T, знайдемо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k\frac{y}{x}}.$$

Інтегруючи це однорідне рівняння, дістанемо загальний інтеграл

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln C, \qquad (1.166)$$

який і визначає сім'ю ізогональних траєкторій. Щоб з'ясувати, які криві входять в цю сім'ю, перейдемо до полярних координат:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

Тепер із (1.166) дістанемо

$$\ln\rho = \frac{1}{k}\varphi + \ln C, \text{ або } \rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Отже, сім'я ізогональних траєкторій є сім'єю логарифмічних спіралей (рис. 1.31).

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ. РІВНЯННЯ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

2.1. Загальні питання

До диференціальних рівнянь вищих порядків приводить цілий ряд задач.

Диференціальне рівняння n-го порядку в загальному виді записують так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (2.1)$$

Тут $F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$ — функція, неперервна разом із своїми частинними похідними

$$F'_{v_0}, F'_{v_1}, \ldots, F'_{v_n}$$

в деякої області D точок $(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$ $(n+2)$-вимірного простору.

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно n-ї похідної, то його записують так:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (2.2)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція y від x і n незалежних сталих,

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (2.3)$$

яка задовольняє задане диференціальне рівняння при довільних значеннях $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Знаходження частинного розв'язку рівняння (2.1), (2.2) при початкових умовах

$$y_{|x=x_0} = y_0,\ y'_{|x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}_{|x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \quad (2.4)$$

де $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — задані числа, є задачею Коші.

ТЕОРЕМА ***(про існування розв'язку)*** *Диференціальне рівняння виду (2.2) має єдиний розв'язок, що задовольняє початкові умови (2.4), коли права частина рівняння (2.2) є неперервною функцією змінних $x, y, y', \ldots, y^{n-1}$;*

частинні похідні цієї функції по $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ обмежені в області D.

Якщо розглядати рівняння другого порядку $y'' = f(x, y, y')$, то для нього матимемо такі початкові умови: $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$, де x_0, y_0, y'_0 — задані числа.

Геометричний зміст початкових умов такий: через задану точку площини (x_0, y_0) із заданим тангенсом кута нахилу дотичної y'_0 проходить єдина крива. Звідси, якщо задавати різні значення y'_0 при сталих x_0 і y_0, то дістанемо нескінченну множину інтегральних кривих з різними кутами нахилу, які проходять через задану точку.

У подальшому розглядатимемо тільки деякі типи диференціальних рівнянь n-го порядку, $n \geqslant 2$, які допускають зниження порядку, а також лінійні диференціальні рівняння n-го порядку.

Слід зазначити, що для рівнянь вищого порядку поряд з задачею Коші розглядають ще так звані граничні задачі, або крайові.

2.2. Рівняння, що допускають зниження порядку

Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$

1. Диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x), \quad (2.5)$$

де $f(x)$ — неперервна функція на відрізку $I = [a; b]$, інтегрується в квадратурах. Справді, запишемо його у вигляді

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x),$$

або

$$d(y^{(n-1)}) = f(x)\,dx.$$

Тоді

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

де x_0 — довільне фіксоване значення x ($x_0, x \in I$), а C_1 — стала інтегрування.

Інтегруючи аналогічно далі, дістанемо

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1\right)dx + C_2 =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx + C_1(x - x_0) + C_2;$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx\,dx + C_1\frac{(x-x_0)^2}{2!} +$$

$$+ C_2\frac{x-x_0}{1!} + C_3;\ \ldots;$$

і, нарешті,

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\underbrace{dx\ \ldots\ dx}_{n} + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}\frac{x-x_0}{1!} + C_n. \quad (2.6)$$

Якщо взяти $x_0 = 0$ і замінити

$$C_1\frac{1}{(n-1)!} \text{ на } C_1,\ C_2\frac{1}{(n-2)!} \text{ на } C_2 \text{ і т. д.,}$$

то загальний розв'язок (2.6) матиме вигляд

$$y(x) = \underbrace{\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x}}_{n} f(x)\underbrace{dx\cdots dx}_{n} + C_1x^{n-1} +$$

$$+ C_2x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n. \quad (2.7)$$

Формула (2.6) є розв'язком такої задачі Коші:

знайти розв'язок рівняння (2.5), що задовольняє такі початкові умови при $x = x_0$:

$$y_0 = C_n,\ y'_0 = C_{n-1},\ \ldots,\ y_0^{(n-2)} = C_2,\ y_0^{(n-1)} = C_1.$$

Перший доданок правої частини у формулі (2.6)

$$v(x)=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\,\underbrace{dx\ldots dx}_{n} \tag{2.8}$$

є частинним розв'язком рівняння (2.5), який разом зі своїми похідними до $(n-1)$-го порядку перетворюється в нуль при $x=x_0$.

Вираз (2.8) містить n квадратур, але їх можна замінити однією, а саме — можна показати, що справджується формула Коші

$$v(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt. \tag{2.9}$$

Нехай $n=2$. Розглянемо інтеграл

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx=\int_{x_0}^{x} du\int_{x_0}^{u} f(t)\,dt$$

як повторний, який дорівнює відповідному подвійному інтегралу по області, обмеженій прямими (рис. 2.1):

$$u=x,\ t=x_0,\ t=u.$$

Змінюючи порядок інтегрування, дістаємо

$$\int_{x_0}^{x} du\int_{x_0}^{u} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\int_{t}^{x}du=\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)\,dt,$$

а тому

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)\,dt.$$

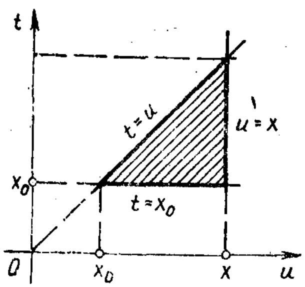

Рис. 2.1

Аналогічн

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x} du\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)\,dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\int_{t}^{x}(u-t)\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^2\,dt.$$

Перейдемо до довільного n. Припустимо, що для $n-1$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n-1} f(x)\,\underbrace{dx\cdots dx}_{n-1}=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-2}\,dt.$$

Тоді

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\,\underbrace{dx\ldots dx}_{n}=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} du\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)^{n-2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\int_{t}^{x}(u-t)^{n-2}\,du=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt,$$

тобто та сама формула справджується й для довільного n.

Отже, справедливість формули Коші (2.9) доведено. Це дає змогу записати загальний розв'язок (2.6), (2.7) так:

$$y=P_{n-1}(x)+v(x),$$

де $P_{n-1}(x)$ — алгебраїчний многочлен $(n-1)$-го степеня з довільними коефіцієнтами.

Формула (2.9) визначає розв'язок рівняння (2.5) з нульовими початковими умовами: $y=0,\ y'=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=0$ при $x=x_0$.

Якщо для рівняння (2.5) задані початкові умови

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ при } x=x_0,$$

то дістанемо розв'язок у формі Коші

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt+y_0+y_0'\frac{x-x_0}{1!}+$$

$$+y_0''\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y'' = \sin x.$$

Розв'язання. Маємо

$$y' = -\cos x + C_1,$$

звідки

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

ВПРАВИ

Розв'язати рівняння:

1. $y'' = \sin^2 x$.
2. $y'' = \ln x$.
3. $y'' = \sin x \cos x$.
4. $y'' = \sec^2 \frac{x}{2}$.
5. $y''' = e^x - \frac{1}{x}$.
6. $y^{IV} = e^x + 1$.
7. $y^{IV} = e^{ax}$.
8. $y'' = xe^x$.
9. $y''' = \cos 2x$.
10. $y''' = 60x^2$.

Більш загальний вид, ніж рівняння (2.5), має рівняння

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \qquad (2.10)$$

Розв'язок цього рівняння часто подають у параметричній формі

$$x = \varphi(t), \ y^{(n)} = \psi(t),$$

де $\varphi(t)$ — диференційовна функція. Тоді загальний інтеграл теж у параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y = y(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Далі знаходимо

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx,$$
$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Звідси

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_1 \equiv \Psi_1(t, C_1).$$

Аналогічно знаходимо $y^{(n-2)}$ і т. д. В результаті дістанемо

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Отже, система

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \Psi_n(t, C_1, C_2, \ldots C_n) \end{cases}$$

є загальним інтегралом рівняння (2.10) у параметричній формі.

2. Розглянемо рівняння виду

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \qquad (2.11)$$

Якщо це рівняння допускає розв'язок

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}),$$

то, ввівши нову невідому функцію $u = y^{n-1}$, дістанемо

$$u' = f(u). \qquad (2.12)$$

Загальним інтегралом рівняння (2.12) є

$$x + C_1 = \int \frac{du}{f(u)}, \ f(u) \neq 0. \qquad (2.13)$$

Припустимо, що (2.13) можна розв'язати відносно u:

$$u = \psi(x, C_1), \text{ або } y^{(n-1)} = \psi(x, C_1). \qquad (2.14)$$

Як бачимо, рівняння (2.14) є рівняння типу (2.5), тоді загальний розв'язок рівняння (2.11) матиме вигляд

$$y = \underbrace{\int\int \cdots \int}_{n-1} \psi(x, C_1)\,dx\,dx \ldots dx +$$
$$+ C_2 x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n.$$

Якщо рівняння (2.11) можна подати в параметричній формі

$$y^{(n)} = \varphi(t), \ y^{(n-1)} = \psi(t),$$

де $\psi(t)$ — диференційовна функція, то процес інтегрування рівняння (2.11) здійснюється так: із співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$ знаходимо

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)},$$

звідки

$$x = \int \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_1 \equiv \xi(t_1 C_1); \qquad (2.15)$$

далі знаходимо

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)};$$
$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_2;$$
$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}\,dx, \ \ldots, \ dy = y'\,dx;$$
$$y = \int y'\,dx + C_n \equiv \eta(t, C_2, \ldots, C_n). \qquad (2.16)$$

Система (2.15), (2.16) задає загальний інтеграл рівняння (2.11) у параметричній формі.

3. Рівняння виду

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.17)$$

введенням змінної

$$u = y^{(n-2)} \tag{2.18}$$

зводиться до рівняння другого порядку

$$F(u, u'') = 0. \tag{2.19}$$

Припустимо, що (2.19) розв'язне відносно u'':

$$u'' = f(u). \tag{2.20}$$

Помноживши (2.20) на інтегруючий множник $\mu = 2u'$, матимемо

$$2u'u'' = 2f(u)u'.$$

Звідси

$$(u')^2 = 2\int f(u)\,du + C_1,$$

а отже,

$$\frac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)\,du + C_1}} = dx \quad 2\int f(u)\,du + C_1 \neq 0.$$

Загальний інтеграл рівняння (2.20) матиме вигляд

$$\int \frac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)\,du + C_1}} = x + C_2.$$

Тепер, враховуючи (2.18), дістаємо

$$\Psi(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0.$$

Це є диференціальне рівняння $(n-2)$-го порядку типу (2.10), яке інтегрується в квадратурах.

Якщо рівняння (2.11) допускає параметричне подання,

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-2)} = \psi(t),$$

то процес інтегрування здійснюється так.

Із співвідношень

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx$$

дістаємо

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

звідки

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt + C_1} \equiv \xi(t, C_1).$$

Отже, $y^{(n-1)}$ і $y^{(n)}$ можна подати в параметричній формі

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t); \\ y^{(n-1)} = \xi(t, C_1), \end{cases}$$

тобто задачу зведено до інтегрування рівняння типу (2.11).

Рівняння другого порядку, яке не містить невідомої функції

1. Нехай маємо диференціальне рівняння

$$y'' = f(x, y'), \tag{2.21}$$

де права частина не містить функцію y.

Позначимо

$$y' = p,$$

тоді

$$y'' = p'.$$

Отже, дістанемо рівняння першого порядку відносно невідомої функції $p(x)$:

$$p' = f(x, p).$$

Нехай його загальний розв'язок

$$p = p(x, C_1).$$

Тоді в рівності $\frac{dy}{dx} = p$ знайдемо загальний інтеграл рівняння (2.21):

$$y = \int p(x, C_1)\,dx + C_2.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = a\sqrt{1-(y')^2}.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді $y'' = p'$. Отже, маємо рівняння

$$p' = a\sqrt{1-p^2},$$

розв'язок якого

$$p = \sin(ax + C_1).$$

Загальним розв'язком заданого рівняння є

$$y = -\frac{1}{a}\cos(ax + C_1) + C_2.$$

Зауваження. Аналогічно інтегрується рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}), \tag{2.22}$$

якщо виконати заміну $y^{(n-1)} = p$, $y^{(n)} = p'$.

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $xy'' + y' = x^2 + 1$
2. $xy'' = y'$
3. $xy'' + y' = 2x$
4. $x^2y'' + xy' = 1$
5. $x^2y'' = (y')^2$
6. $(y'')^2 + 1 = x$
7. $y''x = y'\ln x$
8. $y''\,\mathrm{tg}\,x = y' + 1$
9. $y'' = y' + x$
10. $xy'' - y' = 1.$

2. Рівняння, яке не містить невідомої функції і кількох послідовних похідних

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{2.23}$$

за допомогою заміни $y^{(m)} = u$, де u — нова невідома функція, зводиться до рівняння $(n - m)$-го порядку

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-m)}) = 0. \tag{2.24}$$

Якщо рівняння (2.24) інтегрується в квадратурах, то, повертаючись до змінної y, дістанемо

$$y^{(m)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-m}),$$

або

$$\Phi(x, y^{(m)}, C_1, \dots, C_{n-m}) = 0,$$

це є рівняння типу (2.10).

Рівняння другого порядку, яке не має незалежної змінної

1. Нехай маємо рівняння

$$y'' = f(y, y'). \tag{2.25}$$

Це рівняння явно не містить незалежну змінну x. Позначимо

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

при цьому вважатимемо, що p є функцією від y. Тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

і рівняння (2.25) матиме вигляд

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Якщо його загальним розв'язком є

$$p = p(y, C_1),$$

то дістаємо таке рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Проінтегрувавши це рівняння, дістанемо загальний розв'язок рівняння (2.25):

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$yy'' = (y')^2.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$, тоді $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Отже,

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2.$$

Це рівняння першого порядку, його загальним розв'язком є функція

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $y'' + y = 0$
2. $yy'' = 1$
3. $(y'')^2 = 4y'$
4. $y'' = (y')^2$
5. $y'' = a^2 y$
6. $(y'')^2 = y'$
7. $y^2 = 1 + (y'')^2$
8. $yy'' = y'(a + y')$
9. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$
10. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$
11. $(y')^2 + (y'')^2 = (y')^4$
12. $yy'' + (y')^2 - 1 = 0$
13. $y''(yy' + a) = y'(1 + (y')^2)$
14. $yy'' = y'$
15. $y'' = ae^y$
16. $y''y^3 = 1$
17. $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$
18. $y'' = ayy'$
19. $y'' = y'(1 + (y')^2)$
20. $y'' = 1 + (y')^2$.

2. Рівняння n-го порядку, яке не містить явно незалежну змінну,

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.26}$$

за допомогою заміни

$$y' = p, \tag{2.27}$$

де $p = p(y)$ — нова невідома функція, y — нова незалежна змінна, зводиться до рівняння порядку, меншого на одиницю.

Справді, оскільки

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = pp', \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (pp'' + (p')^2)p, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= g(p, p', \dots, p^{(n-1)}), \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\left(p^{(k)} = \frac{d^k p}{dy^k}, \; k = 1, 2, \dots, n-1\right),$$

то в результаті підстановки (2.27), (2.28) у (2.26) дістанемо рівняння $(n - 1)$-го порядку відносно нової невідомої функції p:

$$F_1(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0. \tag{2.29}$$

Якщо відомо загальний інтеграл рівняння (2.29)

$$\Phi_1(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0,$$

то співвідношення

$$\Phi_1(y, y', C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0 \qquad (2.30)$$

є диференціальним рівнянням першого порядку.

Загальний інтеграл рівняння (2.30) $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні сталі, буде загальним інтегралом рівняння (2.26).

Однорідні рівняння вищих порядків

1. Рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.31)$$

є однорідним відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$, якщо виконується умова

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$
$$\lambda = \text{const} \neq 0.$$

Підстановкою $y = e^u$, або

$$y' = yu, \qquad (2.32)$$

де u — нова невідома функція, порядок рівняння (2.31) знижується на одиницю. Маємо

$$\begin{cases} y' = yu, \\ y'' = y(u^2 + u'), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = yg(u, u', \dots, u^{(n-1)}). \end{cases} \qquad (2.33)$$

Підставивши (2.33) в (2.31), дістанемо

$$y^m F(x, 1, u, u^2 + u', \dots, g(u, u', \dots, u^{(n-1)})) = 0.$$

Скоротивши на $y^{(m)}$, матимемо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку відносно функції u:

$$F(x, 1, u, u^2 + u', \dots, g(u, u', \dots, u^{(n-1)})) = 0. \quad (2.34)$$

Якщо знайдено загальний розв'язок

$$u = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

рівняння (2.34), то, використавши (2.32), дістанемо загальний розв'язок рівняння (2.31):

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})dx}, \qquad (2.35)$$

де $C_1, \dots, C_n$ — довільні сталі.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0.$$

Розв'язання. Це однорідне рівняння другого степеня відносно y, y', y''. Виконавши заміну (2.32), дістанемо рівняння першого порядку

$$x^2(u' + u^2) - (1 - xu)^2 = 0, \text{ або } u' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2},$$

звідки

$$u = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

і згідно з (2.35)

$$y = e^{\int u dx} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}};$$

2. Рівняння (2.31) називають *узагальнено-однорідним*, якщо існують числа k і m такі, що

$$F(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \dots, e^{(k-n)t} y^{(n)}) =$$
$$= e^{mt} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Підстановкою

$$x = e^t, \ y = ue^{kt}, \qquad (2.36)$$

де t — нова незалежна змінна; u — нова невідома функція, рівняння (2.31) зводиться до рівняння, яке не містить незалежну змінну t і, отже, допускає зниження порядку на одиницю. При $x < 0$ покладаємо $x = -e^t$.

Знайдемо похідні

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \left(\frac{du}{dt} e^{kt} + kue^{kt}\right) e^{-t} = (u' + ku) e^{(k-1)t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} e^{-t} = (u'' + (2k - 1) u' + k(k - 1) u) e^{(k-2)t},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = g(u, u', \dots, u^{(n)}) e^{(k-n)t}. \qquad (2.37)$$

Підставивши (2.36), (2.37) у рівняння (2.31), дістанемо

$$e^{mt} F_1(u, u', \dots, u^{(n)}) = 0.$$

Після скорочення на e^{mt} матимемо рівняння, яке не містить незалежну змінну t.

3. Розглянемо рівняння (2.31), ліва частина в яких є точними похідними від деякої функції $\Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, тобто

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0. \ (2.38)$$

Такі рівняння називають *рівняннями в точних похідних*. Згідно з (2.38) маємо

$$\Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

тобто рівняння (2.31) допускає зниження порядку на одиницю.

Якщо рівняння (2.31) не є рівнянням в точних похідних, то іноді можна підібрати інтегруючий множник $\mu = \mu(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ такий, що після множення рівняння (2.31) на μ дістанемо рівняння в точних похідних. При цьому можуть з'явитися зайві розв'язки (розв'язки рівняння $\mu = 0$) або їх втрата, якщо функція μ має розрив.

4. Якщо ввести позначення похідних за допомогою диференціалів, то рівняння (2.31) можна записати у вигляді

$$\Phi(x, dx, y, dy, d^2y, \dots, d^ny) = 0.$$

Це рівняння називають *однорідним відносно змінних x, y та їх диференціалів*, якщо

$$\Phi(\lambda x, \lambda dx, \lambda y, \lambda dy, \dots, \lambda d^ny) = \lambda^m\Phi(x, dx, y, dy, \dots, d^ny).$$

Порядок такого рівняння можна знизити на одиницю відповідними підстановками:

1) якщо

$$\Phi(x, dx, \lambda y, \lambda dy, \dots, \lambda d^ny) = \lambda^m\Phi(x, dx, y, dy, \dots, d^ny),$$

то робимо підстановку $y = e^u$, де u — нова невідома функція;

2) якщо

$$\Phi(\lambda x, \lambda dx, \lambda dx^2, \dots, \lambda dx^n, y, dy, \dots, d^ny) = \lambda^m\Phi(x, dx, \dots, dx^n, y, dy, \dots, d^ny),$$

то робимо підстановку $x = e^t$, де t — нова незалежна змінна;

3) якщо

$$\Phi(\lambda x, \lambda dx, \lambda y, \lambda dy, \dots, \lambda d^ny) = \lambda^m\Phi(x, dx, y, dy, \dots, d^ny),$$

то робимо підстановку $x = e^t$, $y = ue^t$, де t — незалежна змінна, а u — невідома функція;

4) якщо

$$\Phi(\lambda x, \lambda dx, \lambda^k y, \lambda^k dy, \dots, \lambda^k d^ny) = \lambda^m\Phi(x, dx, y, dy, \dots, d^ny),$$

то використовуємо підстановку (2.36).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння так:

$$xyd^2y + xdy^2 - ydydx = 0.$$

Після заміни x на λx, а dx на λdx матимемо

$$\lambda(xyd^2y + xdy^2 - ydydx) = 0.$$

Отже, задане рівняння належить до типу 2), де $m = 1$. Після підстановки $x = e^t$ дістанемо

$$y\frac{d^2y}{dt^2} - 2y\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0,$$

яке не містить явно аргументу.

2. Проінтегрувати рівняння $yy'' - (y')^2 = y'$.

Розв'язання. Розв'язком цього рівняння є функція $y = 0$. Розділимо ліву і праву частини рівняння на $y^2 \neq 0$:

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2}.$$

Тоді

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{1}{y}\right)' = 0 \text{ або } \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y}\right)' = 0.$$

Таким чином, задане рівняння зведено до рівняння в точних похідних. Отже,

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1, \quad y' - C_1y = -1,$$

звідки при $C_1 = 0$ маємо $y = -x + C$. При $C_1 \neq 0$ маємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку, загальний розв'язок якого

$$y = e^{C_1x}\left(C_2 - \int e^{-C_1x}dx\right) = C_2e^{C_1x} + \frac{1}{C_1}, \quad (C_1 \neq 0).$$

Розділ 3

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Основні поняття теорії лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків

Диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{3.1}$$

називають *лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку*. Це рівняння лінійне відносно функції y та її похідних. Функції $p_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, і $f(x)$ — задані неперервні функції від x на інтервалі (a, b) або сталі. Функції $p_i(x)$ називають коефіцієнтами. Функцію $f(x)$ називають *пра-*

вою частиною рівняння або вільним членом. Якщо $f(x) \equiv 0$, то маємо рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + \\ + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0. \qquad (3.2)$$

Рівняння (3.2) однорідне відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$ і його називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку*, а рівняння (3.1) — *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.*

Позначимо ліву частину рівняння (3.1) через

$$L_n[y] \equiv L[y].$$

Тоді вираз

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

називають *лінійним диференціальним оператором n-го порядку*. Запис $L[y]$ означає застосування до функції y сукупності операцій (диференціювання, множення на функції $p_i(x)$ і додавання), вказаних у лівій частині рівняння (3.1) або (3.2).

Лінійний оператор має такі властивості:

$L[Cy] = CL[y]$ — однорідність оператора;

$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ — адитивність оператора.

Зазначимо, що однорідний і адитивний оператор називають лінійним. На основі цих властивостей маємо

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right] = \sum_{k=1}^{n} C_k L[y_k], \qquad (3.3)$$

де C_k — довільні сталі.

Приклад. Нехай $L[y] = y'' + y$. Легко побачити, що $L[\sin x] = -\sin x + \sin x = 0$, $L[x^2] = 2 + x^2$.

За допомогою диференціального оператора рівняння (3.1) і (3.2) записуються так:

$$L[y] = f(x), \qquad (3.4)$$
$$L[y] = 0. \qquad (3.5)$$

Запишемо рівняння (3.4) у вигляді, розв'язаному відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x) - p_1(x)\, y^{(n-1)} - \dots - p_{n-1}(x)\, y' - p_n(x)\, y,$$

і розглянемо $y^{(n)}$ як функцію від $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Ця функція неперервна в інтервалі (a, b). Частинні похідні функ F по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ відповідно дорівнюють

$$-p_n(x), -p_{n-1}(x), \dots, -p_1(x).$$

Вони неперервні на будь-якому відрізку $[a_1, b_1]$, який повністю належить (a, b); тому ці похідні на цьому відрізку обмежені. Отже, рівняння (3.4) задовольняє умови теореми Коші (див. п. 2.1).

Таким чином, для кожної початкової умови при $x = x_0$

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},\quad a < x_0 < b,$$

існує розв'язок рівняння (3.4) і притому тільки єдиний.

ТЕОРЕМА 1. *Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2), то їх лінійна комбінація $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ є теж розв'язком рівняння (3.2).*

Це випливає з рівності (3.3).

Зазначимо, що лінійне рівняння залишиться лінійним при довільній заміні незалежної змінної, наприклад

$$x = \varphi(t),\ t = \psi(x),$$

і при довільній лінійній заміні шуканої функції

$$y = \alpha(x)\, z + \beta(x).$$

Виконуючи в лінійному однорідному диференціальному рівнянні лінійну підстановку

$$y = \alpha(x)\, z, \qquad (3.6)$$

знову дістанемо лінійне однорідне диференціальне рівняння.

Крім того, використовуючи підстановку (3.6), рівняння (3.5) і (3.4) завжди можна ввести до рівняння, яке не містить члена з похідною $(n-1)$-го порядку.

Справді, оскільки

$$y^{(n)} = \alpha z^{n} + n\alpha' z^{(n-1)} + \dots,$$
$$y^{(n-1)} = \alpha z^{(n-1)} + \dots,$$

. . . .

то після підстановки їх у рівняння (3.5) дістанемо

$$\alpha z^{(n)} + (n\alpha' + p_1(x)\,\alpha)\, z^{(n-1)} + \dots = 0.$$

Для того щоб позбутися доданка з $z^{(n-1)}$, виберемо $\alpha(x)$ так, щоб

$$n\alpha' + p_1(x)\alpha = 0,$$

для чого досить взяти

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\,dx}.$$

Отже, підстановка

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\,dx}\, z$$

зводить рівняння (3.5) до рівняння, яке не містить члена з похідною $(n-1)$-го порядку.

3.2. Лінійна залежність функцій. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку

Введемо поняття лінійної залежності функцій, аналогічно відповідним поняттям для системи векторів.

Систему функцій $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ називають *лінійно незалежною на* (a, b), якщо тотожність

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \equiv 0, \quad C_i = \text{const}, \tag{3.7}$$

виконується тільки при $C_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; у противному разі систему функцій називають *лінійно залежною.*

Наведемо ряд прикладів.

1. Функції

$$y_1 = \sin^2 x,\ y_2 = \cos^2 x,\ y_3 = 1$$

лінійно залежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, оскільки $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ виконується співвідношення

$$1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 1 = 0,$$

отже, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$.

2. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = 2e^x$ лінійно залежні, оскільки

$$y_2 = 2y_1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

3. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, оскільки співвідношення (3.7) справджується тільки при $C_1 = C_2 = 0$.

Нижче буде сформульовано критерії лінійної залежності і незалежності системи функцій.

Систему з n лінійно незалежних на інтервалі (a, b) розв'язків

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x)$$

рівняння (3.2) називають *фундаментальною системою розв'язків (ФСР) цього рівняння.*

Щоб розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку (3.2), треба знайти його ФСР.

ТЕОРЕМА 2. *Якщо функції*

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \tag{3.8}$$

що мають в інтервалі (a, b) похідні до $(n-1)$-го порядку включно, лінійно залежні, то

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in (a, b);$$

цей детермінант позначають

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_n]$$

і називають детермінантом Вронського, чи вронскіаном, для системи функцій (3.8).

Д о в е д е н н я. Оскільки функції (3.8) лінійно залежні на (a, b), то існують такі числа

$$C_1, C_2, \dots, C_n, \tag{3.9}$$

що не всі дорівнюють нулю і що справджується рівність (3.7). Диференціюючи її $n-1$ разів, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0, \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Це однорідна система, яка за умовою має нетривіальний розв'язок (3.9), тобто хоча б одне $C_i \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Таке можливо, коли детермінант останньої системи, який є детермінантом Вронського $W(x)$, тотожно дорівнює нулю. Теорему доведено.

Зауваження. Згідно з теоремою 2, якщо $W(x) \neq 0$ хоча б в одній точці інтервалу (a, b), то функції (3.8) лінійно незалежні на (a, b).

Розглянемо ряд прикладів.

1. Система функцій

$$1, x, \dots, x^{n-1}$$

лінійно незалежна на довільному інтервалі (a, b), оскільки

$$W[1, x, x^2, \dots, x^{n-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1! & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1! \cdot 2! \dots (n-1)! \neq 0.$$

До того ж ця система лінійно незалежна на будь-якому інтервалі. Справді, внаслідок теореми з алгебри рівність

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1} = 0$$

виконується не більше ніж в $n-1$ точці на осі Ox.

2. Функції

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$$

лінійно незалежні на будь-якому інтервалі (a, b), якщо k_1, $k_2, \dots, k_n$ — різні числа (дійсні або комплексні).

Справді,

$$W[e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}] =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \ldots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \ldots & k_ne^{k_nx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} & \ldots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+\ldots+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки останній детермінант є детермінантом Вандермонда, який при різних $k_1, k_2, \ldots, k_n$ не дорівнює нулю.

3. Функції

$$e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{n-1}e^{kx}$$

лінійно незалежні на довільному інтервалі (a, b). Оскільки $e^{kx} \neq 0$ і

$$C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} + \ldots + C_nx^{n-1}e^{kx} =$$
$$= e^{kx}(C_1 + C_2x + \ldots + C_nx^{n-1}),$$

то лінійна незалежність даних функцій випливає з прикладу 1.

Для двох функцій можна дати більш простий критерій лінійної незалежності.

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні на інтервалі (a, b), якщо їх відношення на цьому інтервалі тотожно не дорівнює сталій величині

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const};$$

якщо

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const},$$

то функції лінійно залежні.

Наведемо ще один критерій лінійної залежності системи функцій [28].

Нехай маємо систему функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, заданих на відрізку $[a, b]$. Покладемо

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x)\, y_j(x)\, dx \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Детермінант

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_2, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \cdots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

називають *детермінантом Грама системи функцій* $\{y_i(x)\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того щоб система функцій* $\{y_i(x)\}$, $i = 1, \ldots, n$, *була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб її детермінант Грама дорівнював нулю:*

$$\Gamma(y_1, \cdots, y_n) = 0.$$

Приклад. Довести, що функції $y = x$, $y = 2x$ лінійно залежні на відрізку $[0; 1]$.

Доведення. Маємо

$$(y_1, y_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$$

$$(y_1, y_2) = (y_2, y_1) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$(y_2, y_2) = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, задані функції лінійно залежні.

ТЕОРЕМА 4. *Для того щоб розв'язки*

$$y_1, \ldots, y_n \tag{3.10}$$

лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2) були лінійно незалежними на (a, b), *необхідно і достатньо, щоб детермінант Вронського* $W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Доведення. 1) якщо $W(x) \neq 0$ на (a, b), то функції (3.10) лінійно незалежні, не зважаючи на те, є вони розв'язками рівняння (3.2) чи ні;

2) нехай функції (3.10) є лінійно незалежні на (a, b) і є розв'язками рівняння $L[y] = 0$.

Покажемо, що $W(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Припустимо протилежне, тобто існує точка $x = x_0 \in (a, b)$, в якій $W(x_0) =$

$= 0$. Виберемо числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$, які одночасно не дорівнюють нулю і які є розв'язками системи

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Це можна зробити, оскільки детермінант системи (3.11) $W(x_0) = 0$. Тоді, згідно з теоремою 1, функція $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ є розв'язком рівняння

$$\mathrm{L}[y] = 0$$

з нульовими початковими умовами (відповідно до (3.11)):

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Цим умовам задовольняє і тривіальний розв'язок $y = 0$. Проте за теоремою існування і єдиності розв'язку, який задовольняє ці n початкових умов, може існувати тільки єдиний розв'язок. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \equiv 0$$

на (a, b), тобто функції (3.10) лінійно залежні на (a, b), що суперечить припущенню. Теорему доведено.

ТЕОРЕМА 5. *Якщо функції (3.10) є лінійно незалежні на (a, b) розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку (3.2), то функція*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x),\ a < x < b, \quad (3.12)$$

де C_i — довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (3.2).

Доведення. Відомо вже, що сума (3.12) при довільних C_i є розв'язком рівняння (3.2). Нехай, навпаки, функція $u = u(x)$ є довільним розв'язком цього рівняння. Покладемо

$$u(x_0) = u_0,\ u'(x_0) = u_0', \cdots, u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)}. \quad (3.13)$$

Для чисел $u_0, u_0', \cdots, u_0^{(n-1)}$ побудуємо систему рівнянь відносно невідомих чисел C_i:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) = u_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Детермінант цієї системи $W(x_0) \neq 0$, оскільки функції (3.10) лінійно незалежні на (a, b), є розв'язками рівняння (3.2). Отже, існує єдина система чисел

$$C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0,$$

що задовольняє рівняння системи (3.14). Підставляючи їх в (3.12), дістанемо розв'язок рівняння (3.2):

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x).$$

Цей розв'язок задовольняє ті початкові умови (3.13), що й $u(x)$. Тоді за теоремою існування і єдиності розв'язку справджується рівність $u(x) = y(x)$, $x \in (a, b)$.

Теорему доведено.

Таким чином, щоб побудувати загальний розв'язок однорідного рівняння $\mathrm{L}[y] = 0$, досить знайти фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Тоді лінійна комбінація цієї системи і буде загальним розв'язком.

Постає питання: чи кожне диференціальне рівняння (3.5) має фундаментальну систему частинних розв'язків? Покажемо, що для цього рівняння існує фундаментальна система частинних розв'язків. Знайдемо частинні розв'язки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ з початковими умовами: при $x = x_0$

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = 1,\ y_2(x_0) = 0, \cdots, y_n(x_0) = 0, \\ &y_1'(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1, \cdots, y_n'(x_0) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \cdots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ці частинні розв'язки існують згідно з теоремою про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння. Тоді детермінант Вронського при $x = x_0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже, функції (3.10) утворюють фундаментальну систему розв'язків. Цю систему розв'язків з початковими умовами (3.15), тобто $W(x_0) = 1$, називають *нормованою в точці* $x = x_0$. Для будь-якого лінійного однорідного рівняння (3.5) з неперервними коефіцієнтами існує одна і тільки одна фундаментальна система розв'язків, нормована в довільній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів. Наприклад:

1. Рівняння $y'' + y = 0$ має розв'язки $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння в $(-\infty, +\infty)$. Тому загальним розв'язком є функція

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Фундаментальна система розв'язків $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ нормована в точці $x = 0$. Тому розв'язок з початковими умовами $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = x_0$ має вигляд

$$y = y_0 \cos x + y_0' \sin x$$

і при довільних y_0 і y_0' визначає загальний розв'язок заданого рівняння у формі Коші.

2. Рівняння

$$y'' - y = 0$$

має розв'язки $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Оскільки вони лінійно незалежні $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, то

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \tag{3.16}$$

є загальним розв'язком заданого рівняння.

Фундаментальна система розв'язків $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ є ненормованою в точці $x = 0$. Побудуємо фундаментальну систему розв'язків, нормовану в цій точці. Нехай розв'язки v_1 і v_2 є лінійними комбінаціями розв'язків y_1 і y_2 із сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}e^x + a_{12}e^{-x}, \\ v_2 = a_{21}e^x + a_{22}e^{-x}, \end{cases}$$

де сталі a_{ik} треба вибрати так, щоб при $x = 0$

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 0;$$
$$v_1' = 0, \quad v_2' = 1.$$

Щоб задовольнити ці умови, знайдемо розв'язки таких систем:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = 1, \\ a_{11} - a_{12} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{21} + a_{22} = 0, \\ a_{21} - a_{22} = 1. \end{cases}$$

Звідси

$$a_{11} = a_{12} = \frac{1}{2}; \quad a_{21} = \frac{1}{2}, \quad a_{22} = -\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$v_1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad v_2 = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

тобто

$$v_1 = \operatorname{ch} x, \; v_2 = \operatorname{sh} x.$$

Таким чином, гіперболічні функції ch x, sh x утворюють фундаментальну систему розв'язків, нормовану в точці $x = 0$.

Тому функція

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

як і функція (3.16), є також загальним розв'язком заданого рівняння. Розв'язок з початковими умовами $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = 0$ має вигляд

$$y = y_0 \operatorname{ch} x + y_0' \operatorname{sh} x.$$

3.3. Формула Ліувілля — Остроградського

Нехай маємо n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тоді рівняння (3.2) можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \cdots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix} = 0. \tag{3.17}$$

Це рівняння має ті самі лінійно незалежні розв'язки, що й (3.2). Справді, якщо підставити в (3.17) замість y одну з функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то дістанемо детермінант, який має два однакових рядки і тотожний нулю. Звідси випливає, що загальні розв'язки рівняння (3.2) і (3.17) однакові, і, отже, самі рівняння відрізняються лише множником.

Розгортаючи ліву частину (3.17) за елементами першого рядка

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} y_1^{(n)} & \cdots & y_1^{(n-i+1)} & y_1^{(n-i-1)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & \cdots & y_2^{(n-i+1)} & y_2^{(n-i-1)} & \cdots & y_2' & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)} & \cdots & y_n^{(n-i+1)} & y_n^{(n-i-1)} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix}$$

і враховуючи, що $\Delta_0 = W(x)$, запишемо (3.17) у вигляді

$$Wy^{(n)} - \Delta_1 y^{(n-1)} + \Delta_2 y^{(n-2)} - \cdots + (-1)^k \Delta_k y^{(n-k)} + \cdots + (-1)^n \Delta_n y = 0.$$

Це рівняння тотожне рівнянню (3.2). Прирівнюючи коефіцієнти при однакових похідних, маємо

$$p_1 = -\frac{\Delta_1}{W}, \; p_2 = \frac{\Delta_2}{W}, \; \ldots, \; p_k = (-1)^k \frac{\Delta_k}{W}, \; \ldots, \; p_n = (-1)^n \frac{\Delta_n}{W}.$$

Знайдемо залежність Δ_1 від W. Для цього візьмемо похідну від W по x:

$$\frac{dW}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2' & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{dy_1^{(n-1)}}{dx} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1' & y_1 \\ \frac{dy_2^{(n-1)}}{dx} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2' & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_n^{(n-1)}}{dx} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & \frac{dy_1^{(n-2)}}{dx} & \cdots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & \frac{dy_2^{(n-2)}}{dx} & \cdots & y_2' & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)} & \frac{dy_n^{(n-2)}}{dx} & \cdots & y_n' & y_n \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1' & \frac{dy_1}{dx} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2' & \frac{dy_2}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n' & \frac{dy_n}{dx} \end{vmatrix}=$$

$$=\Delta_1+0+\cdots+0=\Delta_1.$$

Оскільки всі останні детермінанти мають по два однакових стовпця, то вони дорівнюють нулю.

Таким чином,

$$\Delta_1=\frac{dW}{dx},$$

а тому

$$p_1(x)=-\frac{1}{W}\frac{dW}{dx}. \tag{3.18}$$

Вважаючи функцію p_1 заданою, а вронскіан W невідомим, та інтегруючи рівняння (3.18) відносно W, дістанемо

$$W(x)=Ce^{-\int p_1(x)\,dx}, \tag{3.19}$$

де C — довільна стала.

Якщо разом з рівнянням (3.18) задати початкову умову, $W(x_0)=W_0$, то з (3.19) матимемо

$$W(x)=W_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds}. \tag{3.20}$$

Формули (3.16), (3.17), які дають змогу знаходити вронскіан ФСР рівняння (3.2), не маючи ще цієї системи, називають формулами Ліувілля—Остроградського.

З формули (3.20) маємо такі властивості вронскіана:

1) якщо $W(x_0)=0$, $x_0\in(a,b)$, то $W(x)\equiv 0$, $\forall x\in(a,b)$;
2) якщо $W(x_0)\neq 0$, $x_0\in(a,b)$, то $W(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$.

За формулою (3.17) можна побудувати диференціальне рівняння при заданій ФСР.

Приклад. Знайти диференціальне рівняння, для якого функції $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ складають ФСР.

Розв'язання. Використовуючи формулу (3.17), маємо

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix}=0, \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix}=0.$$

Розкриваючи останній детермінант, дістаємо $y''-y=0$. Це і є шукане диференціальне рівняння.

3.4. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння

Загальним розв'язком неоднорідного рівняння (3.1) є сума будь-якого його частинного розв'язку $v(x)$ і загального розв'язку $u(x)$ однорідного рівняння (3.2), тобто

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}C_ky_k(x)+v(x), \tag{3.21}$$

або

$$y(x)=u(x)+v(x),\quad u(x)=\sum_{k=1}^{n}C_ky_k(x).$$

Справді,

$$\mathbf{L}[y]=L\Big[\sum_{k=1}^{n}C_ky_k(x)+v(x)\Big]=\sum_{k=1}^{n}C_k\mathbf{L}[y_k(x)]+$$
$$+\mathbf{L}[v(x)]=0+f(x)\equiv f(x).$$

Якщо $y(x)$ є довільним розв'язком рівняння (3.1), то

$$\mathbf{L}[y - v(x)] = \mathbf{L}[y] - \mathbf{L}[v] = f(x) - f(x) = 0,$$

і, таким чином, $y - v$ є розв'язком однорідного рівняння (3.2). Тоді існують такі числа C_k, що

$$y(x) - v(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x),$$

тобто для цих чисел виконується рівність (3.21).

Отже, кожний розв'язок рівняння (3.1), який задовольняє довільні початкові умови, можна дістати з функції (3.21), яка, таким чином, є загальним розв'язком рівняння (3.1).

При знаходженні частинних розв'язків рівняння (3.1) доцільно мати на увазі таку теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Частинний розв'язок $v(x)$ рівняння*

$$\mathbf{L}[y] = f_1(x) + f_2(x) \qquad (3.22)$$

можна подати у вигляді суми

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x), \qquad (3.23)$$

де $v_1(x)$, $v_2(x)$ — відповідно розв'язки рівнянь

$$\mathbf{L}[y] = f_1(x) \text{ і } \mathbf{L}[y] = f_2(x).$$

Доведення. Справді, оскільки

$$\mathbf{L}[v_1] = f_1(x),$$
$$\mathbf{L}[v_2] = f_2(x),$$

то, додаючи ці рівності, дістаємо

$$\mathbf{L}[v_1] + L[v_2] = f_1(x) = f_2(x),$$

або

$$\mathbf{L}[v_1] + \mathbf{L}[v_2] = \mathbf{L}[v_1 + v_2] = \mathbf{L}[v] = f_1 + f_2.$$

Отже, сума (3.23) є розв'язком рівняння (3.22).

Звідси випливає властивість суперпозиції або накладання розв'язків:

якщо функції $v_i(x)$ є розв'язками рівняння $\mathbf{L}[y] = f_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, тобто $\mathbf{L}[v_i] \equiv f_i(x)$, то функція $v = \sum_{i=1}^{n} C_i v_i$, $C_i = \text{const}$, є розв'язком рівняння $L[y] = \sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x)$.

Наприклад, нехай задано рівняння

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x.$$

Тоді рівняння

$$y'' + 2y = 2$$

має частинний розв'язок $v_1 = 1$, а рівняння

$$y'' + 2y = 3e^x$$

має частинний розв'язок $v_2 = e^x$. Функція $v = 1 + e^x$ є частинним розв'язком заданого рівняння.

ТЕОРЕМА 7. *Якщо диференціальне рівняння (3.2) має розв'язок виду*

$$u(x) + i\,v(x), \qquad (3.24)$$

то кожна з функцій $u(x)$ і $v(x)$ є розв'язком рівняння (3.2).

Доведення. Справді, за адитивною властивістю оператора $\mathbf{L}$ маємо

$$\mathbf{L}[u(x) + iv(x)] = \mathbf{L}[u(x)] + \mathbf{L}[iv(x)] =$$
$$= \mathbf{L}[u(x)] + i\mathbf{L}[v(x)].$$

Оскільки функція (3.24) є розв'язком рівняння (3.2), то маємо

$$\mathbf{L}[u(x) + i\,v(x)] = 0$$

$$\mathbf{L}[u(x)] + i\mathbf{L}[v(x)] = 0.$$

З останньої рівності за відомою теоремою з вищої алгебри дістаємо тотожності

$$\mathbf{L}[u(x)] = 0 \text{ і } \mathbf{L}[v(x)] = 0.$$

Теорему доведено.

Якщо рівняння $\mathbf{L}[y] = \varphi(x) + i\,\psi(x)$, де всі коефіцієнти $p_i(x)$ і функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ дійсні, має розв'язок $y = u(x) + i\,v(x)$, то дійсна частина $u(x)$ і уявна частина $v(x)$ є відповідно розв'язками рівнянь

$$\mathbf{L}[y] = \varphi(x) \text{ і } \mathbf{L}[y] = \psi(x).$$

Справді,

$$\mathbf{L}[u + iv] = \varphi(x) + i\psi(x)$$

або

$$\mathbf{L}[u] + i\mathbf{L}[v] = \varphi(x) + i\psi(x).$$

Отже, прирівнюємо окремо дійсні та уявні частини:

$$\mathbf{L}[u] = \varphi(x), \ \mathbf{L}[v] = \psi(x).$$

Таким чином, дістали доводжуване твердження.

3.5. Метод варіації довільних сталих

Використовуючи висновок про загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1), його завжди можна знайти, якщо відомо загальний розв'язок рівняння (3.2) і будь-який частинний розв'язок рівняння (3.1).

Існує загальний метод знаходження частинних розв'язків неоднорідного рівняння (3.1),який називається методом варіації довільних сталих, або методом Лагранжа. З'ясуємо суть цього методу.

Нехай маємо загальний інтеграл рівняння (3.2) $y = u(x)$, тобто

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \qquad (3.25)$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (3.2), а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Шукатимемо частинний розв'язок $v(x)$ рівняння (3.1) у формі (3.25), розглядаючи величини $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не як довільні сталі, а як функції x, але такі, щоб в результаті вираз (3.25) визначав частинний розв'язок рівняння (3.1).

Для цього, диференціюючи (3.25) по x, матимемо

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \cdots + C_ny_n' + C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n.$$

Виберемо тепер $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, щоб

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_n'y_n = 0.$$

Тоді y' матиме такий самий вигляд, як і у випадку сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, тобто

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \cdots + C_ny_n'. \qquad (3.26)$$

Диференціюючи ще раз, дістаємо

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \cdots C_ny_n'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n'.$$

Нехай знову

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' = 0.$$

Тоді

$$y'' = C_1y_1' + C_2y_2'' + \cdots + C_ny_n''.$$

Продовжуючи диференціювати далі і підібравши величини $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, щоб

$$C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0,$$

дістанемо остаточно

$$y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \cdots + C_ny_n^{(n-1)}.$$

Диференціюючи цю похідну ще раз, знайдемо

$$y^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \cdots + C_ny^{(n)} + C_1'y_1^{(n-1)} + \\ + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)}.$$

Підставимо тепер у рівняння (3.1) вираз для y і знайдені вирази для $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Тоді, в результаті певних перетворень, матимемо

$$\begin{aligned} &C_1(y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_1' + p_ny_1) + \\ &+ C_2(y_2^{(n)} + p_1y_2^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_2' + p_ny_2) + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ C_n(y_n^{(n)} + p_1y_n^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_n' + p_ny_n) + \\ &+ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{aligned}$$

Множники, що містяться в дужках при $C_1, C_2, \ldots, C_n$, дорівнюють тотожно нулю, оскільки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є частинними розв'язками рівняння (3.2). Отже, останнє рівняння матиме вигляд

$$C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Звідси шукані функції $C_1, C_2, \ldots, C_n$ задовольняють умовам

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (3.27)$$

Маємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$. Ця система має єдиний розв'язок, оскільки її визначник — це детермінант Вронського $W(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо $C_1'(x)$, $C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ як відомі функції від x:

$$\begin{cases} C_1' = \varphi_1(x), \\ C_2' = \varphi_2(x), \\ \cdots\cdots \\ C_n' = \varphi_n(x). \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1, \\ C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n(x) = \int \varphi_n(x)\,dx + C_n, \end{cases}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — дійсні довільні сталі. Підставляючи значення $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ у (3.22), дістанемо загальний інтеграл лінійного диференціального рівняння (3.1):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_1 \int \varphi_1(x)\,dx + \\ + y_2 \int \varphi_2(x)\,dx + \cdots + y_n \int \varphi_n(x)\,dx.$$

Перша група доданків, а саме $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$, є загальним інтегралом рівняння (3.2), решта — частинним розв'язком рівняння (3.1).

Приклади

1. За методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

Нехай C_1 і C_2 — функції від x. Складаємо систему типу (3.27):

$$\begin{cases} C_1' x^2 + C_2' = 0, \\ 2C_1' x = x. \end{cases}$$

Звідси $C_1' = \frac{1}{2}$, $C_2' = -\frac{1}{2}x^2$. Тоді $C_1(x) = \frac{1}{2}x + C_1$, $C_2(x) = -\frac{1}{6}x^3 + C_2$, де C_1, C_2 — дійсні довільні сталі. Підставляючи $C_1(x)$, $C_2(x)$ у загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, дістанемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння;

$$y = C_1 x^2 + C_2 - \frac{1}{3}x^3.$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}.$$

Розв'язання. У п. 1.1 йшлося про те, що відповідне однорідне рівняння

$$y'' + y = 0$$

має загальним розв'язком функцію

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Припустимо, що C_1 і C_2 функції від x, і складемо систему типу (3.27)

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\sin^3 x}. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння системи на $\sin x$, а друге — на $\cos x$ і додавши їх, дістанемо

$$C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin^3(x)}.$$

З першого рівняння маємо

$$C_1'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Інтегруванням знаходимо

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x}.$$

Отже, частинним розв'язком є функція

$$v = \operatorname{ctg} x \cos x - \frac{1}{2\sin^2 x} \cdot \sin x,$$

або

$$v = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2\sin x} = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}.$$

Загальний розв'язок знайдемо як суму $u + v$:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{\cos 2x}{2\sin x},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Розв'язання. Використавши приклад 2, розглянемо систему

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему та інтегруючи, знаходимо

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad C_2(x) = \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \int \frac{\sin x}{x}\,dx + \sin x \cdot \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

тобто він не виражається через елементарні функції, а зведений до квадратур.

3.6. Зниження порядку лінійного однорідного диференціального рівняння

Покажемо, що коли відомо один ненульовий частинний розв'язок y_1 рівняння (3.2), то можна понизити порядок цього рівняння на одиницю.

Введемо нову невідому функцію $u(x)$ за формулою

$$y = y_1 \int u dx, \quad u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'. \tag{3.28}$$

Тоді

$$\begin{aligned} y' &= y_1' \int u dx + y_1 u, \\ y'' &= y_1'' \int u dx + 2y_1' u + y_1 u' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= y_1^{(n)} \int u dx + n y_1^{(n-1)} u + \frac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u' + \cdots + y_1 u^{(n-1)} \end{aligned} \tag{3.29}$$

і рівняння (3.2) набирає вигляду

$$\mathrm{L}[y_1] \int u dx + b_{n-1}(x) u + b_{n-2}(x) u' + \cdots + y_1 u^{(n-1)} = 0. \tag{3.30}$$

Оскільки $\mathrm{L}[y_1] = 0$, то для u маємо лінійне однорідне рівняння $(n-1)$-го порядку

$$u^{(n-1)} + \tilde{b}_1(x) u^{(n-2)} + \cdots + \tilde{b}_{n-2}(x) u' + \tilde{b}_{n-1}(x) u = 0. \tag{3.31}$$

Коефіцієнти цього рівняння неперервні в інтервалі (a, b), крім, можливо, тих точок, де y_1 перетворюється в нуль.

Якщо $u_2, \ldots, u_n$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (3.31), то функції

$$y_1, \; y_1 \int u_2 dx, \; \ldots, \; y_1 \int u_n dx \tag{3.32}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.2).

Справді, з вище сказаного випливає, що всі функції (3.32) є розв'язками рівняння (3.2). Припустимо, що вони лінійно залежні. Тоді матимемо тотожність

$$C_1 y_1 + C_2 y_1 \int u_2 dx + \cdots + C_n y_1 \int u_n dx = 0,$$

причому не всі $C_2, \ldots, C_n$ дорівнюють нулю, бо в противному разі й $C_1 = 0$, оскільки $y_1 \neq 0$. Скорочуючи тотожність на y_1 і диференціюючи, дістаємо

$$C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n = 0,$$

тобто $u_2, \ldots, u_n$ лінійно залежні, що суперечить припущенню.

Отже, $C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0$, оскільки $y_1 \neq 0$. Тоді $C_1 = 0$ і $y_1, y_2, \ldots, y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Таким чином, якщо відомо частинний розв'язок рівняння (3.2), то задача інтегрування цього рівняння зводиться до інтегрування лінійного однорідного рівняння порядку $n-1$.

Зазначимо, що підстановку (3.28) можна виконувати поступово: спочатку ввести $y = y_1 v$, а потім $v' = u$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння має частинний розв'язок $y_1 = x$. Тоді

$$y = x \int u dx.$$

Далі знаходимо

$$\begin{aligned} y' &= \int u dx + xu, \\ y'' &= 2u + xu', \\ y''' &= 3u' + xu''. \end{aligned}$$

Тепер задане рівняння набирає вигляду

$$x(x^2 - 2x + 2)u'' + (3(x^2 - 2x + 2) - x^3)u' = 0.$$

Нехай $u' = v$, тоді

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{3}{x} - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}\right) v = 0.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$\ln v = \ln C - 3 \ln x + \int \frac{x^2 dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

Обчислюємо у правій частині інтеграл

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \left(1 + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}\right) dx = x + \ln(x^2 - 2x + 2).$$

Таким чином,

$$\ln v = \ln C - 3 \ln x + x + \ln(x^2 - 2x + 2),$$

або

$$v = \frac{Ce^x (x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Інтегруємо цю рівність двічі:

$$u = C_1 + \int v dx = C_1 + C \frac{e^x (x-1)}{x^2},$$

$$\int u dx = C_2 + C_1 x + C \int \frac{e^x (x-1)}{x^2} dx = C_2 + C_1 x + C \frac{e^x}{x}.$$

Загальний інтеграл заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = x \int u dx = C_2 x + C_1 x^2 + Ce^x.$$

Якщо відомо k лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (3.2), $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то порядок цього рівняння можна понизити на k одиниць. При цьому здобуте рівняння $(n-k)$-го порядку залишається лінійним і однорідним.

Справді, виконуючи підстановку (3.28), дістанемо для u рівняння (3.31) порядку $n-1$. Рівняння (3.31) має $k-1$

розв'язок, які знаходяться за формулою (3.28) поступовою заміною y на $y_2, y_3, \ldots, y_k$:

$$u_2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \quad u_3 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ldots, \quad u_k = \left(\frac{y_k}{y_1}\right)'.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, бо в противному разі мали б тотожність

$$C_2 u_2 + \cdots + C_k u_k = 0,$$

де не всі $C_2, \ldots, C_k$ дорівнюють нулю. Інтегруючи цю тотожність, дістали б

$$C_1 + C_2 \int u_2 dx + \cdots + C_k \int u_k dx = 0,$$

звідки

$$C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + \cdots + C_k \frac{y_k}{y_1} = 0,$$

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_k y_k = 0,$$

що неможливо, оскільки $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — лінійно незалежні.

Тепер введемо нову функцію v:

$$u = u_2 \int v dx, \quad \text{або} \quad v = \left(\frac{u}{u_2}\right)'.$$

Тоді для v дістанемо рівняння $(n-2)$-го порядку, для якого відомо $k-2$ лінійно незалежних розв'язків:

$$v_3 = \left(\frac{u_3}{u_2}\right)', \ldots, \quad v_k = \left(\frac{u_k}{u_2}\right)'.$$

Продовжуючи так і далі, дістанемо лінійне однорідне рівняння $(n-k)$-го порядку.

Отже, якщо відомо $(n-1)$ лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (3.2), то поступово дістаємо лінійне однорідне рівняння 1-го порядку, що дає змогу проінтегрувати рівняння (3.2) в квадратурах.

Розділ 4

ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

4.1. Основні означення

Нехай задано лінійне однорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (4.1)$$

де коефіцієнти p_i, $i = 1, \ldots, n$, — сталі.

Щоб розв'язати це рівняння, треба знайти яку-небудь його фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x), \; y_2(x), \; \ldots, \; y_n(x). \quad (4.1)$$

Тоді загальним розв'язком рівняння (4.1) буде функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad (4.2)$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді

$$y = e^{kx}, \quad (4.3)$$

де k — стале. Тоді

$$y' = ke^{kx}, \; y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, \; y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Якщо підставимо значення похідних і функцію в (4.1), матимемо

$$\mathrm{L}[e^{kx}] = e^{kx}(k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots p_{n-1} k + p_n) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1} k + p_n = 0. \quad (4.4)$$

Таким чином, якщо k — корінь алгебраїчного рівняння (4.4), то функція (4.3) — розв'язок рівняння (4.1), і навпаки.

Рівняння (4.4) називають *характеристичним рівнянням*, яке відповідає диференціальному рівнянню (4.1) із сталими коефіцієнтами.

Очевидно, що характеристичне рівняння дістанемо, коли в рівнянні (4.1) замінимо похідні різних порядків відповідними степенями k. Рівняння (4.4), як відомо, має n коренів, з урахуванням кратності кожного з них, а тому різних коренів може бути не більше ніж $k \leqslant n$. Розглянемо можливі випадки.

4.2. Випадок простих коренів

Нехай корені рівняння (4.4) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ різні. Тоді n функцій

$$e^{k_1 x}, \; e^{k_2 x}, \; \ldots, \; e^{k_n x}$$

є частинними розв'язками рівняння (4.1) і причому лінійно незалежними, тобто матимемо фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.1). Тоді загальним розв'язком є функція

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}, \quad (4.5)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

звідки $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.
Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$$

має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$.
Загальним розв'язком є функція

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Розглянемо випадок комплексних коренів характеристичного рівняння (4.4), наприклад $k_1 = \alpha + \beta i$, тоді дістанемо розв'язок

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}.$$

Відомо, що коли алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $k_1 = \alpha + \beta i$, то воно має і спряжений з ним корінь $k_2 = \alpha - \beta i$. Отже, матимемо ще такий розв'язок:

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}.$$

Скориставшись формулами Ейлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi,$$

знайдемо

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$
$$y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Згідно з теоремою 7 зробимо висновок, що комплексному кореню $k_1 = \alpha + \beta i$ відповідають два дійсних розв'язки рівняння (4.1):

$$y_{11} = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ і } y_{12} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

причому вони лінійно незалежні. Спряжений корінь $k_2 = \alpha - \beta i$ також дає два дійсних розв'язки, але вони такі самі (з точністю до знака), що й y_{11}, y_{12}.

Отже, кожній парі спряжених комплексних коренів характеристичного рівняння відповідає два дійсних частинних розв'язки рівняння (4.1):

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ і } e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Звідси

$$k_1 = -1 + 2i,\ k_2 = -1 - 2i;\ \alpha = -1,\ \beta = 2.$$

Загальним розв'язком є функція

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

2. Розв'язати рівняння

$$y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^3 - 5k^2 + 17k - 13 = 0$$

має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2 + 3i$, $k_3 = 2 - 3i$. Отже, загальним розв'язком є функція

$$y = C_1e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x).$$

4.3. Випадок кратних коренів

Нехай характеристичне рівняння має кратні корені. Тоді дістанемо менш ніж n частинних розв'язків рівняння (4.1). Розв'язки характеристичного рівняння не дають фундаментальної системи розв'язків, а отже, й загального розв'язку. Знайдемо спосіб знаходження всіх частинних розв'язків, які б складали фундаментальну систему.

Позначимо через $\varphi(k)$ ліву частину характеристичного рівняння, тобто

$$\varphi(k) = k^n + p_1k^{n-1} + p_2k^{n-2} + \cdots + p_{n-1}k + p_n.$$

Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (4.1) у вигляді функції

$$y = e^{kx}u, \tag{4.6}$$

де k — корінь характеристичного рівняння; u — невідома функція від x, яку треба визначити так, щоб

$$\mathrm{L}[e^{kx}u] = 0.$$

Для того щоб підставити функцію (4.6) у рівняння (4.1), треба обчислити всі її похідні від першого до n-го порядку. Використовуючи формулу Лейбніца, знаходимо:

$$y = e^{kx}u,$$
$$y' = e^{kx}(ku + u'),$$
$$y'' = e^{kx}(k^2u + 2ku' + u''),$$
$$y''' = e^{kx}(k^3u + 3k^2u' + 3ku'' + u''');$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)} = e^{kx}\left(k^{n-1}u + (n-1)k^{n-2}u' + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}k^{n-3}u'' + \right.$$
$$\left. + \cdots + (n-1)ku^{(n-2)} + u^{(n-1)}\right);$$
$$y^{(n)} = e^{kx}\left(k^{n}u + nk^{n-1}u' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}k^{n-2}u'' + \right.$$
$$\left. + \cdots + nku^{(n-1)} + u^{(n)}\right).$$

Тепер маємо

$$\mathbf{L}[e^{kx}u] = e^{kx}\left(\varphi(k)u + \varphi'(k)u' + \frac{\varphi''(k)}{1\cdot 2}u'' + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{\varphi^{(n-1)}(k)}{(n-1)!}u^{(n-1)} + u^{(n)}\right). \tag{4.7}$$

Якщо k_1 є m_1- кратним коренем характеристичного рівняння, де $m_1 < n$, то, як відомо з алгебри,

$$\varphi(k_1) = 0,\ \varphi'(k_1) = 0,\ \varphi''(k_1) = 0,\ \ldots,$$
$$\varphi^{(m_1-1)}(k_1) = 0,\ \varphi^{(m_1)}(k_1) \neq 0,$$

і вираз (4.7) матиме вигляд

$$\mathbf{L}[e^{k_1x}u] = e^{k_1x}\left(\frac{\varphi^{(m_1)}(k_1)}{m_1!}u^{(m_1)} + \frac{\varphi^{(m_1+1)}(k_1)}{(m_1+1)!}u^{(m_1+1)} + \cdots + u^{(n)}\right).$$

Отже, функція $y = e^{k_1x}u$ буде розв'язком рівняння (4.1) тоді, коли

$$e^{k_1x}\left(\frac{\varphi^{(m_1)}(k_1)}{m!}u^{(m_1)} + \frac{\varphi^{(m_1+1)}(k_1)}{(m_1+1)!}u^{(m_1+1)} + \cdots + u^{(n)}\right) = 0.$$

Проте e^{k_1x} не дорівнює нулю; не дорівнює нулю й кожний з коефіцієнтів при $u^{(m_1)}$, $u^{(m_1+1)}$, ..., $u^{(n)}$. Тому, для того щоб функція $e^{k_1x}u$ була розв'язком рівняння (4.1), повинні справджуватися рівності

$$u^{(m_1)} = 0,\ u^{(m_1+1)} = 0,\ \ldots,\ u^{(n)} = 0.$$

Очевидно, що за u можна тут взяти функції

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^{m_1-1}.$$

Частинними розв'язками рівняння (4.1), що відповідають кореню характеристичного рівняння k_1 кратності m_1, будуть функції

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ x^2e^{k_1x},\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{k_1x}.$$

Так само кореню k_2 кратності m_2 відповідатимуть частинні розв'язки

$$e^{k_2x},\ xe^{k_2x},\ x^2e^{k_2x},\ \ldots,\ x^{m_2-1}e^{k_2x}$$

і т. д.

У загальному випадку, коли характеристичне рівняння має корені

$$\begin{array}{lll} k_1 & \text{кратності} & m_1, \\ k_2 & \text{кратності} & m_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_p & \text{кратності} & m_p, \end{array}$$
$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n,\ m_i \geqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, p,$$

то їм відповідатиме система n різних частинних розв'язків рівняння (4.1):

$$\begin{array}{l} e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{k_1x}, \\ e^{k_2x},\ xe^{k_2x},\ \ldots,\ x^{m_2-1}e^{k_2x}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ e^{k_px},\ xe^{k_px},\ \ldots,\ x^{m_p-1}e^{k_px}. \end{array}$$

Раніше було показано, що ця система функцій є лінійно незалежною, а отже, маємо фундаментальну систему розв'язків, лінійна комбінація яких дає загальний розв'язок:

$$y = (C_1^1 + C_2^1x + C_3^1x^2 + \cdots + C_{m_1}^1x^{m_1-1})e^{k_1x} +$$
$$+ (C_1^2 + C_2^2x + C_3^2x^2 + \cdots + C_{m_2}^2x^{m_2-1})e^{k_2x} + \cdots +$$
$$+ (C_1^p + C_2^px + C_3^px^2 + \cdots + C_{m_p}^px^{m_p-1})e^{k_px}. \tag{4.8}$$

Якщо $k_1 = \alpha + \beta i$ — комплексний корінь кратності m, то $\bar{k}_1 = \alpha - \beta i$ теж корінь кратності m. Цій парі коренів відповідатимуть такі частинні розв'язки:

$$\begin{array}{ll} y_1^1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, & y_2^1 = e^{(\alpha-\beta i)x}; \\ y_1^2 = xe^{(\alpha+\beta i)x}, & y_2^2 = xe^{(\alpha-\beta i)x}; \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ y_1^m = x^{m-1}e^{(\alpha+\beta i)x}, & y_2^m = x^{m-1}e^{(\alpha-\beta i)x}. \end{array}$$

Замість функцій $x^pe^{(\alpha+\beta i)x}$ і $x^pe^{(\alpha-\beta i)x}$, $p = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ у фундаментальній системі можна взяти функції

$$x^pe^{\alpha x}\cos\beta x \ \text{ і } \ x^pe^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Таким чином, m-кратному комплексному кореню $\alpha + \beta i$ характеристичного рівняння в загальному розв'язку відповідатимуть таких $2m$ членів:

$$e^{\alpha x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots C_mx^{m-1})\cos\beta x$$

і

$$e^{\alpha x}(C_1' + C_2'x + C_3'x^2 + \cdots + C_m'x^{m-1})\sin\beta x.$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 1 = 0,$$

звідки $k_1 = k_2 = -1$.

Маємо такий загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0, \text{ або } (k-2)^3 = 0,$$

має корені $k_1 = k_2 = k_3 = 2$. Отже,

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{2x}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y^{\mathrm{V}} + 5y^{\mathrm{IV}} + 10y^{\mathrm{III}} + 10y^{\mathrm{II}} + 5y^{\mathrm{I}} + y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 = 0,$$

або

$$(k+1)^5 = 0.$$

Звідси

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = -1.$$

Загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4)e^{-x}.$$

4. Розв'язати рівняння

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y''' - 11y'' - 12y' + 36y = 0.$$

Розв'язання. З характеристичного рівняння

$$k^4 + 2k^3 - 11k^2 - 12k + 36 = 0$$

знаходимо $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = k_4 = -3$. Отже,

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x} + (C_3 + C_4 x)\, e^{-3x}.$$

5. Розв'язати рівняння

$$y^{\mathrm{IV}} + 8y'' + 16y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0,$$

звідки $k_1 = k_2 = 2i$; $k_3 = k_4 = -2i$.

Маємо такий загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x.$$

6. Розв'язати рівняння

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = 0$$

має корені

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i; \quad k_3 = k_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Отже, функція

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left((C_1 + C_2 x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + C_4 x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

є загальним розв'язком.

7. Розв'язати рівняння

$$y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} + 2y^{\mathrm{III}} + 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}} + y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0,$$

звідки $k_1 = -1$, $k_2 = k_3 = i$, $k_4 = k_5 = -i$.

Загальним розв'язком є функція

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

Таким чином, схема інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами складається з таких етапів.

1. Знаходження відповідного характеристичного рівняння (4.4).

2. Знаходження частинних розв'язків диференціального рівняння, які відповідають знайденим кореням характеристичного рівняння, причому

1) кожен з дійсних і різних коренів, наприклад k_1, дає частинний розв'язок $e^{k_1 x}$;

2) кожна окрема пара комплексних коренів $\alpha + \beta i$ дає два частинних розв'язки $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

3) кожен m-кратний корінь, як дійсний, так і комплексний, дає m частинних розв'язків, які можна дістати за допомогою множення частинних розв'язків 1) і 2) на 1, x, x^2, ... , x^{m-1}.

3. Множення кожного з цих розв'язків на довільну сталу і додавання результатів.

Здобута таким чином сума і буде загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Зауваження

1. Якщо диференціальне рівняння має простий комплексний корінь $\alpha + \beta i$, то йому відповідає комплексно спряжений корінь $\alpha - \beta i$. Загальний розв'язок (4.2) міститиме члени

$$C_k e^{(\alpha+\beta i)x} + C_{k+1} e^{(\alpha-\beta i)x},$$

яким можна надати вище наведену форму таким чином.

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

знаходимо

$$C_k e^{\alpha x + \beta i x} + C_{k+1} e^{\alpha x - \beta i x} = e^{\alpha x}(C_k e^{\beta i x} + C_{k+1} e^{-\beta i x}) =$$
$$= e^{\alpha x}[C_k(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_{k+1}(\cos\beta x - i\sin\beta x)] =$$
$$= e^{\alpha x}[(C_k + C_{k+1})\cos\beta x + i(C_k - C_{k+1})\sin\beta x] =$$
$$= Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x,$$

де $$A \overset{\text{def}}{=} C_k + C_{k+1}, \quad B \overset{\text{def}}{=} i\,(C_k - C_{k+1}).$$

Отже, комплексному кореню відповідають два лінійно незалежних розв'язки

$$y_k = Ae^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{k+1} = Be^{\alpha x}\sin\beta x,$$

які було здобуто раніше іншим способом.

Крім цього, оскільки функції

$$e^{(\alpha+\beta i)\,x} \text{ і } e^{(\alpha-\beta i)\,x}$$

є лінійно незалежними розв'язками, то їх лінійні комбінації

$$\frac{1}{2}\,e^{(\alpha+\beta i)\,x} + \frac{1}{2}\,e^{(\alpha-\beta i)\,x} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

і

$$\frac{1}{2i}\,e^{(\alpha+\beta i)\,x} - \frac{1}{2i}\,e^{(\alpha-\beta i)\,x} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

теж є розв'язками, причому вони лінійно незалежні. Маємо той самий результат.

2. Нехай диференціальне рівняння має корінь k_i кратності 2, тобто має два однакових кореня:

$$k_i = k_{i+1}.$$

Тоді загальний розв'язок містить доданок

$$(C_i + C_{i+1})\,e^{k_i x}$$

і, отже, не є загальним розв'язком, бо має лише $n-1$ довільну сталу.

У випадку трьох однакових коренів розв'язок (4.2) міститиме $n-2$ довільні сталі і т. д.

Для розглядуваного випадку існує спосіб складання загального розв'язку, який був запропонований д'Аламбером. Припустимо, що є два однакових кореня $k_1 = k_2$. Тоді у виразі

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{4.9}$$

зробимо заміну, вважаючи, що $k_1 \neq k_2$:

$$C_1 = C_1' - \frac{C_2'}{k_2 - k_1}\,; \quad C_2 = \frac{C_2'}{k_2 - k_1}\,,$$

де C_1' і C_2' — нові довільні сталі. Підставивши ці значення у (4.9), знайдемо

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1' e^{k_1 x} + \frac{C_2'\,(e^{k_2 x} - e^{k_1 x})}{k_2 - k_1}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя і перехід до границі при $k_2 \to k_1$ у другому члені правої частини дістанемо похідну від $e^{k_1 x}$ по k_1. Отже,

$$\lim_{k_2 \to k_1} (C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}) = C_1' e^{k_1 x} + C_2' \frac{de^{k_1 x}}{dk_1} = $$
$$= C_1' e^{k_1 x} + C_2' x e^{k_1 x} = (C_1' + C_2' x)\,e^{k_1 x}.$$

В результаті загальний розв'язок набере вигляду

$$y = (C_1' + C_2' x)\,e^{k_1 x} + C_3 e^{k_3 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

Таким самим способом можна дістати загальний розв'язок і для $k+1$ однакових коренів характеристичного рівняння.

3. Нехай диференціальне рівняння має однакові корені, наприклад $k_1 = k_2 = \ldots = k_m$. Тоді вираз загального розв'язку (4.5) набирає вигляду

$$y = Ae^{k_1 x} + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + C_{m+2} e^{k_{m+2} x} + \ldots + C_n e^{k_n x},$$

де $A = C_1 + C_2 + \ldots + C_m$. Цей вираз містить лише $n - m + 1$ довільних сталих, а отже, не може бути загальним інтегралом. Тоді міркуватимемо так.

Легко побачити, що

$$\mathbf{L}\,[e^{kx}] = (k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_{n-1}k + p_n)\,e^{kx},$$

або

$$\mathbf{L}\,[e^{kx}] = e^{kx}\varphi(k).$$

Диференціюючи цей вираз по параметру k, дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial k}\mathbf{L}\,[e^{kx}] = \frac{\partial}{\partial k}(e^{kx}\varphi(k)) = xe^{kx}\varphi(k) +$$
$$+ e^{kx}\varphi'(k) = e^{kx}\,(x\varphi(k) + \varphi'(k)),$$

далі послідовно матимемо:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial k^2}\mathbf{L}\,[e^{kx}] = e^{kx}\,(x^2\varphi(k) + 2x\varphi'(k) + \varphi''(k)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial^m}{\partial k^m}\mathbf{L}\,[e^{kx}] = e^{kx}\,(x^m\varphi(k) + mx^{m-1}\varphi'(k) + \cdots + \varphi^{(m)}(k)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Знайдемо тепер m-ту похідну від $\mathbf{L}\,[y]$ по змінній k:

$$\frac{\partial^m \mathbf{L}\,[y]}{\partial k^m} = \frac{\partial^m y^{(n)}}{\partial k^m} + p_1 \frac{\partial^m y^{(n-1)}}{\partial k^m} + \cdots + p_n \frac{\partial^m y}{\partial k^m}.$$

Якщо в правій частині цієї рівності поміняти порядок диференціювання, то вона набере вигляду

$$\frac{\partial^m \mathbf{L}\,[y]}{\partial k^m} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial^m y}{\partial k^m}\right) + p_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial^m y}{\partial k^m}\right) + \cdots + p_n \frac{\partial^m y}{\partial k^m},$$

тобто

$$\frac{\partial^m \mathbf{L}\,[y]}{\partial k^m} = \mathbf{L}\left[\frac{\partial^m y}{\partial k^m}\right],$$

а тому

$$\frac{\partial^m \mathbf{L}\,[e^{kx}]}{\partial k^m} = \mathbf{L}\,[x^m e^{kx}].$$

Якщо тепер надавати m послідовно значень 1, 2, 3, ..., m, то рівність (4.10) можна записати так:

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}\,[xe^{kx}] = e^{kx}\,(x\varphi(k) + \varphi'(k)), \\ &\mathbf{L}\,[x^2e^{kx}] = e^{kx}\,(x^2\varphi(k) + 2x\varphi'(k) + \varphi''(k)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathbf{L}\,[x^m e^{kx}] = e^{kx}\,(x^m\varphi(k) + mx^{m-1}\varphi'(k) + \cdots + \varphi^{(m)}(k)). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Якщо число k є коренем характеристичного рівняння кратності $m+1$, то

$$\varphi(k) = 0,\ \varphi'(k) = 0,\ \varphi''(k) = 0,\ \ldots,\ \varphi^{(m)}(k) = 0.$$

Внаслідок цього праві частини рівності (4.11) перетворюються в нулі, звідки

$$\mathrm{L}[xe^{kx}] = 0,\ \mathrm{L}[x^2e^{kx}] = 0,\ \ldots,\ \mathrm{L}[x^m e^{kx}] = 0,$$

це означає, що крім розв'язку e^{kx} існують ще й розв'язки

$$xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots,\ x^m e^{kx}.$$

Як вже відомо, вони лінійно незалежні. Отже, загальний інтеграл набирає відомого вже вигляду

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_{m+1}x^m)\, e^{kx} + \\ + C_{m+2}e^{k_{m+2}x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є двократний комплексний корінь $k_1 = k_2 = \alpha + \beta i$, то двократним буде також спряжений корінь $k_3 = k_4 = \alpha - \beta i$. Тоді загальним інтегралом є

$$y = ((C_1 + C_2 x)\cos\beta x + (C_3 + C_4 x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x} + \\ + C_5 e^{k_5 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

Неважко записати формулу загального інтегралу і для випадку, коли кратність комплексного кореня більше двох, що зроблено вище.

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння:

1. $y^{\mathrm{IV}} - 12y'' + 27y = 0.$ 2. $y''' - y' = 0.$
2. $y''' - 7y' + 6y = 0.$ 4. $y'' - y' - 2y = 0.$
5. $y''' - 3y'' + 4y = 0.$ 6. $y'' - 4y = 0.$
7. $y^{\mathrm{IV}} - 16a^4 y = 0.$ 8. $y'' - 2y' + 2y = 0.$
9. $y^{\mathrm{IV}} + 8y'' + 16y = 0.$ 10. $y'' - y = 0.$
11. $y'' - 5y' + 6y = 0.$ 12. $y'' + 2y' + y = 0.$
13. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$ 14. $y''' - y = 0.$
15. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y' - y = 0.$ 16. $y''' + y = 0.$
17. $y^{\mathrm{IV}} + y''' - 6y'' = 0.$ 18. $y^{\mathrm{IV}} + y = 0.$
19. $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 4y = 0.$ 20. $y'' + 4y = 0.$
21. $y^{\mathrm{V}} - y''' = 0.$ 22. $y'' + 4y' + 3y = 0.$
23. $y'' = 9y$ 24. $y'' + 2y' - 35y = 0.$
25. $y'' + 2y' + y = 0$ 26. $y'' - 3y' + 2y = 0.$
27. $y''' - 6y'' + 13y' = 0.$ 28. $y'' + 2y' + 5y = 0.$
29. $y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = 0.$ 30. $y^{\mathrm{IV}} - y = 0.$

4.4. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами

Як було вже показано, частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\mathrm{L}[y] = f(x) \tag{4.12}$$

можна знайти методом варіації сталих. Проте для деяких видів правої частини $f(x)$ рівняння (4.12) існують простіші методи знаходження частинних розв'язків без квадратур. Розглянемо деякі з них.

Метод невизначених коефіцієнтів. Нехай права частина неоднорідного рівняння має вигляд

$$f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x},$$

де $P_m(x)$ — многочлен степеня m, а α — будь-яке число, тобто розглянемо рівняння

$$\mathrm{L}[y] = P_m(x)\, e^{\alpha x}. \tag{4.13}$$

Шукатимемо частинний розв'язок цього рівняння в елементарних функціях. Оскільки $e^{\alpha x}$ при диференціюванні множиться тільки на сталий множник α, то природно шукати частинний розв'язок у вигляді добутку деякої функції на $e^{\alpha x}$. При цьому після виконання всіх операцій, зазначених у лівій частині рівняння (4.2), і скорочення на $e^{\alpha x}$ у правій частині залишиться многочлен, тотожний $P_m(x)$. Тому припустимо, що в шуканому частинному розв'язку додатковим множником до $e^{\alpha x}$ буде деякий многочлен відносно x. Отже, шукатимемо частинний розв'язок рівняння (4.13) у вигляді функції

$$v = e^{\alpha x} Q(x), \tag{4.14}$$

де $Q(x)$ — многочлен з невизначеними коефіцієнтами. Щоб знайти коефіцієнти і степінь многочлена $Q(x)$, підставимо (4.14) в (4.13). Потім у формулу (4.7) підставимо замість k число α, а замість u — функцію $Q(x)$. Позначаючи через $\varphi(\alpha)$ ліву частину характеристичного рівняння, при $k = \alpha$ матимемо

$$e^{\alpha x}\left(Q(x)\varphi(\alpha) + \frac{Q'(x)}{1!}\varphi'(\alpha) + \cdots + \frac{Q^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}\varphi^{(n)}(\alpha)\right) \equiv e^{\alpha x} P_m(x), \tag{4.15}$$

звідки

$$Q(x)\varphi(\alpha) + \frac{Q'(x)}{1!}\varphi'(\alpha) + \cdots + \frac{Q^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(\alpha) + \\ + \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}\varphi^{(n)}(\alpha) \equiv P_m(x). \tag{4.16}$$

Припустимо, що стале число α не є коренем характеристичного рівняння, тобто

$$\varphi(\alpha) \neq 0,$$

тоді степінь многочлена $Q(x)$ повинен збігатися із степенем $P_m(x)$. Отже, припускаємо, що

$$Q(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m,$$

де $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — невизначені коефіцієнти. Підставивши цей вираз замість $Q(x)$ у (4.16), дістанемо тотожність. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах цієї тотожності, дістанемо систему з $m+1$ рівнянь відносно невідомих $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$.

Зрозуміло, що оскільки $\varphi(\alpha) \neq 0$, то така система дає змогу знайти невизначені коефіцієнти $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' + y' - 12y = (x-1)e^{2x}.$$

Розв'язання. Шукаємо загальний розв'язок у вигляді

$$y = u + v,$$

де u — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, v — частинний розв'язок заданого рівняння.

Складаємо характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння

$$\varphi(k) = k^2 + k - 12 = 0,$$

звідки

$$k_1 = -4, \quad k_2 = 3.$$

Отже,

$$u = C_1e^{-4x} + C_2e^{3x}.$$

Оскільки $\varphi(2) \neq 0$, то $v = (Ax+B)e^{2x}$. Підставляючи це значення v замість y у задане рівняння, дістаємо

$$-6(Ax+B)e^{2x} + 5Ae^{2x} = (x-1)e^{2x},$$

звідки

$$-6Ax - 6B + 5A = x - 1.$$

Отже, маємо систему

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ 5A - 6B = -1. \end{cases}$$

Тоді

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{36},$$

$$v = \left(-\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{2x}.$$

Загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{3x} - \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{36}\right)e^{2x}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y''' + y'' - 4y' - 4y = xe^x.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0,$$

звідки

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 2.$$

Тут $\varphi(\alpha) = \varphi(1) \neq 0$, отже,

$$u = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}.$$

Тепер маємо

$$\begin{array}{r|l} -4 & v = (Ax+B)e^x \\ -4 & v' = (Ax+A+B)e^x \\ 1 & v'' = (Ax+2A+B)e^x \\ 1 & v''' = (Ax+3A+B)e^x \\ \hline \end{array}$$

$$(-6Ax + A - 6B)e^x \equiv xe^x.$$

Зліва від вертикальної лінії записано коефіцієнти, на які треба помножити v, v', v'', v''', перш ніж підставити в рівняння. Додавання після множення виконується по стовпцях.

Отже, маємо

$$-6Ax + A - 6B \equiv x.$$

Складаємо систему

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ A - 6B = 0, \end{cases}$$

звідки

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{36}.$$

Тоді

$$v = \left(-\frac{x}{6} - \frac{1}{36}\right)e^x.$$

Загальним розв'язком є функція

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^x.$$

3. Розв'язати рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = x^2.$$

Розв'язання. Тут $\alpha = 0$. Маємо характеристичне рівняння

$$\varphi(k) = k^2 - 4k + 4 = 0,$$

звідки $k_1 = k_2 = 2$.

Тоді

$$u = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

Оскільки

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) = 4 \neq 0,$$

то

$$\begin{array}{r|l} 4 & v = Ax^2 + Bx + C \\ -4 & v' = 2Ax + B \\ 1 & v'' = 2A \\ \hline \end{array}$$

$$4Ax^2 + (-8A + 4B)x + 2A - 4B + 4C \equiv x^2.$$

Дістаємо систему

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ -8A + 4B = 0, \\ 2A - 4B + 4C = 0, \end{cases}$$

звідки

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{3}{8}.$$

Тоді

$$v = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}.$$

Загальним розв'язком є функція

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}.$$

Припустимо, що $\varphi(\alpha) = 0$, тобто α — корінь характеристичного рівняння. Нехай α — корінь кратності $r \leqslant n$. Тоді

$$\varphi(\alpha) = 0,\ \varphi'(\alpha) = 0,\ \ldots,\ \varphi^{(r-1)}(\alpha) = 0,\ \varphi^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Рівність (4.16) набирає вигляду

$$\frac{Q^{(r)}(x)}{r!}\varphi^{(r)}(\alpha) + \frac{Q^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}\varphi^{(r+1)}(\alpha) + \cdots + \\ + \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}\varphi^{(n)}(\alpha) = P_m(x). \quad (4.17)$$

Многочлени, які становлять ліву і праву частини цієї тотожності, повинні бути однакового степеня. Многочлен $P_m(x)$ має степінь m, тому й многочлен лівої частини повинен мати теж m-й степінь, а це може бути тільки тоді, коли r-та похідна від $Q(x)$ буде m-го степеня, тобто многочлен $Q(x)$ матиме степінь $m + r$:

$$Q(x) = A_0 x^{m+r} + A_1 x^{m+r-1} + \cdots + A_m x^r + \\ + A_{m+1} x^{r-1} + \cdots + A_{m+r}. \quad (4.18)$$

Ліва частина тотожності (4.17) містить лише похідні функції $Q(x)$, починаючи з r-ї і кінчаючи n-ю. Тому при підстановці в (4.17) замість $Q(x)$ його виразу з (4.18) і знаходженні похідних від $Q(x)$ всі члени правої частини, починаючи в $A_{m+1}x^{r-1}$, зникають.

Отже, щоб не ускладнювати обчислень, доцільно припустити, що

$$A_{m+1} = A_{m+2} = \cdots = A_{m+r} = 0.$$

Тоді

$$Q(x) = A_0 x^{m+r} + A_1 x^{m+r-1} + \cdots + A_m x^r,$$

або

$$Q(x) = x^r (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m). \quad (4.19)$$

Отже, якщо α — корінь характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв'язок v рівняння (4.13) знаходимо у вигляді

$$v = x^r Q(x) e^{\alpha x},$$

де $0 \leqslant r \leqslant n$; $Q(x)$ — многочлен того самого степеня, що й $P_m(x)$.

Щоб знайти коефіцієнти многочлена $Q(x)$, підставимо в задане рівняння замість y вираз $x^r Q(x) e^{\alpha x}$. Скоротивши на $e^{\alpha x}$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, з утвореної системи рівнянь дістанемо коефіцієнти многочлена $Q(x)$. Неважко впевнитися, що ця система завжди має єдиний розв'язок.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Розв'язання. Шукатимемо загальний розв'язок у вигляді

$$y = u + v,$$

де u — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, v — частинний розв'язок заданого рівняння.

Характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0, \text{ або } (k-1)^2 = 0$$

має корені

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Отже,

$$u = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

При цьому $\alpha = 1$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому

$$\begin{array}{r|l} 1 & v = Ax^2e^x \\ -2 & v' = Ax^2e^x + 2Axe^x \\ 1 & v'' = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x \\ \hline & 2Ae^x \equiv e^x. \end{array}$$

Звідси

$$2A = 1,\ A = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$v = \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

Загальним розв'язком є функція

$$y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^x.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y^{\mathrm{IV}}-4y'''+6y''-4y'+y=(x+1)e^x.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^4-4k^3+6k^2-4k+1=0,$$

його корені

$$k_1=k_2=k_3=k_4=1.$$

Отже,

$$u=(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)e^x.$$

Оскільки у даному прикладі $r=4$, то підбираємо частинний розв'язок v у вигляді

$$v=x^4(Ax+B)e^x.$$

Підставляємо у задане рівняння замість y значення v:

$$\begin{array}{r|l}
1 & v=(Ax^5+Bx^4)\,e^x \\
-4 & v'=(Ax^5+Bx^4)\,e^x+(5Ax^4+4Bx^3)\,e^x \\
6 & v''=(Ax^5+Bx^4)\,e^x+2\,(5Ax^4+4Bx^3)\,e^x+(20Ax^3+12Bx^2)\,e^x \\
-4 & v'''=(Ax^5+Bx^4)\,e^x+3\,(5Ax^4+4Bx^3)\,e^x+3\,(20Ax^3+ \\
 & \qquad +12Bx^2)\,e^x+(60Ax^2+24Bx)\,e^x \\
1 & v^{\mathrm{IV}}=(Ax^5+Bx^4)\,e^x+4\,(5Ax^4+4Bx^3)\,e^x+6\,(20Ax^3+ \\
 & +12Bx^2)\,e^x+4\,(60Ax^2+24Bx)\,e^x+(120Ax+24B)\,e^x \\
\hline
\end{array}$$

$$(120Ax+24B)\,e^x\equiv(x+1)\,e^x$$

Після скорочення на e^x дістаємо тотожність

$$120Ax+24B\equiv x+1.$$

Звідси

$$\begin{cases} 120A=1, & A=\dfrac{1}{120}, \\ 24B=1, & B=\dfrac{1}{24}. \end{cases}$$

Отже,

$$v=\left(\frac{x}{120}+\frac{1}{24}\right)x^4e^x.$$

Загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}\right)e^x.$$

3. Розв'язати рівняння

$$y'''-5y''+8y'-4y=e^{2x}.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння

$$k^3-5k^2+8k-4=0.$$

Його корені $k_1=1$, $k_2=k_3=2$.

$$u=(C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{2x}.$$

Для даного прикладу $\alpha=2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому

$$\begin{array}{r|l}
-4 & v=Ax^2e^{2x} \\
8 & v'=2Ax^2e^{2x}+2Axe^{2x} \\
-5 & v''=4Ax^2e^{2x}+8Axe^{2x}+2Ae^{2x} \\
1 & v'''=8Ax^2e^{2x}+24Axe^{2x}+12Ae^{2x} \\
\hline
\end{array}$$

$$2Ae^{2x}\equiv e^{2x}$$

Звідси $A=1/2$, отже, $v=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Загальним розв'язком є функція

$$y=C_1e^x+\left(C_2+C_3x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}.$$

4. Розв'язати рівняння

$$y'''+y''=e^{-x}.$$

Розв'язання. Складене характеристичне рівняння

$$k^3+k^2=0$$

має корені $k_1=k_2=0$, $k_3=-1$.

Отже,

$$u=C_1+C_2x+C_3e^{-x}.$$

Число $\alpha=-1$ є однократним простим коренем характеристичного рівняння. Отже, $r=1$ і маємо

$$\begin{array}{r|l}
0 & v=Axe^{-x} \\
0 & v'=-Axe^{-x}+Ae^{-x} \\
1 & v''=Axe^{-x}-2Ae^{-x} \\
1 & v'''=-Axe^{-x}+3Ae^{-x} \\
\hline
\end{array}$$

$$Ae^{-x}\equiv e^{-x}$$

Звідси $A=1$. Тоді $v=xe^{-x}$, а

$$y=C_1+C_2x+(C_3+x)\,e^{-x}.$$

5. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y''-10y'+25y=(2x-1)\,e^{5x}$$

при початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=6$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^2-10k+25=0,\ \text{або}\ (k-5)^2=0$$

має корені $k_1=k_2=5$.

Отже,

$$u=(C_1+C_2x)e^{5x}.$$

Число $\alpha=5$ є двократним коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок знайдемо у вигляді

$$v=x^2(Ax+B)e^{5x}.$$

Маємо

$$\begin{array}{r|l}
25 & v=(Ax^3+Bx^2)\,e^{5x} \\
-10 & v'=(5Ax^3+(3A+5B)\,x^2+2Bx)\,e^{5x} \\
1 & v''=(25Ax^3+(30A+25B)x^2+(6A+20B)\,x+2B)\,e^{5x} \\
\hline
\end{array}$$

$$6Ax+2B\equiv 2x-1.$$

Звідси $A = 1/3$, $B = -1/2$. Загальним розв'язком є функція

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{5x}.$$

Визначимо тепер C_1 і C_2, використовуючи задані початкові умови. Маємо

$$y(0) = C_1 = 1; \quad C_1 = 1,$$

$$y' = (C_2 - x + x^2)e^{5x} + \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)5e^{5x}\Big|_{x=0} =$$

$$= C_2 + 5C_1 = 6, \; C_2 + 5 = 6, \; C_2 = 1.$$

Отже,

$$y = \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)e^{5x}$$

і є шуканим розв'язком.

Способом невизначених коефіцієнтів можна також розв'язувати неоднорідні диференціальні рівняння, в яких права частина

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x} + R_n(x)e^{\gamma x},$$

де $P_m(x)$ — многочлен m-го степеня, $R_n(x)$ — многочлен n-го степеня. При цьому використовують теорему 6.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y''' - 3y' + 2y = (18x + 12)e^x + 9e^{-x}. \tag{4.20}$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння

$$k^3 - 3k + 2 = 0.$$

Воно має корені

$$k_1 = k_2 = 1, \; k_3 = -2.$$

Отже,

$$u = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x}.$$

Частинний розв'язок знайдемо у вигляді $v_1 + v_2$, де v_1 — частинний розв'язок рівняння

$$y''' - 3y' + 2y = (18x + 12)e^x, \tag{4.21}$$

а v_2 — частинний розв'язок рівняння

$$y''' - 3y' + 2y = 9e^{-x}. \tag{4.22}$$

Для рівняння (4.21) маємо

$$\begin{array}{r|l}
2 & v_1 = x^2(Ax + B)e^x \\
-3 & v_1' = (Ax^3 + Bx^2)e^x + (3Ax^2 + 2Bx)e^x \\
0 & v_1'' = (Ax^3 + Bx^2)e^x + 2(3Ax^2 + 2Bx)e^x + (6Ax + 2B)e^x \\
1 & v_1''' = (Ax^3 + Bx^2)e^x + 3(3Ax^2 + 2Bx)e^x + 3(6Ax + 2B)e^x + 6Ae^x \\
\hline
 & (18Ax + 6A + 6B)e^x = (18x + 12)e^x
\end{array}$$

Звідси $A = 1$, $B = 1$, отже,

$$v_1 = x^2(x + 1)e^x.$$

Для рівняння (4.22) маємо

$$\begin{array}{r|l}
2 & v_2 = Ae^{-x} \\
-3 & v_2' = -Ae^{-x} \\
0 & v_2'' = Ae^{-x} \\
1 & v_2''' = -Ae^{-x} \\
\hline
 & 4Ae^{-x} = 9e^{-x}.
\end{array}$$

Звідси $A = 9/4$, отже, $v_2 = 9/4\, e^{-x}$.
Тому для рівняння (4.20) маємо такий загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x + x^2(x + 1))e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{9}{4}e^{-x}.$$

Розглянемо рівняння (4.12), права частина якого має вигляд

$$f_1(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

або

$$f_2(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

де $P_m(x)$ — многочлен m-го степеня, α і β — будь-які дійсні числа.

Частинний розв'язок шукатимемо безпосередньо у формі

$$v(x) = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x).$$

Якщо числа $\alpha \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння кратності r, то

$$v(x) = e^{\alpha x}x^r(Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x).$$

У більш загальному вигляді маємо рівняння

$$\mathbf{L}[y] = P_{m_1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + P_{m_2}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

де $P_{m_1}(x)$ і $P_{m_2}(x)$ — многочлени відповідно степеня m_1 і m_2. Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$v = v_1 + v_2,$$

де v_1 — частинний розв'язок рівняння

$$\mathbf{L}[y] = P_{m_1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

а v_2 — частинний розв'язок рівняння

$$\mathbf{L}[y] = P_{m_2}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Якщо числа $\alpha \pm \beta i$ не є коренями відповідного характеристичного рівняння, то

$$v_1 = e^{\alpha x}(Q_{m_1}(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_{m_1}(x)\sin\beta x),$$

$$v_2 = e^{\alpha x}(R_{m_2}(x)\cos\beta x + \tilde{R}_{m_2}(x)\sin\beta x),$$

де Q_{m_1} і $\tilde{Q}_{m_1}$ — многочлени степеня m_1, а R_{m_2} і $\tilde{R}_{m_2}$ — многочлени степеня m_2. Тоді

$$v = e^{\alpha x}\{(Q_{m_1}(x) + R_{m_2}(x))\cos\beta x + (\tilde{Q}_{m_1}(x) + \tilde{R}_{m_2}(x))\sin\beta x\}.$$

Суми многочленів

$$Q_{m_1}(x) + R_{m_2}(x) = S_m(x),$$
$$\tilde{Q}_{m_1}(x) + \tilde{R}_{m_2}(x) = T_m(x)$$

є многочленами m-го степеня, де m — більше з двох чисел m_1 і m_2.

Отже, якщо числа $\alpha \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами шукаємо у виді

$$v = e^{\alpha x}(S(x)\cos\beta x + T(x)\sin\beta x).$$

Якщо числа $\alpha \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння кратності $r \geqslant 1$, то частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами шукаємо у виді

$$v = x^r e^{\alpha x}(S(x)\cos\beta x + T(x)\sin\beta x).$$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння

$$y''' - y'' - 6y' = x\sin x.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^3 - k^2 - 6k = 0.$$

Його корені

$$k_1 = -2,\ k_2 = 0,\ k_3 = 3.$$

Отже,

$$u = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{3x}.$$

Оскільки права частина

$$P_m(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x \equiv x\sin x,$$

то $m = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, число $0 \pm 1 \cdot i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Тоді

$$\begin{array}{r|l}
0 & v = (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x \\
-6 & v' = (-Cx + A - D)\sin x + (Ax + B + C)\cos x \\
-1 & v'' = (-Ax - B - 2C)\sin x + (-Cx + 2A - D)\cos x \\
1 & v''' = (Cx - 3A + D)\sin x + (-Ax - B - 3C)\cos x
\end{array}$$

$$(-9A + B + 2C + 7D)\sin x + (-2A - 7B - 9C + D)\cos x + (A + 7C)\, x\sin x + (-7A + C)\, x\cos x \equiv x\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при функціях $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$, $x\cos x$ у правій і лівій частинах, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -9A + B + 2C + 7D = 0, \\ -2A - 7B - 9C + D = 0, \\ A + 7C = 1, \\ -7A + C = 0, \end{cases}$$

Звідси

$$A = \frac{1}{50},\ B = -\frac{23}{125},\ C = \frac{7}{50},\ D = \frac{3}{250}.$$

Отже,

$$v = \frac{5x - 46}{250}\sin x + \frac{35x + 3}{250}\cos x.$$

Загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{3x} + \frac{5x - 46}{250}\sin x + \frac{35x + 3}{250}\cos x.$$

ВПРАВИ

1. Використовуючи метод варіації довільних сталих, знайти частинні розв'язки таких рівнянь:

1. $y'' + y = e^x$.
2. $y'' - 2y' = (x + 1)e^{2x}$.
3. $y'' - 8y' + 16y = xe^{2x}$.
4. $y'' + y = \cos x$.
5. $y'' - 3y' + 2y = x^2$.
6. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.
7. $y''' - 5y'' + 6y' = x + 1$.
8. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.
9. $y''' - 3y'' + y' - 3y = \sin x$.
10. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

2. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розв'язати такі рівняння:

1. $y'' - 2y' + 2y = 2\cos x + \sin x$.
2. $y'' - 2y' + 3y = x + 1$.
3. $y''' - y'' + y' - y = (x+1)e^{2x}$.
4. $y''' + y' = x^4$.
5. $y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x$.
6. $y^{\mathrm{V}} - 4y''' = x$.
7. $y'' - 3y' + 2y = x^3 + \sin x$.
8. $y^{\mathrm{IV}} - y = xe^x + \cos x$.
9. $y''' - 2y' = (x + 1)e^{-x}$.
10. $y'' - y' = e^x\sin x$.
11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
12. $y'' + 4y = 2\cos x + 3\sin x$.
13. $y'' + 9y = \sin 3x$.
14. $y'' + y = 2 - x$.
15. $y'' - 7y' + 12y = x$.
16. $y'' + 9y = x\cos x$.
17. $y'' - 5y' + 6y = e^{nx}$.
18. $y^{\mathrm{IV}} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4\cos x$.
19. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.
20. $y^{\mathrm{IV}} - a^4 y = x^3$.
21. $y''' - 3y' + 2y = (9x + 1)e^x$.
22. $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$.
23. $y'' + 2a^2 y = a^2\cos ax$.
24. $y'' + 4y = \sin x$.
25. $y'' + y = 2\sin x - \cos x$.
26. $y''' + y'' = \sin 2x$.
27. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = x$.
28. $y'' + n^2 y = \cos nx$.
29. $y''' + y'' = x$
30. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = e^{2x}$.

Метод Коші. Цей метод дає змогу знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.12), коли відомо залежний від одного параметра розв'язок $K(x, s)$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння $\mathrm{L}[y(x)] = 0$, що задовольняє початкові умови

$$K(s, s) = K'(s, s) = \cdots = K^{(n-2)}(s, s) = 0,$$
$$K^{(n-1)}(s, s) = 1. \tag{4.23}$$

Покажемо, що тоді функція

$$v(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,s) f(s)\,ds \tag{4.24}$$

буде частинним розв'язком рівняння (4.12), який задовольняє нульові початкові умови

$$y(x_0)=y'(x_0)=\dots=y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Для цього використаємо формулу диференціювання визначеного інтеграла по параметру, коли й межі інтегрування залежать від параметра:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_{\alpha}(x,\alpha)\,dx+$$

$$+f(b(\alpha),\alpha)\frac{db(\alpha)}{d\alpha}-f(a(\alpha),\alpha)\frac{da(\alpha)}{d\alpha}. \tag{4.25}$$

У формулі (4.24) верхня межа і підінтегральна функція залежать від параметра x.

Отже, диференціюючи (4.24) з урахуванням (4.25) і (4.23) дістаємо

$$\begin{cases} v'(x)=\int_{x_0}^{x} K'_x(x,s) f(s)\,ds,\\ v''(x)=\int_{x_0}^{x} K''_x(x,s) f(s)\,ds,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ v^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s) f(s)\,ds,\\ v^{(n)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s) f(s)\,ds+f(x). \end{cases} \tag{4.26}$$

Підставляючи (4.24), (4.26) у рівняння (4.12), дістаємо

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{L}[K(x,s)]\,f(s)\,ds+f(x)\equiv f(x),$$

оскільки $K(x,s)$ — розв'язок однорідного рівняння і $\mathrm{L}[K(x,s)]=0$.

Розв'язок $K(x,s)$ можна дістати із загального розв'язку $y=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння, якщо вибрати довільні сталі $C_i=C_i(s)$ так, щоб задовольнити умови (4.23).

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''+a^2y=f(x).$$

Розв'язання. Загальний розв'язок

$$u=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

Використовуючи умови (4.23), маємо

$$\begin{cases} C_1\cos as+C_2\sin as=0,\\ -C_1a\sin as+C_2a\cos as=1. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1=-\frac{\sin as}{a},\quad C_2=\frac{\cos as}{a}.$$

Шуканий розв'язок $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s)=\frac{1}{a}\sin a(x-s).$$

Розв'язок заданого рівняння з нульовими початковими умовами тепер згідно з (4.24) запишемо так:

$$v(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\sin a(x-s)\,f(s)\,ds.$$

Використовуючи частинний розв'язок у формі Коші, загальний розв'язок матиме вигляд

$$y(x)=u(x)+\int_{x_0}^{x} K(x,s)\,f(s)\,ds,$$

де $u(x)$ — загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння.

Якщо відомо нормовану фундаментальну систему розв'язків $y_1,\dots,y_n$ рівняння $L[y]=0$, то розв'язок рівняння $L[y]=f(x)$ з початковими умовами: при $x=x_0$ $y=y_0$, $y'=y'_0$, ..., $y^{n-1}=y_0^{(n-1)}$ можна знайти за формулою

$$y(x)=y_0y_1(x)+y'_0y_2(x)+\dots+y_0^{(n-1)}y_n(x)+v(x),$$

де $v(x)$ — частинний розв'язок вигляду (4.24).

4.5. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку виду

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x), \tag{4.27}$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ — неперервні функції на інтервалі (a,b); a, b — довільні дійсні числа.

Нехай у рівнянні (4.27) функція $f(x) \equiv 0$. Тоді матимемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0. \tag{4.28}$$

1. Підстановкою

$$y=u(x)z, \qquad u=e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx} \tag{4.29}$$

рівняння (4.28) зводиться до рівняння, що не містить члена з першою похідною:

$$z''+I(x)z=0.$$

Функцію

$$I(x)=p_2(x)-\frac{1}{4}p_1^2(x)-\frac{1}{2}p_1'(x)$$

називають *інваріантом* рівняння (4.28).

2. Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (4.28), то функція

$$y(x)=C_1y_1+C_2y_2+y_2\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx-$$

$$-y_1\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx, \tag{4.30}$$

де $W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2$ — вронскіан, є загальним розв'язком рівняння (4.27). Формулу (4.30) дістанемо за допомогою методу «варіації сталих».

3. Якщо $y_1 \neq 0\ \forall x \in (a, b)$ є частинним розв'язком рівняння (4.28), то загальний розв'язок цього рівняння виражається через квадратури. Справді, нехай $y(x)$ — інший довільний розв'язок рівняння (4.28), лінійно незалежний з y_1. Використовуючи формулу Ліувілля—Остроградського, запишемо детермінант Вронського $W[y_1, y]$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=C_1e^{-\int p_1(x)dx},$$

або

$$y_1y'-yy_1'=C_1e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розділивши ліву і праву частини цієї рівності на y_1^2, дістанемо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=C_1\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Звідки $y(x)$ визначається квадратурою

$$y(x)=C_1y_1\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx+C_2y_1. \tag{4.31}$$

Тут C_1, C_2 — довільні сталі. Отже, маємо загальний розв'язок. Формулу (4.31) називають *формулою Абеля*.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0,\ x\in(a;b);\ 0,\ \pm1\notin(a,b).$$

Розв'язання. Задане рівняння допускає частинний розв'язок $y_1=x$, тут $p_1(x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$.

За формулою (4.31) маємо

$$y(x)=C_1x\int\frac{e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx+C_2x=$$

$$=C_1x\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}+C_2x=C_1x\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\right)dx+$$

$$+C_2x=C_1x\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)+C_2x=C_1\left(\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}-1\right)+$$

$$+C_2x.$$

Це загальний розв'язок заданого рівняння.

Якщо відомо один розв'язок рівняння (4.28), то розв'язок рівняння (4.27) записується так:

$$y(x)=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{dx}{Ey_1^2(x)}+$$

$$+y_1(x)\int\frac{1}{Ey_1^2}\left(\int Ey_1(x)f(x)dx\right)dx,$$

де

$$E=\exp\int p_1(x)dx.$$

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Це рівняння виду

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{4.32}$$

де p, q — дійсні числа, $f(x)$ — задана неперервна функція.

Якщо $f(x)\equiv 0$, то маємо однорідне рівняння

$$y''+py'+qy=0. \tag{4.33}$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$u=C_1y_1+C_2y_2, \tag{4.34}$$

де y_1, y_2 — два лінійно незалежних частинних розв'язки; C_1, C_2 — довільні сталі.

Для того щоб знайти лінійно незалежні частинні розв'язки y_1 і y_2 рівняння (4.33), треба записати квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0,$$

яке є характеристичним рівнянням для рівняння (4.33) і визначити його корені k_1, k_2:

$$k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

При цьому можливі такі випадки:

1) корені дійсні і різні, $k_1 \neq k_2$, тоді

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x};$$

2) корені дійсні і рівні, $k_1 = k_2 \overset{\text{def}}{=} k$, тоді

$$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx};$$

3) корені комплексні (спряжені), $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, α, $\beta \in R$, тоді

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Лінійна комбінація розв'язків y_1 і y_2 (4.34) є загальним розв'язком рівняння (4.33).

Розв'язки рівняння (4.32) дістанемо таким чином.

Нехай маємо випадок 1). Тоді за теоремою Вієта

$$k_1 + k_2 = -p, \quad k_1 k_2 = q.$$

Рівняння (4.32) запишемо у вигляді

$$y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 y = f(x),$$

або

$$(y'' - k_1 y') - k_2(y' - k_1 y) = f(x),$$

або

$$(y' - k_1 y)' - k_2(y' - k_1 y) = f(x).$$

Позначимо $y' - k_1 y = z$. Тоді останнє рівняння набирає вигляду

$$z' - k_2 z = f(x).$$

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок його

$$z = e^{k_2 x}\left(C_1 + \int e^{-k_2 x} f(x)\,dx\right).$$

Замінивши z на $y' - k_1 y$, дістанемо

$$y' - k_1 y = e^{k_2 x}\left(C_1 + \int e^{-k_2 x} f(x)\,dx\right).$$

Маємо знову лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок його

$$y = e^{k_1 x}\left(C_2 + \int e^{-k_1 x}\left(e^{k_2 x}\left(C_1 + \int e^{-k_2 x} f(x)\,dx\right)\right)dx\right),$$

або

$$y = e^{k_1 x}\left(C_2 + \int e^{(k_2 - k_1)x}\left(C_1 + \int e^{-k_2 x} f(x)\,dx\right)dx\right). \quad (4.35)$$

Якщо корені рівні, то ця формула спрощується:

$$y = (C_1 x + C_2)e^{kx} + e^{kx}\int\left(\int e^{-kx} f(x)\,dx\right)dx. \quad (4.36)$$

Якщо корені комплексні, то розв'язок рівняння (4.32) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) + $$
$$+ \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\left(\sin\beta x\int e^{-\alpha x}\cos\beta x\, f(x)\,dx - \right.$$
$$\left. - \cos\beta x\int e^{-\alpha x}\sin\beta x\, f(x)\,dx\right). \quad (4.37)$$

Приклад. Записати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' + 1 = e^{-\frac{x}{2}}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^2 + k + 1 = 0$$

має комплексні корені $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Отже, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\int e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}xe^{-\frac{x}{2}}\,dx - \right.$$
$$\left. - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\int e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}xe^{-\frac{x}{2}}\,dx\right),$$

або

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{4}{3}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Загальний розв'язок рівняння (4.33) дістанемо з формул (4.35) — — (4.37), якщо $f(x) \equiv 0$.

Нехай задано диференціальне рівняння виду

$$y'' + a^2 y = f(x), \tag{4.38}$$

де $a = \text{const}$. Тоді з характеристичного рівняння $k^2 + a^2 = 0$ маємо $\alpha = 0$, $\beta = a$ і розв'язок (4.37) набирає вигляду

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(s)\sin a(x-s)\,ds. \tag{4.39}$$

Формули (4.37) і (4.39) ефективно використовуються при розв'язуванні диференціальних рівнянь операторним методом.

Якщо $f(x)$ має «спеціальний» вигляд, то при знаходженні частинних розв'язків, як і для лінійних рівнянь вищих порядків, можна застосувати метод невизначених коефіцієнтів.

Якщо в (4.35) вважати $C_1 = C_2 = 0$, то дістанемо частинний розв'язок рівняння (4.32), що відповідає правій частині,

$$v(x) = e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\int e^{-k_2 x} f(x)\,dx dx. \tag{4.40}$$

Для диференціального рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами при довільній $f(x)$ частинний інтеграл $v(x)$ можна виписати у вигляді n квадратур:

$$v = e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\left\{\int e^{(k_3-k_2)x}\left[\ldots\int e^{(k_n-k_{n-1})x}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\int f(x)e^{-k_n x}\,dx\right)dx\ldots\right]dx\right\}dx, \tag{4.41}$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корені відповідного характеристичного рівняння.

Для рівняння третього порядку, $n = 3$,

$$v = e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\left[\int e^{(k_3-k_2)x}\left(\int f(x)e^{-k_3 x}dx\right)dx\right]dx.$$

Якщо в (4.41) після кожного інтегрування записувати довільну сталу C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, то матимемо не частинний розв'язок v, а загальний розв'язок y рівняння (4.32).

Користуючись цими формулами, доцільно іноді виражати тригонометричні функції через показникові за формулами Ейлера. Тоді із загальної формули випливає правило знаходження частинного розв'язку v для спеціальних видів функції: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ і т. д.

4.6. Крайові задачі

Для рівнянь вищого порядку крім задачі Коші розглядають ще так звані граничні, або крайові, задачі [3, 33, 34]. У задачі Коші умови, що дають змогу дістати із загального розв'язку шуканий частинний, задаються в одній (початковій) точці.

Проте в прикладних задачах умови часто задаються в двох точках, на кінцях відрізка, де шукається розв'язок задачі. Це крайові задачі.

Постановку крайової задачі розглядатимемо для рівняння другого порядку. Наприклад, для рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{4.42}$$

крайову задачу можна поставити так:

на відрізку $[a, b]$ знайти частинний розв'язок рівняння (4.42), що задовольняє крайові умови

$$\begin{cases}(\alpha_1 y(x) + \beta_1 y'(x))|_{x=a} = \gamma_1,\\ (\alpha_2 y(x) + \beta_2 y'(x))|_{x=b} = \gamma_2,\end{cases} \tag{4.43}$$

де α_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2$, — відомі сталі величини, причому α_1 і β_1, а також α_2 і β_2 одночасно не дорівнюють нулю. Якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то крайові умови називаються однорідними.

Крайові задачі розглядаються також і для неоднорідного рівняння типу (4.42). Наприклад, на відрізку $[a, b]$ знайти розв'язок задачі

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{4.44}$$

$$\begin{cases}\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0,\\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0.\end{cases} \tag{4.45}$$

У крайовій задачі кількість крайових умов повинна збігатися з порядком диференціального рівняння.

Для розв'язання крайової задачі треба знайти загальний розв'язок рівняння (4.42) і (4.44):

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ — лінійно незалежні. Потім, використовуючи крайові умови, знаходимо конкретні значення довільних сталих. При цьому треба розв'язати лінійну систему рівнянь для визначення C_1 і C_2. Підставляючи ці сталі в загальний розв'язок, дістаємо функцію, яка й є розв'язком крайової задачі.

Приклад. Знайти такий розв'язок рівняння $y'' + y = 0$, щоб виконувалися крайові умови $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 2$.

Розв'язання. Загальний розв'язок цього рівняння

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Отже, $C_1 = 0$, $C_2 = 2$, тобто розв'язком крайової задачі є функція $y = 2\sin x$.

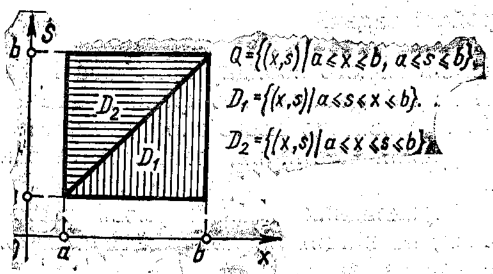

Рис. 4.1

Слід зазначити, що крайова задача не завжди може мати розв'язок навіть для лінійного рівняння, тобто не завжди існує такий розв'язок, який набуває на кінцях відрізка задані значення, а якщо вона й має розв'язок, то часто не єдиний.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' + y = 0$, щоб виконувалися умови $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 2$.

Розв'язання. Загальний розв'язок $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Тоді

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

і для визначення довільних сталих дістаємо несумісну систему

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ -C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 2. \end{cases}$$

Аналогічно крайова задача

$$y'' = 0,$$
$$y(0) - y(\pi) = 1, \; y'(0) + y'(\pi) = 0$$

не має жодного розв'язку.

До розв'язування крайової задачі є різні підходи. Один з них — це застосування функції Гріна.

1. *Функцією Гріна крайової задачі* (4.44), (4.45) називають функцію $G(x, s)$, яка визначена при $x \in [a, b]$, $s \in [a, b]$, тобто в області Q (рис. 4.1), і при кожному фіксованому $s \in (a, b)$ має такі властивості:

1° при $x \neq s$ функція $G(x, s)$ задовольняє рівняння (4.42);

2° при $x = a$ і $x = b$ функція $G(x, s)$ задовольняє крайові умови (4.45);

3° при $x = s$ функція $G(x, s)$ неперервна по x, а її похідна по x має розрив першого роду із скачком, що дорівнює $\frac{1}{p_0(x)}$, тобто

$$G(s + 0, s) = G(s - 0, s), \quad G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = \frac{1}{p_0(s)}. \qquad (4.46)$$

Щоб знайти функцію Гріна крайової задачі (4.44), (4.45), треба знайти два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$, відмінні від $y(x) \equiv 0$ рівняння (4.42), що задовольняють відповідно першу і другу з крайових умов (4.45).

Якщо $y_1(x)$ не задовольняє одночасно обом крайовим умовам, то функція Гріна $G(x, s)$ існує, її можна знайти у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)\, y_1(x), & a \leq x \leq s, \\ \psi(s)\, y_2(x), & s \leq x \leq b, \end{cases} \qquad (4.47)$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ підбираємо так, щоб функція $G(x, s)$ задовольняла умовам (4.46), тобто

$$\psi(s)\, y_2(s) = \varphi(s)\, y_1(s), \quad \psi(s)\, y_2'(s) - \varphi(s)\, y_1'(s) = \frac{1}{p_0(s)}.$$

Якщо знайдено функцію Гріна $G(x, s)$, то розв'язком крайової задачі буде [33, 34]:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds.$$

При розв'язуванні лінійних крайових задач часто поступають так.

Якщо задано лінійне диференціальне рівняння (4.44) з двома крайовими умовами щодо $y(x)$ та її похідних в двох точках $x = a$ і $x = b$, то маємо такий розв'язок крайової задачі:

$$y(x) = y_0(x) + \alpha\, u(x) + \beta v(x),$$

де функції $y_0(x)$, $u(x)$ і $v(x)$ знаходять відповідно з трьох задач Коші

$$\begin{array}{ll} \mathrm{L}[y] = f(x), & y(a) = y'(a) = 0; \\ \mathrm{L}[y] = 0, & y(a) = 1, \quad y'(a) = 0; \\ \mathrm{L}[y] = 0, & y(a) = 0, \quad y'(a) = 1. \end{array}$$

Підставляючи задані крайові умови у вираз для $y(x)$, дістаємо систему двох рівнянь для визначення коефіцієнтів α і β.

Власним значенням крайової задачі

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \lambda y,$$
$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

називають таке число $\lambda = \lambda_0$, при якому ця задача має нетривіальний розв'язок $y = \varphi(x)$. Цей розв'язок називають *власною функцією*, яка визначається з точністю до довільного сталого множника.

Так, для крайової задачі

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0$$

числа $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ і функції $\sin x, \sin 2x, \ldots$ є відповідно власними значеннями і власними функціями задачі.

Крім простих власних значень, коли одному власному значенню відповідає одна власна функція, існують кратні власні значення, коли власному значенню λ_0 відповідають дві лінійно незалежні власні функції.

Приклад. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$y'' = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком однорідного рівняння $y'' = 0$ є функція $y = C_1 + C_2 x$. Обидві умови не задовольняються, але умову $y(-1) = 0$ задовольняє, наприклад, розв'язок $y_1(x) = 1 + x$, а другу умову — розв'язок $y_2(x) = 1 - x$.

Функцію Гріна для заданої крайової задачі шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)(1 + x), & -1 \leqslant x \leqslant s, \\ \psi(s)(1 - x), & s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначаються з умов

$$\psi(s)(1 - s) = \varphi(s)(1 + s),\ -\psi(s) - \varphi(s) = 1.$$

Звідси

$$\varphi(s) = -\frac{1 - s}{2},\ \psi(s) = -\frac{1 + s}{2}.$$

Таким чином, шуканою функцією Гріна є

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 - s)(1 + x), & -1 \leqslant x \leqslant s, \\ -\frac{1}{2}(1 + s)(1 - x), & s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тепер запишемо розв'язок заданої крайової задачі

$$y = \int_{-1}^{1} G(x, s) f(s)\, ds = -\frac{1 + x}{2}\int_{-1}^{x}(1 - s) f(s)\, ds -$$
$$-\frac{1 - x}{2}\int_{x}^{1}(1 + s) f(s)\, ds.$$

Крім розв'язування крайової задачі за допомогою функції Гріна розглядають і такі методи, як метод стрільби, «метод прогонки» (факторизації) та ін.

Розглянемо таку крайову задачу:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{4.48}$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ — функції, визначені і неперервні на відрізку $a \leqslant x \leqslant b$:

$$y'(a) - \alpha_0 y(a) = \alpha_1,\quad y'(b) - \beta_0 y(b) = \beta_1, \tag{4.49}$$

$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ — сталі.

Нехай задача має єдиний розв'язок. Застосуємо такі методи розв'язування.

1. *Метод „стрільби“.* Нехай $y_0(x)$ — частинний розв'язок рівняння (4.48), що задовольняє початковим умовам

$$y_0(a) = \alpha,\quad y_0'(a) = \alpha_0 y_0(a) + \alpha_1,$$

де α — довільно вибране число, $z_0(x)$ — розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$z'' + p_1(x)z' + p_2(x)z = 0,$$

яке задовольняє початкові умови

$$z_0(a) = \gamma,\ z_0'(a) = \alpha_0 z_0(a),$$

де γ — довільно вибране число.

Тоді при довільному C функція

$$y(x) = y_0(x) + C z_0(x)$$

є розв'язком рівняння (4.48), який задовольняє першу з крайових умов (4.49).

Сталу C підберемо так, щоб здобутий розв'язок задовольняв і другу крайову умову:

$$y_0'(b) + C z_0'(b) - \beta_0(y_0(b) + C z_0(b)) = \beta_1.$$

Звідси

$$C = \frac{\beta_1 - y_0'(b) + \beta_0 y_0(b)}{z_0'(b) - \beta_0 z_0(b)}.$$

Легко побачити, що $z_0'(b) - \beta_0 z_0(b) \neq 0$, оскільки в протилежному разі крайова задача (4.48), (4.49) або не має розв'язків, або має їх нескінченну множину.

Отже, метод «стрільби» полягає в тому, щоб з однопараметричної сім'ї розв'язків, які задовольняють першу крайову умову, відібрати той розв'язок, що задовольняє другу крайову умову.

2. *Метод „прогонки“ (факторизації).* Запишемо рівняння (4.48) так:

$$\left(\frac{d}{dx} + \mu(x)\right)\left(\frac{d}{dx} + \nu(x)\right) y = f(x).$$

Функції $\mu(x)$ і $\nu(x)$ треба підібрати так, щоб

$$y'' + (\mu(x) + \nu(x))y' + (\nu'(x) + \mu(x)\nu(x))y \equiv y'' +$$
$$+ p_1(x)y' + p_2(x)y,$$

тобто функції $\mu(x)$ і $\nu(x)$ повинні задовольняти рівняння

$$\mu(x) + \nu(x) = p_1(x),$$
$$\nu'(x) + \mu(x)\nu(x) = p_2(x).$$

Звідси дістаємо

$$\mu(x) = p_1(x) - \nu(x),$$
$$\nu'(x) + p_1(x)\nu(x) - \nu^2(x) = p_2(x).$$

Покладемо $\nu(a) = -\alpha_0$, тоді для знаходження $\nu(x)$ маємо таку задачу Коші:

$$\nu'(x) + p_1(x)\nu(x) - \nu^2(x) = p_2(x),\ \nu(a) = -\alpha_0.$$

Позначимо $y' + \nu(x)y = z$, тоді згідно з першою граничною умовою з (4.49)

$$z(a) = y'(a) + \nu(a)\,y(a) = y'(a) - \alpha_0 y(a) \overset{\text{def}}{=} \alpha_1.$$

Щоб знайти $z(x)$, складемо таку задачу Коші:

$$z' + (p_1(x) - \nu(x))z = f(x),\ z(a) = \alpha_1. \tag{4.50}$$

Для знаходження $y(x)$ треба розв'язати задачу Коші

$$y' + \nu(x)y = z(x),\ y(b) = y_1, \tag{4.51}$$

причому $y(b) = y_1$ знаходиться з рівнянь

$$y'(b) - \beta_0 y(b) = \beta_1,\ y'(b) + \nu(b)y(b) = z(b).$$

Легко побачити, що, розв'язуючи послідовно ці задачі Коші, дістанемо розв'язок $y(x)$ крайової задачі (4.48), (4.49).

Розв'язок задачі Коші (4.50) називають *прямою прогонкою*, а задачі Коші (4.51) — *зворотною прогонкою*.

Зазначимо, що крайову задачу попередніми перетвореннями можна звести до так званої задачі стандартного типу.

Наприклад, нехай маємо крайову задачу для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_1(x),$$
$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_1) = y_1.$$

Тоді лінійною заміною

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,y_0$$

крайові умови зводяться до нульових умов

$$z(x_0) = z(x_1) = 0, \tag{4.52}$$

причому лінійність рівняння не порушується.

Множенням на $e^{\int p_1(x)dx}$ задане лінійне рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y') + q(x)\,y = f(x), \tag{4.53}$$

де $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$. Тому звичайно розглядають крайову задачу типу (4.53), (4.52).

ВПРАВИ

1. Знайти розв'язки при таких крайових умовах:

а) $y'' - y = 2x,\quad y(0) = 0,\ y(1) = 1;$

б) $y'' + y = 1,\quad y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

в) $y'' + y = 1,\quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0;$

г) $y'' + y' = 1,\quad y'(0) = 0,\ y(1) = 1;$

д) $y'' - y' = 0,\quad y(0) = -1,\ y'(1) - y(1) = 2.$

2. При яких a крайова задача $y'' + ay = 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$ не має розв'язків?

3. Знайти власні значення і власні функції

а) $y'' = \lambda y,\quad y(0) = 0,\ y(l) = 0;$

б) $y'' = \lambda y,\quad y'(0) = 0,\ y'(l) = 0;$

в) $y'' = \lambda y,\quad y(0) = 0,\ y'(l) = 0.$

4. Побудувати функцію Гріна

а) $y'' + y = f(x),\quad y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi);$

б) $y'' + y = f(x),\quad y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0;$

в) $y'' = f(x),\quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

4.7. Диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами в загальному випадку проінтегрувати не можна. Проте коли відповідною заміною лінійне рівняння перетворити в лінійне із сталими коефіцієнтами, то задачу буде розв'язано.

Нехай маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = 0. \tag{4.54}$$

Зробимо підстановку

$$t = \psi(x).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\psi}{dx},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^ny}{dt^n}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^n + \cdots + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^n\psi}{dx^n}.$$

Рівняння (4.54) набирає вигляду

$$\frac{d^n y}{dt^n}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^n + \cdots + p_n(x)\, y = 0.$$

Розділивши на $(\psi'(x))^n$, дістанемо

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + \frac{p_n(x)}{(\psi'(x))^n}\, y = 0.$$

Зрозуміло, що функцію $\psi(x)$ треба вибрати так, щоб коефіцієнт при y був сталим.

Покладемо

$$\frac{p_n(x)}{(\psi'(x))^n} = \frac{1}{C^n}.$$

Тоді

$$\psi'(x) = C\sqrt[n]{p_n(x)},$$

тобто

$$\psi(x) = C\int \sqrt[n]{p_n(x)}\,dx.$$

Таким чином, якщо рівняння (4.54) зводиться до рівняння з сталими коефіцієнтами за допомогою заміни незалежної змінної, то тільки за формулою

$$t = C\int \sqrt[n]{p_n(x)}\,dx.$$

Отже, за коефіцієнтами рівняння (4.54) можна дізнатися, зводиться чи ні воно до рівняння із сталими коефіцієнтами. Відомо деякі типи таких рівнянь.

1. *Рівняння Ейлера*. Це диференціальне рівняння виду

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0, \quad (4.55)$$

де $p_1, \ldots, p_n$ — сталі величини.

Розглядаючи рівняння (4.54) і (4.55), бачимо, що тут $p_n(x) = \frac{p_n}{x^n}$. Тому

$$t = C\int \sqrt[n]{\frac{p_n}{x^n}}\,dx.$$

Взявши $C = \frac{1}{\sqrt[n]{p_n}}$ і опустивши сталу інтегрування, дістанемо підстановку

$$t = \ln x, \text{ або } x = e^t. \quad (4.56)$$

Рівняння (4.55) має особливу точку $x = 0$, формула (4.56) і всі наступні виконуються для значення $x > 0$; якщо $x < 0$, то треба замінити x на $|x|$.

Тоді

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t},$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(y'')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t},$$

. . . .

$$y^{(n)} = \left(\frac{d^ny}{dt^n} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{dy}{dt}\right)e^{-nt}. \quad (4.57)$$

Як бачимо, похідна k-го порядку від y по x виражається у вигляді добутку e^{-kt} на однорідну лінійну функцію від $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ky}{dt^k}$ із сталими коефіцієнтами. Підставимо (4.56) і (4.57) в (4.55). Оскільки множники $x^k = e^{kt}$ анулюють з множником e^{-kt}, то дістанемо лінійне рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами. Знайшовши його загальний розв'язок і поклавши $t = \ln x$, матимемо загальний розв'язок рівняння Ейлера.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Нехай $x = e^t$. Тоді

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t};$$

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} - 2e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} + 2y = 0,$$

або

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Отже,

$$y = C_1e^t + C_2e^{2t}.$$

Оскільки $t = \ln x$, то загальним розв'язком заданого рівняння є

$$y = C_1x + C_2x^2.$$

Рівняння Ейлера можна розв'язувати ще й так. Шукатимемо частинний розв'язок рівняння (4.55) у вигляді

$$y = x^r,$$

де r — стала величина. Підставивши шуканий розв'язок в рівняння (4.55) і скоротивши на x^r, дістанемо рівняння n-го степеня відносно r:

$$r(r+1)(r-2)\ldots(r-n+1) +$$
$$+ p_1 r(r-1)\cdots(r-n+2) + \cdots + p_{n-1}r + p_n = 0.$$

Якщо корені $r_1, r_2, \ldots, r_n$ цього рівняння всі різні, то маємо n лінійно незалежних розв'язків рівняння (4.55):

$$y_1 = x^{r_1},\ y_2 = x^{r_2},\ \ldots,\ y_n = x^{r_n}.$$

Загальний інтеграл

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \cdots + C_n x^{r_n}.$$

Якщо серед коренів є рівні, наприклад, $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$, то відповідними частинними розв'язками будуть

$$y_1 = x^{r_1},\ y_2 = x^{r_1}\ln x,\ \ldots,\ y_k = x^{r_1}(\ln x)^{k-1}.$$

Розглянемо випадок комплексних коренів. Якщо $r_1 = \alpha + \beta i$, то існує $r_2 = \alpha - \beta i$. Відповідно частинними розв'язками будуть

$$y_1 = x^{\alpha+\beta i} = x^{\alpha} e^{i\beta \ln x} = x^{\alpha}(\cos\beta\ln x + i\sin\beta\ln x);$$

$$y_2 = x^{\alpha}(\cos\beta\ln x - i\sin\beta\ln x).$$

Оскільки дійсна і уявна частини є лінійно незалежними розв'язками, то загальний інтеграл матиме вигляд

$$y = x^{\alpha}(C_1\cos\beta\ln x + C_2\sin\beta\ln x) + C_3 x^{r_3} + \cdots + C_n x^{r_n}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Розв'язання. Нехай $y = x^r$. Тоді маємо рівняння

$$r(r-1) + r + 1 = 0,$$

корені якого

$$r_{1,2} = \pm i.$$

Загальний розв'язок

$$y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x,\quad x > 0.$$

До рівняння Ейлера зводиться рівняння

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1}p_1 y^{(n-1)} + \cdots + (ax+b)p_{n-1}y' + p_n y = 0, \tag{4.58}$$

якщо застосувати підстановку $ax + b = \tau$. Виконавши заміну $\tau = e^t$ або відразу $ax + b = e^t$, дістанемо рівняння з сталими коефіцієнтами.

Частинні розв'язки можна також шукати у вигляді

$$y = (ax+b)^r.$$

Тоді матимемо рівняння відносно r і далі поступаємо так, як і вище.

Можна розглядати й лінійні неоднорідні диференціальні рівняння типу (4.55) та (4.58).

Приклад. Проінтегрувати рівняння

$$(2x+1)^2 y'' - \left(x + \frac{1}{2}\right)y' + y = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Розв'язання. Виконаємо підстановку $2x + 1 = e^t$. Тоді

$$\frac{dt}{dx} = 2e^{-t},\quad y' = 2e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad y'' = 4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Дістанемо рівняння

$$4\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + y = t - \ln 2.$$

Характеристичне рівняння

$$4k^2 - 5k + 1 = 0$$

має корені

$$k_1 = 1,\ k_2 = \frac{1}{4}.$$

Частинний розв'язок $v(t)$ для правої частини шукаємо у вигляді

$$\begin{array}{r|l} 1 & v = At + B \\ -5 & v' = \quad A \\ 4 & v'' = \quad 0 \\ \hline & At + (-5A + B) \equiv t - \ln 2, \end{array}$$

звідки $A = 1$, $B = 5 - \ln 2$. Тоді $y(t) = C_1e^t + C_2e^{1/4t} + t + 5 - \ln 2$. Оскільки $t = \ln(2x+1)$, то матимемо загальний інтеграл

$$y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)^{\frac{1}{4}} + \ln(2x+1) + 5 - \ln 2.$$

Неоднорідні рівняння Ейлера типу

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k y^{(k)} = x^{\alpha}P_m(\ln x),$$

де $P_m(u)$ — многочлен степеня m, можна розв'язувати методом підбору аналогічно розв'язуванню лінійного неоднорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами і з правою частиною виду $e^{\alpha x}P_m(x)$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x.$$

Розв'язання. Для однорідного рівняння $x^2y'' - xy' + 2y = 0$ характеристичне рівняння дістанемо підстановкою $y = x^r$. Маємо $r(r-1) - r + 2 = 0$, або $r^2 - 2r + 2 = 0$.

Корені цього рівняння $r_1 = 1 - i$, $r_2 = 1 + i$. Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є функція

$$u = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x).$$

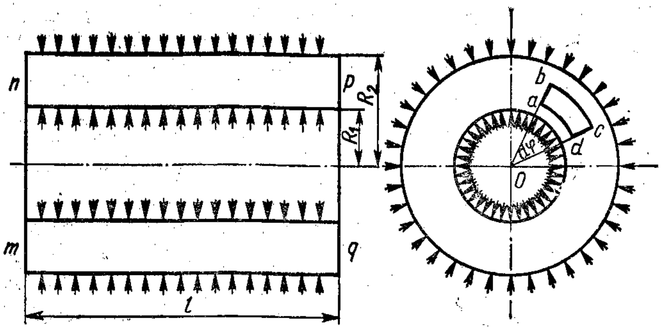

Рис. 4.2

Частинний розв'язок, що відповідає правій частині, знайдемо методом невизначених коефіцієнтів у вигляді $v = x\,(A \ln x + B)$. Отже,

$$\begin{array}{r|l} 2 & v = Ax \ln x + Bx \\ -x & v' = A \ln x + A + B \\ x^2 & v'' = A/x \end{array}$$

$$Ax \ln x + Bx \equiv x \ln x.$$

Звідси $A = 1$, $B = 0$ і $v = x \ln x$. Загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = x\,(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x) + x \ln x.$$

ВПРАВИ

Розв'язати такі рівняння

1. $x^2y'' + xy' - y = 0$.
2. $\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = 0$.
3. $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.
4. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x$.
5. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$.
6. $(x^2 + 1)\,y''' - 12y' = 0$.
7. $x^2y'' + xy' + y = x$.
8. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$.
9. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$.
10. $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

Задача Ламе. Серед технічних задач, що зводяться до розв'язування рівняння Ейлера, можна розглянути задачу Ламе. Вона полягає в тому, що, знаючи рівномірно розподілений тиск, який діє на внутрішню і зовнішню поверхні циліндричної трубки, треба визначити напруження в точках самої трубки (рис. 4.2). При однакових умовах деформація і напруження в поперечних перерізах повинні бути одні й ті самі. Тому обмежимося трубкою, довжина якої дорівнює одиниці. Позначимо через R_1 радіус внутрішньої, а R_2 — радіус зовнішньої циліндричної поверхні трубки. Розглянемо елемент $abcd$, обмежений циліндричними поверхнями радіусів ρ і $\rho + d\rho$ і двома меридіальними перерізами Ob і Oc, що утворюють кут $d\varphi$. Цей елемент знаходиться в рівновазі під дією всіх прикладених до нього сил. Розміщення напруження на поверхнях елемента показано на рис. 4.3. Напруження на гранях ab і cd позначимо через p_x, а на гранях ad і bc — через p_y і $p_y + \frac{dp_y}{d\rho}d\rho$.

Якщо P і p означають тиск на зовнішню і внутрішню поверхні трубки, то граничні умови такі:

$$p_y = -p \text{ при } \rho = R_1,$$
$$p_y = -P \text{ при } \rho = R_2.$$

Встановимо зв'язок між p_x і p_y. На грані ab і cd діють сили $p_x \cdot d\rho \cdot 1$. Сума їх проекцій на напрямок Ob дорівнює

$$-p_x \cdot d\rho \cdot \sin(d\varphi), \text{ або } -p_x \cdot d\rho \cdot d\varphi,$$

якщо вважати $\sin d\varphi \cong d\varphi$.

На грані ad і bc діють сили

$$p_y \cdot \rho \cdot 1 \cdot d\varphi \text{ і } \left(p_y + \frac{dp_y}{d\rho}\cdot d\rho\right)(\rho + d\rho)\cdot 1 \cdot d\varphi.$$

Проектуючи їх на напрямок Ob і беручи

$$\cos\frac{d\varphi}{2} \cong 1,$$

дістанемо величину проекцій рівнодійної

$$p_y d\rho d\varphi + \frac{dp_y}{d\rho}\rho d\rho d\varphi,$$

якщо знехтуємо виразом

$$\frac{dp_y}{d\rho}(d\rho)^2\, d\varphi.$$

Прирівнюючи до нуля суму проекцій всіх сил на напрямок Ob, прикладених до елемента $abcd$, після скорочення на $d\rho d\varphi$ дістаємо рівняння

$$p_y + \frac{dp_y}{d\rho}\rho - p_x = 0. \tag{4.59}$$

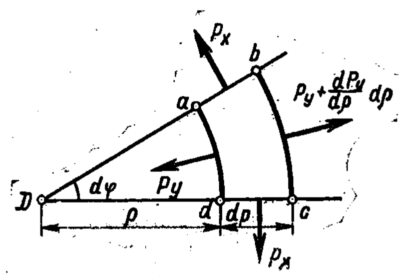

Рис. 4.3

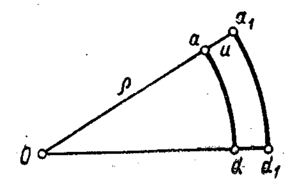

Рис. 4.4

Зауважимо, що внаслідок симетрії форми трубки і розподілу тиску, всі точки трубки при деформації переміщуються в радіальному напрямку. Якщо переміщення точки a позначити через u, то переміщення точки b виразиться як

$$u + \frac{du}{d\rho}\cdot d\rho.$$

Елемент радіуса $d\rho$ дістане подовження $\frac{du}{d\rho}d\rho$, внаслідок чого відносне подовження в радіальному напрямку буде $e_y = \frac{du}{d\rho}$. Після деформації дуга ad займе положення a_1d_1 (рис. 4.4), причому

$$\frac{a_1d_1}{ad} = \frac{Oa_1}{Oa}.$$

Отже, відносне подовження

$$e_x = \frac{a_1d_1 - ad}{ad} = \frac{Oa_1 - Oa}{Oa} = \frac{\rho + u - \rho}{\rho} = \frac{u}{\rho}.$$

Як бачимо, елемент $abcd$ розтягується в двох перпендикулярних напрямках. Для такого розтягу, як відомо, виконуються такі залежності:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2}(e_x + \sigma e_y) \text{ і } p_y = \frac{E}{1-\sigma^2}(e_y + \sigma e_x),$$

де E — модуль Юнга матеріалу трубки, σ — пуассонове відношення. Замінюючи e_x і e_y їх значеннями, дістанемо

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{u}{\rho} + \sigma\frac{du}{d\rho}\right)$$

і

$$p_y = \frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{du}{d\rho} + \sigma\frac{u}{\rho}\right).$$

Тепер знайдемо похідну

$$\frac{dp_y}{d\rho} = \frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{d^2u}{d\rho^2} + \sigma\frac{\rho\frac{du}{d\rho} - u}{\rho^2}\right).$$

Підставимо значення p_x, p_y і $dp_y/d\rho$ у рівняння (4.59). Після спрощення матимемо диференціальне рівняння

$$\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \rho\frac{du}{d\rho} - u = 0,$$

яке є окремим випадком рівняння (4.59).

Нехай

$$u = \rho^r,$$

тоді $r^2 - 1 = 0$. Звідси $r_1 = 1$, r_2 … загальним інтегралом є функція

$$u = C_1\rho + \ldots$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Для … значення знайдемо

$$\frac{du}{d\rho} = C_1 - \ldots$$

Вирази для u і $du/d\rho$ підставимо … ули для p_x і p_y:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2}\Big[C_1(1 + \ldots(1-\sigma)\Big],$$

$$p_y = \frac{E}{1-\sigma^2}\Big[C_1(1 + \ldots(1-\sigma)\Big].$$

Використовуючи для p_y грани… ви, дістанемо

$$-P = \frac{E}{1-\sigma^2}\Big[C_1(1 \ldots(1-\sigma)\Big]$$

і

$$-p = \frac{E}{1-\sigma^2}\Big[C_1(1 + \ldots(1-\sigma)\Big].$$

Звідси

$$C_1 = \frac{(1-\sigma)(\ldots P)}{E(\ldots)}$$

і

$$C_2 = \frac{(1+\sigma)(p\ldots)}{E(R_2^2\ldots)}.$$

Отже,

$$p_x = \frac{R_1^2p - R_2^2P}{R_2^2 - R_1^2} + \ldots\frac{R_1^2R_2^2}{\ldots - R_1^2)},$$

$$p_y = \frac{R_1^2p - R_2^2P}{R_2^2 - R_1^2} - \ldots\frac{R_1^2R_2^2}{\ldots R_1^2)}.$$

Напруження p_x зростає при … ні ρ і має максимум при $\rho = R_1$, а мінімум — … $= R_2$. Підставляючи значення C_1 і C_2 в (7.13), зна… формулу для переміщення:

$$u = \frac{1-\sigma}{E}\frac{R_1^2p - R_2^2P}{R_2^2 - R_1^2}\rho \ldots \frac{(p-P)R_1^2R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)\rho}.$$

Задача «Розрахунок темпер… рудникового повітря» теж зводиться до дослідження … ня Ейлера (див. Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1975.— № … 843—847).

2. *Рівняння Чебишова*

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0. \qquad (4.60)$$

Побудуємо загальний розв'язок цього рівняння для всіх $x \in (-1,\ 1)$. Застосуємо підстановку

$$t=C\int\sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}\,dx.$$

Нехай $C=-\frac{1}{n}$. Відкинувши сталу інтегрування, дістанемо $t=\arccos x$, або $x=\cos t$.

Тоді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt},$$

після чого рівняння (4.60) набере вигляду

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння є функція

$$y=C_1\cos nt+C_2\sin nt.$$

Повертаючись до початкової змінної x, матимемо

$$y=C_1\cos(n\arccos x)+C_2\sin(n\arccos x).$$

Функція $y_1=\cos n\arccos x$ при цілому n є многочленом степеня n, оскільки $\cos n\varphi$ можна записати як многочлен від $\cos\varphi$. Цей многочлен називають *многочленом Чебишова* і позначають

$$T_n(x)=\cos n\arccos x.$$

Справді,

$$\cos nt=\cos^n t-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}t\sin^2 t+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}t\sin^4 t-\ldots$$

Замінивши t на $\arccos x$, $\cos t$ — на x, і $\sin^2 t$ — на $1-x^2$, матимемо

$$\cos(n\arccos x)=x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(1-x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}(1-x^2)^2-\ldots$$

Поліноми Чебишова $T_n(x)$ ще можна визначити за формулою

$$T_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n},\quad n=1,2,\ldots$$

або за рекурентною формулою

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-\frac{1}{4}T_{n-1}(x).$$

Причому

$$T_0(x)=1,$$
$$T_1(x)=x,$$
$$T_2(x)=x^2-\frac{1}{2}.$$

Далі знаходимо, що

$$T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x,$$

$$T_4(x)=x^4-x^2+\frac{1}{8}\ \text{і т. д.}$$

Доводять, що многочлени Чебишова ортогональні на відрізку $[-1,\ 1]$ з вагою

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

оскільки виконується співвідношення

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,\quad m\neq n.$$

Многочлени Чебишова часто використовуються для наближення функцій.

4.8. Рівняння Бесселя

Рівняння Бесселя має вид

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)\,y=0, \qquad (4.61)$$

де ν — довільне стале число. До цього рівняння приходимо при дослідженні багатьох задач математичної фізики. Покажемо, що при $\nu=\frac{1}{2}$ рівняння Бесселя зводиться до рівняння з сталими коефіцієнтами та інтегрується в елементарних функціях. Рівняння при цьому має вигляд

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0. \qquad (4.62)$$

Виконаємо заміну

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}z=x^{-\frac{1}{2}}z.$$

Продиференціюємо двічі:

$$y' = x^{-\frac{1}{2}} z' - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} z,$$

$$y'' = x^{-\frac{1}{2}} z'' - x^{-\frac{3}{2}} z' + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} z.$$

Підставимо значення похідних у задане рівняння:

$$x^{\frac{3}{2}} z'' - x^{\frac{1}{2}} z' + \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} z + x^{\frac{1}{2}} z' -$$

$$- \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} z + x^{\frac{3}{2}} z - \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} z = 0.$$

Після спрощення матимемо рівняння із сталими коефіцієнтами

$$z'' + z = 0.$$

Фундаментальна система його

$$z_1 = \cos x, \; z_2 = \sin x.$$

Повертаючись до змінної y, знаходимо

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \qquad y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

тобто рівняння (4.62) має загальний розв'язок

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

У загальному випадку розв'язок рівняння (4.61) шукаємо у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \qquad (4.63)$$

Диференціюючи (4.63) двічі почленно і підставляючи в (4.61), дістаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)^2 x^{k+\rho} + (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} [(k+\rho)^2 + x^2 - \nu^2] = 0.$$

Після скорочення на x^{ρ} матимемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k [(k+\rho)^2 + x^2 - \nu^2] = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & (\rho^2 - \nu^2) a_0 = 0, \\
x^1 & [(\rho+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0, \\
x^2 & [(\rho+2)^2 - \nu^2] a_2 + a_0 = 0, \\
x^3 & [(\rho+3)^2 - \nu^2] a_3 + a_1 = 0, \\
x^4 & [(\rho+4)^2 - \nu^2] a_4 + a_2 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^k & [(\rho+k)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} = 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Коефіцієнт a_0 вважатимемо відмінним від нуля. Тоді з першого рівняння дістанемо

$$\rho = \pm \nu, \text{ або } \rho_1 = \nu, \; \rho_2 = -\nu.$$

Нехай $\rho = \nu \geqslant 0$. Тоді a_0 має довільне значення. З другого рівняння маємо $[(\nu+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0$, тобто $a_1 = 0$. З третього рівняння знаходимо

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}.$$

З четвертого рівняння $a_3 = 0$ і з пятого —

$$a_4 = -\frac{a_2}{(\nu+4)^2 - \nu^2} = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\cdot 1\cdot 2}.$$

Помічаємо, що всі коефіцієнти з непарними номерами дорівнюють нулю:

$$a_{2k+1} = 0, \; k = 0, 1, 2 \ldots$$

Коефіцієнти парного індекса мають значення

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\cdot k!}, \; k = 1, 2, \ldots$$

Для спрощення вважатимемо, що

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}, \qquad (4.64)$$

де $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція Ейлера.

Гамма-функція Ейлера $\Gamma(\alpha)$ визначена для всіх додатних значень α, а також для всіх комплексних значень з додатною дійсною частиною. Отже,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Гамма-функція має такі властивості:

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$;
2. $\Gamma(1) = 1$.

Якщо k — ціле додатне число, то

3. $\Gamma(\alpha+k+1)=(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k)\Gamma(\alpha+1)$;

4. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$

Використовуючи (4.64) і властивості Г-функції, маємо

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)\,k!\,2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}=$$

$$=\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\,k!\,\Gamma(\nu+k+1)},$$

оскільки згідно з властивістю 3

$$(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)=\Gamma(\nu+k+1).$$

Частинний розв'язок рівняння Бесселя, який позначимо через $I_\nu(x)$, матиме вигляд

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \qquad (4.65)$$

Цю функцію називають *бессельовою функцією першого роду порядку* ν.

При $\rho=-\nu$, де ν — ціле, знаходимо

$$a_{2k+1}=0,\ \ a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(-\nu+1)(-\nu+2)\dots(-\nu+k)\cdot k!}.$$

Для від'ємних α функція $\Gamma(\alpha)$ визначається інакше, але властивість $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$ зберігається. Отже, при $\rho=-\nu$, взявши сталу

$$a_0=1/2^{-\nu}\,\Gamma(-\nu+1),$$

дістанемо

$$I_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \qquad (4.66)$$

Цю функцію називають *бессельовою функцією першого роду порядку* $-\nu$, або *бессельовою функцією першого роду з від'ємним індексом.*

Неважко показати (використовуючи, наприклад, ознаку д'Аламбера), що ряд (4.65) рівномірно збіжний при всіх x, ряд (4.66) рівномірно збіжний при всіх $x\neq 0$. Ці ряди можна двічі почленно диференціювати. Отже, $I_\nu(x)$ і $I_{-\nu}(x)$— розв'язки рівняння Бесселя (4.61).

Якщо ν — не ціле число, то функції $I_\nu(x)$ і $I_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні, оскільки їх ряди починаються з різних степенів змінної x і тотожність

$$\alpha_1 I_\nu(x)+\alpha_2 I_{-\nu}(x)\equiv 0$$

можлива тільки при $\alpha_1=\alpha_2=0$. Тоді загальний розв'язок рівняння Бесселя (4.61) має вигляд

$$y(x)=C_1 I_\nu(x)+C_2 I_{-\nu}(x).$$

Слід зазначити, що при $\nu=n+\frac{1}{2}$, n — ціле, функція $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ записується через елементарні функції.

Наприклад, при $\nu=\frac{1}{2}$ маємо

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)2^{2k+\frac{1}{2}}}.$$

Проте

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)=\dots=\frac{(2k+1)(2k-1)\dots3\cdot1}{2^{k+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^{\infty}e^{-x}\,d\sqrt{x}=2\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.$$

Таким чином,

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\,1\cdot3\dots(2k-1)(2k+1)\sqrt{\pi}\,2^{k-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}\cdot2\cdot4\dots2k}{k!\,(2k+1)!\,2^k}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Отже,

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

є розв'язками, який дістали, звівши при $\nu=\frac{1}{2}$ рівняння (4.61) до рівняння із сталими коефіцієнтами.

Якщо ν є ціле число, то можна встановити лінійну залежність функцій $I_\nu(x)$ і $I_{-\nu}(x)$, а саме:

$$I_{-n}(x)=(-1)^n I_n(x),\ \ \nu \text{ — ціле.}$$

$\Gamma(\alpha)$ при від'ємних цілих α і $\alpha = 0$ перетворюється в нескінченність.

Отже, при цілому ν замість $I_{-\nu}(x)$ треба шукати інший розв'язок, який був би лінійно незалежний від $I_\nu(x)$. Для цього введемо нову функцію

$$Y_\nu(x) = \frac{I_\nu(x)\cos\nu\pi - I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \qquad (4.67)$$

вважаючи спочатку, що ν — не ціле число. Визначена таким чином функція $Y_\nu(x)$ є розв'язком рівняння (4.60) як лінійна комбінація частинних розв'язків $I_\nu(x)$ і $I_{-\nu}(x)$.

Переходячи в (4.67) до границі при умові, що ν прямує до цілого числа n, дістаємо частинний розв'язок $Y_n(x)$, лінійно незалежний від $I_\nu(x)$ і визначений і для цілих значень ν. Отже,

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n}\frac{I_\nu(x)\cos\nu\pi - I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Введену таким чином функцію $Y_n(x)$ називають *бесселевою функцією другого роду порядку* n, або *функцією Вебера*. Загальний розв'язок рівняння (4.61) при натуральному $\nu = n$ має вигляд

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Зазначимо, що функція $Y_n(x)$ не обмежена в околі точки $x = 0$.

Наприклад,

$$\pi Y_0(x) = 2I_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m},$$

де C — стала Ейлера, $C = 0{,}577\ldots$

Тому довільний розв'язок рівняння (4.61), обмежений в околі точки $x = 0$, має вигляд

$$y = C_1 I_n(x),$$

тобто при цьому $C_2 = 0$.

Зауваження

1. Рівняння

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \nu^2)y = 0,$$

де k — деяка стала, $k \neq 0$, зводиться до рівняння Бесселя

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi\frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2)\,y = 0$$

підстановкою $\xi = kx$.

Загальним розв'язком цього рівняння при ν, відмінному від цілого числа, є функція

$$y = C_1 I_\nu(\xi) + C_2 I_{-\nu}(\xi).$$

Тоді загальним розв'язком рівняння є

$$y = C_1 I_\nu(kx) + C_2 I_{-\nu}(kx).$$

При ν цілому

$$y = C_1 I_n(kx) + C_2 I_{-\nu}(kx).$$

2. Широкий клас рівнянь виду

$$x^2y'' + axy' + (b + cx^m)\,y = 0, \qquad (4.68)$$

де a, b, c, m — сталі, причому $c > 0$, $m \neq 0$, введенням нової змінної t і нової функції u

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} u, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

зводиться до рівняння Бесселя

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - \nu^2)\,u = 0,$$

де

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \ \beta = \frac{m}{2}, \ \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m},$$
$$\nu^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}.$$

При $c = 0$ або $m = 0$ рівняння (4.68) є рівнянням Ейлера.

3. ***Рівняння поздовжнього згину конічного стержня.*** Задача про поздовжній згин стержня, який має форму зрізаного конуса, закріпленого одним кінцем, і стискується силою P, приводить до дослідження рівняння Бесселя, інтегровного в тригонометричних функціях.

Диференціальне рівняння пружної лінії має вигляд

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py.$$

Нехай r і R — відповідно радіуси верхньої і нижньої основи конуса. Радіус ρ деякого перерізу S визначиться з пропорції (рис. 4.5)

$$\frac{\rho - r}{R - r} = \frac{x}{l}, \quad \text{звідки} \quad \rho = r + \frac{R-r}{l}x.$$

Момент інерції цього перерізу відносно його нейтральної осі виражається формулою

$$I = \frac{\pi r^4}{4}\left(1 + \frac{x(R-r)}{lr}\right)^4.$$

Вважаючи $\frac{R-r}{r} = \beta$ і враховуючи, що $\frac{\pi r^4}{4} = I_0$, де I_0 є момент інерції верхнього перерізу, маємо

$$I = I_0\left(1 + \frac{\beta x}{l}\right)^4.$$

Запишемо граничні умови:

1) $y = 0$ при $x = 0$;

2) $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = l$.

Отже, рівняння пружньої лінії набирає вигляду

$$EI_0 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 + \frac{\beta x}{l}\right)^{-4} Py = 0.$$

Нехай $1 + \frac{\beta x}{l} = -\frac{1}{t}$. Тоді

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \alpha^2 ty = 0,$$

де $\alpha^2 = Pl^2/EI_0\beta^2$. Виконавши заміну $y = zt^{-\frac{1}{2}}$, дістанемо рівняння Бесселя

$$t^2 \frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + \left(\alpha^2 t^2 - \frac{1}{4}\right)z = 0.$$

Запишемо його так:

$$(t\alpha)^2 \frac{d^2z}{d(t\alpha)^2} + (t\alpha)\frac{dz}{d(t\alpha)} + \left(t^2\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)z = 0.$$

Оскільки $n = \frac{1}{2}$, то маємо загальний інтеграл

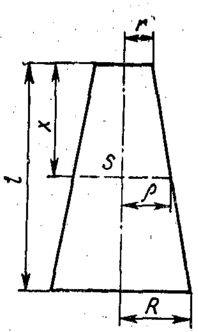

Рис. 4.5

$$z = C_1 I_{1/2}(\alpha t) + C_2 I_{-1/2}(\alpha t),$$

або

$$z = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha t}}(C_1 \sin\alpha t + C_2\cos\alpha t).$$

Повертаючись до змінних x і y, дістанемо

$$y = \left(1 + \frac{\beta x}{l}\right)\left(A_1 \sin\frac{\alpha l}{l+\beta x} + \right.$$

$$\left. + A_2\cos\frac{\alpha l}{l+\beta x}\right),$$

де $A_1 = -C_1\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}$ і $A_2 = C_2\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}$. Нагадаємо, що при $x = 0$ ордината $y = 0$. Тому

$$A_1 \sin\alpha + A_2\cos\alpha = 0, \quad A_2 = -A_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

Отже,

$$y = -\frac{l+\beta x}{l\cos\alpha} A_1 \sin\frac{\alpha\beta x}{\alpha + \beta x}.$$

Тепер знайдемо похідну

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A_1\beta}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{l}\sin\frac{\alpha\beta x}{l+\beta x} + \frac{\alpha}{l+\beta x}\cos\frac{\alpha\beta x}{l+\beta x}\right),$$

яка дорівнює нулю при $x = l$. Складемо рівняння

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha\beta}{1+\beta} = -\frac{\alpha}{1+\beta}.$$

Звідси при заданому β знаходимо α. Критична сила

$$P = \alpha^2\beta^2 EI_0/l^2.$$

Якщо, наприклад, $R = 2r$, то $\beta = 1$. З рівняння $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}$ маємо $\alpha = 4{,}06$. Критична сила

$$P = 4{,}06^2 EI_0/l^2.$$

4.9. Поняття про операторний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Для похідних порядка k введемо позначення

$$\frac{d^ky}{dx^k} = D^k y,$$

тобто операцію знаходження похідної позначено буквою D перед функцією, похідну якої шукаємо.

Наприклад, перед функцією

$$D\sin x = \cos x, \quad Df(x) = f'(x).$$

Символ D теж називають *диференціальним оператором*. Вираз $Df(x) + af(x)$ можна записати так: $(D + a)f(x)$, причому це символічний вираз, а не звичайний добуток. Символ $D + a$ — це лінійний диференціальний оператор першого порядку. Наприклад,

$$(D + 2)x^2 = Dx^2 + 2x^2 = 2x + 2x^2;$$

$$(D - 1)e^x = De^x - e^x = e^x - e^x = 0.$$

Вираз $D^2 + 3D + 2$ — лінійний диференціальний оператор другого порядку і т. д.

Отже, рівняння

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x) \qquad (4.69)$$

можна записати так:

$$D^n y + p_1 D^{n-1} y + \ldots + p_n y = f(x),$$

або

$$(D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_{n-1} D + p_n) y = f(x).$$

Вираз

$$D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_{n-1} D + p_n$$

є лінійний диференціальний оператор n-го порядку, який називають *операторним многочленом*. Позначають його через $F(D)$:

$$F(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_{n-1} D + p_n. \qquad (4.70)$$

Тоді рівняння (4.69) можна записати так:

$$F(D) y = f(x).$$

Отже, операторний многочлен $F(D)$ — це ліва частина характеристичного рівняння, де замість k стоїть буква D Легко довести справедливість таких тотожностей:

1°. $F(D) e^{kx} \equiv e^{kx} F(k)$,

2°. $F(D^2) \sin ax \equiv \sin ax\, F(-a^2)$,

3°. $F(D^2) \cos ax \equiv \cos ax\, F(-a^2)$,

4°. $F(D^2) e^{kx} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k) v(x)$.

Справді,

1°. $F(D) e^{kx} = (D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_n) e^{kx} = e^{kx}(k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_n) = e^{kx} F(k)$.

2°. $F(D^2) \sin ax = (D^{2n} + p_1 D^{2n-2} + \ldots + p_n) \sin ax = [(-a^2)^n + p_1 (-a^2)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(-a^2) + p_n] \sin ax = \sin ax\, F(-a^2)$.

Тотожність 3° доводиться аналогічно.

4°. $F(D) e^{kx} v(x) = \sum\limits_{r=0}^{n} p_{n-r} D^r (e^{kx} v(x)) = e^{kx} \sum\limits_{r=0}^{n} p_{n-r} [k^r v + r k^{r-1} Dv + \frac{r(r-1)}{2!} k^{r-2} D^2 v + \ldots + D^r v] = e^{kx} \sum\limits_{r=0}^{n} p_{n-r} \times (D+k)^r v = e^{kx} F(D+k) v(x)$, $(p_0 \equiv 1)$.

Сумою двох операторів $F_1(D)$ і $F_2(D)$ називається оператор $[F_1(D) + F_2(D)]$, дія якого на деяку функцію $f(x)$ визначається рівністю

$$[F_1(D) + F_2(D)] f(x) = F_1(D) f(x) + F_2(D) f(x).$$

З означення випливає, що

$$\sum_{r=0}^{n} p_{n-r} D^r + \sum_{r=0}^{n} q_{n-r} D^r = \sum_{r=0}^{n} (p_{n-r} + q_{n-r}) D^r,$$

оскільки дія лівої і правої частин цієї рівності на деяку n раз диференційовану функцію $f(x)$ приводить до одного й того самого результату, тобто правило додавання операторних многочленів не відрізняється від правила додавання звичайних (не операторних) многочленів.

Добутком двох операторів $F_1(D) \cdot F_2(D)$ називається оператор, дія якого на деяку достатнє число раз диференційовану функцію $f(x)$ визначається рівністю

$$F_1(D) F_2(D) f(x) = F_1(D) [F_2(D) f(x)],$$

тобто на функцію $f(x)$ діє спочатку правий множник, а потім на результат діє лівий множник. Зазначимо, що правило множення операторних многочленів не відрізняється від правила множення звичайних многочленів.

Справді,

$$\sum_{r=0}^{n} p_{n-r} D^r \sum_{s=0}^{m} q_{m-s} D^s = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} p_{n-r} q_{m-s} D^{r+s},$$

оскільки

$$\sum_{r=0}^{n} p_{n-r} D^r \sum_{s=0}^{m} q_{m-s} D^s f(x) = \sum_{r=0}^{n} p_{n-r} D^r [\sum_{s=0}^{m} q_{m-s} f^{(s)}(x)] = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} p_{n-r} q_{m-s} f^{(r+s)}(x),$$

що збігається з результатом дії оператора:

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} p_{n-r} q_{m-s} D^{r+s}$$

на $f(x)$.

З викладеного випливає комутативність множення операторів

$$F_1(D) F_2(D) = F_2(D) F_1(D).$$

Справедливість дистрибутивного закону

$$F(D)[F_1(D) + F_2(D)] = F(D) F_1(D) + F(D) F_2(D)$$

безпосередньо випливає з правила диференціювання суми.

Нехай відомо корені операторного многочлена (4.70) D_1, $D_2, \dots, D_n$, причому вони всі дійсні. Тоді його можна записати у вигляді розкладу на множники:

$$F(D) = (D - D_1)(D - D_2) \dots (D - D_n).$$

Припустимо, що алгебраїчний многочлен має комплексний корінь $D_k = a + bi$. Тоді оскільки коефіцієнти цього многочлена є дійсні числа, то існує ще корінь $D_{k+1} = a - bi$. Добуток $(D - D_k)(D - D_{k+1})$, який дорівнює $(D - a)^2 + b^2$, є многочленом другого степеня з дійсними коефіцієнтами. Позначимо його через

$$D^2 + \alpha D + \beta.$$

Отже, в загальному випадку, коли відомо корені операторного многочлена (4.70), його можна символічно розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами не вище другого порядку, тобто

$$F(D)y = (D - D_1)(D - D_2) \dots (D - D_m) \times \\ \times (D^2 + \alpha_1 D + \beta_1) \dots (D^2 + \alpha_r D + \beta_r)\, y.$$

Нехай, наприклад, маємо диференціальний вираз $y''' + y$, тобто $(D^3 + 1)y$. Оскільки алгебраїчний многочлен $D^3 + 1$ можна записати у вигляді добутку $(D^2 - D + 1) \times (D + 1)$, то диференціальний вираз $(D^3 + 1)y$ можна записати так:

$$(D^2 - D + 1)(D + 1)\, y.$$

Справді,

$$(D + 1)\, y = y' + y; \quad (D^2 - D + 1)(D + 1)\, y = \\ = (D^2 - D + 1)(y' + y) = (y' + y)'' - (y' + y)' + \\ + (y' + y) = y''' + y.$$

При розкладанні многочлена на множники у випадку кратних коренів дістанемо в символічному розкладі рівні множники. Так, нехай маємо диференціальний вираз

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y',$$

або

$$(D^4 - 3D^3 + 3D^2 - D)\, y.$$

Оскільки

$$D^4 - 3D^3 + 3D^2 - D = D(D - 1)(D - 1)(D - 1),$$

то

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = D(D - 1)(D - 1)(D - 1)\, y,$$

або

$$D(D - 1)^3\, y.$$

Визначимо тепер оператор

$$\frac{1}{F(D)}.$$

Результатом його дії на деяку неперервну функцію $f(x)$ є розв'язок рівняння (4.69):

$$F(D)\, y = f(x), \quad y = \frac{1}{F(D)} f(x). \tag{4.71}$$

Отже,

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)} f(x)\right] \equiv f(x). \tag{4.72}$$

Можна було б припустити, що $\frac{1}{F(D)} f(x)$ є розв'язком рівняння (4.71), визначеного деякими конкретними, наприклад нульовими початковими умовами, але при цьому краще вважати, що $\frac{1}{F(D)} f(x)$ є одним з розв'язків рівняння (4.71) і відповідно діє оператор $\frac{1}{F(D)}$ на деяку функцію $f(x)$, визначену лише з точністю до доданка, який дорівнює розв'язку відповідного однорідного рівняння. При такому припущенні справджується рівність

$$\frac{1}{F(D)}[F(D)\, f(x)] = f(x). \tag{4.73}$$

Оскільки $f(x)$ є, очевидно, розв'язком рівняння

$$F(D) y = F(D) f(x).$$

Добуток операторів $\Phi(D)$ на $\frac{1}{F(D)}$ визначається рівністю

$$\Phi(D) \frac{1}{F(D)} f(x) = \Phi(D)\left[\frac{1}{F(D)} f(x)\right].$$

Аналогічно

$$\frac{1}{F(D)} \Phi(D)\, f(x) = \frac{1}{F(D)} [\Phi(D)\, f(x)].$$

Тому в формулах (4.72) і (4.73) дужки можна опустити.

Зауважимо ще, що

$$\frac{1}{D^r} f(x) = \underbrace{\int\int \cdots \int}_{r} f(x)\, dx^r,$$

бо $\frac{1}{D^r} f(x)$ є за означенням оператора $\frac{1}{F(D)}$ розв'язком рівняння

$$D^r y = f(x).$$

Розглянемо деякі властивості оператора $\frac{1}{F(D)}$.

1°. $\frac{1}{F(D)}kf(x) = k\frac{1}{F(D)}f(x)$,

де k — сталий множник. Справді,

$$F(D)k\frac{1}{F(D)}f(x) = kF(D)\frac{1}{F(D)}f(x) = kf(x).$$

2°. $\frac{1}{F(D)}e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)}$, якщо $F(k) \neq 0$. Справді, $\frac{e^{kx}}{F(k)}$ є розв'язком рівняння $F(D)y = e^{kx}$, оскільки, згідно з властивістю 1°,

$$F(D) = \frac{e^{kx}}{F(k)} \equiv \frac{F(k)e^{kx}}{F(k)} \equiv e^{kx}.$$

3°. $\frac{1}{F(D^2)}\sin ax = \frac{\sin ax}{F(-a^2)}$, якщо $F(-a^2) \neq 0$. Справді, $\frac{\sin ax}{F(-a^2)}$ є розв'язком рівняння $F(D^2)y = \sin ax$, оскільки, згідно з властивістю 2°,

$$F(D^2)\frac{\sin ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)}F(-a^2)\sin ax \equiv \sin ax.$$

4°. $\frac{1}{F(D^2)}\cos ax \equiv \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$, якщо $F(-a^2) \neq 0$.

5°. $\frac{1}{F(D)}e^{kx}v(x) = e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}v(x)$.

Справді, $e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}v(x)$ є розв'язком рівняння $F(D)y = e^{kx}v(x)$, оскільки, згідно з властивістю 4°,

$$F(D)e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}v(x) \equiv e^{kx}F(D+k)\frac{1}{F(D+k)}v(x) \equiv e^{kx}v(x).$$

6°. $\frac{1}{F(D)}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)}f_1(x) + \frac{1}{F(D)}f_2(x)$.

Ця властивість є наслідком принципу суперпозиції.

7°. $\frac{1}{F_1(D)\cdot F_2(D)}f(x) = \frac{1}{F_1(D)}\cdot\frac{1}{F_2(D)}f(x)$,

тобто

$$y = \frac{1}{F_1(D)}\left[\frac{1}{F_2(D)}f(x)\right]$$

є розв'язком рівняння

$$F_1(D)F_2(D)y = f(x).$$

Справді, підставивши сюди значення y, матимемо

$$F_2(D)F_1(D)\frac{1}{F_1(D)}\left[\frac{1}{F_2(D)}f(x)\right] \equiv F_2(D)\frac{1}{F_2(D)}f(x) \equiv f(x).$$

Розглянемо однорідне рівняння, відповідне рівнянню (4.69), тобто

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = 0, \quad (4.74)$$

або

$$\mathbf{L}[y] = 0.$$

Застосувавши операторний многочлен, ліву частину рівняння (4.74) можна записати так:

$$\mathbf{L}[y] = F(D)y. \quad (4.75)$$

Поклавши $y = e^{kx}$, маємо, згідно з властивістю 1°,

$$\mathbf{L}[e^{kx}] = F(D)e^{kx} = e^{kx}F(k).$$

Звідси зрозуміло, що коли у вираз $\mathbf{L}[e^{kx}]$ підставимо замість k корені рівняння $F(k) = 0$, то матимемо тотожні нулі: тому e^{k_ix} є частинними розв'язками рівняння (4.74) при $F(k_i) = 0$. Тепер в (4.75), згідно з властивістю 4°, маємо

$$\mathbf{L}[e^{kx}v] = F(D)e^{kx}v = e^{kx}F(D+k)v.$$

Отже,

$$\mathbf{L}[e^{kx}v] = e^{kx}F(D+k)v,$$

або, розвиваючи у ряд Тейлора $F(D+k)$ за степенями D, знаходимо

$$\mathbf{L}[e^{kx}v] =$$

$$= e^{kx}\left[F(k)v + F'(k)Dv + \frac{F''(k)}{2!}D^2v + \ldots + \frac{F^{(n)}(k)}{n!}D^nv\right] =$$

$$= e^{kx}\left[F(k)v + F'(k)v' + \frac{F''(k)}{2!}v'' + \ldots + \frac{F^{(m-1)}(k)}{(m-1)!}v^{(m-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{F^{(m)}(k)}{m!}v^{(m)} + \ldots + \frac{F^{(n)}(k)}{n!}v^{(n)}\right].$$

Якщо k_1 є коренем характеристичного рівняння кратності m, то

$$F(k_1) = F'(k_1) = \ldots = F^{(m-1)}(k_1) = 0,$$

а тому

$$\mathbf{L}[e^{k_1x}v] = e^{k_1x}\left[\frac{F^{(m)}(k_1)}{m!}v^m + \ldots + \frac{F^{(n)}(k_1)}{n!}v^{(n)}\right].$$

Вільну функцію v підберемо так, щоб права частина останньої рівності дорівнювала нулю. Тоді

$$y = e^{k_1x}v$$

є розв'язком рівняння (4.74).

Так буде тоді, коли за v візьмемо многочлен з довільними коефіцієнтами степеня $m-1$, тобто

$$v = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}.$$

Отже, дістали частинний розв'язок, що відповідає кореню k_1 кратності m:

$$y_1 = e^{k_1x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}).$$

Нехай характеристичне рівняння має корені

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

Тоді

$$F(k) = (k-k_1)(k-k_2)\ldots(k-k_n)$$

і

$$\mathbf{L}[y] = (D-k_1)(D-k_2)\ldots(D-k_n)\,y = 0,$$

де символічні множники можна написати в будь-якому порядку.

Це рівняння справджується при

$(D-k_n)\,y = 0$, або $(D-k_{n-1})\,y = 0, \ldots$, або $(D-k_1)\,y = 0$,

тобто якщо y задовольняє будь-яке з рівнянь

$$\frac{dy}{dx} - k_i\,y = 0, \text{ звідки } y = C_i e^{k_i x}.$$

Якщо додамо ці n розв'язків, то дістанемо загальний інтеграл. Якщо m коренів рівні між собою,

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m,$$

то відповідні m множників теж рівні, і рівняння справджується при

$$(D-k_1)^m\,y = 0.$$

Отже, не лише інтеграл $(D-k_1)y = 0$ задовольняє рівняння, а й інтеграл рівняння

$$(D-k_1)\,y = C_1 e^{k_1x}, \tag{4.76}$$

бо коли виконати над двома частинами рівності операцію $(D-k_1)$, то дістанемо

$$(D-k_1)^2\,y = (D-k_1)\,C_1 e^{k_1x} = 0.$$

Проте (4.76) є лінійне неоднорідне рівняння першого порядку і його інтегралом є функція

$$y = e^{k_1x}(C_1x + C_2).$$

Якщо $m > 2$, то рівняння задовольняється значеннями y, що утотожнюють символ

$$(D-k_1)^3y = 0$$

або рівняння

$$(D-k_1)\,y = e^{k_1x}(C_1x + C_2).$$

Цей інтеграл

$$y = e^{k_1x}\left(\frac{C_1x^2}{2!} + C_2x + C_3\right)$$

і т. д.

Схема знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння (4.69) така:

1) записати диференціальний вираз лівої частини $F(D)$ у вигляді розкладу на множники;

2) розв'язати послідовно ряд рівнянь.

Для цього позначимо

$$z_1 = (D-D_2)\ldots(D-D_m)(D^2+\alpha_1D+ \\ +\beta_1)\ldots(D^2+\alpha_rD+\beta_r)$$

і розв'яжемо рівняння

$$(D-D_1)z_1 = f(x).$$

Тепер позначимо

$$z_2 = (D-D_3)\ldots(D-D_m)(D^2+\alpha_1D+\beta_1)\ldots \\ \ldots(D^2+\alpha_rD+\beta_r)$$

і розв'яжемо рівняння

$$(D-D_2)z_2 = z_1.$$

Таким чином розв'язуватимемо послідовно рівняння:

$$(D-D_3)\,z_3 = z_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(D-D_m)\,z_m = z_{m-1}$$
$$(D^2+\alpha_1D+\beta_1)\,z_{m+2} = z_m$$
$$(D^2+\alpha_2D+\beta_2)\,z_{m+4} = z_{m+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(D^2+\alpha_rD+\beta_r)\,z_n = z_{n-2}.$$

Загальний розв'язок останнього рівняння є одночасно й загальним розв'язком заданого рівняння.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = e^x.$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння в символічній формі

$$(D^2+3D+2)\,y = e^x, \text{ або } (D+1)(D+2)\,y = e^x.$$

Нехай $(D+2)\,y = z_1$, тоді

$$(D+1)\,z_1 = e^x, \text{ тобто } z_1' + z_1 = e^x.$$

Для цього рівняння

$$z_1 = C_1e^{-x} + \frac{1}{2}e^x.$$

Далі маємо

$$(D+2)\,y = C_1e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x},$$

тобто

$$y' + 2y = C_1e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}.$$

Тепер знаходимо загальний інтеграл

$$y = C_2e^{-2x} + C_1e^{-x} + \frac{1}{6}e^{x}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді

$$(D+1)^3y = 0,$$

або

$$(D+1)(D+1)^2y = 0.$$

Позначимо

$$(D+1)^2y = z_1,$$

тоді

$$(D+1)z_1 = 0,$$

або $z_1' + z_1 = 0$, звідки $z_1 = C_1e^{-x}$.

Далі маємо

$$(D+1)^2\,y = C_1e^{-x},\ \text{тобто}\ (D+1)(D+1)\,y = C_1e^{-x}.$$

Нехай

$$(D+1)y = z_2.$$

Дістанемо рівняння

$$(D+1)\,z_2 = C_1e^{-x},\ \text{або}\ z_2' + z_2 = C_1e^{-x},$$

звідки

$$z_2 = C_1xe^{-x} + C_2e^{-x}.$$

Тепер знаходимо

$$(D+1)\,y = C_1xe^{-x} + C_2e^{-x},\ \text{тобто}\ y' + y = C_1xe^{-x} + C_2e^{-x},$$

звідки

$$y = e^{-x}(C_1x^2 + C_2x + C_3).$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{\text{IV}} - y = x.$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння так:

$$(D^4 - 1)y = x$$

або

$$(D-1)(D+1)(D^2+1)y = x.$$

Нехай $z_1 = (D+1)(D^2+1)$. Тоді

$$(D-1)\,z_1 = x,\ \text{або}\ z_1' - z_1 = x,$$

звідки

$$z_1 = c_1e^{x} - x - 1.$$

Розв'язуємо рівняння

$$(D+1)\,z_2 = C_1e^{x} - x - 1,$$

або

$$z_2'' + z_2 = C_1e^{x} - x - 1.$$

Маємо

$$z_2 = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - x.$$

Розв'язуємо рівняння

$$(D^2+1)\,y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - x,$$

тобто

$$y'' + y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - x.$$

Розв'язок цього рівняння

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x$$

є загальним розв'язком заданого рівняння.

Наведемо приклади знаходження частинних розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами операторним методом.

Приклади

1. $y'' + 4y = e^{x}$, або $(D^2+4)\,y = e^{x}$. За властивістю 2° оператора $\frac{1}{F(D)}$ маємо

$$y = \frac{1}{D^2+4}e^{x} = \frac{1}{1^2+4}e^{x} = \frac{1}{5}e^{x}.$$

2. $y^{\text{IV}} + y = 2\cos 3x$, або $(D^4+1)\,y = 2\cos 3x$.

За властивістю 4°

$$y = \frac{1}{D^4+1}2\cos 3x = \frac{2\cos 3x}{(-9)^2+1} = \frac{1}{41}\cos 3x.$$

3. $y'' + 9y = 5\sin x$, або $(D^2+9)\,y = 5\sin x$.

За властивістю 3°

$$y = \frac{1}{D^2+9}5\sin x = \frac{5\sin x}{-1+9} = \frac{5}{8}\sin x.$$

4. $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x}$, або $(D-2)^2y = x^2e^{2x}$. Маємо

$$y = \frac{1}{(D-2)^2}e^{2x}x^2 = e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2 = e^{2x}\frac{x^4}{12}.$$

5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$, або $(D-1)^3\,y = e^{x}$. Маємо

$$y = \frac{1}{(D-1)^3}e^{x}.$$

$F(k) = F(1) = 0$, а тому замість властивості 2° (4.70) застосуємо властивість 5°, розглядаючи e^{x} як добуток $1 \cdot e^{x}$:

$$y = \frac{1}{(D-1)^3}e^{x}\cdot 1 = e^{x}\frac{1}{D^3}\cdot 1 = e^{x}\frac{x^3}{6}.$$

6. $y''' - y = \sin x$, $(D^3 - 1)\, y = \sin x$.
Маємо

$$y = \frac{1}{D^3 - 1}\sin x.$$

Оскільки оператор містить непарні степені D, то застосувати властивість 4° неможливо. Тому замість початкового рівняння розглянемо рівняння $(D^3 - 1)y = e^{ix}$, або

$$(D^3 - 1)y = \cos x + i\sin x.$$

Уявна частина розв'язку цього рівняння є розв'язком початкового рівняння:

$$y = \frac{1}{D^3 - 1}e^{ix} = \frac{e^{ix}}{i^3 - 1} = \frac{-e^{ix}}{1 + i} = \frac{(-1 + i)(\cos x + i\sin x)}{2} =$$
$$= -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{i}{2}(\cos x - \sin x).$$

Уявна частина

$$y = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$$

є розв'язком заданого рівняння.

7. $y'' + y = \cos x$, $(D^2 + 1)y = \cos x$.
Маємо

$$y = \frac{1}{D^2 + 1}\cos x.$$

Властивість 4° використати не можна, оскільки $F(-a^2) = 0$, тому розглянемо рівняння

$$y'' + y = e^{ix}, \text{ або } y'' + y = \cos x + i\sin x.$$

Взявши дійсну частину його розв'язку

$$(D^2 + 1)\, y = e^{ix},\ y = \frac{1}{D^2 + 1}e^{ix} = \frac{1}{D - i}\cdot\frac{1}{D + i}e^{ix} =$$
$$= \frac{1}{D - i}\,\frac{e^{ix}}{2i} = \frac{e^{ix}}{2i}\,\frac{1}{D}\cdot 1 = \frac{e^{ix}}{2i}\,x =$$
$$= \frac{x(\cos x + i\sin x)}{2i},$$

знайдемо шуканий розв'язок

$$y = \frac{1}{2}x\sin x.$$

8. $y^{\mathrm{IV}} - y = e^x$, або $(D^4 - 1)\, y = e^x$.
Маємо

$$y = \frac{1}{D^4 - 1}e^x = \frac{1}{D - 1}\,\frac{1}{(D + 1)(D^2 + 1)}e^x =$$
$$= \frac{1}{D - 1}\,\frac{e^x}{4} = \frac{1}{4}e^x\frac{1}{D}\cdot 1 = \frac{1}{4}xe^x.$$

Розглянемо, як діє оператор $\frac{1}{F(D)}$ на многочлен

$$M_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m. \qquad (4.77)$$

Формально поділимо 1 на многочлен

$$F(D) = p_n + p_{n-1}D + \ldots + p_0D^n,\ p_n \neq 0,$$

записаний за зростаючими степенями D, згідно з правилом ділення звичайних (не операторних) многочленів. Процес ділення закінчимо тоді, коли в частці дістанемо операторний многочлен степеня m:

$$q_0 + q_1D + \ldots + q_mD^m = Q_m(D).$$

Тоді залишком є многочлен

$$R(D) = C_{m+1}D^{m+1} + C_{m+2}D^{m+2} + \ldots + C_{m+n}D^{m+n},$$

що містить оператор D степеня не нижче $m + 1$. Відповідно до залежності між діленим, дільником, часткою і остачею матимемо

$$F(D)\,Q_m(D) + R(D) \equiv 1. \qquad (4.78)$$

Ця тотожність справджується для звичайних (не операторних) многочленів, але оскільки правило додавання і множення операторних многочленів не відрізняється від правил додавання і множення звичайних многочленів, то (4.78) справджується й для операторних многочленів. Діючи правою і лівою частинами (4.78) на многочлен (4.77), знаходимо

$$[F(D)\,Q_m(D) + R(D)](A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m) \equiv$$
$$\equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Беручи до уваги, що

$$R(D)(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m) \equiv 0,$$

бо $R(D)$ містить D в степені не нижче $m + 1$, маємо

$$F(D)\,[Q_m(D)(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)] \equiv$$
$$\equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

тобто $Q_m(D)(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)$ є розв'язком рівняння

$$F(D)\,y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Отже,

$$\frac{1}{F(D)}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m) =$$
$$= Q_m(D)(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m).$$

Продовжимо розгляд прикладів.

9. $y'' + y = x^2 - x + 2$, $(D^2 + 1)y = x^2 - x + 2$, маємо

$$y = \frac{1}{D^2 + 1}(x^2 - x + 2).$$

Поділивши 1 на $1+D^2$, дістанемо $Q_2 = 1 - D^2$. Отже,

$$y = (1 - D^2)(x^2 - x + 2) = x^2 - x.$$

10. $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}$, $(D^2 + 2D + 2)y = x^2e^{-x}$.
Маємо

$$y = \frac{1}{D^2+2D+2}x^2e^{-x} = e^{-x}\frac{1}{D^2+1}x^2 = $$
$$= e^{-x}(1-D^2)x^2 = e^{-x}(x^2-2).$$

11. $y'' + y = x\cos x$, $(D^2+1)y = x\cos x$.
Перейдемо до рівняння

$$(D^2+1)y = xe^{ix}.$$

Знайдемо його розв'язок

$$y = \frac{1}{D^2+1}xe^{ix} = e^{ix}\frac{1}{D(D+2i)}x = e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2i}+\frac{D}{4}\right)x =$$
$$= e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{x}{2i}+\frac{1}{4}\right) = e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i}+\frac{x}{4}\right) =$$
$$= (\cos x + i\sin x)\left(\frac{x^2}{4i}+\frac{x}{4}\right).$$

Дійсна частина цього розв'язку

$$y = \frac{1}{4}x^2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x$$

і є шуканим розв'язком заданого рівняння.

Цей приклад показує, як треба діяти оператором $\frac{1}{F(D)}$ на многочлен, якщо $p_n = 0$. Записавши $F(D)$ у вигляді $D^r\Phi(D)$, де вільний член многочлена $\Phi(D)$ відмінний від нуля, діємо на многочлен спочатку оператором $\frac{1}{\Phi(D)}$, а потім оператором $\frac{1}{D^r}$.

12. Задано рівняння Ейлера

$$x^2y'' - xy' + y = x\ln^3 x.$$

Знайдемо розв'язок однорідного рівняння у вигляді $y = x^r$.
Маємо

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

звідки

$$r_{1,2} = 1.$$

Отже, загальним розв'язком однорідного рівняння є

$$u = (C_1 + C_2\ln x)x.$$

Підстановкою $x = e^t$ перетворимо задане рівняння в рівняння із сталими коефіцієнтами

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = t^3e^t.$$

Операторним методом знайдемо частинний розв'язок перетвореного рівняння:

$$v = \frac{1}{(D-1)^2}e^t t^3 = e^t\frac{1}{D^2}t^3 = \frac{e^t t^5}{20},\quad v = \frac{x\ln^5 x}{20}.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння Ейлера має вигляд

$$y = \left(C_1 + C_2\ln x + \frac{\ln^5 x}{20}\right)x.$$

Розділ 5

СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Основні поняття й означення

Система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку має вид

$$F_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_n) = 0; \tag{5.1}$$

де

$$i = 1, 2, \ldots, n;\ \dot{} = d/dt,$$
$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t) - \tag{5.2}$$

невідомі функції.

Розв'язком системи (5.1) називають довільну впорядковану сукупність функцій (5.2), що перетворює кожне рівняння системи (5.1) у тотожність.

Якщо система (5.1) допускає розв'язність всіх рівнянь відносно похідних, то дістаємо систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \ldots y_n); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{5.3}$$

яку називають *нормальною*.

Для цієї системи задача Коші (початкова задача) формулюється так:

знайти невідомі функції (5.2), що задовольняють систему рівнянь (5.3) і задані початкові умови при $t = t_0$:

$$y_1(t_0) = y_{10},\ y_2(t_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(t_0) = y_{n0}. \tag{5.4}$$

Ці умови є переліком числових значень y_{i0} всіх шуканих функцій, яких вони набувають при деякому числовому значенні t_0 аргументу t.

Для системи виконується теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

ТЕОРЕМА 5.1. (Коші). *Нехай виконуються такі умови:*

1) *функції* $f_i(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ *неперервні і обмежені* ($|f_i| \leqslant A$), *в області*

$$G = \{(t, y_1, \ldots, y_n) / |t - t_0| \leqslant a, \ |y_i - y_{i0}| \leqslant b, \ i = \overline{1, n}\};$$

2) *в області* G *виконується умова Ліпшиця із сталою* L, *тобто для всіх* $(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ *і* $(t, y_1, \ldots, y_n)$ *з* G *виконується нерівність*

$$|f_i(t, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n) - f_i(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} |\bar{y}_k - y_k|,$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Тоді система (5.3) з початковими умовами (5.4) має і притому єдиний розв'язок для $|t - t_0| < \alpha$, *де* $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{A}\right)$.

Зауваження. Умова Ліпшіца виконується завжди, коли функції f_i мають в області G обмежені частинні похідні по y_k, тобто коли

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_k} f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \right| \leqslant M, \ i, k = \overline{1, n}.$$

Якщо функції f_i не залежать явно від незалежної змінної t, то система (5.3) має вигляд

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, \ldots, y_n) \ (i = \overline{1, n}), \tag{5.5}$$

і її називають *автономною нормальною системою.*

Якщо ввести в n-вимірному просторі вектори

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)), \quad \mathbf{y}_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0}),$$
$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n)),$$

то систему (5.3) можна записати так:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}), \tag{5.6}$$

а початкові умови (5.4) —так:

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{5.7}$$

Автономна система тепер набирає вигляду

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{F} = (f_1(\mathbf{y}), \ldots, f_n(\mathbf{y})), \tag{5.8}$$

і її можна інтерпретувати так: у кожній точці $(y_1, \ldots, y_n)$ деякої множини n-вимірного простору визначено вектор

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = (f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n)).$$

Цим визначено на даній множині поле векторів.

Розв'язок $\mathbf{y}(t)$ описує визначену траєкторію руху точки в n-вимірному просторі, причому вектор швидкості під час її проходження через точку $(y_1, \ldots, y_n)$ збігається з $\mathbf{F}(\mathbf{y})$.

Простір множини точок $(y_1, \ldots, y_n)$, в якому інтерпретується розв'язок автономної системи (5.8) як траєкторії, називають *фазовим простором системи*; траєкторії $\mathbf{y}(t)$ називають *фазовими траєкторіями*, а вектори $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ — *фазовими швидкостями.*

5.2. Інтегрування нормальної системи методом виключення

Цей метод полягає в тому, що нормальну систему (5.3) послідовно, виключаючи невідомі функції, зводять до рівнянь n-го порядку відносно однієї невідомої функції, наприклад y_1. Інтегрування таких рівнянь було вже розглянуто. Знаючи y_1, послідовно знаходять всі інші невідомі функції: $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Отже, нехай маємо нормальну систему (5.3). Диференціюємо перше рівняння по t:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt}.$$

Замінимо похідні $\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n$ їх виразами $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в інших рівнянь системи (5.3). Тоді дістанемо рівняння

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_2(t, y_1, \ldots, y_n).$$

Диференціюючи це рівняння і виконуючи ту саму процедуру, що й раніше, знаходимо

$$\frac{d^3 y_1}{dt^3} = F_3(t, y_1, \ldots, y_n).$$

Продовжуючи далі, дістанемо, нарешті, рівняння

$$y_1^{(n)} = F_n(t, y_1, \ldots, y_n).$$

Отже, матимемо таку систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \\ \ddot{y}_1 = F_2(t, y_1, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)} = F_n(t, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{5.9}$$

З перших $n-1$ рівнянь цієї системи знайдемо $y_2, \ldots, y_n$, виразивши їх через $t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Підставляючи ці вирази в останнє рівняння системи (5.9), дістанемо рівняння n-го порядку для визначення y_1:

$$y_1^{(n)} = \Phi(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n-1)}). \tag{5.11}$$

Звідси, інтегруючи, знайдемо y_1:

$$y_1 = \Psi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Диференціюючи цю функцію $n-1$ раз, знайдемо похідні $\dot{y}_1, \ddot{y}_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$ як функції від $t, C_1, \ldots, C_n$. Підставляючи ці функції у вирази (5.10) для $y_2, y_3, \ldots, y_n$, дістанемо невідомі функції:

$$\begin{aligned} y_2 &= \Psi_2(t, C_1, \ldots, C_n); \\ y_3 &= \Psi_3(t, C_1, \ldots, C_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \Psi_n(t, C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Зауваження. Якщо нормальна система (5.3) лінійна відносно невідомих функцій, то й рівняння (5.11) теж буде лінійне.

Приклад. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 + t, \\ \dot{y}_2 = -4y_1 - 3y_2 + 2t \end{cases} \tag{5.12}$$

при початкових умовах

$$y_1(t)\,|_{t=0} = 1, \; y_2(t)\,|_{t=0} = 0. \tag{5.13}$$

Розв'язання

1) Диференціюючи по t перше рівняння, дістанемо

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + 1.$$

Підставляючи сюди $\dot{y}_1$ і $\dot{y}_2$ з рівнянь системи (5.12), маємо

$$\ddot{y}_1 = (y_1 + y_2 + t) + (-4y_1 - 3y_2 + 2t) + 1$$

або

$$\ddot{y}_1 = -3y_1 - 2y_2 + 3t + 1. \tag{5.14}$$

2) З першого рівняння системи знаходимо

$$y_2 = \dot{y}_1 - y_1 - t. \tag{5.15}$$

Підставимо це значення в рівняння (5.14)

$$\ddot{y}_1 = -3y_1 - 2(\dot{y}_1 - y_1 - t) + 3t + 1$$

або $\qquad \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + y_1 = 5t + 1.$

Загальним розв'язком останнього рівняння є функція

$$y_1 = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t} + 5t - 9. \tag{5.16}$$

Тоді згідно з (5.15)

$$y_2 = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)\, e^{-t} - 6t + 14. \tag{5.17}$$

Визначимо сталі C_1 і C_2 так, щоб виконувались початкові умови (5.13). Враховуючи (5.16), (5.17) і (5.13), маємо

$$1 = C_1 - 9; \quad 0 = C_2 - 2C_1 + 14,$$

звідки $C_1 = 10$, $C_2 = 6$. Таким чином, частинним розв'язком задачі Коші є функції

$$\begin{cases} y_1 = (10 + 6t)\, e^{-t} + 5t - 9, \\ y_2 = (-14 - 12t)\, e^{-t} - 6t + 14. \end{cases}$$

Зауваження. Як відомо, умова розв'язності системи (5.9) відносно $y_2, y_3, \ldots, y_n$ полягає в тому, що якобіан $D(f_1, F_2, \ldots, F_n) / D(y_1, \ldots, y_n)$ відмінний від нуля при розглядуваних значеннях $y_2, \ldots, y_n$. Якщо ця умова не виконується, то розглянуті викладки не приводять до рівняння n-го порядку, еквівалентного системі.

Наприклад, простим випадком такої системи є система:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1), \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2). \end{cases}$$

Тут не можна замінити систему еквівалентним їй рівнянням другого порядку відносно y_1.

Якщо f_2 справді залежить від y_1, то можна скласти рівняння другого порядку відносно y_2, еквівалентне цій системі.

Якщо друге рівняння має вид

$$\dot{y}_2 = f_2(t, y_2),$$

то не можна також записати рівняння другого порядку відносно y_2, еквівалентне даній системі.

Зазначимо, що від рівняння n-го порядку завжди можна перейти до еквівалентної системи першого порядку, а навпаки, не завжди виконується еквівалентність.

5.3. Лінійна нормальна система диференціальних рівнянь

Якщо в системі (5.13) функції

$$f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \; (i = \overline{1, n})$$

лінійні відносно невідомих функцій (5.2), то матимемо лінійну нормальну систему диференціальних рівнянь першого порядку виду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}(t)\, y_1 + \cdots + a_{1n}(t)\, y_n + g_1(t), \\ \dot{y}_2 = a_{21}(t)\, y_1 + \cdots + a_{2n}(t)\, y_n + g_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n = a_{n1}(t)\, y_1 + \cdots + a_{nn}(t)\, y_n + g_n(t), \end{cases} \tag{5.18}$$

де $a_i(t)$, $g_i(t)$; $i, j = \overline{1, n}$, — задані неперервні функції.

Якщо всі $g_i(t) = 0$, то систему (5.18) називають *однорідною*:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}(t) y_1 + \dots + a_{1n}(t) y_n, \\ \dot{y}_2 = a_{21}(t) y_1 + \dots + a_{2n}(t) y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n = a_{n1}(t) y_1 + \dots + a_{nn}(t) y_n. \end{cases} \tag{5.19}$$

Якщо хоча б одне в $g_i(t) \neq 0$, то систему називають *неоднорідною*.

Для скорочення запису системи (5.18) вводять векторно-матричний запис. Розглянемо матрицю $A(t)$ і вектори $\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{g}(t)$:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

За правилом множення матриць систему (5.18) записують як

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(t), \tag{5.20}$$

а систему (5.19) — як

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A(t)\boldsymbol{y}. \tag{5.21}$$

5.4. Матричний запис лінійного диференціального рівняння n-го порядку

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$\frac{d^n y}{dt^n} = a_n \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_{n-1}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 y + f(t). \tag{5.22}$$

Введемо позначення

$$y = y_1,$$

і далі

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n + f(t). \end{cases} \tag{5.23}$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів цієї системи і відповідні вектори:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

Тоді систему (5.23) записують так:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Приклад. Записати у векторно-матричній формі таке рівняння:

$$\ddot{y} = p\dot{y} + qy.$$

Розв'язання. Нехай $y = y_1$. Маємо

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = py_2 + qy_1. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Це і є запис у векторно-матричній формі.

Системи диференціальних рівнянь можуть містити рівняння не тільки першого порядку, а й вищих. Тоді говорять про систему диференціальних рівнянь вищих порядків.

Наприклад, задача про рух матеріальної точки під дією сили $\boldsymbol{F}$ зводиться до системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку.

Нехай F_x, F_y, F_z — проекції сили $\boldsymbol{F}$ на осі координат Положення точки в довільний момент часу t визначається її координатами x, y, z. Отже, x, y, z — функції змінної t. Проекціями вектора швидкості точки на осі координат є $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Припустимо, що сила $\boldsymbol{F}$, а відповідно і її проекції F_x, F_y, F_z залежать від часу t, від положення точки x, y, z

і від швидкості руху точки, тобто від $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Шуканими функціями в даній задачі є функції

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

які визначаються з рівнянь динаміки

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases} \quad (5.25)$$

Маємо систему з трьох диференціальних рівнянь другого порядку. Якщо точка рухається на площині (наприклад, xOy), то матимемо систему другого порядку з двох рівнянь

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}); \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \end{cases} \quad (5.26)$$

Аналогічно тому, як здійснювався перехід від рівнянь n-го порядку до системи першого порядку, тут можна перейти до системи першого порядку.

Справді, нехай

$$\dot{x} = u,\ \dot{y} = v.$$

Тоді

$$\ddot{x} = \dot{u},\ \ddot{y} = \dot{v},$$

від системи (5.26) переходимо до системи чотирьох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ m\dot{u} = F_x(t, x, y, u, v), \\ m\dot{v} = F_y(t, x, y, u, v). \end{cases}$$

Задача (про скидання вантажу з літака в задану точку). Літак летить над Землею на висоті h зі швидкістю v км/год. На якій відстані x від точки A треба скинути з літака вантаж m (без початкової швидкості і нехтуючи опором повітря), щоб він потрапив у точку A?

Нехай початок системи координат знаходиться в початковому положенні вантажу (рис. 5.1). Диференціальні рівняння руху вздовж координатних осей мають вигляд

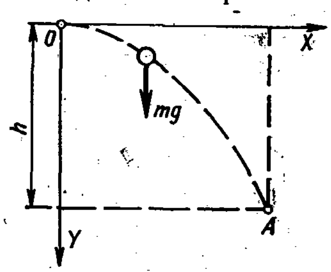

Рис. 5.1

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = mg, \end{cases}$$

де g — прискорення сили земного тяжіння.

Маємо систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами. Інтегруючи кожне з рівнянь двічі, знаходимо

$$\begin{cases} x(t) = C_1 t + C_2, \\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4. \end{cases} \quad (5.27)$$

Початкові умови такі:

$$x = 0,\ \dot{x} = v,\ y = 0,\ \dot{y} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Оскільки $\dot{x} = C_1$, а $\dot{y} = gt + C_3$, то

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ C_1 = v, \\ 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 = 0, \\ 0 + C_3 = 0, \end{cases}$$

або $C_1 = v$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$.

Тоді розв'язок системи (5.27) набирає вигляду

$$\begin{cases} x(t) = vt, \\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Виключаючи t, маємо $y = \frac{gx^2}{2v^2}$, а при $y = h$ знаходимо шукану віддаль:

$$x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

5.5. Похідна та інтеграл матриці

Нехай $A(t)$ — довільна матриця. Якщо функції $a_{ij}(t)$ неперервно диференційовні, то можна ввести поняття похідної від матриці, а саме — це матриця, елементами якої є похідні відповідних елементів вихідної матриці. Таким чином,

$$\frac{dA(t)}{dt} = \dot{A}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}_{11}(t) \cdots \dot{a}_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{a}_{n1}(t) \cdots \dot{a}_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Властивості похідної матриці

1°. Якщо C — стала матриця, то

$$\frac{dC}{dt} = 0,$$

де $\mathbf{0}$ — нульова матриця (всі її елементи — нулі), причому

$$\frac{dCA(t)}{dt} = C\frac{dA(t)}{dt}; \quad \frac{dA(t)C}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}C.$$

2°.

$$\frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = \dot{A}(t) + \dot{B}(t).$$

3°.

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t)$$

і, взагалі,

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) \neq \frac{d}{dt}(B(t)A(t)).$$

4°. Нехай $A^{-1}(t)$ — матриця, обернена до $A(t)$, тобто

$$A^{-1}(t)A(t) = A(t)A^{-1}(t) = E,$$

де E — одинична матриця.

Диференціюючи цю рівність, дістаємо

$$\dot{A}(t)A^{-1}(t) + A(t)\dot{A}^{-1}(t) = 0,$$

$$A(t)\dot{A}^{-1}(t) = -\dot{A}(t)A^{-1}(t),$$

$$\dot{A}^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t).$$

Під *інтегралом матриці* розуміють матрицю, елементами якої є інтеграли відповідних елементів вихідної матриці, тобто

$$\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt = \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(t)\,dt\right); \ i, j = \overline{1, n}.$$

Вважаємо, що всі інтеграли $\int_{t_0}^{t} a_{ij}(t)\,dt$ існують.

Властивості інтеграла матриці

1°. Якщо $A(t) = \frac{d}{dt}B(t)$, то

$$\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt = B(t) - B(t_0),$$

дістали аналог формули Ньютона — Лейбніца.

2°. Якщо C — стала матриця, то

$$\int_{t_0}^{t} CA(t)\,dt = C\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt, \quad \int_{t_0}^{t} A(t)C\,dt = \int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\,C.$$

3°.

$$\int_{t_0}^{t} (A(t) + B(t))\,dt = \int_{t_0}^{t} A(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} B(t)\,dt.$$

4°. Формула інтегрування частинами:

$$\int_{t_0}^{t} A(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)\right)dt = A(t)B(t) - A(t_0)B(t_0) -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(t)\,dt.$$

Експоненціальну функцію матричного аргументу визначають матричним степеневим рядом

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

5.6. Деякі властивості однорідної системи

Якщо в системі (5.20) $g(t) \equiv 0$, то маємо систему

$$\dot{y} = A(t)y. \tag{5.28}$$

Розглянемо такі властивості цієї системи.

1°. Якщо вектор-функції $y(t)$ і $z(t)$ є розв'язками системи (5.28), тобто

$$\dot{y} \equiv A(t)y, \quad \dot{z} \equiv A(t)z,$$

то їх сума теж є розв'язком цієї системи:

$$\frac{d}{dt}(y + z) = \dot{y} + \dot{z} = A(t)y + A(t)z = A(t)(y + z).$$

2°. Якщо C є число, то розв'язком системи (5.28) є вектор-функція Cy:

$$\frac{d}{dt}(Cy) = C\dot{y} = CA(t)y = A(t)(Cy). \tag{5.29}$$

З цих властивостей за індукцією маємо, що коли

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ \vdots \\ y_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ y_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1n}(t) \\ \vdots \\ y_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

— розв'язки системи (5.28), а $C_1, \ldots, C_n$ — довільні числа, то вектор-функція

$$y(t) = C_1y_1(t) + \cdots + C_ny_n(t) \tag{5.31}$$

є розв'язком системи (5.28).

Слід зазначити, що коли система розв'язків (5.30) лінійно незалежна, то формула (5.31) дає загальний розв'язок системи (5.28), тобто у формулі (5.31) при різних сталих $C_1, \ldots, C_n$ є всі можливі розв'язки системи (5.28). Це доводиться так, як для лінійного рівняння n-го порядку.

Систему вектор-функцій (5.30) називають *лінійно незалежною на* (a, b), якщо з рівності

$$C_1 \mathbf{y}_1(t) + \cdots + C_n \mathbf{y}_n(t) = 0, \quad a < t < b, \tag{5.32}$$

випливає, що $C_1 = \ldots = C_n = 0$.

Оскільки векторне рівняння (5.32) еквівалентне n скалярним рівнянням

$$\begin{cases} C_1 y_{11}(t) + \cdots + C_n y_{1n}(t) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1 y_{n1}(t) + \cdots + C_n y_{nn}(t) = 0, \end{cases} \tag{5.33}$$

то з урахуванням того, що детермінант

$$W(t) = \det(y_{ij}(t)) \tag{5.34}$$

не дорівнює нулю хоча б для деякого значення t, випливає лінійна незалежність системи вектор-функцій (5.30). Детермінант $W(t)$ називають *детермінантом Вронського системи вектор-функцій (5.30)*.

Якщо система векторів (5.30) лінійно незалежна на (a, b) і ці вектори є розв'язками системи (5.28), то можна довести, що

$$W(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b).$$

Таким чином, умова $W(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$ є необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності на (a, b) розв'язків (5.30) системи (5.28).

Отже, щоб дістати загальний розв'язок однорідної системи (3.28), треба знайти n лінійно незалежних розв'язків (5.30) системи (5.28). Сума (5.31), де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі, є загальним розв'язком системи (5.28).

Систему з n лінійно незалежних розв'язків системи (5.28) називають *фундаментальною системою розв'язків*. Її записують квадратною матрицею

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \cdots y_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n1}(t) \cdots y_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

яку називають *фундаментальною матрицею системи (5.28)*.

Покажемо, що фундаментальна матриця $Y(t)$ задовольняє матричне рівняння

$$\dot{Y}(t) = A(t)\, Y(t). \tag{5.35}$$

Оскільки функції $y_{jk}(t)$, $j = \overline{1, n}$, задовольняють j-е рівняння однорідної системи виду (5.19), то

$$\frac{d}{dt}(y_{jk}(t)) = \sum_{m=1}^{n} a_{jm}(t)\, y_{mk} \quad (j,\ k = \overline{1, n}).$$

Тепер, за правилом множення матриць, маємо

$$\dot{Y}(t) = \left(\frac{d}{dt} y_{jk}(t)\right) = \left(\sum_{m=1}^{n} a_{jm}(t)\, y_{mk}(t)\right) = A(t) Y(t),$$

що треба було довести.

Навпаки, якщо матриця $Y(t) = (y_{jk}(t))$ задовольняє матричне рівняння (5.35), то її стовпці

$$\mathbf{y}_k(t) = \begin{pmatrix} y_{1k}(t) \\ \vdots \\ y_{nk}(t) \end{pmatrix}$$

є розв'язками лінійної однорідної системи виду (5.19).

Якщо при цьому

$$\det Y(t) = W(t) \neq 0,$$

то матриця $Y(t)$ є фундаментальною.

Справді,

$$\mathbf{y}_k(t) = Y(t)\, e_k, \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Помноживши рівняння (5.35) справа на e_k, дістанемо

$$\left(\frac{d}{dt} Y(t)\right) e_k = \frac{d}{dt}(Y(t)\, e_k) = A(t)\,(Y(t)\, e_k),$$

тобто

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}_k(t) = A(t)\, \mathbf{y}_k(t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Якщо $Y(t)$ — фундаментальна матриця системи (5.28), то її загальний розв'язок можна записати так:

$$\boldsymbol{y}(t) = Y(t)\,C, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \tag{5.36}$$

де $C_1, \dots, C_n$ — довільні сталі. Якщо в (5.36) взяти $t = t_0$, то матимемо

$$\boldsymbol{y}(t_0) = Y(t_0)C,$$

звідки

$$C = Y^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}(t_0),$$

Отже,

$$\boldsymbol{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}(t_0).$$

Матрицю

$$Y(t)\,Y^{-1}(t_0) \overset{\text{def}}{=} K(t, t_0)$$

називають *матрицею Коші*. Вона дає змогу розв'язок системи (5.19) записати у вигляді

$$\boldsymbol{y}(t) = K(t, t_0)\,\boldsymbol{y}(t_0). \tag{5.37}$$

Якщо фундаментальна матриця $Y(t)$ нормована при $t = t_0$, тобто $Y(t_0) = Y^{-1}(t_0) = E$, то

$$\boldsymbol{y}(t) = Y(t)\,\boldsymbol{y}(t_0).$$

5.7. Формула Ліувілля — Остроградського

Розглянуті вище властивості вронскіана розв'язків однорідної системи (5.21) можна дістати з формули

$$W(t) = W(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{t} (a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t))dt}, \tag{5.38}$$

де $a_{ii}(t)$ — діагональні елементи матриці $A(t)$; $t = t_0$ — довільна точка з (a, b).

Справді, запишемо систему (5.35) в координатній формі

$$\dot{y}_{jk}(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{jm}(t)\,y_{mk}(t); \; j,\ k = \overline{1, n}. \tag{5.39}$$

Як відомо, похідна від $\det Y(t)$ є сумою n детермінантів виду

$$\frac{d}{dt}(\det Y(t)) = \dot{W}(t) = I_1 + I_2 + \dots + I_n, \tag{5.40}$$

де

$$I_1 = \begin{vmatrix} \dot{y}_{11} & \dot{y}_{12} \cdots \dot{y}_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$I_n = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dot{y}_{n1} & \dot{y}_{n2} \cdots \dot{y}_{nn} \end{vmatrix}.$$

Підставляючи значення похідних в I_1 з (5.39), дістанемо

$$I_1 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{n} a_{1m}y_{m1} & \sum\limits_{m=1}^{n} a_{1m}y_{m2} \cdots & \sum\limits_{m=1}^{n} a_{1m}y_{mn} \\ y_{21} & y_{22} \quad \cdots & y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n1} & y_{n2} \quad \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо в цьому детермінанті від першого рядка відняти другий, помножений на a_{12}, третій, помножений на a_{13}, і, нарешті, n-й, помножений на a_{1n}, то значення детермінанта не зміниться, а записати його можна так:

$$I_1 = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} \cdots a_{11}y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots \quad y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots \quad y_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}W(t).$$

Аналогічно

$$I_m = a_{mm}(t)\,W(t), \quad m = \overline{1, n}.$$

Отже, з рівностей (5.40) дістаємо диференціальне рівняння

$$\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t)\,W(t), \tag{5.41}$$

де $\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)$ — слід матриці $A(t)$.

Розв'язком рівняння (5.41) при початковій умові $W(t_0) = W_0$ є функція

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(t)\,dt\right), \tag{5.42}$$

де $W(t_0) = W_0$— задане число. Формулу (5.38) доведено. Звідси бачимо, що коли система початкових векторів

$$y_1(t_0),\ y_2(t_0),\ \ldots,\ y_n(t_0) \tag{5.43}$$

лінійно незалежна, то вронскіан $W(t)$ системи (5.21) в жодній точці інтервала (a, b) не дорівнює нулю. Якщо система початкових векторів (5.43) лінійно залежна, то вронскіан $W(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (a, \ b)$.

5.8. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нехай задано систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{y}_n = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{5.44}$$

де a_{ij} — сталі величини, $t \in (-\infty, +\infty)$, яку можна записати у векторно-матричній формі

$$\dot{y} = Ay. \tag{5.45}$$

Тут $A = (a_{ij})$; $i, j = \overline{1, n}$,— задана числова матриця.

Розв'язок (нетривіальний) системи (5.44), (5.45) шукатимемо у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda t},\ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda t},\ \ldots,\ y_n = \alpha_n e^{\lambda t} \tag{5.46}$$

або

$$y = (\alpha_1 e^{\lambda t},\ \alpha_2 e^{\lambda t},\ \ldots,\ \alpha_n e^{\lambda t}), \tag{5.47}$$

тобто $y = \alpha e^{\lambda t}$;

$$y = (y_1,\ \ldots,\ y_n), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{5.48}$$

Згідно з (5.46)

$$\dot{y}_k = \lambda \alpha_k e^{\lambda t}.$$

Підставляючи функції y_k та їх похідні в (5.44), після скорочення на $e^{\lambda t}$, $e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall t \in R$ і перенесення членів в одну частину рівняння, дістанемо

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0, \end{cases} \tag{5.49}$$

або в матричній формі

$$(A - \lambda E)\alpha = 0, \tag{5.50}$$

або

$$A\alpha = \lambda\alpha. \tag{5.51}$$

Для того щоб система (5.49) (відповідно (5.50)) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її детермінант дорівнював нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.52}$$

Рівняння (5.52) називають *характеристичним рівнянням системи (5.44)*. З цього рівняння знаходимо ті значення λ, при яких система (5.50) має нетривіальні розв'язки α.

Ліва частина рівняння (5.52) є многочленом степеня n змінної λ. Як відомо, такий многочлен має n коренів

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n \tag{5.53}$$

з урахуванням їх кратностей.

Якщо всі n коренів різні, то послідовно для кожного λ_j з системи (5.49), (5.50) знайдемо відповідний нетривіальний вектор

$$\alpha_j = (\alpha_{1j},\ \alpha_{2j},\ \ldots,\ \alpha_{nj}). \tag{5.54}$$

Згідно з (5.51) маємо, що λ_j є власні значення матриці A, а вектори α_j — власні вектори A.

Як відомо, вектори α_j, $j = \overline{1, n}$, лінійно незалежні, якщо всі власні значення різні. Тому детермінант з цих векторів відмінний від нуля:

$$\det(\alpha_{kj}) \neq 0; \ k, j = \overline{1, n}.$$

Зауваження. Оскільки в n-вимірному просторі не може бути більше ніж n лінійно незалежних векторів, то кожному власному значенню λ_j (якщо вони всі різні) відповідає тільки один власний вектор з точністю до сталого множника.

Таким чином дістаємо n вектор-функцій розв'язків системи (5.44):

$$\begin{cases} y_1(t) = (\alpha_{11}e^{\lambda_1 t},\ \alpha_{21}e^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ \alpha_{n1}e^{\lambda_1 t}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n(t) = (\alpha_{1n}e^{\lambda_n t},\ \alpha_{2n}e^{\lambda_n t},\ \ldots,\ \alpha_{nn}e^{\lambda_n t}), \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases} \tag{5.55}$$

Вектор-функції (5.55) утворюють лінійно незалежну систему на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо її детермінант Вронського

$$W(t) = \exp(\lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t) \cdot \det(\alpha_{kj}) \neq 0.$$

Тому загальний розв'язок системи (5.54) при різних коренях характеристичного рівняння має вигляд

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} C_k \boldsymbol{y}_k(t), \qquad (5.56)$$

де C_k — довільні сталі. Для кожної з невідомих функцій загальний розв'язок (5.56) можна ще записати так:

$$\begin{cases} y_1(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \alpha_{1k} \exp(\lambda_k t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \alpha_{nk} \exp(\lambda_k t). \end{cases} \qquad (5.57)$$

Приклади

1. Записати систему лінійних рівнянь векторно-матричним рівнянням і знайти її розв'язок, якщо

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + 2y_2; \\ \dot{y}_2 = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задану систему записують таким векторно-матричним рівнянням:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння типу (5,52):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Для кореня $\lambda_1 = 1$ складемо систему (5,49):

$$\begin{cases} (2-1)\,\alpha_{11} + 2\,\alpha_{21} = 0, \\ \alpha_{11} + (3-1)\,\alpha_{21} = 0, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} \alpha_{11} + 2\,\alpha_{21} = 0, \\ \alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Якщо $\alpha_{11} = 1$, то $\lambda_{21} = -\frac{1}{2}$. Аналогічно знаходимо α_{12} і α_{22} для кореня $\lambda_2 = 4$:

$$\alpha_{12} = 1, \ \alpha_{22} = 1.$$

Тепер можемо записати розв'язок системи відповідно до (5.57):

$$\begin{cases} y_1 = C_1 et + C_2 e^{4t}, \\ y_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Цей розв'язок можна записати у векторно-матричній формі:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

2. Записати систему лінійних рівнянь векторно-матричним рівнянням і знайти її розв'язок, якщо

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1, \\ \dot{y}_2 = y_1 + 2y_2, \\ \dot{y}_3 = y_1 + y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо векторно-матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Для кореня $\lambda_1 = 1$ знайдемо α_{11}, α_{21}, α_{31} із системи

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0; \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31} = 0. \end{cases}$$

Маємо $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{21} = -1$, $\alpha_{31} = 0$.

Для кореня $\lambda_2 = 2$ знайдемо α_{12}, α_{22}, α_{32} із системи

$$\begin{cases} -\alpha_{12} = 0; \\ \alpha_{12} = 0; \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} = 0. \end{cases}$$

Маємо $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{22} = 1$, $\alpha_{32} = -1$.

Для кореня $\lambda_3 = 3$ знайдемо α_{13}, α_{23}, α_{33} із системи

$$\begin{cases} -2\alpha_{13} = 0; \\ \alpha_{13} - \alpha_{23} = 0; \\ \alpha_{13} + \alpha_{23} = 0. \end{cases}$$

Маємо $\alpha_{13}=0$, $\alpha_{23}=0$, $\alpha_{33}=1$.

Запишемо тепер розв'язок у векторно-матричній формі

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Аналітичний запис розв'язку згідно з (5.57)

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^t, \\ y_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ y_3 = -C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

Зауваження. Часто на практиці, знаючи корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння (всі різні), загальний розв'язок системи (5.44) шукають безпосередньо у вигляді (5.57)

$$\begin{cases} y_1(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} \exp(\lambda_k t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} \exp(\lambda_k t), \end{cases}$$

де α_{jk} — невідомі числа. Щоб знайти їх, у систему (5.44) підставляють функції $y_j(t)$ і порівнюють коефіцієнти при однакових функціях $\exp(\lambda_k t)$. Числа α_{jk} визначають з точністю до довільних сталих.

П р и к л а д. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 2y_2, \\ \dot{y}_2 = 2y_1 + y_2, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda-1)^2 - 4 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Враховуючи структуру загального розв'язку, знайдемо розв'язок у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \\ y_2 = a_1 e^{3t} + a_2 e^{-t}, \end{cases}$$

тобто процес знаходження чисел α_{jk} опускається.

Коефіцієнти a_1, a_2 виразимо через C_1, C_2. Для цього підставимо функції $y_1(t)$, $y_2(t)$ в одне з рівнянь системи, тоді дістанемо

$$3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 2a_1 e^{3t} + 2a_2 e^{-t}.$$

Звідси

$$2C_1 - 2a_1 = 0, \quad -2C_2 - 2a_2 = 0,$$

тобто $a_1 = C_1$, $a_2 = -C_2$.

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \\ y_2(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Нехай характеристичне рівняння (5.52) системи (5.44) має корінь λ_1 кратності r. Перейдемо від системи (5.44) до одного рівняння n-го порядку відносно функції $y_1(t)$. Утворене рівняння і система (5.44) мають одне й те саме характеристичне рівняння. Тоді кореню λ_1 кратності r відповідає розв'язок рівняння n-го порядку

$$y_1(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_{r-1} t^{r-1}) e^{\lambda_1 t},$$

де $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ — довільні сталі. Отже,

$$y_1(t) = P_{r-1\,1}(t) e^{\lambda_1 t},$$

де $P_{r-1\,1}(t)$ — многочлен степеня $r-1$.

Аналогічно можна виразити й інші функції $y_j(t)$ у вигляді

$$y_j(t) = P_{r-1\,j}(t) e^{\lambda_1 t},$$

де $P_{r-1\,j}(t)$ — многочлени степеня $r-1$.

Кожна з функцій $y_j(t)$ задовольняє здобутому диференціальному рівнянню n-го порядку, якими б не були коефіцієнти многочлена $P_{r-1\,j}(t)$.

Тепер з многочленів $P_{r-1\,1}, \ldots, P_{r-1\,n}$ виберемо такі, щоб відповідні їм функції $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ були розв'язком системи (5.44). Для цього треба підставити y_j у систему (5.44), скоротити на $e^{\lambda_1 t}$ і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях t. Знайдені коефіцієнти залежатимуть від r довільних сталих.

Можна іноді спочатку взяти многочлен $P_{r-1\,1}(t)$ довільним, і тоді коефіцієнти решти многочленів $P_{r-1\,j}(t)$, $j = 2, \ldots, n$, визначатимуться однозначно через коефіцієнти $P_{r-1\,1}$. Проте при цьому можна зайти у суперечність, яка покаже, що деякі коефіцієнти многочлена $P_{r-1\,1}$ дорівнюють нулю, і вважати їх довільними не можна.

Таке ж міркування проводять відносно інших кратних коренів характеристичного рівняння, якщо вони є. Розв'язки, відповідні простим кореням, знайдемо в такому ж вигляді, як і раніше.

Щоб дістати загальний розв'язок системи (5.44), треба взяти суму вказаних розв'язків (вектор-функцій).

П р и к л а д и

1. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + 3y_2. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, тобто корінь $\lambda_1 = 2$ є двократним. Диференціальне рівняння, відповідне заданій системі для функції y_1, має вигляд

$$\ddot{y}_1 - 4\dot{y}_1 + 4y_1 = 0.$$

Це рівняння має те саме характеристичне рівняння. Розв'язок системи треба шукати у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2 t)\, e^{2t}, \\ y_2 = (a_1 + a_2 t)\, e^{2t}. \end{cases}$$

Підставляючи ці функції в систему, дістанемо

$$C_2 + 2C_1 + 2C_2 t = C_1 + C_2 t - a_1 - a_2 t,$$
$$a_2 + 2a_1 + 2a_2 t = C_1 + C_2 t + 3\,(a_1 + a_2 t).$$

Прирівнюючи в першому рівнянні коефіцієнти при однакових степенях t, дістанемо

$$a_1 = -C_1 - C_2,\ a_2 = -C_2.$$

Друге рівняння має ті самі розв'язки.

Отже, загальним розв'язком системи є

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2 t)\, e^{2t}, \\ y_2 = -(C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{2t}. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2 + y_3, \\ \dot{y}_2 = y_1 + 2y_2 + y_3, \\ \dot{y}_3 = y_1 + y_2 + 2y_3, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$(1-\lambda)^2(\lambda - 4) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1$ — двократний, а $\lambda_3 = 4$ — простий корені. Система (5.49) при $\lambda_1 = 1$ має вигляд

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Тому $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ повинні бути такі, щоб

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

тобто маємо дві довільні змінні. Нехай це α_2 і α_3. Тоді, наприклад,

$$\alpha_1 = (-1,\ 1,\ 0),\ \alpha_2 = (-1,\ 0,\ 1)$$

є лінійно незалежні власні вектори матриці A заданої системи.

Для $\lambda_3 = 4$ знаходимо

$$\alpha_3 = (1,\ 1,\ 1).$$

Тому

$$y_1 = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix},\ y_2 = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix},\ y_3 = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

є лінійно незалежними розв'язками, а

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

є загальним розв'язком заданої системи. Цей розв'язок можна записати ще так:

$$\begin{cases} y_1(t) = -(C_1 + C_2)\, e^t + C_3 e^{4t}; \\ y_2(t) = C_1 e^t + C_3 e^{4t}; \\ y_3(t) = C_2 e^t + C_3 e^{4t}. \end{cases}$$

5.9. Неоднорідна система лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нехай маємо неоднорідну систему першого порядку

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t); \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{y}_n = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases} \tag{5.58}$$

або у векторно-матричній формі

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t), \tag{5.59}$$

де $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ — неперервна на (a, b) вектор-функція; a_{jk} — сталі числа, $A = (a_{jk})$. Загальний розв'язок системи (5.58) дорівнює сумі

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \boldsymbol{y}_k(t) + \boldsymbol{y}_0(t) \tag{5.60}$$

будь-якого її частинного розв'язку $\boldsymbol{y}_0(t)$ і загального розв'язку $\sum_{k=1}^{n} C_k \boldsymbol{y}_k(t)$ відповідної однорідної системи

$$\mathrm{L}[\boldsymbol{y}] \equiv \dot{\boldsymbol{y}} - A\boldsymbol{y} = 0. \tag{5.61}$$

Справді, сума (5.60) при довільних C_k є, очевидно, розв'язком системи (5.58):

$$\mathrm{L}\left[\sum_{k=1}^{n} C_k \boldsymbol{y}_k + \boldsymbol{y}_0\right] = \mathrm{L}[\boldsymbol{y}_0] = \boldsymbol{f}(t).$$

Крім того, якщо $\boldsymbol{y}(t)$ є розв'язком системи (5.58), то

$$\mathrm{L}[\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0] = \mathrm{L}[\boldsymbol{y}] - \mathrm{L}[\boldsymbol{y}_0] = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} = 0,$$

але тоді для деяких сталих C_k

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k \boldsymbol{y}_k.$$

Якщо відомо загальний розв'язок однорідної системи (5.61), то частинний розв'язок неоднорідної системи (5.58) знаходять методом варіації сталої (методом Лагранжа).

Нехай

$$\boldsymbol{y}(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k \boldsymbol{y}_k(t)$$

є загальним розв'язком системи (5.61), тобто $\boldsymbol{y}_k(t)$ — її лінійно незалежні частинні розв'язки

$$\mathrm{L}[\boldsymbol{y}_k(t)]\equiv 0,\ k=\overline{1,n}.$$

Вважатимемо $C_k=C_k(t)$ функціями від t і підберемо їх так, щоб вектор-функція

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\,\boldsymbol{y}_k(t) \tag{5.62}$$

була частинним розв'язком неоднорідної системи (5.58). Диференціюючи, маємо

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\sum_{k=1}^{n}\left(C_k(t)\,\dot{\boldsymbol{y}}_k(t)+\dot{C}_k(t)\,\boldsymbol{y}_k(t)\right).$$

Підставляючи $\boldsymbol{u}$ і $\dot{\boldsymbol{u}}$ в (5.59), дістаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\left(C_k(t)\,\dot{\boldsymbol{y}}_k+\dot{C}_k(t)\,\boldsymbol{y}_k\right)-\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{f}(t)$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\,\mathrm{L}[\boldsymbol{y}_k]+\sum_{k=1}^{n}\dot{C}_k(t)\,\boldsymbol{y}_k(t)=\boldsymbol{f}(t).$$

Оскільки $\mathrm{L}[\boldsymbol{y}_k]=0$, то для визначення $\dot{C}_k(t)$ дістанемо систему

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{C}_k(t)\,\boldsymbol{y}_k(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{5.63}$$

з неперервними на (a, b) вектор-функціями $\boldsymbol{f}(t)$ і $\boldsymbol{y}_k(t)$. Система (5.63) лінійна відносно $\dot{C}_k(t)$ з детермінантом, який дорівнює детермінанту Вронського системи векторів $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$. Оскільки детермінант відмінний від нуля, то система (5.63) має єдиний розв'язок: $\dot{C}_k(t)=\varphi_k(t)$, $k=\overline{1,n}$. Функції $\varphi_k(t)$ неперервні, бо неперервні вектор-функції $\boldsymbol{f}(t)$ і $\boldsymbol{y}_k(t)$. Інтегруючи, знаходимо

$$C_k(t)=\int \varphi_k(t)\,dt,\ k=\overline{1,n}.$$

Підставляючи ці значення $C_k(t)$ в (5.62), дістанемо частинний розв'язок системи (5.58).

Приклад. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_1+2y_2+e^t;\\ \dot{y}_2=2y_1+y_2.\end{cases}$$

Розв'язання. Легко перевірити, що функції

$$y_1=C_1e^{3t}+C_2e^{-t},\ y_2=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}$$

є розв'язками однорідної системи. Знайдемо частинний розв'язок неоднорідної системи методом Лагранжа. Вважатимемо, що $C_1=C_1(t)$, $C_2=C_2(t)$ є функції змінної t. Тоді

$$\dot{y}_1=3C_1(t)\,e^{3t}-C_2(t)\,e^{-t}+\dot{C}_1(t)\,e^{3t}+\dot{C}_2(t)\,e^{-t};$$
$$\dot{y}_2=3C_1(t)\,e^{3t}+C_2(t)\,e^{-t}+\dot{C}_1(t)\,e^{3t}-\dot{C}_2(t)\,e^{-t}.$$

Підставляючи функції і знайдені похідні в задану систему, дістанемо

$$\begin{cases}\dot{C}_1(t)\,e^{3t}+\dot{C}_2(t)\,e^{-t}=e^t;\\ \dot{C}_1(t)\,e^{3t}-\dot{C}_2(t)\,e^{-t}=0.\end{cases}$$

Детермінант цієї системи є детермінант Вронського

$$W=\begin{vmatrix}e^{3t} & e^{-t}\\ e^{3t} & -e^{-t}\end{vmatrix}=-2e^{2t}\neq 0\ \forall t\in R.$$

Тому однозначно знаходимо

$$\dot{C}_1(t)=\frac{1}{2}e^{-2t},\ \dot{C}_2(t)=\frac{1}{2}e^{2t}.$$

Інтегруючи, маємо

$$C_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-2t},\ C_2(t)=\frac{1}{4}e^{2t}.$$

Отже, частинний розв'язок

$$u_1(t)=0,\quad u_2(t)=-\frac{1}{2}e^t.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y_1(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t},\ y_2(t)=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}-\frac{1}{2}e^t.$$

У векторно-матричній формі загальний розв'язок можна записати так:

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}e^{3t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}e^t\end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{3t}\\ C_2e^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}e^t\end{pmatrix}.$$

У подальшому покажемо, як знаходити частинні розв'язки системи (5.58), якщо права частина має вигляд

$$f_i(t)=b_i\exp(\alpha_i t),\ i=\overline{1,n},$$

де b_i, α_i — відомі сталі величини.

Частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами у випадку, коли праві частини $f_i(t)$ мають вигляд типу $\exp(\alpha t)$ або $t^m \exp(\alpha t)$, знаходять методом невизначених коефіцієнтів так, як для неоднорідного диференціального рівняння.

Приклад. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 + e^t, \\ \dot{y}_2 = 2y_1 + y_2 + e^{3t}. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо розв'язок однорідної системи. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Отже, загальним розв'язком однорідної системи є функції

$$y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y_2 = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Вільним членам системи $f_1 = e^t$, $f_2 = e^{3t}$ відповідають числа 1 і 3. Число 1 не є коренем характеристичного рівняння, а 3 — однократний корінь. Аналогічно, як і для однорідного рівняння, маємо

$$v_1 = b_1 e^t + (b_2 + b_3 t) e^{3t};$$
$$v_2 = a_1 e^t + (a_2 + a_3 t) e^{3t}.$$

Підставляючи ці функції в задану систему, знаходимо

$$b_1 = 0, \ b_2 = 0, \ b_3 = 1/2;$$
$$a_1 = -\frac{1}{2}, \ a_2 = \frac{1}{4}, \ a_3 = \frac{1}{2}.$$

Тепер загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{3t}, \\ y_2 = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^t + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} t\right) e^{3t}. \end{cases}$$

5.10. Розв'язування системи методом підстановки у випадку простих коренів

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n; \\ \dot{y}_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{2n} y_n; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n, \end{cases} \tag{5.64}$$

або

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A y}, \tag{5.65}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Інтегрування цієї системи зводиться до задач алгебри. Справді, із алгебри відомо, що коли власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матриці $\boldsymbol{A}$ різні, то існує невироджена $(n \times n)$-матриця $\boldsymbol{T}$, яка зводить матрицю $\boldsymbol{A}$ до діагонального виду, тобто

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{5.66}$$

Причому матриця $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$, тобто стовпці матриці $\boldsymbol{T}$ є власні вектори матриці $\boldsymbol{A}$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Нехай власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матриці $\boldsymbol{A}$ різні. Тоді загальний розв'язок системи (5.64) має вигляд*

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{e}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{e}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \boldsymbol{e}_n, \tag{5.67}$$

де $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — власні вектори матриці $\boldsymbol{A}$; $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Доведення. Зробимо підстановку

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T z}, \tag{5.68}$$

де $\boldsymbol{T}$ — матриця, яка зводить матрицю $\boldsymbol{A}$ до діагонального виду. Підставляючи (5.68) в (5.65), дістаємо

$$\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A T z}.$$

Помножимо цю рівність зліва на $\boldsymbol{T}^{-1}$, і оскільки $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \Lambda$, то дістанемо

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \Lambda \boldsymbol{z}. \tag{5.69}$$

У координатному записі це є система

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2, \ \ldots, \ \dot{z}_n = \lambda_n z_n,$$

усі розв'язки якої є функції

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \ \ldots, \ z_n = C_n e^{\lambda_n t},$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — сталі інтегрування. Тоді загальний розв'язок системи (5.69) матиме вигляд

$$\boldsymbol{z} = C_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{f}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{f}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \boldsymbol{f}_n, \tag{5.70}$$

де f_k — вектор, в якого k-та компонента дорівнює 1, а всі інші — 0. Оскільки стовпці матриці T є власні вектори матриці A, то

$$Tf_k = e_k.$$

Підставляючи (5.70) в (5.68), дістанемо (5.67).

Теорему доведено.

Отже, маємо такий алгоритм знаходження всіх розв'язків системи (5.64):

1. Визначення власних значень $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матриці A з характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

2. Визначення власних векторів $e_1, \ldots, e_n$ з систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ae = \lambda_1 e,\ Ae = \lambda_2 e,\ \ldots,\ Ae = \lambda_n e.$$

3. Записування розв'язку за формулою (5.70).

Якщо власне значення λ є комплексним, то розв'язок $y = e^{\lambda t}e$ теж комплексний. Дійсна і уявна частини його є розв'язками системи

$$y_1 = \operatorname{Re}(e^{\lambda t}e)\quad y_2 = \operatorname{Im}(e^{\lambda t}e).$$

Система має також комплексно-спряжений розв'язок $y^* = e^{\lambda^* t}e^*$, якому відповідає пара дійсних розв'язків y_1, $-y_2$, тобто та сама, що й для y. Усі дійсні розв'язки системи дістанемо таким чином.

Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — дійсні власні значення $\lambda_{k+1}, \lambda^*_{k+1}, \lambda_{k+2}, \lambda^*_{k+2} \ldots$ — комплексні власні значення. Тоді загальний дійсний розв'язок системи матиме вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \cdots + C_k e^{\lambda_k t} e_k + C_{k+1} \operatorname{Re}(e^{\lambda_{k+1} t} e_{k+1}) +$$
$$+ C_{k+2} \operatorname{Im}(e^{\lambda_{k+1} t} e_{k+1}) + C_{k+3} \operatorname{Re}(e^{\lambda_{k+2} t} e_{k+2}) +$$
$$+ C_{k+4} \operatorname{Im}(e^{\lambda_{k+2} t} e_{k+2}) + \cdots,$$

де C_k — довільні сталі.

Розглянемо неоднорідну систему

$$\dot{y} = Ay + P_m(t)e^{\mu t}. \tag{5.71}$$

Тут $P_m(t)$ — вектор-функція, компоненти якої є многочлени степеня не вище ніж m:

$$P_m(t) = \sum_{j=0}^{m} P_j t^j,$$

де P_j — сталі вектори.

Нерезонансний випадок. Якщо μ не є власним значенням матриці A, то система (5.71) має частинний розв'язок

$$y = Q_m(t)e^{\mu t}, \tag{5.72}$$

де $Q_m(t)$ — вектор-функція, компоненти якої — многочлени степеня не вище ніж m з невизначеними коефіцієнтами. При цьому матриця A може мати як прості, так і кратні власні значення.

Отже, $Q_m(t)$ шукатимемо у вигляді

$$Q_m(t) = \sum_{j=0}^{m} q_j t^j,$$

де q_j — невідомі сталі вектори. Підставляючи $Q_m(t)$ в (5.71) і скорочуючи на $e^{\mu t}$, дістаємо

$$(\mu E - A)Q_m(t) = P_m(t) - \dot{Q}_m(t).$$

Прирівнюючи в лівій і правій частинах коефіцієнти при степенях t^0, t^1 і т. д., дістанемо рівняння

$$\begin{gathered}(\mu E - A)q_m = P_m,\\ (\mu E - A)q_{m-1} = P_{m-1} - mq_m,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered} \tag{5.73}$$

Матриця $\mu E - A$ невироджена, оскільки μ не є власним значенням матриці A. З першого рівняння (5.73) знаходимо

$$q_m = (\mu E - A)^{-1}P_m,$$

з другого рівняння знаходимо q_{m-1} і т. д.

Резонансний випадок. Нехай μ — власне значення матриці A і власні значення матриці A — різні. Тоді система (5.71) має частинний розв'язок

$$y = Q_{m+1}(t)e^{\mu t},$$

де $Q_{m+1}(t)$ — вектор-функція, компоненти якої є многочлени степеня не вище ніж $m + 1$. У цьому випадку доцільно зробити підстановку (5.68), тоді система (5.71) набирає вигляду

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + f_1(t)e^{\mu t};\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n + f_n(t)e^{\mu t},\end{cases}$$

де $f_j(t)$ — компоненти вектор-функції $T^{-1}P_m(t)$. Система розпалася на n неоднорідних рівнянь першого порядку, частинні розв'язки яких знайдемо так, як і в попередньому випадку.

Приклад. Знайти розв'язки системи

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = 4y_1 - y_2 - 2y_3 + t;\\ \dot{y}_2 = y_1 + \sin t;\\ \dot{y}_3 = 6y_1 - 2y_2 - 3y_3.\end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку розглянемо однорідну систему. Її характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$. Власний вектор e_1 знаходимо із системи

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0; \\ 6\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, тому маємо $e_1 = \{1, 1, 1\}$. Власний вектор e_2 визначимо із системи

$$\begin{cases} (4 - i)\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 - i\alpha_2 = 0; \\ 6\alpha_1 - 2\alpha_2 - (3 + i)\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = i\alpha_2$, $\alpha_3 = 2i\alpha_2$. Тому $e_2 = \{1, -i, 2\}$. Оскільки матриця системи дійсна і власні значення λ_2, λ_3 — комплексно спряжені, то вважатимемо, що вектор $e_3 = e_2^* = \{1, i, 2\}$. Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix},$$

де C_j — довільні сталі.

Знайдемо дійсні розв'язки однорідної системи. Маємо

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Два останні вектори-розв'язки і загальний розв'язок (дійсний) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix},$$

де C_j — довільні сталі.

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідної системи. Шукатимемо його як суму частинних розв'язків системи з правими частинами $f = (t, 0, 0)$, $g = (0, \sin t, 0)$. Перший з них візьмемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix}, \text{ тобто } y = a + bt.$$

Підставляючи в систему, дістанемо

$$b = tAb + Aa + tf_1, \quad f_1 = (1, 0, 0).$$

Отже,

$$Aa = b, \quad Ab = -f_1.$$

Звідси знаходимо a, b і частинний розв'язок

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо другий дійсний частинний розв'язок. Характеристичне рівняння має однократні корені $\lambda_{2,3} = \pm i$, а тому частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$a_1 \cos t + a_2 \sin t + t(a_3 \cos t + a_4 \sin t),$$

де a_j — сталі вектори. Для спрощення скористаємося тим, що $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$. Тому розглянемо спочатку систему з правою частиною $e^{it} f_2$, $f_2 = (0, 1, 0)$, а потім візьмемо уявну частину здобутого розв'язку. Частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$v_2 = ae^{it} + bte^{it}.$$

Підставляючи в систему, маємо

$$ia + it\, b + b = Aa + tAb + f_2.$$

Отже,

$$(A - iE)\, b = 0, \quad (A - iE)\, a = -b + f_2.$$

Матриця $A - iE$ вироджена: $\det(A - iE) = 0$, бо $\lambda = i$ — власне значення матриці A. Ранг матриці $A - iE$ дорівнює 2. Тому перше рівняння має розв'язок $b \neq 0$, визначений з точністю до числового множника $\alpha \neq 0$. Число α визначимо з умови розв'язності другої системи.

Система $(A - iE)\, b = 0$ є система

$$\begin{cases} (4 - i) b_1 - b_2 - 2b_3 = 0; \\ b_1 - ib_2 = 0, \end{cases}$$
$$b = (b_1, b_2, b_3).$$

Третє рівняння не розглядаємо (ранг дорівнює 2). Тепер знаходимо

$$b = a(i, 1, 2).$$

Друга система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} (4 - i) a_1 - a_2 - 2a_3 = i\alpha; \\ a_1 - ia_2 = \alpha - 1; \\ 6a_1 - 2a_2 - (3 + i) a_3 = 2\alpha, \end{cases}$$
$$a = (a_1, a_2, a_3).$$

Виразивши з другого рівняння a_1 через a_2, дістанемо систему

$$\begin{cases} 2(2ia_2 - a_3) = i\alpha + (4 - i)(1 - \alpha); \\ (3 + i)(2ia_2 - a_3) = 6 - 4\alpha. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на друге, матимемо рівняння для α, звідки $\alpha = (1 + 2i)/8$. Компоненти вектора a задовольняють систему

$$a_1 = ia_2 + \frac{1}{8}(2i - 7), \quad a_3 = 2ia_2 + \frac{1}{32}(1 + 13i).$$

Ця система двох рівнянь з трьома невідомими має нескінченну множину розв'язків, тому вектор a визначається неоднозначно. Зазначимо, що тут немає нічого незрозумілого. Вихідна однорідна система має розв'язок $Ce^{it} f_2$, тому вектор a визначено з точністю до доданка cf_2. Взявши $a_2 = 0$, дістанемо частинний розв'язок

$$\frac{1}{8}(1 + 2i) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{it} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2i - 7 \\ 0 \\ \frac{1}{4}(1 + 13i) \end{pmatrix} te^{it}.$$

Взявши уявну частину цієї вектор-функції, знайдемо частинний розв'язок

$$v_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ 2\cos t + \sin t \\ 4\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} + \frac{t}{32}\begin{pmatrix} 8\cos t - 28\sin t \\ 0 \\ 13\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Загальним розв'язком буде сума розв'язку однорідної системи і знайдених двох частинних розв'язків

$$y = y_0 + v_1 + v_2.$$

5.11. Розв'язування системи методом підстановки у випадку кратних коренів

Жорданова форма матриці. Якщо матриця A має кратне власне значення, то вона не завжди зводиться до діагонального виду. Це буває тільки тоді, коли власні значення всі різні (прості).

Наприклад, матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не можна звести до діагонального виду (її власні значення дорівнюють $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Справді, припустимо супротивне. Нехай існує (2×2)-матриця T така, що $T^{-1}AT = \Lambda$ є діагональна матриця. Причому Λ — нульова матриця, оскільки її діагональні елементи дорівнюють власним значенням матриці A. Тому $T^{-1}AT = 0$, отже, $A = 0$. Зайшли у суперечність.

Простішою формою, до якої зводиться довільна квадратна матриця, є жорданова нормальна форма.

Матриця

$$I = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{5.74}$$

називається *жордановим блоком.*

Ця матриця має єдине власне значення λ кратності k, де k — порядок матриці I. Знайдемо її власні вектори, розв'язуючи систему

$$Ix = \lambda x,$$

тобто

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = \lambda x_1; \\ \lambda x_2 + x_3 = \lambda x_2; \\ \dots\dots\dots \\ \lambda x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Тоді $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, x_1 — довільне, тобто матриця I має єдиний (з точністю до множника) власний вектор

$$f_1 = (1, 0, \dots, 0).$$

На інші базисні вектори

$$f_2 = (0, 1, 0, \dots 0),$$
$$f_3 = (0, 0, 1, \dots 0)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

матриця I діє так:

$$If_1 = \lambda f_1,\ If_2 = \lambda f_2 + f_1,\ \dots,\ If_k = \lambda f_k + f_{k-1}.$$

Означення. *Сукупність векторів $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ називається жордановим ланцюжком матриці A, якщо*

$$Ae_1 = \lambda e_1,\ Ae_2 = \lambda e_2 + e_1,\ \dots,\ Ae_k = \lambda e_k + e_{k-1}. \tag{5.75}$$

Вектор e_1 — власний, вектори $e_2, \dots, e_k$ називаються приєднаними.

Вектори $f_1, \dots, f_k$ утворюють жордановий ланцюжок жорданового блоку I.

ТЕОРЕМА 5.3 (*про приведення матриці до жорданової форми*). *Для довільної квадратної матриці A існує така матриця T, що*

$$T^{-1}AT = I = \begin{pmatrix} I_1 & & & 0 \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_s \end{pmatrix}. \tag{5.76}$$

Тут $I_1, I_2, \dots, I_s$ — жорданові блоки порядку $k_1, k_2, \dots, k$

$$I_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s = n,$$

і λ_k — власні значення матриці A.

Матриця з правої частини рівності (5.76) називається *нормальною жордановою формою матриці A*. Жорданові блоки розміщуються вздовж головної діагоналі.

Нормальна жорданова форма матриці A визначається єдиним способом з точністю до перестановки жорданових блоків.

Наведемо інше формулювання цієї теореми.

ТЕОРЕМА 5.4. *Нехай A — довільна квадратна матриця порядку n. Тоді існує базис, що складається з жорданових ланцюжків*

$$\{e_1, \dots, e_{k_1}\}, \{e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2}\}, \dots, \{e_{k_1+\dots k_{s-1}}, \dots, e_n\}, \tag{5.77}$$

відповідних власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ матриці A. Дія матриці A на вектори ланцюжка визначається формулою (5.75).

Інтегрування системи. Розглянемо систему n рівнянь

$$\dot{y} = Ay,$$

де A — стала матриця. Ця система повністю інтегрується. Візьмемо спочатку систему k рівнянь

$$\dot{z} = Iz, \tag{5.78}$$

де I — жорданів блок виду (5.74).

У координатній формі ця система записується так:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda z_1 + z_2; \\ \dot{z}_2 = \lambda z_2 + z_3; \\ \dots\dots\dots \\ \dot{z}_{k-1} = \lambda z_{k-1} + z_k; \\ \dot{z}_k = \lambda z_k. \end{cases}$$

Інтегруємо цю систему знизу вверх. Маємо

$$z_k = C_k e^{\lambda t},$$

$$\dot{z}_{k-1} - \lambda z_{k-1} = C_k e^{\lambda t}.$$

Отже,

$$z_{k-1} = C_{k-1} e^{\lambda t} + C_k t e^{\lambda t}.$$

Аналогічно

$$z_{k-2} = \left(C_{k-2} + tC_{k-1} + \frac{t^2}{2!} C_k\right) e^{\lambda t},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_1 = \left(C_1 + C_2 \frac{t}{1!} + C_3 \frac{t^2}{2!} + \dots + C_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{\lambda t}.$$

Таким чином, будь-який розв'язок системи (5.78) задається формулою

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_k z_k,$$

де $C_1, C_2, \dots, C_k$ — довільні сталі, а розв'язки z_j мають вигляд

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda t} e_1, \\ z_2 = e^{\lambda t}\left(e_2 + \frac{t}{1!} e_1\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_k = e^{\lambda t}\left(e_k + \frac{t}{1!} e_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e_1\right). \end{cases} \tag{5.79}$$

Усі розв'язки системи (5.77) дістають так.

1. Виконують підстановку

$$y = Tz,$$

де T — матриця, що зводить A до жорданової нормальної форми. Тоді система (5.77) набирає вигляду

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} I_1 & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & I_s \end{pmatrix} z$$

і розпадається на s окремих підсистем

$$\dot{z}_1 = I_1 z_1, \dots, \dot{z}_s = I_s z_s,$$

де z_j — вектор-стовпці висоти k_j.

2. Для кожного жорданового ланцюжка $\{e_1, \dots, e_k\}$ матриці A знаходять розв'язки $y_1, \dots, y_k$ згідно з формулою (5.79).

3. Розв'язками системи (5.77) є лінійна комбінація всіх знайдених розв'язків з довільними сталими коефіцієнтами.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2; \\ \dot{y}_2 = -y_1 + 4y_2. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Власними значеннями матриці A цієї системи є $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Власний вектор визначається із системи

$$Ae = 3e,$$

тобто

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\alpha_1; \\ -\alpha_1 + 4\alpha_2 = 3\alpha_2. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = \alpha_2$. Власний вектор буде тільки один (з точністю до множника): $e_1 = (1, 1)$. Тому приєднаний вектор e_2 знайдемо із системи

$$Ae_2 = 3e_2 + e_1.$$

Для компонент α_1, α_2 вектора e_2 дістанемо систему

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 - \alpha_1 = 1.$$

Вектор e_2 можна взяти у вигляді (0; 1). За формулою (5.79) побудуємо розв'язки

$$y_1 = e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \quad y_2 = e^{3t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Загальний розв'язок системи матиме вигляд

$$y = e^{3t}\left(C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}\right),$$

або

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2 t)\,e^{3t}, \\ y_2 = (C_1 + C_2(t+1))\,e^{3t}. \end{cases}$$

Тут C_1, C_2 — довільні сталі.

ВПРАВИ

Розв'язати такі системи рівнянь:

1. $\begin{cases}\dot x + y = 0,\\ \dot y + 4x = 0.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\dot x = x + 5y,\\ \dot y + x + 3y = 0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dot x - 3x - 8y = 0,\\ \dot y + x + 3y = 0.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}\dot x = 12x + 18y,\\ \dot y = -8x - 12y.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dot x = 4x - 10y,\\ \dot y = x - 2y.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}\dot x - x - y = t,\\ \dot y + 4x + 3y = 2t.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dot x = y - x,\\ \dot y = -x - 3y.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}\ddot x + 2x + 4y = e^t,\\ \ddot y - x - 3y = -t.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dot x = z,\\ \dot y = x,\\ \dot z = y.\end{cases}$ 10. $\begin{cases}\dot x = y,\\ \dot y = x,\\ \dot z = x + y + z.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\ddot x = y,\\ \ddot y = x.\end{cases}$ 12. $\begin{cases}\dot x + 2x + 4y = 4t + 1,\\ \dot y + x - y = 1{,}5\,t^2.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dot y + 3z = 0,\\ \dot z + 4y = 0.\end{cases}$ 14. $\begin{cases}\ddot x + 2x + 4y = 0,\\ \ddot y - x + 7y = 0.\end{cases}$

15. $\begin{cases}\dot x = 2x - 3y,\\ \dot y = 5x + 6y.\end{cases}$ 16. $\begin{cases}\ddot x + 2a\dot y - a^2x + 2a^2y = b,\\ \ddot y + 2a\dot x + 2a^2x - a^2y = ct.\end{cases}$

5.12. Розв'язування системи із сталими коефіцієнтами за допомогою матричної експоненти

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\dot{y} = Ay, \tag{5.80}$$

де $y \in R^n$, а A — стала квадратна матриця. Крім методу Ейлера, розв'язування системи (5.80), існує інший метод, який базується на безпосередньому знаходженні фундаментальної матриці.

Означення. *Експонентою e^A матриці A називається сума ряду*

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k, \tag{5.81}$$

де E — одинична матриця.

Матрична експонента має такі властивості:

1°. Якщо $A_1A_2 = A_2A_1$, то $e^{A_1+A_2} = e^{A_1}e^{A_2} = e^{A_2}e^{A_1}$;

2°. Якщо $A = T^{-1}IT$, то $e^A = T^{-1}e^IT$;

3°. Матриця $Y(t) = e^{At}$ є розв'язком матричної задачі Коші

$$\dot Y = AY, \quad Y(0) = E,$$

тобто є фундаментальною матрицею системи (5.80).

З останньої властивості маємо, що розв'язок системи (5.80) з початковими умовами $y(0) = y_0$ визначається за формулою

$$y(t) = e^{At}y_0.$$

Для знаходження матриці e^{At} треба привести A до вигляду $A = T^{-1}IT$, де I — жорданова нормальна форма матриці A. При цьому враховуємо, що коли I — клітина Жордана

$$I = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{pmatrix},$$

тобто $I = \lambda E + H$, де

$$H = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

то $e^{It} = e^{\lambda t}e^{Ht}$. Матрицю e^{Ht} знайдемо за допомогою ряду (5.81), оскільки $H^r = 0$, де r — розмірність клітини I, і, отже, в ньому відмінні від нуля тільки перші r членів.

Приклади

1. Обчислити e^{At}, якщо

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За означенням матричної експоненти маємо

$$e^{At}=E+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\ldots$$

Обчислимо матриці A^k, $k=2, 3, \ldots$:

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Як бачимо,

$$A^{2k}=(-1)^kE,\ A^{2k+1}=(-1)^kA,\ k=0, 1, 2, \ldots$$

Тоді

$$e^{At}=E+\frac{1}{1!}At-\frac{1}{2!}Et^2-\frac{1}{3!}At^3+\frac{1}{4!}Et^4+\ldots=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}t-\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}t^2-\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}t^3+$$

$$+\frac{1}{4!}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}t^4+\ldots=\begin{pmatrix}1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots & t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots\\ -t+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^5}{5!}+\ldots & 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

2. Обчислити e^{At}, якщо

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Із рівняння

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-4\lambda+4=0$$

знаходимо власні значення заданої матриці: $\lambda_1=\lambda_2=2$. Оскільки ранг матриці

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}3-2 & 1\\ -1 & 1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

дорівнює 1, то жорданова форма матриці A має вигляд

$$I=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Матрицю

$$T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

таку, що $A=T^{-1}IT$, визначимо з рівності

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Для знаходження a, b, c і d маємо лінійну систему рівнянь

$$3a-b=2a+c,\ a+b=2b+d,\ 3c-d=2c,\ c+d=2d,$$

яка еквівалентна системі

$$\begin{cases}a-b-c=0,\\ c-d=0.\end{cases}$$

Одним з розв'язків цієї системи є $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=1$. Отже, матриця

$$T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \text{а } T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Рівність $A=T^{-1}IT$ записують так:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$e^{It}=e^{2t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

то

$$e^{At}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(t+1)e^{2t} & te^{2t}\\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t}\end{pmatrix}.$$

5.13. Випадок інтегровності лінійної системи

Нехай маємо матричну систему

$$\dot{Y}=A(t)Y,\ t_0\leqslant t<\infty, \tag{5.82}$$

де $A(t)=(a_{ij}(t))$; $i, j=1, 2, \ldots, n$,— неперервна матриця.

У загальному випадку не існує способів знаходження інтегральної матриці рівняння (5.82). Розглянемо окремий випадок, коли інтегральна матриця $Y(t)$ рівняння (5.82) знаходиться в явному вигляді через матрицю $A(t)$. Це так званий випадок Лаппо-Данилевського.

Припустимо, що матриця $A(t)$ переставна зі своїм інтегралом, тобто

$$A(t)\int_{t_0}^{t}A(s)\,ds=\int_{t_0}^{t}A(s)\,ds\cdot A(t), \tag{5.83}$$

і, крім того,

$$\|A(t)\| \leqslant a < \infty \tag{5.84}$$

на довільному скінченному інтервалі. Тоді нормальна інтегральна матриця рівняння (5.82) має вигляд

$$Y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right). \tag{5.85}$$

Справді, за означенням маємо

$$e^M = E + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \dots + \frac{M^m}{m!} + \dots, \tag{5.86}$$

де

$$M = M(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds. \tag{5.87}$$

З (5.85) дістаємо, що

$$Y(t_0) = E. \tag{5.88}$$

Якщо виконується умова (5.83), то матриця $M(t)$ переставна зі своєю похідною $M'(t) = A(t)$. Тому

$$\frac{dM^2}{dt} = \frac{d}{dt}(M \cdot M) = \frac{dM}{dt}M + M\frac{dM}{dt} = 2\frac{dM}{dt}M.$$

Звідси за індукцією виводимо формулу

$$\frac{dM^k}{dt} = k\frac{dM}{dt}M^{k-1}, \quad k = 3, 4, 5, \dots \tag{5.89}$$

З формули (5.86) на основі (5.89) формальним диференціюванням знаходимо матричний ряд для похідної:

$$\frac{de^M}{dt} = M' + M'M + \frac{M'M^2}{2!} + \dots + \frac{M'M^{m-1}}{(m-1)!} + \dots, \tag{5.90}$$

або

$$\frac{de^M}{dt} = M'\left(E + M + \frac{M^2}{2!} + \dots\right) = M'e^M. \tag{5.91}$$

Отже, згідно з (5.87)

$$\frac{d}{dt}e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} = A(t)\,e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}. \tag{5.92}$$

Матричний ряд (5.86) складається з n^2 скалярних рядів. Покажемо, що кожний з них рівномірно збіжний на довільному скінченному відрізку $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < \infty$. Оскільки $\|M^k\| \leqslant \|M\|^k$, $k = 1, \dots$, то, в силу (5.84) кожен з n^2 скалярних рядів мажорується рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} a^m \frac{(t-t_0)^m}{m!}.$$

Звідси кожен n^2 скалярних рядів збігається рівномірно на довільному скінченному інтервалі, і його сума є неперервною функцією на цьому інтервалі.

Оскільки матриця (5.85) задовольняє систему (5.82) і початкову умову (5.88), то вона і є нормальною інтегральною матрицею системи (5.82).

ВПРАВА

Показати, що матриця системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos t\, x + \sin t y; \\ \dot{y} = \sin t x + \cos t y. \end{cases}$$

переставна зі своїм інтегралом. Знайти розв'язок цієї системи.

5.14. Матрицант

Нехай маємо систему матричних рівнянь

$$\dot{Y} = A(t)\,Y, \tag{5.93}$$

де $A(t)$ — неперервна матриця порядку $n \times n$.

Розглянемо початкову задачу

$$\dot{Y} = A(t)\,Y; \; Y(t_0) = E. \tag{5.94}$$

Візьмемо матричний ряд

$$Z(t) = E + \int_{t_0}^{t} A(t_1)\,dt_1 + \int_{t_0}^{t} A(t_2)\int_{t_0}^{t_2} A(t_1)\,dt_1\,dt_2 + \dots$$
$$\dots + \int_{t_0}^{t} A(t_m)\int_{t_0}^{t_m} A(t_{m-1}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1)\,dt_1\,dt_2 \dots dt_m + \dots \tag{5.95}$$

Легко перевірити диференціюванням, що ряд (5.95) — це формальний розв'язок задачі (5.94). Нехай виконується умова

$$\|A(t)\| \leqslant a, \; t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < \infty. \tag{5.96}$$

Тоді, аналогічно попередньому, для норми $\|Z(t)\|$ маємо оцінку

$$\| Z(t) \| \leqslant n + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \frac{(t-t_0)^m}{m!}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність ряду (5.95) на довільному скінченному відрізку змінної t. Ряд (3) називають *матрицантом системи рівнянь (5.93)*.

Якщо в системі (5.93) матриця $A = \mathrm{const}$, то легко побачити, що права частина рівності (5.95) дорівнює $e^{A(t-t_0)}$, а це відповідає формулі (5.85).

5.15. Зниження порядку системи

Припустимо, що відомо розв'язок

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ \vdots \\ y_{n1}(t) \end{pmatrix} \qquad (5.97)$$

однорідної системи

$$\dot{y} = A(t)y. \qquad (5.98)$$

Введемо заміну

$$y(t) = V(t)z(t), \qquad (5.99)$$

де $V(t)$ — $(n \times n)$-матриця виду

$$V(t) = [e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, y_1(t), e_{i+1}, \ldots, e_n], \qquad (5.100)$$

причому e_i є i-й стовпець одиничної $(n \times n)$-матриці; y_{ni} — відмінний від нуля елемент розв'язку (5.97). Для спрощення викладок припустимо, що в розв'язку (5.97) елемент $y_{n1}(t)$ відмінний від нуля. Тоді

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & y_{11}(t) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & y_{21}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & y_{n-11}(t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & y_{n1}(t) \end{pmatrix}. \qquad (5.101)$$

Диференціюючи рівняння (5.99) і розв'язуючи його відносно $\dot{z}(t)$, дістанемо

$$\dot{z} = V^{-1}(t)(\dot{y}(t) - \dot{V}(t)z(t)). \qquad (5.102)$$

Підставляючи (5.98) і (5.90) в (5.102), матимемо

$$\dot{z}(t) = V^{-1}(t)(A(t)V(t) - \dot{V}(t))z(t). \qquad (5.103)$$

Позначимо

$$B(t) \equiv V^{-1}(t)(A(t)V(t) - \dot{V}(t)), \qquad (5.104)$$

тоді

$$\dot{z}(t) = B(t)z(t). \qquad (5.105)$$

Оскільки розв'язок $y_1(t)$ відомо, то розв'язок рівняння (5.105) теж відомо, а саме:

$$z_1(t) = V^{-1}(t)\, y_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.106)$$

Підставимо цей розв'язок в диференціальне рівняння (5.105):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1n}(t) \\ \vdots \\ b_{n-1n}(t) \\ b_{nn}(t) \end{pmatrix}. \qquad (5.107)$$

Звідси

$$b_{in}(t) = 0, \; i = 1, \ldots, n. \qquad (5.108)$$

Розбиваючи матриці рівняння (5.105) на блоки, маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11}(t) & \ldots & b_{1n-1}(t) & b_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_{n-11}(t) & \ldots & b_{n-1n-1}(t) & b_{n-1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}(t) & \ldots & b_{nn-1}(t) & b_{nn}(t) \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_n(t) \end{pmatrix}. \qquad (5.109)$$

Враховуючи (5.110), рівняння (5.109) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_m(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} B_m(t) & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_m(t) & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_m(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_n(t) \end{pmatrix}. \qquad (5.110)$$

Виконуючи в (5.110) множення матриць, дістаємо систему $(n-1)$-го порядку

$$\dot{z}_m(t) = B_m(t)z_m(t). \qquad (5.111)$$

Після розв'язання цього рівняння відносно $Z_m(t)$ для знаходження $z_n(t)$ можна використати друге рівняння, що випливає з (5.110):

$$\dot{z}_n(t) = b_m(t) \cdot z_m(t). \qquad (5.112)$$

Можна також показати, що коли відомо k лінійно незалежних розв'язків $\mathbf{y}_1(t)$, $\mathbf{y}_2(t)$, ..., $\mathbf{y}_k(t)$ системи (5.98), то, використовуючи матрицю

$$V(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & y_{11}(t) & \dots & y_{1k}(t)\\ 0 & 1 & 0 & \dots & y_{21}(t) & \dots & y_{2k}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{n-11}(t) & \dots & y_{n-1k}(t)\\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{n1}(t) & \dots & y_{nk}(t)\end{pmatrix},$$

систему (5.98) можна звести до системи з $n-k$ рівнянь.

Приклад. Знизити порядок системи

$$\begin{cases}\dot{x}_1=5x_1+4x_2;\\ \dot{x}_2=4x_1+5x_2,\end{cases}\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix},$$

якщо відомо її розв'язок $x_1=(e^t,\ e^{-t})$.

Розв'язання. Щоб виконати підстановку (5.99), побудуємо матрицю Y

$$V=[e_1,\ x_1]=\begin{pmatrix}1 & e^t\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix};\quad V^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -e^{-t}\end{pmatrix},$$

а потім матрицю

$$B(t)=\begin{pmatrix}9 & 0\\ -4e^{-t} & 0\end{pmatrix};\quad Bz=\begin{pmatrix}9 & 0\\ -4e^{-t} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix},$$

тоді система (5,105) набирає вигляду

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ -4e^{-t} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix},\quad \text{тобто}\quad \begin{cases}\dot{z}_1=9z_1;\\ \dot{z}_2=-4e^{-t}z_1.\end{cases}$$

Звідси

$$z_1=e^{9t},\ z_2=-\frac{1}{2}e^{8t},$$

а за формулою (5.99) знайдемо ще один розв'язок

$$x_2=V(t)\,z=\begin{pmatrix}1 & e^t\\ 0 & -e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{9t}\\ -\frac{1}{2}e^{8t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{9t}\\ \frac{1}{2}e^{9t}\end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок

$$x=C_1x_1+C_2x_2,$$

тобто

$$\begin{cases}x_1=C_1e^t+C_2e^{9t},\\ x_2=-C_1e^t+C_2e^{9t}.\end{cases}$$

5.16. Розв'язування диференціальних рівнянь і систем за допомогою операційного числення

Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами можуть бути проінтегровані операційним методом, суть якого полягає у використанні операційного числення для знаходження розв'язків. Цей метод дає змогу звести інтегрування диференціальних рівнянь до виконання чисто алгебраїчних операцій.

Наведемо необхідні відомості з операційного числення. При цьому скористаємося поняттям визначеного інтеграла від комплексної функції змінної t.

Нехай

$$f(t)=u(t)+iv(t),\quad i=\sqrt{-1},\tag{5.113}$$

де $u(t)$, $v(t)$ — дійсні функції від t, визначені в деякому інтервалі $(a,\ b)$. Тоді за означенням

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Інтегральне числення для дійсних функцій розповсюджується на комплексні функції виду (5.113). Нехай $x(t)$ — деяка дійсна або комплексна функція змінної t, визначена $\forall t>0$.

Розглянемо невласний інтеграл

$$\Phi(p)=\int_0^{+\infty}x(t)\,e^{-pt}dt,\tag{5.114}$$

залежний від параметра p, який є комплексним числом, $p=\sigma+i\tau$ (рис. 5.2). Інтеграл (5.114) називають *інтегралом Лапласа*.

Якщо $x(t)$ — функція неперервна і задовольняє нерівність

$$|x(t)|\leqslant Me^{\sigma_0 t}\ \forall t>0,\tag{5.115}$$

де M, σ_0 — дійсні числа, то інтеграл Лапласа збіжний при всіх значеннях p, дійсна частина яких більше σ_0: $\mathrm{Re}\,(p)=\sigma>\sigma_0$. Отже, вона є функцією комплексної змінної p, яка визначена у всіх точках комплексної площини (p), що лежить справа від прямої $\sigma=\sigma_0$ (див. рис. 5.2).

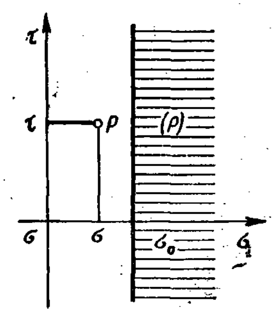

Рис. 5.2

Справді, оцінюючи підінтегральну функцію, маємо

$$|x(t)e^{-pt}| = |x(t)e^{-(\sigma+i\tau)t}| = |x(t)|\,|e^{-\sigma t}|\,|e^{-i\tau t}|.$$

Проте

$$|e^{-i\tau t}| = |\cos\tau t - i\sin\tau t| = 1,\quad |x(t)| \leqslant Me^{\sigma_0 t}.$$

Тоді

$$|x(t)e^{-pt}| \leqslant Me^{-(\sigma-\sigma_0)t}. \qquad (5.116)$$

Оскільки при $\sigma > \sigma_0$ $\int\limits_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t}dt$ збігається, то інтеграл (5.114) теж збігається при $\sigma > \sigma_0$.

Припустимо, що всі функції, для яких розглядається інтеграл Лапласа, неперервні і задовольняють умову (5.115).

Розглянемо оператор

$$X(p) = \int\limits_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt,$$

який кожній функції $x(t)$, що задовольняє умову (5.115), ставить у відповідність деяку функцію $X(p)$ комплексної змінної p. Функцію $X(p)$ називатимемо *зображенням функції* $x(t)$, а $x(t)$ — *оригіналом* для $X(p)$. Відповідність між ними символічно записують так:

$$x(t) \to X(p),\ \text{або}\ X(p) \leftarrow x(t),\ \text{або}\ L[x(t)] = X(p),$$

де стрілка напрямлена від оригіналу до зображення.

Зображення існує для будь-якої $x(t)$, яка задовольняє умову (5.115).

Наведемо деякі властивості зображень.

1°. *Однорідність*. Якщо $x(t) \to X(p)$, то

$$ax(t) \to aX(p),\ a = \text{const}.$$

2°. *Додавання*. Якщо $x_1(t) \to X_1(p)$, $x_2(t) \to X_2(p)$, то

$$x_1(t) + x_2(t) \to X_1(p) + X_2(p).$$

3°. *Лінійність*. Якщо $x_1(t) \to X_1(t)$, $x_2(t) \to X_2(p)$, ..., $x_n(t) \to X_n(p)$ і $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сталі, то

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \ldots + a_nx_n(t) \to a_1X_1(p) + a_2X_2(p) + \ldots + a_nX_n(p).$$

4°. *Диференціювання оригіналу*. Якщо $x(t)$ має неперервну похідну $x'(t)$, для якої виконується умова (5.115) і $x(t) \to X(p)$, то

$$x'(t) \to pX(p) - x(0).$$

Якщо $x(0) = 0$, то

$$x'(t) \to pX(p),$$

тобто диференціюванню оригіналу відповідає множення зображення на p.

Справді,

$$X'(p) = \int\limits_0^{+\infty} x'(t)e^{-pt}dt.$$

Інтегруючи частинами, дістаємо

$$X'(p) = e^{-pt}x(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt.$$

Оскільки згідно з оцінкою (5.116) функція $e^{-pt}x(t)$ переходить в нуль на верхній межі при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, то

$$X'(p) = -x(0) + pX(p),\ \text{або}\ x'(t) \to pX(p) - x(0).$$

Якщо $x(t)$ неперервно диференційовна до порядку n включно при умові (5.115), і $x(t) \to X(p)$, то

$$x^{(n)}(t) \to p^nX(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0). \qquad (5.117)$$

Якщо $x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$x^{(n)}(t) \to p^nX(p).$$

Покажемо, що формула (5.117) виконується для $n = 2$. Маємо

$$X''(p) = \int\limits_0^{+\infty} x''(t)e^{-pt}dt = x'(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} x'(t)e^{-pt}dt =$$

$$= -x'(0) + p(pX(p) - x(0)) = p^2X(p) - px(0) - x'(0),$$

тобто

$$x''(t) \to p^2X(p) - px(0) - x'(0).$$

Методом математичної індукції доводимо, що формула (5.117) виконується для довільного n.

5°. *Інтегрування оригіналу*. Якщо $x(t) \to X(p)$, то

$$\int\limits_0^t x(\tau)d\tau \to \frac{1}{p}X(p).$$

Отже, операції інтегрування в класі оригіналів відповідає операція ділення на p в класі зображень.

6°. *Подібність*. Якщо $x(t) \to X(p)$, $a > 0$, то

$$x(at) \to \frac{1}{a}X\left(\frac{p}{a}\right).$$

7°. *Загаювання аргументу оригіналу.* Якщо $x(t) \to X(p)$, то

$$x(t-b) \to e^{-bp} X(p).$$

8°. *Зміщення.* Якщо $x(t) \to X(p)$ і λ — комплексне число, то

$$e^{-\lambda t} x(t) \to X(p+\lambda).$$

9°. *Множення оригіналу на змінну t.* Якщо $x(t) \to X(p)$, то

$$t^n x(t) \to (-1)^n X^{(n)}(p).$$

Отже, операції множення на змінну t відповідає операція диференціювання в класі зображень.

10°. *Ділення оригіналу на змінну t.* Якщо $x(t) \to X(p)$, то

$$\frac{1}{t} x(t) \to \int_p^{+\infty} X(s)\, ds.$$

11°. *Зображення згортки оригіналів.* Згорткою двох інтегрованих з квадратом функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ називають функцію $y(t)$, яка визначається рівністю

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Нехай $x_1(t) \to X_1(p)$, $x_2(t) \to X_2(p)$, тоді

$$\int_0^{+\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau \to X_1(p)\, X_2(p).$$

Приклад. Дістати зображення функцій

$$x(t) = t^n \cdot 1 \text{ і } x(t) = e^{-\lambda t} t^n.$$

Розв'язання. Використаємо формулу

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}.$$

Оскільки

$$\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}},$$

то за властивістю 9°

$$t^n \cdot 1 = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

а за властивістю 8°

$$x(t) = e^{-\lambda t} t^n \to \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}.$$

Цей приклад показує, що в багатьох випадках зображення можна знаходити тільки завдяки властивостям 1°—11°.

Слід зазначити, що перетворення Лапласа має властивість єдиності, тобто коли двом функціям $x_1(t)$ і $x_2(t)$ відповідає одне і те саме зображення $X(p)$, то ці функції тотожно рівні:

$$x_1(t) \equiv x_2(t).$$

Операцію знаходження за зображенням $X(p)$ оригіналу називають оберненим перетворенням. Доведено, що оригінал перетворення Лапласа визначається за своїм зображенням однозначно.

Наведемо таблицю зображень найчастіше вживаних функцій (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t \cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \sin at$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \cos at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$
$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} X(p)$
$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{n!} t^n e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{x}(t) + a_n x(t) = f(t),$$

$t \geqslant 0$, $a_i \in R$, $f(t) \in C_{t>0}$, і початкові умови при $t = 0$:

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Позначимо $f(t) \to F(p)$, $x(t) \to X(p)$. Тоді, використовуючи властивість диференціювання оригіналу, послідовно знаходимо

$$\begin{array}{l|l}
a_n & x(t) \to X(p), \\
a_{n-1} & \dot{x}(t) \to pX(p) - x_0, \\
a_{n-2} & \ddot{x}(t) \to p^2X(p) - px_0 - \dot{x}_0, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_1 & x^{(n-1)}_{(t)} \to p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}\dot{x}_0 - \dots - x_0^{(n-2)}, \\
1 & x^{(n)}_{(t)} \to p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}\dot{x}_0 - \dots - px_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}.
\end{array}$$

Таким чином, дістаємо рівняння виду

$$(p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) = F(p) + x_0(p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \dot{x}_0(p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_0^{(n-2)}(p + a_1) + x_0^{(n-1)},$$

або

$$Q(p)X(p) = F(p) + P(p), \tag{5.118}$$

де $Q(p) = p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \dots + a_n$ — характеристичний многочлен лінійного однорідного рівняння. Рівняння (5.118) називають *допоміжним*, або *операторним* рівнянням для задачі Коші. З рівняння (5.118) маємо

$$X(p) = F(p)\frac{1}{Q(p)} + \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Якщо $x_1(t)$, $x_2(t)$ —оригінали функцій

$$\frac{1}{Q(p)} \quad \text{і} \quad \frac{P(p)}{Q(p)}$$

(їх можна знайти розкладанням на елементарні дроби), то для шуканого розв'язку $x(t)$, згідно з властивістю про згортку, дістаємо формулу

$$x(t) = \int_0^t f(t-\tau)\,x_1(\tau)\,d\tau + x_2(t). \tag{5.119}$$

При цьому $F(p)$ знаходити не треба.

Аналогічно шукають розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Якщо є система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = f_1(t); \\ \dot{x}_2 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = f_2(t); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = f_n(t) \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0), \dots, x_n(0)$, то перетворенням Лапласа вона переводиться в систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n шуканих зображень $X_1(p), \dots, X_n(p)$:

$$\begin{cases} (p + a_{11})X_1(p) + a_{12}X_2(p) + \dots + a_{1n}X_n(p) = F_1(p) + x_1(0); \\ a_{21}X_1(p) + (p + a_{22})X_2(p) + \dots + a_{2n}X_n(p) = F_2(p) + x_2(0); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}X_1(p) + a_{n2}X_2(p) + \dots + (p + a_{nn})X_n(p) = F_n(p) + x_n(0). \end{cases}$$

За розв'язками цієї системи $X_1(p), \dots, X_n(p)$ знаходимо розв'язок $x_1(t), \dots, x_n(t)$ заданої системи.

Приклади

1. Знайти розв'язок рівняння

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = f(t),\ x(0) = 1,$$

де

$$f(t) = 2[(1+t)e^{t^2} + (1+2t)].$$

Розв'язання. Застосуємо перетворення Лапласа. Маємо

$$pX(p) - 1 + 2X(p) = L[f(t)],$$

звідки

$$X(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{L[f(t)]}{p+2}.$$

Використовуючи таблицю і властивість згортки (5.119), знаходимо

$$x(t) = e^{-2t} + 2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}[(1+\tau)e^{\tau^2} + (1+2\tau)]\,d\tau.$$

Обчисливши інтеграл, дістанемо розв'язок

$$x(t) = e^{t^2} + 2t.$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\ddot{x} + 4x = \sin 3t,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0.$$

Розв'язання. Складемо допоміжне рівняння

$$(p^2 + 4)X(p) = \frac{3}{p^2 + 9} \Rightarrow X(p) = \frac{3}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.$$

Розкладемо $X(p)$ на елементарні дроби:

$$X(p) = -\frac{1}{5}\frac{3}{p^2 + 9} + \frac{3}{10}\frac{2}{p^2 + 4}.$$

Знайдемо відповідно до таблиці шуканий розв'язок:

$$x(t) = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t.$$

3. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} 3\dot{x} + 2x + \dot{y} = 1; \\ \dot{x} + 4\dot{y} + 3y = 0 \end{cases}$$

при $t = 0$; $x = 0$, $y = 0$.

Розв'язання. Позначимо $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$ і запишемо систему допоміжних рівнянь

$$\begin{cases}(3p+2)X(p)+pY(p)=\dfrac{1}{p};\\ pX(p)+(4p+3)Y(p)=0.\end{cases}$$

Звідси

$$X(p)=\frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)},\quad Y(p)=-\frac{1}{(p+1)(11p+6)}.$$

Розкладаючи на елементарні дроби, дістаемо

$$X(p)=\frac{1}{2p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{33}{10(11p+6)},$$

$$Y(p)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{11}{11p+6}\right).$$

За таблицею зображень знаходимо оригінали

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},\\ y(t)=\dfrac{1}{5}(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}).\end{cases}$$

4. Розв'язати систему

$$\begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+\ddot{y}-y=e^{t}, & x(0)=y(0)=\dot{y}(0)=0,\\ \dot{x}+2x-\dot{y}+y=e^{-t}, & \dot{x}(0)=1.\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $x(t)\to X(p)$, $y(t)\to Y(p)$. Запишемо систему операторних рівнянь

$$\begin{cases}(p^2+p)X+(p^2-1)Y=\dfrac{p}{p-1};\\ (p+2)X+(-p+1)Y=\dfrac{1}{p+1}.\end{cases}$$

Тоді, знаходячи $X(p)$, $Y(p)$ і розкладаючи на елементарні дроби, дістаемо

$$X=\frac{1}{4}\,\frac{1}{p^2-1}+\frac{3}{4}\,\frac{1}{(p+1)^2},\quad Y=\frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Оскільки

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+1}\right)=-\frac{1}{(p+1)^2}\leftarrow -te^{-t};$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2-1}\right)=-\frac{2p}{(p^2-1)^2}\leftarrow -t\,\mathrm{sh}\,t,$$

то остаточно

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,t+\dfrac{3}{4}\,te^{-t},\\ y(t)=\dfrac{3}{4}\,t\,\mathrm{sh}\,t; \qquad \mathrm{sh}\,t=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}.\end{cases}$$

Наведемо оригінали елементарних дробів перших трьох типів, які широко застосовуються при інтегруванні диференціальних рівнянь.

I. $\dfrac{A}{p-a}\leftarrow Ae^{at}$;

II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}\leftarrow A\dfrac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}$;

III. $\dfrac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}\leftarrow e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(A\cos qt+\dfrac{C}{q}\sin qt\right)$,

$$q=\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},\quad C=B-\frac{Aa_1}{2}.$$

ВПРАВИ

За допомогою операційного числення знайти розв'язки таких задач:

1. $\dot{x}+x=1$; $\quad x(0)=0$.
2. $\ddot{x}+4x=1$; $\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$.
3. $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=t$; $\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$.
4. $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=\sin t$; $\quad x(0)=1,\ \dot{x}(0)=2$.
5. $\ddot{x}+x=\sin 2t$; $\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$.
6. $\ddot{x}+x=t\cos 2t$; $\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$.
7. $\dddot{x}+x=0$: $\quad x(0)=1,\ \dot{x}(0)=3,\ \ddot{x}(0)=8$.
8. $\ddot{x}-4x=t-1$; $\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$.
9. $\ddot{x}+\dot{x}=t^2+2t$; $\quad x(0)=4,\ \dot{x}(0)=-2$.
10. $\ddot{x}-\dot{x}=te^{t}$; $\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$.
11. $\begin{cases}3\dot{x}+2x+y=1,\\ \dot{x}+4\dot{y}+3y=0;\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=0.\end{matrix}$
12. $\begin{cases}\dot{x}+7x=y+5,\\ \dot{y}+2x+5y=-37t;\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=0.\end{matrix}$
13. $\begin{cases}\dot{x}+y=0;\\ \dot{y}+x=0;\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x(0)=2\\ y(0)=0.\end{matrix}$
14. $\begin{cases}\dot{x}+x-2y=0,\\ \dot{y}+x+4y=0;\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x(0)=1,\\ y(0)=1.\end{matrix}$
15. $\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=2(x+y);\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x(0)=1,\\ y(0)=1.\end{matrix}$
16. $\begin{cases}\dot{x}+2y=3t,\\ \dot{y}-2x=4;\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x(0)=2,\\ y(0)=3.\end{matrix}$

17. $\begin{cases} \dot{x} + x = y + e^t, & x(0) = 1, \\ \dot{y} + y = x + e^t; & y(0) = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = x + y; & y(0) = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} + 7x - y = 0, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 2x + 5y = 0; & y(0) = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 0, & x(0) = 1, \\ \dot{x} - 2\dot{y} + x = 0; & y(0) = -1. \end{cases}$

Розділ 6

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

6.1. Основні означення й теореми

При дослідженні реальних процесів і явищ, описуваних системами диференціальних рівнянь, виникає практична необхідність не тільки у відшуканні їх розв'язку, а й у виявленні різних властивостей цих розв'язків. Оскільки проблема відшукання розв'язків у загальному випадку нерозв'язна, то виникає питання про вивчення тих або інших властивостей розв'язків диференціальних рівнянь, не маючи цих розв'язків, за непрямими їх ознаками і властивостями диференціальних рівнянь.

Це питання розглядається в якісній теорії диференціальних рівнянь, одним з основних розділів якої є теорія стійкості розв'язків, або теорія стійкості руху.

Наприклад, розглянемо поведінку кульки всередині (рис. 6.1,*а*) і зовні (рис. 6.1,*б*) параболічної поверхні.

Якщо у випадку *а* кульку вивести в положення рівноваги в деякий її окіл, то вона перекочуватиметься всередині поверхні, залишаючись в околі стійкого положення рівноваги.

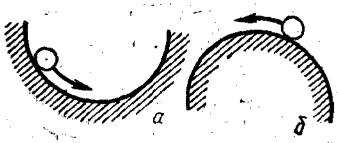

Рис. 6.1

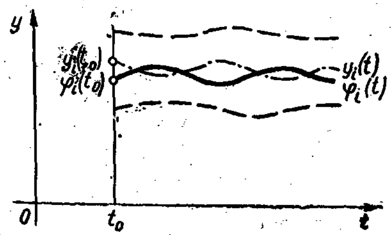

Рис. 6.2

У випадку *б* кулька віддаляється від положення рівноваги як завгодно далеко. Говорять, що в першому випадку положення рівноваги стійке. Точніше, якщо об'єкт з положення рівноваги виходить в нескінченно малий окіл і залишається в ньому, то положення рівноваги називається *стійким за Ляпуновим.*

Нехай деяке явище описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{y}_i = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \; i = 1, \ldots, n, \tag{6.1}$$

з початковими умовами

$$y_i(t_0) = y_{i0}, \; i = 1, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Умови (6.2) є звичайно результатами вимірів і тому не зовсім точні.

Якщо малі зміни початкових даних дають великі відхилення розв'язків, то такі розв'язки системи не придатні, вони навіть наближено не описують розглядуване явище. Тому важливо знати умови, при яких малі зміни початкових умов (6.2) дають малі відхилення розв'язків системи (6.1).

Якщо змінна t розглядається в досить малому проміжку $|t_0 - t| < T$, то відповідь на поставлене питання можна дістати, використовуючи теорему існування і єдиності розв'язку.

ТЕОРЕМА 6.1 (про неперервну залежність розв'язку від початкових умов). *Якщо права частина диференціального рівняння*

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{6.3}$$

неперервна і по змінній y має обмежену частинну похідну, $|f'_y| \leqslant N$ в прямокутнику

$$D = \{t_0 - a \leqslant t \leqslant t_0 + a, \; y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\},$$

то розв'язок рівняння (6.3) $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, що задовольняє початкові умови $y(t_0) = y_0$, неперервно залежить від початкових даних.

Тобто для $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що коли $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$, то

$$|y(t, t_0, y_0) - y(t, t_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

при

$$|t_0 - t| < T, \; T < T_0, \; T_0 = \min\left\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right\},$$

$$M = \max_{(t, y) \in D} |f(t, y)|.$$

Аналогічне твердження справедливе й для системи (6.1).

При виконанні всіх умов теореми 6.1 говорять, що задача коректно поставлена.

Кажуть, що задача Коші

$$\dot{\mathbf{y}} = f(t, y),$$
$$y(t_0) = y_0$$

поставлена коректно за Адамаром, якщо виконуються умови:

1) розв'язок цієї задачі існує;
2) він єдиний;
3) цей розв'язок неперервно залежить від початкових умов.

Питання, пов'язані з поняттям коректності, вивчає спеціальна математична теорія — *теорія коректності*. Її завдання — встановлення методів дослідження задач на коректність та ознак коректності постановок різних класів математичних, зокрема диференціальних, задач.

Якщо аргумент $t \in [t_0, \infty)$ може набувати довільних значень, то питання залежності розв'язків від початкових даних вивчає теорія стійкості.

Означення. *Нехай $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ — розв'язок системи (6.1). Розв'язок $\varphi(t)$ системи (6.1) називають стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільного розв'язку $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ тієї самої системи, початкові значення якого задовольняють нерівностям*

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta, \ i = 1, \ldots, n, \tag{6.4}$$

справедливі нерівності

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n; \ \forall t \in [t_0, \infty). \tag{6.5}$$

Таким чином, розв'язок $\varphi(t)$ стійкий за Ляпуновим, якщо близькі до нього розв'язки при початкових умовах залишаються близькими і для всіх $t \geqslant t_0$ (рис. 6.2).

Якщо розв'язок стійкий за Ляпуновим і, крім того,

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{6.6}$$

то його називають *асимптотично стійким*.

Зазначимо, що з (6.6) не випливає стійкість за Ляпуновим.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язки рівняння

$$\dot{y} = -y, \ y(t_0) = y_0.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком цього рівняння є $y = C \exp(-t)$, а розв'язком задачі Коші є

$$y = y_0 \exp(t_0 - t).$$

Якщо тепер задамо інші початкові умови $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$, то розв'язок матиме вигляд

$$\bar{y} = \bar{y}_0 \exp(t_0 - t).$$

Отже,

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \exp(t_0 - t) \leqslant |y_0 - y_0|$$

при $t \geqslant t_0$. Тому якщо $|y_0 - \bar{y}_0| \leqslant \delta = \varepsilon$, то $|y - \bar{y}| \leqslant \varepsilon$, тобто розв'язок $y = y_0 \exp(t_0 - t)$ стійкий за Ляпуновим при $t \geqslant t_0$.

Цей розв'язок також і асимптотично стійкий, оскільки

$$\lim_{t \to +\infty} |y - \bar{y}| = \lim_{t \to +\infty} |y_0 - \bar{y}_0| \exp(t_0 - t) = 0.$$

Дослідження на стійкість за Ляпуновим довільного розв'язку $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ системи (6.1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального (тотожно рівного нулю) розв'язку деякої іншої системи. Для цього треба перейти до нових невідомих функцій за формулою

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t), \ i = 1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Тоді

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i + \dot{\varphi}_i.$$

Тому система (6.1) перетворюється в систему

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1 + \varphi_1(t), \ldots, x_n + \varphi_n(t)) - \\ - f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \ i = 1, \ldots, n. \tag{6.8}$$

Ця система має тривіальний розв'язок

$$x_i(t) \equiv 0, \ i = 1, \ldots, n. \tag{6.9}$$

ТЕОРЕМА 6.2. *Розв'язок $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ системи (6.1) стійкий за Ляпуновим (асимптотично стійкий) тоді і тільки тоді, коли стійкий за Ляпуновим (асимптотично стійкий) тривіальний розв'язок (точка спокою) системи (6.8).*

Цей розв'язок має таку властивість: точка $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ не рухається при зміні t, а залишається на місці. Розв'язок (6.9) і точку $(0, \ldots, 0)$ при цьому називають відповідно *положенням рівноваги системи (6.8)* і *точкою спокою*.

Умови стійкості для точки спокою $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ можна сформулювати так: точка спокою $x_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$ системи (6.8) стійка за Ляпуновим, якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \ i = 1, \ldots, n,$$

випливає нерівність

$$|x_i(t)| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n; \ \forall t \in [t_0, \infty).$$

Це означає, що траєкторія, початкова точка якої знаходиться в деякому δ-околі початку координат, при $t \geqslant t_0$ не виходить за межі довільного ε-околу початку координат.

Слід зазначити, що методи дослідження систем на стійкість розділені Ляпуновим на дві категорії. До першої віднесені методи і прийоми дослідження систем на стійкість, які використовують розв'язки цих систем або їхні оцінки. Сукупність способів першої категорії названа ним першим методом і в літературу ввійшла як перший метод Ляпунова.

До другої категорії Ляпунов відніс методи і прийоми, які використовують непрямі ознаки, за якими встановлюється стійкість точки спокою систем. Сукупність способів і прийомів другої категорії Ляпунов назвав другим методом, в літературу вона ввійшла як другий метод Ляпунова.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \tag{6.10}$$

або

$$\dot{x} = Ax. \tag{6.11}$$

Для неї точка спокою $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Введемо систему (6.10) в окіл цієї точки заміною $x_i = \Delta x_i$. Тоді матимемо систему

$$\Delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_k, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, n.$$

Характеристичне рівняння для цієї системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6.12}$$

Нехай λ_i — простий дійсний корінь рівняння (6.12). Тоді знаходимо

$$\Delta x_i = C_i e^{\lambda_i t} \ \text{ і } \ |\Delta x_i| = |C_i| e^{\lambda_i t}.$$

Розглянемо поведінку цього розв'язку при $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} |\Delta x_i| = \begin{cases} 0, & \lambda_i < 0; \\ \infty, & \lambda_i > 0. \end{cases}$$

Нехай λ_i — дійсний корінь кратності m, тоді

$$\Delta x_i = C_i t^{m-1} e^{\lambda_i t} \ \text{ і } \ |\Delta x_i| = |C_i| \, |t^{m-1}| e^{\lambda_i t}.$$

Для цього розв'язку при $t \to \infty$ маємо

$$\lim_{t\to\infty} |\Delta x_i| = \begin{cases} 0, & \lambda_i < 0; \\ \infty, & \lambda_i > 0. \end{cases}$$

Нехай, нарешті, λ_i — комплексно-спряжений корінь кратності m, тоді

$$\Delta x_i = C_i t^{m-1} e^{(\alpha \pm \beta i)t} \ \text{ і } \ |\Delta x_i| = |C_i| \, |t^{m-1}| e^{\alpha t}.$$

Розглянемо поведінку цього розв'язку при $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} |\Delta x_i| = \begin{cases} 0, & \alpha < 0; \\ \infty, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Узагальнюючи ці випадки, дістаємо таке твердження.

ТЕОРЕМА 6.3. *Розв'язки лінійної системи диференціальних рівнянь (6.10) із сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді*

1) *стійкі, коли дійсні частини власних значень матриці коефіцієнтів* A *недодатні, причому значенням з нульовою дійсною частиною відповідають одновимірні клітини Жордана, тобто такі власні значення мають прості елементарні ділянки;*

2) *асимптотично стійкі, коли дійсні частини власних значень матриці* A *від'ємні;*

3) *нестійкі, коли хоча б одному власному значенню матриці з нульовою дійсною частиною відповідає неодновимірна клітина Жордана (таке власне значення має простий елементарний дільник) або коли дійсна частина принаймні одного власного значення матриці* A *додатна.*

Наприклад, розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = px_1 - x_2, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}$$

стійкі при $p = 0$, асимптотично стійкі при $p < 0$ і нестійкі при $p > 0$, бо власні значення матриці A дорівнюють значенням

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p} \ \text{ і } \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + p}.$$

У першому випадку ці значення недодатні і прості, у другому — мають від'ємні дійсні частини, у третьому — одне із значень додатне.

Отже, для систем із сталими коефіцієнтами при розв'язуванні задачі на стійкість важливо з'ясувати, який знак має дійсна частина коренів характеристичного рівняння.

Умови, при яких дійсні частини власних значень матриці A від'ємні, задаються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 6.4 (Рауса—Гурвіца). *Дійсні частини всіх коренів рівняння*

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатними є всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

тобто коли

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\ldots,\ \Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0.$$

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y^{IV} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^4 + 5k^3 + 13k^2 + 19k + 10 = 0.$$

Тут $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_3 = 19$, $a_4 = 10$. Виписуємо діагональні мінори Гурвіца:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0,\ \Delta_1 = 5 > 0.$$

Маємо $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Отже, тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ заданого рівняння асимптотично стійкий.

ВПРАВИ

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок заданих диференціальних рівнянь.

1. $y''' - 3y' + 2y = 0$ 2. $y''' + 2y'' + 6y' + y = 0$
3. $y''' - 9y' + 8y = 0$ 4. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$
5. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$ 6. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$
7. $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0$ 8. $y''' + 27y = 0$
9. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$ 10. $y''' - 3y'' + y = 0.$

6.2. Стійкість за першим наближенням

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n, \qquad (6.13)$$

і нехай $x_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, є точкою спокою системи (6.13), тобто

$$f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Нехай функції $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ диференційовні в початку координат достатнє число раз.

Розвинемо в ряд по x функції f_i за формулою Тейлора в околі початку координат. Дістанемо

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + R_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n, \qquad (6.14)$$

де

$$a_{ik} = \frac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_k},$$

а R_i — члени другого порядку мализни відносно $x_1, \ldots, x_i$. Розглянемо окремо від системи (6.14) систему

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k,\ i = 1, \ldots, n, \qquad (6.15)$$

яку називають *системою першого наближення для системи (6.13)*.

Доведено такі твердження.

1. Якщо всі корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.16)$$

мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок $x_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, систем (6.15) і (6.14) асимптотично стійкий.

2. Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння має додатну дійсну частину, то нульовий розв'язок системи (6.14) нестійкий.

3. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння недодатні, причому дійсна частина хоча б одного кореня дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, взагалі кажучи, неможливе (починають впливати нелінійні члени R_i).

Приклади

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5y^2; \\ \dot{y} = 3x + y + \frac{1}{2}x^3. \end{cases} \qquad (6.17)$$

Розв'язання. Розглянемо систему першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = 3x + y, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.18)$$

Нелінійні члени задовольняють потрібні умови: їх порядок $\geqslant 2$. Складемо характеристичне рівняння для системи (6.18):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0.$$

Воно має дійсні корені $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ і $\lambda_1 > 0$.

Отже, нульовий розв'язок $x = 0$, $y = 0$ системи (6.17) нестійкий.

2. Дослідити на стійкість за першим наближенням систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y}; \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1-4y), \ a = \text{const}. \end{cases}$$

Розв'язання. Виділимо лінійну частину функцій x, y за формулою Тейлора:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \psi_1(x, y); \\ \dot{y} = ax - 4y + \psi_2(x, y). \end{cases}$$

Тут функції ψ_1 і ψ_2 рівні $O(x^2 + y^2)$. Знаходимо корені рівняння:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}.$$

При $a > 1$ корені комплексні, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -3 < 0$, а при $-8 < a < 1$ корені дійсні від'ємні. Отже, у цих випадках нульовий розв'язок асимптотично стійкий.

При $a < -8$ один корінь додатний. Отже, нульовий розв'язок нестійкий.

При $a = -8$ маємо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$, і питання стійкості за цими даними не розв'язується.

6.3. Дослідження стійкості за методом функцій Ляпунова

Нехай $V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — скалярна функція змінної $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, визначена і неперервно диференційовна в кулі

$$K_r = \{\boldsymbol{x} \in R^n: \|\boldsymbol{x}\| < r, \ r > 0\},$$

причому $V(0) = 0$.

Функцію $V(\boldsymbol{x})$ називають *знаковизначеною додатною* в кулі K_r, якщо при всіх $\boldsymbol{x} \in K_r$, крім точки $\boldsymbol{x} = 0$, виконується нерівність $V(\boldsymbol{x}) > 0$. Якщо виконується нерівність $V(\boldsymbol{x}) < 0$, то функцію $V(\boldsymbol{x})$ називають *знаковизначеною від'ємною.*

В обох цих випадках $V(\boldsymbol{x})$ називають знаковизначеною.

Функцію $V(\boldsymbol{x})$ називають *знакосталою* в кулі K_r, якщо $\forall \boldsymbol{x} \in K_r$ виконується нерівність $V(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ або $V(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$. У першому випадку $V(\boldsymbol{x})$ є додатно стала, а в другому — від'ємно стала

Якщо функція $V(\boldsymbol{x})$ набуває в кулі K_r як додатних, так і від'ємних значень, то її називають *знакозмінною* в K_r.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), \qquad (6.19)$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n)$$

у припущенні, що функція $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ визначена, неперервна в кулі K_r при деякому r, задовольняє умову Ліпшица в K_r і $f(0) = 0$. Остання рівність означає, що $\boldsymbol{x} = 0$ є розв'язком системи (6.19).

Нехай $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ — деякий розв'язок системи (6.19). Вздовж інтегральної кривої цього розв'язку функція $V = V(\boldsymbol{x}(t))$ як функція змінної t неперервно диференційовна, і її похідна це

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k(\boldsymbol{x}) = \langle \operatorname{grad} V, \boldsymbol{f} \rangle.$$

Похідною по t від функції $V(\boldsymbol{x})$, складеною за системою (6.19), називають

$$\dot{V} = \langle \operatorname{grad} V, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rangle.$$

ТЕОРЕМА 6.5 (Ляпунова). *Якщо для системи (6.19) в області K_r існує знаковизначена функція $V(\boldsymbol{x})$, похідна від якої по змінній t складена відповідно до рівнянь (6.19) і є знакосталою функцією із знаком, протилежним знаку функції $V(\boldsymbol{x})$, або тотожно обертається в нуль, то нульовий розв'язок $\boldsymbol{x} = 0$ системи (6.19) стійкий (у розумінні Ляпунова).*

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою $x = y = 0$ системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $V = x^2 + y^2$ задовольняє умови теореми Ляпунова: $V \geqslant 0$, $\dot{v} = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$ і вздовж інтегральних кривих згідно із заданою системою

$$\dot{V} = 2(x(y - x^5) + y(-x - y^3)) = -2(x^6 + y^4) \leqslant 0.$$

Отже, точка спокою $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ стійка.

ТЕОРЕМА 6.6 (Ляпунова про асимптотичну стійкість). *Якщо для системи (6.19) існує знаковизначена в області K_r функція $V(x)$, похідна по t від якої $\dot{V}$ складена відповідно до рівнянь (6.19) і є також знаковизначеною із знаком, протилежним знаку функції $V(x)$, то нульовий розв'язок системи (6.19) асимптотично стійкий.*

Приклад. Довести, що система

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3; \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

має асимптотично стійкий розв'язок $x = 0$, $y = 0$.

Розв'язання. Справді, функція $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ та її похідна

$$\dot{V}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^4) < 0$$

при $x, y \neq 0$ задовольняють умовам теореми 6.6. Отже, точка спокою цієї системи асимптотично стійка.

ТЕОРЕМА 6.7. (Ляпунова про нестійкість). *Якщо для системи рівнянь (6.14) існує функція $V(x)$, така, що похідна по t від якої складена відповідно до рівнянь системи (6.19) і є знаковизначеною (сама функція $V(x)$ в довільному околі точки $x = 0$ не є знакосталою) із знаком, протилежним знаку $\dot{V}(x)$, то нульовий розв'язок системи рівнянь (6.19) нестійкий.*

Розділ 7

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для досить обмежених класів диференціальних рівнянь можна дістати розв'язок в квадратурах і навіть в елементарних функціях. Тому постає важливе питання про побудову наближених розв'язків диференціальних рівнянь. Методи побудови їх з наперед заданою точністю називають наближеними методами інтегрування диференціальних рівнянь.

Теорія цих методів добре розвинена і є могутнім апаратом дослідження процесів, описуваних диференціальними

рівняннями, які не інтегруються в квадратурах. Вона розвивається в основному в двох напрямах: теорія аналітичних наближених методів інтегрування та теорія чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь.

Аналітичні методи — це побудова наближених розв'язків диференціальних рівнянь із заданим ступенем точності у вигляді аналітичних виразів, тобто формул. Сюди відносять асимптотичні методи, метод послідовних наближень Пікара, метод степеневих рядів, рядів Фур'є та ін.

Чисельні методи інтегрування диференціальних рівнянь є основним інструментом доведення розв'язку диференціальних задач до числа. Серед них слід виділити метод ламаних Ейлера, метод Рунге-Кутта, метод Адамса, метод скінченних різниць.

Аналітичні і чисельні методи наближеного розв'язування диференціальних рівнянь органічно зв'язані, вони взаємно збагачують і доповнюють один одного. Цей взаємозв'язок дав розвиток так званому чисельно-аналітичному методу А. М. Самойленко.

7.1. Метод послідовних наближень

При доведенні теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y), \tag{7.1}$$

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0 \tag{7.2}$$

було показано, що ця задача еквівалентна дослідженню розв'язку інтегрального рівняння

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{7.3}$$

Наближений розв'язок інтегрального рівняння знаходиться за рекурентною формулою

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx, \tag{7.4}$$

причому за початкове (нульове) наближення можна взяти будь-яку відому функцію $y_0(x)$.

Як правило, за нульове наближення беруть початкове значення y_0 (7.2) шуканої функції.

Здобуті наближення збіжні до розв'язку в інтервалі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, де ε — найменше з чисел a і b/M, причому a і b — довільні додатні числа, для яких

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

а M — константа, що обмежує значення функції $f(x, y)$ в цій області:

$$|f(x, y)| < M \quad \forall x, y \in D.$$

Приклад. Методом послідовних наближень знайти розв'язок задачі

$$y' = y, \ y(0) = 1. \tag{7.5}$$

Розв'язання. Задане рівняння лінійне, тому, згідно з теоремою Коші, існує розв'язок і притому єдиний. Перейдемо до інтегрального рівняння (7.3)

$$y = 1 + \int_0^x y(x)\,dx.$$

За нульове наближення візьмемо початкове значення

$$y_0(x) \equiv 1.$$

Тоді за формулами (7.4)

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dx = 1 + x;$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + x)\,dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \ldots,$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = e^x.$$

Гранична функція $y = e^x$ і є шуканим розв'язком. Кожне з послідовних наближень $y_n(x)$ дає наближене значення шуканого розв'язку:

$$y = e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \equiv y_n(x).$$

При цьому чим більший номер наближення, тим менша похибка при заміні точного розв'язку його n-м наближенням.

Цей метод широко використовують для знаходження кількох перших наближень у різних класів диференціальних рівнянь або їх систем.

Приклади

1. Знайти розв'язок задачі Коші для системи

$$\begin{cases} \dot{y} = 5y + 4z; & y(0) = 1, \\ \dot{z} = 4y + 5z, & z(0) = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{cases} y = 1 + \int_0^t (5y + 4z)\,dt, & y_0(t) = 1; \\ z = -1 + \int_0^t (4y + 5z)\,dt, & z_0(t) = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = 1 + \int_0^t 1 \cdot dt = 1 + t; \\ z_1(t) = -1 + \int_0^t (-1)\,dt = -(1 + t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(t) = 1 + \int_0^t (5(1 + t) - 4(1 + t))\,dt = 1 + t + \frac{t^2}{2!}; \\ z_2(t) = -1 + \int_0^t (4(1 + t) - 5(1 + t))\,dt = -\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right), \end{cases}$$

. . . .

$$\begin{cases} y_n(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) \underset{n\to\infty}{\to} e^t; \\ z_n(t) = -\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) \underset{n\to\infty}{\to} -e^t. \end{cases}$$

Отже, шуканим розв'язком заданої задачі є сукупність функцій $y = e^t$, $z = -e^t$. Цей розв'язок єдиний за теоремою Коші існування і єдиності розв'язку.

2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y' = e^x + y^2, \ x_0 = 0, \ y_0 = 0.$$

Розв'язання. Знаходимо перші наближення:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (y_0^2(x) + e^x)\,dx = \int_0^x e^x\,dx = e^x - 1;$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (y_1^2(x) + e^x)\,dx = \int_0^x ((e^x - 1)^2 + e^x)\,dx =$$

$$= \int_0^x (e^{2x} - e^x + 1)\,dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + \frac{1}{2}.$$

Для знаходження інтервалу збіжності покладемо $a = 1$, $b = 1$. Тоді $M = e + 1$, $\frac{b}{M} = \frac{1}{e+1} > 0{,}25$. Отже, здобуті наближення збігаються до шуканого розв'язку в інтервалі $(-0{,}25;\ 0{,}25)$.

Покажемо, як звести задачу Коші для лінійного диференціального рівняння до інтегрального рівняння. Маємо

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\,y = f(x), \qquad (7.6)$$

де $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$ — неперервні на (a, b) функції. При $x = x_0$

$$y(x) = y_0,\ y'(x) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x) = y_0^{(n-1)}. \qquad (7.7)$$

Нехай існує розв'язок задачі (7.6), (7.7). Покладемо

$$y^{(n)}(x) = u(x),$$

$$y^{(n-1)}(x) = y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x} u(t)\,dt,$$

$$y^{(n-2)}(x) = y_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{x-t}{1!}\,u(t)\,dt,$$

$$y^{(n-3)}(x) = y_0^{(n-3)} + y_0^{(n-2)}(x - x_0) + y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2!}\,u(t)\,dt,$$

. . . .

$$y^{(n-m)}(x) = y_0^{(n-m)} + y_0^{(n-m+1)}(x - x_0) + \cdots + y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\,u(t)\,dt,$$

. . . .

$$y(x) = y_0 + y_0'\frac{x-x_0}{1!} + y_0''\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,u(t)\,dt. \qquad (7.8)$$

Наведемо короткий запис цих виразів:

$$y^{(n-m)}(x) = \sum_{r=1}^{m} y_0^{n-r}\frac{(x-x_0)^{m-r}}{(m-r)!} + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{m-1}\,u(t)\,dt. \qquad (7.9)$$

Тоді рівняння (7.6) матиме вигляд

$$y^{(n)} + \sum_{m=1}^{n} p_m(x)\,y^{(n-m)} = f(x).$$

Підставимо сюди знайдені вирази. Дістанемо

$$u(x) + \int_{x_0}^{x} \sum_{m=1}^{n} p_m(x)\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\,u(t)\,dt + \sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} y_0^{(n-r)}\frac{(x-x_0)^{m-r}}{(m-r)!} = f(x).$$

Введемо позначення

$$K(x, t) = -\sum_{m=1}^{n} p_m(x)\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$h(x) = f(x) - \sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} y_0^{(n-r)}\frac{(x-x_0)^{m-r}}{(m-r)!}.$$

Отже, для $u(x)$ маємо інтегральне рівняння

$$u(x) = h(x) + \int_{x_0}^{x} K(x, t)\,u(t)\,dt. \qquad (7.10)$$

Нехай, навпаки, інтегральне рівняння (7.10) має розв'язок $u(x)$. Легко побачити, що функція (7.8) є розв'язком задачі Коші (7.6), (7.7). Справді, початкові умови задовольняються, диференціювання виразу (7.8) дає співвідношення (7.9). Підставляючи їх у рівняння (7.6), дістаємо тотожність (рівність (7.10) є при цьому тотожністю).

Таким чином, між розв'язками задачі Коші (7.6), (7.7) і розв'язками інтегрального рівняння (7.10) має місце взаємно однозначна відповідність, яка задається формулою (7.8).

Аналогічно попередньому методом Пікара показуємо, що рівняння (7.10) має єдиний розв'язок, отже, і задача Коші (7.6), (7.7) має теж єдиний розв'язок.

Приклад. Перейти від задачі Коші,

$$\ddot{x} + (1+t^2)x = \cos t,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 2$$

до інтегрального рівняння.

Розв'язання. Нехай $\ddot{x} = u(t)$. Тоді $\dot{x} = 2 + \int\limits_0^t u(s)ds$,

$$x(t) = 2t + \int\limits_0^t \int\limits_0^t u(s)\,ds\,ds, \text{ або } x(t) = 2t + \int\limits_0^t \frac{t-s}{1!}\,u(s)\,ds.$$

Підставляючи значення $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ в задане рівняння, маємо

$$u(t) = \cos t - 2t(1+t^2) - \int\limits_0^t (1+t^2)(t-s)\,u(s)\,ds,$$

що й треба було довести.

ВПРАВИ

Знайти перші три послідовні наближення таких задач:

1. $y' = x^2 - y^2$; $\quad y(-1) = 0$.
2. $y' = x^2 + y^2$; $\quad y(0) = 0$.
3. $y' = x + y$; $\quad y(0) = 1$.
4. $y' = 2y - 2x^2 - 3$; $\quad y(0) = 2$.
5. $xy' = 2x - y$; $\quad y(1) = 2$.
6. $y' = x + y^2$; $\quad y(0) = 0$.
7. $y' + \frac{1}{x-1}y = 0$; $\quad y(0) = 1$.
8. $y' = x - y$; $\quad y(0) = 1$.
9. $y' = x^2y^2 - 1$; $\quad y(0) = 1$.
10. $y' = x^2 + y$; $\quad y(0) = 1$.

Звести до інтегрального рівняння такі задачі Коші:

1. $y'' + y = x$; $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
2. $y'' + xy' + y = 5$; $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
3. $y' - y = e^x$; $\quad y(0) = 1$.
4. $y'' + y = \cos x$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$.
5. $y'' - y' \sin x + e^x y = x$; $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.
6. $y'' - 5y' + 6y = 0$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$.
7. $y'' + x^2 y = \cos x$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 2$.
8. $y''' - 2xy = 0$; $\quad y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = y''(0) = 1$.
9. $y''' + xy'' = 1$; $\quad y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.
10. $y'' - y = \sin x$; $\quad y(0) = y'(0) = 1$.

Доведемо існування і єдиність розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу Коші

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x} \in R^n. \tag{7.11}$$

ТЕОРЕМА. *Нехай $\boldsymbol{A}(t)$ $(n \times n)$-матриця з неперервними на $[a, b]$ елементами $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тоді на $[a, b]$ існує єдиний неперервно диференційовний вектор $\boldsymbol{x}(t)$, що задовольняє рівняння (7.11), якщо $t_0 \in [a, b]$.*

Доведення. Припустимо, що вектор $\boldsymbol{x}(t)$ задовольняє умови теореми, і перейдемо від рівняння (7.11) до інтегрального рівняння

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{A}(\tau)\,\boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau. \tag{7.12}$$

Оскільки $\boldsymbol{A}(t)$ і $\boldsymbol{x}(t)$ неперервні, $\int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{x}(\tau)d\tau$ — диференційовна функція, і, отже, вектор $\boldsymbol{x}(t)$, визначений формулою (7.12), диференційовний. Якщо в рівнянні (7.12) $t = t_0$, то $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Таким чином, вектор $\boldsymbol{x}(t)$, визначений формулою (7.12), може бути розв'язком рівняння (7.11), який задовольняє задані початкові умови.

Для зручності введемо позначення (тут н. в. м.— найменша верхня межа):

$$|\boldsymbol{A}(t)| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|,\ t \in [a, b]; \tag{7.13}$$

$$\|\boldsymbol{A}(t)\| \equiv \underset{t \in [a,b]}{\text{н. в. м.}} |\boldsymbol{A}(t)|; \tag{7.14}$$

$$|\boldsymbol{x}(t)| \equiv \max_i |x_i(t)|,\ t \in [a, b]; \tag{7.15}$$

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \equiv \underset{t \in [a,b]}{\text{н. в. м.}} |e^{-\alpha|t-t_0|}\,\boldsymbol{x}(t)|,\ \alpha > 0. \tag{7.16}$$

Зауважимо, що $|\boldsymbol{A}(t)|$ і $|\boldsymbol{x}(t)|$ — скалярні функції t, тоді як $\|\boldsymbol{A}(t)\|$ і $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ — скалярні константи. З (7.13) і (7.15) випливає, що

$$|\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t)| \leqslant |\boldsymbol{A}(t)|\,|\boldsymbol{x}(t)|, \tag{7.17}$$

а з (7.14) і (7.16) маємо

$$\|\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\|\boldsymbol{x}(t)\|. \tag{7.18}$$

Рівність (7.15) обгрунтовує інтегральну нерівність

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} |\boldsymbol{x}(\tau)|\,d\tau. \tag{7.19}$$

Визначимо інтегральний оператор:

$$\boldsymbol{\Gamma x}(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{A}(\tau)\,\boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau. \tag{7.20}$$

Нехай t_1— деяка точка відрізка $[a, b]$, причому $t_0 < t_1$. Тоді

$$|\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)| = \left|\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{A}(\tau)\,\boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{A}(\tau)\,\boldsymbol{x}(\tau)|\,d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{A}(\tau)|\,|\boldsymbol{x}(\tau)|\,d\tau. \tag{7.21}$$

Помноживши нерівність (7.21) на $e^{-\alpha(t_1-t_0)}$, дістанемо

$$|\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)|\,e^{-\alpha(t_1-t_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{A}(\tau)|\,e^{-\alpha(\tau-t_0)}\,\boldsymbol{x}(\tau)|\,e^{-\alpha(t_1-t_0)}\,e^{\alpha(\tau-t_0)}\,d\tau. \tag{7.22}$$

Відповідно до (7.14), (7.16) і умови $t_0 \leqslant \tau < t_1$ нерівність (7.12) можна записати так:

$$|\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)|\,e^{-\alpha|t_1-t_0|} \leqslant \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\|\boldsymbol{x}(t)\|\int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\tau)}\,d\tau, \tag{7.23}$$

де $(t_1-\tau) > 0$.

Оскільки

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(t_1-t_0)}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}, \tag{7.24}$$

то нерівність (7.23) набирає вигляду

$$|\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)|\,e^{-\alpha|t_1-t_0|} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{A}(t)\|\,\|\boldsymbol{x}(t)\|. \tag{7.25}$$

Використовуючи (7.16), дістаємо

$$|\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)|\,e^{-\alpha|t_1-t_0|} = \underset{t\in[a,\,b]}{\text{н. в. м.}}\,|\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)\,e^{-\alpha|t_1-t_0|}| =$$

$$= |\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)|\,e^{-\alpha|t_1-t_0|}, \tag{7.26}$$

$$\|\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)\| = |\boldsymbol{\Gamma x}(t_1)|\,e^{-\alpha|t_1-t_0|} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{A}(t)\|\,\|\boldsymbol{x}(t)\|, \tag{7.27}$$

$$\|\boldsymbol{\Gamma x}(t)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{A}(t)\|\,\|\boldsymbol{x}(t)\|. \tag{7.28}$$

Ця нерівність виконується при довільному α, тому виберемо

$$\alpha > \frac{1}{k}\|\boldsymbol{A}(t)\|, \quad 0 < k < 1. \tag{7.29}$$

Тоді

$$k > \frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{A}(t)\|. \tag{7.30}$$

Об'єднуючи нерівності (7.28) і (7.30), знаходимо

$$\|\boldsymbol{\Gamma x}(t)\| \leqslant k\,\|\boldsymbol{x}(t)\|. \tag{7.31}$$

Таким чином, можна довести, що

$$\|\boldsymbol{\Gamma}^n\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant k^n\,\|\boldsymbol{x}(t)\|. \tag{7.32}$$

Отже,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Gamma}^i\boldsymbol{x}(t)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{\Gamma}^i\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}k^i\,\|\boldsymbol{x}(t)\|. \tag{7.33}$$

Використовуючи ці результати, можна побудувати послідовність векторів

$$\boldsymbol{x}_0(t),\ \boldsymbol{x}_1(t),\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_n(t),\ \ldots, \tag{7.34}$$

яка рівномірно збіжна на відрізку $[a, b]$ до розв'язку рівняння (7.12), тобто

$$\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_n(t)| = 0. \tag{7.35}$$

Якщо цю побудову виконано, то $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n(t)$ задовольняє рівняння (7.12) і відповідно є розв'язком однорідного рівняння (7.11). За таку послідовність векторів можна взяти послідовність

$$\boldsymbol{x}_0(t) \equiv \boldsymbol{x}_0, \tag{7.36}$$

і

$$\boldsymbol{x}_n(t) \equiv \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Gamma x}_{n-1}(t),\ n = 1, 2, \ldots \tag{7.37}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Gamma x}_0 = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma})\,\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{x}_2(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Gamma x}_1 = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}^1+\boldsymbol{\Gamma}^2)\,\boldsymbol{x}_0.\end{aligned} \tag{7.38}$$

За методом індукції

$$\boldsymbol{x}_n(t) = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Gamma}^1+\boldsymbol{\Gamma}^2+\cdots+\boldsymbol{\Gamma}^n)\,\boldsymbol{x}_0. \tag{7.39}$$

При $m < n$

$$\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}_m(t) = (\boldsymbol{\Gamma}^{m+1}+\boldsymbol{\Gamma}^{m+2}+\ldots+\boldsymbol{\Gamma}^n)\,\boldsymbol{x}_0. \tag{7.40}$$

Згідно з нерівністю (7.33), із співвідношення (7.40) дістаємо

$$\|\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}_m(t)\| \leqslant (k^{m+1}+k^{m+2}+\cdots+k^n)\,\|\boldsymbol{x}_0\|. \tag{7.41}$$

Якщо k задовольняє умову (7.20), то

$$\frac{k^{m+1}}{1-k} = k^{m+1}+k^{m+2}+\cdots+k^n+\cdots \tag{7.42}$$

Отже,

$$k^{m+1}+k^{m+2}+\dots+k^{n}<\frac{k^{m+1}}{1-k}\tag{7.43}$$

і

$$\| x_n(t)-x_m(t)\|<\frac{k^{m+1}}{1-k}\| x_0\|.\tag{7.44}$$

Звідси при $m\to\infty$ і відповідно при $n\to\infty$

$$\lim_{m\to\infty}\| x_n(t)-x_m(t)\|=0,\tag{7.45}$$

що рівносильно

$$\lim_{m\to\infty}| x_n(t)-x_m(t)|=0.\tag{7.46}$$

Таким чином, послідовність (7.34) рівномірно збіжна на $[a, b]$ до деякого неперервного вектора. Позначимо його $\hat{x}(t)$. Тоді відповідно до рівняння (7.39) маємо

$$\hat{x}(t)=\lim_{n\to\infty} x_n(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma^i x_0.\tag{7.47}$$

Якщо в рівнянні (7.37) перейти до границі при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=\lim_{n\to\infty} x_0+\lim_{n\to\infty}\Gamma x_{n-1}(t).\tag{7.48}$$

Оскільки Γ не залежить від операції граничного переходу, то

$$x(t)=x_0+\Gamma x(t),\tag{7.49}$$

або, використовуючи означення Γ, дістаємо

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, x(\tau)\, d\tau.\tag{7.50}$$

Отже, вектор $x(t)$ задовольняє рівняння (7.12) і є шуканим розв'язком однорідного рівняння (7.11).

Таким чином, розв'язок рівняння (7.1) має вигляд

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma^i x_0.\tag{7.51}$$

Цей вираз використовують для знаходження розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння (7.11) у формі збіжного нескінченного ряду.

Існування розв'язку доведено. Доведемо тепер єдиність розв'язку $x(t)$.

Нехай маємо деякий розв'язок $y(t)$, відмінний від $x(t)$. Оскільки розв'язок $y(t)$ задовольняє рівняння (7.12), то

$$y(t)=x_0+\Gamma y(t).\tag{7.52}$$

Застосовуючи співвідношення (7.37) і (7.34) до рівняння (7.52), дістаємо

$$y(t)-x_n(t)=\Gamma^{n+1} y(t).$$

Згідно з нерівністю (7.32)

$$\| y(t)-x_n(t)\|\leqslant k^{n+1}\| y(t)\|.$$

При $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\| y(t)-x_n(t)\|=0.$$

Отже, послідовність (7.34) на $[a, b]$ рівномірно збігається до $y(t)$, тобто розв'язок єдиний.

Теорему доведено.

Приклади

1. Знайти розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо формулу (7.51), де

$$\Gamma^0 x_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma^1 x_0=\int_0^t\begin{pmatrix}0 & \tau\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}d\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix},$$

$$\Gamma^2 x_0=\int_0^t\begin{pmatrix}0 & \tau\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \tau\end{pmatrix}d\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}\tau^2\\ 0\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t^3\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma^3 x_0=\int_0^t\begin{pmatrix}0 & \tau\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\tau^3\\ 0\end{pmatrix}d\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\tau^3\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{24}t^4\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma^i x_0=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{3}t^3+\dots\\ t+\frac{1}{24}t^4+\dots\end{pmatrix}.$$

В окремих випадках можна знайти суму нескінченних рядів, що було вже зроблено раніше.

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно з формулою (7.51)

$$\Gamma^0 x_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\Gamma^1 x_0=\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(t-t_0),$$

$$\Gamma^2 x_0=\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(\tau-t_0)\,d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^2}{2!},$$

. . . .

$$\Gamma^n x_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\frac{(t-t_0)^n}{n!}.$$

Отже,

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}^i\frac{(t-t_0)^i}{i!}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки нескінченний ряд утворює матричну експоненту, то розв'язок матиме вигляд

$$x(t)=\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}(t-t_0)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Використовуючи теорему Сільвестра [32], знаходимо

$$x(t)=\begin{pmatrix}2e^{-(t-t_0)}-e^{-2(t-t_0)}\\ -2e^{-(t-t_0)}+2e^{-2(t-t_0)}\end{pmatrix}.$$

7.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Якщо не можна знайти загальний інтеграл рівняння

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(m)})=0 \qquad (7.53)$$

одним з розглянутих вище способів, тоді застосовують спосіб розвинення шуканого розв'язку в ряд.

Нехай рівняння (7.53) розв'язане відносно старшої похідної:

$$y^{(m)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)}). \qquad (7.54)$$

Відомо, що коли f аналітична в околі початкових значень своїх аргументів $(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$, то й розв'язок

$$y=y(x) \qquad (7.55)$$

є аналітичною функцією в околі точки x_0. Тому вважають, що інтеграл (7.55) рівняння (7.54) можна розвинути в ряд Тейлора або Маклорена. Якщо розвинути $y(x)$ в ряд Тейлора, то дістанемо

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad (7.56)$$

а якщо в ряд Маклорена, то

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k. \qquad (7.57)$$

В області збіжності такого ряду, очевидно, дістанемо точний розв'язок $y(x)$, а частинна сума ряду даватиме наближений розв'язок рівняння (7.54). При цьому суть зводиться до того, щоб знайти величини $y^{(k)}(x_0)$ або $y^{(k)}(0)$, використовуючи рівняння (7.55) або (7.54). Диференціюючи рівність (7.54), визначають коефіцієнти $y^{(k)}(x_0)\,(y^{(k)}(0))$ через перші m з них. Решта коефіцієнтів залишається невизначеною, і їх можна вважати довільними сталими:

$$y^{(k)}(x_0)=C_k,\ k=0, 1, \cdots, m-1.$$

Тоді загальний інтеграл матиме вигляд

$$y(x)=C_0+C_1(x-x_0)+\cdots+C_{m-1}\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}+$$

$$+\varphi(x_0, C_0, \cdots, C^{m-1})\frac{(x-x_0)^m}{m!}+\cdots$$

Проте безпосереднє обчислення коефіцієнтів ряду викликає значні труднощі. Тому для їх знаходження застосовують метод невизначених коефіцієнтів, який особливо зручний для лінійних рівнянь. Суть його полягає в тому, що ряд

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

безпосередньо підставляють у диференціальне рівняння і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x. В результаті дістають систему рівнянь відносно a_k, $k=0, 1, \dots$, з якої і визначають їх.

Приклади

1. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + xy = 0.$$

Розв'язання. Нехай при $x = 0$: $y = C_0$, $y' = C_1$. Виконуючи послідовне диференціювання, знаходимо:

$$y'' = -xy = 0;$$
$$y''' = -xy' - y = -1 \cdot C_0;$$
$$y^{IV} = -2y^{I} - xy'' = -2 \cdot C_1;$$
$$y^{V} = -3y'' - xy''' = 0;$$
$$y^{VI} = -4y''' - xy^{IV} = 1 \cdot 4 \cdot C_0;$$
$$y^{(7)} = -5y^{IV} - xy^{V} = 2 \cdot 5 \cdot C_1;$$
$$y^{(8)} = -6y^{V} - xy^{VI} = 0;$$
$$y^{(9)} = -7y^{VI} - xy^{(7)} = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot C_0;$$
$$y^{(10)} = -8y^{(7)} - xy^{(8)} = -2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot C_1.$$

Підставляючи ці значення у формулу Маклорена, маємо

$$y(x) = C_0 + C_1 x - C_0 \frac{x^3}{3!} - C_1 \frac{2x^4}{4!} + C_0 \frac{1 \cdot 4 \cdot x^6}{6!} + C_1 \frac{2 \cdot 5 \cdot x^7}{7!} + \ldots$$

Згрупувавши доданки, знайдемо

$$y(x) = C_0\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1-4}{6!}x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \ldots\right) +$$
$$+ C_1 x\left(1 - \frac{2x^4}{4!} + \frac{2 \cdot 5 \cdot x^6}{6!} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!}x^9 + \ldots\right).$$

Таким чином дістають загальний інтеграл заданого диференціального рівняння у вигляді нескінченного ряду. Відомо, що цей розв'язок має сенс тоді, коли ряд збіжний. Застосовуючи ознаку збіжності д'Аламбера, можна показати, що цей ряд збігається при будь-якому значенні незалежної змінної.

2. Знайти чотири перших члени розвинення в ряд Маклорена розв'язку $y = y(x)$ задачі

$$y'' = e^{xy}, \; y|_{x=0} = 1, \; y'|_{x=0} = 0. \tag{7.58}$$

Розв'язання. Легко побачити, що права частина рівняння, тобто функція e^{xy}, може бути розвинена в степеневий ряд Маклорена (7.57) по степенях x, y в околі точки (0, 0), збіжний в області $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді ряду (7.57). Маємо

$$y''(0) = e^{xy}|_{\substack{x=0\\y=1}} = 1.$$

Диференціюючи послідовно ліву і праву частини рівняння (7.58) і використовуючи відомі (попередні) значення $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, знаходимо:

$$y'''(0) = (y + xy')e^{xy}|_{x=0} = 1,$$
$$y^{IV}(0) = (2y' + xy'' + (y + xy')^2)e^{xy}|_{x=0} = 1.$$

Підставляючи знайдені значення в ряд (7.57), дістанемо наближений розв'язок

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

3. Знайти наближений розв'язок задачі

$$y' = 3y + x^2, \quad y|_{x=0} = 5. \tag{7.59}$$

Розв'язання. Нехай

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{7.60}$$

Тоді

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

При початковій умові рівняння (7.60) знаходимо $a_0 = 5$, а з (7.59) дістаємо тотожність

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \equiv 15 + 3a_1 x + 3a_2 x^2 + \ldots + x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, маємо

$$a_1 = 15, \; a_2 = \frac{45}{2}, \; a_3 = \frac{137}{6}, \ldots$$

Шуканий наближений розв'язок

$$y(x) = 5 + 15x + \frac{45}{2}x^2 + \frac{137}{6}x^3.$$

Розглядаючи рівняння Бесселя, ми показали, що розв'язок у більш складних випадках можна шукати у вигляді так званого узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \; \rho \in R.$$

ВПРАВИ

Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

1. $y' = x^2 + y^2 - e^x$; $y(0) = 0$.
2. $y' = 2x^3 - y^2 - 2x$; $y(0) = 1$.
3. $y' = x^3 + y^2 - e^x$; $y(0) = 1$.
4. $y' = x^3 + \sin y + 1$; $y(0) = 0$.
5. $y' = \sin 2x + xy$; $y(0) = 1$.
6. $y' = \sin 2x + \cos y$; $y(0) = 0$.
7. $y' = e^{-2x} + y^2$; $y(0) = 0$.
8. $y' = e^{xy} + y$; $y(0) = 1$.
9. $y' = \cos x + e^y + x$; $y(0) = 0$.
10. $y' = \ln(x+1) + e^y$; $y(0) = 0$.

7.3. Метод малого параметра

Нехай маємо задачу, яка, крім основних невідомих величин, містить деякий параметр ε, причому для $\varepsilon = \varepsilon_0$ можна порівняно легко знайти розв'язок (незбурений розв'язок). Тоді розв'язок задачі при ε, близьких до ε_0 (збурений розв'язок), у багатьох випадках можна наближено дістати розвиненням за степенями $\varepsilon - \varepsilon_0$ з тією або іншою точністю. Наприклад,

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h,$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2,$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3$$

і т. д.

Перший член ряду, який не містить $\varepsilon - \varepsilon_0$, дістанемо з рівняння, яке називають *породжуючим* при $\varepsilon = \varepsilon_0$, тобто маємо незбурений розв'язок. Наступні члени дають поправки на збурений розв'язок. Ці поправки мають перший, другий і т. д. порядок мализни (порівняно з $\varepsilon - \varepsilon_0$). Ці члени знаходять *методом невизначених коефіцієнтів*, тобто коефіцієнти при $(\varepsilon - \varepsilon_0)$, $(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$ і т. д. позначаються деякими буквами і визначаються потім з умов задачі.

Цим методом можна дістати найбільш точний результат при ε, близьких до ε_0. При цьому чим менше $|\varepsilon - \varepsilon_0|$, тим менше членів ряду треба знаходити. Тому часто вважають $\varepsilon_0 = 0$ (звідси і походить назва методу).

Слід зазначити, що при великих $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ метод може призвести до суттєвих помилок, оскільки може статися, що відкинуті члени більш суттєві, ніж залишені у виразі наближеного розв'язку.

Таким чином, метод малого параметра дає змогу, виходячи з розв'язку деяких «незбурених» задач, дістати розв'язок задач, постановка яких близька до «незбурених», якщо, звичайно, зміна постановки задачі не викликає принципової якісної зміни розв'язку.

У багатьох задачах за виглядом першого члена, що містить параметр, можна зробити висновки про залежність розв'язку від параметра при його малій зміні.

У теорії диференціальних рівнянь цей метод застосовують до систем виду

$$\mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1 \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}, \varepsilon), \qquad (7.61)$$

які залежать від малого параметра ε. Розв'язок рівняння (7.61) шукають у вигляді степеневих рядів за параметром ε. При цьому якщо функція $\mathbf{f}$ є аналітична за параметром ε і змінними $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$, ..., $\mathbf{y}^{m-1}$, то метод малого параметра називають *регулярним*.

Якщо права частина нормального диференціального рівняння або системи не є аналітичною функцією параметра ε, то метод дослідження таких систем називають *сингулярним методом малого параметра*.

Приклад. Знайти розвинення розв'язку задачі Коші

$$\dot{x}(t) = -x^2 + \frac{6}{t}\varepsilon, \quad x(1) = 1 + 3\varepsilon$$

за степенями ε до другого порядку включно.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок, розвинений за степенями ε з невідомими коефіцієнтами у вигляді

$$x(t) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots$$

Тоді

$$\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \varepsilon^2 \dot{x}_2 + \ldots \equiv -(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots) \times$$

$$\times (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots) + \frac{6}{t}\varepsilon.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε, послідовно знаходимо:

$$x_0 = \frac{1}{t}, \; x_1 = 3, \; x_2 = \frac{3}{t^2} - 3t.$$

Отже,

$$x(t) = \frac{1}{t} + 3\varepsilon + \varepsilon^2\left(\frac{3}{t^2} - 3t\right) + O(\varepsilon^3).$$

7.4. Метод Ейлера знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння першого порядку

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y). \qquad (7.62)$$

Припустимо, що для функції $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) виконуються умови теореми існування розв'язку. Тоді існує відрізок $[x_0 - \delta;\ x_0 + \delta]$ і на ньому єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (7.62) при початкових умовах $y(x_0) = y_0$.

Для числа δ теорема існування дає оцінку зверху:

$$\delta < \left(a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right).$$

Метод Ейлера [3, 4] дає змогу наближено виразити шуканий розв'язок з довільною наперед заданою точністю.

Нехай треба наближено обчислити $y(d)$, де $x_0 < d < x_0 + \delta$. Поділимо $[x_0, d]$ на n рівних частин точками $x_0, x_1, \ldots, x_n = d$. Довжину відрізка $[x_i, x_{i+1}]$, $h = x_{i+1} - x_i$, називають кроком обчислення. Наближені значення розв'язків у точках x_i позначимо через y_i.

На $[x_0, x_1]$ замість рівняння (7.62) розглядатимемо рівняння з початковими умовами (задача Коші):

$$Y'_n(x) = f(x_0, y_0), \; x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \; Y_n(x_0) = y_0.$$

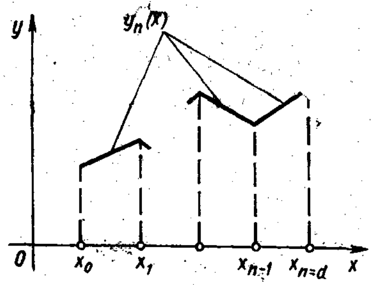

Рис. 7.1

Розв'язок цього рівняння

$$Y_n(x) = y_0 + f(x_0,\ y_0)\times \times(x - x_0) \qquad (7.63)$$

вважатимемо наближеним розв'язком рівняння (7.62) на відрізку $[x_0,\ x_1]$. Геометрично це означає, що на відрізку $[x_0,\ x_1]$ інтегральну криву замінюють відрізком дотичної до цієї кривої в точці $(x_0,\ y_0)$.

Згідно з формулою (7.63) дістанемо

$$y_1 = Y_n(x_1) = y_0 + hf(x_0,\ y_0).$$

Далі міркуємо за індукцією. Якщо наближені значення розв'язків $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$ вже відомі, то на $[x_k,\ x_{k+1}]$ замість (7.62) розглянемо рівняння

$$Y'_n(x) = f(x_k,\ y_k),\ x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1},\ Y_n(x_k) = y_k.$$

Розв'язок цього рівняння

$$Y_n(x) = y_k + f(x_k,\ y_k)(x - x_k),\ k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1, \qquad (7.64)$$

вважатимемо наближеним розв'язком рівняння (7.62) на $[x_k,\ x_{k+1}]$.

Якщо в (7.64) $x = x_{k+1}$, то

$$y_{k+1} = Y_n(x_{k+1}) = y_k + hf(x_k,\ y_k),\ k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1. \qquad (7.65)$$

Ці формули визначають метод Ейлера. Функцію $Y_n(x)$, визначену на $[x_0,\ d]$ за допомогою рівностей (7.64), називають *ламаною Ейлера* (рис. 7.1). Можна довести, що при виконанні умов теореми існування розв'язку послідовність ламаних Ейлера $\{Y_n(x)\}$ рівномірно збігається на $[x_0,\ d]$ до справжнього розв'язку задачі (7.62) при $n \to \infty$.

ВПРАВИ

Методом ламаних Ейлера розв'язати такі рівняння:

1. $y' = y;\quad y(0) = 1.$ Знайти $y(1)$, взявши $h = 0{,}1$.
2. $y' = \ln y;\quad y(1) = e,\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ h = 0{,}1.$
3. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2};\quad y(0) = 1;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad h = 0{,}1.$
4. $y' = x/y;\quad y(1) = 2;\quad 1 \leqslant x \leqslant 1{,}6,\quad h = 0{,}1.$
5. $y = \dfrac{1}{2}xy;\quad y(0) = 1;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad h = 0{,}1.$
6. $y' = x^2 + y^2;\quad y(0) = 0;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad h = 0{,}1.$
7. $y' = 1 + xy^2;\quad y(0) = 0;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad h = 0{,}1.$

8. $y' = 1{,}6x + 0{,}5y^2;\quad y(0) = 0{,}3,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad h = 0{,}1.$
9. $y' = 1 + 0{,}2y\sin x - 1{,}5y^2;\quad y(0) = 0,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad h = 0{,}1.$
10. $y' = \dfrac{y}{x+1} - y^2;\quad y(0) = 1,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad h = 0{,}1.$

7.5. Наближені розв'язки звичайного диференціального рівняння методом Рунге — Кутта

Нехай маємо задачу Коші

$$y' = f(x,\ y); \qquad (7.66)$$

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,\ x \in [a,\ b]. \qquad (7.67)$$

Функція $f(x,\ y)$ задана і неперервна в розглядуваній області D.

Метод Ейлера наближеного розв'язку рівняння (7.66) взагалі не забезпечує високу точність, він дає порівняно задовільні результати лише для малих інтервалів. Похибка методу Ейлера на кожному частинному відрізку $[x_i,\ y_{i+1}]$ має порядок h^2. Тому розроблено ряд алгоритмів, які уточнюють метод Ейлера. Одним з них є метод Рунге—Кутта [6]. За цим методом на розглядуваному кроці враховується зміна похідної y', а загальною робочою формулою методу є

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + f(x_k,\ y_k)\frac{h}{2}\right).$$

Послідовність дії в методі Рунге—Кутта така: значення y_{k+1} невідомої функції — розв'язку рівняння (7.66) з початковими умовами (7.67) при $x = x_{k+1}$ визначають за відомим значенням y_k функції при $x = x_k$, $h = x_{k+1} - x_k$ за формулою

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \qquad (7.68)$$

де

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}\left(T_1^{(k)} + 2T_2^{(k)} + 2T_3^{(k)} + T_4^{(k)}\right). \qquad (7.69)$$

Величини $T_i^{(k)}$, $i = 1,\ \ldots,\ 4$, в свою чергу, послідовно виражаються формулами

$$T_1^{(k)} = hf(x_k,\ y_k); \qquad (7.70)$$

$$T_2^{(k)} = hf\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + 0{,}5\,T_1^{(k)}\right); \qquad (7.71)$$

$$T_3^{(k)} = hf\left(x_k + \frac{h}{2};\ y_k + 0{,}5\,T_2^{(k)}\right); \qquad (7.72)$$

$$T_4^{(k)} = hf(x_k + h,\ y_k + T_3^{(k)}); \qquad (7.73)$$

$$(h = (b - a)/N,\ k = 1{,}2,\ \ldots,\ N - 1).$$

Метод Рунге—Кутта дає високу точність, він зручний для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь на ЕОМ.

П р и к л а д. Методом Рунге—Кутта розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \quad y|_{x=0} = 1, \quad x \in [0;\ 0,1],$$

якщо $h = 0,05$.

Розв'язання. Тут $f(x;\ y) = \frac{y-x}{y+x}$.

Обчислимо Δy_1, послідовно використовуючи формули (7.70) — (7.73):

$$T_1^{(1)} = 0,05f(0;\ 1) = 0,05 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 0,05;$$

$$T_2^{(1)} = 0,05f(0 + 0,5 \cdot 0,05;\ 1 + 0,5 \cdot 0,05) = 0,05\frac{1,025 - 0,025}{1,025 + 0,025} = 0,0476;$$

$$T_3^{(1)} = 0,05f(0 + 0,5 \cdot 0,05;\ 1 + 0,5 \cdot 0,0476) = 0,05\frac{1,0476 - 0,025}{1,0476 + 0,025} = 0,0477;$$

$$T_4^{(1)} = 0,05f(0 + 0,05;\ 1 + 0,5 \cdot 0,0477) = 0,05\frac{1,0477 - 0,05}{1,0477 + 0,05} = 0,0454.$$

За формулою (7.69) знаходимо

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(0,05 + 2 \cdot 0,0476 + 2 \cdot 0,0477 + 0,0454) = 0,0477,$$

а за формулою (7.68) —

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = 1 + 0,0477 = 1,0477.$$

Далі послідовно маємо

$$T_1^{(2)} = 0,05f(x_1,\ y_1) = 0,05f(0,05;\ 1,0477) = 0,05\frac{1,0477 - 0,05}{1,0477 + 0,05} = 0,0454;$$

$$T_2^{(2)} = 0,05f(0,05 + 0,5 \cdot 0,05;\ 1,0477 + 0,5 \cdot 0,0454) = 0,05\frac{1,0704 - 0,075}{1,0704 + 0,075} = 0,0435;$$

$$T_3^{(2)} = 0,05f(0,05 + 0,5 \cdot 0,05;\ 1,0477 + 0,5 \cdot 0,0435) = 0,05\frac{1,0695 - 0,075}{1,0695 + 0,075} = 0,0434;$$

$$T_4^{(2)} = 0,05f(0,05 + 0,05;\ 1,0477 + 0,5 \cdot 0,0434) = 0,05\frac{1,0695 - 0,1}{1,0695 + 0,1} = 0,0414;$$

$$\Delta y_2 = \frac{1}{6}(0,0454 + 2 \cdot 0,0435 + 2 \cdot 0,0434 + 0,0414) = 0,0434.$$

Знаходимо значення шуканої функції при $x = 0,1$:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_2 = 1,0477 + 0,0434 = 1,0911.$$

Розглянута тут схема методу Рунге—Кутта широко використовується в більшості бібліотек стандартних програм для ЕОМ і має так званий *четвертий порядок апроксимації.*

Розділ 8

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У попередніх розділах було розглянуто цілий ряд задач, для розв'язування яких застосовується теорія диференціальних рівнянь. Нижче наведено ще деякі типи задач прикладного характеру, які теж розв'язуються за допомогою диференціальних рівнянь.

8.1. Одна геометрична задача

Задача. Визначити криву, відрізок довільної дотичної до якої, що знаходиться між точкою дотику і віссю абсцис, ділиться віссю ординат навпіл.

Розв'язання. Нехай $y = f(x)$ — шукана крива і $M(x,\ y)$ — довільна точка цієї кривої (рис. 8.1). Складемо рівняння дотичної до шуканої кривої в точці M:

$$Y - y = y'(X - x),$$

де X, Y — координати довільної точки дотичної. При $Y = 0$ знайдемо абсцису X_0 точки перетину дотичної з віссю Ox:

$$0 - y = y'(X_0 - x),$$

тобто

$$X_0 = x - \frac{y}{y'}.$$

За умовою задачі

$$X_0 + x = 0,$$

звідки

$$x + x - \frac{y}{y'} = 0,$$

або

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Дістали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Отже, маємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}, \ \ln y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln C,$$

$$2\ln y = \ln Cx,$$

$$y^2 = Cx.$$

Таким чином, шукані криві є сім'єю парабол $y^2 = Cx$, де C — довільна стала.

8.2. Колона однакового тиску

Задача. Визначити форму однорідної вертикальної колони з круглим поперечним перерізом таку, щоб тиск утримуваного колоною вантажу P та її власної ваги, що припадає на одиницю площі горизонтального перерізу, був скрізь однаковий. Питома вага матеріалу колони δ, а радіус її верхньої основи — r. Знайти також радіус верхньої і нижньої основ колони мосту, щоб тиск у довільному її горизонтальному перерізі дорівнював 3000 кГ/дм^2 ($2{,}94 \cdot 10^6$ Па), якщо густина матеріалу колони 2,5 т/м^3, висота 12 м, а утримуваний вантаж 90 000 кГ ($882 \cdot 10^3$ Н).

Розв'язання. Виберемо прямокутну систему координат xOy (рис. 8.2). Зробимо розріз колони горизонтальною площиною, що проходить через довільну точку $M(x, y)$ шуканої кривої AA_1, і визначимо тиск вантажу P і власної ваги верхньої відрізаної частини колони на одиницю площі горизонтального перерізу MN.

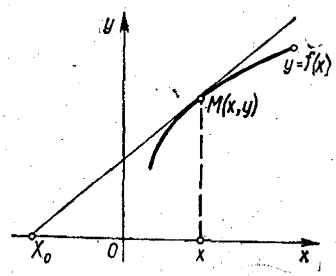

Рис. 8.1

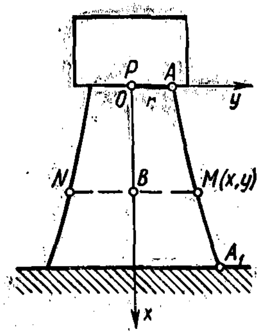

Рис. 8.2

Об'єм верхньої відрізаної частини колони знаходимо як об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції $OAMB$ навколо осі Ox:

$$V = \pi\int_0^x y^2(x)\,dx, \text{ а її вага } Q = \delta V.$$

Взявши відношення суми $P + Q$ до площі $S = \pi y^2(x)$ перерізу MN, дістанемо величину тиску на одиницю площі цього перерізу, яка за умовою задачі повинна дорівнювати величині тиску на одиницю площі довільного іншого горизонтального перерізу.

Величина тиску на одиницю площі верхньої основи колони за умовою задачі дорівнює $P/\pi r^2$, $r = OA$. Отже,

$$\frac{P+Q}{S} = \frac{P}{\pi r^2}, \text{ або } P + Q = \frac{PS}{\pi r^2},$$

тобто

$$P + \pi\delta\int_0^x y^2(x)\,dx = \frac{P}{r^2}y^2(x).$$

Продиференціювавши цю рівність, дістанемо диференціальне рівняння кривої з відокремлюваними змінними

$$\pi\delta\, y^2(x)\,dx = \frac{2P}{r^2}\,y(x)\,dy.$$

Звідси

$$dx = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\frac{dy}{y}; \ x + C = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln y.$$

За умовою $y = r$ при $x = 0$. Тоді

$$C = \frac{2P\ln r}{\pi\delta r^2}.$$

Отже, маємо рівняння кривої AA_1:

$$x = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln\frac{y}{r}. \qquad (8.1)$$

Шукана форма колони є поверхня, утворена обертанням цієї кривої навколо осі Ox:

$$x = \frac{2P}{\pi\delta r^2}\ln\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r}.$$

При такій зовнішній формі колони величина тиску в усіх її точках буде однакова.

Для заданих в задачі конкретних даних радіус верхньої основи визначимо за формулою

$$\frac{882 \cdot 10^3}{\pi r^2} = 2{,}94 \cdot 10^6; \ r = 0{,}309 \text{ м},$$

а радіус нижньої основи — за формулою

$$12 = \frac{2 \cdot 882 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}309^2} \ln \frac{r_1}{0{,}309}; \ r_1 = 3{,}24 \text{ м}.$$

Аналогічно розв'язуються задачі про форму довгих стержнів або канатів, які під дією власної ваги і деякого вантажу мають у всіх поперечних перерізах однакову силу натягу.

8.3. Прогин балок

Розглянемо горизонтально розміщену однорідну балку AB із сталим поперечним перерізом (рис. 8.3). Вісь симетрії балки показано на рисунку пунктирною лінією. Припустимо, що під дією сил, прикладених до балки у вертикальній площині, балка прогинається (рис. 8.4). Діючі сили можуть бути обумовлені вагою балки або зовні прикладеним навантаженням, або обома силами разом. Зрозуміло, що під дією сил вісь симетрії буде викривлятися. Викривлену вісь симетрії називають *пружною лінією*. Визначення форми цієї лінії — одна з основних задач теорії пружності. Зазначимо, що існують різні типи балок залежно від способів їх кріплення або опор. Наприклад, на рис. 8.5 зображено балку, кінець A якої жорстко закріплений, а кінець B — вільний. Таку балку називають консольною. На рис. 8.6 показано балку, що лежить вільно на опорах A і B. Ще один тип балок з опорами подано на рис. 8.7.

Рис. 8.3

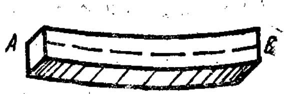

Рис. 8.4

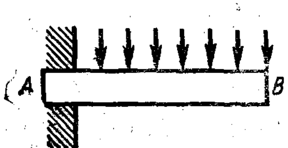

Рис. 8.5

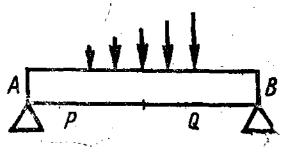

Рис. 8.6

Існують різні способи прикладення зовнішніх навантажень, наприклад рівномірно розміщене навантаження (див. рис. 8.5). Навантаження може бути і змінним вздовж усієї довжини балки або деякої її частини (див. рис. 8.6). Зустрічаються випадки зосередженого навантаження (див. рис. 8.7).

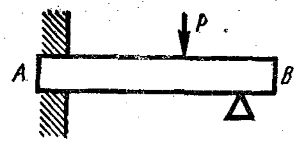

Рис. 8.7

Розглянемо горизонтальну балку OA (рис. 8.8). Нехай її вісь симетрії розміщена вздовж осі x. Вісь y напрямлена вниз від точки O. Під дією зовнішніх сил F_1, F_2, ... і ваги балки, якщо вона велика, вісь симетрії згинається в пружну лінію (рис. 8.9). Зміщення y пружної лінії від осі x називається *згином балки*, або стрілкою прогину в положенні x.

Таким чином, якщо відомо рівняння пружної лінії, то завжди можна знайти й згин балки. Розглянемо, як це можна виконати практично.

Позначимо через $M(x)$ момент згину у вертикальному поперечному перерізі балки з координатою x. Момент згину балки визначається як алгебраїчна сума моментів тих сил, які діють з одного боку балки в положенні x. При обчисленні моментів вважатимемо, що сили, які діють на балку знизу вверх, дають від'ємні моменти; а сили, що діють зверху вниз, дають додатні моменти.

З теорії опору матеріалів відомо, що момент згину в положенні x залежить від радіуса кривини пружної лінії:

$$EI \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = M(x), \qquad (8.2)$$

де E — модуль пружності Юнга, який залежить від матеріалу; I — момент інерції поперечного перерізу балки в положенні x відносно горизонтальної прямої, що проходить через центр ваги поперечного перерізу. Добуток EI нази-

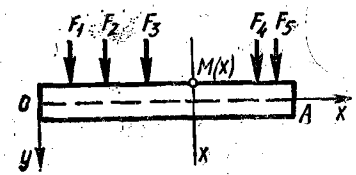

Рис. 8.8

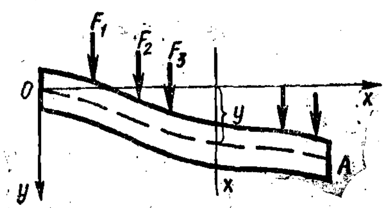

Рис. 8.9

вають *жорсткістю при згині*; її величину вважатимемо сталою.

Припустимо, що балка має малий згин, що часто буває на практиці. Тоді кутовий коефіцієнт y' лінії пружності буде малий, а тому замість рівняння (8.2) можна наближено розглядати рівняння

$$EIy'' = M(x). \qquad (8.3)$$

Щоб показати, як на практиці використовується це рівняння, розглянемо таку задачу.

Горизонтальна однорідна стальна балка довжиною l вільно лежить на двох опорах і згинається під дією власної ваги, яка дорівнює P кГ на одиницю довжини. Знайти рівняння пружної лінії і максимальний згин (стрілку) балки (рис. 8.10). Оскільки балка двохопорна, то кожна з опор дає напрямлену вверх реакцію, що дорівнює половині ваги балки: $\frac{Pl}{2}$. Згинаючим моментом $M(x)$ є алгебраїчна сума моментів сил, що діють на балку з одного боку від точки O. Розглянемо спочатку дію сил зліва від точки Q. На відстані x від точки Q сила $\frac{Pl}{2}$ діє на балку знизу вверх і утворює від'ємний момент. Сила Px, яка діє на балку зверху вниз на відстані $\frac{x}{2}$ від точки Q, утворює додатний момент. Таким чином, сумарний згинаючий момент в точці Q задається формулою

$$M(x) = -\frac{Pl}{2}x + Px\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{Px^2}{2} - \frac{Plx}{2}. \qquad (8.4)$$

Якщо розглянути дію сил справа від точки Q, то на відстані $\frac{(l-x)}{2}$ від точки Q на балку діє зверху вниз сила $P(l-x)$, яка утворює додатний момент. Від'ємний момент утворює сила $\frac{Pl}{2}$, яка діє на балку знизу вверх на відстані $l-x$ від точки Q. Сумарний згинаючий момент обчислимо тоді за формулою

$$M(x) = P(l-x)\frac{l-x}{2} - \frac{Pl}{2}(l-x) = \frac{Px^2}{2} - \frac{Plx}{2}. \qquad (8.5)$$

Згідно з формулами (8.4) і (8.5), згинаючі моменти в обох випадках однакові.

Запишемо тепер для розглядуваного випадку рівняння (8.3):

$$EIy'' = \frac{Px^2}{2} - \frac{Plx}{2}. \qquad (8.6)$$

Враховуючи, що на кінцях O і A балка не згинається, для знаходження y з рівняння (8.6) використаємо умови на кінцях балки

$$y = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{і} \quad y = 0 \quad \text{при } x = l.$$

Тоді інтегруванням рівняння (8.6) знаходимо

$$y = \frac{P}{24EI}(x^4 - 2lx^3 + l^3x). \qquad (8.7)$$

Функція (8.7) — це рівняння пружної лінії. Формула (8.7) використовується на практиці для визначення максимального згину. Так, у розглядуваному конкретному випадку максимальний згин буде при $x = l/2$ і дорівнюватиме

$5Pl^4(384EI)$, де $E = 205{,}8 \cdot 10^9$ Па, $I = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ м^4.

8.4. Деякі типи коливань

Вільні гармонічні коливання. Розглянемо вертикально підвішену пружину, яку зверху закріплено нерухомо, а знизу навантажено тілом маси m, яке для простоти вважатимемо матеріальною точкою. Напрямимо вісь Ox вертикально вздовж осі пружини через точку підвісу тіла, вибравши початок координат у стані рівноваги — точці O (рис. 8.11). Якщо пружину трохи розтягнути або стиснути і потім знову відпустити, то виникнуть коливання.

Знайдемо закон руху тіла при умові, що відомо рівнодійну F прикладених до тіла сил. Ця рівнодійна складається із сили ваги mg і сили натягу пружини. Згідно із законом Гука, остання пропорційна розтягу f пружини у даний момент і дорівнює $-cf$, де c — коефіцієнт пропорційності, або жорсткість пружини. Зазначимо, що в стані рівноваги $f = f_0$ і сила натягу зрівноважена вагою тіла, тобто

$$mg = cf_0.$$

У стані O_1 на відстані x від точки O, де $f = f_0 + x$, на тіло діє сила F, яка за величиною дорівнює

$$mg - c(f_0 + x) = -cx.$$

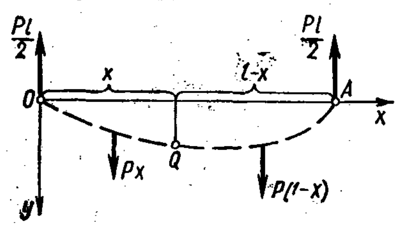

Рис 8.10

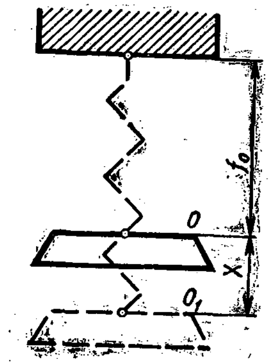

Рис. 8.11

Як бачимо, ця сила пропорційна відстані x від положення рівноваги O і напрямлена в бік точки O. За другим законом Ньютона

$$F = ma, \text{ або } F = m\ddot{x}.$$

Отже, дістанемо диференціальне рівняння руху тіла

$$m\ddot{x} = -cx,$$

або

$$\ddot{x} + a^2x = 0, \tag{8.8}$$

де

$$a^2 = \frac{c}{m}.$$

Це диференціальне рівняння називають *рівнянням гармонічних коливань*, а рух, що відбувається, — гармонічним. Воно лінійне із сталими коефіцієнтами. Знаходимо його загальний розв'язок

$$x = C_1\cos at + C_2\sin at.$$

Покладаючи $C_1 = A\sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$, матимемо

$$x = A\sin(at + \varphi),$$

де

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{C_1}{C_2}.$$

Величину A в останньому виразі називають *амплітудою коливання*, вона показує найбільше відхилення тіла від положення рівноваги.

Кут $at + \varphi$ називають *фазою коливання*, а кут φ — *початковою фазою*.

Період коливання

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

залежить від жорсткості пружини і маси тіла, тоді як амплітуда і початкова фаза істотно залежать від початкових умов.

Вільні пружні коливання при наявності опору. Припустимо, що всі умови з попередньої задачі зберігаються і додатково враховується сила опору повітря, яка пропорційна з коефіцієнтом μ швидкості руху тіла. Враховуючи, що ця сила напрямлена в бік, протилежний напряму швидкості тіла, і за величиною дорівнює $-\mu\dot{x}$, матимемо таке диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x},$$

або

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + a^2x = 0,$$

де

$$n = \frac{\mu}{2m}, \quad a^2 = \frac{c}{m}.$$

Розглянемо випадок, коли n — мале число і $n < a$. Коренями характеристичного рівняння є

$$k_1 = -n + i\sqrt{a^2 - n^2}, \quad k_2 = -n - i\sqrt{a^2 - n^2}.$$

Отже,

$$x = e^{-nt}(C_1\cos\sqrt{a^2 - n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{a^2 - n^2}\,t),$$

або

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{a^2 - n^2}\,t + \varphi),$$

де $A\sin\varphi = C_1$, $A\cos\varphi = C_2$, φ — початкова фаза. Частота коливань дорівнює

$$\sqrt{a^2 - n^2} = a\sqrt{1 - \frac{n^2}{a^2}}.$$

Якщо n — мале порівняно з a, то частота мало відрізняється від a, тобто від тієї частоти, коли опір середовища відсутній.

Амплітуда Ae^{-nt} є функцією від t, яка із зростанням t зменшується. Отже, маємо затухаючі коливання.

Коливання без опору середовища при наявності збурюючої періодичної сили. Резонанс. Нехай всі умови з задачі про вільні гармонічні коливання зберігаються і нехай додатково до тіла прикладено періодичну збурюючу силу $R\sin\omega t$, де R і ω — сталі, так, щоб період цієї сили збігався з періодом вільних коливань тіла. Тоді за другим законом Ньютона рівняння руху матиме вигляд

$$ma = -cx + R\sin\omega t,$$

або

$$\ddot{x} + a^2x = p\sin\omega t,$$

де $a^2 = c/m$, $p = R/m$.

Це є неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння, як відомо, є функція

$$u = A\sin(at + \varphi).$$

Розглянемо випадок, коли $\omega \neq a$, тобто коли частота збурюючої сили не дорівнює частоті власних коливань тіла.

Частинний розв'язок знайдемо у вигляді

$$v = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t.$$

Після нескладних обчислень знаходимо

$$\alpha = 0, \ \beta = \frac{p}{a^2 - \omega^2}.$$

Загальним розв'язком є функція

$$x = A \sin (at + \varphi) + \frac{p}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Рух тіла — це накладання власного коливання точки з частотою a і вимушеного коливання з частотою ω, викликаного дією збурюючої сили. Амплітуда коливань пропорційна амплітуді збурюючої сили і величині $1/|a^2 - \omega^2|$; вона дуже велика, якщо ω мало відрізняється від a.

Тепер розглянемо випадок, коли $\omega = a$. Частинний розв'язок знайдемо у вигляді функції

$$v = t\,(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t),$$

для якої знаходимо

$$\alpha = -\frac{p}{2a}, \ \beta = 0.$$

Загальним розв'язком є функція

$$x = A \sin (at + \varphi) - \frac{p}{2a}\, t \cos at.$$

Другий доданок показує, що із зростанням t амплітуда коливання необмежено зростає. Це так зване явище резонансу, що має місце при збігу частоти власних коливань і частоти збурюючої сили.

Явище резонансу, при якому виникають потужні коливання в системі, використовується при конструюванні різних підсилювачів, наприклад у радіотехніці. Проте великі коливання можуть спричиняти руйнування конструкцій — мостів, крил літака, перекриття споруд тощо. Тому важливо передбачити можливість виникнення резонансу.

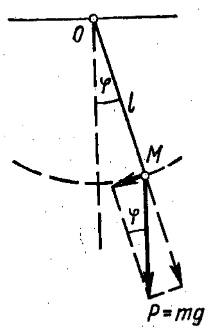

Рис. 8.12

Коливання математичного маятника. Математичний маятник — це матеріальна точка певної маси, підвішена на нерозтяжній нитці, масою якої можна знехтувати.

Нехай математичний маятник, довжина якого l і вага $p = mg$, виведений з вертикального положення на деякий кут φ (рис. 8.12). Припустимо, що коливання маятника відбувається в середовищі без опору. Маятник коливається під дією сили F:

$$F = mg \sin \varphi.$$

Нехай за час t точка M пройшла вздовж дуги кола з центром в точці O і радіусом l шлях S. Тоді

$$S = l\varphi.$$

Швидкість руху точки v напрямлена вздовж дотичної до дуги кола і визначатиметься рівністю

$$v = l\dot{\varphi}.$$

Оскільки сила $F = -mg \sin \varphi$ діє в бік зменшення φ, то рівнянням руху маятника є

$$m\dot{v} = -mg \sin \varphi,$$

або

$$lm\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0. \qquad (8.9)$$

Нехай величина φ досить мала. Тоді $\sin \varphi \sim \varphi$ і рівняння (8.9) набирає вигляду

$$\ddot{\varphi} + a^2\varphi = 0,$$

де

$$a^2 = g/l,$$

тобто дістали рівняння типу (8.8).

8.5. Хімічні реакції першого й другого порядків

Мономолекулярний процес. Це так звана хімічна реакція першого порядку, під час якої деяка речовина A перетворюється в іншу речовину C. Нехай a — початкова кількість речовини A, а x — кількість цієї речовини, що вступила в реакцію за час t від початку реакції, тоді $a - x$ — наявна кількість речовини A. Вважаючи, що швидкість $\dot{x}$ перебігу реакції пропорційна з коефіцієнтом k кількості речовини, що не перетворилася, дістанемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = k\,(a - x).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістанемо

$$\frac{dx}{a - x} = k\,dt.$$

Звідси

$$-\ln (a - x) + \ln C = kt.$$

Отже, загальний розв'язок матиме вигляд

$$a - x = Ce^{-kt},$$

де C — довільна стала, яку можна визначити з початкових умов: $x = 0$ при $t = 0$. Враховуючи, що $C = a$, остаточно дістаємо

$$x = a(1 - e^{-kt}).$$

Як бачимо, коли $t \to \infty$, кількість x перетвореної речовини наближається до величини a, але ніколи не досягає її, тобто теоретично процес продовжується нескінченно довго. Практично однак мономолекулярний процес вважається закінченим, якщо залишається менше 0,1 % початкової кількості речовини A.

Бімолекулярний процес. Це так звана хімічна реакція другого порядку, під час якої взаємодіючі речовини A і B перетворюються в речовину C. Нехай a і b — відповідно початкові кількості речовин A і B, а x — кількість кожної з цих речовин, що вступила в реакцію за час t від початку реакції. Вважаючи, що швидкість $\dot{x}$ перебігу цієї хімічної реакції пропорційна з коефіцієнтом пропорційності k добутку наявних речовин A і B — відповідно $a - x$ і $b - x$, дістанемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = k(a - x)(b - x),\ a \neq b.$$

Відокремлюючи змінні, маємо

$$\frac{dx}{(a - x)(b - x)} = kdt.$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = \frac{1}{b - a}\left(\int \frac{dx}{a - x} - \int \frac{dx}{b - x}\right) =$$

$$= \frac{1}{b - a} \ln \frac{b - x}{a - x} - \frac{1}{b - a} \ln C.$$

(При цьому саме $-\frac{1}{b - a} \ln C$ зручно взяти як довільну сталу). Отже,

$$\ln \frac{b - x}{a - x} - \ln C = (b - a)\,kt.$$

Після потенціювання загальний інтеграл диференціального рівняння матиме вигляд

$$\frac{b - x}{a - x} = Ce^{-(a-b)kt},$$

де C — довільна стала, яку визначимо з початкових умов: $x = 0$ при $t = 0$.

Враховуючи, що $C = b/a$, остаточно дістаємо

$$\frac{b - x}{a - x} = \frac{b}{a} e^{-(a-b)kt},$$

або

$$x = ab\frac{1 - e^{-(a-b)kt}}{a - be^{-(a-b)kt}}.$$

З цієї формули випливає, що коли $t \to \infty$, то $x \to b$, і, отже, теоретично бімолекулярний процес також продовжується нескінченно довго.

Якщо $a = b$, то матимемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{(a - x)^2} = kdt.$$

Після інтегрування його дістанемо

$$\frac{1}{a - x} + C_1 = kt,$$

де C_1 — довільна стала, яка, враховуючи початкові умови, дорівнює $-1/a$. Отже,

$$\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a} = kt,$$

або

$$x = \frac{a}{1 + \frac{1}{akt}}.$$

Як бачимо також, що коли $t \to \infty$, то $x \to a$, і, отже, теоретично бімолекулярний процес продовжується нескінченно довго.

Зазначимо, що в усіх хімічних реакціях, про які йшлося раніше, коефіцієнт k визначається для кожної речовини експериментально.

8.6. Диференціальні моделі в екології

Екологія вивчає взаємовідносини людини і взагалі живих організмів із зовнішнім середовищем. Основним об'єктом екології є еволюція популяцій.

Розглянемо диференціальні моделі популяцій, які зв'язані з розмноженням або вимиранням останніх, а також із співіснуванням різних видів тварин у ситуації «хижак — жертва».

Нехай $x(t)$ — число осіб у популяції в момент часу t. Якщо A — число осіб в популяції, народжених в одиницю часу, а B — число осіб, які вмирають в одиницю часу, то можна стверджувати, що швидкість зміни $x(t)$ числа осіб з часом задається формулою

$$\dot{x} = A - B. \tag{8.10}$$

Тепер задача полягає в тому, щоб описати залежність A і B від x. Найпростішим випадком є ситуація, коли

$$A = ax,\ B = bx, \tag{8.11}$$

де a і b — коефіцієнти народження і смертності осіб за одиницю часу відповідно.

Використовуючи (8.11), рівняння (8.10) записують так:

$$\dot{x} = (a - b)x. \tag{8.12}$$

Зважаючи, що в момент часу $t = t_0$ число осіб в популяції дорівнює $x = x_0$, з рівняння (8.12) знаходимо

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

Звідси дістаємо, що коли $a > b$, то при $t \to \infty$ число осіб $x \to \infty$. Проте коли $a < b$, то $x \to 0$ при $t \to \infty$, і популяція стає вимираючою.

Хоч ця модель дещо спрощена, вона все-таки в багатьох випадках відповідає дійсності. Взагалі всі моделі, які описують дійсні явища і процеси, нелінійні, і замість диференціального рівняння (8.12) треба розглядати рівняння виду

$$\dot{x} = f(x),$$

де $f(x)$ — нелінійна функція, наприклад

$$\dot{x} = ax - bx^2,\ f(x) = ax - bx^2,$$

де $a > 0$, $b > 0$.

Якщо $x = x_0$ при $t = t_0$, то з останнього рівняння знаходимо

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{8.13}$$

Звідси при $t \to \infty$ число осіб в популяції $x(t) \to \frac{a}{b}$. При цьому можливі такі два випадки: $\frac{a}{b} > x_0$ і $\frac{a}{b} < x_0$ (рис. 8.13).

Зазначимо, що формула (8.13,) описує як приклад популяцію фруктових шкідників і деяких видів бактерій.

Якщо розглядати кілька співіснуючих видів, наприклад, великих і малих риб, де малі риби є кормом для великих, то, складаючи диференціальне рівняння для кожного виду, дістанемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \cdots, x_n),\ i = 1, \cdots, n.$$

Розглянемо детальніше двовидову модель «хижак — жертва», яка вперше була побудована Вольтерра для пояснення коливання рибних виловів в Адріатичному морі, що мали один і той же період, але відрізнялися за фазою.

Нехай x — число великих риб-хижаків, що живляться малими рибами-жертвами, число яких позначимо через y. Тоді число риб-хижаків збільшуватиметься доти, поки у них буде достатньо поживи, тобто малих риб. Зрештою наступить ситуація, коли поживи не вистачатиме і в результаті число великих риб зменшиться. Це приведе до того, що з деякого моменту число малих риб знову почне збільшуватися, що буде стимулювати нове зростання числа більших осіб, і цикл знову повториться. Модель, побудована Вольтерра, має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bxy; & (8.14) \\ \dot{y} = cx - dxy, & (8.15) \end{cases}$$

де a, b, c, d — додатні сталі величини.

У рівнянні (8.14) для великих риб доданок bxy виражає залежність приросту великих риб від кількості малих риб. У рівнянні (8.15) доданок $- dxy$ виражає зменшення числа малих осіб залежно від числа великих.

Для зручності дослідження двох останніх рівнянь введемо безрозмірні змінні

$$u(\tau) = \frac{d}{c} x,\ v(\tau) = \frac{b}{a} y,\ \tau = ct,\ \alpha = \frac{a}{c}.$$

В результаті диференціальні рівняння (8.14) і (8.15) матимуть вигляд

$$u' = \alpha u \cdot (v - 1);\ v' = v \cdot (1 - u), \tag{8.16}$$

де $\alpha > 0$, а штрих означає похідну по τ.

Припустимо, що в деякий момент часу $\tau = \tau_0$ число осіб обох видів відоме, тобто

$$u(\tau_0) = u_0,\ v(\tau_0) = v_0, \tag{8.17}$$

причому нас цікавитимуть тільки додатні розв'язки. Визначимо зв'язок між u і v. Для цього розділимо перше рівняння

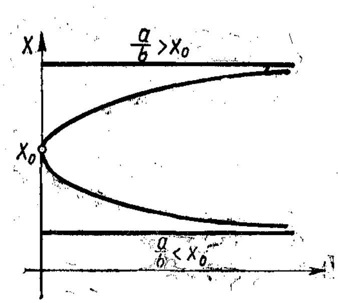

Рис. 8.13

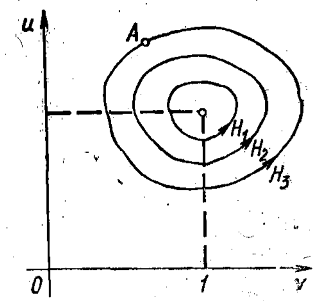

Рис. 8.14

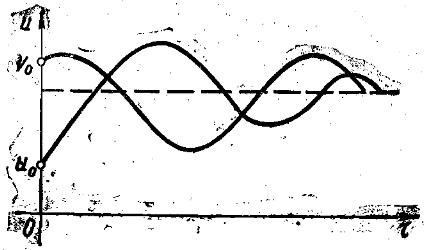

Рис. 8.15

системи (8.16) на друге і, проінтегрувавши здобуте диференціальне рівняння, дістанемо

$$\alpha v + u - \ln v^{\alpha} u = \alpha v_0 + u_0 - \ln v_0^{\alpha} u_0 \,\mathrm{DEF}\, H,$$

де H — стала величина, що визначається початковими умовами (8.17) і параметром α.

На рис. 8.14 зображено графіки u як функції від v при різних значеннях H. Як бачимо, в площині (u, v) є тільки замкнені криві.

Припустимо тепер, що початкові значення u_0 і v_0 задаються точкою A на траєкторії, що відповідає значенню $H = H_3$. Оскільки $u_0 > 1$, $v_0 < 1$, то перше рівняння (8.16) показує, що змінна u спочатку спадає. Аналогічний факт має місце і для змінної v. Далі, коли змінна u дорівнюватиме одиниці, то $v' = 0$, і потім протягом довгого часу τ змінна v зростатиме. Якщо $v = 1$, то $u' = 0$, і потім уже зростати починає змінна u. Таким чином, як змінна u, так і змінна v проходять замкнену траєкторію. Це означає, що розв'язками є функції, періодичні за часом. При цьому максимум u не збігається з максимумом v, тобто коливання в популяціях відбуваються в різних фазах.

Графік залежності u і v від часу τ зображено на рис. 8.15 (у випадку $v_0 > 1$, $u_0 < 1$).

За допомогою диференціальних рівнянь можна досліджувати також моделі теорії епідемій, бойових дій, задач пошуку, хімічних реакцій і т. п.

8.7. Задачі теорії керування

Для новітньої техніки, що має справу з високими енергіями, космічними швидкостями, швидкоплинними процесами, дорогоцінними установками і експериментами, характерною є необхідність найбільш раціонального використання ресурсів, вибору найкращої програми дій. Все це визначає ті проблеми, які є предметом теорії оптимального керування, яка тісно зв'язана з теорією диференціальних рівнянь і загальною теорією екстремальних задач.

Розглянемо деякі напрямки цієї теорії на прикладі.

Нехай маємо керуючий об'єкт, закон руху якого описується скалярним рівнянням з одним параметром керування

$$\dot{x} = ax + bu, \tag{8.18}$$

де $a > 0$ і $b \neq 0$ — сталі величини. Задача керування полягає в тому, щоб перевести цей об'єкт з початкового стану $x(0) = x_0$ в початок координат $x_1 = 0$.

Якщо вважати, що параметр керування u може набувати довільних значень, тобто область керування U збігається з усією дійсною прямою, то існує нескінченна множина значень u, які реалізують мету керування.

Справді, візьмемо довільне число $T > 0$ і визначимо функцію

$$u(t) = -\frac{2ax_0}{b(1 - e^{-2aT})} e^{-at}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{8.19}$$

Безпосередньо можна показати, що цьому неперервному керуванню відповідає траєкторія

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - e^{-2aT}} (e^{-2at} - e^{-2aT}) e^{at},$$

причому $x(T) = 0$.

Отже, який би не був початковий стан x_0, керуваня (8.19) переводить об'єкт з цього початкового стану x_0 в початок координат.

Якщо параметр керування u має допустиму область U, обмежену, наприклад $|u| \leqslant 1$, то задача не завжди має розв'язок.

8.8. Збільшення грошових вкладів

Задача. Суму A крб. покладено в банк на r % в рік. Знайти закон зміни суми при умові, що проценти нараховуються неперервно.

За встановленим законом розв'язати такі задачі:

а) суму 10 000 крб. покладено в банк на 2% в рік. Через скільки років вона становитиме 20 000 крб.

б) через скільки років вдвоє збільшиться 1 крб., що зберігається на 3 %-му вкладі?

Загальна сума P вкладу в результаті нарахування процентів один раз в кінці року виражається формулою

$$P = A(1 + r).$$

Якщо проценти нараховуються через півроку, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2,$$

якщо поквартально, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4,$$

і якщо кожного місяця, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}.$$

У загальному випадку в кінці року сума становитиме

$$P = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

при r % річних, що нараховуються m раз на рік (наприклад 365 разів за рік, тобто щоденно).

Через n років загальна сума

$$P = A\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m\right]^n.$$

Якщо число m нарахувань процентів за рік буде необмежено збільшуватися, то

$$P = \lim_{m\to\infty} A\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m\right]^n = A\lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{nr}. \quad (8.20)$$

Оскільки

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}} = e,$$

то рівність (8.20) набирає вигляду

$$P = Ae^{nr}.$$

Замінивши n на t, де t — час, дістанемо суму, що накопичиться через деякий час t:

$$P = Ae^{rt}.$$

За короткий проміжок часу dt збільшення суми P становитиме

$$dP = d(Ae^{rt}) = r(Ae^{rt})\,dt = rP\,dt.$$

Відокремлюючи в цьому рівнянні змінні, дістанемо диференціальне рівняння розглядуваної задачі:

$$\frac{dP}{P} = rdt. \quad (8.21)$$

Щоб розв'язати завдання а), проінтегруємо рівняння (8.21). Маємо

$$\int_{10000}^{20000}\frac{dP}{P} = 0{,}02\int_0^t dt, \text{ звідки } \ln P\Big|_{10000}^{20000} = 0{,}02\,t\Big|_0^t,$$

або

$$\ln 2 = 0{,}02t.$$

Визначаємо шуканий час:

$$t = \frac{\ln 2}{0{,}02} = \frac{0{,}693}{0{,}02} = 34{,}66 \text{ років}.$$

Розв'язуючи завдання б), з рівняння (8.21) дістаємо

$$\int_1^2\frac{dP}{P} = 0{,}03\int_0^t dt, \text{ звідки } \ln 2 = 0{,}03\,t.$$

Отже,

$$t = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1 \text{ років}.$$

8.9. Прогноз зростання населення міста

Припустимо, що швидкість приросту населення прямо пропорційна наявній кількості населення. Знайдемо залежність між кількістю населення A і часом t, якщо відомо, що в деякий момент, що приймається за початковий, кількість населення дорівнювала A_0, а через рік воно зросло на a %. Обчислимо також при цьому населення м. Києва на 2000 р., якщо відомо, що його кількість в 1979 р. становила 2163,6 тис., а в 1989—2602,8 тис. чол.

Швидкість зміни кількості населення — це перша похідна від кількості населення по часу, тобто $\frac{dA}{dt}$.

Отже, можна записати таке диференціальне рівняння:

$$\dot{A} = kA.$$

Відокремлюючи змінні, дістаємо

$$\frac{dA}{A} = kdt.$$

Після інтегрування маємо

$$\ln A = \ln e^{kt} + \ln C,$$

або

$$A = Ce^{kt}. \quad (8.22)$$

Кількість населення через рік визначимо так: річний приріст $a\%$ від A_0 становитиме $\frac{aA_0}{100}$, тоді кількість населення через рік буде

$$A_0 + \frac{aA_0}{100} = \frac{100 + a}{100}A_0.$$

Використовуючи початкові умови, що $A = A_0$ при $t_0 = 0$, знайдемо сталу C.

Отже, $A_0 = Ce^{k\cdot 0} = C \cdot e^0 = C$, тобто
$$C = A_0.$$
Таким чином, розв'язок рівняння (8.22) має вигляд
$$A = A_0 e^{kt}. \tag{8.23}$$
Для визначення множника e^{kt} використаємо додаткові дані, підставляючи в рівняння (8.23) значення кількості населення через рік, тобто $t = 1$, $A = \frac{100 + a}{100} A_0$. Маємо
$$\frac{100 + a}{100} A_0 = A_0 e^{k\cdot 1} = A_0 e^k$$
і
$$e^k = \frac{100 + a}{100}. \tag{8.24}$$
Підставляючи це значення в рівняння (8.23), дістанемо частинний розв'язок
$$A = A_0 \left(\frac{100 + a}{100}\right)^t, \tag{8.25}$$
який відображає залежність між кількістю населення і часом відповідно до умов задачі.

Тепер, використовуючи формулу (8.25), знайдемо чисельність населення м. Києва на 2000 р. Згідно з умовою задачі, населення м. Києва за 10 років (1979—1989 рр.) зросло на 20,3 %. Тоді за формулою (8.25)
$$A_{2000} = 2602{,}8 \left(\frac{102{,}03}{100}\right)^{10} \approx 2602{,}8 \left(\frac{100 + 2}{100}\right)^{10} =$$
$$= 2602{,}8 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{10} = 2602{,}8 \left(1 + 10 \cdot \frac{2}{100}\right) + \cdots \Big) =$$
$= 2602{,}8 \cdot 1{,}2 = 3123{,}36$ тис. чол.

Отже, в 2000 р. населення Києва становитиме близько 3 123 360 чол.

ОСНОВНІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ (ДР), ЇХ ВИРАЗ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

I. ДР з відокремленими змінними
$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$
Загальний розв'язок
$$\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(t)\,dt = C.$$

II. ДР з відокремлюваними змінними
$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$
або
$$y' = f(x)g(y) \quad (' = dy/dx).$$
Відокремлюючи змінні, дістаємо рівняння типу I.

III. Однорідні ДР
$$y' = f(x, y), \ f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$
Підстановкою $y = xu$, $y' = u + xu'$ зводимо до типу II.

IV. ДР, що зводяться до типу III або II
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$
Якщо $a_1b_2 \neq a_2b_1$, то підстановкою $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ зводимо його до типу III.

Якщо $a_1b_2 = a_2b_1$, то підстановкою $a_1x + b_1y = u$ зводимо його до типу II.

V. Лінійні ДР першого порядку
$$y' + P(x)y = Q(x).$$
1) підстановкою $y = u \cdot v$ (Бернуллі) зводимо до рівняння типу II;

2) метод варіації довільної сталої. Загальний розв'язок
$$y = e^{-\int P dx}\left(\int e^{\int P dx} Q dx + C\right).$$

VI. ДР Бернуллі
$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0;\ 1).$$
Підстановкою
$$z = y^{-n+1} \text{ або } y = u \cdot v$$
зведемо до ДР типу V.

VII. ДР у повних диференціалах
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

якщо

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Загальний розв'язок

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy=C.$$

VIII. ДР Лагранжа

$$y=x\varphi(y')+\psi(y').$$

Підстановкою $y'=p(x)$ і наступним диференціюванням зводимо його до рівняння типу II.

IX. ДР Клеро

$$y=xy'+\psi(y').$$

Підстановкою $y'=p(x)$ і наступним диференціюванням зводимо до рівняння типу II. Загальний розв'язок $y=Cx+\psi(C)$.

X. ДР вищого порядку, що допускають його зниження.

1) ДР $y^{(n)}=f(x)$.

Загальний розв'язок знаходиться n-кратним інтегруванням;

2) ДР $y''=f(x, y')$, яке явно не містить y. Підстановкою

$$y'=p(x),\ y''=p'$$

зводимо його до ДР першого порядку;

3) ДР $y''=f(y, y')$ явно не містить x.

Підстановкою

$$y'=p(y),\ y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

зведемо до ДР першого порядку.

XI. Лінійне однорідне ДР із сталими коефіцієнтами n-го порядку

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}y'+p_ny=0,$$

$$(p_i=\text{const})\in R,\ i=1, \dots, n.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\varphi(k)\equiv k^n+p_1k^{n-1}+\dots+p_{n-1}k+p_n=0.$$

Якщо $k_1, k_2, \dots, k_p$ — корені кратностей $m_1, m_2, \dots, m_p$ $\sum_{j=1}^{p} m_j=n$, то функції

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \dots,\ x^{m_1-1}e^{k_1x};$$
$$e^{k_2x},\ xe^{k_2x},\ \dots,\ x^{m_2-1}e^{k_2x};$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$e^{k_px},\ xe^{k_px},\ \dots,\ x^{m_p-1}e^{k_px}$$

є фундаментальною системою розв'язків.

Якщо корені дійсні кратні: k_1 — кратності m_1, k_2 — кратності $m_2, \dots, k_p$ — кратності m_p, а також комплексні кратні: $(\alpha_1\pm i\beta_1)$ — кратності μ_1, $(\alpha_2+i\beta_2)$ — кратності $\mu_2, \dots, (\alpha_s+i\beta_s)$ — кратності μ_s, причому

$$\sum_{j=1}^{p} m_j+\sum_{j=1}^{2s}\mu_j=n,$$

то фундаментальна система розв'язків — це функції

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \dots,\ x^{m_1-1}e^{k_1x},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$e^{k_px},\ xe^{k_px},\ \dots,\ x^{m_p-1}e^{k_px};$$
$$e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\ xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\ \dots,\ x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x;$$
$$e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\ xe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\ \dots,\ x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx,\ xe^{\alpha_sx}\cos\beta_sx,\ \dots,\ x^{\mu_s-1}e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx;$$
$$e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx,\ xe^{\alpha_sx}\sin\beta_sx,\ \dots,\ x^{\mu_s-1}e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx.$$

XII. Лінійне неоднорідне ДР із сталими коефіцієнтами

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x).$$

Нехай загальний розв'язок рівняння $L[y]=0$

$$u=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n.$$

Тоді частинний розв'язок v знаходимо методом варіації, використовуючи систему

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2+\dots+C_n'y_n=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+\dots+C_n'y_n'=0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ C_1'y_1^{(n-1)}+\dots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).\end{cases}$$

Якщо

$$f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$$

і α є корінь рівняння $\varphi(k)=0$ кратності $r\geqslant 0$, то

$$v=x^rQ_m(x)e^{\alpha x},$$

де $Q_m(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m$ — многочлен степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x),$$

то

$$v=x^re^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x),$$

де $r\geqslant 0$ — кратність контрольного числа правої частини $\sigma=\alpha\pm i\beta$; $R_l(x)$, $S_l(x)$ — многочлени степеня $l=\max\{m, n\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

XIII. Система лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\dot{x}=Ax,\ x\in R^n,\ \text{де } A-(n\times n)\text{-матриця}.$$

1) виключенням невідомих функцій, крім однієї, зводимо до рівняння типу XI;

2) метод Ейлера. Нехай

$$x = e^{\lambda t}a, \ a = (a_1, \ \dots, \ a_n) \in R^n.$$

Якщо власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці A всі різні і $a_1, a_2, \dots, a_n$ — власні вектори матриці A, то загальним розв'язком є вектор-функція

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} a_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} a_2 + \ \cdots \ + C_n e^{\lambda_n t} a_n,$$

де C_k — довільні сталі.

Якщо власному значенню λ кратності m відповідає m лінійно незалежних власних векторів $a_1, \dots, a_m$, то маємо m лінійно незалежних розв'язків

$$e^{\lambda t}a_1, \ e^{\lambda t}a_2, \ \dots, \ e^{\lambda t}a_m.$$

ОСНОВНА ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

У всіх формулах під u розуміють або незалежну змінну, або довільну функцію будь-якої незалежної змінної, що має похідну в деякому інтервалі.

Кожна з формул цієї таблиці справедлива в будь-якому інтервалі, що міститься в області існування відповідної підінтегральної функції.

1. $\int 0 \cdot du = C.$ 2. $\int 1 \cdot du = u + C.$ 3. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C.$

4. $\int \dfrac{du}{u^n} = -\dfrac{1}{n-1} \dfrac{1}{u^{n-1}} + C$ (n — стала величина, $n \neq 1$).

5. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$ 6. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

7. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1).$ 8. $\int e^u du = e^u + C.$

9. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ 10. $\int \cos u du = \sin u + C.$

11. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$

12. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

13. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$ 14. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

15. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C.$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C.$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+u}{a-u} \right| + C.$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$

19. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \dfrac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{u}{a} + C.$

20. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \dfrac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \dfrac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C.$

21. $I_k = \int \dfrac{du}{(a^2 + u^2)^k}$ $(k \geqslant 2);$

$$I_k = \frac{1}{a^2} \left(\frac{u}{2(k-1)(a^2 + u^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1} \right),$$

ТЕМИ КУРСОВИХ РОБІТ

1. Рівняння Ріккаті. Загальна теорія і випадки інтегрованості в скінченному вигляді.
2. Рівняння в повних диференціалах. Способи побудови загального розв'язку. Розв'язок задачі Коші.
3. Інтегруючий множник. Загальна теорія і знаходження інтегруючого множника в окремих випадках.
4. Доведення теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нормальної системи n диференціальних рівнянь і рівнянь n-го порядку в нормальній формі. Лінійний випадок.
5. Теореми про неперервну залежність розв'язків задачі Коші для нормальної системи від параметрів і початкових даних.
6. Метод Ейлера інтегрування лінійного однорідного рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами. Поведінка розв'язків при $t \to \infty$.
7. Метод Ейлера інтегрування лінійної однорідної системи рівнянь із сталими коефіцієнтами. Поведінка розв'язків при $t \to \infty$.
8. Лінійне рівняння Ейлера n-го порядку.
9. Інваріантність лінійного рівняння n-го порядку і лінійної системи відносно замін незалежної змінної і невідомої функції.
10. Формула Ліувілля—Остроградського для лінійного однорідного рівняння n-го порядку і лінійної однорідної системи.
11. Нормована фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку і системи рівнянь. Побудова рівнянь і систем за заданою ФСР.
12. Метод Лагранжа інтегрування лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку та їх систем.
13. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння і лінійних систем з сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.
14. Лінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, що приводяться до рівнянь із сталими коефіцієнтами.
15. Зниження порядку лінійних однорідних рівнянь за відомим частинним розв'язком.
16. Численні методи інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку з використанням ЕОМ.
17. Принцип стиснутих відображень і доведення теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші.
18. Нерівність Гроннуола та її застосування при доведенні єдиності розв'язку задачі Коші.
19. Асимптотичне інтегрування деяких лінійних диференціальних рівнянь простіших типів.
20. Однорідні рівняння першого порядку і ті, що зводяться до них.
21. Задача Коші. Огляд її постановок, теорем існування і єдиності та методів доведення. Властивості розв'язків задачі Коші. Особливі випадки.
22. Зведення систем лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами до канонічного виду.
23. Інтегрування системи лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами векторно-матричним методом.
24. Поняття про стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь. Дослідження на стійкість розв'язків системи двох лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами на основі загального розв'язку у формі Коші.
25. Класифікація за Пуанкаре особливих точок диференціального рівняння з однорідною дробово-лінійною правою частиною. Зв'язок типу особливої точки з характером стійкості точки спокою.
26. Дослідження на стійкість розв'язків диференціального рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.

ТЕМИ ДИПЛОМНИХ РОБІТ

1. Дослідження на стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь першим методом Ляпунова.
2. Сингулярно-збурені диференціальні рівняння.
3. Інтегрування диференціальних рівнянь операційним численням.
4. Інтегрування диференціальних рівнянь операторним методом.
5. Інтегрування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку за допомогою узагальнених степеневих рядів.
6. Асимптотичне інтегрування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.
7. Векторно-матричний метод інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь.
8. Нескінченні системи диференціальних рівнянь.
9. Метод усереднення в теорії диференціальних рівнянь.
10. Задача Коші для диференціального рівняння з відхиленням аргументу.
11. Крайова задача Штурма—Ліувілля.
12. Граничні цикли, що визначаються системою двох рівнянь.
13. Перетворення системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь до канонічного виду.
14. Теорема Ляпунова про стійкість розв'язків автономної системи за першим наближенням.
15. Знаходження періодичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.
16. Рівняння Бесселя та його застосування.
17. Функція Гріна і крайові задачі.
18. Наближені аналітичні методи інтегрування диференціальних рівнянь.
19. Теорема Флоке—Ляпунова в теорії систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами.
20. Рівняння Гаусса.
21. Теорема про диференційовність розв'язків задачі Коші за параметром і початковими даними.
22. Розвиток теорії звичайних диференціальних рівнянь в XVII і XVIII століттях.
23. Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу.
24. Теореми про розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами.
25. Асимптотичні властивості розв'язків систем диференціальних рівнянь другого порядку.
26. Асимптотика L-діагональних систем.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях.— М. : Наука, 1987.— 153 с.
2. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. —М. : Наука, 1985.— 444 с.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП.— М. : Наука, 1985.— 464 с.
4. *Гребенча М. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Учпедгиз, 1937.— 280 с.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.
6. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа.— М. : Наука, 1967.— 368 с.
7. *Еругин Н. П., Штокало И. З.* и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1974.— 472 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1971.— 576 с.
9. *Киселев А. И., Краснов М. А., Макаренко Т. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Высш. шк., 1965.— 307 с.
10. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Высш. шк., 1983.— 128 с.
11. *Крижанівський С. Є.* Диференціальні рівняння.— Харків : ДНТВУ, 1938.— 400 с.
12. *Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф.* Диференціальні рівняння.— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1981.— 504 с.
13. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Высш. шк., 1967.— 564 с.
14. *Матвеев Н. М.* Дифференциальные уравнения.— М. : Просвещение, 1988.— 256 с.
15. *Маркуш І. І.* Розвиток асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь.— Ужгород : Ужгор. ун-т, 1975.— 224 с.
16. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1970.— 280 с.
17. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления : В 2 т.— М. : Наука, 1976.— Т. 1—2.
18. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1982.— 331 с.
19. *Привалов И. И.* Интегральные уравнения.— М.; Л. : ГИТТЛ, 1937.— 248 с.
20. *Призва Г. Й.* Диференціальні рівняння та їх застосування.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1978.— 104 с.
21. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984.— 408 с.
22. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М.; Л. : Гостехиздат, 1950.
23. *Сикорский Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложением их к некоторым техническим задачам.— М.; Л. : ГИТТЛ, 1940.— 156 с.
24. *Синцов Д. М.* Елементарний курс інтегрування диференціальних рівнянь.— Харків : ДВУ, 1930.— 296 с.
25. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : ГИФМЛ, 1958.— 468 с.
26. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1985.— 230 с.
27. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1985.— 350 с.
28. *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств.— М. : ГИТТЛ, 1956.— 304 с.
29. *Шиманський І. Є.* Математичний аналіз.— К. : Рад. шк., 1966.— 648 с.
30. *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика : Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1986.— 512 с.
31. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1971.— 228 с.
32. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1964.— 128 с.
33. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— М.: Наука, 1969.— 424 с.
34. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями.— М. : Мир, 1986.— 243 с.

Навчальне видання

Шкіль Микола Іванович
Сотніченко Микола Адамович

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Оправа художника *В. Г. Самсонова*
Художній редактор *С. В. Анненков*
Технічний редактор *С. Л. Светлова*
Коректор *Г. І. Якименко*

Здано до набору 19.12.91. Підписано до друку 08.07.92. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Папір друк. № 2. Гарнітура літературна. Високий друк. Умов.-друк. арк. 15,96. Умов. фарбовідб. 16,22. Обл.-вид. арк. 24,18. Вид. № 9458. Замовлення № 2-32.

Видавництво «Вища школа», 252054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7.

Надруковано з матриць книжкової ф-ки ім. М. В. Фрунзе, 310057, Харків-57, вул. Донець-Захаржевського, 6/8 на Київській книжковій друкарні наукової книги, 252004, Київ-4, Репіна, 4. Зам. 2-602.