КУРС ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С.П.Лавренюк

УНІВЕРСИТЕТСЬКА МАТЕМАТИКА • ОСНОВНІ КУРСИ

КУРС ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С.П.Лавренюк

Рекомендовано Міністерством освіти України

ВИДАВНИЦТВО НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ
Львів • 1997

«Курс диференціальних рівнянь» пропонується для студентів університетів механіко-математичних спеціальностей. Викладено основні поняття диференціальних рівнянь, коректність задачі Коші для рівнянь першого порядку, для нормальних систем і для рівнянь вищого порядку, загальну теорію лінійних рівнянь та систем, динамічні системи та властивості їх розв'язків, основи теорії стійкості за Ляпуновим, крайові задачі для лінійних рівнянь другого порядку, основні поняття диференціальних рінянь з частинними похідними першого порядку.

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. н., професор *М.О.Перестюк,*
доктор фіз.-мат. н., професор *І.О.Парасюк,*
доктор фіз.-мат. н., професор *Р.І.Петришин*

Видавництво науково-технічної літератури

Адреса офісу: 290007, м.Львів, вул. Огієнка 18-а, оф. 1.3.
Адреса для листування: 290007, м. Львів, а/с 1173
тел./факс: (0322) 728073
e-mail: vntl@litech.lviv.ua
http://www.litech.lviv.ua/~vntl

Художній редактор — Леся Дуб

Оригінал-макет підготовано до друку з використанням системи $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX.

ISBN 966-7148-22-X (серія «Університетська математика. Основні курси»)
ISBN 966-7148-08-4

Надруковано з готових діапозитивів
в друкарні ТзОВ «Простір М»

ПЕРЕДМОВА

Даний курс диференціальних рівнянь пропонується для студентів механіко-математичних спеціальностей. Він написаний на основі відомих підручників [1 -15] і включає в себе всі питання програми відповідного університетського курсу.

У главі 1 введено основні поняття диференціальних рівнянь першого порядку та викладено методи інтегрування найпростіших рівнянь. Причому спочатку розглянуто рівняння, розв'язане стосовно похідної. Для такого рівняння означено поле напрямків, інтегральні криві, розв'язки. Далі введено диференціальне рівняння першого порядку у симетричній формі як таке, що визначається довільним векторним полем, яке задано парою неперервних функцій. Доведено теореми існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків від початкових даних задачі Коші для рівняння першого порядку, розв'язаного стосовно похідної, а також теорему про існування загального розв'язку рівняння. Сюди також включені деякі допоміжні твердження: теорема Асколі-Арцела, лема Гронуолла-Белмана та інші. Завершується перша глава розглядом рівняння першого порядку, не розв'язаного стосовно похідної. Розглянуто специфіку постановки задачі Коші, поняття особливого розв'язку та методи його знаходження.

Друга глава присвячена вивченню нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь. Тут ряд теорем лише сформульовано, оскільки їх доведення проводиться повністю аналогічно до відповідних теорем для диференціальних рівнянь першого порядку. У цю главу також включено теорему про неперервну диференційовність розв'язків за початковими даними.

У главі 3 розглядаються звичайні диференціальні рівняння n-го порядку. Наведено деякі методи інтегрування цих рівнянь, теорему існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

У четвертій главі викладено основи загальної теорії лінійних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто властивості розв'язків однорідних і неоднорідних систем, доведено існування фундаментальної системи розв'язків, встановлено структру загального розв'язку однорідних і неоднорідних систем, формулу Ліувілля-Остроградського, наведено метод варіації сталих. Аналогічні питання для лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку розглядаються у п'ятій главі шляхом зведення до лінійних нормальних систем. Крім того, тут викладено метод Ейлера розв'язування лінійних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та метод невизначених коефіцієнтів, розглянуто рівняння Ейлера і Чебишова.

Шоста глава присвячена побудові загального розв'язку лінійної нормальної системи зі сталими коефіцієнтами. Наведено деякі допоміжні теореми з лінійної алгебри, що стосуються зведення матриць до трикутного вигляду.

У сьомій главі розглядаються динамічні системи, деякі властивості їх розв'язків (траєкторій), питання існування повної сукупності перших інтегралів, поведінка траєкторій динамічних систем. Детально вивчено поведінку траєкторій динамічної системи на площині, а також типи станів рівноваги лінійної однорідної системи двох рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У главі 8 викладено основи теорії стійкості Ляпунова. Тут розглянуто критерії стійкості лінійних систем, дослідження стійкості за допомогою функції Ляпунова та за першим наближенням.

Дев'ята глава присвячена лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Слід зазначити, що частина матеріалу цієї глави виходить за рамки теперішньої програми курсу, але є необхідною для вивчення рівнянь математичної фізики. Сюди включено: розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою методу степеневих рядів (розглянуто, зокрема, рівняння Гауса і рівняння Беселя), побудову розв'язку крайових задач за допомогою функції Гріна, поняття власних значень і власних функцій, дослідження коливності та неколивності розв'язків.

За традицією в посібник введена глава (глава 10), яка знайомить читача з основними поняттями диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Розглянуто задачу Коші для лінійних однорідних і квазілінійних рівнянь, методи побудови їх розв'язків. Введено поняття характеристик та досліджено зв'язок характеристик з інтегральними поверхнями, з питанням єдиності розв'язку задачі Коші.

Посібник містить ряд прикладів, які ілюструють виникнення диференціальних рівнянь як математичних моделей деяких задач природознавства.

Рисунки до посібника підготував доц. Головатий Ю.Д.

ГЛАВА 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§ 1.1. Диференціальні рівняння як математичні моделі реальних процесів і об'єктів

Задача вивчення реальних об'єктів або процесів полягає у виявленні їх властивостей з метою прогнозування поведінки і керування ними. Розв'язок цієї задачі значно полегшується, якщо замість самих об'єктів (або процесів) вивчати їх моделі.

Моделі реальних об'єктів завжди широко використовувалися в науці і техніці. З розвитком математики все частіше стали застосовуватися математичні моделі для вивчення різноманітних процесів і об'єктів. Математичні моделі внаслідок їх відносної простоти перш за все допомагають зрозуміти процес, дають можливість встановити якісні і кількісні характеристики стану процесу і на підставі цих характеристик передбачити подальший його розвиток без проведення натуральних експериментів, які іноді просто неможливо здійснити.

При математичному описі різноманітних явищ і залежностей, що містять елементи 'руху', або змінюються з часом, користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них функцій, входять також похідні (диференціали) від шуканих функцій. Наприклад, нехай матеріальна точка P (рис. 1) рухається вздовж прямої, яку ми приймемо за вісь y, так, що у момент часу x точка займає положення y. Нехай відома швидкість руху як функція від часу x; позначимо її через $f(x)$ і будемо припускати, що вона неперервна для всіх розглянутих значень часу x. Потрібно знайти закон руху точки, тобто залежність y від x, якщо відомо, що у момент x_0 точка займала положення y_0, так що $y(x_0) = y_0$.

Рис. 1

Для побудови математичної моделі цього процесу згадаємо фізичний зміст похідної для функції $y(x)$. Як відомо, $y'(x)$ виражає швидкість руху точки у момент x. Отже, за умовою

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.1}$$

Як бачимо у даному випадку математична модель містить похідну від шуканої функції. Такі рівняння називаються диференціальними. Однак побудова математичної моделі не є для нас самоціллю. У даній задачі нас цікавить функція $y(x)$. Тобто нам потрібно розв'язати диференціальне рівняння (1.1). Нагадаємо, що у цьому випадку $y(x)$ буде первісною для функції $f(x)$, яка існує на підставі зроблених припущень. Отже,

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C, \tag{2.1}$$

і ми отримали безліч функцій, які справджують рівняння (1.1). Для виділення функції, яка задовольняє умови нащої задачі, потрібно використати те, що $y(x_0) = y_0$. Для цього у формулі (2.1) покладемо $x = x_0$ і $y = y_0$. Отримаємо побудова математичної моделі не є для нас самоціллю. У даній задачі нас цікавить функція $y(x)$. Тобто нам потрібно розв'язати диференціальне рівняння (1.1). Нагадаємо, що у цьому випадку $y(x)$ буде первісною для функції $f(x)$, яка існує на підставі зроблених припущень. Отже,

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C, \tag{2.1}$$

і ми отримали безліч функцій, які справджують рівняння (1.1). Для виділення функції, яка задовольняє умови нащої задачі, потрібно використати те, що $y(x_0) = y_0$. Для цього у формулі (2.1) покладемо $x = x_0$ і $y = y_0$. Отримаємо

$$y_0 = \int\limits_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt + C,$$

звідки $C = y_0$. Отже, шуканим розв'язком задачі буде функція

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

Надалі будуть наведені інші математичні моделі реальних процесів і явищ. На завершення цього пункту звернемося ще до однієї простої геометричної задачі.

Нехай потрібно знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0,1)$ і володіє тією властивістю, що у кожній її точці кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Для розв'язування задачі припустимо, що рівняння шуканої кривої є $y = y(x)$ (рис. 2). Позначимо через α кут, утворений дотичною MT з додатнім напрямом осі Ox. Як відомо, кутовий коефіцієнт дотичної MT є $\operatorname{tg}\alpha$ і він дорівнює $y'(x)$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$. З іншого боку за умовою задачі $\operatorname{tg}\alpha = 2x$. Отже, отримаємо рівняння

$$y' = 2x, \tag{3.1}$$

яке є диференціальним.

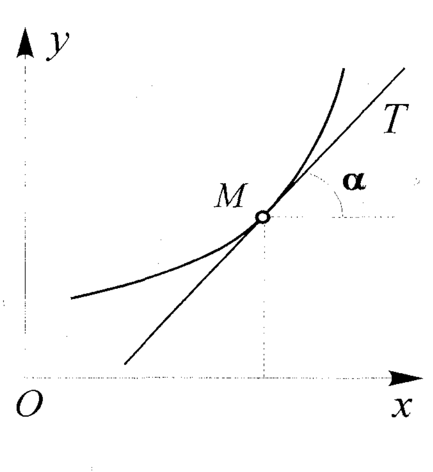


Рис. 2

Невідому функцію $y(x)$ ми можемо знайти з рівняння (3.1) як первісну для функції $2x$, тобто $y(x) = x^2 + C$. Тепер серед знайдених кривих потрібно виділити ту, яка проходить через точку $M_0(0,1)$: $y(0) = C = 1$. Отже, функція $y = x^2 + 1$ задовольняє всі умови задачі і, тим самим, є шуканою.

Зауважимо, що тут як і в першій задачі ми змогли знайти невідому функцію, склавши попередньо математичну модель об'єкта у вигляді диференціального рівняння та розв'язавши останнє. Моделі у вигляді диференціальних рівнянь можна назвати динамічними математичними моделями описуваних ними реальних процесів і явищ. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться похідні шуканих залежностей. А математичні залежності між змінними і шуканими величинами можна назвати кінематичними математичними моделями. Ефективність динамічного математичного моделювання реальних процесів полягає у його відносній простоті (порівняно з кінематичним моделюванням). Проте метою дослідження реальних об'єктів є кінематична модель, оскільки лише така модель дає змогу досконало вивчити їх. Отже, складання динамічної моделі є проміжною ланкою між об'єктами дослідження і їх кінематичними моделями.

Розшифрування динамічної моделі, тобто перетворення її в кінематичну модель називають інтегруванням динамічної моделі, або відповідно інтегруванням диференціального рівняння. Отже, основною задачою диференціальних рівнянь є розробка методів їх інтегрування. Як ми побачимо надалі, лише незначна кількість диференціальних рівнянь може бути проінтегрована і на початок двадцятого століття задача відшукання тих диференціальних рівнянь, які можуть бути проінтегровані, була в основному розв'язана. На перший план вийшла задача встановлення за властивостями рівнянь тих чи інших властивостей їх розв'язків. Ці дві задачі – вивчення методів інтегрування диференціальних рівнянь і дослідження різноманітних властивостей їх розв'язків – і становлять предмет теорії диференціальних рівнянь як самостійної галузі математики.

§ 2.1. Основні поняття диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних стосовно похідної

Нехай $G \subset \mathbb{R}^2$ – область (обмежена або ні), (x, y) – точка цієї області, f – неперервна функція, задана у кожній точці області G ($f : G \to \mathbb{R}$).

Означення 1.1. *Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним стосовно похідної, називається співвідношення вигляду*

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією y та її похідною y'.

Зауважимо, що наведені у § 1.1 рівняння очевидно і є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, розв'язаними стосовно похідної.

Розглянемо зв'язну множину на дійсній осі, тобто проміжок вигляду $\langle a, b\rangle$, де знак $\langle$ (або $\rangle$) може позначати як включення $[$ (або $]$), так і виключення $($ (або $)$) кінця проміжка. При цьому a і b можуть бути і символами $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Означення 2.1. *Функція $y = \varphi(x)$, визначена на проміжку $\langle a, b\rangle$, називається розв'язком диференціального рівняння (4.1), якщо виконуються такі умови:*

1) $\varphi(x)$ диференційовна у кожній точці $\langle a, b\rangle$;
2) $(x, \varphi(x)) \in G$ для всіх $x \in \langle a, b\rangle$;
3) $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ для всіх $x \in \langle a, b\rangle$.

Зауважимо, що оскільки $f(x, y)$ неперервна, то з означення розв'язку випливає, що $\varphi'(x)$ неперервна на $\langle a, b\rangle$.

Надалі через $C^k(\Omega)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ будемо позначати множину тих функцій, всі похідні яких до порядку k включно є неперервними в області Ω, причому приймемо $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Зауваження 1.1. *Суттєво є те, що область визначення розв'язку рівняння (4.1) є множина зв'язна. Наприклад, для кожного дійсного C функція $\varphi(x) = (C - x)^{-1}$, визначена для всіх $x \neq C$, не буде розв'язком диференціального рівняння*

$$y' = y^2 \tag{5.1}$$

(тут область G є вся площина Oxy), хоч для неї виконуються умови 1) – 3) означення 2.1, оскільки вона задана на незв'язній множині. У той же час звуження функції $\varphi(x)$ на інтервали $(-\infty, C)$ і $(C, +\infty)$ є розв'язком рівняння (5.1).

Як ми бачили на найпростіших прикладах диференціальних рівнянь (§ 1.1), їх розв'язки визначаються неоднозначно. У тих прикладах для однозначного визначення розв'язку потрібно було задавати початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \tag{6.1}$$

де $(x_0, y_0) \in G$. При цьому числа x_0, y_0 називають початковими даними, а задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння (4.1), який задовольняє початкову умову (6.1), задачою Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного стосовно похідної.

Розглянемо геометричну інтерпретацію рівняння (4.1) і задачі Коші (4.1), (6.1).

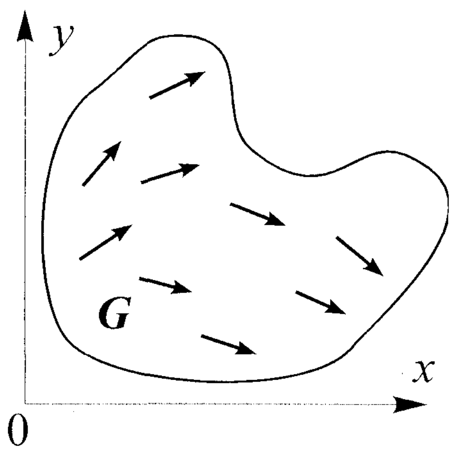


Рис. 3

У кожній точці (x, y) області G проведемо вектор з координатами $\{1, f(x, y)\}$, який нахилений до осі Ox під кутом $\psi = \operatorname{arctg} f(x, y)$. Сукупність усіх цих векторів будемо називати полем напрямків (векторним полем) диференціального рівняння (4.1). Криву l, яка лежить в області G і у кожній своїй точці дотикається до відповідного вектора $\{1, f(x, y)\}$ (напрямку поля), будемо називати інтегральною кривою рівняння (4.1). Оскільки $f(x, y)$ – неперервна функція, то вектори $\{1, f(x, y)\}$ змінюються неперервно вздовж кривої l, тобто ця крива є гладкою (гладка крива – це крива, у кожній точці якої існує дотична і ця дотична неперервно змінюється). Крім того, у всіх точках області G

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} f(x, y) < \frac{\pi}{2}.$$

Тому рівняння кривої l можна записати у вигляді функції $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, причому $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$ і $(x, \varphi(x)) \in G$ для всіх $x \in \langle a, b\rangle$. Оскільки $\varphi'(x)$ дорівнює $\operatorname{tg}\psi$ (ψ –кут нахилу дотичної до l у точці $(x, \varphi(x))$, то $\varphi'(x) \equiv f(x.\varphi(x))$, $x \in \langle a, b\rangle$. Таким чином, рівняння $y = \varphi(x)$ інтегральної кривої l диференціального рівняння (4.1) є розв'язком цього рівняння. Легко бачити, що і навпаки, графік кожного розв'язку диференціального рівняння (4.1) є його інтегральною кривою. Отже, розв'язати диференціальне рівняння (4.1) геометрично означає побудувати всі його інтегральні криві. Якщо розглянути задачу Коші (4.1), (6.1), то для її геометричного розв'язування потрібно побудувати ту інтегральну криву, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Приклад 1.1. Нехай

$$y' = \frac{y}{x}, \quad G = \{(x, y): \ x > 0, \ y > 0\}. \tag{7.1}$$

Очевидно, що на прямих $y = Cx$, $C > 0$ маємо

$$\frac{y}{x} = C, \qquad \frac{dy}{dx} = C.$$

Такі лінії, на яких векторне поле рівняння (4.1) має сталий напрямок, називаються ізоклинами цього рівняння. Отже, на ізоклинах рівняння (7.1) поле має напрямок $\{1, C\}$

(рис. 4). Тоді ці ізоклини будуть одночасно інтегральними кривими, а їх рівняння $y = Cx$ – розв'язками рівняння (7.1).

Приклад 2.1. Нехай

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad G = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}. \tag{8.1}$$

Ізоклинами цього рівняння теж є прямі $y = x/C$, $C > 0$. На цих прямих векторне поле рівняння (8.1) має напрямок вектора $\{1, -C\}$. Отже, на прямій $y = x/C$ поле ортогональне до ізоклини. Звідси випливає, що інтегральними кривими рівняння (8.1) будуть дуги кіл $y = \sqrt{C - x^2}$, $0 < C < \infty$.

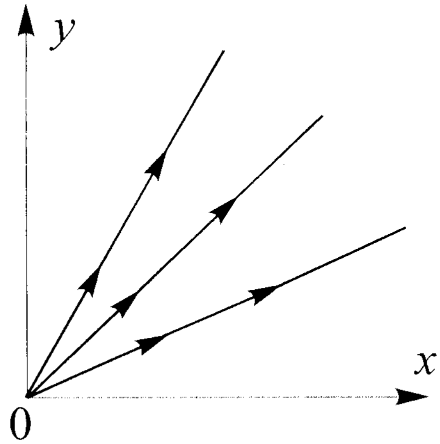


Рис. 4

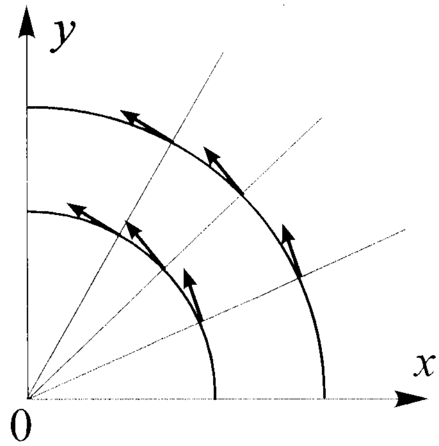


Рис. 5

§ 3.1. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані стосовно похідної

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. У § 1.1 ми вже розглядали диференціальне рівняння

$$y' = f(x)$$

і знаємо, що всі розв'язки цього рівняння можуть бути записані формулою

$$y = F(x) + C, \tag{9.1}$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $f(x)$, а C – довільна стала. Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(x)\, h(y), \tag{10.1}$$

де $f \in C(\langle a, b\rangle)$, $h \in C(\langle c, d\rangle)$. Рівняння (10.1) називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Нехай $\langle c_0, d_0\rangle$ – який-небудь проміжок множини $\langle c, d\rangle$, на якому $h(y) \neq 0$ і нехай $H(y)$ яка-небудь первісна для функції $\dfrac{1}{h(y)}$ на проміжку $\langle c_0, d_0\rangle$. Зробимо заміну у рівнянні (10.1) $Y = H(y)$. Тоді рівняння (10.1) можна записати у вигляді

$$\frac{dY}{dx} = f(x),$$

розв'язок якого

$$Y = F(x) + C, \tag{11.1}$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $f(x)$. За умовою

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)} \neq 0, \quad y \in \langle c_0, d_0 \rangle.$$

Тому існує обернена функція $H^{-1}(Y)$ і з рівняння (11.1) маємо:

$$y = H^{-1}(F(x) + C). \tag{12.1}$$

Нехай число β_k, $k \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ є розв'язком рівняння $h(y) = 0$. Очевидно, функції $y = \beta_k$ будуть розв'язками рівняння (10.1). Будемо вважати, що $\beta_k < \beta_{k+1}$ для всіх k. Тоді всі розв'язки рівняння (10.1) можуть бути описані формулами:

$$\begin{cases} y = H_k^{-1}(F(x) + C), \\ y = \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

де H_k – яка-небудь первісна для функції $h(y)$ на проміжку (β_k, β_{k+1}), а C – довільна стала.

Оскільки формула (12.1) отримана з (11.1), то всі розв'язки рівняння (10.1) (у неявному вигляді) можна записати формулами:

$$\int \frac{dy}{h(y)} - \int f(x)dx = 0,$$
$$y = \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Приклад 3.1. Розглянемо рівняння

$$y' = (x + 1)\, h(y), \tag{13.1}$$

де

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{якщо} \quad y \geq 0, \\ y^2, & \text{якщо} \quad y < 0. \end{cases}$$

Тут $G = \mathbb{R}^2$. Оскільки $h(0) = 0$, то $y = 0$ є розв'язком рівняння (13.1).

Розглянемо спочатку проміжок $(-\infty, 0)$. Маємо

$$\int \frac{dy}{y^2} - \int (x + 1)\, dx = 0$$

або

$$\frac{1}{y} + \frac{(x + 1)^2}{2} = C_1.$$

На проміжку $(0, +\infty)$

$$\int \frac{dy}{y} - \int (x + 1)\, dx = 0,$$
$$\ln y - \frac{(x + 1)^2}{2} = C_2.$$

Отже, всі розв'язки рівняння (13.1) опишуться формулами:

$$\frac{1}{y} + \frac{(x+1)^2}{2} = C, \ (y < 0),$$
$$y = 0,$$
$$\ln y - \frac{(x+1)^2}{2} = C, \ (y > 0),$$

де C – довільна стала.

Розглянемо далі рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \ a, b, c \in \mathbb{R}^1. \tag{14.1}$$

Нехай $f(u)$ – неперервна на проміжку $\langle u_0, u_1 \rangle$. Зробимо заміну

$$u = ax + by + c. \tag{15.1}$$

Звідси

$$y = \frac{u - ax - c}{b} \quad \text{і} \quad y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Тому рівняння (14.1) набере вигляду

$$u' = bf(u) + a,$$

тобто стає рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайшовши всі розв'язки цього рівняння, ми за формулою (15.1) будемо мати всі розв'язки рівняння (14.1).

2. Однорідні рівняння та звідні до них. Нехай маємо рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{4.1}$$

причому функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто

$$f(tx, ty) = f(x, y) \quad \text{для довільного} \quad t. \tag{16.1}$$

Тоді

$$f(x, y) = f\left(x \cdot, x \cdot \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

і рівняння (4.1) можна подати у вигляді

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right). \tag{17.1}$$

Такі рівняння називаються однорідними. Зробимо в (17.1) заміну $z = y/x$. Тоді $y = zx$, $y' = z'x + z$ і рівняння (17.1) зведеться до вигляду

$$z' = \frac{h(z) - z}{x}, \tag{18.1}$$

тобто до рівняння з відокремлюваними змінними. Знайшовши всі розв'язки рівняння (18.1), ми формулою $y = zx$ опишемо всі розв'язки вихідного рівняння (17.1).

Приклад 4.1. Розглянемо рівняння

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \tag{19.1}$$

в області $G = \{(x, y) : x > y\}$. Оскільки права частина (19.1) є однорідною функцією нульового виміру, то воно є однорідним. Зробимо заміну $y = zx$, $y' = z'x + z$ і рівняння (19.1) набере вигляду

$$z' = \left(\frac{z + z^3}{1 - z^2}\right)\frac{1}{x}. \tag{20.1}$$

Звідси

$$\int \frac{(1 - z^2)dz}{z(1 + z^2)} - \int \frac{dx}{x} = 0,$$

$$-\ln(z^2 + 1) + \ln|z| - \ln|x| = -\ln|C|$$

$$\text{або} \qquad \frac{x(z^2 + 1)}{z} = C.$$

Крім того, рівняння (20.1) має розв'язок $z = 0$. Отже, повертаючись до функції y, ми одержимо всі розв'язки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = Cy, \\ y = 0, \quad (x > 0) \end{cases}$$

рівняння (19.1).

Розглянемо рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \tag{21.1}$$

де $f(u)$ визначена і неперервна на проміжку (α, β); $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}^1$. Тут можливі два випадки:

1°. прямі, що задаються рівняннями

$$ax + by + c = 0, \qquad a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

паралельні, тобто

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k.$$

Тоді праву частину (21.1) можна записати

$$f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) = f\left(\frac{k(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) = h(a_1x + b_1y).$$

Отже, рівняння (21.1) має вигляд

$$y' = h(a_1x + b_1y),$$

тобто це є рівняння вигляду (14.1), яке зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

2°. Прямі
$$ax + by + c = 0, \qquad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
перетинаються:
$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}.$$
Перенесемо початок координат у точку перетину цих прямих, тобто зробимо у рівнянні (21.1) заміну
$$\begin{cases} y = \eta + \alpha_0, \\ x = \xi + \beta_0, \end{cases}$$
де α_0 і β_0 визначаються як розв'язок системи рівнянь
$$\begin{cases} \alpha_0 b + \beta_0 a + c = 0, \\ \alpha_0 b_1 + \beta_0 a_1 + c_1 = 0. \end{cases}$$
Тоді отримаємо рівняння
$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right),$$
яке, очевидно, є однорідним диференціальним рівняння. Отже, рівняння (21.1) завжди може бути зведене до рівняння з відокремлюваними змінними або до однорідного рівняння.

Знову розглянемо рівняння
$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$
і зробимо у цьому рівнянні заміну шуканої функції:
$$y = z^\alpha, \quad y' = \alpha z^{\alpha-1} z', \ \alpha \in \mathbb{R}^1.$$
Тоді матимемо рівняння
$$z' = \frac{1}{\alpha} z^{1-\alpha} f(x, z^\alpha) \equiv h(x, z). \tag{22.1}$$

Якщо існує таке $\alpha \in \mathbb{R}^1$, що $h(x, z)$ є однорідною функцією нульового виміру, то рівняння (4.1) називається узагальненим однорідним. У цьому випадку рівняння (22.1) є однорідним і, таким чином, рівняння (4.1) інтегрується.

3. Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них.

Диференціальне рівняння вигляду
$$y' + p(x)y = q(x), \tag{23.1}$$
де $p(x), q(x)$ – неперервні функції на проміжку $\langle a, b\rangle$, називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Якщо
$q(x) \not\equiv 0$, то рівняння (23.1) називається лінійним неоднорідним рівнянням.

Рівняння вигляду
$$y' + p(x)y = 0 \tag{24.1}$$
називається лінійним однорідним рівнянням першого порядку, відповідним для рівняння (23.1).

Розглянемо метод розв'язування рівняння (23.1) – метод варіації сталої. Спочатку розв'язуємо рівняння (24.1):

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0;$$

$$\ln|y| + \int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt = \ln|C|;$$

$$y = C\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right), \quad x_0 \in \langle a, b\rangle. \tag{25.1}$$

Легко бачити, що формула (25.1) описує всі розв'язки рівняння (24.1). Будемо тепер шукати розв'язки рівняння (23.1) у вигляді

$$y = C(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right), \tag{26.1}$$

де $C(x)$ – невідома функція. Для знаходження $C(x)$ підставимо (26.1) у рівняння (23.1). Матимемо:

$$C'(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right) = q(x);$$

$$C'(x) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)q(x);$$

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{t} p(\xi)\,d\xi\right)dt + C_1.$$

Тоді формула

$$y = C_1\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right) +$$
$$+\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{t} p(\xi)\,d\xi\right)dt, \tag{27.1}$$

де C_1 – довільна стала, буде описувати всі розв'язки рівняння (23.1).

Зауважимо, що функція (27.1) складається з двох доданків, перший з яких описує всі розв'язки відповідного однорідного рівняння (24.1), а другий є частковим розв'язком рівняння (23.1).

Приклад 6.1. У котлі є 100 л розчину, який містить 10 кг солі. У котел вливається 5 л чистої води за хвилину і з тією ж швидкістю переливається у другий 100-літровий котел, наповнений спочатку чистою водою. Надлишок рідини з нього виливається. Коли кількість солі у другому котлі буде найбільшою? Чому вона дорівнює?

Для розв'язування цієї задачі позначимо через $a(t)$ кількість солі у першому котлі, а через $y(t)$ – кількість солі у другому котлі в момент часу t. Розглянемо проміжок часу $[t, t+\Delta t]$ і обчислимо зміну кількості солі у кожному котлі за час Δt. Розглянемо спочатку перший котел. Тоді

$$a(t+\Delta t) - a(t)$$

є величиною, на яку зміниться кількість солі за час Δt. З іншого боку цю величину можна обчислити так: з котла виливається

$$\frac{a(t)+\alpha}{100} 5\Delta t \quad \text{кг солі}$$

за час Δt; тут $\alpha = o(\Delta t)$. Отже,

$$a(t+\Delta t) - a(t) = -\frac{a(t)+\alpha}{20}\Delta t. \tag{28.1}$$

Обчислимо тепер зміну кількості солі у другому котлі за час Δt. Аналогічно як і у попередньому випадку отримаємо рівність

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \frac{a(t)+\alpha}{20}\Delta t - \frac{y(t)+\beta}{20}\Delta t, \tag{29.1}$$

де $\beta = o(\Delta t)$. Розділимо тепер рівності (28.1) і (29.1) на Δt і перейдемо у них до границі, коли $\Delta t \to 0$. Отримаємо рівняння:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a(t)}{20}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{a(t)}{20} - \frac{y(t)}{20}. \tag{30.1}$$

Крім того, з умови задачі маємо, що $a(t_0) = 10$, а $y(t_0) = 0$. Рівняння (30.1) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Його розв'язки можна записати у вигляді

$$a(t) = C\exp\left(-\frac{t}{20}\right).$$

Для знаходження сталої C скористаємося початковою умовою $a(t_0) = 10$. Матимемо

$$C = 10\exp\left(\frac{t_0}{20}\right).$$

Тому кількість солі у першому котлі описується формулою

$$a(t) = 10\exp\left(\frac{t-t_0}{20}\right).$$

Отже, для знаходження $y(t)$ ми отримуємо задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t-t_0}{20}\right), \tag{31.1}$$

$$y(t_0) = 0. \tag{32.1}$$

Знайдемо спочатку всі розв'язки рівняння (31.1). Для цього розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = 0;$$
$$y = C_1 \exp\left(-\frac{t}{20}\right).$$

Тепер методом варіації сталої знайдемо всі розв'язки рівняння (31.1):

$$y = C_1(t) \exp\left(-\frac{t}{20}\right);$$
$$C_1'(t) \exp\left(-\frac{t}{20}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t-t_0}{20}\right);$$
$$C_1'(t) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{t_0}{20}\right);$$
$$C_1(t) = \frac{1}{2} t \exp\left(\frac{t_0}{20}\right) + C_2;$$
$$y = C_2 \exp\left(-\frac{t}{20}\right) + \frac{1}{2} t \exp\left(-\frac{t-t_0}{20}\right).$$

Для знаходження сталої C_2 використаємо початкову умову (32.1):

$$C_2 = -\frac{1}{2} t_0 \exp\left(-\frac{t_0}{20}\right).$$

Отже, формула

$$y(t) = \frac{1}{2}(t - t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{20}\right)$$

описує кількість солі у другому котлі в момент часу t. Для завершення розв'язування задачі знайдемо максимальне значення функції $y(t)$:

$$y'(t) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t-t_0}{20}\right) - \frac{1}{40}(t - t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{20}\right) = 0;$$
$$t - t_0 = 20; \qquad t_{\max} = 20 + t_0;$$
$$y_{\max}(t_{\max}) = 10e^{-1}.$$

Отже, найбільша кількість солі у другому котлі буде через 20 хв і ця кількість дорівнює $10e^{-1}$ кг.

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1 \setminus (\{0\} \cup \{1\}), \tag{33.1}$$

де $p, q \in C(\langle a, b\rangle)$, називається рівнянням Бернуллі.

Поділимо рівняння (33.1) на функцію y^α (якщо $\alpha > 0$, то $y \neq 0$):

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \tag{34.1}$$

Зауважимо, що якщо ввести функцію

$$z = y^{1-\alpha}, \quad z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha},$$

то рівняння (34.1) набере вигляду

$$z' + p(x)(1-\alpha)z = q(x)(1-\alpha),$$

яке, очевидно, є лінійним відносно нової невідомої функції z. Тоді всі розв'язки рівняння (33.1) можна записати формулою

$$y^\alpha = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}(1-\alpha)p(t)\,dt\right) +$$

$$+\exp\left(-\int_{x_0}^{x}(1-\alpha)p(t)\,dt\right)\int_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t}(1-\alpha)p(\xi)\,d\xi\right)dt.$$

Якщо $\alpha > 0$, то розв'язком рівняння (33.1) буде також функція $y = 0$.

§ 4.1. Диференціальні рівняння в симетричній формі

При геометричному тлумаченні диференціального рівняння

$$y' = f(x,y), \quad f \in C(G),$$

як поля напрямків в області G видно, що поле не містить напрямків, паралельних осі ординат.

Розглянемо більш загальне векторне поле, яке допускає будь-який напрямок. Нехай у кожній точці $A(x,y) \in G$ задано довільний вектор $\vec{r}(A)$ з компонентами $N(x,y)$ і $-M(x,y)$. Будемо говорити у цьому випадку, що в області G задано векторне поле $V = V(G)$.

Аналогічно як це було у випадку поля напрямків рівняння (4.1), побудуємо криву l, яка у кожній своїй точці дотикається до відповідного вектора поля $V(G)$. Нехай рівняння кривої l, яку ми назвемо векторною кривою, може бути записано у параметричному вигляді

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Тоді дотичний вектор до l буде $x'(t), y'(t)$, причому

$$x'(t) = \lambda(t)N(x(t),y(t)), \quad y'(t) = -\lambda(t)M(x(t),y(t)),$$

де $\lambda(t)$ – деяка функція, що не обертається в нуль, оскільки дотична до кривої l повинна збігатися з напрямком поля. Таким чином, вздовж l будуть виконуватись співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \quad \text{якщо} \quad N \neq 0, \tag{35.1}$$

або

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}, \quad \text{якщо} \quad M \neq 0. \tag{36.1}$$

Простіше ці обидва випадки можна записати у вигляді

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{37.1}$$

Очевидно, що співвідношення (37.1) буде виконуватись вздовж будь-якої векторної кривої поля $V(G)$.

Означення 3.1. *Нехай $M, N \in C(G)$ і $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$ в області G. Співвідношення (37.1) між змінними x, y і їх диференціалами називається диференціальним рівнянням першого порядку в симетричній формі.*

Зауважимо, що рівняння (4.1) є частковим випадком рівняння (37.1), оскільки його можна записати у вигляді

$$f(x,y)dx - dy = 0.$$

На відміну від рівняння (4.1) змінні x, y входять в (37.1) рівноправно (симетрично).

Отже, аналогічно як і у випадку рівняння (4.1), назвемо інтегральною кривою рівняння (37.1) векторну криву поля $V(G)$ цього рівняння, тобто таку криву, яка у кожній своїй точці дотикається до відповідного напрямку поля $V(G)$.

Означення 4.1. *Нехай*

$$U(x,y) = C \tag{38.1}$$

при кожному C з області значень функції U є рівнянням інтегральної кривої диференціального рівняння (37.1). Функцію $U(x,y)$ будемо називати інтегралом рівняння (37.1).

Означення 5.1. *Розв'язком рівняння (37.1) називається функція $y = \varphi(x)$ (або $x = \psi(y)$), визначена на проміжку $\langle a, b\rangle$, якщо вона задовольняє такі умови:*

1) *$\varphi(x)$ (або $\psi(y)$) диференційовна на $\langle a, b\rangle$;*
2) *$(x, \varphi(x)) \in G$ (або $(\psi(y), y) \in G$) для всіх $x \in \langle a, b\rangle$ (або для всіх $y \in \langle a, b\rangle$);*
3) *для всіх $x \in \langle a, b\rangle$ $M(x, \varphi(x))dx + N(x, \varphi(x))\varphi'(x)dx = 0$ (або для всіх $y \in \langle a, b\rangle$ $M(\psi(y), y)\psi'(y)dy + N(\psi(y), y)dy = 0$).*

Лема 1.1. *Нехай через кожну точку області G проходить єдина інтегральна крива рівняння (37.1) і $U(x,y)$ є інтегралом цього рівняння, причому $U(x_0, y_0) = 0$, $(x_0, y_0) \in G$. Тоді в деякому околі точки x_0 рівняння (38.1) задає неявно y як функцію від x ($y = \varphi(x)$), якщо $N(x_0, y_0) \neq 0$ або в деякому околі точки y_0 задає x як функцію від y ($x = \psi(y)$), якщо $M(x_0, y_0) \neq 0$, причому функція $y = \varphi(x)$ (або $x = \psi(y)$) є розв'язком рівняння (37.1).*

Доведення. Нехай (38.1) є рівнянням інтегральної кривої l диференціального рівняння (37.1), причому $N(x_0, y_0) \neq 0$. У цьому випадку дотичний вектор до l у точці (x_0, y_0) має компоненти $\{N(x_0, y_0), -M(x_0, y_0)\}$ і

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x_0, y_0)}{N(x_0, y_0)}.$$

Але з іншого боку через точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива l, рівняння якої має вигляд (38.1). Тому

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} \Big/ \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Отже, $\dfrac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$ і на основі теореми про неявну функцію рівняння $U(x,y) = 0$ визначає y як функцію від x, $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Очевидно, $(x, \varphi(x)) \in l$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Таким чином, $\varphi(x)$ є розв'зком рівняння (37.1). Аналогічно лема доводиться у випадку, коли $M(x_0, y_0) \neq 0$.

Очевидно, графік розв'зку диференціального рівняння (37.1) є його інтегральною кривою. Крім того, як випливає з леми 1.1, якщо l – яка-небудь інтегральна крива рівняння (37.1), то у деякому околі будь-якої точки $(x_0, y_0) \in l$ рівняння цієї кривої є розв'язком диференціального рівняння (37.1). Проте вся інтегральна крива може не бути графіком розв'язку рівняння (37.1).

Приклад 6.1. Розглянемо рівняння $xdx + ydy = 0$, $G = \{(x, y) : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)\}$.

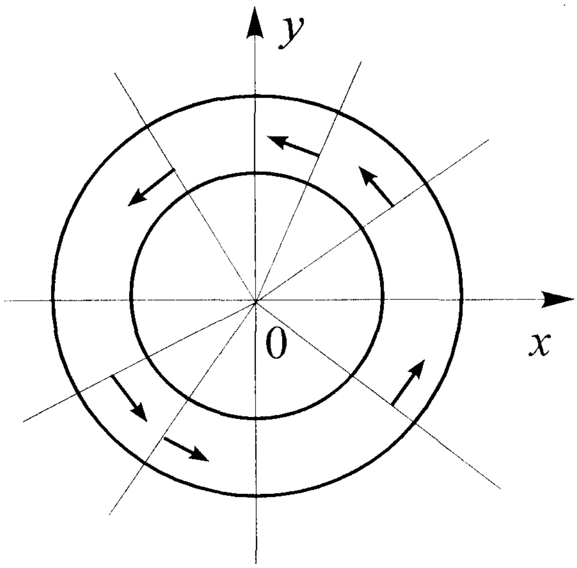


Рис. 6

Легко бачити, що ізоклинами цього рівняння є промені $ay + bx = 0$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, а напрямок поля на кожній ізоклині є ортогональним до неї: $\{-b, -a\}$ (рис. 6) Тому інтегральними кривими даного рівняння будуть кола $x^2 + y^2 = R^2$, $R \neq 0$. Очевидно, що рівняння інтегральної кривої не можуть бути записані у вигляді $y = \varphi(x)$, або $x = \psi(y)$. Зауважимо, що на множині $G \setminus \{(x, y) : N(x, y) = 0\}$ рівняння (37.1) еквівалентне рівнянню (35.1), а на множині $G \setminus \{(x, y) : M(x, y) = 0\}$ – рівнянню (36.1).

Лема 2.1. *Нехай $U(x, y) \in C^1(G)$ і через кожну точку області G проходить єдина інтегральна крива диференціального рівняння (37.1). Якщо $U(x, y)$ зберігає стале значення вздовж будь-якого розв'язку рівняння (37.1), тобто $U(x, \varphi(x)) \equiv \mathrm{const}$, де $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, довільний розв'язок рівняння (37.1), або $U(\psi(y), y) \equiv \mathrm{const}$, де $x = \psi(y)$, $y \in \langle a, b \rangle$, довільний розв'язок рівняння (37.1), то $U(x, y)$ є інтегралом диференціального рівняння (37.1).*

Доведення. Нехай $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, який-небудь розв'язок рівняння (37.1). Тоді для кожного $x \in \langle a, b \rangle$ вектор

$$\{1, \varphi'(x)\} = \left\{1, -\frac{M(x, \varphi(x))}{N(x, \varphi(x))}\right\}$$

є дотичним до інтегральної кривої

$$l = \{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle, \, y = \varphi(x)\}.$$

Але $U(x, \varphi(x)) \equiv C$, $(C \in \mathbb{R}^1)$,

$$\frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial y} \varphi'(x) \equiv 0.$$

Отже, з іншого боку

$$\{1, \varphi'(x)\} = \left\{1, -\frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial x} \Big/ \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial y}\right\}$$

і $\dfrac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial y} \neq 0, \quad x \in \langle a, b\rangle$. Тому рівняння

$$U(x,y) = C \tag{39.1}$$

має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$. Оскільки через кожну точку області G проходить єдина інтегральна крива рівняння (37.1), то (39.1) і є рівнянням інтегральної кривої l, тобто функція $U(x,y)$ є інтегралом. Аналогічно лема доводиться, коли $U(\psi(y), y) \equiv \text{const}$.

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, для яких можна знайти інтеграли.

1^0. **Рівняння з відокремлюваними змінними.** Нехай рівняння (37.1) має вигляд

$$m_1(x)n_1(y)dx + m_2(x)n_2(y)dy = 0. \tag{40.1}$$

Таке рівняння будемо називати рівнянням з відокремлюваними змінними в симетричній формі. Нехай

$$G = \{(x,y):\ a < x < b,\ c < y < d\},$$
$$S = \{(x,y):\ m_2(x) = 0\} \cup \{(x,y):\ n_1(y) = 0\},$$

B – яка-небудь зв'язна компонента відкритої множини $G \setminus S$. Тоді в B рівняння (40.1) еквівалентне рівнянню

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy = 0, \tag{41.1}$$

у якому змінні відокремлені.

Нехай $F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $m_1(x)/m_2(x)$, а $H(y)$ – яка-небудь первісна для функції $n_2(y)/n_1(y)$:

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{m_1(\xi)}{m_2(\xi)}d\xi, \quad H(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{n_2(\eta)}{n_1(\eta)}d\eta, \quad (x_0, y_0) \in B.$$

Теорема 1.1. *Через кожну точку області B проходить єдина інтегральна крива рівняння (40.1) і функція*

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{m_1(\xi)}{m_2(\xi)}d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{n_2(\eta)}{n_1(\eta)}d\eta, \tag{42.1}$$

де $(x_0, y_0) \in B$, буде інтегралом цього рівняння.

Доведення. Нехай $n_2(y_0) \neq 0$. Тоді $n_2(y) \neq 0$ в деякому околі точки y_0: $y \in (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0)$, $\delta_0 > 0$, і рівняння (41.1) еквівалентне рівнянню

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m_1(x)}{m_2(x)}\frac{n_1(y)}{n_2(y)} \tag{43.1}$$

в області

$$B_0 = B \cap \{(x,y):\ x \in \mathbb{R}^1,\ y_0 - \delta_0 < y < y_0 + \delta_0\}.$$

Як відомо, всі розв'язки рівняння (43.1) в області B_0 можуть бути записані формулою

$$y = H^{-1}(C - F(x)).$$

Тому через точку (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна крива

$$y = H^{-1}(-F(x)).$$

Якщо $n_2(y_0) = 0$, то $m_1(x_0) \neq 0$ і в деякій області рівняння (41.1) еквівалентне рівнянню

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{m_2(x)}{m_1(x)}\frac{n_2(y)}{n_1(y)},$$

всі розв'зки якого записуються формулою

$$x = F^{-1}(C - H(y)).$$

Отже, і в цьому випадку через точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива рівняння (41.1). Оскільки (x_0, y_0) – довільна точка B, то перше твердження теореми доведено. Покажемо, що функція (42.1)

$$U(x, y) = F(x) + H(y)$$

є інтегралом рівняння (40.1). Нехай $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, який-небудь розв'язок рівняння (40.1). Маємо

$$\frac{d}{dx}U(x, \varphi(x)) = \frac{d}{dx}\Big[F(x) + H(\varphi(x))\Big] =$$
$$= \frac{m_1(x)}{m_2(x)} + \frac{n_2(\varphi(x))}{n_1(\varphi(x))}\varphi'(x) \equiv 0,$$

тобто $U(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}$. Аналогічно доводиться, що вздовж розв'язку $x = \psi(y)$ рівняння (40.1) функція $U(x, y)$ теж зберігає стале значення. Тому на основі леми 2.1 $U(x, y)$ є інтегралом рівняння (40.1) і теорему доведено.

Таким чином у кожній із зв'язних компонент множини $G \setminus S$ формула

$$\int \frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \int \frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy = 0$$

дає інтеграли рівняння (40.1). Крім того, легко бачити, що рівняння $x = \alpha_k$, $y = \beta_m$, де $m_2(\alpha_k) = 0$, $n_1(\beta_m) = 0$, теж будуть інтегралами рівняння (40.1).

2^0. **Однорідні рівняння.** Нехай у рівнянні (37.1) функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ є однорідними функціями $k-$того виміру, тобто

$$M(tx, ty) = t^k M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^k M(x, y), \quad k \in \mathbb{R}^1.$$

Тоді рівняння (37.1) називається однорідним рівнянням першого порядку в симетричній формі.

Якщо рівняння (37.1) однорідне, то його можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді,

$$M(x, y) = M\left(1 \cdot x, \frac{y}{x} \cdot x\right) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right),$$
$$N(x, y) = N\left(1 \cdot x, \frac{y}{x} \cdot x\right) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

якщо $x \neq 0$, і рівняння (37.1) набирає вигляду

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Зробивши у цьому рівнянні заміну $y = zx, \quad dy = zdx + xdz$, матимемо рівняння

$$(M(1, z) + N(1, z)z)dx + xN(1, z)dz = 0,$$

яке, очевидно, є рівнянням з відокремлюваними змінними.

3^0. **Рівняння у повних диференціалах.**

Означення 6.1. *Диференціальне рівняння (37.1) називається рівнянням у повних диференціалах, якщо існує така неперервно диференційовна функція $U(x, y)$ ($U(x, y) \in C^1(G)$), що*

$$du \equiv M(x, y)dx + N(x, y)dy. \tag{44.1}$$

Теорема 2.1. *Нехай $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(G)$ і $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ в G. Для того, щоб рівняння (37.1) було у повних диференціалах, необхідно, а у випадку, коли $G = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ і достатньо, щоб*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{45.1}$$

для всіх $(x, y) \in G$.

Доведення. Нехай рівняння (37.1) є рівнянням у повних диференціалах. Тоді з рівності (44.1) випливає, що

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \tag{46.1}$$

Але оскільки $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(G)$, то мішані похідні

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

функції U рівні між собою, а отже, виконується рівність (45.1) в області G. Тепер припустимо, що G – прямокутник і виконується умова (45.1). Побудуємо функцію $U(x, y)$, для якої справедлива рівність (44.1). Для цього розглянемо першу з рівностей (46.1). Очевидно, для кожного фіксованого y вона є найпростішим диференціальним рівнянням. Тому його загальним розв'язком буде функція

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi+\varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція. Виберемо функцію $\varphi(y)$ так, щоб $U(x,y)$ задовольняла і другу рівність (46.1):

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y).$$

Зауважимо, що диференціювання під знаком інтеграла законне на підставі неперервності функції $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. Отже, враховуючи рівність (45.1), маємо

$$\varphi'(y)=N(x,y)-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}d\xi=N(x,y)-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial N(\xi,y)}{\partial x}d\xi=$$
$$=N(x,y)-N(x,y)+N(x_0,y)=N(x_0,y);$$
$$\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}N(x_0,\eta)d\eta.$$

Тоді функція

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}M(\xi,y)d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}N(x_0,\eta)d\eta$$

буде задовольняти рівність (44.1). Тут (x_0,y_0) – довільна фіксована точка з G. Теорему доведено.

Зауваження 1.1. *Достатність теореми 2.1 має місце і у тому випадку, коли область G однозв'язна.*

Теорема 3.1. *Нехай $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x}\in C(G)$ і $M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0$ в G, $G=\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$;*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},\quad (x,y)\in G;$$

функція $U(x,y)$ задовольняє рівність (44.1). Тоді через кожну точку області G проходить єдина інтегральна крива диференціального рівняння (37.1) і функція $U(x,y)-C$, де C – довільна стала, є інтегралом рівняння (37.1).

Доведення. Нехай (x_0,y_0) – довільна точка області G і нехай для визначеності $N(x_0,y_0)\neq 0$. Тоді існує окіл $B_0(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), у якому $N(x,y)\neq 0$. У цьому околі інтегральні криві рівняння (37.1) збігаються з графіками розв'язків диференціального рівняння

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Припустимо, що через точку (x_0, y_0) проходять дві інтегральні криві рівняння (37.1). Тоді їх рівняння $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ будуть розв'язками диференціального рівняння (37.1):

$$M(x, \varphi_j(x))dx + N(x, \varphi_j(x))\varphi_j'(x)dx \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial U(x, \varphi_j(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \varphi_j(x))}{\partial y}\varphi_j'(x) \equiv dU(x, \varphi_j(x)) \equiv 0, \quad j = 1, 2.$$

Звідси

$$U(x, \varphi_j(x)) - U(x_0, y_0) \equiv 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial(U(x,y) - U(x_0, y_0))}{\partial y} \neq 0$$

у точці (x_0, y_0). Отже, кожна з функцій $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2)$ є розв'язком рівняння

$$U(x, y) = U(x_0, y_0).$$

Оскільки для цього рівняння виконуються умови теореми про неявну функцію, то $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$. Аналогічно розглядається випадок, коли $N(x_0, y_0) = 0$, бо тоді $M(x_0, y_0) \neq 0$.

Покажемо тепер, що функція $U(x, y) - C$ є інтегралом рівняння (37.1). Нехай $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, довільний розв'язок диференціального рівняння (37.1). Тоді

$$\frac{d}{dx}U(x, \varphi(x)) = \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial y}\varphi'(x) \equiv$$
$$\equiv M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

і $U(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}$. Аналогічно можна показати, що $U(\psi(y), y) \equiv \text{const}$, якщо $x = \psi(y)$ – розв'язок рівняння (37.1). Отже, на підставі леми 2.1 функція $U(x, y) - C$ є інтегралом диференціального рівняння (37.1) і теорему доведено.

Зауваження 2.1. *Якщо рівняння (37.1) є у повних диференціалах, то для знаходження його інтегралів потрібно побудувати функцію $U(x, y)$ методом, використаним для доведення достатності теореми 2.1 і взяти за інтеграли функцію $U(x, y) - C$.*

Приклад 7.1. Нехай задано рівняння

$$(x + y + \sin x)dx + (x + \cos y)dy = 0, \quad G = \mathbb{R}^2.$$

Оскільки

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

то дане рівняння є у повних диференціалах. Тому для знаходження функції $U(x, y)$ маємо рівності

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y + \sin x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x + \cos y.$$

З першої рівності одержуємо

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx - \cos x + \varphi(y).$$

Тому

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + \cos y;$$
$$\varphi'(y) = \cos y; \quad \varphi(y) = \sin y.$$

Отже,

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx - \cos x + \sin y$$

і формула

$$\frac{x^2}{2} + yx - \cos x + \sin y = C$$

дає інтеграли вихідного рівняння.

4^0. **Інтегрувальний множник.** Як бачимо, знаходження інтегралів рівняння (37.1), якщо воно є у повних диференціалах, не викликає труднощів. Тому виникає питання, чи можна рівняння (37.1) звести до рівняння у повних диференціалах домноженям на деяку функцію $\mu(x,y)$.

Означення 7.1. *Функція $\mu(x,y) \neq 0$ в G називається інтегрувальним множником диференціального рівняння (37.1), якщо рівняння*

$$\mu M dx + \mu M dy = 0$$

в області G є рівнянням у повних диференціалах.

Попробуємо знайти інтегрувальний множник для рівняння (37.1). Нехай G – однозв'язна область. Тоді для функції μ повинна виконуватись рівність

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \quad (x,y) \in G,$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{47.1}$$

Таким чином, знаходження інтегрувального множника зводиться до розв'язування диференціального рівняння (47.1), яке є рівнянням з частинними похідними. Тому, взагалі кажучи, задача розв'язування рівняння (47.1) є складнішою від вихідної. Але в окремих випадках інтегрувальний множник вдається знайти. Будемо шукати інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ рівняння (37.1) у вигляді $\mu = \mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ – задана функція, $\omega \in C^1(G)$. Тоді рівняння (47.1) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - N\dfrac{\partial \omega}{\partial x}}. \tag{48.1}$$

Звідси видно, що якщо права частина рівняння (48.1) є функцією від $\omega(x,y)$, тобто якщо

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}-N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}}=\psi(\omega), \tag{49.1}$$

то рівняння (48.1) стає рівнянням з відокремлюваними змінними і його розв'язком є функція

$$\mu(x,y)=\exp(\Psi(\omega)),$$

де $\Psi(\omega)$ – яка-небудь первісна для функції $\psi(\omega)$:

$$\Psi(\omega)=\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\xi)d\xi.$$

Отже, знаходження інтегрувального множника полягає у мистецтві підбору такої функції $\omega(x,y)$, для якої співвідношення (49.1) стане функцією від ω. Зокрема, ми можемо вказати клас рівнянь (37.1), для яких існує інтегрувальний множник, залежний лише від x, або від y. Справді, нехай $\omega(x,y)=x$. Рівняння (37.1) буде мати інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$ тоді, коли

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{-N}$$

буде функцією від x. Аналогічно, рівняння(37.1) буде мати інтегрувальний множник $\mu=\mu(y)$ тоді, коли

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

буде функцією від змінної y.

Приклад 8.1. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку, записане у симетричній формі

$$[p(x)y-q(x)]dx+dy=0,\quad p,q\in C(\langle a,b\rangle). \tag{50.1}$$

Тут $G=\{(x,y):\ a<x<b,\ -\infty<y<\infty\}$. Оскільки

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{-N}=p(x),$$

то для рівняння (50.1) існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$. Нехай $\mathcal{P}(x)$ – яка-небудь первісна для $p(x)$:

$$\mathcal{P}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi.$$

Тоді функція $\mu=\exp(\mathcal{P}(x))$ буде інтегрувальним множником рівняння (50.1).

§ 5.1. Допоміжні твердження

Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \tag{51.1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{52.1}$$

де $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$. Як ми бачили вище, задача Коші (51.1), (52.1) часто виникає як математична модель деякого фізичного процесу. Оскільки даний процес відбувається, причому єдиним способом, то і відповідна математична модель повинна мати розв'язок і притому єдиний. Отже, виникає задача дослідити умови на функцію $f(x, y)$ і початкові дані (x_0, y_0), для яких задача Коші має єдиний розв'язок. Крім того, оскільки початкові дані на практиці, як правило, визначаються наближено, тобто реально ми маємо числа $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$ близькі відповідно до чисел x_0 і y_0, то фактично для рівняння (53.1) задається початкова умова

$$y(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0. \tag{53.1}$$

Таким чином, ми досліджуємо існування і єдиність розв'язку 'наближеної' моделі (51.1), (53.1). Тому природно виникає питання наскільки розв'язок 'наближеної' задачі (51.1), (53.1) відрізняється від розв'язку 'точної' задачі (51.1), (52.1) і коли різниця між цими розв'язками мала. У цьому випадку ми формулюємо питання так: при яких умовах на функцію $f(x, y)$ розв'язок задачі (51.1), (52.1) неперервно залежить від початкових даних x_0, y_0? Зауважимо, що говорити про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних є сенс лише тоді, коли ця задача має єдиний розв'язок для всіх початкових даних принаймні з деякого околу точки (x_0, y_0). Для дослідження цих питань нам будуть потрібні деякі допоміжні твердження.

Припустимо, що задача Коші (51.1), (52.1) має розв'язок $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Тоді

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

і

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi.$$

Оскільки $\varphi(x_0) = y_0$, то

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi.$$

Отже, функція $\varphi(x)$ є розв'язком рівняння

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) d\xi \tag{54.1}$$

стосовно невідомої функції y, яке надалі будемо називати інтегральним рівнянням.

Нехай тепер навпаки, функція $y = \psi(x)$, $(x, \psi(x)) \in G$, $x \in \langle a, b \rangle$, $\psi \in C(\langle a, b \rangle)$, є розв'язком рівняння (54.1), тобто для неї справджується тотожність

$$\psi(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi)) d\xi.$$

Оскільки $f(x, \psi(x))$ є неперервною, то як відомо з математичного аналізу $\psi'(x) \in C(\langle a, b\rangle)$ і

$$\psi'(x) \equiv f(x, \psi(x)).$$

Отже, функція $\psi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (51.1). Крім того, $\psi(x_0) = y_0$, тобто функція $\psi(x)$ є розв'язком задачі Коші (51.1), (52.1). Таким чином доведено лему.

Лема 3.1. *Задачі Коші (51.1), (52.1) еквівалентна інтегральному рівнянню (54.1).*

Означення 8.1. *Будемо говорити, що функція $f(x, y)$ з областю визначення $G \subset \mathbb{R}^2$ задовольняє на G умову Ліпшиця за змінною y, якщо існує така стала L, $0 \le L < \infty$, що для довільних двох точок (x, y_1), $(x, y_2) \in G$ виконується нерівність*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|. \tag{55.1}$$

При цьому стала L називається константою Ліпшиця функції f на множині G.

Позначимо через $\mathrm{Lip}_y(G)$ клас функцій f, які задовольняють умову Ліпшиця за змінною y в області G; через $\mathrm{Lip}_y(G, L)$ – підмножину функцій $\mathrm{Lip}_y(G)$, для яких виконується нерівність (55.1) зі сталою L.

Зауважимо, що умову Ліпшиця на практиці перевірити не завжди просто. Тому наведемо клас функцій, для яких умова Ліпшиця виконується завжди.

Лема 4.1. *Нехай $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$. Тоді на довільній обмеженій підмножині B, $\overline{B} \subset G$ функція f задовольняє умову Ліпшиця.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли B – опукла підобласть області G стосовно змінної y. Опуклість B стосовно змінної y означає, що коли (x, y_1), $(x, y_2) \in B$, то $(x, \eta) \in B$ для всіх $\eta \in (y_1, y_2)$. Використаємо теорему про середнє для функції f в області B. Тоді

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y}\right| |y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|,$$

бо за теоремою Вейєрштраса $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ є обмеженою в замкненій області $\overline{B}$, тобто

$$\max_{\overline{B}} \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| = L < \infty.$$

Отже, у цьому випадку для f виконується умова Ліпшиця.

Розглянемо тепер випадок, коли B – будь-яка обмежена множина в G. Побудуємо множину

$$A = \{(x, y, y^*);\ (x, y) \in \overline{B},\ (x, y^*) \in \overline{B},\ y \ne y^*\}$$

і розглянемо на ній функцію

$$F(x, y, y^*) = \left|\frac{f(x, y) - f(x, y^*)}{y - y^*}\right|.$$

Якщо ми доведемо, що функція F обмежена на A, то лему буде доведено, бо для $y = y^*$ нерівність (55.1) очевидна з будь-якою сталою L.

Припустимо, що F необмежена в A. Тоді існує послідовність точок $\{(x_k, y_k, y_k^*)\} \subset A$ таких, що
$$F_k = F(x_k, y_k, y_k^*) \to \infty, \quad \text{коли} \quad k \to \infty.$$
З послідовності $\{(x_k, y_k)\}$ можна вибрати підпослідовність $\{(x_m, y_m)\}$, яка збігається до деякої точки $(x_0, y_0) \in \overline{B}$, а з послідовності $\{(x_m, y_m^*)\}$ можна виділити підпослідовність $\{(x_n, y_n^*)\}$, яка збігається до точки $(x_0, y_0^*) \in \overline{B}$. Отже, послідовність $\{(x_n, y_n, y_n^*)\}$ збігається до точки $(x_0, y_0, y_0^*))$ і
$$F_n = F(x_n, y_n, y_n^*) \to \infty, \quad \text{коли} \quad n \to \infty.$$
Можливі два випадки: $y_0 \neq y_0^*$, або $y_0 = y_0^*$. У першому випадку існує таке $\varepsilon > 0$, що, починаючи з деякого номера $n \geq n_0$, $|y_n - y_n^*| \geq \varepsilon$. Але тоді
$$F_n = \frac{|f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n^*)|}{|y_n - y_n^*|} \leq \frac{2M}{\varepsilon},$$
де $M = \sup\limits_{\overline{B}} |f(x,y)|$. Отже, отримали протиріччя з тим, що $F_n \to \infty$, коли $n \to \infty$.

У другому випадку візьмемо деякий круговий окіл $O(x_0, y_0)$ точки $(x_0, y_0) \in \overline{B}$, замикання якого належить G. Оскільки, починаючи з деякого номера n_1, точки (x_n, y_n) і (x_n, y_n^*) будуть належати $\overline{O(x_0, y_0)}$, то згідно з доведеним вище,
$$F_n = \frac{|f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n^*)|}{|y_n - y_n^*|} \leq \max_{\overline{O(x_0,y_0)}} \left| \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y} \right| < \infty$$
і ми теж отримуємо протиріччя. Лему доведено.

Означення 9.1. *Послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ називається одностайно неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x', x'' \in [a,b]$, таких, що $|x' - x''| < \delta$ виконується нерівність $|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 4.1 (Асколі–Арцела). *Якщо послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ рівномірно обмежена і одностайно неперервна на $[a,b]$, то з цієї послідовності можна виділити рівномірно збіжну на $[a,b]$ підпослідовність.*

Доведення. Розглянемо на $[a,b]$ послідовність точок $\{x_n\}$: за x_1 виберемо середину відрізка $[a,b]$, за x_2, x_3 візьмемо ті точки, які разом з x_1 ділять $[a,b]$ на 4 рівні частини, за x_4, x_5, x_6 і x_7 візьмемо ті точки, які разом з x_1, x_2, x_3 ділять $[a,b]$ на 8 рівних частин і так далі.

Побудована послідовність $\{x_n\}$ володіє такою властивістю: яке б не було $\delta > 0$ для нього існує такий номер n_0, що на довільному відрізку $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a,b]$, $\tilde{b} - \tilde{a} < \delta$ лежить хоча б одна точка з множини $x_1, \ldots, x_{n_0}$.

Перейдемо тепер до побудови ріномірно збіжної підпослідовності. Спочатку розглянемо послідовність $\{f_n(x_1)\}$. Оскільки ця послідовність обмежена, то на підставі теореми Больцано–Вейєрштраса з неї можна виділити збіжну підпослідовність
$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots$$
Далі розглянемо функціональну послідовність $\{f_{1n}(x)\}$ у точці x_2. За теоремою Больцано–Вейєрштраса з неї можна виділити збіжну підпослідовність
$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2), \ldots$$

Таким чином, функціональна послідовність

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots \tag{56.1}$$

збігається у точках x_1 і x_2. Далі розглядаємо функціональну послідовність (56.1) у точці x_3 і виділяємо з неї збіжну підпослідовність

$$f_{31}(x_3),\ f_{32}(x_3), \ldots, f_{3n}(x_3), \ldots$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо нескінченну множину підпослідовностей:

$$\begin{array}{l} f_{11}(x),\ f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots \\ f_{21}(x),\ f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots \\ f_{31}(x),\ f_{32}(x), \ldots, f_{3n}(x), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(x),\ f_{n2}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

причому підпослідовність, яка стоїть у n-ому рядку, є збіжною у кожній із точок x_1, $\ldots$, x_n.

Розглянемо діагональну послідовність

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots \tag{57.1}$$

і доведемо, що вона є рівномірно збіжною на $[a, b]$. Задамо $\varepsilon > 0$. Оскільки послідовність (57.1) одностайно неперервна на $[a, b]$, то для вибраного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх n

$$|f_{nn}(x) - f_{nn}(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{58.1}$$

які б не були точки x, x_m, для яких $|x - x_m| < \delta$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на скінченне число відрізків довжиною меншою ніж δ. З послідовності $\{x_n\}$ виберемо скінченне число перших членів x_1, $\ldots$, x_{n_0} настільки велике, щоб у кожному із згаданих відрізків містилася хоча б одна точка x_1, $\ldots$, x_{n_0}. Очевидно, послідовність (57.1) збігається у кожній точці x_1, $\ldots$, x_{n_0}. Тому для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що

$$|f_{n+p,n+p}(x_m) - f_{nn}(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{59.1}$$

для всіх $n \geq N$, всіх $p \in \mathbb{N}$ і всіх $m = 1, \ldots, n_0$.

Нехай x – довільна точка з $[a, b]$. Ця точка лежить у одному з відрізків, довжини меншої ніж δ. Тому для неї знайдеться хоча б одна точка x_m, $1 \leq m \leq n_0$, для якої $|x - x_m| < \delta$. Отже,

$$|f_{n+p,n+p}(x) - f_{nn}(x)| \leq |f_{n+p,n+p}(x) - f_{n+p,n+p}(x_m)| +$$
$$+ |f_{n+p,n+p}(x_m) - f_{nn}(x_m)| + |f_{nn}(x_m) - f_{nn}(x)| < \varepsilon, \quad n \geq N, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

на підставі (58.1) і (59.1). Таким чином, послідовність (57.1) є рівномірно збіжною і теорему доведено.

Лема 5.1 (Гронуолла–Белмана). *Нехай неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $u(x)$ для всіх $x, x_0 \in [a, b]$ задовольняє нерівність*

$$|u(x)| \leq C + L\left|\int\limits_{x_0}^{x} |u(\xi)|d\xi\right|. \tag{60.1}$$

Тоді $|u(x)| \leq Ce^{L|x-x_0|}$.

Доведення. Нехай для визначеності $x > x_0$. Введемо функцію

$$z(x) = \int\limits_{x_0}^{x} |u(\xi)|d\xi.$$

Тоді $z'(x) = |u(x)|$ і нерівність (60.1) можна записати у вигляді

$$z'(x) - Lz(x) \leq C, \tag{61.1}$$

причому $z(x_0) = 0$. Помножимо (61.1) на функцію e^{-Lx} і зінтегруємо в межах від x_0 до x:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left[z'(\xi)e^{-L\xi} - Lz(\xi)e^{-L\xi}\right] d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} \left(z(\xi)e^{-L\xi}\right)' d\xi = z(x)e^{-Lx} \leq$$

$$\leq C\int\limits_{x_0}^{x} e^{-L\xi}d\xi = \frac{C}{L}\left(e^{-Lx_0} - e^{-Lx}\right).$$

Отже,

$$z(x) \leq \frac{C}{L}e^{L(x-x_0)} - \frac{C}{L};$$

тому з нерівності (60.1) отримуємо оцінку

$$|u(x)| \leq Ce^{L(x-x_0)},$$

що й доводить лему.

§ 6.1. Існування розв'язку задачі Коші

Нехай

$$\Pi = \{(x, y) : \ |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}.$$

Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \tag{62.1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{63.1}$$

Теорема 5.1 (Пеано, локальна). *Нехай $f \in C(\Pi)$. Тоді задача Коші (62.1), (63.1) має розв'язок, який визначений принаймні на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$, де*

$$h = \min\left\{a;\ \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{\Pi} |f(x, y)|.$$

Доведення. Без обмеження загальності доведемо теорему для відрізка $[x_0, x_0+h]$. Згідно з лемою 3.1 задача Коші може бути зведена до еквівалентного інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{64.1}$$

Тому достатньо довести існування розв'язку рівняння (64.1). Побудуємо послідовність функцій $\{\varphi_m(x)\}$:

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} y_0, \quad x \in \left[x_0, x_0 + \dfrac{h}{m}\right], \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x-h/m} f(\xi, \varphi_m(\xi))d\xi, \quad x \in \left(x_0 + \dfrac{h}{m}, h\right]. \end{cases}$$

Доведемо, що $\varphi_m(x)$ неперервні на відрізку $[x_0, x_0 + h]$. Справді, функція $\varphi_1(x) \equiv y_0$ і тому є неперервною. Далі, при кожному $m > 1$ перша рівність у (65.1) визначає функцію $\varphi_m(x)$ для $x \in \left[x_0, x_0 + \dfrac{h}{m}\right]$, а оскільки при цьому $(x_0, y_0) \in \Pi$, то друга рівність у (65.1) визначає неперервну функцію для $x \in \left(x_0 + \dfrac{h}{m}, x_0 + \dfrac{2h}{m}\right]$ і

$$\lim_{x \to x_0 + h/m + 0} \varphi_m(x) = y_0 = \varphi_m\left(x_0 + \frac{h}{m}\right).$$

Припустимо, що функція $\varphi_m(x)$ визначена для $x \in \left[x_0, x_0 + \dfrac{kh}{m}\right]$, $1 < k < m$. Тоді друга рівність (65.1) визначає $\varphi_m(x)$ як неперервну функцію на $x \in \left(x_0 + \dfrac{kh}{m}, x_0 + \dfrac{(k+1)h}{m}\right]$ і

$$\lim_{x \to x_0 + (kh)/m + 0} \varphi_m(x) = \varphi_m\left(x_0 + \frac{kh}{m}\right).$$

Отже, за індукцією рівності (65.1) визначають $\varphi_m(x)$ як неперервну функцію на $[x_0, x_0 + h]$. Крім того,

$$|\varphi_m(x) - y_0| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x-h/m} f(\xi, \varphi_m(\xi))d\xi \right| \le$$

$$\le \int\limits_{x_0}^{x-h/m} |f(\xi, \varphi_m(\xi))|d\xi \le M\left|x - \frac{h}{m} - x_0\right| \le Mh \le b,$$

так що

$$|\varphi_m(x)| \leq |y_0| + b$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$, тобто множина функцій $\{\varphi_m(x)\}$ рівномірно обмежена на $[x_0, x_0 + h]$. Покажемо, що множина $\{\varphi_m(x)\}$ одностайно неперервна на $[x_0, x_0 + h]$. Нехай $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + h]$ і задано $\varepsilon > 0$. Тоді для довільного m маємо

$$|\varphi_m(x_1) - \varphi_m(x_2)| = \left| \int\limits_{x_1 - h/m}^{x_2 - h/m} f(\xi, \varphi_m(\xi)) d\xi \right| \leq M|x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

як тільки $|x_1 - x_2| < \dfrac{\varepsilon}{M} = \delta$, що й треба було довести. Тому згідно з теоремою 4.1 існує підпослідовність $\{\varphi_k(x)\} \subset \{\varphi_m(x)\}$, яка рівномірно збігається до неперервної функції $\varphi(x)$ на $[x_0, x_0 + h]$.

Доведемо, що гранична функція $\varphi(x)$ є розв'язком рівняння (64.1). З цією метою запишемо (65.1) для функцій $\{\varphi_k(x)\}$ у вигляді

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} y_0, & x \in \left[x_0, x_0 + \dfrac{h}{k}\right], \\ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi)) d\xi - \int\limits_{x - h/k}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi)) d\xi, & x \in \left(x_0 + \dfrac{h}{k}, h\right]. \end{cases} \tag{66.1}$$

Очевидно,

$$\left| \int\limits_{x - h/k}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi)) d\xi \right| \leq M \frac{h}{k} \to 0, \tag{67.1}$$

коли $k \to \infty$. Оскільки за умовою теореми $f \in C(\Pi)$ і функції $\{\varphi_k(x)\}$ рівномірно збігаються до $\varphi(x)$ при $k \to \infty$ на $[x_0, x_0 + h]$, то

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi)) d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi \tag{68.1}$$

для всіх $x \in [x_0, x_0 + h]$. Тому, перейшовши у (65.1) до границі, коли $k \to \infty$, згідно з (67.1), (68.1) дістанемо рівняння

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi, \quad x \in [x_0, x_0 + h],$$

тобто $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння (64.1) і теорему доведено.

Означення 10.1. *Нехай $y = \varphi(x)$ – розв'язок рівняння (62.1), визначений на $\langle a, b \rangle$, а $y = \psi(x)$ – розв'язок цього рівняння, визначений на $\langle a_1, b_1 \rangle$, причому $a_1 \leq a < b \leq b_1$ і $a_1 < a$, або $b_1 > b$. Будемо говорити, що розв'язок $\psi(x)$ є продовженням розв'язку $\varphi(x)$, якщо $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Якщо не існує розв'язку рівняння (62.1), який є продовженням $\varphi(x)$, то тоді $\varphi(x)$ будемо називати непродовжуваним розв'язком рівняння (62.1). У тому випадку, коли $a = a_1$, будемо говорити, що $\psi(x)$ продовжує $\varphi(x)$ вправо і коли $b = b_1$ – вліво.*

Теорема 6.1 (*існування непродовжуваного розв'язку*). *Нехай $f(x, y)$ визначена і неперервна в області G. Тоді для будь-якої точки $(x_0, y_0) \in G$ існує непродовжуваний розв'язок задачі (62.1), (63.1).*

Доведення. Нехай (x_0, y_0) – довільна точка області G. Тоді існує квадрат

$$\Pi_0 = \{(x, y): \ |x - x_0| \le a_0, \ |y - y_0| \le a_0\} \subset G,$$

де $a_0 = d_0/(2\sqrt{2})$, якщо G не збігається зі всією площиною ($d_0 = \operatorname{dist}\{(x_0, y_0), \partial G\}$), і $d_0 = 1$, якщо $G = \mathbb{R}^2$. Нехай для визначеності G не збігається зі всією площиною. За теоремою Вейєрштраса

$$|f(x, y)| \le M_0, \quad (x, y) \in \Pi_0$$

і на підставі теореми 5.1 існує розв'язок $y = \varphi_0(x)$ задачі (62.1), (63.1), визначений на відрізку $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$, $h_0 = \min\left\{a_0, \dfrac{a_0}{M_0}\right\}$. Розглянемо тепер точку

$$(x_1, y_1): \quad x_1 = x_0 + h_0, \quad y_1 = \varphi(x_1).$$

Оскільки $(x_1, y_1) \in G$, то існує квадрат

$$\Pi_1 = \{(x, y): \ |x - x_1| \le a_1, \ |y - y_1| \le a_1\} \subset G,$$
$$a_1 = \frac{\operatorname{dist}\{(x_1, y_1), \partial G\}}{2\sqrt{2}} \quad \text{і} \quad |f(x, y)| \le M_1, \quad (x, y) \in \Pi_1.$$

На підставі теореми 5.1 існує розв'язок $y = \varphi_1(x)$ рівняння (62.1), визначений на відрізку $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$, $h_1 = \min\left\{a_1, \dfrac{a_1}{M_1}\right\}$, який задовольняє початкову умову $y(x_1) = y_1$. Очевидно, функція

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0], \\ \varphi_1(x), & x \in (x_1, x_1 + h_1] \end{cases}$$

буде розв'язком задачі Коші (62.1), (63.1) на відрізку $[x_0 - h_0, x_1 + h_1]$, тобто $\psi_1(x)$ є продовженням розв'язку $\varphi_0(x)$ вправо. Далі розглядаємо точку

$$(x_2, y_2): \quad x_2 = x_1 + h_1, \quad y_2 = \varphi_1(x_2)$$

і квадрат

$$\Pi_2 = \{(x, y): \ |x - x_2| \le a_2, \ |y - y_2| \le a_2\} \subset G,$$

$a_2 = \dfrac{\operatorname{dist}\{(x_2, y_2), \partial G\}}{2\sqrt{2}}$, у якому $|f(x, y)| \le M_2$. Таким чином, можна стверджувати існування розв'язку $y = \varphi_2(x)$ рівняння (62.1), визначеного на відрізку $[x_2 - h_2, x_2 + h_2]$, $h_2 = \min\left\{a_2, \dfrac{a_2}{M_2}\right\}$, який задовольняє початкову умову $y(x_2) = y_2$.

Тоді функція

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in [x_0 - h_0, x_1 + h_1], \\ \varphi_2(x), & x \in (x_2, x_2 + h_2] \end{cases}$$

буде розв'язком задачі (62.1), (63.1), який продовжує $\psi_1(x)$ вправо. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність точок $\{x_n\}$, послідовність розв'язків $\{\psi_n(x)\}$ і послідовність квадратів $\{\Pi_n\}$. Послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає. Тому існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причому $x_n \le b$ для всіх n. Позначимо

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x).$$

Очевидно, $\psi(x)$ буде розв'язком задачі Коші (62.1), (63.1) на проміжку $[x_0 - h_0, b)$. Покажемо, що цей розв'язок не можна продовжити вправо. Це очевидно, коли $b = \infty$, або $b < \infty$ і $\lim\limits_{x\to b-0} |\psi(x)| = \infty$, або

$$b < \infty \quad \text{і} \quad \underline{\lim}_{x\to b-0} |\psi(x)| < \overline{\lim}_{x\to b-0} |\psi(x)|,$$

бо у всіх цих випадках функцію $\psi(x)$ не можна довизначити у точці b зі збереженням неперервності. Отже, залишається випадок, коли $b < \infty$ і існує $\lim\limits_{x\to b-0} \psi(x) = \overline{y}$. Доведемо, що тоді $(b, \overline{y}) \in \partial G$. Припустимо, що це не так, тобто $(b, \overline{y}) \in G$. Множина точок

$$l = \{(x, y):\ y = \psi(x),\ x \in [x_0 - h_0, b]\}$$

є замкненою і цілком належить області G. Нехай відстань від l до межі області G дорівнює $d : d = \operatorname{dist}\{l, \partial G\}$. Довільна точка $A(x, y) \in l$ перебуває на відстані $d_A \ge d$ від межі області G. Помістимо її у квадрат Π_A з центром у точці A, половина сторони якого $a_A = \dfrac{d_A}{2\sqrt{2}}$. У замкненій області $\overline{D}$, яка складається з усіх цих квадратів

$$D = \bigcup_{(x,y)\in l} \Pi_A,$$

$\sup\limits_{D} |f(x, y)| = M$, причому

$$M \ge M_k, \quad a_k \ge a = \frac{d}{2\sqrt{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Але це означає, що

$$h_k = \min\left\{a_k, \frac{a_k}{M_k}\right\} \ge \min\left\{a, \frac{a}{M}\right\} = \overline{h} > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

і

$$b = \lim_{m\to\infty} x_m \ge x_0 + \overline{h} \lim_{m\to\infty} m = \infty.$$

Отримане протиріччя доводить, що точка $(b, \overline{y})$ може належати лише межі області G, тобто розв'язок $\psi(x)$ не можна продовжити вправо. Аналогічно здійснюється продовження локального розв'язку вліво від точки $x_0 - h_0$ до непродовжуваного і теорему доведено.

Зауваження 3.1. *Неперервність функції $f(x,y)$ на всій площині $\mathbb{R}^2$ не гарантує існування непродовжуваного розв'язку на $\mathbb{R}^1$. Справді, розглянемо задачу Коші*

$$y' = y^2 \cos x, \quad y(x_0) = y_0. \tag{69.1}$$

Легко переконатися, що розв'язок цієї задачі можна записати формулою

$$y = \frac{1}{C_0 - \sin x},$$

де $C_0 = \sin x_0 + \dfrac{1}{y_0}$, якщо $y_0 \neq 0$, і $y = 0$, якщо $y_0 = 0$. Отже, якщо $|C_0| > 1$, то непродовжуваний розв'язок задачі Коші (69.1) визначений на $\mathbb{R}^1$, якщо ж $|C_0| \leq 1$, то розв'язок визначений лише на інтервалі (a,b), де a і b – два сусідні нулі функції $\sin x - C_0$ і його не можна продовжити за цей інтервал.

Зауваження 4.1. *Як випливає з доведення теореми 6.1, розв'язок рівняння (62.1) не може закінчитися в деякій точці області G; він як завгодно близько наближається до межі ∂G. Іншими словами, яка б не була замкнена множина $A \subset G$, графік непродовжуваного розв'язку рівняння (62.1), який має спільні точки з A, обов'язково вийде на межу ∂A при зростанні (спаданні) x.*

§ 7.1. Єдиність розв'язку задачі Коші

Як було доведено у попередньому параграфі для існування непродовжуваного розв'язку задачі Коші (62.1), (63.1) достатньо неперервності функції f в області G. Проте цієї умови мало для єдиності розв'язку. Дійсно, розглянемо задачу

$$y' = n\, y^{(n-1)/n}, \quad y(x_0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^1. \tag{70.1}$$

Очевидно, що функція $f(x,y) = n\, y^{\frac{n-1}{n}}$ є неперервною в області $G = \mathbb{R}^2$. І в той же час задача (79.1) має два розв'язки: $y = 0$ і $y = (x - x_0)^n$.

Теорема 7.1. *Нехай $f \in C(G) \cap \mathrm{Lip}_y(G)$. Тоді задача Коші (62.1), (63.1) має єдиний непродовжуваний розв'язок.*

Доведення. Припустимо, що існують два непродовжувані розв'язки

$$y = \varphi_1(x), \quad x \in \langle a, b \rangle, \quad y = \varphi_2(x), \quad x \in \langle a_1, b_1 \rangle$$

задачі Коші (62.1), (63.1). Позначимо через A множину точок

$$A = \{x : \ \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}.$$

Оскільки $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$, то множина A не порожня. Крім того, множина A замкнена. Справді, якщо $\overline{x}$ – гранична точка множини A, то існує послідовність $\{x_n\} \subset A$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Тоді на підставі неперервності функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$

$$\varphi_1(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_2(x_n) = \varphi_2(\overline{x}).$$

Отже, $\overline{x} \in A$. Нехай B – зв'язна компонента множини A, яка містить точку x_0 і нехай

$$\sup B = x_1 < \min\{b, b_1\}.$$

Згідно з означенням множини B у деякому правому півоколі $[x_1, x_1 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ маємо $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Оскільки $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ є розв'язками задачі Коші (62.1), (53.1), то для них справджуються тотожності:

$$\varphi_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))d\xi, \quad \varphi_2(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_2(\xi))d\xi.$$

Неперервна функція $g(x) = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ за теоремою Вейєрштраса на проміжку $[x_1, x_1 + \varepsilon]$ досягає свого максимального значення. Нехай $g(\theta) = \max\limits_{[x_1, x_1+\varepsilon]} g(x)$. Тоді

$$g(\theta) = |\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)| = \left| \int_{x_1}^{\theta} [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))]d\xi \right| \leq$$

$$\leq L \int_{x_1}^{\theta} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)|d\xi \leq L\, g(\theta)(\theta - x_1) \leq L\, g(\theta)\varepsilon$$

або $1 \leq L\varepsilon$. Якщо вибрати $\varepsilon < \dfrac{1}{L}$, то прийдемо до протиріччя: $1 < 1$. Отже, $x_1 = \min\{b, b_1\}$, якщо $b \neq b_1$. Але якщо $b < b_1$, то згідно з означенням розв'язок $\varphi_2(x)$ є продовженням розв'язку $\varphi_1(x)$, який за припущенням був непродовжуваний. Тому $b = b_1$ і $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, $x \in [x_0, b\rangle$. Аналогічно розглядається випадок, коли $x < x_0$. Теорему доведено.

§ 8.1. Неперервна залежність розв'язків від початкових даних

Розглянемо для рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{62.1}$$

задачу Коші з початковими даними $(\xi, \eta) \in G$:

$$y(\xi) = \eta. \tag{71.1}$$

Нехай для кожної точки $(\xi, \eta) \in G$ існує непродовжуваний розв'язок задачі Коші (62.1), (71.1). Очевидно, що цей розв'язок буде функцією, яка залежить не тільки від x, але і від початкових даних ξ, η, тобто цей розв'язок можна записати у вигляді $y = \varphi(x, \xi, \eta)$. Виясним, при яких умовах на функцію $f(x, y)$ розв'язок задачі Коші (62.1), (71.1) буде неперервним за змінними ξ, η. Для цього зробимо заміну: $x = t + \xi - t_0$, $y = z + \eta - z_0$. Тоді отримаємо задачу

$$\frac{dz}{dt} = f(t + \xi - t_0, z + \eta - z_0) \equiv g(t, z, \xi, \eta), \tag{72.1}$$

$$z(t_0) = z_0. \tag{73.1}$$

Отже, тепер ми можемо сформулювати нашу проблему так: при яких умовах на функцію $g(t, z, \xi, \eta)$ розв'язок задачі Коші (72.1), (73.1) буде неперервно залежати від параметрів ξ і η?

Теорема 8.1 (про неперервну залежність розв'язків від параметрів). *Нехай функція $g(t, z, \xi, \eta)$ неперервна в деякій області $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^4$ і задовольняє у цій області умову Ліпшиця за змінною y. Нехай $(t_0, z_0, \xi_0, \eta_0)$ – довільна точка області $\tilde{G}$ і $z = \varphi(t, \xi, \eta)$, $(|\xi - \xi_0| < h$, $|\eta - \eta_0| < h)$ – непродовжуваний розв'язок задачі Коші (72.1), (73.1); нехай далі розв'язок $\varphi(t, \xi_0, \eta_0)$ визначений на проміжку $\langle a_0, b_0 \rangle$ і $[a, b]$ – довільний відрізок, причому $a_0 < a$, $b_0 > b$.*

Тоді існує таке $\sigma > 0$, що для всіх $|\xi - \xi_0| < \sigma$, $|\eta - \eta_0| < \sigma$, розв'язок $z = \varphi(t, \xi, \eta)$ визначений на відрізку $[a, b]$ і є неперервною функцією за змінними ξ, η у точці (ξ_0, η_0), причому рівномірно стосовно $t \in [a, b]$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує δ $(0 < \delta \leq \sigma)$ таке, що при $|\xi - \xi_0| < \delta$, $|\eta - \eta_0| < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$|\varphi(t, \xi, \eta) - \varphi(t, \xi_0, \eta_0)| < \varepsilon$$

для всіх $t \in [a, b]$.

Доведення. Позначимо через A множину точок (t, z, ξ, η), які задовольняють наступні умови:

$$a \leq t \leq b, \quad |\varphi(t, \xi_0, \eta_0) - z| \leq r, \quad |\xi - \xi_0| \leq \sigma_0, \ |\eta - \eta_0| \leq \sigma_0. \tag{74.1}$$

Оскільки множина точок $(t, \varphi(t, \xi_0, \eta_0), \xi_0, \eta_0)$, де $t \in [a, b]$, є замкненою обмеженою множиною в $\tilde{G}$, то при достатньо малих r і σ_0 множина A теж належатиме $\tilde{G}$. Нехай $A \subset \tilde{G}$. Очевидно, A – замкнена обмежена множина. На цій множині, зокрема, справедлива нерівність Ліпшиця

$$|g(t, z_1, \xi, \eta) - g(t, z_2, \xi, \eta)| \leq L|z_1 - z_2| \tag{75.1}$$

для довільних точок $(t, z_1, \xi, \eta), (t, z_2, \xi, \eta) \in A$. Оскільки функція $\varphi(t, \xi, \eta)$ є розв'язком задачі Коші (72.1), (73.1), то справедливі тотожності:

$$\varphi(t, \xi, \eta) \equiv z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau, \varphi(\tau, \xi, \eta), \xi, \eta) d\tau,$$

$$\varphi(t, \xi_0, \eta_0) \equiv z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau, \varphi(\tau, \xi_0, \eta_0), \xi_0, \eta_0) d\tau$$

там, де визначені ці функції. Оцінимо різницю

$$|\varphi(t, \xi, \eta) - \varphi(t, \xi_0, \eta_0)|$$

для тих значень t, ξ, η, для яких функції $\varphi(t, \xi, \eta)$, $\varphi(t, \xi_0, \eta_0)$ визначені. Віднімаючи від першої тотожності другу, будемо мати

$$|\varphi(t, \xi, \eta) - \varphi(t, \xi_0, \eta_0)| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} |g(\tau, \varphi(\tau, \xi, \eta), \xi, \eta) - g(\tau, \varphi(\tau, \xi_0, \eta_0), \xi_0, \eta_0)| d\tau \right|. \tag{76.1}$$

Оцінимо спочатку модуль різниці під знаком інтеграла

$$\begin{aligned} &|g(\tau, \varphi(\tau, \xi, \eta), \xi, \eta) - g(\tau, \varphi(\tau, \xi_0, \eta_0), \xi_0, \eta_0)| \leq \\ &\leq |g(\tau, \varphi(\tau, \xi, \eta), \xi, \eta) - g(\tau, \varphi(\tau, \xi_0, \eta_0), \xi, \eta)| + \\ &+ |g(\tau, \varphi(\tau, \xi_0, \eta_0), \xi, \eta) - g(\tau, \varphi(\tau, \xi_0, \eta_0), \xi_0, \eta_0)|. \end{aligned} \tag{77.1}$$

На підставі нерівності (75.1)

$$|g(\tau,\varphi(\tau,\xi,\eta),\xi,\eta) - g(\tau,\varphi(\tau,\xi_0,\eta_0),\xi,\eta)| \le L|\varphi(\tau,\xi,\eta) - \varphi(\tau,\xi_0,\eta_0)|. \tag{78.1}$$

З рівномірної неперервності $g(t,z,\xi,\eta)$ на множині A випливає, що для довільного $\varepsilon_1 > 0$ існує таке σ $(0 < \sigma \le \sigma_0)$, що які б не були точки (τ,z,ξ,η) і (τ,z,ξ_0,η_0) з A, які задовольняють умови $|\xi-\xi_0| < \sigma$, $|\eta-\eta_0| < \sigma$, виконується нерівність

$$|g(\tau,z,\xi,\eta) - g(\tau,z,\xi_0,\eta_0)| < \varepsilon_1.$$

Зокрема, тоді

$$|g(\tau,\varphi(\tau,\xi_0,\eta_0),\xi,\eta) - g(\tau,\varphi(\tau,\xi_0,\eta_0),\xi_0,\eta_0)| < \varepsilon_1. \tag{79.1}$$

З нерівності (77.1) на підставі (78.1), (79.1) маємо

$$\begin{aligned}|g(\tau,\varphi(\tau,\xi,\eta),\xi,\eta) - g(\tau,\varphi(\tau,\xi_0,\eta_0),\xi_0,\eta_0)| \le \\ \le \varepsilon_1 + L|\varphi(\tau,\xi,\eta) - \varphi(\tau,\xi_0,\eta_0)|.\end{aligned} \tag{80.1}$$

Підставляючи (80.1) у (76.1), отримаємо

$$\begin{aligned}|\varphi(t,\xi,\eta) - \varphi(t,\xi_0,\eta_0)| &\le \left|\int_{t_0}^{t} (\varepsilon_1 + L|\varphi(\tau,\xi,\eta) - \varphi(\tau,\xi_0,\eta_0)|)d\tau\right| \le \\ &\le \varepsilon_1|t-t_0| + L\left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau,\xi,\eta) - \varphi(\tau,\xi_0,\eta_0)|d\tau\right| \le \\ &\le \varepsilon_1(b-a) + L\left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau,\xi,\eta) - \varphi(\tau,\xi_0,\eta_0)|d\tau\right|.\end{aligned}$$

Застосовуючи до останьої нерівності лему Гронуолла-Белмана для функції

$$u(t) = |\varphi(t,\xi,\eta) - \varphi(t,\xi_0,\eta_0)|,$$

отримаємо при $|\xi-\xi_0| < \sigma$, $|\eta-\eta_0| < \sigma$ оцінку

$$\begin{aligned}|\varphi(t,\xi,\eta) - \varphi(t,\xi_0,\eta_0)| \le \varepsilon_1(b-a)e^{L|t-t_0|} \le \\ \le \varepsilon_1(b-a)e^{L(b-a)}.\end{aligned} \tag{81.1}$$

Згідно з зауваженням 4.1 графік функції $\varphi(t,\xi,\eta)$ вийде за межу обмеженої замкненої множини A. Позначимо через $t_1(\xi,\eta)$, $|\xi-\xi_0| < \sigma$, $|\eta-\eta_0| < \sigma$ те значення t, при якому точка $(t,\varphi(t,\xi,\eta),\xi,\eta)$ вперше попадає на межу множини A. Нехай

$$\varepsilon_1 < \frac{r}{(b-a)\exp(L(b-a))}.$$

Тоді, зокрема, при $t = t_1$ з нерівності (81.1) отримаємо

$$|\varphi(t_1,\xi,\eta) - \varphi(t_1,\xi_0,\eta_0)| < r \tag{82.1}$$

при $|\xi-\xi_0| < \sigma$, $|\eta-\eta_0| < \sigma$. Але оскільки точка $(t_1, \varphi(t_1, \xi, \eta), \xi, \eta) \in \partial A$, то хоча б одна з нерівностей в умові (74.1) повинна обертатися в рівність. На підставі (82.1) це можливо лише коли $t_1 = b$ (або $t_1 = a$, якщо $t_1 < t_0$). Отже, розв'язок $\varphi(t, \xi, \eta)$ визначений для всіх $t \in [a, b]$, якщо $|\xi - \xi_0| < \sigma$, $|\eta - \eta_0| < \sigma$. Якщо тепер за ε_1 взяти

$$\varepsilon_1 < \frac{\min\{\varepsilon, r\}}{(b-a)\exp(L(b-a))},$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне додатне число, а відповідне цьому ε_1 число σ позначити через δ, то на підставі (81.1) отримаємо

$$|\varphi(t, \xi, \eta) - \varphi(t, \xi_0, \eta_0)| < \varepsilon$$

при $|\xi - \xi_0| < \delta$, $|\eta - \eta_0| < \delta$ для всіх $t \in [a, b]$. Теорему доведено.

Тепер згадаємо, що

$$g(t, z, \xi, \eta) \equiv f(t + \xi - t_0, z + \eta - z_0).$$

Тому справедлива теорема.

Теорема 9.1 (про неперервність розв'язків за початковими даними). *Нехай $f \in C(G) \cap \mathrm{Lip}_y(G)$ і (ξ_0, η_0) – довільна точка множини G, а $y = \varphi(x, \xi, \eta)$ – непродовжуваний розв'язок задачі Коші (62.1), (71.1). Нехай далі розв'язок $y = \varphi(x, \xi_0, \eta_0)$ є визначений на проміжку $\langle a_0, b_0 \rangle$ і $[a, b]$ – довільний відрізок такий, що $a_0 < a$, $b < b_0$.*

Тоді існує таке $\sigma > 0$, що при $|\xi - \xi_0| < \sigma$, $|\eta - \eta_0| < \sigma$ розв'язок $y = \varphi(x, \xi, \eta)$ визначений на відрізку $[a, b]$ і для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке δ $(0 < \delta \leq \sigma)$, що при $|\xi - \xi_0| < \delta$, $|\eta - \eta_0| < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$|\varphi(x, \xi, \eta) - \varphi(x, \xi_0, \eta_0)| < \varepsilon$$

для всіх $x \in [a, b]$, тобто розв'язок $\varphi(x, \xi, \eta)$ неперервний по ξ і η у точці (ξ_0, η_0), причому рівномірно стосовно x на відрізку $[a, b]$.

§ 9.1. Загальний розв'язок рівняння першого порядку

Знову розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{4.1}$$

визначене в області $G \subset \mathbb{R}^2$.

Означення 11.1. *Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від змінної x і параметра (сталої) C називається загальним розв'язком рівняння (4.1), якщо довільний розв'язок цього рівняння міститься в загальному у тому сенсі, що він зображається у вигляді $y = \varphi(x, C_0)$ при деякому фіксованому значенні C_0 параметра C.*

Існування локального загального розв'язку гарантує така теорема.

Теорема 10.1. *Нехай $f \in C(G) \cap \mathrm{Lip}_y(G)$. Тоді для кожної точки (x_0, y_0) області G існує окіл $O(x_0, y_0)$, в якому рівняння (4.1) має загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$.*

Доведення. Нехай (x_0, y_0) – довільна точка області G і прямокутник

$$\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}$$

цілком належить області G. Тоді на підставі теореми Пеано існує розв'язок $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

визначений на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, а $M = \max\limits_{\Pi} |f(x, y)|$. Виберемо тепер за початкову точку (x_0, η), де $|\eta - y_0| \leq b/2$. Тоді прямокутник

$$\Pi_\eta = \left\{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \ |y - \eta| \leq \frac{b}{2}\right\}$$

повністю лежить в Π і на підставі тієї ж теореми Пеано розв'язок $y = \varphi(x, x_0, \eta)$ задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = \eta$ визначений на відрізку $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$, де $h_0 = \min\left\{a, \dfrac{b}{2M}\right\}$. Сукупність розв'язків $y = \varphi(x, x_0, \eta)$ при $\eta \in [y_0 - b/2, y_0 + b/2]$ утворює деяку замкнену зв'язну множину $B(x_0, y_0)$. Тоді множина внутрішніх точок $B(x_0, y_0)$ і дає окіл $O(x_0, y_0)$, існування якого стверджується в теоремі, оскільки довільний розв'язок рівняння (4.1), розташований в $O(x_0, y_0)$, можна отримати у вигляді

$$y = \varphi(x, x_0, C) = \psi(x, C), \quad C \in \left(y_0 - \frac{b}{2}, y_0 + \frac{b}{2}\right).$$

§ 10.1. Неявні диференціальні рівняння першого порядку

1^0. Задача Коші для неявного диференціального рівняння.

Означення 12.1. *Неявним диференціальним рівнянням першого порядку (рівнянням, не розв'язаним стосовно похідної) називається співвідношення вигляду*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{83.1}$$

між незалежною змінною x, невідомою функцією $y(x)$ та її похідною $y'(x)$, де $F(x, y, z)$ неперервна в області $D \subset \mathbb{R}^3$.

Означення 13.1. *Функція $y = \varphi(x)$, визначена на проміжку $\langle a, b\rangle$, називається розв'язком рівняння (83.1), якщо виконуються такі умови:*
1) $\varphi(x)$ диференційовна на $\langle a, b\rangle$;
2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ при $x \in \langle a, b\rangle$;
3) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ для всіх $x \in \langle a, b\rangle$.

Прикладом неявного диференціального рівняння першого порядку може бути

$$\sin y' + e^{yy'} + x = 0.$$

Зауважимо, що рівняння $y' = f(x,y)$ є частковим випадком рівняння (83.1), оскільки його можна записати у вигляді

$$y' - f(x,y) = 0.$$

У попередніх параграфах було вияснено, що у випадку, коли рівняння (83.1) можна розв'язати стосовно похідної

$$y' = f(x,y), \tag{84.1}$$

то для однозначного визначення розв'язку цього рівняння достатньо задати початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{85.1}$$

Виникає питання: чи умови (85.1) достатньо для однозначного визначення розв'язку рівняння (83.1)? Виявляється, що лише цієї умови замало. Наведемо приклад. Нехай маємо рівняння

$$y'^2 - 4x^2y^2 = 0. \tag{86.1}$$

Розглянемо його при $x > 0$, $y > 0$. Очевидно, рівняння (86.1) еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$y' = 2xy, \quad y' = -2xy.$$

Їх розв'язки відповідно мають вигляд

$$y = C_1e^{x^2}, \quad y = C_2e^{-x^2}.$$

Кожна з цих функцій задовольняє рівняння (86.1) при довільних $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^1$. Тобто ми маємо дві сім'ї інтегральних кривих рівняння (84.3). Тому через кожну точку (x_0, y_0) $(x_0 > 0,\ y_0 > 0)$ проходять дві різні інтегральні криві цього рівняння. Ці криві, зокрема, відрізняються тим, що у кожній точці (x_0, y_0) вони мають різні дотичні.

Легко бачити, що для однозначного визначення розв'язку рівняння (86.1) крім умови (85.1) досить задати ще значення

$$y'(x_0) = y_0^1,$$

тобто слід задати напрямок дотичної до інтегральної кривої у точці (x_0, y_0). Очевидно також, що число y_0^1 не може бути цілком довільним. Воно повинно задовольняти наше рівняння:

$$(y_0^1)^2 - 4x_0^2y_0^2 = 0.$$

Таким чином, можемо висловити гіпотезу, що задача Коші для рівнян- break ня (83.1) має вигляд:

$$F(x,y,y') = 0, \tag{83.1}$$
$$y(x_0) = y_0, \tag{85.1}$$
$$y'(x_0) = y_0^1, \tag{87.1}$$
$$F(x_0, y_0, y_0^1) = 0, \tag{88.1}$$

тобто потрібно знайти розв'язок рівняння (83.1), який задовольняє умови (85.1), (87.1), причому числа x_0, y_0, y_0^1 складають розв'язок рівняння (88.1) .

Теорема 11.1. *Нехай* $F(x,y,y')$, $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \in C(D)$, *точка* $(x_0,y_0,y_0^1) \in D$ *така, що* $F(x_0,y_0,y_0^1) = 0$ *і* $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,y_0^1)}{\partial y'} \neq 0$. *Тоді задача Коші (83.1), (85.1) , (87.1) , (88.1) має єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$, *визначений у деякому околі* x_0.

Доведення. Справді, на підставі умов теореми співвідношення (83.1) визначає y' неявно як функцію від x, y :

$$y' = f(x,y) \tag{84.1}$$

(згідно з теоремою з математичного аналізу про існування неявної функції) у деякому околі $O(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), причому $f(x,y)$ і

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial y'}} \tag{89.1}$$

є неперервними в $O(x_0,y_0)$. Тому на підставі теореми Пеано і теореми єдиності задача Коші (84.1) , (85.1) має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, визначений у деякому околі точки x_0. Крім того, з теореми про неявну функцію випливає, що

$$F(x,y,f(x,y)) \equiv 0 \quad \text{і} \quad y_0^1 = \bar{f}(x_0,y_0).$$

Тому

$$\varphi'(x_0) = f(x_0,\varphi(x_0)) = f(x_0,y_0) = y_0^1$$

і

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \equiv F(x,\varphi(x),f(x,\varphi(x))) \equiv 0.$$

Таким чином, $y = \varphi(x)$ є єдиним розв'язком задачі (83.1), (85.1), (87.1), (88.1) і теорему доведено.

2^0. **Особливі розв'язки диференціальних рівнянь.** Розглянемо тепер питання про точки, у яких порушується єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (83.1). Такі точки називаються особливими точками диференціального рівняння. Множина усіх особливих точок рівняння (83.1) називається його особливою множиною. Якщо певна підмножина особливої множини даного рівняння утворює криву і ця крива є інтегральною кривою у просторі змінних x, y, то її називають особливою інтегральною кривою, а функцію, яка описує цю криву, – особливим розв'язком рівняння.

Отже, особлива інтегральна крива диференціального рівняння – це інтегральна крива, у кожній точці якої порушується єдиність розв'язку задачі Коші, тобто через кожну точку цієї кривої проходить принаймні ще одна інтегральна крива з тим самим напрямком дотичної.

З'ясуємо питання про існування особливих елементів рівняння (83.1). Оскільки про єдиність розв'язку задачі Коші для цього рівняння ми робимо висновок на підставі того, чи можна його звести до рівняння вигляду (84.1) з певними умовами на функцію $f(x,y)$, то особлива множина точок рівняння (83.1) буде містити, зокрема, ті точки, у яких порушується єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (84.1). Ми знаємо, що однією з достатніх умов єдиності розв'язку задачі Коші (84.1) , (85.1) є обмеженість похідної $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Враховуючи (89.1), бачимо, що особливими точками рівняння (83.1) можуть бути ті точки, у яких відношення (89.1) є необмеженим. Зокрема, коли

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} = 0.$$

Крім того, особлива точка повинна задовольняти рівняння (83.1). Таким чином, для знаходження особливих точок рівняння (83.1) отримаємо систему

$$F(x,y,y') = 0, \qquad \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0. \tag{90.1}$$

Виключивши з неї y', матимемо рівняння

$$\psi(x,y) = 0. \tag{91.1}$$

Зрозуміло, що особливі точки, якщо вони є, повинні задовольняти це рівняння.

Якщо рівняння (91.1) визначає деяку криву на площині Oxy, то її називають дискримінантною кривою рівняння (83.1). Зазначимо ще раз, оскільки ми використовуємо лише достатні умови єдиності, то порушення цих умов не обов'язково веде до порушення єдиності розв'язку. Тобто, якщо (91.1) визначає розв'язок рівняння (83.1), то він не обов'язково буде особливим. Дослідженням цього питання потрібно займатися додатково.

Приклад 9.1. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$x - y - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3 = 0.$$

Друге рівняння системи (90.1) тут матиме вигляд

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = -\frac{8}{9}y' + \frac{8}{9}y'^2 = 0.$$

Розв'язавши його стосовно y', знаходимо два значення: $y' = 0$ і $y' = 1$. Підставимо їх у перше рівняння. Отримаємо відповідні рівняння дискримінантних кривих

$$y = x, \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

Неважко переконатися, що перша з них не є інтегральною кривою, а друга, оскільки $y = x - \dfrac{4}{27}$ – розв'язок вихідного рівняння, може бути особливою інтегральною кривою.

Розглянемо тепер другу можливість, коли відношення (89.1) є необмеженим, а саме, коли $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}$ необмежена. Тоді, очевидно, ті точки, в яких $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}$ необмежена, задовольняють рівняння

$$\frac{1}{\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}} = 0. \tag{92.1}$$

Якщо при цьому $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}$ не залежить від y' (наприклад, у випадку рівняння $y' = f(x,y)$), то рівняння (92.1) стає рівнянням типу (91.1). Якщо ж $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}$ залежить від y', то для знаходження рівняння, аналогічного до (91.1), потрібно розглянути рівняння (92.1) сукупно з (83.1). Виключивши з них y', ми прийдемо до рівняння (91.1).

Зауважимо, що у випадку прикладу 9.1

$$\frac{1}{\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}} = -1 \neq 0,$$

тобто нових особливих точок ми не одержимо.

Приклад 10.1. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$y' = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}} = \frac{2}{3}(y-x)^{-1/3},$$

то для можливих особливих кривих маємо рівняння $y - x = 0$. Функція $y = x$ є розв'язком вихідного рівняння, тому цей розв'язок може бути особливим. Зауважимо, що у цьому випадку дискримінантних кривих нема, оскільки

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 1.$$

Розглянемо тепер інший спосіб знаходження особливих розв'язків рівняння (83.1), коли відома сім'я розв'язків. Нехай

$$\Phi(x,y,C) = 0 \quad - \tag{93.1}$$

сім'я кривих на площині, де C – параметр; функція $\Phi(x,y,C)$ є неперервно диференційовною в деякій області $V \subset \mathbb{R}^3$, причому

$$\frac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial C} \neq 0.$$

Крива γ називається обвідною сім'ї кривих (93.1), якщо у кожній своїй точці вона дотикається до однієї з кривих сім'ї (93.1) і якщо в різних точках вона дотикається до різних кривих.

Легко перевірити, що коли (93.1) визначає розв'язки рівняння (83.1), то обвідна цієї сім'ї, якщо вона існує, буде особливою інтегральною кривою. Отже, для знаходження особливого розв'язку достатньо вміти шукати обвідну сім'ї розв'язків рівняння (83.1).

Для відшукання обвідної сім'ї інтегральних кривих, заданих, наприклад, рівнянням (93.1), припустимо, що рівняння кривої γ в параметричній формі має вигляд $x = x(t)$, $y = y(t)$, де x, y – диференційовні функції змінної t, причому $|x'(t)| + |y'(t)| \neq 0$. Оскільки згідно з означенням обвідна дотикається до кожної кривої сім'ї (93.1), то природно вважати, що $C = C(t)$. Нехай $C'(t) \neq 0$. Підставивши $x(t)$, $y(t)$, $C(t)$ у рівняння (93.1), дістанемо тотожність

$$\Phi(x(t), y(t), C(t)) \equiv 0.$$

Продиференціювавши її по t, матимемо

$$\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial y} y'(t) +$$
$$+ \frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial C} C'(t) \equiv 0. \qquad (94.1)$$

У точках дотику обвідної сім'ї (93.1) кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої при умові, що

$$\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial y} \neq 0,$$

визначається рівністю

$$k = -\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial y},$$

а кутовий коефіцієнт дотичної до обвідної при $x'(t) \neq 0$ дорівнює

$$k_1 = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Оскільки у точках дотику кривих виконується рівність $k = k_1$, то ми приходимо до тотожності

$$\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial y} y'(t) \equiv 0.$$

Порівнявши її з тотожністю (94.1), дійдемо висновку, що при умові $C'(t) \neq 0$ мусить справджуватися тотожність

$$\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial C} \equiv 0.$$

Те саме дістанемо при умовах

$$\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), C(t))}{\partial x} \neq 0, \quad y'(t) \neq 0.$$

Таким чином, якщо однопараметрична сім'я кривих має обвідну, то при виконанні умов $\Phi_x^2 + \Phi_y^2 \neq 0$, $(x')^2 + (y')^2 \neq 0$ і обмеженості зазначених похідних на ній мають виконуватися тотожності

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \qquad (95.1)$$

Ця система рівностей є необхідною умовою існування обвідної. Неважко переконатися, що при виконанні умови $0 < \Phi_x^2 + \Phi_y^2 < \infty$ на кривій γ, яка задається рівняннями $x = x(t)$,

$y = y(t)$, де $x(t)$, $y(t)$ – розв'язок системи (95.1) і $0 < (x')^2 + (y')^2 < \infty$, γ – обвідна сім'ї інтегральних кривих (93.1).

Справді, якщо, наприклад, $\Phi(x(t), y(t), C(t)) \equiv 0$, то продиференціювавши першу тотожність (95.1) по t з урахуванням другої тотожності, дістанемо тотожність

$$\frac{y'}{x'} \equiv -\frac{\Phi_x}{\Phi_y},$$

яка свідчить, що крива γ має спільну дотичну з інтегральною кривою (93.1).

Приклад 11.1. Розглянемо знову рівняння

$$y' = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1.$$

Зробивши заміну $y - x = z$, $z' = y' - 1$, матимемо рівняння

$$z' = \sqrt[3]{z^2}.$$

Його загальним розв'язком є сім'я функцій $27z = (x+C)^3$. Звідси $27(y-x) = (x+C)^3$ є сім'єю інтегралів вихідного рівняння. Отже, на підставі (95.1) для знаходження обвідної даної сім'ї інтегральних кривих одержуємо систему

$$27(y-x) - (x+C)^3 = 0, \quad -3(x+C)^2 = 0.$$

Виключивши з цієї системи параметр C, отримаємо $y = x$. Оскільки при $C = -x$ маємо $\Phi_x^2 + \Phi_y^2 = 2 \cdot 27^2$, то $y = x$ є обвідною сім'ї інтегральних кривих і, отже, особливим розв'язком вихідного рівняння.

3^0. **Методи інтегрування неявних диференціальних рівнянь.** Розглянемо тепер методи інтегрування рівнянь типу (83.1). Ми зупинимося лише на тому випадку, коли рівняння (83.1) допускає розв'язування стосовно однієї з трьох змінних x, y, або y'. Якщо (83.1) можна розв'язати стосовно y', то одержуємо рівняння типу (84.1), тобто рівняння розв'язане стосовно похідної.

Нехай рівняння (83.1) може бути розв'язане стосовно змінної x (або y):

$$x = g(y, y') \qquad (y = h(x, y')). \tag{96.1}$$

Введемо нову змінну (параметр) p за формулою

$$y' = p. \tag{97.1}$$

Тоді розв'язок рівняння (96.1) будемо шукати у параметричній формі, тобто змінні x і y розглядатимемо як функції від p : $x = x(p)$, $y = y(p)$. Отже, (96.1) набере вигляду

$$x = g(y, p) \qquad (y = h(x, p)). \tag{98.1}$$

Диференціюємо (98.1):

$$dx = \frac{\partial g(y,p)}{\partial y} dy + \frac{\partial g(y,p)}{\partial p} dp \quad \left(dy = \frac{\partial h(x,p)}{\partial x} dx + \frac{\partial h(x,p)}{\partial p} dp \right). \tag{99.1}$$

Але значення диференціала dx (dy) можна отримати з (97.1):

$$dx = \frac{dy}{p} \qquad (dy = pdx). \tag{100.1}$$

Тоді зрівнявши (99.1) і (100.1), отримаємо рівняння

$$\left(\frac{\partial g(y,p)}{\partial y} - \frac{1}{p}\right)dy + \frac{\partial g(y,p)}{\partial p}dp = 0$$
$$\left(\left(\frac{\partial h(x,p)}{\partial x} - p\right)dx + \frac{\partial h(x,p)}{\partial p}dp = 0\right), \tag{101.1}$$

яке, очевидно, можна розв'язати стосовно похідної. Якщо розв'язок рівняння (101.1) можна записати у вигляді

$$y = \psi(p, C) \quad (x = \omega(y, C)),$$

то загальний розв'язок рівняння (96.1) матиме вигляд

$$\begin{cases} x = g(\psi(x,C), C), \\ y = \psi(x, C), \end{cases} \quad \left(\begin{cases} x = \omega(p, C), \\ y = h(\omega(p,C), C). \end{cases}\right) \tag{102.1}$$

У випадку, коли у рівняннях (102.1) можна виключити параметр p, ми прийдемо до сім'ї розв'язків рівняння (96.1) у вигляді (93.1).

Пояснимо заміну змінної (97.1). Нехай функція $y = y(x)$ є двічі неперервно диференційовною на проміжку $[a, b]$ і строго опукла вгору або вниз, тобто $y''(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$. Тоді похідна $y'(x)$ строго монотонна на $[a, b]$ і з рівняння $y'(x) = p$ змінна x визначається однозначно: $x = \beta(p)$, $p \in [y(a), y(b)]$. Далі $y = y(\beta(p)) = \gamma(p)$, отже крива $y = y(x)$ параметризована:

$$x = \beta(p), \quad y = \gamma(p), \;\; p \in [y(a), y(b)].$$

Заміна змінної (97.1) має простий геометричний зміст. Нехай виконуються умови, сформульовані вище. Тоді крива $\Gamma : y = y(x)$, $x \in [a, b]$, строго опукла. Величина $p = y'(x)$ визначає тангенс кута нахилу дотичної до кривої Γ у точці $(x, y(x))$. Зі строгої опуклості кривої Γ випливає, що нахили дотичної у різних точках кривої різні. Тому задання кутового коефіцієнта дотичної $p = p_0$ однозначно визначає точку кривої Γ.

Розглянемо один тип рівнянь, який завжди можна зінтегрувати вказаним методом. Нехай рівняння (83.1) має вигляд

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \tag{103.1}$$

Рівняння вигляду (103.1) називають рівнянням Лагранжа. Для його розв'язування введемо заміну (97.1). Послідовно виконуючи вказані вище опервції, матимемо:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{104.1}$$
$$dy = \varphi(p)dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp,$$
$$pdx = \varphi(p)dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp,$$
$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{-\psi'(p)}{\varphi(p) - p}. \tag{105.1}$$

Нехай спочатку $\varphi(p) \neq p$. Тоді рівняння (105.1) є лінійним диференціальним рівнянням стосовно функції $x(p)$. Знайшовши його розв'язок $x = \omega(p, C)$ і підставивши в (104.1), одержимо

$$y = \varphi(p)\omega(p, C) + \psi(p);$$

тим самим будемо мати параметричне зображення розв'язку рівняння (103.1):

$$\begin{cases} x = \omega(p, C), \\ y = \varphi(p)\omega(p, C) + \psi(p). \end{cases}$$

Якщо при деякому $p = p_k$ виконується рівність $p_k - \varphi(p_k) = 0$, то функція

$$y = x\varphi(p_k) + \psi(p_k)$$

також буде розв'язком рівняння (103.1), що легко перевіряється підстановкою цієї функції у рівняння.

Приклад 12.1. Розглянемо знову рівняння

$$x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3.$$

Введемо параметр $y' = p$:

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3. \tag{106.1}$$

Тоді

$$dy = dx - \frac{8}{9}p(1-p)dp,$$
$$pdx = dx - \frac{8}{9}p(1-p)dp,$$
$$(1-p)(9dx - 8pdp) = 0.$$

Один розв'язок нашого рівняння відповідає значенню $p = 1$. Він отримується з рівняння (106.1):

$$y = x - \frac{4}{27}.$$

Решта розв'язків матиме вигляд

$$x = \frac{4}{9}p^2 + C, \quad y = \frac{8}{27}p^3 + C. \tag{107.1}$$

Якщо з (107.1) виключити p, то прийдемо до сім'ї розв'язків вихідного рівняння у вигляді

$$(y - C)^2 = (x - C)^3.$$

Пряма $y = x - \dfrac{4}{27}$ є інтегральною кривою вихідного рівняння і в кожній точці дотикається до однієї з кривих (107.1). Справді, поклавши $p = 1$ у (107.1), матимемо

$$x = \frac{4}{9} + C, \quad y = \frac{8}{27} + C, \quad x - y = \frac{4}{27}.$$

Отже, розв'язок $y = x - \dfrac{4}{27}$ є особливим.

Розглянемо частковий випадок рівняння (103.1), коли $\varphi(y') \equiv y'$:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{108.1}$$

Диференціальне рівняння (108.1) називається рівнянням Клеро. Поклавши $y' = p$ і диференціюючи співвідношення

$$y = xp + \psi(p),$$

отримаємо

$$(\psi'(p) + x)dp = 0.$$

У випадку $dp = 0$, $p = C$ маємо сім'ю прямих

$$y = Cx + \psi(C). \tag{109.1}$$

Якщо $x = -\psi'(p)$, то отримаємо інтегральну криву у вигляді

$$x = -\psi'(p), \quad y = -\psi'(p)p + \psi(p), \tag{110.1}$$

яка, взагалі кажучи, є особливим розв'язком рівняння (108.1). Справді, нехай функція $\psi(p)$ двічі неперервно диференційовна на відрізку $[p_1, p_2]$ і $\psi''(p) \neq 0$. Нехай для визначеності $\psi''(p) < 0$, $p \in [p_1, p_2]$. Тоді функція $-\psi'(p)$ строго монотонно зростає на $[p_1, p_2]$ і з рівняння $x = -\psi'(p)$ можна однозначно виразити p через x як гладку функцію: $p = h(x)$. Функція

$$y = -h(x)\psi'(h(x)) + \psi(h(x)) \equiv g(x)$$

буде диференційовною. Знайдемо тепер обвідну сім'ї інтегральних кривих (109.1). Згідно з (95.1) маємо систему

$$y = Cx + \psi(C), \quad x + \psi'(C) = 0. \tag{111.1}$$

З другого рівняння знаходимо $C = h(x)$. Підставивши у перше рівняння (111.1) $C = h(x)$, матимемо $y = g(x)$. Отже, знайдена інтегральна крива (110.1) є обвідною сім'ї інтегральних кривих (109.1), тобто є особливим розв'язком рівняння (108.1).

ГЛАВА 2. НОРМАЛЬНІ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 1.2. Приклади нормальних систем. Основні поняття і означення

У попередній главі досліджувалися динамічні моделі, у яких невідомою є лише одна функція. Однак для моделювання багатьох явищ і процесів потрібно використовувати дві і більше функції від однієї змінної (наприклад від часу). Розглянемо одну математичну модель біологічних популяцій, побудовану Вольтера.

Нехай x – число великих риб-хижаків; вони харчуються малими рибами-жертвами, число яких позначимо через y. Тоді число риб-хижаків буде зростати до тих пір, поки у них буде достатньо корму, тобто малих риб-жертв. Але прийде час, коли корму не буде вистачати і число риб-хижаків почне зменшуватися. Це приведе до того, що з деякого моменту число риб-жертв почне збільшуватися. А це буде сприяти новому зростанні числа риб-хижаків і цикл знову повториться. Модель, побудована Вольтера, має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy, \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dxy, \tag{2.2}$$

де a, b, c, d – додатні сталі.

У рівнянні (1.2) для великих риб доданок bxy виражає залежність приросту великих риб від числа малих. У рівнянні (2.2) доданок $-dxy$ виражає зменшення числа малих риб в залежності від числа великих. Отже, у цій моделі ми маємо систему диференціальних рівнянь.

Розглянемо ще один приклад. Підчас першої світової війни англійський інженер і математик Ф. У. Ланчестер побудував декілька математичних моделей ведення повітряних боїв. Потім ці моделі були узагальнені і поширені на випадок бойових дій регулярних військ. Отже, нехай у бойових діях беруть участь дві воюючі сторони x і y. Їх чисельний склад у момент часу t, де t вимірюється в днях, позначимо через $x(t)$ і $y(t)$ відповідно. Надалі саме чисельність сторін буде відігравати вирішальну роль у побудові згаданих вище моделей. Справа в тому, що практично важко вказати критерііі, які б враховували при порівнянні воюючих сторін ще і ступінь бойової підготовки, озброєність, рівень і досвід командного складу, моральний дух і інші фактори.

Будемо припускати, що $x(t), y(t)$ змінюються неперервно і, більше того, що вони є диференційовними функціями. Звичайно, ці припущення спрощують реальну ситуацію, оскільки $x(t), y(t)$ – цілі числа. Але разом з тим зрозуміло, що при достатньо великому чисельному складі кожної із воюючих сторін збільшення чисельності на одного або двох чоловік дає з практичної точки зору нескінченно малу величину у порівнянні з уже наявним складом. Тому можна вважати, що за малі проміжки часу чисельний склад також змінюється на малі кількості (не цілі). Цієї домовленості, звичайно, не достатньо для того, щоб виписати конкретні формули для $x(t), y(t)$. Однак можна вказати ряд факторів, які дозволяють описати швидкість зміни чисельності воюючих сторін, тобто скласти динамічну математичну модель бойових дій.

Позначимо через OLR величину, яка виражає швидкість, з якою сторона x несе втрати від хвороб і інших факторів, не зв'язаних з бойовими діями. Далі, нехай CLR –

швидкість, з якою сторона x несе втрати від безпосереднього зіткнення в процесі бою зі стороною y. Нарешті, через RR позначимо швидкість підходу підкріплень до сторони x. Тоді ясно, що загальна швидкість зміни $x(t)$ задається рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = -(OLR + CLR) + RR.$$

Аналогічне рівняння має місце і для $y(t)$. Тепер задача полягає у тому, щоб вказати відповідні формули для величин OLR, CLR, RR. У моделі Ланчестера припускається, що для сторони x

$$OLR = ax(t), \quad CLR = by(t), \quad RR = P(t),$$

а для сторони y

$$OLR = dy(t), \quad CLR = cx(t), \quad RR = Q(t),$$

де a, b, c, d – невід'ємні сталі.

Тоді матимемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - by + P(t), \\ \frac{dy}{dt} = -cx - dy + Q(t), \end{cases} \tag{3.2}$$

досліджуючи яку ми зможемо зробити висновок про ймовірного переможця.

Зауважимо, що як у першій моделі, так і в другій на початку процесу відомі величини x_0, y_0, тобто

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0,$$

де t_0 – початок відліку часу в процесі.

Означення 1.2. *Нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь називається система вигляду*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \tag{4.2}$$

де x – незалежна змінна, $y_1, \dots, y_n$ – невідомі функції змінної x, $f_1, \dots, f_n$ – функції, визначені і неперервні в області $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Як видно з означення, системи (1.2), (2.2) і (3.2) є нормальними системами диференціальних рівнянь.

Означення 2.2. *Сукупність функцій $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, визначених на проміжку $\langle a, b\rangle$, називається розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь (4.2), якщо виконуються такі умови:*

1) $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ є диференційовними на $\langle a, b\rangle$;
2) $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in G \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$;
3) $\begin{cases} \varphi_1'(x) \equiv f_1(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n'(x) \equiv f_n(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \end{cases}$ *для всіх* $x \in \langle a, b\rangle$.

Задача Коші для системи (4.2) полягає у відшуканні такого її розв'язку $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, який задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0, \tag{5.2}$$

де $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ – задані числа (початкові дані). Ці співвідношення називаються початковими умовами.

Надалі часто будемо вживати більш компактний векторний запис системи (4.2) та початкових умов (5.2). Для цього через $\vec{y}(x)$ позначимо вектор-функцію з компонентами $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, через $\vec{y}\,'(x)$ – її похідну

$$\vec{y}\,'(x) = (y_1'(x), \ldots, y_n'(x)),$$

а через $\vec{f}(x, \vec{y})$ – вектор-функцію

$$\vec{f}(x, \vec{y}) = (f_1(x, \vec{y}), \ldots, f_n(x, \vec{y})).$$

Тоді систему (4.2) можна записати у вигляді (векторного) рівняння

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}), \tag{6.2}$$

а початкові умови (5.2) у вигляді

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{\,0}, \tag{7.2}$$

де $\vec{y}^{\,0} = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$.

Для геометричної інтерпретації системи (4.2) в системі координат $Ox, y_1, \ldots, y_n$ у кожній точці $(x, y_1, \ldots, y_n) \in G$ побудуємо вектор $(1, f_1(x, \vec{y}), \ldots, f_n(x, \vec{y}))$. Сукупність усіх цих векторів назвемо полем напрямків (або векторним полем) системи (4.2). Зауважимо, що векторне поле системи (4.2) не має напрямків, перпендикулярних до осі Ox.

Криву, яка у кожній своїй точці дотикається до поля напрямків системи (4.2) будемо називати інтегральною кривою цієї системи. Отже, розв'язати систему (4.2) геометрично означає побудувати всі її інтегральні криві. Легко бачити, що інтегральні криві системи (4.2) є гладкими і графік розв'язку системи (4.2) є її інтегральною кривою.

Геометрична інтерпретація задачі Коші (4.2), (5.2) полягає в наступному: побудувати інтегральну криву системи (4.2), яка проходить через задану точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ області G.

Як ми бачили вище у випадку $n = 1$, однією з достатніх умов єдиності розв'язку задачі Коші є умова Ліпшиця.

Означення 3.2. *Будемо говорити, що функція $g(x, y_1, \ldots, y_n)$ задовольняє в області G умову Ліпшиця за змінними $y_1, \ldots, y_n$, якщо для довільних двох точок $(x, y_1^1, \ldots, y_n^1)$, $(x, y_1^2, \ldots, y_n^2) \in G$ виконується нерівність*

$$|g(x, y_1^1, \ldots, y_n^1) - g(x, y_1^2, \ldots, y_n^2)| \le L \sum_{i=1}^{n} |y_i^1 - y_i^2|,$$

де L – невід'ємна стала (стала Ліпшиця).

Множину всіх функцій $g(x, y_1, \ldots, y_n)$, які задовольняють умову Ліпшиця в області G за змінними $y_1, \ldots, y_n$, позначатимемо як і раніше $\mathrm{Lip}_{\vec{y}}(G)$, а множину тих функцій $g(x, y_1, \ldots, y_n)$, які задовольняють умову Ліпшиця в області G за змінними $y_1, \ldots, y_n$ зі сталою L, – через $\mathrm{Lip}_{\vec{y}}(G, L)$.

Лема 1.2. *Нехай* $f_i(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{Lip}_{\vec{y}}(G, L_i)$, $i = 1, \dots, n$. *Тоді для довільних точок* $(x, \vec{y}^{\,1})$, $(x, \vec{y}^{\,2}) \in G$ *справедлива нерівність*

$$|\vec{f}(x, \vec{y}^{\,1}) - \vec{f}(x, \vec{y}^{\,2})| \le K|\vec{y}^{\,1} - \vec{y}^{\,2}|, \tag{8.2}$$

де $K = n^{3/2} \max\{L_1, \dots, L_n\}$, *тобто вектор-функція* $\vec{f}(x, \vec{y})$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінною* $\vec{y}$ *в області* G *зі сталою* $K : \vec{f} \in \mathrm{Lip}_{\vec{y}}(G, K)$.

Доведення. Очевидно, що для довільних двох точок

$$(x, y_1^1, \dots, y_n^1), (x, y_1^2, \dots, y_n^2) \in G$$

справедливі нерівності

$$|f_i(x, y_1^1, \dots, y_n^1) - f_i(x, y_1^2, \dots, y_n^2)| \le L \sum_{j=1}^{n} |y_j^1 - y_j^2|, \tag{9.2}$$

де $L = \max\{L_1, \dots, L_n\}$, $\quad i = 1, \dots, n$. Піднесемо обидві частини нерівностей (9.2) до квадрату і підсумуємо по i від 1 до n. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(x, \vec{y}^{\,1}) - f_i(x, \vec{y}^{\,2})|^2 \le L^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j^1 - y_j^2| \right)^2.$$

Оскільки

$$|y_j^1 - y_j^2| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j^1 - y_j^2|^2} = |\vec{y}^{\,1} - \vec{y}^{\,2}|,$$

то з останньої нерівності маємо

$$|\vec{f}(x, \vec{y}^{\,1}) - \vec{f}(x, \vec{y}^{\,2})| \le L n^{3/2} |\vec{y}^{\,1} - \vec{y}^{\,2}|,$$

що й потрібно було довести.

Наведемо ще одну допоміжну лему, яка буде використана для доведення існування розв'язку задачі Коші для нормальної системи. Нехай $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ – неперервна функція на проміжку $\langle a, b \rangle$. Покладемо

$$\int_{x_0}^{x} \vec{\varphi}(\xi)\, d\xi = \left(\int_{x_0}^{x} \varphi_1(\xi)\, d\xi, \dots, \int_{x_0}^{x} \varphi_n(\xi)\, d\xi \right).$$

Лема 2.2. *Якщо* $\vec{\varphi}(x) \in C(\langle a, b \rangle)$, *то справедлива оцінка*

$$\left| \int_{x_0}^{x} \vec{\varphi}(\xi)\, d\xi \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} |\vec{\varphi}(\xi)|\, d\xi \right|, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Доведення. Нехай

$$\vec{f}(x) = \int_{x_0}^{x} \vec{\varphi}(\xi)\, d\xi, \quad g(x) = \int_{x_0}^{x} |\vec{\varphi}(\xi)|\, d\xi, \;\; x > x_0.$$

Покажемо, що має місце нерівність $|\vec{f}(x)| \leq g(x)$. Якщо $\vec{f}(x) = 0$, то нерівність очевидна. Отже, нехай $\vec{f}(x) \neq 0$. Позначимо через $\vec{e}$ вектор $\dfrac{\vec{f}(x)}{|\vec{f}(x)|}$ і розглянемо функцію

$$\omega(t) = (\vec{f}(t), \vec{e}) - g(t), \quad t \in [x_0, x].$$

Її похідна

$$\omega'(t) = (\vec{f}\,'(t), \vec{e}) - g'(t) =$$
$$= (\vec{\varphi}(t), \vec{e}) - |\vec{\varphi}(t)| \leq |\vec{\varphi}(t)||\vec{e}| - |\vec{\varphi}(t)| = 0.$$

Отже, функція $\omega(t)$ незростаюча на $[x_0, x]$, тому

$$(\vec{f}(x), \vec{e}) - g(x) \leq (\vec{f}(x_0), \vec{e}) - g(x_0) = 0,$$

або

$$(\vec{f}(x), \vec{e}) \leq g(x).$$

З іншого боку,

$$\frac{(\vec{f}(x), \vec{e})}{|\vec{f}(x)|} = (\vec{e}, \vec{e}) = 1.$$

Тому

$$|\vec{f}(x)| = (\vec{f}(x), \vec{e}) \leq g(x),$$

що й потрібно було довести.

§ 2.2. Теореми існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків задачі Коші від початкових даних для нормальної системи

Аналогічно як і у випадку одного рівняння ($n = 1$) легко довести, що задача Коші (4.2), (5.2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))\, d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = y_n^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))\, d\xi. \end{cases} \tag{10.2}$$

Іншими словами кожний розв'язок $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ задачі Коші (4.2), (5.2) є розв'язком системи (10.2) і навпаки, кожний розв'язок $(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$ системи (10.2), де $\psi_i(x) \in C(\langle a, b\rangle)$, $i = 1, \ldots, n$, є розв'язком задачі Коші (4.2), (5.2). Якщо ввести вектор

$$\int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi))\, d\xi = \left(\int\limits_{x_0}^{x} f_1(\xi, \vec{y}(\xi))\, d\xi, \ldots, \int\limits_{x_0}^{x} f_n(\xi, \vec{y}(\xi))\, d\xi\right),$$

то систему (10.2) можна записати у вигляді векторного інтегрального рівняння

$$\vec{y}(x) = \vec{y}^{\,0} + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi))\, d\xi. \tag{11.2}$$

Зауважимо, що і у випадку нормальної системи (4.2) справедлива теорема.

Теорема 1.2 (Пеано, локальна). *Якщо* $f_i(x,\vec{y}) \in C(\Pi)$, $i = 1,\dots,n$, *де*

$$\Pi = \{(x,\vec{y}): \ |x - x_0| \le a, \ |\vec{y} - \vec{y}^{\,0}| \le b\},$$

то існує розв'язок $\vec{\varphi}(x)$ *задачі Коші (4.2), (5.2), визначений на відрізку* $[x_0 - h, x_0 + h]$,

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \qquad M = \sup_{\Pi} |\vec{f}(x,\vec{y})|.$$

Доведення цієї теореми проводиться повністю аналогічно як і у випадку $n = 1$.

Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ – розв'язок системи (4.2), визначений на проміжку $\langle a, b\rangle$, а $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ – розв'язок системи (4.2), визначений на проміжку $\langle a_1, b_1\rangle$. Якщо $a = a_1$, $b_1 > b$ і $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{\psi}(x)$, коли $x \in \langle a, b\rangle$, то будемо говорити, що розв'язок $\vec{\psi}(x)$ є продовженням розв'язку $\vec{\varphi}(x)$ вправо; якщо $a > a_1$, $b_1 = b$ і $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{\psi}(x)$, коли $x \in \langle a, b\rangle$, то розв'язок $\vec{\psi}(x)$ продовжує розв'язок $\vec{\varphi}(x)$ вліво. У тому випадку, коли не існує продовження розв'язку $\vec{\varphi}(x)$ ні вправо, ні вліво, будемо називати його непродовжуваним.

Справедлива теорема.

Теорема 2.2 (Пеано, глобальна). *Якщо* $\vec{f} \in C(G)$, *то для довільної точки* $(x_0, \vec{y}^{\,0}) \in G$ *існує непродовжуваний розв'язок задачі Коші (4.2), (5.2).*

Для доведення цієї теореми достатньо повторити всі ті міркування, які були використані при доведенні глобальної теореми Пеано у випадку $n = 1$.

Надалі для ілюстрації методу послідовних наближень буде доведено локальну теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші (4.2), (5.2).

Теорема 3.2 (Пікара, локальна). *Нехай* $f_i \in C(G) \cap \mathrm{Lip}_{\vec{y}}(G)$, $i = 1,\dots,n$. *Тоді для кожної точки* $(x_0, \vec{y}^{\,0}) \in G$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші (4.2), (5.2), визначений в деякому околі точки* x_0.

Доведення. Нехай $(x_0, \vec{y}^{\,0}) \in G$ – задані початкові умови і $d = \mathrm{dist}\,((x_0, \vec{y}^{\,0}), \partial G)$. Оскільки G – відкрита множина, то $d > 0$. Розглянемо замкнену обмежену множину

$$\Pi = \{(x,\vec{y}): \ |x - x_0| \le a, \ |\vec{y} - \vec{y}^{\,0}| \le a\},$$

де $a = \dfrac{d - d_0}{\sqrt{2}}$, якщо $d < \infty$, і a – довільне фіксоване, якщо $d = \infty$. Тут d_0 $(0 < d_0 < d)$ – яке-небудь задане число. Очевидно, $\Pi \subset G$. Тому за теоремою Вейєрштраса

$$\sup_{\Pi} |\vec{f}(x,\vec{y})| = M < \infty.$$

Для доведення теореми достатньо показати, що векторне інтегральне рівняння (11.2) має єдиний розв'язок. Для цього побудуємо послідовність функцій

$$\vec{\varphi}^{\,0}(x) \equiv \vec{y}^{\,0},$$

$$\vec{\varphi}^{\,m+1}(x) = \vec{y}^{\,0} + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^{\,m}(\xi))\, d\xi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{12.2}$$

Легко бачити, що кожний елемент послідовності функцій $\{\vec{\varphi}^{\,m}(x)\}$ визначений і неперервний у деякому околі точки x_0. Знайдемо відрізок, на якому визначені всі функції послідовності (12.2). Цей відрізок, очевидно, повинен бути таким, щоб графіки функцій $\vec{\varphi}^m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, перетинали основи циліндра

$$\Pi_h = \{(x, \vec{y});\ |x - x_0| \le h,\ |\vec{y} - \vec{y}^0| \le a\},\ h \le a,$$

а це можливо тоді, коли

$$|\vec{\varphi}^m(x) - \vec{y}^0| \le a,\ \ m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13.2}$$

для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Оскільки функція $\vec{\varphi}^0(x)$ цю умову задовольняє, то розглянемо $m = 1, 2, \ldots$. Маємо (на підставі леми 2.2):

$$|\vec{\varphi}^{m+1}(x) - \vec{y}^0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^m(\xi))\, d\xi\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^m(\xi))|\, d\xi\right| \le M\left|\int\limits_{x_0}^{x} d\xi\right| \le M|x - x_0| \le Mh. \tag{14.2}$$

Отже, умова (13.2) виконується, якщо $h = \min\left\{a; \dfrac{a}{M}\right\}$. Зауважимо, що при такому виборі h точка $(x, \vec{\varphi}^m(x))$ належить Π для всіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Тому оцінка (14.2) є коректною. Тепер покажемо, що послідовність $\{\vec{\varphi}^m(x)\}$ є рівномірно збіжною на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$. Для цього розглянемо функціональний (векторний) ряд

$$\vec{\varphi}^0(x) + (\vec{\varphi}^1(x) - \vec{\varphi}^0(x)) + \cdots + (\vec{\varphi}^{m+1}(x) - \vec{\varphi}^m(x)) + \ldots. \tag{15.2}$$

Легко бачити, що частинні суми $\vec{S}_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, ряду (15.2) збігаються з функціями $\vec{\varphi}^{m+1}(x)$. Тому достатньо довести рівномірну збіжність ряду (15.2). Для цього оцінимо кожний член даного ряду. Використаємо метод математичної індукції. Матимемо:

$$|\vec{\varphi}^0(x)| \equiv |\vec{y}^0|,$$

$$|\vec{\varphi}^1(x) - \vec{\varphi}^0(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^0(\xi))\, d\xi\right| \le Mh \le a;$$

$$|\vec{\varphi}^2(x) - \vec{\varphi}^1(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} [\vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^1(\xi)) - \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^0(\xi))]\, d\xi\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^1(\xi)) - \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^0(\xi))|\, d\xi\right|.$$

Оскільки $f_i \in \mathrm{Lip}_{\vec{y}}(G)$, $\quad i = 1, \ldots, n$, то на підставі леми 1.2

$$|\vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^1(\xi)) - \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^0(\xi))| \le K|\vec{\varphi}^1(\xi) - \vec{\varphi}^0(\xi)|.$$

Тому

$$|\vec{\varphi}^2(x) - \vec{\varphi}^1(x)| \le K\left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{\varphi}^1(\xi) - \vec{\varphi}^0(\xi)|\, d\xi\right| \le \frac{Ka|x-x_0|}{1!}.$$

Припустимо тепер, що має місце оцінка

$$|\vec{\varphi}^{m+1}(x) - \vec{\varphi}^m(x)| \le \frac{K^m a|x-x_0|^m}{m!}, \tag{16.2}$$

і доведемо, що тоді

$$|\vec{\varphi}^{m+2}(x) - \vec{\varphi}^{m+1}(x)| \le \frac{K^{m+1} a|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{17.2}$$

Справді,

$$|\vec{\varphi}^{m+2}(x) - \vec{\varphi}^{m+1}(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} [\vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^{m+1}(\xi)) - \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^m(\xi))]\, d\xi\right| \le$$

$$\le K\left|\int\limits_{x_0}^{x} |\vec{\varphi}^{m+1}(\xi) - \vec{\varphi}^m(\xi)|\, d\xi\right|.$$

Тоді, враховуючи оцінку (16.2), маємо:

$$|\vec{\varphi}^{m+2}(x) - \vec{\varphi}^{m+1}(x)| \le \frac{K^{m+1}a}{m!}\left|\int\limits_{x_0}^{x} |\xi - x_0|^m d\xi\right| =$$

$$= \frac{K^{m+1} a|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!},$$

тобто отримаємо оцінку (17.2).

Отже, ми побудували для функціонального ряду (15.2) мажорантний ряд (оскільки $|x - x_0| \le h$)

$$|\vec{y}^0| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m h^m a}{m!}. \tag{18.2}$$

Легко бачити, що мажорантний ряд (18.2) збігається і його сума не перевищує числа ae^{Kh}. На підставі ознаки Вейєрштраса ряд (15.2) збігається рівномірно на $[x_0 - h, x_0 + h]$ до деякої неперервної функції $\vec{\varphi}(x)$. Отже, послідовність (12.2) рівномірно збігається до $\vec{\varphi}(x)$ на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$. Тому, враховуючи рівномірну неперервність функції $\vec{f}(x, \vec{y})$ на Π_h (з рівномірної неперервності $\vec{f}(x, \vec{y})$ на Π_h і рівномірної збіжності $\{\vec{\varphi}^m(x)\}$ на $[x_0 - h, x_0 + h]$ випливає рівномірна збіжність $\{\vec{f}(x, \vec{\varphi}^m(x)\}$ на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$), для кожного фіксованого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^m(\xi))\, d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} \lim_{m\to\infty} \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}^m(\xi))\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}(\xi))\, d\xi.$$

Таким чином, якщо в рівності (12.2) перейти до границі, коли $m \to \infty$, то отримаємо

$$\vec{\varphi}(x) = \vec{y}^0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(\xi, \vec{\varphi}(\xi))\, d\xi$$

для всіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, тобто функція $\vec{\varphi}(x)$ є розв'язком рівняння (11.2). Цим самим ми довели існування розв'язку задачі Коші (4.2), (5.2). Доведення єдиності розв'язку цієї задачі проводиться повністю аналогічно як і у випадку $n = 1$.

Зауваження 1.2. *Звернемо увагу на те, що розв'язок задачі Коші (4.2), (5.2) отримується як границя послідовності функцій (12.2). Тому цей метод, метод послідовних наближень, може бути використаний для наближеного розв'язування задачі Коші.*

Приклад 1.2. Знайти третє послідовне наближення до розв'язку задачі Коші ($n = 1$)

$$y' = x - y^2, \quad y(0) = 0, \tag{19.2}$$

розглядаючи рівняння в квадраті

$$G = \{(x, y) :\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

На якому проміжку теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень?

Для розв'язування цієї задачі спочатку потрібно знайти $\sup\limits_G |f(x, y)|$ і сталу Ліпшиця для функції $f(x, y) = x - y^2$ в G. Оскільки $f(x, y)$ і її похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$ є неперервними в G, то

$$\sup_G |f(x, y)| = \sup_G |x - y^2| = 2, \quad L = \sup_G \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \sup_G |2y| = 2,$$

і згідно з теоремою Пікара розв'язок задачі Коші (19.2) визначений на проміжку $[-h, h]$, де

$$h = \min\left\{a, \frac{a}{M}\right\} = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, пікаровські наближення збігаються до розв'язку задачі Коші (19.2) принаймні на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Наближення обчислюються за формулою

$$\varphi_{m+1}(x) = \int\limits_0^x (\xi - \varphi_m^2(\xi))\, d\xi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad \varphi_0(x) = 0.$$

Маємо:

$$\varphi_1(x) = \int\limits_0^x (\xi - 0)\, d\xi = \frac{x^2}{2};$$

$$\varphi_2(x) = \int\limits_0^x \left(\xi - \frac{\xi^4}{4}\right) d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20};$$

$$\varphi_3(x) = \int\limits_0^x \left(\xi - \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^5}{20}\right)^2\right) d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Означення 4.2. *Сукупність функцій*

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n), \end{cases}$$

які залежать від змінної x і параметрів (сталих) $C_1, \ldots, C_n$, називається загальним розв'язком системи (4.2), якщо кожний розв'язок цієї системи може бути записаний у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1^0, \ldots, C_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1^0, \ldots, C_n^0), \end{cases}$$

де $C_1^0, \ldots, C_n^0$ – деякі фіксовані значення параметрів $C_1, \ldots, C_n$.

Зазначимо, що як і у випадку $n = 1$ можна довести локальну теорему існування загального розв'язку нормальної системи (4.2).

Зупинимося тепер на умовах неперервної залежності розв'язку задачі Коші від початкових даних. Для цього розглянемо задачу Коші для системи (4.2) з початковими умовами

$$\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}, \tag{20.2}$$

де $(\xi, \vec{\eta}) \in G$. Як і у випадку $n = 1$ зведемо цю задачу до дослідження неперервної залежності розв'язків від параметрів. Для цього зробимо заміну $(x, \vec{y}) \to (t, \vec{z})$ в задачі (4.2), (20.2): $x = t + \xi - t_0, \qquad \vec{y} = \vec{z} + \vec{\eta} - \vec{z}^0$. Тоді отримаємо задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{z}}{dt} = \vec{f}(t + \xi - t_0, \vec{z} + \vec{\eta} - \vec{z}^0) \equiv \vec{g}(t, \vec{z}, \xi, \vec{\eta}), \\ \vec{z}(t_0) = \vec{z}^0. \end{cases} \tag{21.2}$$

Позначимо через $\vec{z} = \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})$ непродовжуваний розв'язок задачі (21.2). Справедлива теорема.

Теорема 4.2 (про неперервну залажність розв'язків від параметрів). *Нехай функції $g_i(t, \vec{z}, \xi, \vec{\eta})$, $i = 1, \ldots, n$, неперервні в області $\tilde{G}$ простору змінних $t, \vec{z}, \xi, \vec{\eta}$ і задовольняють умову Ліпшиця за змінною $\vec{z}$ на довільній замкненій обмеженій множині, яка міститься в $\tilde{G}$. Нехай $(t_0, \vec{z}^0, \xi_0, \vec{\eta}^0)$ – довільна точка області $\tilde{G}$ і $\vec{z} = \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})$ ($|\xi - \xi_0| < h$, $|\vec{\eta} - \vec{\eta}^0| < h$) – сім'я непродовжуваних розв'язків задачі Коші (21.2). Нехай розв'язок $\vec{z} = \vec{\psi}(t, \xi_0, \vec{\eta}^0)$ визначений на проміжку $\langle a, b\rangle$ і $[a_0, b_0]$ – довільний відрізок такий, що $[a_0, b_0] \subset \langle a, b\rangle$*

Тоді існує таке $\sigma > 0$, що для всіх $|\xi - \xi_0| < \sigma$, $|\vec{\eta} - \vec{\eta}^0| < \sigma$ розв'язки $\vec{z} = \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})$ визначені на відрізку $[a_0, b_0]$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке δ $(0 < \delta < \sigma)$, що при $|\xi - \xi_0| < \delta$, $|\vec{\eta} - \vec{\eta}^0| < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$|\vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta}) - \vec{\psi}(t, \xi_0, \vec{\eta}^0)| < \varepsilon$$

для всіх $t \in [a_0, b_0]$, тобто функція $\vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})$ є неперервною за змінними $\xi, \vec{\eta}$ у точці $(\xi_0, \vec{\eta}^0)$, причому рівномірно стосовно $t \in [a_0, b_0]$.

Доведення даної теореми проводиться повністю аналогічно до доведення відповідної теореми у випадку $n = 1$.

Враховуючи вигляд функції $\vec{g}(t, \vec{z}, \xi, \vec{\eta})$ у задачі (21.2), отримаємо наступну теорему.

Теорема 5.2 (про неперервну залажність розв'язків від початкових даних). *Нехай $f_i(x,\vec{y}) \in C(G) \cap \mathrm{Lip}_{\vec{y}}(G, L_i)$, $i = 1,\ldots,n$; $(\xi_0, \vec{\eta}^0)$ – довільна точка області G; $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\xi,\vec{\eta})$ – сім'я непродовжуваних розв'язків системи (4.2), яка задовольняє початкові умови $\vec{\varphi}(\xi,\xi,\vec{\eta}) = \vec{\eta}$; для $\xi = \xi_0$ і $\vec{\eta} = \vec{\eta}^0$ розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\xi_0,\vec{\eta}^0)$ визначений на інтервалі $a_1 < x < b_1$ і $[a,b]$ – довільний відрізок з інтервалу (a_1,b_1), який містить точку ξ_0.*

Тоді існує таке $\sigma > 0$, що для всіх $|\xi - \xi_0| < \sigma$, $|\vec{\eta} - \vec{\eta}^0| < \sigma$ розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\xi,\vec{\eta})$ визначений на відрізку $[a,b]$ і є неперервною функцією за змінними $\xi, \vec{\eta}$ у точці $(\xi_0, \vec{\eta}^0)$, причому рівномірно стосовно $x \in [a,b]$, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, $0 < \delta < \sigma$, таке, що при $|\xi - \xi_0| < \delta$, $|\vec{\eta} - \vec{\eta}^0| < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$|\vec{\varphi}(x,\xi,\vec{\eta}) - \vec{\varphi}(x,\xi_0,\vec{\eta}^0)| < \varepsilon$$

для всіх $x \in [a,b]$.

Доведення даної теореми проводиться повністю аналогічно до доведення відповідної теореми у випадку $n = 1$.

§ 3.2. Диференційовність розв'язків за початковими даними

Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x,\xi,\vec{\eta})$ – непродовжуваний розв'язок задачі Коші (4.2), (20.2). У попередньому параграфі було встановлено умови, при яких $\vec{\varphi}(x,\xi,\vec{\eta})$ є неперервною функцією аргументів ξ і $\vec{\eta}$. У багатьох випадках при дослідженні нормальних систем потрібно мати можливість диференціювати розв'язок $\vec{\varphi}(x,\xi,\vec{\eta})$ за початковими даними ξ і $\vec{\eta}$. Метою даного параграфу є встановлення умов, при яких диференціювання є можливим. Надалі буде потрібна лема.

Лема 3.2 (Адамар). *Нехай вектор-функція*

$$\vec{\omega}(\vec{y}) = (\omega_1(\vec{y}),\ldots,\omega_m(\vec{y}))$$

є неперервно диференційовною за всіма своїми змінними на відкритій опуклій множині $B \subset \mathbb{R}^n$. Тоді для довільних двох точок $\vec{y}^1, \vec{y}^2 \in B$ існує така прямокутна матриця

$$F(\vec{y}^1,\vec{y}^2) = (f_{ij}(\vec{y}^1,\vec{y}^2)) \quad (i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n),$$

що

$$\vec{\omega}(\vec{y}^1) - \vec{\omega}(\vec{y}^2) = F(\vec{y}^1,\vec{y}^2)(\vec{y}^1 - \vec{y}^2), \tag{32.2}$$

причому елементи матриці $F(\vec{y}^1,\vec{y}^2)$ неперервні і

$$F(\vec{y},\vec{y}) = \left(\frac{\partial \omega_j(\vec{y})}{\partial y_i}\right).$$

Доведення. Рівняння відрізка прямої, яка з'єднує точки $\vec{y}^1$ і $\vec{y}^2$, можна записати у вигляді

$$\vec{\eta} = \vec{y}^2 + t(\vec{y}^1 - \vec{y}^2), \quad t \in [0,1].$$

Розглянемо функції

$$\psi_i(t) = \omega_i(\vec{\eta}) = \omega_i(\vec{y}^2 + t(\vec{y}^1 - \vec{y}^2)), \ i = 1,\ldots,m.$$

На підставі опуклості B ці функції визначені на $[0,1]$. Різниця $\omega_i(\vec{y}^1)-\omega_i(\vec{y}^2)$ може бути зображена у вигляді:

$$\omega_i(\vec{y}^1)-\omega_i(\vec{y}^2)=\psi_i(1)-\psi_i(0)=\int\limits_0^1 \frac{d\psi_i(t)}{dt}dt=$$

$$=\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\omega_i(\vec{y}^2+t(\vec{y}^1-\vec{y}^2))}{\partial y_j}\frac{d\eta_j}{dt}dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\int\limits_0^1 \frac{\partial\omega_i(\vec{y}^2+t(\vec{y}^1-\vec{y}^2))}{\partial y_j}dt\right](y_j^1-y_j^2).$$

Введемо позначення

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial\omega_i(\vec{y}^2+t(\vec{y}^1-\vec{y}^2))}{\partial y_j}dt=f_{ij}(\vec{y}^1,\vec{y}^2),\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$$

Тоді отримаємо

$$\omega_i(\vec{y}^1)-\omega_i(\vec{y}^2)=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\vec{y}^1,\vec{y}^2)(y_j^1-y_j^2)$$

або в матричній формі

$$\vec{\omega}(\vec{y}^1)-\vec{\omega}(\vec{y}^2)=F(\vec{y}^1,\vec{y}^2)(\vec{y}^1-\vec{y}^2), \tag{23.2}$$

де

$$F(\vec{y}^1,\vec{y}^2)=(f_{ij}(\vec{y}^1,\vec{y}^2)).$$

На підставі рівності (23.2)

$$F(\vec{y},\vec{y})=(f_{ij}(\vec{y},\vec{y}))=\left(\frac{\partial\omega_i(\vec{y})}{\partial y_j}\right).$$

Очевидно, $f_{ij}(\vec{y}^1,\vec{y}^2)$ – неперервні функції. Лему доведено.

Лема 4.2. *Нехай*

$$g(x,y_1,\ldots,y_n),\ \frac{\partial g(x,y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_i}\in C(G),\ \ G\subset\mathbb{R}^{n+1},\ i=1,\ldots,n.$$

Тоді на довільній обмеженій підмножині $B(\overline{B}\subset G)$ функція $g(x,y_1,\ldots,y_n)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінними $y_1,\ldots,y_n$.

Доведення цієї леми проводиться повністю аналогічно до доведення леми 2.1.

Розглянемо задачу Коші (21.2). Нехай $\vec{z}=\vec{\psi}(t,\xi,\vec{\eta})$ – непродовжуваний розв'язок цієї задачі.

Теорема 6.2 (про диференційовність розв'язків за параметрами). *Нехай* $g_i(t,\vec{z},\xi,\vec{\eta})$, $\dfrac{\partial g_i(t,\vec{z},\xi,\vec{\eta})}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial g_i(t,\vec{z},\xi,\vec{\eta})}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial g_i(t,\vec{z},\xi,\vec{\eta})}{\partial \eta_j}$, $j,i=1,\ldots,n$, *– неперервні в області* $\tilde{G}\subset\mathbb{R}^{2n+2}$; $\vec{\psi}(t,\xi,\vec{\eta})$ *– непродовжуваний розв'язок задачі Коші (21.2), визначений на множині*

$$B=\{(t,\xi,\vec{\eta}):\ t\in[a,b],\ |\xi-\xi_0|<\sigma,\ |\vec{\eta}-\vec{\eta}^0|<\sigma\},$$

причому $t_0\in[a,b]$. *Тоді* $\dfrac{\partial\psi_i(t,\xi,\vec{\eta})}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial\psi_i(t,\xi,\vec{\eta})}{\partial\eta_j}$, $j,i=1,\ldots,n$, *– неперервні для* $(t,\xi,\vec{\eta})\in B$.

Доведення. З неперервності похідних $\dfrac{\partial g_i(t,\vec{z},\xi,\vec{\eta})}{\partial z_j}$, $j,i=1,\ldots,n$, випливає виконання умови Ліпшиця на довільній обмеженій замкненій множині $A\subset\tilde{G}$ (лема 4.2). Нехай θ_m – довільне число з інтервалу $|\eta_m-\eta_m^0|<\sigma$, а δ – таке, що $(\theta_m-\delta,\theta_m+\delta)$ міститься в $|\eta_m-\eta_m^0|<\sigma$. Нехай $|\Delta\theta_m|<\delta$. Позначимо:

$$\vec{\rho}(t,\theta_m)=\vec{\psi}(t,\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{m-1},\theta_m,\eta_{m+1},\ldots,\eta_n),\ \ 1\le m\le n,$$
$$\vec{h}(t,\vec{z},\theta_m)=\vec{g}(t,\vec{z},\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{m-1},\theta_m,\eta_{m+1},\ldots,\eta_n).$$

Тоді

$$\frac{d\vec{\rho}(t,\theta_m)}{dt}=\vec{h}(t,\vec{\rho}(t,\theta_m),\theta_m),\ \ t\in[a,b],$$
$$\frac{d\vec{\rho}(t,\theta_m+\Delta\theta_m)}{dt}=\vec{h}(t,\vec{\rho}(t,\theta_m+\Delta\theta_m),\theta_m+\Delta\theta_m),\ \ t\in[a,b].$$

Віднімаючи від другої рівності першу, отримаємо

$$\frac{d}{dt}[\vec{\rho}(t,\theta_m+\Delta\theta_m)-\vec{\rho}(t,\theta_m)]=$$
$$=\vec{h}(t,\vec{\rho}(t,\theta_m+\Delta\theta_m),\theta_m+\Delta\theta_m)-\vec{h}(t,\vec{\rho}(t,\theta_m),\theta_m).\tag{23.2}$$

На підставі леми Адамара

$$\vec{h}(t,\vec{\rho}(t,\theta_m+\Delta\theta_m),\theta_m+\Delta\theta_m)-\vec{h}(t,\vec{\rho}(t,\theta_m),\theta_m)=\tag{24.2}$$
$$=F(t,\theta_m,\Delta\theta_m)[\vec{\rho}(t,\theta_m+\Delta\theta_m)-\vec{\rho}(t,\theta_m)]+\vec{P}(t,\theta_m,\Delta\theta_m)\Delta\theta_m,$$

де

$$F(t,\theta_m,\Delta\theta_m)=(F_{ij}(t,\theta_m,\Delta\theta_m))\quad -$$

квадратна матриця, а

$$\vec{P}(t,\theta_m,\Delta\theta_m)=(P_1(t,\theta_m,\Delta\theta_m),\ldots,P_n(t,\theta_m,\Delta\theta_m)).$$

Очевидно, F_{ij} і P_i – неперервні функції. Ввівши позначення

$$\Delta\vec{\rho}=\vec{\rho}(t,\theta_m+\Delta\theta_m)-\vec{\rho}(t,\theta_m)$$

і використовуючи рівність (24.2), запишемо рівність (23.2) у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\Delta\vec{\rho}) = F(t,\theta_m,\Delta\theta_m)\Delta\vec{\rho} + \vec{P}(t,\theta_m,\Delta\theta_m)\Delta\theta_m, \ \ t \in [a,b]. \tag{25.2}$$

При $\Delta\theta_m \neq 0$ співвідношення (25.2) можна переписати так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta\theta_m}\right) = F(t,\theta_m,\Delta\theta_m)\frac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta\theta_m} + \vec{P}(t,\theta_m,\Delta\theta_m), \ \ t \in [a,b]. \tag{26.2}$$

Рівність (26.2) показує, що при $\Delta\theta_m \neq 0$ функція $\dfrac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta\theta_m}$ є розв'язком нормальної системи

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = F(t,\theta_m,\Delta\theta_m)\vec{u} + \vec{P}(t,\theta_m,\Delta\theta_m).$$

Нехай $\vec{u} = \vec{\omega}(t,\theta_m,\Delta\theta_m)$ – розв'язок цієї системи рівнянь, який задовольняє початкову умову $\vec{\omega}(t_0,\theta_m,\Delta\theta_m) = 0$.

Зазначимо (поки що без обґрунтування), що розв'язок $\vec{\omega}(t,\theta_m,\Delta\theta_m)$ для всіх $|\Delta\theta_m| < \delta$ визначений на відрізку $[a,b]$. На підставі теореми 4.2 (про неперервну залежність розв'язків від параметрів) функція $\vec{\omega}(t,\theta_m,\Delta\theta_m)$ є неперервною при

$$t \in [a,b], \ \eta_m^0 - \sigma < \theta_m < \eta_m^0 + \sigma, \ |\Delta\theta_m| < \delta.$$

Оскільки

$$\left.\frac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta\theta_m}\right|_{t=t_0} = \frac{\vec{\rho}(t_0,\theta_m+\Delta\theta_m) - \vec{\rho}(t_0,\theta_m)}{\Delta\theta_m} = \frac{\vec{z}^0 - \vec{z}^0}{\Delta\theta_m} = 0,$$

то на підставі єдиності розв'язку задачі Коші для системи (26.2)

$$\frac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta\theta_m} = \vec{\omega}(t,\theta_m,\Delta\theta_m).$$

Перейшовши у цій рівності до границі при $\Delta\theta_m \to 0$, отримаємо

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\eta_m} = \lim_{\Delta\theta_m\to 0}\frac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta\theta_m} = \lim_{\Delta\theta_m\to 0}\vec{\omega}(t,\theta_m,\Delta\theta_m) = \vec{\omega}(t,\theta_m,0).$$

Таким чином, похідна

$$\frac{\partial\vec{\psi}(t,\xi,\vec{\eta})}{\partial\eta_m} = \frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\eta_m}$$

існує і неперервна при $t \in [a,b]$, $|\xi - \xi_0| < \sigma$, $|\vec{\eta} - \vec{\eta}^0| < \sigma$, оскільки функція $\vec{\omega}(t,\theta_m,0)$ є неперервною на цій множині. Аналогічно доводиться існування і неперервність похідної $\dfrac{\partial\vec{\psi}(t,\xi,\vec{\eta})}{\partial\xi}$. З огляду на те, що $m(1 \leq m \leq n)$ довільне, теорему доведено.

Зауваження 2.2. *Нехай $\vec{z} = \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})$ – непродовжуваний розв'язок задачі (21.2). Зафіксуємо деяке значення параметра $\eta_m = \eta_m^0$, $1 \leq m \leq n$. Покажемо, що $\dfrac{\partial \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}$ можна знайти, розв'язавши задачу Коші для деякої нормальної системи диференціальних рівнянь. Справді, диференціюючи тотожність*

$$\frac{d\vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})}{dt} = \vec{g}(t, \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta}), \xi, \vec{\eta})$$

за змінною η_m і покладаючи $\eta_m = \eta_m^0$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}\right)\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{g}(t, \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta}), \xi, \vec{\eta})}{\partial z_j} \frac{\partial \psi_j(t, \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0} +$$

$$+ \frac{\partial \vec{g}(t, \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta}), \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0},$$

звідки випливає, що похідна $\dfrac{\partial \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0}$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A(t)\vec{u} + \vec{b}(t), \tag{27.2}$$

де

$$A(t) = \left(\frac{\partial g_i(t, \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta}), \xi, \vec{\eta})}{\partial z_j}\right)\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0},$$

$$\vec{b}(t) = \frac{\partial \vec{g}(t, \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta}), \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0}.$$

Крім того, оскільки $\vec{\psi}(t_0, \xi, \vec{\eta}) = \vec{z}^0$, то

$$\frac{\partial \vec{\psi}(t_0, \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0} = \frac{\partial \vec{z}^0}{\partial \eta_m} = 0.$$

Отже, для знаходження $\dfrac{\partial \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})}{\partial \eta_m}\Bigg|_{\eta_m = \eta_m^0}$ потрібно розв'язати задачу Коші для системи (27.2) з початковою умовою $\vec{u}(t_0) = 0$.

Система диференціальних рівнянь (27.2) називається системою у варіаціях для нормальної системи

$$\vec{z}' = \vec{g}(t, \vec{z}, \xi, \vec{\eta})$$

при $\eta_m = \eta_m^0$. Аналогічну систему у варіаціях можна отримати і для функції $\dfrac{\partial \vec{\psi}(t, \xi, \vec{\eta})}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi = \xi_0}$.

Приклад 2.2. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\Bigg|_{\mu = 0}$ в задачі

$$y' = y^2 + 2\mu x^{-1}, \quad y(1) = -1. \tag{28.2}$$

Нехай $y = \varphi(x, \mu)$ – розв'язок задачі (28.2). Тоді

$$\frac{d\varphi(x,\mu)}{dx} = \varphi^2(x,\mu) + 2\mu x^{-1}$$

і $\varphi(1,\mu) = -1$. Здиференціюємо ці тотожності за μ, покладемо $\mu = 0$ і позначимо $z = \left.\frac{\partial \varphi(x,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$. Отримаємо:

$$z' = 2\varphi(x,0)z + 2x^{-1}, \quad z|_{x=1} = 0.$$

Функцію $\varphi(x,0)$ знайдемо як розв'язок задачі (28.2) при $\mu = 0$:

$$y' = y^2, \quad y(1) = -1.$$

Будемо мати:

$$y = \frac{1}{C-x}; \quad y(1) = \frac{1}{C-1} = -1; \quad C = 0.$$

Отже, $\varphi(x,0) = -\frac{1}{x}$ і для знаходження z маємо задачу Коші

$$z' = \frac{2(1-z)}{x}, \quad z(1) = 0.$$

Розв'язавши цю задачу, отримаємо

$$z = \left.\frac{\partial \varphi(x,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Користуючись виглядом функції $\vec{g}(t, \vec{z}, \xi, \vec{\eta})$ і на підставі попередньої теореми, можемо сформулювати теорему про диференційовність розв'язків за початковими даними.

Теорема 7.2. *Нехай функції* $f_i(x, \vec{y})$, $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial y_j}$, $j, i = 1, \ldots, n$, *неперервні в області* G; $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \xi, \vec{\eta})$ *– розв'язок системи (4.2), який задовольняє початкову умову* $\vec{\varphi}(\xi, \xi, \vec{\eta}) = \vec{\eta}$ *і визначений при* $x \in [a,b]$, $|\xi - \xi_0| < \sigma$, $|\vec{\eta} - \vec{\eta}^0| < \sigma$. *Тоді* $\frac{\partial \varphi_i(x,\vec{\eta})}{\partial \eta_j}$, $j, i = 1, \ldots, n$, *неперервні при тих самих значеннях* $(x, \xi, \vec{\eta})$.

Якщо, крім того, $\frac{\partial f_i(x,\vec{y})}{\partial x}$, $i = 1, \ldots, n$, *теж неперервні в* G, *то неперервними будуть і функції* $\frac{\partial \varphi_i(x,\vec{\eta})}{\partial \xi}$, $i = 1, \ldots, n$.

ГЛАВА 3. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

§ 1.3. Основні поняття звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків. Зведення до нормальної системи. Коректність задачі Коші

Означення 1.3. *Звичайним диференціальним рівнянням n–го порядку* $(n > 1)$, *розв'язаним стосовно старшої похідної називається співвідношення вигляду*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

між незалежною змінною x, невідомою функцією $y(x)$ та її похідними $y'(x), \dots, y^{(n)}$, де функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ визначена і неперервна за всіма своїми змінними в деякій області $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Означення 2.3. *Функція $y = \varphi(x)$, визначена на проміжку $\langle a, b\rangle$, називається розв'язком рівняння (1.3), якщо вона задовольняє умови:*

1) функція $\varphi(x)$ диференційовна n раз на проміжку $\langle a, b\rangle$;

2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in G$ для всіх $x \in \langle a, b\rangle$;

3) $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$ для всіх $x \in \langle a, b\rangle$.

Зауважимо, що оскільки $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ неперервна, то $\varphi^{(n)}(x) \in C^n(\langle a, b\rangle)$. Звернемо також увагу і на те, що рівняння вищих порядків виникають як математичні (динамічні) моделі реальних фізичних процесів.

Приклад 1.3. Нехай точка масою m рухається вздовж осі Ox під дією сили F, яка прагне повернути точку до стану рівноваги $x = 0$ і є пропорційною зміщенню точки від стану рівноваги: $F = -ax\ (a > 0)$. Тоді згідно з другим законом Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax,$$

або

$$x'' = -\frac{a}{m}x. \tag{2.3}$$

Таким чином, рух точки моделюється диференціальним рівнянням другого порядку. Для того, щоб однозначно описати цей рух, з фізичних міркувань потрібно задати відхилення точки від положення рівноваги у початковий момент часу t_0: $x(t_0) = x_0$, а також початкову швидкість точки у цей момент часу: $x'(t_0) = x_0^1$. Тобто повна модель задачі буде складатися з диференціального рівняння (2.3) і початкових умов

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_0^1. \tag{3.3}$$

Приклад 2.3. Складемо математичну модель руху маятника. Під маятником будемо розуміти точку P масою m, яка під дією сили тяжіння рухається по колу K радіуса l. Величину l назвемо довжиною маятника. На колі K введемо кутову координату, взявши за початок координат найнижчу точку O кола K (рис. 7). Змінну координату точки P позначимо через $\varphi = \varphi(t)$. Точка P перебуває під дією сили тяжіння $F = mg$, спрямованої вертикально вниз. Складова цієї сили, спрямована по нормалі до кола, зрівноважується завдяки реакції зв'язку (кола або нитки, яка змушує точку рухатися по колу); складова сили тяжіння, спрямована по дотичній до кола у точці P, дорівнює $-mg \sin \varphi$ (якщо за додатний напрямок на дотичній взяти рух проти годинникової стрілки).

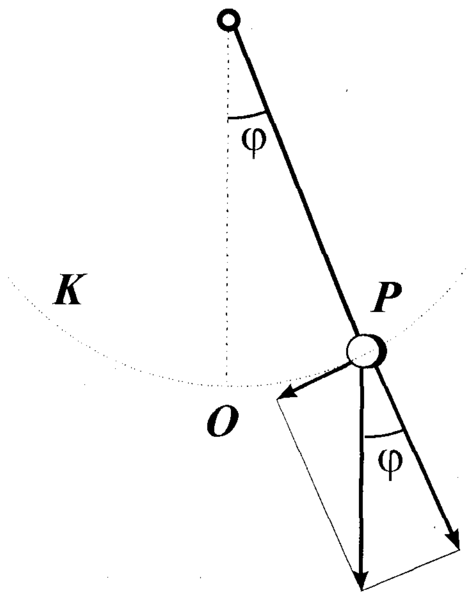


Рис. 8

Тоді рівняння руху точки P згідно з другим законом Ньютона має вигляд

$$ml\varphi'' = -mg \sin \varphi,$$

або

$$\varphi'' = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \tag{4.3}$$

Зауважимо, що для початку руху маятника його потрібно відхилити від стану рівноваги (з точки O) на деякий кут φ_0, тобто задати початкову умову $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Крім того, у цей момент часу $t = t_0$ ми надаємо маятникові початкової швидкості: $\varphi'(t_0) = \varphi_0^1$. Зокрема, якщо $\varphi_0^1 = 0$, то це означає, що відхиливши маятник з точки O на кут φ_0, ми його просто відпускаємо. Отже, і у цьому випадку математична модель руху маятника складається з диференціального рівняння (4.3) і початкових умов

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \qquad \varphi'(t_0) = \varphi_0^1. \tag{5.3}$$

Розглянемо ще один приклад найпростішого диференціального рівняння вищого порядку.

Приклад 3.3. Нехай маємо рівняння

$$y'' = \cos x.$$

Оскільки $y'' = (y')'$, то наше рівняння можна записати у вигляді

$$(y')' = \cos x$$

і y' знаходиться як первісна для функції $\cos x$:

$$y' = \sin x + C_1.$$

Отже,

$$y = -\cos x + C_1 x + C_2$$

і можна сподіватися, що сім'я розв'язків рівняння (1.3) буде описуватися функцією, яка залежить від n параметрів $C_1, \ldots, C_n$ (n – порядок рівняння (1.3)).

Означення 3.3. *Функція $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, яка залежить від змінної x і параметрів (сталих) $C_1, \dots, C_n$, називається загальним розв'язком рівняння (1.3), якщо довільний розв'язок цього рівняння міститься у загальному розв'язку у тому сенсі, що він зображається у вигляді $y = \varphi(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ при деяких фіксованих значеннях $C_1^0, \dots, C_n^0$ параметрів $C_1, \dots, C_n$.*

Для того, щоб сформулювати умови існування та єдиності розв'язку для рівняння (1.3), зведемо це рівняння до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Лема 1.3. *Рівняння (1.3) еквівалентне до нормальної системи*

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{6.3}$$

звичайних диференціальних рівнянь, тобто якщо $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння (1.3), то вектор-функція $(\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$ буде розв'язком системи (6.3), а якщо вектор-функція

$$\vec{\psi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

є розв'язком системи (6.3), то функція $y = \varphi_1(x)$ буде розв'язком рівняння (1.3).

Доведення. Нехай спочатку $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, – розв'язок рівняння (1.3). Розглянемо вектор-функцію

$$\vec{\psi}(x) = (\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Очевидно, $\vec{\psi}(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$ і областю визначення системи (6.3) є область G. За умовою

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in G, \quad x \in \langle a, b\rangle,$$

і, підставляючи функцію $\vec{\psi}(x)$ в систему (6.3), отримаємо очевидні тотожності:

$$\varphi'(x) \equiv \varphi'(x),\ \varphi''(x) \equiv \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x) \equiv \varphi^{(n-1)}(x),$$
$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Таким чином, $\vec{\psi}(x)$ є розв'язком системи (6.3).

Нехай тепер навпаки,

$$\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad x \in \langle a, b\rangle \quad -$$

розв'язок системи (6.3), тобто

$$\varphi_1'(x) \equiv \varphi_2(x),\ \varphi_2'(x) \equiv \varphi_3(x), \dots, \varphi_{n-1}'(x) \equiv \varphi_n(x),$$
$$\varphi_n'(x) \equiv f(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad x \in \langle a, b\rangle \tag{7.3}$$

Оскільки $\varphi_2(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$, то $\varphi_1(x) \in C^2(\langle a, b\rangle)$ і першу тотожність (7.3) можна диференціювати по x: $\varphi_1''(x) \equiv \varphi_2'(x) \equiv \varphi_3(x)$. Знову $\varphi_3(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$; тому

$\varphi_1(x) \in C^3(\langle a,b\rangle)$ і $\varphi_1'''(x) \equiv \varphi_3'(x) \equiv \varphi_4(x)$. Міркуючи далі аналогічним чином отримаємо, що

$$\varphi_1(x) \in C^n(\langle a,b\rangle) \text{ і } \varphi_1^{(n)}(x) \equiv \varphi_n'(x) \equiv f(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x)),$$

тобто $y = \varphi_1(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$, є розв'язком рівняння (1.3). Лему доведено.

Нехай $x_0, y_0, \ldots, y_0^{n-1}$ – довільні числа такі, що $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{n-1}) \in G$. Тоді для системи (6.3) можна задати початкові умови

$$y_1(x_0) = y_0, \ldots, y_n(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{8.3}$$

Якщо $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ – розв'язок задачі Коші (6.3), (8.3), то $y = \varphi_1(x)$ буде розв'язком рівняння (1.3). Подивимося, які умови задовольняє функція $\varphi_1(x)$. Очевидно,

$$\varphi_1(x_0) = y_0, \qquad \varphi_1'(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0^1,$$
$$\varphi_1''(x_0) = \varphi_2'(x_0) = \varphi_3(x_0) = y_0^2, \ldots,$$
$$\varphi_1^{(n-1)}(x_0) = \varphi_n(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Тому початкові умови для рівняння (1.3) можна записати у вигляді

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{9.3}$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (1.3), який задовольняє початкові умови (9.3), називається задачою Коші для цього рівняння.

Зокрема, наведені приклади задач (2.3), (3.3) і (4.3), (5.3) є задачами Коші для рівнянь другого порядку.

Як уже було доведено в лемі 1.3, задача Коші (1.3), (9.3) еквівалентна до задачі Коші (6.3), (8.3) для нормальної системи. Запишемо систему (6.3) у вигляді

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

де

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n) = y_2, \ldots, f_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n) = y_n,$$
$$f_n(x, y_1, \ldots, y_n) = f(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Оскільки функції $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n-1$, є неперервними і задовольняють умову Ліпшиця за змінними $y_1, \ldots, y_n$ зі сталою $L = 1$ у всьому просторі $\mathbb{R}^{n+1}$, то умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1.3), (9.3) залежать лише від властивостей функції $f(x, y_1, \ldots, y_n)$. Справедлива теорема.

Теорема 1.3 (існування і єдиності). *Якщо функція $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ неперервна в області G і задовольняє в цій області умову Ліпшиця за змінними $y_1, \ldots, y_n$, то для довільної точки $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{n-1}) \in G$ існує єдиний непродовжуваний розв'язок задачі Коші (1.3), (9.3).*

Зауважимо, що на підставі леми 1.3 можна сформулювати теорему про неперервну залежність розв'язку задачі Коші (1.3), (9.3) від початкових даних $x_0, y_0, \ldots, y_0^{n-1}$.

Зауваження 1.3. *Аналогічно як і у випадку рівняння першого порядку, можна розглядати неявні диференціальні рівняння (диференціальні рівняння, не розв'язані стосовно старшої похідної) вищих порядків, тобто рівняння вигляду*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{10.3}$$

де функція F є неперервною в області $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Як і у випадку $n = 1$, крім початкових умов (9.3) потрібно ще задати $y^{(n)}(x_0) = y_0^n$ і зв'язок між числами $x_0, y_0, \ldots, y_0^n$. Тобто *початкові умови для рівняння (10.3) матимуть вигляд:*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n)}(x_0) = y_0^n,$$
$$F(x_0, y_0, \ldots, y_0^n) = 0, \tag{11.3}$$

причому $(x_0, y_0, \ldots, y_0^n) \in \tilde{G}$.

Якщо функція F *і її частинні похідні* F_y, $F_{y'}$, ..., $F_{y^{(n)}}$ *є неперервні у деякому околі точки* $(x_0, y_0, \ldots, y_0^n)$ *і* $F_{y^{(n)}}(x_0, y_0, \ldots, y_0^n) \neq 0$, *то задача Коші (10.3), (11.3) має єдиний розв'язок, визначений у деякому околі точки* x_0.

§ 2.3. Методи інтегрування рівнянь вищих порядків

У даному параграфі ми розглянемо деякі типи рівнянь n−го порядку, які можна розв'язати або хоча б знизити їх порядок, тобто звести до диференціального рівняння порядку $k (k < n)$.

1°. **Найпростіші рівняння n-го порядку.** Якщо рівняння порядку n може бути записане у вигляді

$$y^{(n)} = f(x), \tag{12.3}$$

де $f(x)$ неперервна на проміжку $\langle a, b\rangle$, то легко знайти його загальний розв'язок. Справді, оскільки

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]',$$

то ми можемо записати рівняння (12.3) так:

$$[y^{(n-1)}]' = f(x),$$

звідки

$$y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C_1,$$

де C_1 – довільна стала, а x_0 – яка-небудь фіксована точка з проміжку $\langle a, b\rangle$.

Аналогічними міркуваннями знаходимо:

$$y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt\, dx_1 + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x_2}\int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt\, dx_1\, dx_2 + \frac{C_1(x-x_0)^2}{2!} + C_2(x - x_0) + C_3,$$

....

$$y = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x_{n-1}}\cdots\int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} +$$
$$+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n. \tag{13.3}$$

Тут $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі. Очевидно, формула (13.3) дає загальний розв'язок рівняння (12.3). Справді, за побудовою функція (13.3) буде розв'язком рівняння (12.3), які б не були сталі $C_1, \dots, C_n$. Крім того, якщо $y = \varphi(x)$ – який-небудь розв'язок рівняння (12.3), то він може бути отриманий з формули (13.3) за рахунок вибору сталих $C_1, \dots, C_n$. Справді, покладемо:

$$\varphi(x_0) = y_0, \ \ \varphi'(x_0) = y_0^1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Скористаємось тепер функцією (13.3) і виберемо сталу C_n так, щоб $y(x_0) = y_0$. Маємо

$$y(x_0) = C_n = y_0.$$

Аналогічно,

$$y'(x_0) = C_{n-1} = y_0^1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = C_1 = y_0^{n-1}.$$

Тому функція

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{x_0}^{x_{n-1}} \cdots \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt\,dx_1\,dx_2 \dots dx_{n-1} + \\ + \frac{y_0^{n-1}(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + y_0^1(x-x_0) + y_0, \tag{14.3}$$

яка є розв'язком рівняння (12.3), задовольняє ті ж самі початкові умови, що і $\varphi(x)$. Отже, на підставі теореми єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (12.3) $\varphi(x)$ збігається з функцією, яка задана формулою (14.3).

Перетворимо перший доданок в (14.3) до більш компактного вигляду. Маємо:

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt\,dx_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} dx_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt.$$

Замінимо порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} dx_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)dt \int\limits_{t}^{x_2} dx_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(t)(x_2 - t)dt.$$

Тому

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt\,dx_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(t)(x_2 - t)dt.$$

Аналогічно знаходимо:

$$\int\limits_{x_0}^{x_3}\int\limits_{x_0}^{x_2}\int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_{x_0}^{x_3} dx_2 \int\limits_{x_0}^{x_2} f(t)(x_2-t)dt =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_3} f(t)\,dt \int\limits_{t}^{x_3} (x_2-t)dx_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_3} f(t)(x_3-t)^2 dt,$$

. . . .

$$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x_{n-1}}\cdots\int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Тепер ми можемо записати загальний розв'язок рівняння (12.3) у вигляді

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{C_{n-k+1}(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

2°. **Рівняння, які не містять шуканої функції та її послідовних перших похідних.** Нехай задано рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{15.3}$$

причому похідна k-го ($k > 1$) порядку обов'язково присутня у рівнянні. Введемо нову невідому функцію $z(x)$, поклавши

$$y^{(k)}(x) = z(x).$$

Тоді рівняння (15.3) перепишеться так:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{16.3}$$

Це рівняння $(n-k)$-го порядку. Таким чином, нам вдалося знизити порядок рівняння (15.3) на k одиниць.

Припустимо, що ми знайшли загальний розв'язок рівняння (16.3)

$$z = \omega(x, C_1, \ldots, C_{n-k}).$$

Тоді, враховуючи заміну, маємо

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, \ldots, C_{n-k}).$$

Отже, ми отримали рівняння уже розглянутого вище типу. Інтегруючи його, будемо мати загальний розв'язок вихідного рівняння (15.3):

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n).$$

Приклад 4.3. Задано рівняння

$$4y' + y''^2 = 4xy''. \tag{17.3}$$

Покладемо $y' = z(x)$. Тоді

$$4z + {z'}^2 = 4xz'$$

або

$$z = xz' - \frac{{z'}^2}{4}. \tag{18.3}$$

Це – рівняння Клеро. Його загальний розв'язок має вигляд

$$z = Cx - \frac{C^2}{4}.$$

Тому

$$y' = Cx - \frac{C^2}{4}$$

і

$$y = C_1x^2 - C_1^2x + C_2 \ \ (C = 2C_1).$$

Це і є загальний розв'язок вихідного рівняння (17.3). Крім того, рівняння (18.3) має особливий розв'язок $z = x^2$. Йому відповідає рівняння $y' = x^2$. Тому

$$y = \frac{x^3}{3} + C_3$$

теж є розв'язком рівняння (17.3) для довільної сталої C_3.

3°. **Рівняння, які не містять незалежної змінної.** Нехай маємо рівняння вигляду

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{19.3}$$

Введемо нову невідому функцію $z(y)$ за формулою

$$y' = z(y)$$

і приймемо y за незалежну змінну. Обчислимо $y'', \ldots, y^{(n)}$ через z і її похідні. Маємо:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}z = \omega_2\left(z, \frac{dz}{dy}\right), \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{d^2z}{dy^2}z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \omega_3\left(z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= \omega_n\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Тому рівняння (19.3) набере вигляду

$$F\left(y, z, \omega_2\left(z, \frac{dz}{dy}\right), \ldots, \omega_n\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\right) = 0.$$

Це рівняння порядку $n-1$. Якщо ми знайдемо його загальний розв'язок

$$z = \psi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

то, повертаючись до шуканої функції y, отримаємо рівняння

$$y' = \psi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

Зінтегрувавши його, матимемо загальний розв'язок рівняння (19.3).

Зауважимо, що при вказаній заміні ми могли втратити розв'язки $y = \text{const}$. Тому потрібно покласти у рівнянні (19.3) $y = m$. Будемо мати

$$F(m, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Якщо отримане рівняння має дійсні корені $m = m_k$, то рівняння (19.3) допускає розв'язки $y = m_k$.

Приклад 5.3. Задано рівняння

$$(1+y^2)yy'' = (3y^2-1){y'}^2. \tag{20.3}$$

Поклавши $y' = z(y)$ і приймаючи y за незалежну змінну, маємо

$$y'' = \frac{dz}{dy}z,$$

так що рівняння (20.3) набере вигляду

$$(1+y^2)yz\frac{dz}{dy} = (3y^2-1)z^2. \tag{21.3}$$

Звідси

$$(1+y^2)y\frac{dz}{dy} = (3y^2-1)z,$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{(3y^2-1)dy}{y(1+y^2)},$$

$$\ln|z| = 2\ln(1+y^2) - \ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$\frac{zy}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Повертаючись до функції y, отримаємо

$$\frac{yy'}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Звідси

$$-\frac{1}{1+y^2} = 2C_1x + C_2.$$

Поклавши тепер в (20.3) $y = m$, маємо

$$(1 + m^2)m \cdot 0 = (3m^2 - 1) \cdot 0.$$

Оскільки це рівняння задовольняє довільне m, то розв'язком рівняння (20.3) буде функція $y = C$, де C – довільна стала. Зауважимо, що цей розв'язок ми могли отримати з рівняння (21.3):

$$z = 0, \quad y' = 0, \quad y = C.$$

4°. **Рівняння, однорідні щодо шуканої функції та її похідних.** Нехай маємо рівняння вигляду

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{22.3}$$

у якому функція F є однорідною функцією щодо $y, y', \ldots, y^{(n)}$, тобто для довільного t має місце тотожність

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}). \tag{23.3}$$

Введемо нову невідому функцію $z(x)$, поклавши $y' = zy$. Тоді:

$$\begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = y(z' + z^2) = y\omega_2(z, z'), \\ y''' &= y(z'' + 3zz' + z^3) = y\omega_3(z, z', z''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= y\omega_n(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Тому рівняння (22.3) набере вигляду

$$F(x, y, yz, y\omega_2(z, z'), \ldots, y\omega_n(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Використаємо тепер властивість (23.3) функції F, взявши за t змінну y. Тоді останнє рівняння перепишеться так:

$$y^m F(x, 1, z, \omega_2(z, z'), \ldots, \omega_n(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)})) = 0. \tag{24.3}$$

Рівняння (24.3) є $(n-1)$-го порядку. Нехай

$$z = \omega(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

є його загальним розв'язком. Тоді

$$y' = y\omega(x, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

і

$$y = C_n \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \omega(\xi, C_1, \ldots, C_{n-1})\, d\xi\right)$$

буде загальним розв'язком рівняння (22.3). Зауважимо, що $y = 0$ є частковим розв'язком цього рівняння, який отримується з загального при $C_n = 0$.

Приклад 6.3. Задано рівняння

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

Поклавши $y' = z(x)y$, $y'' = y(z' + z^2)$, маємо

$$xy^2(z' + z^2) + xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Оскільки $y = 0$ увійде в загальний розв'язок, то отримаємо рівняння Бернулі

$$xz' - z = -2xz^2.$$

Інтегруючи його, будемо мати

$$z = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Тоді

$$y' = \frac{xy}{x^2 + C_1},$$

і

$$y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}$$

є загальним розв'язком вихідного рівняння.

5°. **Узагальнене однорідне рівняння.** Знову розглянемо рівняння (22.3). Нехай для функції F існує таке дійсне число k, що для всіх t виконується тотожність

$$F(tx, t^k y, t^{k-1}y', \ldots, t^{k-n}y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}). \tag{25.3}$$

Тоді рівняння (22.3) будемо називати узагальненим однорідним.

Введемо нові змінні:

$$(x, y) \to (t, z) \quad (\text{якщо} \quad x > 0)$$

за формулами

$$x = e^t, \qquad y = z(t)e^{kt}. \tag{26.3}$$

(Якщо $x < 0$, то заміна $x = -e^t$, $y = z(t)e^{kt}$.) Виразимо $y', \ldots, y^{(n)}$ через

$$z, \ \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^n z}{dt^n}.$$

Перш за все будемо мати

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

або

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

тобто похідна від y за старою змінною x дорівнює похідній від y за новою змінною t, помноженій на e^{-t}. Тоді, використовуючи другу з формул (26.3), будемо мати:

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}.$$

Аналогічно знаходимо:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}\right]e^{-t} =$$
$$= \omega_2\left(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)e^{(k-2)t},$$
$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt}e^{-t} = \frac{d}{dt}\left[\omega_2\left(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)e^{(k-2)t}\right]e^{-t} =$$
$$= \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\omega_2}{\partial z'}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\partial\omega_2}{\partial z''}\frac{d^3z}{dt^3}\right)e^{(k-3)t} +$$
$$+(k-2)\omega_2\left(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)e^{(k-3)t} = \omega_3\left(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^3z}{dt^3}\right)e^{(k-3)t},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dt}e^{-t} = \omega_n\left(z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)e^{(k-n)t}.$$

Підставляючи замість $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ їх вирази у рівняння (22.3), отримаємо рівняння вигляду

$$F\left(e^t, ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}, \dots, \omega_n\left(z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)e^{(k-n)t}\right) = 0.$$

Звідси, на підставі тотожності (25.3), випливає рівняння

$$F\left(1, z, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right), \dots, \omega_n\left(z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)\right) = 0,$$

яке не містить явно незалежної змінної t і допускає зниження порядку на одиницю.

Приклад 7.3. Розглянемо рівняння

$$x^4y'' - (x^3 + 2xy)y' + 4y^2 = 0, \ x > 0. \tag{27.3}$$

Підставимо у ліву частину цього рівняння замість (x, y, y', y'') відповідно $(tx, t^ky, t^{k-1}y', t^{k-2}y'')$. Будемо мати:

$$F(tx, t^ky, t^{k-1}y', t^{k-2}y'') = t^{k+2}x^4y'' - t^{k+2}x^3y' - 2t^{2k}xyy' + 4t^{2k}y^2.$$

Для того, щоб праву частину цієї рівності можна було записати у вигляді

$$t^mF(x, y, y', y''),$$

потрібно, щоб $k + 2 = 2k$, тобто $k = 2$. Отже,

$$F(tx, t^2y, ty', y'') = t^4F(x, y, y', y'')$$

і рівняння (27.3) є узагальненим однорідним. Зробимо у ньому заміну $(x, y) \to (t, z)$ за формулами

$$x = e^t, \quad y = z(t)e^{2t}.$$

Тоді

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + 2z\right)e^t, \quad y'' = \frac{d^2z}{dt^2} + 3\frac{dz}{dt} + 2z$$

і рівняння (27.3) набере вигляду

$$e^{4t}(z'' + 3z' + 2z) - e^{4t}(1 + 2z)(z' + 2z) + 4z^2e^{4t} = 0$$

або

$$z'' + 2z' - 2zz' = 0.$$

Це рівняння не містить незалежної змінної t; тому покладемо

$$z' = u(z), \quad z'' = \frac{du}{dz}z.$$

Маємо рівняння

$$uu' + 2u - 2zu = 0 \tag{28.3}$$

або

$$u' - 2z + 2 = 0.$$

Отже,

$$u = z^2 - 2z + C_0.$$

Звідси

$$z' = z^2 - 2z + C_0. \tag{29.3}$$

Тому

$$\frac{dz}{z^2 - 2z + C_0} = dt, \quad \frac{dz}{(z-1)^2 + C_0 - 1} = dt.$$

Нехай спочатку $C_0 > 1$. Поклавши $C_0 - 1 = C_1^2$, $C_1 > 0$, будемо мати

$$\frac{d(z-1)}{(z-1)^2 + C_1^2} = dt,$$

звідки

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{C_1} = t + C_2,$$
$$z = 1 + C_1\operatorname{tg}(C_1t + C_2).$$

Повертаючись до змінних x, y, отримаємо загальний розв'язок рівняння (27.3) у вигляді

$$y = x^2(1 + C_1\operatorname{tg}(C_1 \ln x + C_2)), \quad C_1 > 0.$$

Нехай тепер $C_0 = 1$. Тоді рівняння (29.3) набере вигляду

$$\frac{dz}{(z-1)^2} = dt,$$

звідки

$$\frac{1}{z-1} = C_3 - t, \quad z = 1 + \frac{1}{C_3 - t},$$
$$y = x^2\left(1 + \frac{1}{C_3 - \ln x}\right).$$

Накінець, нехай $C_0 < 1$. Покладемо $C_0 = -C_1^2$. Тоді рівняння (29.3) запишеться у вигляді

$$\frac{d(z-1)}{(z-1)^2 - C_1^2} = dt,$$

звідки

$$\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{z-1-C_1}{z-1+C_1}\right| = t + C_2,$$
$$z - 1 - C_1 = z - 1 + C_1 e^{2C_1(t+C_2)},$$
$$z = \frac{1 + C_1 + (C_1 - 1)e^{2C_1(t+C_2)}}{1 - e^{2C_1(t+C_2)}},$$
$$y = \frac{x^2\left(1 + C_1 + (C_1 - 1)e^{2C_1(\ln x + C_2)}\right)}{1 - e^{2C_1(\ln x + C_2)}}.$$

Крім того, з рівняння (28.3) отримуємо $u = 0$, тобто $z' = 0$, $z = C$. Тому $y = Cx^2$ теж буде розв'язком вихідного рівняння. Отже, всі розв'язки рівняння (27.3) можна записати формулами:

$$y = Cx^2, \qquad y = x^2\left(1 + \frac{1}{C_3 - \ln x}\right);$$
$$y = x^2(1 + C_1\mathrm{tg}(C_1 \ln x + C_2)), \quad C_1 > 0;$$
$$y = \frac{x^2\left(1 + C_1 + (C_1 - 1)e^{2C_1(\ln x + C_2)}\right)}{1 - e^{2C_1(\ln x + C_2)}}, \quad C_1 < 0.$$

ГЛАВА 4. НОРМАЛЬНІ ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 1.4. Основні поняття лінійних систем. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші

Означення 1.4. *Нормальною лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь називається система вигляду*

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(x) y_j + b_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

де коефіцієнти $a_i^j(x)$ і вільні члени $b_i(x)$, $j, i = 1, \ldots, n$, – неперервні на проміжку $\langle a, b \rangle$.

Якщо хоча б одна із функцій $b_i(x)$, $1 \le i \le n$, не тотожно рівна нулю на $\langle a, b \rangle$, то система (1.4) називається неоднорідною. Якщо $b_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, то система (1.4) називається однорідною.

Зауважимо, що система (1.4) визначена в області $G = \langle a, b \rangle \times \mathbb{R}^n$. Оскільки (1.4) є частковим випадком нормальної системи (глава 2), то початкові умови для неї запишуться у вигляді

$$y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0, \tag{2.4}$$

де $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ – довільна точка області G.

Теорема 1.4 (існування та єдиності). *Якщо*

$$a_i^j(x),\ b_i(x) \in C(\langle a, b \rangle),\ j, i = 1, \ldots, n,$$

то задача Коші (1.4), (2.4) має єдиний непродовжуваний розв'язок, визначений на всьому проміжку $\langle a, b \rangle$ для будь-якої точки $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in G$.

Доведення. Припустимо, що проміжок $\langle a, b \rangle$ є інтервалом, тобто $\langle a, b \rangle = (a, b)$. Нехай $[a_0, b_0]$ – довільний відрізок такий, що $[a_0, b_0] \subset (a, b)$ і $x_0 \in [a_0, b_0]$. Для доведення теореми достатньо показати, що існує єдиний розв'язок задачі Коші (1.4), (2.4), визначений на відрізку $[a_0, b_0]$. Позначимо через $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ функції

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(x) y_j + b_i(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Оскільки $a_i^j(x)$, $j, i = 1, \ldots, n$, неперервні на $[a_0, b_0]$, то згідно з теоремою Вейєрштраса вони обмежені на $[a_0, b_0]$, тобто

$$|a_i^j(x)| \le M_i^j, \quad j, i = 1, \ldots, n.$$

Нехай $M = \max\limits_{j,i=1,\ldots,n} M_i^j$. Покажемо, що функції $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, задовольняють умову Ліпшиця на множині $[a_0, b_0] \times \mathbb{R}^n$ зі сталою M. Справді,

$$|f_i(x, y_1^1, \ldots, y_n^1) - f_i(x, y_1^2, \ldots, y_n^2)| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_i^j(x)(y_j^1 - y_j^2)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |a_i^j(x)|\, |y_j^1 - y_j^2| \leq M \sum_{j=1}^{n} |y_j^1 - y_j^2|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Як відомо (§2.2), задача Коші (1.4), (2.4) еквівалентна до системи інтегральних рівнянь

$$y_i(x) = y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))d\xi, \ i = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Тому достатньо довести існування розв'язку системи (3.4), визначеного на відрізку $[a_0, b_0]$. Зауважимо, що єдиність розв'язку задачі Коші (1.4), (2.4) випливає з теореми 2.2.

Побудуємо послідовність вектор-функцій

$$\{\vec{\varphi}^{\,m}(x)\}, \quad \vec{\varphi}^{\,m}(x) = (\varphi_1^m(x), \ldots, \varphi_n^m(x)), \ m = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

за формулами

$$\varphi_i^0(x) \equiv y_i^0,$$

$$\varphi_i^{m+1}(x) = y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_i(\xi, \varphi_1^m(\xi), \ldots, \varphi_n^m(\xi))d\xi,$$

$$i = 1, \ldots, n, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.4}$$

Легко бачити, що всі функції $\varphi_i^m(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a_0, b_0]$. Доведемо, що послідовність $\{\vec{\varphi}^{\,m}(x)\}$ рівномірно збігається до деякої неперервної функції $\vec{\varphi}(x)$ на проміжку $[a_0, b_0]$, коли $m \to \infty$. Для цього введемо функціональний ряд, еквівалентний до послідовності $\{\vec{\varphi}^{\,m}(x)\}$:

$$\varphi_i^0(x) + (\varphi_i^1(x) - \varphi_i^0(x)) + \cdots + (\varphi_i^{m+1}(x) - \varphi_i^m(x)) + \ldots, i = 1, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Побудуємо для рядів (5.4) мажорантні збіжні числові ряди. Враховуючи неперервність $b_i(x)$ на $[a_0, b_0]$, маємо:

$$|\varphi_i^1(x) - \varphi_i^0(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f_i(\xi, \varphi_1^0(\xi), \ldots, \varphi_n^0(\xi))d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_i^j(\xi)|\, |y_j^0| + |b_i(\xi)|\right)d\xi\right| \leq K; \ \ |\varphi_i^2(x) - \varphi_i^1(x)| =$$

$$= \left|\int\limits_{x_0}^{x} [f_i(\xi, \varphi_1^1(\xi), \ldots, \varphi_n^1(\xi)) - f_i(\xi, \varphi_1^0(\xi), \ldots, \varphi_n^0(\xi))]d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} |a_i^j(\xi)|\, |\varphi_j^1(\xi) - \varphi_j^0(\xi)| d\xi \right| \leq MKn|x - x_0|;$$

$$|\varphi_i^3(x) - \varphi_i^2(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} a_i^j(\xi)\, [\varphi_j^2(\xi) - \varphi_j^1(\xi)] d\xi \right| \leq$$

$$\leq M^2 K n^2 \frac{|x - x_0|^2}{2!};$$

....

$$|\varphi_i^{m+1}(x) - \varphi_i^m(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} a_i^j(\xi)\, [\varphi_j^m(\xi) - \varphi_j^{m-1}(\xi)] d\xi \right| \leq$$

$$\leq M^m K n^m \frac{|x - x_0|^m}{m!}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Звідси отримаємо оцінки

$$|\varphi_i^{m+1}(x) - \varphi_i^m(x)| \leq K \frac{(nM(b_0 - a_0))^m}{m!}, \ m = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, n.$$

Оскільки

$$\sum_{m=0}^{\infty} K \frac{(nM(b_0 - a_0))^m}{m!} = K e^{nM(b_0 - a_0)},$$

то ряди (5.4) рівномірно збігаються на $[a_0, b_0]$. Перейдемо до границі, коли $m \to \infty$, у формулі

$$\varphi_i^{m+1}(x) = y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} \left[\sum_{j=1}^{n} a_i^j(\xi)\, \varphi_j^m(\xi) + b_i(\xi) \right] d\xi, \ i = 1, \ldots, n.$$

На підставі рівномірної збіжності послідовностей $\{\varphi_j^m(\xi)\}$ на відрізку $[a_0, b_0]$ будемо мати рівності

$$\varphi_i(x) = y_i^0 + \int\limits_{x_0}^{x} \left[\sum_{j=1}^{n} a_i^j(\xi)\, \varphi_j(\xi) + b_i(\xi) \right] d\xi, \ i = 1, \ldots, n,$$

для всіх $x \in [a_0, b_0]$. Отже, функція $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ є розв'язком системи (3.4). Аналогічно розглядаються інші випадки проміжка $\langle a, b \rangle$. Теорему доведено.

Введемо матрицю

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_1^1(x) & \ldots & a_1^n(x) \\ . & \ldots & . \\ a_n^1(x) & \ldots & a_n^n(x) \end{pmatrix}$$

і вектор-стовпчики $\vec{y} = \operatorname{colon}(y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{b}(x) = \operatorname{colon}(b_1(x), \ldots, b_n(x))$. Тоді систему (1.4) можна записати у вигляді

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x), \tag{6.4}$$

а відповідна однорідна система матиме вигляд

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}. \tag{7.4}$$

§ 2.4. Структура загального розв'язку нормальної лінійної однорідної системи

Розглянемо спочатку систему (7.4). Для того, щоб сформулювати властивості розв'язків цієї системи введемо поняття лінійної залежності та незалежності функцій на проміжку.

Означення 2.4. *Сукупність функцій*

$$\vec{\varphi}^{\,k}(x) = (\varphi_1^k(x), \dots, \varphi_n^k(x)), \; k = 1, \dots, m,$$

називається лінійно залежною на проміжку $\langle a, b\rangle$, якщо існують такі сталі $C_1, \dots, C_m$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

$$C_1\vec{\varphi}^{\,1}(x) + \dots + C_m\vec{\varphi}^{\,m}(x) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

У протилежному випадку сукупність функцій $\vec{\varphi}^{\,k}(x)$, $k = 1, \dots, m$, називається лінійно незалежною.

Наведемо приклади лінійно незалежних та лінійно залежних функцій у випадку $n = 1$.

Приклад 1.4. Розглянемо сукупність функцій

$$1, x, x^2, \dots, x^m. \tag{8.4}$$

Легко бачити, що дані функції є лінійно незалежними на будь-якому проміжку $\langle a, b\rangle$. Справді, співвідношення

$$C_0 + C_1 x + \dots + C_m x^m = 0 \tag{9.4}$$

є алгебраїчним рівнянням, степінь якого не перевищує числа m, якщо хоча б один з коефіцієнтів $C_0, \dots, C_m$ відмінний від нуля. Але таке рівняння не може мати більше ніж m дійсних коренів на $\langle a, b\rangle$, тобто тотожність (9.4) можлива лише тоді, коли $C_0 = 0, \dots,$ $C_m = 0$, а це означає, що функції (8.4) є лінійно незалежними на $\langle a, b\rangle$.

Приклад 2.4. Нехай маємо функції

$$1, \; \cos^2 x, \; \sin^2 x.$$

Оскільки

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

на довільному проміжку $\langle a, b\rangle$, то дані функції є лінійно залежними.

Перейдемо тепер до вивчення властивостей розв'язків однорідної системи (9.4).

Теорема 2.4. *Якщо розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ системи (7.4) обертається в нуль у деякій точці $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$.*

Доведення. Нехай $\vec{\varphi}(x_0) = 0$. Розглянемо задачу Коші для системи (7.4) з нульовими початковими умовами

$$\vec{y}(x_0) = 0. \tag{10.4}$$

Тоді, очевидно, задача Коші (7.4), (10.4) має два розв'язки: $\vec{y} \equiv 0$ і $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$. На підставі теореми єдиності 1.4 вони повинні збігатися, тобто $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$.

Теорема 3.4. *Нехай $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x)$ – розв'язки системи (7.4). Тоді функція*

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} C_i \vec{\varphi}^{\,i}(x) \tag{11.4}$$

буде розв'язком цієї системи для довільних сталих $C_1, \ldots, C_m$.

Доведення. Підставимо функцію (11.4) у систему (7.4). Маємо:

$$\vec{y}\,' - A(x)\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} C_i (\vec{\varphi}^{\,i}(x))' - \sum_{i=1}^{m} C_i A(x) \vec{\varphi}^{\,i}(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} C_i ((\vec{\varphi}^{\,i}(x))' - A(x)\vec{\varphi}^{\,i}(x)).$$

Оскільки

$$(\vec{\varphi}^{\,i}(x))' \equiv A(x)\vec{\varphi}^{\,i}(x), \quad i = 1, \ldots, m,$$

то $\vec{y}\,' - A(x)\vec{y} \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$.

Зауваження 1.4. *Позначимо через $\mathfrak{L}$ множину всіх розв'язків системи (7.4). Тоді теорема 3.4 стверджує, що множина $\mathfrak{L}$ є лінійним простором над полем дійсних (комплексних) чисел.*

Теорема 4.4. *Для того, щоб розв'язки $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x)$ системи (7.4) були лінійно залежними (незалежними) на проміжку $\langle a, b\rangle$ необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{\varphi}^{\,1}(x_0), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x_0)$ були лінійно залежними (незалежними), де x_0 – яка-небудь точка з $\langle a, b\rangle$.*

Доведення. Якщо функції $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x)$ лінійно залежні на $\langle a, b\rangle$, то вектори $\vec{\varphi}^{\,1}(x_0), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x_0)$ лінійно залежні для довільного $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Нехай тепер навпаки, вектори $\vec{\varphi}^{\,1}(x_0), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x_0)$ лінійно залежні для деякого $x_0 \in \langle a, b\rangle$, тобто існують такі сталі $C_1^0, \ldots, C_m^0$, які не всі дорівнюють нулю, що

$$C_1^0 \vec{\varphi}^{\,1}(x_0) + \cdots + C_m^0 \vec{\varphi}^{\,m}(x_0) = 0.$$

Розглянемо функцію

$$\vec{\varphi}(x) = C_1^0 \vec{\varphi}^{\,1}(x) + \cdots + C_m^0 \vec{\varphi}^{\,m}(x),$$

яка на підставі теореми 3.4 є розв'язком системи (7.4), причому $\vec{\varphi}(x_0) = 0$. Тому, враховуючи теорему 2.4, отримаємо

$$\vec{\varphi}(x) = C_1^0 \vec{\varphi}^{\,1}(x) + \cdots + C_m^0 \vec{\varphi}^{\,m}(x) \equiv 0$$

на $\langle a, b\rangle$, що й доводить лінійну залежність функцій $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x)$. Нехай тепер функції $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x)$ лінійно незалежні на $\langle a, b\rangle$. Якщо припустити, що для деякого $x_0 \in \langle a, b\rangle$ вектори $\vec{\varphi}^{\,1}(x_0), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x_0)$ лінійно залежні, то на підставі доведеного вище функції $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,m}(x)$ лінійно залежні на $\langle a, b\rangle$, що суперечить припущенню.

Означення 3.4. *Сукупність n розв'язків $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ системи (7.4) називається фундаментальною системою розв'язків, якщо вона лінійно незалежна на $\langle a, b\rangle$.*

Теорема 5.4. *Для системи (7.4) завжди існує фундаментальна система розв'язків.*

Доведення. Нехай $\vec{a}^{\,1},\dots,\vec{a}^{\,n}$ – довільна сукупність лінійно незалежних векторів. Визначимо розв'язки $\vec{\varphi}^{\,i}(x)$ системи (7.4) за початковими умовами

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x_0)=\vec{a}^{\,i},\ i=1,\dots,n,\ x_0\in\langle a,b\rangle.$$

Оскільки вектори $\vec{\varphi}^{\,1}(x_0)$, ..., $\vec{\varphi}^{\,n}(x_0)$ лінійно незалежні, то на підставі теореми 4.4 розв'язки $\vec{\varphi}^{\,1}(x)$, ..., $\vec{\varphi}^{\,n}(x)$ лінійно незалежні, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (7.4).

Зауваження 2.4. *Як випливає з доведення теореми 5.4, існує безліч фундаментальних систем розв'язків для системи (7.4).*

Нехай

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x)=(\varphi_1^i(x),\dots,\varphi_n^i(x)),\quad i=1,\dots,n,\quad - \tag{12.4}$$

деяка сукупність розв'язків системи (7.4). Складемо тепер матрицю

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x)\\ \cdot & \dots & \cdot\\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x)\end{pmatrix}, \tag{13.4}$$

k-тим стовпчиком якої служить розв'язок $\vec{\varphi}^{\,k}(x)$ системи (7.4). Визначник матриці (13.4) будемо називати визначником Вронського сукупності розв'язків (12.4) і позначатимемо $W(x)$.

Теорема 6.4. *Для того, щоб сукупність розв'язків (12.4) була лінійно незалежною на $\langle a,b\rangle$ необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського $W(x)$ цієї сукупності був відмінний від нуля хоча б в одній точці $x_0\in\langle a,b\rangle$.*

Доведення. Нехай сукупність розв'язків (12.4) лінійно незалежна на $\langle a,b\rangle$. Тоді на підставі теореми 4.4 вектори $\vec{\varphi}^{\,1}(x_0)$, ..., $\vec{\varphi}^{\,n}(x_0)$ лінійно незалежні і тому, як відомо з алгебри, складений з координат цих векторів визначник

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}\varphi_1^1(x_0) & \dots & \varphi_1^n(x_0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \varphi_n^1(x_0) & \dots & \varphi_n^n(x_0)\end{vmatrix}$$

відмінний від нуля. Навпаки, якщо $W(x_0)\neq 0$, то вектори $\vec{\varphi}^{\,1}(x_0)$, ..., $\vec{\varphi}^{\,n}(x_0)$ лінійно незалежні і на підставі теореми 4.4 розв'язки (12.4) лінійно незалежні на $\langle a,b\rangle$.

Зауваження 3.4. *Якщо необхідність теореми 5.4 має місце для довільної сукупності функцій (12.4), неперервних на $\langle a,b\rangle$, то для достатності суттєво є те, що функції сукупності (12.4) є розв'язками системи (7.4).*

Справді, розглянемо функції

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x)=(\varphi_1^i(x),\varphi_2^i(x)),\quad i=1,2,$$

де

$$\varphi_1^1(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо}\quad x\geq 0,\\ 0, & \text{якщо}\quad x<0;\end{cases}\quad \varphi_2^1(x)=\begin{cases}2x, & \text{якщо}\quad x\geq 0,\\ 0, & \text{якщо}\quad x<0;\end{cases}$$

$$\varphi_1^2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \geq 0, \\ x^3, & \text{якщо} \quad x < 0; \end{cases} \varphi_2^2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \geq 0, \\ 3x^2, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, функції $\vec{\varphi}^{\,1}(x)$ і $\vec{\varphi}^{\,2}(x)$ є лінійно незалежними на будь-якому інтервалі $(-a, a)$, $a > 0$, оскільки тотожність на $(-a, a)$

$$C_1\vec{\varphi}^{\,1}(x) + C_2\vec{\varphi}^{\,2}(x) \equiv 0$$

можлива лише тоді, коли $C_1 = 0$ і $C_2 = 0$. У той же час

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \varphi_1^2(x) \\ \varphi_2^1(x) & \varphi_2^2(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

на $(-a, a)$.

Теорема 7.4 (про структуру загального розв'язку однорідної системи). *Нехай $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ – фундаментальна система розв'язків системи (7.4). Тоді загальний розв'язок системи (7.4) записується у вигляді*

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j\vec{\varphi}^{\,j}(x), \tag{14.4}$$

де $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Доведення. Покажемо, що будь-який розв'язок системи (7.4) може бути отриманий з формули (14.4) за рахунок вибору сталих $C_1, \ldots, C_n$. Нехай $\vec{\varphi}(x)$ – який-небудь розв'язок системи (7.4). Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(x_0) + \cdots + C_n\varphi_1^n(x_0) = \varphi_1(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1\varphi_n^1(x_0) + \cdots + C_n\varphi_n^n(x_0) = \varphi_n(x_0) \end{cases} \tag{15.4}$$

стосовно невідомих $C_1, \ldots, C_n$, де x_0 – яка-небудь точка з $\langle a, b\rangle$.
Оскільки сукупність розв'язків $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ є лінійно незалежною, то на підставі теореми 5.4 визначник Вронського $W(x)$ цієї сукупності відмінний від нуля у точці x_0. Але $W(x_0)$ є визначником системи (15.4). Тому ця система має єдиний розв'язок $C_1^0, \ldots, C_n^0$. Розглянемо функцію

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j^0\vec{\varphi}^{\,j}(x),$$

яка є розв'язком системи (7.4) і задовольняє ті самі початкові умови, що і функція $\vec{\varphi}(x)$. На підставі теореми 1.4

$$\vec{\varphi}(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} C_j^0\vec{\varphi}^{\,j}(x),$$

що й потрібно було довести.

Зауваження 4.4. *Нехай $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ – яка-небудь фундаментальна система система розв'язків системи (7.4). Згідно з теоремою 7.4 кожний розв'язок системи (7.4) можна зобразити формулою (14.4), тобто будь-яка сукупність розв'язків системи (7.4), яка містить більше ніж n функцій, є лінійно залежною на $\langle a, b\rangle$. Отже, $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ утворюють базис лінійного векторного простору $\mathfrak{L}$ (зауваження 1.4) і розмірність простору $\mathfrak{L}$ дорівнює $n : \dim \mathfrak{L} = n$.*

Як було показано у теоремі 5.4 для кожної системи (7.4) існує фундаментальна система розв'язків. Виявляється що і навпаки за певною сукупністю n функцій $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ можна побудувати лінійну однорідну систему вигляду (7.4), для якої сукупність $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ є фундаментальною системою розв'язків.

Теорема 8.4. *Нехай $\vec{\varphi}^{\,i}(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$, $i = 1, \ldots, n$, причому $W(x) \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$. Тоді сукупність функцій $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ буде фундаментальною системою розв'язків для єдиної однорідної системи $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$, визначеної на проміжку $\langle a, b\rangle$.*

Доведення. Будемо вибирати коефіцієнти матриці $A(x)$ з тієї умови, що функції

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\varphi_1^i(x), \ldots, \varphi_n^i(x)), \ \ i = 1, \ldots, n,$$

є розв'язками системи (7.4). Будемо мати

$$(\varphi_k^i(x))' = \sum_{j=1}^{n} a_k^j(x)\varphi_j^i(x), \ \ k, i = 1, \ldots, n. \tag{16.4}$$

Якщо у цих співвідношеннях зафіксувати індекс k і вважати змінним індекс i, то систему отриманих співвідношень (16.4) можна розглядати як лінійну алгебраїчну систему стосовно невідомих $a_k^1(x), \ldots, a_k^n(x)$. Оскільки матриця системи (16.4) є транспонованою до матриці (13.4), то визначник цієї системи відмінний від нуля для всіх $x \in \langle a, b\rangle$ на підставі умови теореми. Отже, система (16.4) має єдиний розв'язок $a_k^1(x), \ldots, a_k^n(x)$, причому, легко бачити, що функції $a_k^1(x), \ldots, a_k^n(x)$ є визначеними і неперервними на $\langle a, b\rangle$. Змінюючи k від 1 до n, отримуємо твердження теореми.

Для доведення наступної властивості розв'язків системи (7.4) буде потрібно правило диференціювання визначника.

Лема 1.4. *Нехай $(\varphi_i^j(x))$ – квадратна матриця порядку n, елементи якої є диференційовними функціями на проміжку $\langle a, b\rangle$, і нехай $W(x)$ – визначник цієї матриці. Тоді справедлива формула*

$$W'(x) = \sum_{j=1}^{n} W_j(x), \tag{17.4}$$

де $W_j(x)$, $1 \le j \le n$, – визначник, отриманий з $W(x)$ шляхом диференціювання j-того рядка.

Доведення. Будемо розглядати визначник $W(x)$ як складену функцію $W = W(\varphi_m^l(x))$ і розвинемо його за i-тим рядком:

$$W(\varphi_m^l(x)) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i^k(x) V_k^i.$$

Тут V_k^i – алгебраїчне доповнення елемента φ_i^k. Тому

$$\frac{dW(\varphi_m^l(x))}{dx} = \sum_{m,l=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \varphi_m^l} \frac{d\varphi_m^l(x)}{dx} =$$

$$= \sum_{m,l=1}^{n} \frac{d\varphi_m^l(x)}{dx} V_l^m = \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{d\varphi_m^l(x)}{dx} V_l^m = \sum_{m=1}^{n} W_m,$$

оскільки

$$W_m = \sum_{l=1}^{n} (\varphi_m^l(x))' V_l^m$$

є розвинення визначника W_m за l-тим рядком.

Теорема 9.4 (формула Остроградського–Ліувілля). *Нехай $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ – фундаментальна система розв'язків системи (7.4). Тоді справедлива формула*

$$W(x) = W(x_0) \exp \int_{x_0}^{x} S(\xi) d\xi, \tag{18.4}$$

де x_0 – яка-небудь точка з $\langle a, b\rangle$, а $S(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^j(x)$ – слід матриці $A(x)$.

Доведення. Для обчислення похідної функції $W(x)$ скористаємося формулою (17.4). Розглянемо $W_1(x)$ і врахуємо той факт, що $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ є розв'язками системи (7.4). Маємо:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} (\varphi_1^1(x))' & \ldots & (\varphi_1^n(x))' \\ \varphi_2^1(x) & \ldots & \varphi_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(x) & \ldots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_1^j(x)\varphi_j^1(x) & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_1^j(x)\varphi_j^n(x) \\ \varphi_2^1(x) & \ldots & \varphi_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(x) & \ldots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} =$$

$$= a_1^1(x) \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \ldots & \varphi_1^n(x) \\ \varphi_2^1(x) & \ldots & \varphi_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(x) & \ldots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=2}^{n} a_1^j(x)\varphi_j^1(x) & \ldots & \sum\limits_{j=2}^{n} a_1^j(x)\varphi_j^n(x) \\ \varphi_2^1(x) & \ldots & \varphi_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(x) & \ldots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} = a_1^1(x) W(x).$$

Оскільки у останньому визначнику перший рядок є лінійною комбінацією решти $(n-1)$-го рядків, тому він дорівнює нулю. Аналогічно отримаємо, що

$$W_i(x) = a_i^i(x) W(x), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Отже,

$$W'(x) = S(x) W(x). \tag{19.4}$$

Згідно з теоремою 6.4 $W(x) \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$. Тому, розв'язавши диференціальне рівняння (19.4), будемо мати:

$$W(x) = C \exp \int\limits_{x_0}^{x} S(\xi) d\xi, \ \ x_0 \in \langle a, b\rangle.$$

Оскільки $W(x_0) = C$, то приходимо до формули (18.4).

§ 3.4. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи

Розглянемо тепер лінійну неоднорідну систему (1.4) (або (6.4) у векторному записі).

Теорема 10.4. *Нехай $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ – фундаментальна система розв'язків системи (7.4). Тоді загальний розв'язок системи (1.4) може бути записаний формулою*

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{\varphi}^{\,j}(x) + \vec{\psi}(x), \tag{20.4}$$

де $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі, а $\vec{\psi}(x)$ – який-небудь частковий розв'язок системи (1.4).

Доведення. Нам достатньо показати, що будь-який розв'язок $\vec{\omega}(x)$ системи (1.4) може бути отриманий з формули (20.4) за рахунок вибору сталих $C_1, \ldots, C_n$. Для цього розглянемо функцію

$$\vec{z} = \vec{\omega}(x) - \vec{\psi}(x).$$

Легко бачити, що $\vec{z}(x)$ є розв'язком відповідної однорідної системи (7.4). Справді,

$$\vec{\omega}\,'(x) - \vec{\psi}\,'(x) - A(x)\vec{\omega}(x) + A(x)\vec{\psi}(x) \equiv \vec{b}(x) - \vec{b}(x) \equiv 0.$$

Тоді згідно з теоремою 7.4 існують такі сталі $C_1^0, \ldots, C_n^0$, що

$$\vec{\omega}(x) - \vec{\psi}(x) \equiv C_1^0 \vec{\varphi}^{\,1}(x) + \cdots + C_n^0 \vec{\varphi}^{\,n}(x).$$

Звідси і випливає твердження теореми.

Отже, на підставі цієї теореми побудова загального розв'язку системи (1.4) зводиться до розв'язування відповідної лінійної однорідної системи і відшукання часткового розв'язку лінійної неоднорідної системи. Покажемо, що при наявності фундаментальної системи розв'язків лінійної однорідної системи частковий розв'язок неоднорідної системи завжди можна побудувати методом варіації сталих.

Теорема 11.4. *Нехай $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ – фундаментальна система розв'язків лінійної однорідної системи (7.4), $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тоді існує частковий розв'язок лінійної неоднорідної сисмтеми (6.4) у вигляді*

$$\vec{y} = \Phi(x) \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\xi) \vec{b}(\xi) d\xi, \tag{21.4}$$

де $\Phi^{-1}(x)$ – матриця, обернена до $\Phi(x)$.

Доведення. Будемо шукати розв'язок системи (1.4) у вигляді

$$y_i = C_1(x)\varphi_i^1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_i^n(x), \; i = 1, \ldots, n, \tag{22.4}$$

де $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ – невідомі функції. Підставляючи ці функції у систему (1.4), отримаємо:

$$C_1'(x)\varphi_i^1(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_i^n(x) + C_1(x)(\varphi_i^1(x))' + \cdots + C_n(x)(\varphi_i^n(x))' =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_i^j(x)(C_1(x)\varphi_j^1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_j^n(x)) + b_i(x),$$

звідки, приймаючи до уваги, що $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ – розв'язки однорідної системи (7.4), матимемо

$$C_1'(x)\varphi_i^1(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_i^n(x) = b_i(x), \; i = 1, \ldots, n. \tag{23.4}$$

Оскільки визначник цієї алгебраїчної системи є визначником Вронського $W(x)$, то на підставі теореми 6.4 він відмінний від нуля на $\langle a, b \rangle$. Тому система (23.4) має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = g_1(x), \ldots, C_n'(x) = g_n(x),$$

причому легко бачити, що функції $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ є неперервні на $\langle a, b \rangle$. Тому взявши за $C_i(x)$ яку-небудь первісну

$$\int_{x_0}^{x} g_i(\xi)d\xi, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ми отримаємо частковий розв'язок системи (1.4) у вигляді

$$\vec{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} \vec{\varphi}^{\,j}(x) \int_{x_0}^{x} g_j(\xi)d\xi.$$

Для доведення формули (21.4) запишемо рівняння (22.4) у векторній формі

$$\vec{y} = \Phi(x)\vec{C}(x).$$

Тоді після підстановки у систему (6.4), будемо мати

$$\Phi(x)\vec{C}'(x) + \Phi'(x)\vec{C}(x) = A(x)\Phi(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x), \tag{24.4}$$

де під $\Phi'(x)$ будемо розуміти матрицю $((\varphi_i^j(x))')$. Оскільки $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,n}(x)$ – розв'язки однорідної системи (7.4), то справедлива тотожність

$$\Phi'(x) \equiv A(x)\Phi(x).$$

Тому з (24.4) отримуємо:

$$\vec{C}\,'(x) = \Phi^{-1}(x)\vec{b}(x), \quad \vec{C}(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)d\xi.$$

Ми обмежимося лише однією первісною для функції $\Phi^{-1}(x)\vec{b}(x)$, бо хочемо знайти лише один частковий розв'язок системи (6.4). Отже, формулу (21.4) доведено.

ГЛАВА 5. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ n–ГО ПОРЯДКУ

§ 1.5. Лінійні диференціальні рівняння n–го порядку зі змінними коефіцієнтами

Означення 1.5.. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \tag{1.5}$$

коефіцієнти $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, і вільний член $f(x)$ якого є визначені і неперервні на проміжку $\langle a, b\rangle$, будемо називати лінійним диференціальним рівнянням n–го порядку. Якщо у рівнянні (1.5) $f(x) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$, то це рівняння будемо називати лінійним однорідним, у протилежному випадку – неоднорідним.

Як було показано у главі 3 (лема 1.3), рівняння (1.5) може бути зведено до нормальної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = -a_n(x)y_1 - a_{n-1}(x)y_2 - \cdots - a_1(x)y_n + f(x). \end{cases} \tag{2.5}$$

Очевидно, (2.5) – система лінійних диференціальних рівнянь, яку можна у векторному записі подати так:

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x), \tag{3.5}$$

з матрицею

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \ldots & -a_1(x) \end{pmatrix}$$

і вектором

$$\vec{b}(x) = \mathrm{colon}(0, 0, \ldots, 0, f(x)).$$

Рівняння (1.5) і система (3.5) еквівалентні між собою, а саме, розв'язкові $y = \psi(x)$ рівняння (1.5) відповідає розв'язок

$$\vec{\varphi}(x) = (\psi(x), \psi'(x), \ldots, \psi^{(n-1)}(x))$$

системи (3.5) і навпаки, кожному розв'язкові

$$\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

системи (3.5) відповідає розв'язок $y = \varphi_1(x)$ рівняння (1.5). Тому на підставі леми 1.3 і теореми 1.4 справедлива така теорема.

Теорема 1.5 (існування та єдиності). *Нехай*

$$a_i(x)\ (i = 1, \ldots, n), f(x) \in C(\langle a, b\rangle).$$

Тоді для будь-якої точки $(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) \in \langle a, b\rangle \times \mathbb{R}^n$ *існує єдиний розв'язок рівняння (1.5), визначений на проміжку* $\langle a, b\rangle$, *який задовольняє початкові умови*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{4.5}$$

Вивчимо спочатку лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{5.5}$$

Йому відповідає лінійна однорідна система

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}. \tag{6.5}$$

Теорема 2.5. *Нехай* $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ *– деяка сукупність розв'язків рівняння (5.5). Тоді функція*

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i\psi_i(x)$$

буде розв'язком рівняння (5.5) для довільних сталих $C_1, \ldots, C_k$, *тобто множина* $\mathfrak{L}$ *всіх розв'язків рівняння (5.5) утворює лінійний векторний простір над полем дійсних (комплексних) чисел.*

Доведення цієї теореми проводиться безпосередньою підстановкою функції $\psi(x)$ у рівняння (5.5).

Теорема 3.5. *Нехай* $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ *– сукупність розв'язків рівняння (5.5). Для того, щоб розв'язки* $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ *були лінійно залежними (незалежними) на* $\langle a, b\rangle$ *необхідно і достатньо, щоб відповідні їм розв'язки* $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,k}(x)$ *системи (6.5)*

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\psi_i(x), \psi_i'(x), \ldots, \psi_i^{(n-1)}(x)),\ \ i = 1, \ldots, k,$$

були лінійно залежними (незалежними) на $\langle a, b\rangle$.

Доведення. Нехай розв'язки $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ – лінійно залежні на $\langle a, b\rangle$, тобто

$$\alpha_1\psi_1(x) + \cdots + \alpha_k\psi_k(x) \equiv 0, \tag{7.5}$$

причому не всі сталі $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ дорівнюють нулю. Продиференціюємо тотожність (7.5) $(n-1)$ разів за x :

$$\begin{gathered}\alpha_1\psi_1(x) + \cdots + \alpha_k\psi_k(x) \equiv 0,\\ \alpha_1\psi_1'(x) + \cdots + \alpha_k\psi_k'(x) \equiv 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_1\psi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_k\psi_k^{(n-1)}(x) \equiv 0.\end{gathered} \tag{8.5}$$

Але ці тотожності можна записати у векторному вигляді так:

$$\alpha_1\vec{\varphi}^{\,1}(x) + \cdots + \alpha_k\vec{\varphi}^{\,k}(x) \equiv 0, \tag{9.5}$$

а це й означає, що розв'язки $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,k}(x)$ системи (6.5) лінійно залежні. Нехай навпаки, розв'язки $\vec{\varphi}^{\,1}(x), \ldots, \vec{\varphi}^{\,k}(x)$ системи (6.5) лінійно залежні на $\langle a, b\rangle$. Тоді справедлива тотожність (9.5), де не всі $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ дорівнюють нулю. Записавши цю тотожність у координатній формі, отримаємо тотожності (8.5), перша з яких дає нам (7.5), тобто лінійну залежність розв'язків $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ рівняння (5.5). Аналогічно доводиться випадок, коли $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ лінійно незалежні.

Означення 2.5. *Сукупність $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ n лінійно незалежних на $\langle a, b\rangle$ розв'язків рівняння (5.5) називається фундаментальною системою розв'язків цього рівняння.*

Теорема 4.5. *Для рівняння (5.5) існує безліч фундаментальних систем розв'язків.*

Доведення. Згідно з теоремою 5.4 існує фундаментальна система розв'язків $\vec{\varphi}^{\,1}(x)$, ..., $\vec{\varphi}^{\,n}(x)$,

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\varphi_1^i(x), \ldots, \varphi_n^i(x)), \;\; i = 1, \ldots, n$$

для системи (6.5). Тоді на підставі теореми 3.5 сукупність функцій $\varphi_1^1(x)$, ..., $\varphi_1^n(x)$ буде фундаментальною системою розв'язків для рівняння (5.5). Крім того, згідно з зауваженням 2.4 таких фундаментальних систем розв'язків існує безліч.

Теорема 5.5. *Нехай $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (5.5). Тоді загальний розв'язок цього рівняння може бути записаний формулою*

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j \psi_j(x), \tag{10.5}$$

де $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі, тобто простір розв'язків $\mathfrak{L}$ рівняння (5.5) має розмірність n.

Доведення. Нехай $\psi(x)$ – який-небудь розв'язок рівняння (5.5). Покажемо, що він може бути отриманий з формули (10.5) шляхом вибору сталих $C_1, \ldots, C_n$. Справді, розглянемо вектор-функцію

$$\vec{\varphi}(x) = (\psi(x), \psi'(x), \ldots, \psi^{(n-1)}(x)),$$

яка є розв'язком системи (6.5). На підставі теореми 7.4 функцію $\vec{\varphi}(x)$ можна записати у вигляді

$$\vec{\varphi}(x) = C_1^0 \vec{\varphi}^{\,1}(x) + \cdots + C_n^0 \vec{\varphi}^{\,n}(x),$$

де

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\psi_i(x), \psi_i'(x), \ldots, \psi_i^{(n-1)}(x)), \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Взявши першу координату цієї векторної рівності, маємо

$$\psi(x) = C_1^0 \psi_1(x) + \cdots + C_n^0 \psi_n(x),$$

що й доводить теорему.

Означення 3.5. *Будемо називати визначником Вронського сукупності розв'язків $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ рівняння (5.5) визначник вигляду*

$$W(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \ldots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) & \ldots & \psi_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \psi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Якщо

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\psi_i(x), \psi_i'(x), \ldots, \psi_i^{(n-1)}(x)), \;\; i = 1, \ldots, n, \; -$$

відповідні розв'язки системи (6.5), то, очевидно, $W(x)$ є визначником Вронського цієї сукупності функцій. Тому з теореми 6.4 випливає, що $W(x)$ або не обертається в нуль в жодній точці проміжка $\langle a, b\rangle$, або тотожно дорівнює нулю. Тобто для того, щоб сукупність розв'язків $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ рівняння (5.5) була фундаментальною системою розв'язків необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського цієї сукупності не обертався в нуль хоча б в одній точці проміжка $\langle a, b\rangle$.

Крім того, з теореми 9.4 випливає формула Остроградського–Ліувілля для $W(x)$:

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi\right), \tag{11.5}$$

оскільки слід матриці $A(x)$ системи (6.5) дорівнює $-a_1(x)$.

Зауваження 1.5. *Формула (11.5) в окремих випадках може бути використана для побудови загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (5.5).*

Нехай

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad - \tag{12.5}$$

лінійне рівняння другого порядку, визначене на проміжку $\langle a, b\rangle$, і нам відомо частковий розв'язок $y_1 = \psi_1(x)$ цього рівняння. Покажемо, що другий частковий розв'язок $y_2(x)$ рівняння (12.5), лінійно незалежний з $\psi_1(x)$, можна знайти з формули (11.5). Справді, перепишемо формулу (11.5) у вигляді

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W(x_0)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi\right)$$

або (там, де $\psi_1(x) \neq 0$)

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W(x_0)}{y_1^2}\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi\right).$$

Звідси

$$y_2(x) = \psi_1(x)W(x_0)\int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\xi} a_1(t)\,dt\right)\frac{d\xi}{\psi_1^2(\xi)} + \psi_1(x)\frac{y_2(x_0)}{\psi_1(x_0)}.$$

Оскільки $y_2(x_0)$ – стала, яка може набувати довільні значення, то і $W(x_0)$ – теж довільна стала. Тому за частковий розв'язок рівняння (12.5) можна взяти функцію

$$\psi_2(x) = \psi_1(x)\int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\xi} a_1(t)\,dt\right)\frac{d\xi}{\psi_1^2(\xi)},$$

яка буде лінійно незалежною з $\psi_1(x)$. Справді, якби ми припустили, що $\psi_1(x)$ і $\psi_2(x)$ є лінійно залежними, то мали б тотожність

$$\alpha_1\psi_1(x) + \alpha_2\psi_2(x) = \psi_1(x)\left(\alpha_1 + \alpha_2\int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\xi} a_1(t)\,dt\right)\frac{d\xi}{\psi_1^2(\xi)}\right) \equiv 0,$$

тобто

$$\int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\xi} a_1(t)\,dt\right)\frac{d\xi}{\psi_1^2(\xi)} \equiv \text{const},$$

що неможливо.

Теорема 6.5. *Нехай $y = \psi(x)$ – частковий розв'язок лінійного однорідного рівняння (5.5), причому $\psi(x) \neq 0$ на деякій множині $B \subset \langle a, b\rangle$. Тоді рівняння (5.5) можна звести до лінійного однорідного рівняння $(n-1)-$го порядку на множині B.*

Доведення. Зробимо у рівнянні (5.5) заміну $y = z(x)\psi(x)$. Тоді

$$
\begin{gathered}
y' = z\psi' + z'\psi, \\
y'' = z\psi'' + 2z'\psi' + z''\psi, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y^{(n-1)} = z\psi^{(n-1)} + \dots + z^{(n-1)}\psi, \\
y^{(n)} = z\psi^{(n)} + \dots + z^{(n)}\psi.
\end{gathered}
$$

Підставляючи ці похідні у (5.5), отримаємо на множині B рівняння

$$
\begin{gathered}
z(\psi^{(n)} + a_1(x)\psi^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\psi) + \\
+\psi(z^{(n)} + b_1(x)z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)z') = 0,
\end{gathered} \tag{13.5}
$$

де $b_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, виражаються через $\psi(x)$, …, $\psi^{(n-1)}(x)$. Оскільки $\psi(x)$ – розв'язок рівняння (5.5) і $\psi(x) \not\equiv 0$ на B, то з (13.5) отримаємо рівняння

$$
u^{(n-1)} + b_1(x)u^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(x)u = 0, \tag{14.5}
$$

де $u = z'$. Таким чином, ми прийшли на множині B до лінійного однорідного рівняння $(n-1)-$го порядку щодо невідомої функції $u(x)$ і теорему доведено.

Зауваження 2.5. *Якщо сукупність функцій $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ є фундаментальною системою розв'язків для рівняння (14.5), то функції*

$$
\psi(x), \psi(x)\int_{x_0}^{x} u_2(\xi)\,d\xi, \dots, \psi(x)\int_{x_0}^{x} u_n(\xi)\,d\xi, \;\; x_0 \in B \tag{15.5}
$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.5).

Справді, з доведення теореми 6.5 видно, що функції

$$
\psi(x)\int_{x_0}^{x} u_i(\xi)\,d\xi, \;\; i = 2, \dots, n
$$

є розв'язками рівняння (5.5). Припустимо тепер, що розв'язки (15.5) лінійно залежні, тобто справедлива тотожність

$$
\alpha_1\psi(x) + \alpha_2\psi(x)\int_{x_0}^{x} u_2(\xi)\,d\xi + \dots + \alpha_n\psi(x)\int_{x_0}^{x} u_n(\xi)\,d\xi \equiv 0,
$$

причому не всі α_i, $i = 1, \dots, n$, дорівнюють нулю. Оскільки $\psi(x) \not\equiv 0$ на B, то

$$\alpha_1 + \alpha_2 \int\limits_{x_0}^{x} u_2(\xi)\, d\xi + \dots + \alpha_n \int\limits_{x_0}^{x} u_n(\xi)\, d\xi \equiv 0.$$

Після диференціювання цієї тотожності за x отримаємо

$$\alpha_2 u_2(x) + \dots + \alpha_n u_n(x) \equiv 0.$$

Але $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ – лінійно незалежні, тому $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_n = 0$. Тоді і $\alpha_1 = 0$, що суперечить припущенню. Таким чином, сукупність (15.5) є фундаментальною системою розв'язків рівняння (5.5).

Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння (1.5).

Теорема 7.5. *Нехай $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (5.5). Тоді загальний розв'язок рівняння (1.5) може бути записаний формулою*

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j \psi_j(x) + \theta(x), \tag{16.5}$$

де $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі, а $\theta(x)$ – який-небудь частковий розв'язок рівняння (1.5).

Доведення. Як відомо, функції

$$\vec{\varphi}^{\,1}(x), \dots, \vec{\varphi}^{\,n}(x), \;\; \vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\psi_i(x), \dots, \psi_i^{(n-1)}(x)), \;\; i = 1, \dots, n,$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійної однорідної системи (6.5), а функція

$$\vec{\omega}(x) = (\theta(x), \dots, \theta^{(n-1)}(x))$$

є частковим розв'язком системи (3.5). Отже, згідно з теоремою 10.4 формула

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{\varphi}^{\,j}(x) + \vec{\omega}(x)$$

описує всі розв'язки системи (3.5), а тому на підставі леми 1.3 формула (16.5) описує всі розв'язки рівняння (1.5).

Теорема 8.5. *Нехай $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (5.5). Тоді частковий розв'язок рівняння (1.5) можна знайти методом варіації сталих.*

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (1.5) у вигляді

$$y = C_1(x)\psi_1(x) + \dots + C_n(x)\psi_n(x), \tag{17.5}$$

де $C_1(x), \dots, C_n(x)$ – невідомі функції. Оскільки невідомих функцій є n, а рівняння (1.5) дає лише одне співвідношення для їх знаходження, то ми виберемо $n - 1$ умов зручним для нас способом. Продиференціюємо функцію (17.5),

$$y' = C_1'(x)\psi_1(x) + \dots + C_n'(x)\psi_n(x) + C_1(x)\psi_1'(x) + \dots + C_n(x)\psi_n'(x),$$

і покладемо

$$C_1'(x)\psi_1(x) + \cdots + C_n'(x)\psi_n(x) = 0.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо:

$$\begin{gathered} y^{(k)} = C_1(x)\psi_1^{(k)}(x) + \cdots + C_n(x)\psi_n^{(k)}(x), \\ C_1'(x)\psi_1^{(k-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\psi_n^{(k-1)}(x) = 0, \;\; k = 2, \ldots, n-1; \\ y^{(n)} = C_1(x)\psi_1^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)\psi_n^{(n)}(x) + \\ + C_1'(x)\psi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\psi_n^{(n-1)}(x). \end{gathered}$$

Підставляючи обчислені похідні у рівняння (1.5) і враховуючи те, що $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння (5.5), матимемо ще одну рівність

$$C_1'(x)\psi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\psi_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Отже, для знаходження функцій $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$ будемо мати алгебраїчну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)\psi_1(x) + \cdots + C_n'(x)\psi_n(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)\psi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)\psi_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)\psi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\psi_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{18.5}$$

Легко бачити, що визначником системи (18.5) є визначник Вронського фундаментальної системи розв'язків $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$. Тому цей визначник відмінний від нуля на $\langle a, b\rangle$ і система має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = g_1(x), \ldots, C_n'(x) = g_n(x),$$

причому $g_i(x) \in C(\langle a, b\rangle)$, $i = 1, \ldots, n$. Взявши яку-небудь первісну

$$\int\limits_{x_0}^{x} g_i(\xi)\,d\xi, \quad x_0 \in \langle a, b\rangle, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

ми отримаємо частковий розв'язок

$$y = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(x) \int\limits_{x_0}^{x} g_i(\xi)\,d\xi \tag{19.5}$$

рівняння (1.5) і теорему доведено.

Вкажемо ще один метод побудови часткового розв'язку рівняння (1.5), коли відома фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (5.5) $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$. Побудуємо, користуючись формулою (10.5), розв'язок рівняння (5.5), який задовольняє початкові умови

$$y(\alpha) = 0, \;\; y'(\alpha) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(\alpha) = 1, \tag{20.5}$$

де $\alpha \in \langle a, b\rangle$. Цей розв'язок, очевидно, буде залежати від параметра α. Позначимо його $y = \omega(x, \alpha)$. Функція $\omega(x, \alpha)$ визначена і неперервна на множині $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$ і має неперервні похідні за x до порядку n включно. Отже,

$$\frac{d^n\omega(x,\alpha)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}\omega(x,\alpha)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)\omega(x,\alpha) \equiv 0. \tag{21.5}$$

Крім того, на підставі початкових умов (20.5) $\omega(x, \alpha)$, як функція змінної x, задовольняє умови

$$\omega(\alpha,\alpha) = 0,\ \omega'(\alpha,\alpha) = 0, \ldots, \omega^{(n-2)}(\alpha,\alpha) = 0,\ \omega^{(n-1)}(\alpha,\alpha) = 1. \tag{22.5}$$

Тут

$$\omega^{(k)}(\alpha,\alpha) = \left[\frac{d^k\omega(x,\alpha)}{dx^k}\right]\bigg|_{x=\alpha}.$$

Умови (22.5), замінюючи α на x, можна записати у вигляді

$$\omega(x,x) = 0,\ \omega'(x,x) = 0, \ldots, \omega^{(n-2)}(x,x) = 0,\ \omega^{(n-1)}(x,x) = 1, \tag{23.5}$$

де

$$\omega^{(k)}(x,x) = \left[\frac{d^k\omega(\alpha,x)}{dx^k}\right]\bigg|_{\alpha=x}.$$

Розглянемо функцію

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \omega(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha, \tag{24.5}$$

де x_0 – яка-небудь точка з $\langle a, b\rangle$. Покажемо, що функція (24.5) є частковим розв'язком рівняння (1.5), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{25.5}$$

Обчислимо спочатку похідні від функції (24.5), враховуючи умови (23.5). Матимемо:

$$y' = \int\limits_{x_0}^{x} \omega'(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha + \omega(x,x)f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \omega'(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$y'' = \int\limits_{x_0}^{x} \omega''(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha + \omega'(x,x)f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \omega''(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$

....

$$y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} \omega^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha + \omega^{(n-2)}(x,x)f(x) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \omega^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$y^{(n)} = \int\limits_{x_0}^{x} \omega^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha + \omega^{(n-1)}(x,x)f(x) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \omega^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha + f(x).$$

Підставляючи знайдені похідні у рівняння (1.5) і враховуючи тотожність (21.5), отримаємо:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = \int_{x_0}^{x} [\omega^{(n)}(x,\alpha) +$$
$$+ a_1(x)\omega^{(n-1)}(x,\alpha) + \cdots + a_n(x)\omega(x,\alpha)]f(\alpha)\,d\alpha + f(x) = f(x),$$

тобто функція (24.5) справді є розв'язком рівняння (1.5). Крім того, легко бачити, що вона задовольняє умови (25.5).

Формула (24.5), яка дає інший відмінний від (19.5) частковий розв'язок рівняння (1.5), називається формулою Коші для цього рівняння, а функція $\omega(x,\alpha)$ – функцією Коші для рівняння (5.5).

§ 2.5. Лінійні однорідні рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами

Як було показано у попередньому параграфі для розв'язування лінійного неоднорідного рівняння достатньо вміти будувати фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння. Метою даного параграфу є виділення такого класу лінійних однорідних рівнянь, для якого відомі методи побудови фундаментальної системи розв'язків. Зокрема, такими рівняннями є лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами, тобто рівняння вигляду

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{26.5}$$

де $a_1, \ldots, a_n$ – сталі.

Перш за все зауважимо, що оскільки коефіцієнти рівняння (26.5) є неперервні на $\mathbb{R}^1$, то і всі розв'язки цього рівняння визначені на $\mathbb{R}^1$. Введемо поняття комплексного розв'язку рівняння (26.5). Нехай задано комплексну функцію $\psi(x)$ дійсної змінної x :

$$\psi(x) = u(x) + iv(x),$$

де $i = \sqrt{-1}$, а $u(x)$, $v(x)$ – дійсні функції. Якщо $u(x)$, $v(x) \in C^n(\mathbb{R}^1)$, то

$$\psi^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x), \;\; k = 1, \ldots, n.$$

Будемо говорити, що $\psi(x)$ є комплексним розв'язком рівняння (26.5), якщо

$$L[\psi(x)] \equiv \psi^{(n)}(x) + a_1\psi^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n\psi(x) \equiv 0.$$

Обчислюючи $L[\psi(x)]$, маємо

$$L[\psi(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)].$$

Тому якщо $L[\psi(x)] \equiv 0$, то $L[u(x)] \equiv 0$ і $L[u(x)] \equiv 0$ і навпаки, з тотожностей $L[u(x)] \equiv 0$, $L[u(x)] \equiv 0$ випливає, що $L[\psi(x)] \equiv 0$. Отже, встановлено теорему.

Теорема 9.5. *Для того, щоб комплексна функція $\psi(x)$ дійсної змінної x була розв'язком рівняння (26.5) необхідно і достатньо, щоб функції $\operatorname{Re}\psi(x)$ і $\operatorname{Im}\psi(x)$ були розв'язками цього рівняння.*

Будемо шукати розв'язки рівняння (26.5) методом Ейлера, тобто у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \tag{27.5}$$

де λ – деякий параметр. Підставляючи функцію (27.5) у рівняння (26.5), отримаємо

$$L[e^{\lambda x}] \equiv (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x} = 0,$$

де

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Оскільки $e^{\lambda x}$ не обертається в нуль на $\mathbb{R}^1$, то функція (27.5) може бути розв'язком рівняння (26.5) тоді і тільки тоді, коли число λ є коренем алгебраїчного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{28.5}$$

яке називається характеристичним рівнянням, а його корені – характеристичними числами рівняння (26.5).

Зауважимо, що рівняння (28.5) має дійсні коефіцієнти. Тому кількість комплексних коренів цього рівняння є парною і якщо λ є комплексним коренем рівняння (28.5), то і число $\overline{\lambda}$ теж буде коренем цього рівняння. Крім того, згідно з теоремою Гауса, рівняння (28.5) має n коренів (враховуючи їх кратність).

Лема 1.5. *Нехай $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ – сукупність функцій, визначених, неперервних і лінійно незалежних на проміжку $\langle a, b\rangle$, така, що поряд з кожною функцією містить спряжену до неї, зокрема:*

$$\psi_1(x) = \overline{\psi}_2(x), \ldots, \psi_{2k-1}(x) = \overline{\psi}_{2k}(x),$$
$$\psi_{2k+1}(x) = \overline{\psi}_{2k+1}(x), \ldots, \psi_n(x) = \overline{\psi}_n(x).$$

Для того, щоб функція

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j\psi_j(x) \tag{29.5}$$

була дійсною необхідно і достатньо, щоб у (29.5) при комплексно спряжених функціях були комплексно спряжені сталі C_j, а при дійсних – дійсні.

Доведення. Нехай спочатку функція (29.5) дійсна, тобто $y = \overline{y}$ або

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\psi_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{C}_j\overline{\psi}_j(x).$$

З цієї рівності, враховуючи умови леми, будемо мати:

$$\sum_{j=1}^{n}(C_j\psi_j(x) - \overline{C}_j\overline{\psi}_j(x)) = (C_1 - \overline{C}_2)\psi_1(x) + (C_2 - \overline{C}_1)\psi_2(x) +$$
$$\cdots + (C_{2k-1} - \overline{C}_{2k})\psi_{2k-1}(x) + (C_{2k} - \overline{C}_{2k-1})\psi_{2k}(x) +$$
$$+(C_{2k+1} - \overline{C}_{2k+1})\psi_{2k+1}(x) + \cdots + (C_n - \overline{C}_n)\psi_n(x) = 0.$$

Оскільки функції $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ лінійно незалежні на $\langle a, b\rangle$, то

$$C_1 = \overline{C}_2, \ldots, C_{2k-1} = \overline{C}_{2k},\ C_{2k+1} = \overline{C}_{2k+1}, \ldots, C_n = \overline{C}_n, \tag{30.5}$$

тобто при комплексно спряжених функціях у формулі (29.5) є комплексно спряжені сталі, а при дійсних – дійсні.

Нехай тепер для сталих формули (29.5) виконуються рівності (30.5). Тоді

$$\begin{gathered}\overline{y} = \overline{C}_1\overline{\psi}_1(x) + \overline{C}_2\overline{\psi}_2(x) + \cdots + \overline{C}_{2k-1}\overline{\psi}_{2k-1}(x) + \\ +\overline{C}_{2k}\overline{\psi}_{2k}(x) + \overline{C}_{2k+1}\overline{\psi}_{2k+1}(x) + \cdots + \overline{C}_n\overline{\psi}_n(x) = \\ = C_2\psi_2(x) + C_1\psi_1(x) + \cdots + C_{2k}\psi_{2k}(x) + C_{2k-1}\psi_{2k-1}(x) + \\ +C_{2k+1}\psi_{2k+1}(x) + \cdots + C_n\psi_n(x) = y\end{gathered}$$

і, таким чином, функція (29.5) є дійсною.

Теорема 10.5. *Нехай характеристичне рівняння (28.5) має n різних коренів, причому*

$$\lambda_1 = \overline{\lambda}_2, \ldots, \lambda_{2k-1} = \overline{\lambda}_{2k},\ \lambda_{2k+1} = \overline{\lambda}_{2k+1}, \ldots, \lambda_n = \overline{\lambda}_n.$$

Тоді сукупність функцій

$$\begin{gathered}e^{x\operatorname{Re}\lambda_{2m-1}}\cos(x\operatorname{Im}\lambda_{2m-1}), e^{x\operatorname{Re}\lambda_{2m-1}}\sin(x\operatorname{Im}\lambda_{2m-1}),\ m = 1, \ldots, k, \\ e^{\lambda_{2k+1}x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\end{gathered} \tag{31.5}$$

є фундаментальною системою розв'язків для рівняння (26.5).

Доведення. Перш за все зауважимо, що оскільки $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – різні корені рівняння (28.5), то функції $\psi_j(x) = e^{\lambda_j x}$, $j = 1, \ldots, n$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (26.5) на $\mathbb{R}^1$. Справді, розглянемо визначник Вронського цих функцій у точці $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

який, очевидно, є визначником Вандермонда. Отже, $W(0) \neq 0$, а це й означає, що розв'язки $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ є лінійно незалежними на $\mathbb{R}^1$. Як відомо з математичного аналізу, справедлива формула Ейлера

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

Нехай $\lambda_{2m-1} = \alpha_{2m-1} + i\beta_{2m-1}$. Тоді за умовою теореми $\lambda_{2m} = \alpha_{2m-1} - i\beta_{2m-1}$. Отже,

$$\begin{gathered}e^{\lambda_{2m-1}x} = e^{\alpha_{2m-1}x}(\cos\beta_{2m-1}x + i\sin\beta_{2m-1}x), \\ e^{\lambda_{2m}x} = e^{\alpha_{2m-1}x}(\cos\beta_{2m-1}x - i\sin\beta_{2m-1}x),\end{gathered}$$

тобто $\psi_{2m-1}(x) = \overline{\psi}_{2m}(x)$, $m = 1, \ldots, k$. Оскільки розв'язки $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ є лінійно незалежними, то формула

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j\psi_j(x), \tag{32.5}$$

де C_j – довільні комплексні сталі, описує всі комплексні розв'язки рівняння (26.5) (теорема 5.5). Згідно з лемою 1.5 функція (32.5) буде дійсною тоді і тільки тоді, коли справедливі рівності

$$C_1 = \overline{C}_2,\ C_3 = \overline{C}_4, \ldots, C_{2k-1} = \overline{C}_{2k},\ C_{2k+1} = \overline{C}_{2k+1}, \ldots, C_n = \overline{C}_n.$$

Нехай

$$C_{2m-1} = \frac{1}{2}(b_{2m-1} - ib_{2m}),\ \ m = 1, \ldots, k.$$

Тоді

$$\begin{aligned} C_{2m-1}\psi_{2m-1}(x) + C_{2m}\psi_{2m}(x) = \\ = \frac{1}{2}(b_{2m-1} - ib_{2m})e^{\alpha_{2m-1}x}(\cos\beta_{2m-1}x + i\sin\beta_{2m-1}x) + \\ + \frac{1}{2}(b_{2m-1} + ib_{2m})e^{\alpha_{2m-1}x}(\cos\beta_{2m-1}x - i\sin\beta_{2m-1}x) = \\ = b_{2m-1}e^{\alpha_{2m-1}x}\cos\beta_{2m-1}x + b_{2m}e^{\alpha_{2m-1}x}\sin\beta_{2m-1}x \end{aligned}$$

і формула (32.5) набере вигляду

$$\begin{aligned} y = \sum_{m=1}^{k}[b_{2m-1}e^{\alpha_{2m-1}x}\cos\beta_{2m-1}x + b_{2m}e^{\alpha_{2m-1}x}\sin\beta_{2m-1}x] + \\ + \sum_{m=2k+1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}, \end{aligned} \tag{33.5}$$

де $b_1, \ldots, b_{2k}, C_{2k+1}, \ldots, C_n$ – довільні дійсні сталі.

На підставі леми 1.5 можна стверджувати, що формула (33.5) описує всі дійсні розв'язки рівняння (26.5), а отже сукупність функцій (31.5), яка є сукупністю розв'язків рівняння (26.5) згідно з теоремою 9.5, утворює фундаментальну систему дійсних розв'язків цього рівняння і теорему доведено.

Зауваження 1.5. *Як видно з доведення теореми 10.5, для побудови фундаментальної системи розв'язків рівняння (26.5) у випадку наявності комплексних коренів характеристичного рівняння (28.5) з двох взаємно спряжених коренів λ_{2m-1} і λ_{2m} достатньо взяти лише один, наприклад, λ_{2m-1}, записати відповідний йому комплексний розв'язок $e^{\lambda_{2m-1}x}$ і взяти за два дійсні розв'язки функції $\mathrm{Re}\, e^{\lambda_{2m-1}x}$ і $\mathrm{Im}\, e^{\lambda_{2m-1}x}$.*

Приклад 1.5. Задано рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

має різні дійсні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Тому функції e^x, e^{2x}, e^{3x} утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння, а формула

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x},$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні дійсні сталі, описує всі дійсні розв'язки вихідного рівняння.

Приклад 2.5. Нехай задано рівняння

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$$

Характеристичне рівняння має один дійсний корінь $\lambda_3 = -1$ і два спряжених комплексних корені: $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$. Згідно з зауваженням 1.5 беремо комплексний розв'язок $e^{(2+3i)x}$ і виділяємо з нього дійсну і уявну частини:

$$e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x),$$
$$\operatorname{Re} e^{(2+3i)x} = e^{2x} \cos 3x, \ \operatorname{Im} e^{(2+3i)x} = e^{2x} \sin 3x.$$

Тоді функції

$$e^{2x} \cos 3x, \ e^{2x} \sin 3x, \ e^{-x}$$

утворюють фундаментальну систему дійсних розв'язків даного рівняння, а формула

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + C_3 e^{-x},$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні дійсні сталі, дає його загальний розв'язок.

Теорема 11.5. *Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – різні корені характеристичного рівняння (28.5), причому корінь λ_j має кратність k_j, $j = 1, \ldots, m$, $k_1 + \cdots + k_m = n$. Тоді сукупність функцій*

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, \ xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_m x}, \ xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x} \end{cases} \tag{34.5}$$

утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння (26.5).

Доведення. Перш за все покажемо, що функції

$$x^{k_j - l} e^{\lambda_j x}, \ l = 1, \ldots, k_j - 1, \ j = 1, \ldots, m, \tag{35.5}$$

є розв'язками рівняння (26.5). Для цього використаємо тотожність

$$L[e^{\lambda x}] = L(\lambda) e^{\lambda x}, \tag{36.5}$$

яка справедлива для всіх λ і x. Продиференціюємо (36.5) k разів по λ :

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} L[e^{\lambda x}] = L\left[\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x}\right] = L[x^k e^{\lambda x}] = \frac{d^k}{d\lambda^k}[L(\lambda e^{\lambda x})] =$$
$$= \sum_{s=0}^{k} C_k^s L^{(s)}(\lambda) x^{k-s} e^{\lambda x}. \tag{37.5}$$

Оскільки λ_j – корінь рівняння (28.5) кратності k_j, то

$$L(\lambda_j) = L'(\lambda_j) = \cdots = L^{(k_j - 1)}(\lambda_j) = 0, \ j = 1, \ldots, m.$$

Тоді з (37.5) маємо

$$L[x^{k_j-l}e^{\lambda_j x}] = \sum_{s=0}^{k_j-l} C^s_{k_j-l} L^{(s)}(\lambda_j) x^{k_j-l-s} e^{\lambda_j x} = 0$$

для $l = 1, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$, а це й означає, що функції (35.5) є розв'язками рівняння (26.5).

Для доведення лінійної незалежності розв'язків (34.5) припустимо протилежне, тобто що має місце тотожність

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{k_j-1} \alpha^j_s x^s e^{\lambda_j x} \equiv 0,$$

причому не всі α^j_s рівні нулю. Останню тотожність можна записати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(x) e^{\lambda_j x} \equiv 0, \tag{38.5}$$

де $P_j(x)$ – поліном степеня не вище $k_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$. Оскільки не всі α^j_s дорівнюють нулю, то хоча б один з поліномів $P_j(x)$ не дорівнює тотожно нулю. Нехай для визначеності $P_m(x) \not\equiv 0$. Помножимо (38.5) на $e^{-\lambda_1 x}$ і продиференціюємо k_1 разів за x. Оскільки многочлен $P_1(x)$ має степінь не вище $k_1 - 1$, то

$$\frac{d^{k_1}}{dx^{k_1}} P_1(x) \equiv 0.$$

Крім того, легко бачити, що

$$\frac{d^s}{dx^s}(P_l(x)e^{\gamma x}) = P^1_l(x)e^{\gamma x}, \;\; s \geq 1,$$

якщо $P_l(x)$ – многочлен степеня $l - 1$, причому $P^1_l(x)$ теж буде многочленом степеня $l - 1$. Тому отримаємо тотожність

$$\sum_{j=2}^{m} P^1_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_1)x} \equiv 0$$

і $P^1_m(x) \not\equiv 0$.

Помножимо тепер (39.5) на $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$ і продиференціюємо k_2 разів за x :

$$\sum_{j=3}^{m} P^2_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_2)x} \equiv 0, \;\; P^2_m(x) \not\equiv 0.$$

Продовжуючи цей процес далі, отримаємо, що

$$P^{m-1}_m(x) \equiv 0 \qquad \text{і} \qquad P^{m-1}_m(x) \not\equiv 0,$$

що неможливо. Отже, функції (34.5) лінійно незалежні і теорему доведено.

Зауваження 2.5. *Якщо в умовах теореми 11.5 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – різні дійсні корені, то сукупність (34.5) буде фундаментальною системою дійсних розв'язків. Нехай тепер серед коренів $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ є комплексні, наприклад, λ_1 і λ_2, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$. Тоді для побудови фундаментальної системи дійсних розв'язків згідно з лемою 1.5 і доведенням теореми 10.5 ми розглядаємо комплексні розв'язки*

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$$

і беремо за дійсні розв'язки функції

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} e^{\lambda_1 x},\ \operatorname{Re}(xe^{\lambda_1 x}), \ldots, \operatorname{Re}(x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}), \\ &\operatorname{Im} e^{\lambda_1 x},\ \operatorname{Im}(xe^{\lambda_1 x}), \ldots, \operatorname{Im}(x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}). \end{aligned}$$

Приклад 3.5. Розглянемо рівняння

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Тут характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

має один простий корінь $\lambda_1 = 3$ і один двократний $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Тому фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$e^{3x},\ e^{2x},\ xe^{2x},$$

а загальний розв'язок рівняння записується у вигляді

$$y = C_1 e^{3x} + e^{2x}(C_2 + C_3 x),$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні дійсні сталі.

Приклад 4.5. Нехай задано рівняння

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Тут характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

має двократний комплесний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + i$ і двократний корінь, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1 - i$, спряжений до нього. Запишемо комплексні розв'язки $e^{(1+i)x}$, $xe^{(1+i)x}$, які відповідають кореневі λ_1. Тоді фундаментальною системою розв'язків вихідного рівняння буде сукупність функцій

$$e^x \cos x,\ xe^x \cos x,\ e^x \sin x,\ xe^x \sin x,$$

а загальний розв'язок рівняння запишеться у вигляді

$$y = e^x[(C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x],$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні дійсні сталі.

§ 3.5. Лінійні неоднорідні рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

У цьому пункті розглядатимемо рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{40.5}$$

де $a_1, \ldots, a_n$ – дійсні сталі, а $f(x) \in C(\langle a, b \rangle)$. Як випливає з теореми 8.5, частковий розв'язок рівняння (40.5) завжди можна побудувати методом варіації сталих, оскільки фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння знаходиться на підставі теорем 10.5, 11.5. Проте в окремих випадках частковий розв'язок рівняння (40.5) можна побудувати іншим методом – методом невизначених коефіцієнтів.

Теорема 12.5. *Нехай $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, де*

$$P_m(x) = p_0 x^m + \cdots + p_m, \;\; p_0 \neq 0.$$

Тоді існує частковий розв'язок рівняння (40.5) у вигляді

$$y = Q_m(x)e^{\alpha x}x^k, \tag{41.5}$$

де

$$Q_m(x) = q_0 x^m + \cdots + q_m,$$

$k = 0$, якщо $L(\alpha) \neq 0$, і k – кратність α, як кореня характеристичного рівняння (28.5), якщо $L(\alpha) = 0$. Числа $q_0, \ldots, q_m$ однозначно знаходяться з деякої лінійної алгебраїчної системи.

Доведення. Нехай

$$L(\alpha) = 0, \ldots, L^{(k-1)}(\alpha) = 0, \;\; L^{(k)}(\alpha) \neq 0, \tag{42.5}$$

тобто α є коренем характеристичного рівняння (28.5) кратності k. Будемо шукати частковий розв'язок рівняння (40.5) у вигляді (41.5), де $q_0, \ldots, q_m$ – невідомі. Підставимо функцію (41.5) у рівняння (40.5) і врахуємо тотожність (37.5):

$$L[y] = L\left[\sum_{j=0}^{m} q_j x^{m-j+k} e^{\alpha x}\right] = \sum_{j=0}^{m} L[q_j x^{m-j+k} e^{\alpha x}] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} q_j L[x^{m-j+k} e^{\alpha x}] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{s=0}^{m-j+k} C^s_{m-j+k} L^{(s)}(\alpha) x^{m-j+k-s} e^{\alpha x} = \sum_{j=0}^{m} p_j x^{m-j} e^{\alpha x}$$

або, враховуючи (42.5),

$$\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{s=k}^{m-j+k} C^s_{m-j+k} L^{(s)}(\alpha) x^{m-j+k-s} e^{\alpha x} = \sum_{j=0}^{m} p_j x^{m-j} e^{\alpha x}.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{s=0}^{m-j} C_{m-j+k}^{k+s} L^{(k+s)}(\alpha) x^{m-j-s} = \sum_{j=0}^{m} p_j x^{m-j}.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, маємо:

$$\begin{aligned}
x^m: &\qquad q_0 C_{m+k}^{k} L^{(k)}(\alpha) = p_0,\\
x^{m-1}: &\qquad q_0 C_{m+k}^{k+1} L^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{m+k-1}^{k} L^{(k)}(\alpha) = p_1,\\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^0: &\qquad q_0 C_{m+k}^{m+k} L^{(m+k)}(\alpha) + \cdots + q_m C_k^k L^{(k)}(\alpha) = p_m.
\end{aligned}$$

Оскільки $L^{(k)}(\alpha) \neq 0$, то з цих рівностей послідовно і однозначно знаходимо $q_0, \ldots, q_m$. Аналогічно розглядається випадок, коли $L(\alpha) \neq 0$.

Зауваження 3.5. *Якщо коефіцієнти многочлена $P_m(x)$ і число α – дійсні, то легко бачити, що розв'язок (41.5) теж буде дійсним.*

Зауваження 4.5. *Нехай $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ і $\psi_j(x)$ є частковим розв'язком рівняння*

$$L[y] = f_j(x), \qquad j = 1, 2.$$

Тоді легко перевірити безпосередньою підстановкою у рівняння (40.5), що функція

$$y = \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

буде частковим розв'язком цього рівняння.

Теорема 13.5. *Нехай*

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}^1(x) \cos \beta x + P_{m_2}^2(x) \sin \beta x],$$

де α, β – дійсні числа, $P_{m_j}^j(x)$ – многочлен степеня m_j, $j = 1, 2$, з дійсними коефіцієнтами. Тоді існує частковий розв'язок рівняння (40.5) у вигляді

$$y = x^k e^{\alpha x}[Q_m^1(x) \cos \beta x + Q_m^2(x) \sin \beta x],$$

де $m = \max\{m_1, m_2\}$; $Q_m^j(x)$, $j = 1, 2$, – многочлен степеня m з дійсними коефіцієнтами; $k = 0$, якщо $L(\alpha + i\beta) \neq 0$, і k є кратністю кореня $\alpha + i\beta$ характеристичного рівняння (28.5), якщо $L(\alpha + i\beta) = 0$. Коефіцієнти многочленів $Q_m^j(x)$, $j = 1, 2$, знаходяться однозначно з деякої лінійної алгебраїчної системи.

Доведення. Перш за все зауважимо, що користуючись формулами Ейлера

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x,$$

знаходимо:

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}.$$

Тоді функцію $f(x)$ можна записати у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{\alpha x}[(P^1_{m_1}(x) - iP^2_{m_2}(x))e^{i\beta x} + (P^1_{m_1}(x) + iP^2_{m_2}(x))e^{-i\beta x}] =$$
$$= R^1_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + R^2_m(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

де

$$R^1_m(x) = \frac{1}{2}(P^1_{m_1}(x) - iP^2_{m_2}(x)), \quad R^2_m(x) = \overline{R^1_m}(x).$$

Розглянемо рівняння

$$L[y] = R^1_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}. \tag{42.5}$$

Згідно з теоремою 12.5 це рівняння має розв'язок

$$y_1 = M^1_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}x^k,$$

де $M^1_m(x)$ – многочлен степеня m, коефіцієнти якого знаходяться однозначно з деякої лінійної алгебраїчної системи. Легко бачити, що рівняння

$$L[y] = R^2_m(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{43.5}$$

має розв'язок

$$y_2 = \overline{M^1_m(x)}e^{(\alpha-i\beta)x}x^k.$$

Справді, оскільки y_1 розв'язок рівняння (42.5), то

$$L[y_1] \equiv R^1_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Тоді, враховуючи, що коефіцієнти рівняння (40.5) дійсні, маємо:

$$\overline{L[y_1]} = L[\overline{y_1}] = \overline{R^1_m(x)}e^{(\alpha-i\beta)x} = R^2_m(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

тобто $\overline{y_1}$ є розв'язком рівняння (43.5).

Нехай

$$M^1_m(x) = \frac{1}{2}(Q^1_m(x) - iQ^2_m(x)).$$

Тоді

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}(Q^1_m(x) - iQ^2_m(x))e^{(\alpha+i\beta)x}x^k +$$
$$+\frac{1}{2}(Q^1_m(x) + iQ^2_m(x))e^{(\alpha-i\beta)x}x^k = x^k e^{\alpha x}[Q^1_m(x)\cos\beta x + Q^2_m(x)\sin\beta x]$$

згідно з зауваженням 5.5 є розв'язком рівняння (40.5) і теорему доведено.

Приклад 5.5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x. \tag{43.5}$$

Розв'язуючи спочатку відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 5y' = 0,$$

маємо:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 5, \ y_\text{о} = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Оскільки права частина рівняння (43.5) має вигляд

$$f(x) = (-5x^2 + 2x)e^{0x}$$

і нуль є простим коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок рівняння (43.5) будемо шукати у вигляді

$$y_\text{ч} = (ax^2 + bx + c)x.$$

Підставляючи $y_\text{ч}$ в рівняння (43.5), отримаємо:

$$\begin{gathered} -15ax^2 + (-10b + 6a)x - 5c + 2b = -5x^2 + 2x; \\ -15a = -5; \quad -10b + 6a = 2; \quad -5c + 2b = 0; \\ a = \frac{1}{3}; \quad b = 0; \quad c = 0; \quad y_\text{ч} = \frac{1}{3}x^3. \end{gathered}$$

Таким чином загальний розв'язок рівняння (43.5) буде мати вигляд

$$y = y_\text{о} + y_\text{ч} = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{1}{3}x^3.$$

Приклад 6.5. Нехай задано рівняння

$$y'' + y = 6\cos 2x + 3\sin 2x. \tag{44.5}$$

Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$\begin{gathered} y'' + y = 0; \quad \lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda = \pm i; \\ y_\text{о} = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \end{gathered}$$

Права частина рівняння (44.5) має вигляд

$$\begin{gathered} f(x) = (6\cos 2x + 3\sin 2x)e^{0x}; \\ \alpha + i\beta = i \cdot 2; \quad m_1 = m_2 = 0; \quad m = 0. \end{gathered}$$

Тому згідно з теоремою 13.5 існує частковий розв'язок рівняння (44.5) у вигляді

$$y_\text{ч} = a\cos 2x + b\sin 2x.$$

Підставляючи $y_\text{ч}$ у рівняння (44.5), отримаємо:

$$\begin{gathered} y_\text{ч}' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x; \quad y_\text{ч}'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x; \\ -3a\cos 2x - 3b\sin 2x = 6\cos 2x + 3\sin 2x; \\ -3a = 6; \qquad -3b = 3; \qquad a = -2; \qquad b = -1; \\ y_\text{ч} = -2\cos 2x - \sin 2x. \end{gathered}$$

Тому загальний розв'язок рівняння (44.5) запишеться у вигляді

$$y = y_\text{о} + y_\text{ч} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2\cos 2x - \sin 2x.$$

§ 4.5. Деякі часткові види лінійних рівнянь n-го порядку зі змінними коефіцієнтами

1^0. **Рівняння Ейлера.** Лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{45.5}$$

де $a_1, \ldots, a_n$ – дійсні сталі, називається рівнянням Ейлера.

Розглянемо спочатку лінійне однорідне рівняння Ейлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{46.5}$$

Оскільки коефіцієнт x^n при похідній $y^{(n)}$ обертається в нуль у точці $x = 0$, то будемо розглядати це рівняння на інтервалах $(-\infty, 0)$ і $(0, +\infty)$. Нехай для визначеності $x \in (0, +\infty)$. Зробимо у рівнянні (46.5) заміну незалежної змінної за формулою

$$t = \ln x \qquad \text{або} \qquad x = e^t$$

(якщо $x \in (-\infty, 0)$, то заміна $x = -e^t$). Тоді

$$\frac{d}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt} \quad \text{і} \quad y'_x = y'_t e^{-t};$$

$$y''_x = (y''_t e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = (y''_t - y'_t)e^{-2t};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_x^{(n)} = [y_t^{(n)} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)! y'_t]e^{-nt}.$$

Підставляючи знайдені похідні у рівняння (46.5), отримаємо лінійне однорідне рівняння

$$y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \cdots + b_n y = 0 \tag{47.5}$$

n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – різні корені характеристичного рівняння

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_n = 0, \tag{48.5}$$

причому кратність кореня λ_j дорівнює числові k_j, $k_j \geq 1$, $j = 1, \ldots, m$. Далі, нехай корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2l}$ – комплексні, причому $\lambda_{2j-1} = \overline{\lambda}_{2j}$, $j = 1, \ldots, l$, а $\lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_m$ – дійсні. Тоді згідно з теоремами 10.5 і 11.5 фундаментальна система розв'язків рівняння (47.5) може бути записана у вигляді:

$$e^{t\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \cos(t\operatorname{Im}\lambda_{2j-1}),\ te^{t\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \cos(t\operatorname{Im}\lambda_{2j-1}), \ldots,$$
$$t^{k_{2j-1}-1} e^{t\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \cos(t\operatorname{Im}\lambda_{2j-1}),$$
$$e^{t\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \sin(t\operatorname{Im}\lambda_{2j-1}),\ te^{t\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \sin(t\operatorname{Im}\lambda_{2j-1}), \ldots,$$
$$t^{k_{2j-1}-1} e^{t\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \sin(t\operatorname{Im}\lambda_{2j-1}),\ j = 1, \ldots, l;$$
$$e^{\lambda_p t},\ te^{\lambda_p t}, \ldots, t^{k_p-1} e^{\lambda_p t},\ p = 2l+1, \ldots, m.$$

Повертаючись до старої незалежної змінної x, отримаємо фундаментальну систему розв'язків вихідного рівняння (46.5):

$$x^{\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \cos(\operatorname{Im}\lambda_{2j-1} \ln x),\ x^{\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \ln x \cos(\operatorname{Im}\lambda_{2j-1} \ln x), \ldots,$$
$$x^{\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} (\ln x)^{k_{2j-1}-1} \cos(\operatorname{Im}\lambda_{2j-1} \ln x),$$
$$x^{\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \sin(\operatorname{Im}\lambda_{2j-1} \ln x),\ x^{\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} \ln x \sin(\operatorname{Im}\lambda_{2j-1} \ln x), \ldots,$$
$$x^{\operatorname{Re}\lambda_{2j-1}} (\ln x)^{k_{2j-1}-1} \sin(\operatorname{Im}\lambda_{2j-1} \ln x),\ j = 1, \ldots, l;$$
$$x^{\lambda_p},\ x^{\lambda_p} \ln x, \ldots, x^{\lambda_p} (\ln x)^{k_p-1},\ p = 2l+1, \ldots, m.$$

Зауваження 5.5. *Оскільки розв'язки рівняння (47.5) ми шукали у вигляді* $y = \exp(\lambda t)$, *а* $t = \ln x$, *то, очевидно, розв'язки рівняння Ейлера (46.5) слід шукати у вигляді* $y = x^\lambda$. *Тоді*

$$y^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)x^{\lambda-k}, \quad k = 1,\dots,n$$

і характеристичне рівняння (48.5) матиме вигляд

$$\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (50.5)$$

Отримане рівняння (50.5) будемо називати характеристичним рівнянням для рівняння Ейлера (46.5).

Фундаментальна система розв'язків рівняння Ейлера будується за формулами (49.5).

Приклад 7.5. Нехай задано рівняння

$$x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0.$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ і функції

$$y_1 = x, \qquad y_2 = x\ln x$$

складуть фундаментальну систему розв'язків вихідного рівняння. Отже, загальний розв'язок матиме вигляд

$$y = (C_1 + C_2\ln x)x.$$

Зауваження 6.5. *Нехай у рівнянні (45.5)*

$$f(x) = x^\alpha[P^1_{m_1}(\ln x)\cos(\beta\ln x) + P^2_{m_2}(\ln x)\sin(\beta\ln x)],$$

де $P^i_{m_i}$ *– многочлен степеня* $m_i (i = 1, 2)$ *щодо* $\ln x$. *Тоді на підставі теореми 13.5 і зауваження 5.5 можемо стверджувати, що рівняння (45.5) має частковий розв'язок у вигляді*

$$y = x^\alpha[Q^1_m(\ln x)\cos(\beta\ln x) + Q^2_m(\ln x)\sin(\beta\ln x)](\ln x)^k,$$

де $Q^i_m(x)$ *– многочлен степеня* $m = \max\{m_1, m_2\}$ *щодо* $\ln x$ *з невизначеними коефіцієнтами;* $k = 0$, *якщо* $\alpha + i\beta$ *не буде коренем характеристичного рівняння (50.5) і якщо* $\alpha + i\beta$ *є коренем характеристичного рівняння (50.5), то* k *дорівнює його кратності.*

Приклад 8.5. Нехай задано рівняння

$$x^2y'' - 2y = \sin\ln x.$$

Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$x^2y'' - 2y = 0; \quad \lambda(\lambda-1) - 2 = 0; \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0;$$
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2; \qquad y_o = C_1x^{-1} + C_2x^2.$$

У нашому випадку $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $\alpha + i\beta = i$, $k = 0$. Отже, частковий розв'язок вихідного рівняння існує у вигляді

$$y_ч = a\cos\ln x + b\sin\ln x.$$

Підставимо $y_ч$ у неоднорідне рівняння:

$$y'_ч = -\frac{a}{x}\sin\ln x + \frac{b}{x}\cos\ln x;$$
$$y''_ч = \frac{a}{x^2}\sin\ln x - \frac{a}{x^2}\cos\ln x - \frac{b}{x^2}\cos\ln x - \frac{b}{x^2}\sin\ln x;$$
$$(a-b)\sin\ln x - (a+b)\cos\ln x - 2a\cos\ln x - 2b\sin\ln x = \sin\ln x;$$
$$-3a - b = 0; \quad a - 3b = 1; \quad a = 0,1; \quad b = -0,3;$$
$$y_ч = 0,1\cos\ln x - 0,3\sin\ln x.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишеться у вигляді

$$y = y_о + y_ч = C_1x^{-1} + C_2x^2 + 0,1\cos\ln x - 0,3\sin\ln x.$$

2^0. **Рівняння Чебишова.** Лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \tag{51.5}$$

називається рівнянням Чебишева.

Розглянемо це рівняння на інтервалі $(-1,1)$. Очевидно, що на цьому інтервалі виконуються умови теореми існування і единості розв'язку задачі Коші для рівняння (51.5). Побудуємо загальний розв'язок цього рівняння. Зробимо заміну незалежної змінної x за формулою $x = \cos t$. Тоді

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sin t};$$
$$y'' = -\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sin t}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt}\frac{\cos t}{\sin^3 t}.$$

Підставляючи y, y', y'' у рівняння (51.5) і замінюючи x через $\cos t$, отримаємо

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

Оскільки це рівняння має загальний розв'язок

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt,$$

то загальний розв'язок рівняння Чебишева буде

$$y = C_1\cos(n\arccos x) + C_2\sin(n\arccos x).$$

Частковий розв'язок $y_1 = \cos(n\arccos x)$ для $n \in \mathbb{N}$ буде многочленом степеня n. Справді, використаємо формулу Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Звідси

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \dots +$$
$$+(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi + \dots +$$
$$+\begin{cases} (-1)^{n/2}\sin^n\varphi, & n - \text{парне}, \\ (-1)^{(n-1)/2} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi, & n - \text{непарне}. \end{cases}$$

Покладемо тут $\varphi = \arccos x$ і зауважимо, що $\sin\varphi$ входить лише у парних степенях. Тому

$$\cos^k\varphi = x^k, \quad \sin^{2k}\varphi = (\sin^2\varphi)^k = (1 - \cos^2\varphi)^k = (1 - x^2)^k,$$

і y_1 справді є многочленом степеня n. Цей многочлен називається многочленом Чебишова.

ГЛАВА 6. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

§ 1.6. Загальний розв'язок однорідної системи у випадку простих власних значень

Розглянемо спочатку лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_i^j y_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.6}$$

Тут $a_i^j \in \mathbb{R}^1$, $j, i = 1, \dots, n$.

На підставі загальної теорії лінійних диференціальних систем (глава 4) можна сказати, що для (1.6) існує фундаментальна система розв'язків

$$\vec{\varphi}^{\,1}(x), \dots, \vec{\varphi}^{\,n}(x) \quad (\vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\varphi_1^i(x), \dots, \varphi_n^i(x)),\ i = 1, \dots, n),$$

визначена на всій числовій осі і загальний розв'язок системи (1.6) можна записати у вигляді

$$y_i = C_1 \varphi_i^1(x) + \dots + C_n \varphi_i^n(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

де $C_1, \dots, C_n$ – довільні дійсні сталі.

Якщо ввести матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ . & . & \dots & . \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

і вектор-стовпчик $\vec{y} = \mathrm{colon}(y_1, \dots, y_n)$, то систему (1.6) можна записати у вигляді

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}. \tag{2.6}$$

Будемо шукати розв'язок системи (2.6) методом Ейлера, а саме у вигляді

$$\vec{y} = \vec{\gamma} e^{\lambda x}, \tag{3.6}$$

де $\vec{\gamma} = \mathrm{colon}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – ненульовий сталий вектор, λ – параметр. Підставимо функцію (3.6) у систему (2.6). Отримаємо

$$\lambda \vec{\gamma} e^{\lambda x} = A \vec{\gamma} e^{\lambda x},$$

або

$$(A - \lambda E)\vec{\gamma} = 0. \tag{4.6}$$

Тут E – одинична матриця розміром $n \times n$.

Очевидно, (4.6) є лінійною алгебраїчною системою. Як відомо, система (4.6) має ненульовий розв'язок $\vec{\gamma}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{5.6}$$

Отже, функція вигляду (3.6) буде розв'язком системи (2.6) тоді і тільки тоді, коли λ є власним значенням, а $\vec{\gamma}$ – відповідним йому власним вектором матриці A.

Позначимо різні власні значення матриці A через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m \le n$. Нехай λ_j як корінь рівняння (5.6) має кратність k_j, $j = 1, \ldots, m$. Крім того, нехай власному значенню λ_j відповідає l_j лінійно незалежних власних векторів матриці A, $j = 1, \ldots, m$. Як відомо з лінійної алгебри, $k_j \ge l_j$, $j = 1, \ldots, m$;

$$k_1 + \cdots + k_m = n; \quad m \le l_1 + \cdots + l_m = s \le n.$$

Позначимо лінійно незалежні власні вектори матриці A, які відповідають власному значенню λ_j, через

$$\vec{\gamma}^{\,j,1}, \ldots, \vec{\gamma}^{\,j,l_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Можливі два випадки: 1) $s = n$; 2) $s < n$. Розглянемо спочатку випадок 1). Тоді ми отримаємо n різних розв'язків системи (2.6):

$$\begin{gathered}
\vec{\gamma}^{\,1,1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, \vec{\gamma}^{\,1,l_1} e^{\lambda_1 x}, \\
\vec{\gamma}^{\,2,1} e^{\lambda_2 x}, \ldots, \vec{\gamma}^{\,2,l_2} e^{\lambda_2 x}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\vec{\gamma}^{\,m,1} e^{\lambda_m x}, \ldots, \vec{\gamma}^{\,m,l_m} e^{\lambda_m x}.
\end{gathered} \tag{6.6}$$

Легко переконатися, що розв'язки (6.6) утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (2.6). Для цього достатньо перевірити те, що розв'язки (6.6) лінійно незалежні в одній точці (теорема 6.4). Поклавши в (6.6) $x = 0$, отримаємо систему власних векторів матриці A, які, як відомо, лінійно незалежні.

Таким чином, фундаментальна система розв'язків системи (2.6) побудована і тим самим доведено теорему.

Теорема 1.6. *Нехай λ_j – різні власні значення матриці A кратності k_j і нехай кожному λ_j відповідає k_j лінійно незалежних власних векторів*

$$\vec{\gamma}^{\,j,k}, \quad k = 1, \ldots, k_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad m \le n.$$

Тоді всі розв'язки системи (2.6) можуть бути описані формулою

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l_j} C_{j,k} \vec{\gamma}^{\,j,k} e^{\lambda_j x}, \tag{7.6}$$

де $C_{j,k}$ – довільні сталі.

Зауваження 1.6. *Якщо всі власні значення матриці A дійсні, то формула (7.6) при довільних дійсних сталих $C_{j,k}$ описує всі дійсні розв'язки системи (2.6). Якщо ж серед власних значень матриці A є комплексні числа, то серед розв'язків системи (6.6) будуть комплексні розв'язки. Тобто загальний розв'язок (7.6) буде комплексним. Виділимо з (7.6) множину всіх дійсних розв'язків системи (2.6). Для цього перш за все зауважимо: якщо число $\lambda_1 = a + ib$ є коренем рівняння (5.6) кратності k_1, то число $a - ib$ теж буде коренем рівняння (5.6) кратності k_1. Отже, можемо взяти $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Тоді $k_1 = k_2$.*

Тепер зрозуміло, що якщо $\vec{\gamma}^{\,1,j}$, $j = 1, \ldots, k_1$, є власним вектором матриці A, який відповідає власному значенню λ_1, то $\overline{\vec{\gamma}}^{\,1,j}$, $j = 1, \ldots, k_1$, буде власним вектором, який *відповідає власному значенню λ_2 (для цього достатньо підставити $\overline{\vec{\gamma}}^{1,j}$, $j = 1, \ldots, k_1$, в систему (4.6), коли $\lambda = \lambda_2$).*

Таким чином, розв'язки системи (6.6), які відповідають спряженим власним значенням λ_1 і λ_2, можна вибрати попарно спряженими

$$\vec{\gamma}^{1,j} e^{\lambda_1 x} = \overline{\vec{\gamma}^{2,j} e^{\lambda_2 x}}, \quad j = 1, \ldots, k_1.$$

Отже, система лінійно незалежних векторів (6.6) поряд з кожним вектором містить спряжений до нього. Тоді на підставі леми 1.5, яка справедлива і для векторних функцій, розв'язок (7.6) буде дійсним тоді і тільки тоді, коли при комплексно спряжених векторах системи (6.6) стоять комплексно спряжені сталі, а при дійсних – дійсні.

Приклад 1.6. Розглянемо систему

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

Складемо рівняння для знаходження власних значень матриці A :

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Тепер знайдемо власні вектори. Візьмемо спочатку $\lambda_1 = 1$. Тоді матимемо

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_2^1 = -1$, $\gamma_3^1 = 0$.

Тепер візьмемо $\lambda_2 = i$. Аналогічно, як і в попередньому випадку, одержуємо систему

$$\begin{cases} (2-i)\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 - i\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 - (1+i)\gamma_3 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $\gamma_1^2 = 1$, $\gamma_2^2 = i$, $\gamma_3^2 = 1$.

Як було зазначено вище, власний вектор, який відповідає власному значенню $-i$, можна вибрати спряженим до $\vec{\gamma}^2$. Отже, можемо припустити, що $\gamma_1^3 = 1$, $\gamma_2^3 = -i$, $\gamma_3^3 = 1$. Таким чином, одержуємо три лінійно незалежні розв'язки системи (8.6)

$$\vec{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \quad \vec{y}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix}, \quad \vec{y}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix}$$

і загальний розв'язок

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} + \tilde{C}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix}. \tag{9.6}$$

Для того, щоб виділити множину дійсних розв'язків системи (8.6), ми беремо за C_1 довільну дійсну сталу, а за $\tilde{C}_2$ і $\tilde{C}_3$ – взаємно спряжені комплексні сталі. Припустимо, що $\tilde{C}_2 = \frac{1}{2}(C_2+iC_3)$, $\tilde{C}_3 = \frac{1}{2}(C_2-iC_3)$, де C_2 і C_3 – довільні дійсні сталі. Якщо скористатися формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

то (9.6) легко перетворити до вигляду

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}. \tag{10.6}$$

Звернемо увагу на те, що формулу (10.6) можна отримати іншим, простішим способом. Для цього виділимо в розв'язку

$$\vec{y}^{\,2} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

дійсну і уявну частини.

Оскільки комплексна функція $\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}^{\,1}(x) + i\vec{\varphi}^{\,2}(x)$ буде розв'язком системи (2.6) тоді і тільки тоді, коли $\vec{\varphi}^{\,1}(x)$ і $\vec{\varphi}^{\,2}(x)$ будуть розв'язками цієї системи (перевіряється безпосередньою підстановкою в систему (2.6)), то функції

$$\vec{y}^{\,2,1} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \vec{y}^{\,2,2} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

будуть розв'язками системи (2.6). Бачимо, що саме вони входять в загальний розв'язок (10.6).

Отже, якщо ми маємо два комплексно спряжені власні значення матриці A ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$), то немає потреби будувати всі лінійно незалежні власні вектори для обох власних значень. Достатньо взяти одне з них, наприклад λ_1, побудувати для нього всі лінійно незалежні власні вектори, записати відповідні розв'язки системи (2.6) у вигляді (3.8) і виділити в них дійсні і уявні частини, взявши їх за нові розв'язки системи (2.6). Якщо власному значенню λ_1 відповідає k_1 лінійно незалежних власних векторів, то цим шляхом ми отримаємо $2k_1$ дійсних лінійно незалежних розв'язків системи (2.6).

§ 2.6. Загальний розв'язок однорідної системи у випадку наявності кратних власних значень

Перейдемо тепер до вивчення випадку 2), коли $s < n$. Система (6.6) містить у цьому випадку s лінійно незалежних розв'язків і не буде фундаментальною. Для побудови загального розв'язку системи (2.6) використаємо інший підхід. Але спочатку наведемо деякі допоміжні твердження з лінійної алгебри.

Множину всеможливих комплексних векторів вигляду $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ з n координатами та покоординатними операціями додавання і множення на комплексні числа будемо називати комплексним векторним простором і позначати через $\mathbb{C}^n$. Відомо, що у просторі $\mathbb{C}^n$ існує базис, який складається з n елементів.

Нехай L – лінійний оператор у $\mathbb{C}^n$, $\vec{e}^{\,1}, \ldots, \vec{e}^{\,n}$ – деякий базис в $\mathbb{C}^n$. Тоді

$$L\vec{e}^{\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \vec{e}^{\,k}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11.6}$$

Матриця $A = (a_k^j)$ називається матрицею лінійного оператора L щодо базису $\vec{e}^{\,1}, \ldots, \vec{e}^{\,n}$. Кожному лінійному операторові L щодо фіксованого базису $\vec{e}^{\,1}, \ldots, \vec{e}^{\,n}$ в $\mathbb{C}^n$ відповідає деяка матриця $A = (a_k^j)$. Навпаки, якщо $\vec{e}^{\,1}, \ldots, \vec{e}^{\,n}$ – деякий базис в $\mathbb{C}^n$ і $A = (a_k^j)$ – довільна квадратна матриця порядку n, то формули (11.6) визначають деякий лінійний оператор L в $\mathbb{C}^n$.

Нехай $\vec{r}^{\,1}, \ldots, \vec{r}^{\,n}$ – інший базис в $\mathbb{C}^n$, пов'язаний з базисом $\vec{e}^{\,1}, \ldots, \vec{e}^{\,n}$ за допомогою формул

$$\vec{r}^{\,j} = \sum_{k=1}^{n} u_k^j \vec{e}^{\,k}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

де $U = (u_k^j)$ – невироджена матриця. Тоді матриця B оператора L щодо базису $\vec{r}^{\,1}, \ldots, \vec{r}^{\,n}$ має вигляд

$$B = U^{-1}AU. \tag{12.6}$$

Матриці A і B, які зв'язані співвідношенням (12.6), називаються подібними. Відомо, що подібні матриці мають одні і ті ж власні значення, які є власними значеннями оператора L.

Нехай тепер A – це матриця системи (2.6). Введемо позначення

$$\mu_1 = \lambda_1, \ldots, \mu_{l_1} = \lambda_1,\ \mu_{l_1+1} = \lambda_2, \ldots, \mu_{l_1+l_2} = \lambda_2, \ldots,$$
$$\mu_{l_1+\cdots+l_{m-1}+1} = \lambda_m, \ldots, \mu_s = \lambda_m,\ \mu_{s+1} = \lambda_1, \ldots, \mu_{s+j_1} = \lambda_1,$$
$$\mu_{s+j_1+1} = \lambda_2, \ldots, \mu_{s+j_1+j_2} = \lambda_2, \ldots, \mu_{s+j_1+\cdots+j_{m-1}+1} = \lambda_m, \ldots, \mu_n = \lambda_m,$$

де $j_p = k_p - l_p$, $p = 1, \ldots m$.

Отже, μ_j, $j = 1, \ldots, n$, збігається з одним із власних значень λ_p, $p = 1, \ldots m$, а λ_p повторюється k_p разів, де $p = 1, \ldots m$, в системі $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Зауважимо, що коли $k_p = l_p$ для якого-небудь p, $1 \le p \le m$, то λ_p не входить у систему чисел $\mu_{s+1}, \ldots, \mu_n$.

Теорема 2.6. *Існує невироджена матриця T така, що $B = T^{-1}AT$ буде трикутною*

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ 0 & \mu_2 & \ldots & b_2^n \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. Для $n = 1$ твердження теореми очевидне. Нехай теорема справедлива для довільних матриць порядку $n-1$. Доведемо, що тоді вона справедлива для матриць порядку n. У векторному просторі $\mathbb{C}^n$ виберемо деякий базис $\vec{e}^{\,1}, \ldots, \vec{e}^{\,n}$ і розглянемо оператор L, який має у цьому базисі матрицю A. Нехай $\vec{r}^{\,1}$ – який-небудь власний вектор оператора L з власним значенням μ_1. Виберемо вектори $\vec{r}^{\,2}, \ldots, \vec{r}^{\,n}$ так, щоб разом з $\vec{r}^{\,1}$ вони утворювали базис в $\mathbb{C}^n$. Позначимо через $U = (u_k^j)$ матрицю переходу від базису $\vec{e}^{\,1}, \ldots, \vec{e}^{\,n}$ до базису $\vec{r}^{\,1}, \ldots, \vec{r}^{\,n}$:

$$\vec{r}^{\,j} = \sum_{k=1}^{n} u_k^j \vec{e}^{\,k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тоді матриця C оператора L щодо базису $\vec{r}^{\,1}, \ldots, \vec{r}^{\,n}$ має вигляд

$$C = U^{-1} A U. \tag{13.6}$$

Оскільки $\vec{r}^{\,1}$ – власний вектор оператора L, то $L\vec{r}^{\,1} = \mu_1 \vec{r}^{\,1}$. З іншого боку,

$$L\vec{r}^{\,1} = \sum_{k=1}^{n} c_k^j \vec{r}^{\,k}.$$

Тобто

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^j \vec{r}^{\,k} = \mu_1 \vec{r}^{\,1},$$

звідки отримаємо $c_1^1 = \mu_1$, $c_2^1 = 0$, $\ldots$, $c_n^1 = 0$. Таким чином, матриця C має такий вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} \mu_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^n \\ 0 & c_2^2 & \ldots & c_2^n \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & c_n^2 & \ldots & c_n^n \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} c_2^2 & \ldots & c_2^n \\ . & \ldots & . \\ c_n^2 & \ldots & c_n^n \end{pmatrix} = C_1 \quad -$$

деяка квадратна матриця порядку $n-1$.

Перейдемо до нового базису $\vec{h}^{\,1}, \ldots, \vec{h}^{\,n}$ за допомогою перетворення

$$\vec{h}^{\,j} = \sum_{k=1}^{n} v_k^j \vec{r}^{\,k}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

де $V = (v_k^j)$ – невироджена матриця вигляду

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & v_2^2 & \ldots & v_2^n \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & v_n^2 & \ldots & v_n^n \end{pmatrix}.$$

Тут

$$\begin{pmatrix} v_2^2 & \ldots & v_2^n \\ . & \ldots & . \\ v_n^2 & \ldots & v_n^n \end{pmatrix} = V_1 \quad -$$

невироджена матриця порядку $n-1$. Щодо базису $\vec{h}^1, \ldots, \vec{h}^n$ матриця B оператора L, очевидно, має вигляд

$$B = V^{-1}CV = \begin{pmatrix} \mu_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ 0 & q_2^2 & \ldots & q_2^n \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & q_n^2 & \ldots & q_n^n \end{pmatrix}, \tag{14.6}$$

де

$$\begin{pmatrix} q_2^2 & \ldots & q_2^n \\ . & \ldots & . \\ q_n^2 & \ldots & q_n^n \end{pmatrix} = V_1^{-1}C_1V_1.$$

За припущенням індукції існує така невироджена матриця V_1, що матриця $V_1^{-1}C_1V_1$ буде трикутною,

$$V_1^{-1}C_1V_1 = \begin{pmatrix} \mu_2 & b_2^3 & \ldots & b_2^n \\ 0 & \mu_3 & \ldots & b_3^n \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

На підставі (13.6), (14.6) матимемо

$$\begin{aligned} B = V^{-1}CV = V^{-1}U^{-1}AUV = (UV)^{-1}A(UV) = \\ = T^{-1}AT, \qquad T = UV. \end{aligned} \tag{15.6}$$

На головній діагоналі матриці B є її власні значення $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Всі μ_j, $j = 1, \ldots, n$, будуть власними значеннями матриці A, оскільки A і B на підставі (15.6) подібні. Теорему 2.6 доведено.

Теорема 3.6. *Нехай A – квадратна матриця порядку n. Тоді існує така невироджена матриця T, що матриця $B = T^{-1}AT$ буде трикутною, а її елементи b_j^k, $j < k$, будуть за модулем меншими від заданого числа $b > 0$.*

Доведення. Справді, згідно з теоремою 2.6 існує така невироджена матриця T_1, що

$$C = T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^n \\ 0 & \mu_2 & \ldots & c_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Візьмемо матрицю

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & r_n \end{pmatrix}, \quad r_1, \ldots, r_n \neq 0;$$

тоді

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r_1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \dfrac{1}{r_n} \end{pmatrix}$$

і

$$B = R^{-1}CR = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dfrac{r_2}{r_1}r_1^2 & \dots & \dfrac{r_{n-1}}{r_1}r_1^{n-1} & \dfrac{r_n}{r_1}r_1^n \\ 0 & \mu_2 & \dots & \dfrac{r_{n-1}}{r_2}r_2^{n-1} & \dfrac{r_n}{r_2}r_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & \dfrac{r_n}{r_{n-1}}r_{n-1}^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Виберемо $r_n \neq 0$ довільно. Якщо взяти достатньо великим число r_{n-1}, то елемент $\dfrac{r_n}{r_{n-1}}r_{n-1}^n$ можна зробити за модулем меншим від b. Взагалі, якщо елементи $r_{k+1}, \dots,$ r_n вибрані, то можна за рахунок вибору r_k зробити елементи матриці B, які стоять у $k-$тому рядку, за модулем меншими від b.

Крім того,

$$B = R^{-1}CR = R^{-1}T_1^{-1}AT_1R = (T_1R)^{-1}AT_1R = T^{-1}AT,$$

де $T = T_1R$. Теорему доведено.

Теорема 4.6. *Існує невироджена матриця T така, що матриця $B = T^{-1}AT$ має вигляд*

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 & b_1^{s+1} & \dots & b_1^n \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & \mu_s & b_s^{s+1} & \dots & b_s^n \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{s+1} & \dots & b_{s+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

Доведення. У векторному просторі $\mathbb{C}^n$ виберемо деякий базис $\vec{e}^{\,1}, \dots, \vec{e}^{\,n}$ і розглянемо оператор L, який має в цьому базисі матрицю A. Згідно з припущеннями, зробленими раніше, матриця A, а отже і оператор L, має s лінійно незалежних власних векторів з власними значеннями $\mu_1, \dots, \mu_s$. Нехай це будуть відповідно вектори $\vec{r}^{\,1}, \dots, \vec{r}^{\,s}$:

$$L\vec{r}^{\,j} = \mu_j\vec{r}^{\,j}, \quad j = 1, \dots, s. \tag{17.6}$$

Доповнимо їх векторами $\vec{r}^{\,s+1}, \dots, \vec{r}^{\,n}$ до базису простору $\mathbb{C}^n$. При переході від базису $\vec{e}^{\,1}, \dots, \vec{e}^{\,n}$ до базису $\vec{r}^{\,1}, \dots, \vec{r}^{\,n}$ маємо

$$\vec{r}^{\,j} = \sum_{k=1}^{n} u_k^j\vec{e}^{\,k}, \quad j = 1, \dots, n,$$

причому матриця A оператора L переходить у матрицю

$$C = U^{-1}AU, \tag{18.6}$$

де $U = (u_k^j)$ – невироджена.

Оскільки оператор L має в базисі $\vec{r}^{\,1}, \dots, \vec{r}^{\,n}$ матрицю C, то

$$L\vec{r}^{\,j} = \sum_{k=1}^{n} c_k^j\vec{r}^{\,k}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{19.6}$$

З іншого боку, $\vec{r}^{\,1}, \ldots, \vec{r}^{\,s}$ – власні вектори оператора L, тобто справедливі рівності (17.6). Зрівнюючи праві частини (17.6) і праві частини перших s рівностей (19.6), отримуємо матрицю C у вигляді

$$C = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & 0 & b_1^{s+1} & \ldots & b_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \mu_s & b_s^{s+1} & \ldots & b_s^n \\ 0 & \ldots & 0 & c_{s+1}^{s+1} & \ldots & c_{s+1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & c_n^{s+1} & \ldots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Тут

$$\begin{pmatrix} c_{s+1}^{s+1} & \ldots & c_{s+1}^n \\ . & \ldots & . \\ c_n^{s+1} & \ldots & c_n^n \end{pmatrix} = C_1 \quad -$$

квадратна матриця порядку $n - s$.

Виберемо матрицю V порядку n у вигляді

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & v_{s+1}^{s+1} & \ldots & v_{s+1}^n \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & v_n^{s+1} & \ldots & v_n^n \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} v_{s+1}^{s+1} & \ldots & v_{s+1}^n \\ . & \ldots & . \\ v_n^{s+1} & \ldots & v_n^n \end{pmatrix} = V_1, \quad \det\ V_1 \neq 0,$$

V_1 – квадратна матриця порядку $n - s$. За допомогою матриці V перейдемо від базису $\vec{r}^{\,1}, \ldots, \vec{r}^{\,n}$ до нового базису $\vec{h}^{\,1}, \ldots, \vec{h}^{\,n}$:

$$\vec{h}^{\,j} = \sum_{k=1}^{n} v_k^j \vec{r}^{\,k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тоді в базисі $\vec{h}^{\,1}, \ldots, \vec{h}^{\,n}$ матриця B оператора L має вигляд

$$B = V^{-1}CV = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & 0 & b_1^{s+1} & \ldots & b_1^n \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & \mu_s & b_s^{s+1} & \ldots & b_s^n \\ 0 & \ldots & 0 & q_{s+1}^{s+1} & \ldots & q_{s+1}^n \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & q_n^{s+1} & \ldots & q_n^n \end{pmatrix}. \tag{20.6}$$

Тут

$$\begin{pmatrix} q_{s+1}^{s+1} & \ldots & q_{s+1}^n \\ . & \ldots & . \\ q_n^{s+1} & \ldots & q_n^n \end{pmatrix} = V_1^{-1} C_1 V_1.$$

Згідно з теоремою 2.6 матрицю V_1 можна вибрати так, щоб матриця $V_1^{-1}C_1V_1$ мала трикутний вигляд. Отже, матриця B буде мати потрібний вигляд (16.6) і, крім того, на підставі (18.6), (20.6),

$$B = V^{-1}U^{-1}AUV = (UV)^{-1}A(UV) = T^{-1}AT,$$

де $T = UV$. Всі власні значення матриці B будуть власними значеннями матриці A, оскільки A і B подібні. Теорему 4.6 доведено.

Тепер повернемося до питання побудови загального розв'язку системи (2.6), коли $s < n$.

Теорема 5.6. *Кожний розв'язок системи (2.6) має вигляд*

$$\vec{y} = \vec{P}^1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + \vec{P}^m(x)e^{\lambda_m x}, \tag{21.6}$$

де $\vec{P}^j(x) = \mathrm{colon}(P_1^j(x), \ldots, P_n^j(x))$, *а* $P_l^j(x)$ – *многочлени степеня не вище від* $k_j - l_j$, $l = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Доведення. На підставі теореми 4.6 існує така невироджена матриця T порядку n, що $B = T^{-1}AT$ має трикутний вигляд (16.6). Введемо нові змінні $\vec{z}$ за формулою

$$\vec{y} = T\vec{z}. \tag{22.6}$$

Тоді $\vec{y}\,' = T\vec{z}\,'$ і система (2.6) набуде вигляду

$$\vec{z}\,' = B\vec{z}. \tag{23.6}$$

Тепер добре видно, що система (23.6) має трикутний вигляд і її можна розв'язати. Виконаємо інтегрування системи (23.6). Для цього спочатку розглянемо останні $k_m - l_m$ рівнянь з цієї системи. Очевидно, їх можна записати у вигляді

$$\begin{cases} z'_{n-j_m+1} = \lambda_m z_{n-j_m+1} + b_{n-j_m+1}^{n-j_m+2} z_{n-j_m+2} + \cdots + b_{n-j_m+1} z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z'_{n-1} = \lambda_m z_{n-1} + b_{n-1}^n z_n, \\ z'_n = \lambda_m z_n. \end{cases} \tag{24.6}$$

Нагадаємо, що $j_p = k_p - l_p$, $p = 1, \ldots, m$.

З останнього рівняння системи (24.6) знаходимо

$$z_n = C_n e^{\lambda_m x}. \tag{25.6}$$

Якщо підставити (25.6) у попереднє рівняння системи (24.6), то отримаємо рівняння

$$z'_{n-1} - \lambda_m z_{n-1} = b_{n-1}^n C_n e^{\lambda_m x} \tag{26.6}$$

зі сталим коефіцієнтом і правою частиною у вигляді квазіполінома. Як відомо, розв'язок рівняння (26.6) можна записати у вигляді

$$z_{n-1} = (C_{n-1} + C_n b_{n-1}^n x)e^{\lambda_m x}.$$

Аналогічно знаходимо

$$z_{n-2} = \left[C_{n-2} + (C_{n-1}b_{n-2}^{n-1} + C_n b_{n-1}^n)x + \frac{1}{2}C_n b_{n-2}^{n-1} b_{n-1}^n x^2\right] e^{\lambda_m x}.$$

Інтегруючи далі систему (24.6), легко отримуємо розв'язок у вигляді

$$z_{n-j} = P_j^{n-j}(x)e^{\lambda_m x}, \tag{27.6}$$

де $P_j^{n-j}(x)$ – многочлен степеня j, $j = 0, \ldots, j_m - 1$.

Розглянемо тепер наступний блок системи (23.6):

$$\begin{cases} z'_{k+1} = \lambda_{m-1}z_{k+1} + b_{k+1}^{k+2}z_{k+2} + \cdots + b_{k+1}^n z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z'_{n-j_m} = \lambda_{m-1}z_{n-j_m} + b_{n-j_m}^{n-j_m+1}z_{n-j_m+1} + \cdots + b_{n-j_m}^n z_n, \end{cases} \tag{28.6}$$

де $k = n - j_m - j_{m-1}$. Якщо в систему (28.6) підставити знайдені функції (27.6), то вона набуде вигляду

$$\begin{cases} z'_{k+1} = \lambda_{m-1}z_{k+1} + \cdots + b_{k+1}^{n-j_m}z_{n-j_m} + Q_{k+1}(x)e^{\lambda_m x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z'_{n-j_m-1} = \lambda_{m-1}z_{n-j_m-1} + b_{n-j_m-1}^{n-j_m}z_{n-j_m} + Q_{n-j_m-1}(x)e^{\lambda_m x}, \\ z'_{n-j_m} = \lambda_{m-1}z_{n-j_m} + Q_{n-j_m}(x)e^{\lambda_m x}, \end{cases} \tag{29.6}$$

причому всі многочлени $Q_{k+1}(x)$, …, $Q_{n-j_m}(x)$ мають степені не вищі від $k_m - l_m - 1$. Систему (29.6) можна зінтегрувати аналогічно, як і (24.6). Враховуючи, що $\lambda_m \neq \lambda_{m-1}$, отримаємо розв'язок системи (29.6) у вигляді

$$z_{n-j_m-i} = P_{2,i}(x)e^{\lambda_{m-1}x} + P_{1,i}(x)e^{\lambda_m x},$$

де $P_{2,i}(x)$ – многочлени степеня не вище від $k_{m-1} - l_{m-1} - 1$, а $P_{1,i}(x)$ – многочлени степеня не вище від $k_m - l_m - 1$, $i = 0, \ldots, j_{m-1} - 1$.

Інтегруючи далі систему (23.6), отримаємо розв'язок нижньої частини системи, що відповідає власним значенням μ_{s+1}, …, μ_n у вигляді

$$z_{s+i} = \sum_{j=1}^{m} Q_{i,j}(x)e^{\lambda_j x}, \quad i = 1, \ldots, n - s. \tag{30.6}$$

Тут $Q_{i,j}(x)$ – многочлени степеня не вище від $k_j - l_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n - s$.

Зауважимо, що серед коефіцієнтів многочленів, які входять у формулу (30.6), є $n - s$ довільних сталих.

Розглянемо тепер ті рівняння системи (23.6), які відповідають власним значенням μ_1, …, μ_s. Виходячи зі структури матриці B і враховуючи отримані розв'язки (30.6), можемо записати систему

$$z'_i = \mu_i z_i + \sum_{j=1}^{m} Q_{i,j}^1(x)e^{\lambda_j x}, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{31.6}$$

де $Q^1_{i,j}(x)$ – многочлен, степінь якого не перевищує числа $k_j - l_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, s$. Його коефіцієнти виражаються через коефіцієнти многочленів $Q_{i,j}(x)$ з формули (30.6) і коефіцієнти матриці B. Зауважимо, що для кожного i, $1 \le i \le s$, μ_s збігається лише з одним λ_j, $j = 1, \ldots, m$.

Враховуючи те, що у кожному рівнянні системи (31.6), яка, очевидно, розпадається на s окремих рівнянь, одне з чисел λ_j, $j = 1, \ldots, m$, є простим коренем характеристичного рівняння, отримаємо розв'язок цієї системи у вигляді

$$z_j = \sum_{j=1}^{m} Q^2_{i,j}(x) e^{\lambda_j x}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{32.6}$$

Тут многочлен $Q^2_{i,j}(x)$ має степінь не вищий від числа $k_j - l_j$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, s$.

Таким чином, формули (30.6), (32.6) спільно дають загальний розв'язок системи (23.6). Якщо тепер використати формулу (22.6), то легко побачити, що загальний розв'язок системи (2.6) запишеться у вигляді (21.6). Теорему доведено.

Зауваження 2.6. *Якщо проаналізувати шлях інтегрування системи (23.6), то легко побачити, що серед коефіцієнтів многочленів $\vec{P}^1(x)$, ..., $\vec{P}^m(x)$ є n довільних сталих, які у формулу (21.6) входять лінійно. Тоді, перегрупувавши доданки в (21.6), можемо записати загальний розв'язок системи (2.6) у звичному вигляді*

$$\vec{y} = C_1 \vec{\varphi}^{\,1}(x) + \cdots + C_n \vec{\varphi}^{\,n}(x).$$

Крім того, легко бачити, що кожний вектор-многочлен $\vec{P}^j(x)$ містить k_j, $j = 1, \ldots, m$, довільних сталих. Виходячи з цих міркувань, можна вказати правило знаходження розв'язку системи (2.6), не зводячи її до системи вигляду (23.6). Розв'язок системи (2.6), який відповідає власному значенню λ_j, $1 \le j \le m$, можна знайти наступним чином. Записуємо шуканий розв'язок у вигляді

$$y_i = R_i(x) e^{\lambda_j x}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{33.6}$$

де $R_i(x)$ – многочлен степеня $k_j - l_j$, $i = 1, \ldots, n$, з невизначеними коефіцієнтами. Підставляємо функції (33.6) в систему (1.6) і, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо лінійну алгебраїчну систему щодо невідомих коефіцієнтів многочленів $R_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Як було вказано вище, серед коефіцієнтів многочленів $R_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, є k_j довільних, а решта будуть виражатися через них.

Приклад 2.6. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases} \tag{34.6}$$

Рівняння для знаходження власних значень має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси знаходимо $\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = 2$. Отже, $k_1 = 2$. Легко побачити, що $l_1 = 1$, тобто власному значенню λ_1 відповідає лише один власний вектор. Будемо шукати розв'язок системи (34.6) у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = (a_1 x + b_1) e^{2x}, \\ y_2 = (a_2 x + b_2) e^{2x}. \end{cases}$$

Якщо підставити ці функції в (34.6), то матимемо

$$\begin{cases} 2a_1x + a_1 + 2b_1 = (a_1 - a_2)x + b_1 - b_2, \\ 2a_2x + a_2 + 2b_2 = (a_1 + 3a_2)x + b_1 + 3b_2. \end{cases}$$

Звідси отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів a_1, a_2, b_1, b_2 :

$$\begin{cases} 2a_1 = a_1 - a_2, \\ a_1 + 2b_1 = b_1 - b_2, \\ 2a_2 = a_1 + 3a_2, \\ a_2 + 2b_2 = b_1 + 3b_2. \end{cases}$$

Якщо прийняти $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2$, то $a_1 = -C_1 - C_2$, $a_2 = C_1 + C_2$. Таким чином, загальний розв'язок системи (34.6) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = ((-C_1 - C_2)x + C_1)e^{2x}, \\ y_2 = ((C_1 + C_2)x + C_2)e^{2x}. \end{cases}$$

Зауваження 3.6. *Нехай серед власних значень матриці A є комплексні: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тоді є власне значення, спряжене до λ_1. Нехай $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Ми знаємо, що $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$. Легко побачити, що якщо функція $\vec{y} = \vec{P}^1(x)e^{\lambda_1 x}$ є розв'язком системи (2.6), то функція $\vec{y} = \overline{\vec{P}^1(x)}e^{\lambda_2 x}$ також буде розв'язком системи (2.6), причому цей розв'язок відповідає власному значенню λ_2.*

Таким чином, щоб з розв'язку (21.6) виділити множину всіх дійсних розв'язків системи (2.6), потрібно, як і в зауваженні 1.6, з кожної пари комплексно спряжених власних значень λ_j, $\overline{\lambda}_j$ матриці A взяти лише одне, наприклад λ_j, знайти для нього розв'язок системи (2.6)

$$\vec{y} = \vec{P}^j(x)e^{\lambda_j x} = [\vec{P}_1^j(x) + i\vec{P}_2^j(x)]e^{\lambda_j x} = [\vec{P}_1^j(x)\cos(x\mathrm{Im}\,\lambda_j) -$$
$$-\vec{P}_2^j(x)\sin(x\mathrm{Im}\,\lambda_j)]e^{x\mathrm{Re}\,\lambda_j} + i[\vec{P}_1^j(x)\sin(x\mathrm{Im}\,\lambda_j) + \vec{P}_2^j(x)\cos(x\mathrm{Im}\,\lambda_j)]e^{x\mathrm{Re}\,\lambda_j},$$

і взяти за два дійсні розв'язки функції

$$\vec{y}^{\,1} = [\vec{P}_1^j(x)\cos(x\mathrm{Im}\,\lambda_j) - \vec{P}_2^j(x)\sin(x\mathrm{Im}\,\lambda_j)]e^{x\mathrm{Re}\,\lambda_j},$$
$$\vec{y}^{\,2} = [\vec{P}_1^j(x)\sin(x\mathrm{Im}\,\lambda_j) + \vec{P}_2^j(x)\cos(x\mathrm{Im}\,\lambda_j)]e^{x\mathrm{Re}\,\lambda_j}.$$

§ 3.6. Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи

Розглянемо тепер лінійну неоднорідну систему зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_i^j y_j + Q_i(x)e^{\omega x}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{35.6}$$

де $Q_i(x)$ – многочлен степеня N_i, $i = 1, \ldots, n$, ω – число (дійсне або комплексне). Ввівши вектор-многочлен $\vec{Q}(x) = \mathrm{colon}\,(Q_1(x), \ldots, Q_n(x))$, систему (35.6) можна записати так:

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{Q}(x)e^{\omega x}. \tag{36.6}$$

Ми знаємо, що загальний розв'язок системи (36.6) можна подати у вигляді суми загального розв'язку відповідної однорідної системи (2.6) і часткового розв'язку системи (36.6). Раніше було розглянуто знаходження часткового розв'язку системи (36.6) за допомогою методу варіації сталих. Проте для системи (36.6), як і для лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з правою частиною у вигляді квазіполінома, можна використати метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо цей метод для системи (36.6). Як і раніше, зведемо матрицю A за допомогою невиродженої матриці T до трикутного вигляду (16.6), де $B = T^{-1}AT$.

Зробивши заміну $\vec{y} = T\vec{z}$ в системі (36.6), отримаємо систему у вигляді

$$\vec{z}\,' = B\vec{z} + \vec{Q}^1(x)e^{\omega x}, \tag{37.6}$$

де $\vec{Q}^1(x) = T\vec{Q}(x)$. Зауважимо, що

$$\vec{Q}^1(x) = \operatorname{colon}(Q_1^1(x), \ldots, Q_n^1(x))$$

буде вектором-многочленом, кожна компонента $Q_j^1(x)$, $j = 1, \ldots, n$, якого має, взагалі кажучи, степінь $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$. Систему (37.6) можна зінтегрувати аналогічно, як і систему (23.6). При інтегруванні потрібно звернути увагу на те, чи є ω власним значенням матриці A, чи ні. Нехай ω є коренем рівняння (5.6) кратності M (якщо $\det(A - \omega E) \neq 0$, то будемо вважати, що $M = 0$). Тоді ω буде збігатися з M власних значень μ_j, $j = 1, \ldots, n$, і це потрібно врахувати при інтегруванні тих рівнянь системи (37.6), в які ці $\mu_j = \omega$ будуть входити. Таким чином, загальний розв'язок системи (36.6) існує у вигляді

$$\vec{y} = \vec{P}^1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + \vec{P}^m(x)e^{\lambda_m x} + \vec{S}(x)e^{\omega x},$$

де $\vec{P}^j(x)$, як і раніше, – вектор-многочлен степеня не вищого від $k_j - l_j$, $j = 1, \ldots, m$, а $\vec{S}(x) = \operatorname{colon}(S_1(x), \ldots, S_n(x))$ – многочлен, степінь якого не перевищує числа $N + M$. Звідси випливає теорема.

Теорема 6.6. *Система (36.6) має частковий розв'язок у вигляді*

$$\vec{y} = \vec{S}(x)e^{\omega x},$$

де $\vec{S}(x) = \operatorname{colon}(S_1(x), \ldots, S_n(x))$; $S_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, *– многочлен, степінь якого не перевищує числа* $N + M$.

Виходячи з вище сказаного, можемо знайти частковий розв'язок системи (36.6), не зводячи її до трикутного вигляду (37.6). Для цього будемо шукати розв'язок системи (36.6) у вигляді

$$\vec{y} = \vec{R}(x)e^{\omega x}, \tag{38.6}$$

де $\vec{R}(x) = \operatorname{colon}(R_1(x), \ldots, R_n(x))$, $R_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, – многочлен степеня $N + M$ з невизначеними коефіцієнтами. Щоб знайти ці коефіцієнти, потрібно підставити функцію (38.6) в систему (36.6). У результаті підстановки отримаємо в лівій і правій частині многочлени одного і того ж степеня $N+M$. зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, ми прийдемо до лінійної алгебраїчної системи, розв'язок якої існує. Існування розв'язку цієї алгебраїчної системи випливає з теореми 5.6.

Зауваження 4.6. *Розглянемо неоднорідну систему зі сталими коефіцієнтами у вигляді*

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + (\vec{Q}^1(x)\sin\beta x + \vec{Q}^2(x)\cos\beta x)e^{\alpha x}. \tag{39.6}$$

Тут $\vec{Q}^j(x) = \mathrm{colon}\,(Q_1^j(x), \ldots, Q_n^j(x))$, $j = 1, 2$, *а* $Q_i^j(x)$ – *многочлен степеня* $N_{i,j}$, $j = 1, 2$; $i = 1, \ldots, n$, α, β – *дійсні числа.*

Використовуючи формули Ейлера

$$\sin\beta x = \frac{i}{2}(e^{-i\beta x} - e^{i\beta x}),\ \cos\beta x = \frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}),$$

вільний член системи (39.6) можна звести до вигляду

$$(\vec{Q}^1(x)\sin\beta x + \vec{Q}^2(x)\cos\beta x)e^{\alpha x} =$$
$$= \frac{1}{2}[(\vec{Q}^1(x) - i\vec{Q}^2(x))e^{(\alpha+i\beta)x} + (\vec{Q}^1(x) + i\vec{Q}^2(x))e^{(\alpha-i\beta)x}] =$$
$$= \vec{Q}^3(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \vec{Q}^4(x)e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Тут $\vec{Q}^3(x) = \frac{1}{2}(\vec{Q}^1(x) - i\vec{Q}^2(x))$, $\vec{Q}^4(x) = \overline{\vec{Q}^3(x)}$. *Згідно з теоремою 6.6 частковий розв'язок системи (39.6) можна записати у вигляді*

$$\vec{y} = \vec{R}^1(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \vec{R}^2(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, \tag{40.6}$$

де $\vec{R}^j(x) = \mathrm{colon}\,(R_1^j(x), \ldots, R_n^j(x))$, $R_k^j(x)$ – *многочлен степеня* $N + M$, $j = 1, 2$; $k = 1, \ldots, n$. *Тут* $N = \max N_{j,k}$, $M = 0$, *якщо* $\alpha + i\beta$ *(а разом з ним і* $\alpha - i\beta$*) не буде власним значенням матриці* A. *Якщо* $\alpha + i\beta$ *є власним значенням матриці* A, *то* M *дорівнює його кратності (як кореня рівняння (5.6)).*

Легко зауважити, що $\vec{R}^1(x) = \overline{\vec{R}^2(x)}$. *Якщо* $\vec{R}^1(x)$ *записати у вигляді*

$$\vec{R}^1(x) = \frac{1}{2}(\vec{R}^3(x) - i\vec{R}^4(x)),$$

де $\vec{R}^3(x)$, $\vec{R}^4(x)$ – *многочлени з дійсними коефіцієнтами, то частковий розв'язок (40.6) набуде вигляду*

$$\vec{y} = \left[\frac{1}{2}(\vec{R}^3(x) - i\vec{R}^4(x))(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\vec{R}^3(x) + i\vec{R}^4(x))(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]e^{\alpha x} =$$
$$= [\vec{R}^3(x)\cos\beta x + \vec{R}^4(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}.$$

Таким чином, частковий розв'язок системи (39.6) можна шукати у вигляді

$$\vec{y} = [\vec{R}^3(x)\cos\beta x + \vec{R}^4(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, \tag{41.6}$$

де $\vec{R}^j(x) = \mathrm{colon}\,(R_1^j(x), \ldots, R_n^j(x))$, $R_k^j(x)$ – *многочлен з невизначеними коефіцієнтами, степінь якого дорівнює* $N + M$, $j = 1, 2$; $k = 1, \ldots, n$. *Для знаходження коефіцієнтів* *многочленів $\vec{R}^3(x)$, $\vec{R}^4(x)$ функцію (41.6) потрібно підставити в систему (39.6). У результаті підстановки і зрівняння коефіцієнтів спочатку при функціях $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, а потім при степенях x ми отримаємо лінійну алгебраїчну систему, яка має розв'язок.*

Приклад 3.6. Знайти частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + \cos x, \\ y_2' = -y_1 + x + 1. \end{cases} \tag{42.6}$$

Знайдемо всі власні значення матриці даної системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i.$$

Вільний член системи (42.6) $\vec{f}(x) = \mathrm{colon}\,(\cos x, x+1)$ розіб'ємо на суму двох функцій

$$\vec{f}(x) = \vec{f}^{\,1}(x) + \vec{f}^{\,2}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x+1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо окремо часткові розв'язки систем:

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{f}^{\,1}(x), \tag{43.6}$$

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{f}^{\,2}(x). \tag{44.6}$$

Розглянемо спочатку систему (43.6). У цьому випадку $N = 0$, $\alpha + i\beta = i$. Отже, $M = 1$. Будемо шукати частковий розв'язок системи (43.6) у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = (a_1 x + b_1)\cos x + (a_2 x + b_2)\sin x, \\ y_2 = (a_3 x + b_3)\cos x + (a_4 x + b_4)\sin x. \end{cases}$$

Підставивши ці функції в систему (43.6), отримаємо

$$\begin{gathered} (a_2 x + b_2 + a_1)\cos x + (a_2 - a_1 x - b_1)\sin x = \\ = (a_3 x + b_3 + 1)\cos x + (a_4 x + b_4)\sin x, \\ (a_4 x + b_4 + a_3)\cos x + (a_4 - a_3 x - b_3)\sin x = \\ = (-a_1 x - b_1)\cos x + (-a_2 x - b_2)\sin x. \end{gathered}$$

Спочатку зрівняємо коефіцієнти при функціях $\cos x$, $\sin x$:

$$\begin{gathered} a_2 x + b_2 + a_1 = a_3 x + b_3 + 1, \\ a_2 - a_1 x - b_1 = a_4 x + b_4, \\ a_4 x + b_4 + a_3 = -a_1 x - b_1, \\ a_4 - a_3 x - b_3 = -a_2 x - b_2. \end{gathered}$$

Тепер, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо:

$$\begin{gathered} a_2 = a_3, \quad b_2 + a_1 = b_3 + 1, \quad -a_1 = a_4, \quad a_2 - b_1 = b_4, \\ a_4 = -a_1, \quad b_4 + a_3 = -b_1, \quad -a_3 = -a_2, \quad a_4 - b_3 = -b_2. \end{gathered}$$

Звідси

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_1 = 0,5, \quad a_4 = -0,5,$$
$$b_2 = 0,5, \quad b_3 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_4 = 0.$$

Таким чином, частковий розв'язок системи (43.6) буде

$$\begin{cases} y_1^1 = 0,5x\cos x + 0,5\sin x, \\ y_2^1 = -0,5x\sin x. \end{cases}$$

Розглянемо тепер систему (44.6). У цьому випадку $N = 1$, $M = 0$. Тому розв'язок цієї системи шукаємо у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = c_1x + d_1, \\ y_2 = c_2x + d_2. \end{cases}$$

Підставивши ці функції в систему (44.6), маємо

$$\begin{cases} c_1 = c_2x + d_2, \\ c_2 = -c_1x - d_1 + x + 1. \end{cases}$$

Звідси $c_2 = 0$, $c_1 = d_2$, $c_1 = 1$, $c_2 = -d_1 + 1$ або $c_1 = 1$, $d_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d_2 = 1$.

Отже, частковий розв'язок системи (44.6) буде

$$\begin{cases} y_1^2 = x + 1, \\ y_2^2 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, частковий розв'язок системи (42.6) знайдено:

$$\begin{cases} y_1 = 0,5(x\cos x + \sin x) + x + 1, \\ y_2 = -0,5x\sin x + 1. \end{cases}$$

ГЛАВА 7. ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

§ 1.7. Траєкторії динамічних систем та їх властивості

Означення 1.7. *Нормальна система звичайних диференціальних рівнянь називається динамічною (або автономною), якщо її праві частини не залежать явно від незалежної змінної; тобто динамічна система – це система вигляду*

$$y_i' = f_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.7}$$

де функції $f_i(y_1, \dots, y_n)$ визначені і неперервні в області $D \subset \mathbb{R}^n$.

Оскільки праві частини системи (1.7) не залежать явно від незалежної змінної x, то, очевидно, ця система визначена в області $G = \mathbb{R}^1 \times D$. Якщо $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in G$, то початкові умови для системи (1.7) можна задати таким чином:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0. \tag{2.7}$$

Надалі як і раніше (глава 2), ми будемо користуватися векторним записом задачі Коші (1.7), (2.7):

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(\vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}^{\,0}. \tag{3.7}$$

Припустимо, що $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ – розв'язок системи (1.7), визначений на проміжку $\langle a, b\rangle$. Графік цього розв'язку в області G, тобто множину точок

$$\{(x, \vec{y}) : \ x \in \langle a, b\rangle, \ \vec{y} = \vec{\varphi}(x)\},$$

ми називаємо інтегральною кривою системи (1.7). Дамо тепер іншу геометричну інтерпретацію розв'язку цієї системи.

Означення 2.7. *Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ – розв'язок системи (1.7), визначений на проміжку $\langle a, b\rangle$. Образ l проміжка $\langle a, b\rangle$ при відображенні $\vec{\varphi}(x)$ будемо називати траєкторією системи (1.7).*

Очевидно, $l \in D$. Якщо тепер зіставити поняття інтегральної кривої і траєкторії для системи (1.7), то легко бачити, що траєкторія є проекцією інтегральної кривої на простір $\mathbb{R}^n$ змінних $y_1, \dots, y_n$ у напрямку осі Ox. Розглянемо для прикладу динамічну систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

на площині ($D = \mathbb{R}^2$). Легко перевірити, що функція

$$\vec{y} = (\sin x, \cos x), \ x \in \mathbb{R}^1,$$

є розв'язком цієї системи. Відповідною для цього розв'язку інтегральною кривою є крива γ (рис. 8). У той же час l (рис. 9) є траєкторією даної системи. Як видно з рисунків 8 і 9, l отримується як проекція γ на $\mathbb{R}^2$ у напрямку осі Ox. Зауважимо, що геометрична інтерпретація розв'язку динамічної системи у вигляді траєкторії не дає можливості встановити напрям руху точки по траєкторії при зростанні змінної x. Тому часто на траєкторії вказують також і напрям руху по ній при зростанні незалежної змінної.

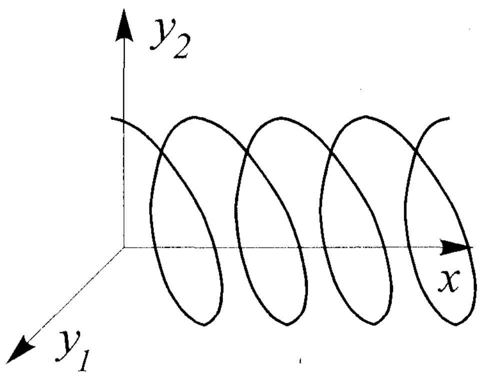


Рис. 8

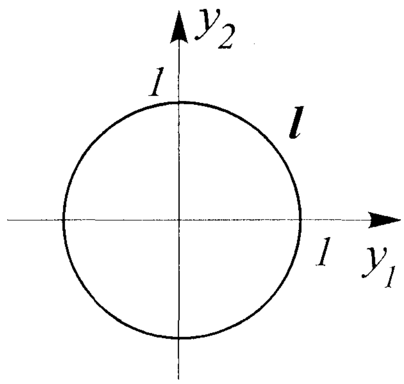


Рис. 9

Оскільки праві частини системи (1.7) визначені і неперервні в області $D \subset \mathbb{R}^n$, то кожній точці $\vec{y}^0 \in D$ поставимо у відповідність вектор

$$\vec{f}(\vec{y}^0) = (f_1(\vec{y}^0), \ldots, f_n(\vec{y}^0)),$$

який виходить з точки $\vec{y}^0$. Сукупність цих векторів утворює в області D векторне поле системи (1.7). Якщо $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ – розв'язок задачі Коші (3.7) і l – його траєкторія, то у момент x траєкторія l проходить через точку $P(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in D$. Але

$$\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx} \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(x)),$$

і $\vec{\varphi}\,'(x)$ виражає вектор швидкості руху точки по траєкторії l у момент x. Тому вектор швидкості руху точки вздовж траєкторії l у кожній точці P цієї траєкторії збігається з відповідним вектором поля $\vec{f}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$.

Простір розмірності n, у якому розв'язок динамічної системи (1.7) інтерпретується як траєкторія, а сама динамічна система як векторне поле, називається фазовим простором системи (1.7). Траєкторії називаються фазовими траєкторіями, вектори $\vec{f}(\vec{y})$ називаються фазовими швидкостями.

Отже, швидкість руху точки по траєкторії у кожний момент часу збігається з фазовою швидкістю, заданою у тому місці простору, де у той момент перебуває рухома точка.

Розглянемо тепер деякі властивості траєкторій динамічних систем. Будемо надалі припускати, що $f_i \in C^1(D)$, $i = 1, \ldots, n$. Це припущення гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші (3.7) для довільної точки $(x_0, \vec{y}^0) \in G$.

Теорема 1.7. *Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ – розв'язок системи (1.7). Тоді функція $\vec{\varphi}(x+c)$ теж буде розв'язком системи (1.7) для довільного $c \in \mathbb{R}^1$.*

Доведення. Позначимо $\vec{\psi}(x) = \vec{\varphi}(x + c)$. Тоді

$$\frac{d\vec{\psi}(x)}{dx} = \frac{d\vec{\varphi}(x+c)}{dx} = \frac{d\vec{\varphi}(x+c)}{d(x+c)}\frac{d(x+c)}{dx} = \frac{d\vec{\varphi}(x+c)}{d(x+c)}.$$

Оскільки

$$\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx} \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(x)),$$

то, замінюючи x на $x+c$, маємо

$$\frac{d\vec{\varphi}(x+c)}{d(x+c)} \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(x+c)).$$

Отже,

$$\frac{d\vec{\psi}(x)}{dx} \equiv \vec{f}(\vec{\psi}(x))$$

і теорему доведено.

Зауваження 1.7. *У тому випадку, коли ми хочемо вказати, які початкові умови задовольняє розв'язок нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь, ми записуємо цей розв'язок як функцію незалежної змінної і початкових умов. Наприклад, розв'язок задачі Коші (3.7) ми записуємо у вигляді $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^0)$. Це означає, що*

$$\vec{\varphi}(x_0, x_0, \vec{y}^0) = \vec{y}^0.$$

З теореми 1.7 випливає, що для динамічної системи початковий момент x_0 завжди можна вибрати нульовим: $x_0 = 0$. Справді, функція $\vec{\varphi}(x + x_0, x_0, \vec{y}^0)$ теж буде розв'язком системи (1.7), причому

$$\vec{\varphi}(x + x_0, x_0, \vec{y}^0)\big|_{x=0} = \vec{y}^0.$$

Надалі для динамічних систем через $\vec{\varphi}(x, \vec{y}^0)$ будемо позначати розв'язок, який задовольняє початкову умову

$$\vec{\varphi}(0, \vec{y}^0) = \vec{y}^0.$$

Теорема 2.7. *Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ і $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ – розв'язки системи (1.7), причому*

$$\vec{\varphi}(x_1) = \vec{\psi}(x_2), \ \ x_1 \neq x_2.$$

Тоді

$$\vec{\psi}(x) = \vec{\varphi}(x + c), \quad c = x_1 - x_2.$$

Доведення. Згідно з теоремою 1.7 функція $\vec{\varphi}(x+c)$ є розв'язком системи (1.7) і

$$\vec{\varphi}(x_2 + c) = \vec{\varphi}(x_2 + x_1 - x_2) = \vec{\varphi}(x_1) = \vec{\psi}(x_2).$$

Тому на підставі єдиності розв'язку задачі Коші для системи 1.7 $\vec{\psi}(x) = \vec{\varphi}(x+c)$, що й потрібно було довести.

Означення 3.7. *Якщо $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ – розв'язок системи (1.7) такий, що $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{a}$, $x \in \langle a, b\rangle$, то відповідна йому траєкторія $l = \{\vec{a}\}$ (і сам розв'язок $\vec{\varphi}(x)$) називається станом рівноваги динамічної системи.*

Теорема 3.7. *Для того, щоб точка $\vec{a}$ була станом рівноваги системи (1.7) необхідно і достатньо, щоб $\vec{f}(\vec{a}) = 0$.*

Доведення. Нехай $\vec{a}$ є станом рівноваги системи (1.7), тобто функція $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{a}$, є розв'язком цієї системи. Тоді

$$\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx} \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(x)).$$

Але
$$\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx} \equiv \frac{d\vec{a}}{dx} \equiv 0,$$
і тому $\vec{f}(\vec{a}) = 0$.

Навпаки, нехай $\vec{f}(\vec{a}) = 0$. Покажемо, що функція $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{a}$ є розв'язком системи (1.7). Справді,
$$\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx} \equiv \frac{d\vec{a}}{dx} \equiv 0 = \vec{f}(\vec{a}),$$
звідки й отримуємо твердження теореми.

Теорема 4.7. *Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in (a, b)$, – розв'язок системи (1.7) такий, що*
$$\vec{\varphi}(x_1) = \vec{\varphi}(x_2), \quad a < x_1 < x_2 < b.$$
Тоді розв'язок $\vec{\varphi}(x)$ може бути продовжений на $\mathbb{R}^1$ і має місце одна з наступних можливостей:

1) $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{a}$, тобто $\vec{\varphi}(x)$ є станом рівноваги;

2) існує таке число $T > 0$, що $\vec{\varphi}(x + T) = \vec{\varphi}(x)$ для всіх x, але при $0 < |\overline{x}_1 - \overline{x}_2| < T$ маємо $\vec{\varphi}(\overline{x}_1) \neq \vec{\varphi}(\overline{x}_2)$.

Доведення. На підставі теореми 1.7 функція
$$\vec{\psi}(x) = \vec{\varphi}(x + c), \quad c = x_2 - x_1,$$
є розв'язком системи (1.7), а згідно з теоремою 2.7
$$\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}(x + c) \tag{4.7}$$
для тих x, для яких обидві функції визначені одночасно. Розглянемо функцію
$$\vec{\varphi}^{\,1}(x) = \begin{cases} \vec{\varphi}(x), & a < x < b, \\ \vec{\varphi}(x + c), & a - c < x \le a. \end{cases}$$
Очевидно, $\vec{\varphi}^{\,1}(x)$ є продовженням розв'язку $\vec{\varphi}(x)$ вліво на інтервал $(a - c, b)$, причому $\vec{\varphi}^{\,1}(x_1) = \vec{\varphi}^{\,1}(x_2)$. Тому можемо знову таким самим чином продовжити розв'язок $\vec{\varphi}^{\,1}(x)$ на інтервал $(a - 2c, b)$. Продовжуючи цей процес, отримаємо розв'язок, визначений на $(-\infty, b)$. Замінимо x в рівності (4.7) на $x - c$:
$$\vec{\varphi}(x - c) = \vec{\varphi}(x). \tag{5.7}$$
Використовуючи отриману рівність, аналогічно продовжимо розв'язок $\vec{\varphi}(x)$ вправо на $\mathbb{R}^1$.

Отже, можемо вважати, що розв'язок $\vec{\varphi}(x)$ заданий на $\mathbb{R}^1$. Позначимо через F множину тих дійсних чисел c, для яких виконується рівність (4.7) для довільних $x \in \mathbb{R}^1$. Згідно з (5.7) множина F поруч з числами c містить і числа $-c$. Крім того, якщо $c_1, c_2 \in F$, то $c_1 + c_2 \in F$. Справді,
$$\vec{\varphi}(x + c_1 + c_2) = \vec{\varphi}((x + c_1) + c_2) = \vec{\varphi}(x + c_1) = \vec{\varphi}(x).$$

Покажемо, що множина F є замкненою. Нехай $\{c_m\} \subset F$ і $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = c_0$. За неперервністю $\vec{\varphi}(x)$ маємо

$$\vec{\varphi}(x+c_0) = \vec{\varphi}(x + \lim_{m\to\infty} c_m) = \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x+c_m) = \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x+c_m) = \vec{\varphi}(x).$$

Отже, $c_0 \in F$ і множина F замкнена. Очевидно, є дві можливості:

а) F містить як завгодно малі додатні числа;

б) F містить найменше додатне число T.

У випадку а) існує послідовність $\{c_m\} \subset F$ така, що $c_m > 0$ і $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 0$. Нехай x – довільна точка з $\mathbb{R}^1$. Дробові частини

$$\alpha_m = \frac{x}{c_m} - \left[\frac{x}{c_m}\right]$$

чисел x/c_m утворюють обмежену послідовність і

$$\lim_{m\to\infty}\left(x - c_m\left[\frac{x}{c_m}\right]\right) = \lim_{m\to\infty}(\alpha_m c_m) = 0.$$

Очевидно, $-c_m\left[\dfrac{x}{c_m}\right] \in F$. Тому

$$\vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}\left(\lim_{m\to\infty}\left(x - c_m\left[\frac{x}{c_m}\right]\right)\right) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}\left(x - c_m\left[\frac{x}{c_m}\right]\right) = \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}(x),$$

і, враховуючи довільність x, $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{\varphi}(0)$. Отже, у випадку а) траєкторія $\vec{\varphi}(x)$ є станом рівноваги системи (1.7). У випадку б)

$$\vec{\varphi}(x+T) = \vec{\varphi}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Покажемо, що $\vec{\varphi}(\overline{x}_1) \neq \vec{\varphi}(\overline{x}_2)$ при $0 < |\overline{x}_1 - \overline{x}_2| < T$. Припустимо протилежне: нехай $\vec{\varphi}(\overline{x}_1) = \vec{\varphi}(\overline{x}_2)$, $0 < |\overline{x}_1 - \overline{x}_2| < T$. Згідно з теоремою 2.7

$$\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}(x+c), \quad c = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \neq 0.$$

Таким чином $c \in F$, $-c \in F$, $|c| \in F$ і звідси випливає, що число T не є найменшим додатним числом у множині F. Теорему доведено.

Означення 4.7. *Розв'язок $\vec{\varphi}(x)$ системи (1.7), для якого*

$$\vec{\varphi}(x_1) = \vec{\varphi}(x_2), \qquad x_1 \neq x_2,$$

називається періодичним, а його траєкторія – замкненою траєкторією або циклом.

Наслідок 1.7. *Траєкторія довільного непродовжуваного розв'язку динамічної системи (1.7) може бути станом рівноваги, циклом або траєкторією без точок самоперетину.*

Зауваження 2.7. *Звернемо увагу на те, що довільна нормальна система звичайних диференціальних рівнянь може бути зведена до динамічної шляхом збільшення розмірності фазового простору на 1.*

Справді, нехай маємо нормальну систему

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Введемо нову функцію $y_{n+1} = x$. Тоді $y_{n+1}' = 1$ і ми отримаємо нову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_i' = f_i(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n), & i = 1, \ldots, n, \\ y_{n+1}' = 1, \end{cases}$$

яка, очевидно, є динамічною з фазовим простором розмірності $n + 1$.

§ 2.7. Гранична поведінка траєкторій

Означення 5.7. *Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ – розв'язок динамічної системи (1.7), визначений на $\mathbb{R}^1$, а l – його траєкторія. Точка $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^n$ називається граничною точкою розв'язку $\vec{\varphi}(x)$ (або траєкторії l) при $x \to +\infty$, якщо існує така послідовність $\{x_m\} \subset (0, +\infty)$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = +\infty$, для якої $\lim\limits_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x_m) = \vec{\omega}$. Сукупність усіх таких точок $\vec{\omega}$ називається граничною множиною розв'язку $\vec{\varphi}(x)$ (або траєкторії l).*

Аналогічно дається означення граничної точки і граничної множини при $x \to -\infty$.

Розглянемо для прикладу періодичний розв'язок $\vec{\varphi}(x)$ ($\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}(x + T)$, $T > 0$) (цикл l). Тоді кожна точка $\vec{\omega} \in l$ є його граничною точкою при $x \to +\infty$. Справді, оскільки $\vec{\omega} \in l$, то існує таке значення $\overline{x}$, що $\vec{\varphi}(\overline{x}) = \vec{\omega}$. Розглянемо послідовність $\{x_m\}$, $x_m = \overline{x} + Tm$. Тоді $\vec{\varphi}(x_m) = \vec{\omega}$ і $\lim\limits_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x_m) = \vec{\omega}$. Звідси, зокрема, випливає,що l є граничною множиною для розв'язку $\vec{\varphi}(x)$.

Теорема 5.7. *Гранична множина траєкторії динамічної системи є замкненою.*

Доведення. Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, – розв'язок динамічної системи (1.7), і l – його траєкторія. Позначимо через Ω граничну множину траєкторії l. Нехай $\{\vec{\omega}^{\,m}\} \subset \Omega$ і $\lim\limits_{m\to\infty} \vec{\omega}^{\,m} = \vec{\omega}$. Покажемо, що $\vec{\omega} \in \Omega$. Згідно з означенням 5.7 для кожного m існує послідовність $\{x_{mk}\} \subset (0, +\infty)$ така, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{mk} = +\infty$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{\varphi}(x_{mk}) = \vec{\omega}^{\,m}$. Тоді можемо вибрати значення $\overline{x}_m > m$ таке, що

$$|\vec{\varphi}(\overline{x}_m) - \vec{\omega}| \le |\vec{\varphi}(\overline{x}_m) - \vec{\omega}^{\,m}| + |\vec{\omega}^{\,m} - \vec{\omega}| < \frac{1}{m} + |\vec{\omega}^{\,m} - \vec{\omega}|.$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty} |\vec{\varphi}(\overline{x}_m) - \vec{\omega}| = 0$$

і теорему доведено.

Теорема 6.7. *Гранична множина траєкторії динамічної системи складається з цілих траєкторій.*

Доведення. Нехай Нехай $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{y}^{\,0})$ – розв'язок динамічної системи (1.7), визначений на $\mathbb{R}^1$, який задовольняє початкову умову $\vec{\varphi}(0, \vec{y}^{\,0}) = \vec{y}^{\,0}$ і нехай l – його траєкторія, а Ω

– гранична множина. Покажемо, що якщо $\vec{\omega} \in \Omega$ і $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{\omega})$ розв'язок системи (1.7) з початковою умовою $\vec{\varphi}(0, \vec{\omega}) = \vec{\omega}$ і траєкторією $l_{\vec{\omega}}$, то $l_{\vec{\omega}} \subset \Omega$. Оскільки $\vec{\omega} \in \Omega$, то існує послідовність $\{x_m\} \subset \mathbb{R}^1$ така , що

$$\lim_{m\to\infty} x_m = +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0}) = \vec{\omega}.$$

Неважко переконатися, що

$$\vec{\varphi}(x_m + x, \vec{y}^{\,0}) = \vec{\varphi}(x, \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0})). \tag{6.7}$$

Справді,

$$\vec{\varphi}(x_m + x, \vec{y}^{\,0})\big|_{x=0} = \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0}),$$
$$\vec{\varphi}(x, \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0}))\big|_{x=0} = \vec{\varphi}(0, \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0})) = \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0}).$$

Тому з єдиності розв'язку задачі Коші для системи (1.7) випливає рівність (6.7). Тоді

$$\lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x_m + x, \vec{y}^{\,0}) = \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x, \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0})) =$$
$$= \vec{\varphi}(x, \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(x_m, \vec{y}^{\,0})) = \vec{\varphi}(x, \vec{\omega}),$$

тобто $\vec{\varphi}(x, \vec{\omega}) \in \Omega$ для довільного $x \in \mathbb{R}^1$. Теорему доведено.

Теорема 7.7. *Для того, щоб гранична множина розв'язку $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, динамічної системи (1.7) була порожньою необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{x\to\infty} |\vec{\varphi}(x)| = \infty. \tag{7.7}$$

Доведення. Якщо умова (7.7) виконується, то, очевидно, гранична множина траєкторії l (розв'язку $\vec{\varphi}(x)$) є порожньою, оскільки тоді $\lim\limits_{m\to\infty} |\vec{\varphi}(x_m)| = \infty$ для довільної $\{x_m\}$ такої, що $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = +\infty$. Припустимо тепер, що гранична множина траєкторії l порожня: $\Omega = \emptyset$. Потрібно показати, що виконується умова (7.7). Нехай це не так. Тоді існує число $R > 0$ і послідовність точок $\{x_m\}$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = +\infty$, така, що $|\vec{\varphi}(x_m)| \le R$ для всіх m. Виберемо з обмеженої множини $\{\vec{\varphi}(x_m)\}$ збіжну підпослідовність $\{\vec{\varphi}(x_{m_k})\}$,

$$\lim_{k\to\infty} \vec{\varphi}(x_{m_k}) = \vec{\omega}, \qquad |\vec{\omega}| \le R.$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = +\infty$, то $\vec{\omega} \in \Omega$ – гранична точка траєкторії l, а це суперечить припущенню, що $\Omega = \emptyset$. Теорему доведено.

Теорема 8.7. *Для того, щоб гранична множина розв'язку $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, динамічної системи (1.7) складалася з однієї точки $\vec{\omega}$ необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{x\to+\infty} \vec{\varphi}(x) = \vec{\omega}. \tag{8.7}$$

Доведення. Якщо умова (8.7) виконується, то гранична множина Ω розв'язку $\vec{\varphi}(x)$ складається лише з точки $\vec{\omega}$, оскільки для довільної $\{x_m\}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = +\infty$, з (8.7) випливає, що $\lim\limits_{m\to+\infty} \vec{\varphi}(x_m) = \vec{\omega}$. Нехай навпаки, Ω складається з єдиної точки $\vec{\omega}$. Припустимо, що умова (8.7) не виконується. Задамо довільне $\epsilon > 0$. Тоді існує послідовність $\{\overline{x}_m\}$ така, що $\lim\limits_{m\to+\infty} \overline{x}_m = +\infty$ і $|\vec{\varphi}(\overline{x}_m) - \vec{\omega}| \geq \epsilon$. У той же час $\vec{\omega}$ – гранична точка для $\vec{\varphi}(x)$. Тому існує послідовність $\{x_m\}$ така, що $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = +\infty$ і $|\vec{\varphi}(x_m) - \vec{\omega}| < \epsilon$ для $m \geq m_0$. Оскільки $|\vec{\varphi}(x) - \vec{\omega}|$ неперервна функція, то існує така послідовність $\{\tilde{x}_m\}$, що $\lim\limits_{m\to+\infty} \tilde{x}_m = +\infty$ і $|\vec{\varphi}(\tilde{x}_m) - \vec{\omega}| = \epsilon$ для $m \geq m_0$. Виберемо з обмеженої множини $\{|\vec{\varphi}(\tilde{x}_m) - \vec{\omega}|\}$ збіжну послідовність $\{|\vec{\varphi}(\tilde{x}_{m_k}) - \vec{\omega}|\}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} |\vec{\varphi}(\tilde{x}_{m_k}) - \vec{\omega}| = \epsilon$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{\varphi}(\tilde{x}_{m_k}) = \vec{\omega}^{\,1}$, причому $\vec{\omega}^{\,1} \neq \vec{\omega}$; тобто множина Ω складається принаймні з двох точок $\vec{\omega}^{\,1}$ і $\vec{\omega}$, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

Означення 6.7. *Замкнена траєкторія $l_0 : \vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ називається граничним циклом динамічної системи (1.7), якщо у деякому околі цієї траєкторії немає інших замкнених траєкторій (крім самої l_0).*

§ 3.7. Гранична поведінка траєкторій на площині

Якщо $n = 2$, то про граничну поведінку траєкторій можна сказати значно більше, ніж у випадку $n > 2$. Це встановив І. Бендіксон і у даному параграфі ми наведемо декілька його теорем.

Теорема 9.7. *Якщо траєкторія l системи (1.7) містить хоча б одну свою граничну точку при $x \to +\infty$ або при $x \to -\infty$, то ця траєкторія є циклом або станом рівноваги.*

Доведення. Нехай $\vec{\omega}$ – гранична точка траєкторії l при $x \to +\infty$ і $\vec{\omega} \in l$. Якщо $\vec{\omega}$ – стан рівноваги системи (1.7), то $l = \{\vec{\omega}\}$. Справді, оскільки $\vec{\omega} \in l$, то існує така точка x_0, що $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{\omega}$ ($\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ – рівняння траєкторії l). З другого боку функція $\vec{\psi}(x) \equiv \vec{\omega}$ теж розв'язок системи (1.7), причому $\vec{\psi}(x_0) = \vec{\omega}$. З єдиності розв'язку задачі Коші для системи (1.7) випливає, що $l = \{\vec{\omega}\}$. Нехай тепер $\vec{\omega}$ не є станом рівноваги системи (1.7) і $l_{\vec{\omega}}$ – невелика частина траєкторії l, яка містить точку $\vec{\omega}$ всередині себе.

Розглянемо малий окіл $U(\vec{\omega})$ точки $\vec{\omega}$, причому будемо вважати, що $U(\vec{\omega})$ обмежений двома відрізками нормалі до $l_{\vec{\omega}}$ і двома іншими траєкторіями системи (1.7) (рис.10). Якщо вибрати l^1 і l^2 достатньо близькими до $l_{\vec{\omega}}$, то рух точки при зростанні x по будь-якій траєкторії системи (1.7) в $U(\vec{\omega})$ відбувається зі швидкістю, як завгодно близькою до швидкості руху точки по траєкторії l у точці $\vec{\omega}$. Оскільки $\vec{\omega}$ є граничною точкою траєкторії l, то при зростанні x траєкторія l знову повинна перетнути окіл $U(\vec{\omega})$. Покажемо, що l знову пройде через точку $\vec{\omega}$, тобто, що l – замкнена траєкторія. Нехай це не так; тоді дуга ABC (рис. 10) траєкторії l разом з відрізком CA утворює замкнену лінію, що обмежує скінчену частину S площини (мішок Бендіксона). Траєкторії системи (1.7) перетинають відрізок AC із зовні в середину. Тоді траєкторія l після точки C не може вийти з множини S при зростанні x, оскільки вона не може перетнути ні дугу ABC (траєкторія l за припущенням не має точок самоперетину), ні відрізок AC (бо цей відрізок перетинається траєкторіями системи, які входять в середину S). Але тоді точка $\vec{\omega}$ не може бути граничною для l.

Якщо відрізок CA перетинається траєкторіями системи (1.7), які виходять із середини S назовні (рис 11), то траєкторія l, вийшовши з 'мішка' S у точці C, ніколи в нього не зможе потрапити і тому не зможе наблизитися до точки $\vec{\omega}$. Тобто і у цьому випадку $\vec{\omega}$ не може бути граничною точкою траєкторії l. Теорему доведено.

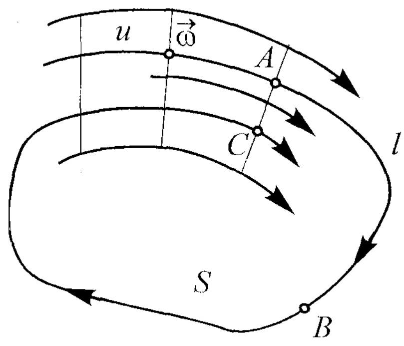


Рис. 10

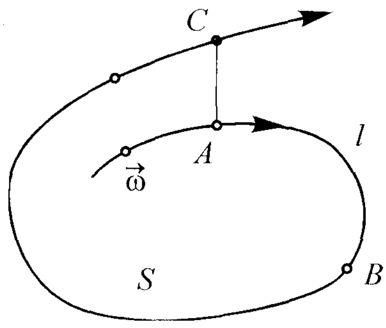


Рис. 11

Теорема 10.7. *Нехай розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, якому відповідає траєкторія l, має граничну точку $\vec{\omega}$ при $x \to +\infty$, яка належить замкненій траєкторії l_0. Тоді або $l = l_0$, або l по спіралі наближається до l_0 при $x \to +\infty$.*

Доведення. Згідно з теоремою 6.7 траєкторія l_0 належить граничній множині Ω траєкторії l. Візьмемо малий фіксований окіл $U(\vec{\omega})$ (рис.12). Тоді згідно з означенням граничної точки траєкторія l повинна при достатньо великому x перетинати $U(\vec{\omega})$, а також перетинати нормаль $\vec{n}$ до траєкторії l у точці $\vec{\omega}$ в одному і тому ж напрямку. Якщо цей перетин відбудеться у точці $\vec{\omega}$, то $l = l_0$ (згідно з теоремою 2.7). Нехай це не так і перетин відбувається у деякій точці A, яка, для визначеності, лежить зовні l_0. Якщо A достатньо близька до $\vec{\omega}$, то згідно з теоремою про неперервну залежність розв'язків від початкових даних при зростанні x траєкторія l знову попаде в $U(\vec{\omega})$. Позначимо буквою C першу після A точку перетину l з $\vec{n}$; тоді вся дуга AC траєкторії l лежить у достатньо вузькій смузі траєкторії l_0. Легко перевірити, що $|C - \vec{\omega}| < |A - \vec{\omega}|$. Справді, якщо $C = A$, то l – цикл і $\vec{\omega}$ не може бути його граничною точкою. Якщо ж траєкторія l пройде через точку D, то вона не зможе попасти в середину кривої $ABDA$ при зростанні x і тому точка $\vec{\omega}$ не може бути граничною для l.

Продовжуючи траєкторію l за точку C, ми отримаємо ще один оберт навколо l_0 і нову точку перетину l з $\vec{n}$ і так далі. З того, що $\vec{\omega}$ є граничною точкою для l віпливає, що послідовність точок перетину l з $\vec{n}$ прямує до $\vec{\omega}$. Оскільки за $\vec{\omega}$ можна взяти будь-яку точку траєкторії l_0, то теорему доведено.

Означення 7.7. *Будемо говорити, що траєкторія l системи (1.7) починається у точці $\vec{y}^0$, якщо відповідний цій траєкторії розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ задовольняє початкову умову $\vec{\varphi}(0) = \vec{y}^0$, тобто рівняння траєкторії l можна записати у вигляді $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{y}^0)$.*

Теорема 11.7. *Нехай D – деяка обмежена замкнена множина в $\mathbb{R}^2$ у якій немає станів рівноваги системи (1.7). Нехай всі траєкторії, які починаються в D, залишаються там і при $x > 0$. Тоді кожна така траєкторія є або циклом, або наближається по спіралі при $x \to +\infty$ до деякого циклу.*

Доведення. Розглянемо довільний розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{y}^0)$, $\vec{y}^0 \in D$ і відповідну йому траєкторію l. Оскільки $l \subset D$, то на підставі теореми 7.7 вона має хоча б одну граничну точку $\vec{\omega}$ при $x \to +\infty$. Якщо $\vec{\omega} \in l$, то згідно з теоремою 9.7 l – замкнена траєкторія. Нехай це не так. Тоді розглянемо розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{\omega})$, відповідну йому траєкторію l_0 і її граничну точку $\vec{\omega}^0$ при $x \to +\infty$. Нам достатньо показати, що $\vec{\omega}^0 \in l_0$, бо тоді згідно з теоремою 9.7 l_0 – замкнена траєкторія, а на підставі теореми 10.7 l по спіралі наближається до l_0. Припустимо, що $\vec{\omega}^0$ не належить l_0; розглянемо деякий окіл точки $\vec{\omega}^0$ (рис. 13). Нехай A і C – дві точки перетину l_0 з нормаллю, проведеною через $\vec{\omega}^0$ до l_0, а відрізок CA межі $ABCA$ 'мішка' S перетинається траєкторіями в середину 'мішка'. Оскільки згідно з теоремою 6.7 всі точки l_0 є граничними для l, то l коли-небудь буде в достатньо малому околі точки C і попаде в середину 'мішка' S. Але після цього l буде весь час перебувати в середині S і не зможе наблизитися до точки A, яка теж є для неї граничною. Аналогічно розглядається випадок, коли траєкторії перетинають відрізок CA з середини S назовні. Теорему доведено.

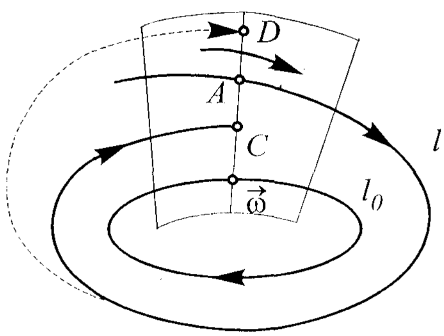


Рис. 12

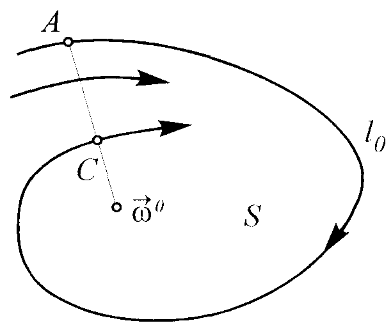


Рис. 13

Теорема 12.7. *Нехай у деякому околі замкненої траєкторії l_0 системи (1.7) немає інших замкнених траєкторій. Тоді всі траєкторії системи (1.7), які починаються достатньо близько від l_0 по спіралі наближаються до l_0 при $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$.*

Доведення. Оскільки на l_0 нема станів рівноваги, то у точках l_0 функція $\vec{f}(\vec{y})$ не обертається в нуль. Тому існує деякий окіл D траєкторії l_0, у якому теж нема станів рівноваги і нема інших циклів, крім l_0.

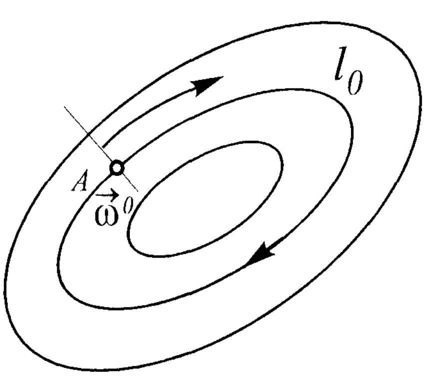


Рис. 14

Виберемо фіксований достатньо малий відрізок нормалі $\vec{n}$ до l_0 у деякій точці $\vec{\omega}^0 \in l_0$ (рис. 14). Нехай l – траєкторія системи (1.7), яка починається у точці $A \in \vec{n}$. Тоді при зростанні x траєкторія l знову перетне нормаль $\vec{n}$ у деякій точці B_0 (на підставі теореми про неперервну залежність розв'язків від початкових даних). Очевидно, $B_0 \neq A$. Припустимо, що $|\vec{\omega}^0 - B_0| < |\vec{\omega}^0 - A|$. Тоді, продовжуючи траєкторію l для $x \to +\infty$, ми отримаємо послідовність точок перетину B_m траєкторії l з $\vec{n}$, причому

$$|\vec{\omega}^0 - B_m| < |\vec{\omega}^0 - B_{m-1}|, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} B_m = \vec{\omega}^0$, бо якби це було не так, то через граничну точку послідовності $\{B_m\}$ проходив би цикл системи (1.7) відмінний від l_0. Справді, нехай B^0 – гранична точка послідовності $\{B_m\}$ і l^0 – траєкторія, яка починається у точці B^0. Згідно з теоремою 6.7 l^0 є граничною множиною для l і l по спіралі наближається до l^0. Тому на підставі теореми 11.7 l^0 є циклом, що неможливо.

Таким чином, l по спіралі наближається до l_0 при $x \to +\infty$. Решта траєкторій, які починаються у точках $C \in \vec{n}$, де $|\vec{\omega} - C| < |\vec{\omega} - A|$, теж по спіралі наближаються до C при $x \to +\infty$. Якщо ж $|\vec{\omega} - B_0| > |\vec{\omega} - A|$, то достатньо замінити x на $-x$, щоб прийти до тільки що розглянутого випадку. Аналогічно розглядається випадок, коли точка A лежить в середині l_0. Теорему доведено.

§ 4.7. Гранична поведінка траєкторій лінійної динамічної системи на площині

Розглянемо поведінку траєкторій однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2, \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases} \tag{9.7}$$

або у векторній формі

$$\vec{y}\,' = A\vec{y},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad -$$

дійсна матриця.

Зауважимо, що $\vec{y} = 0$ є станом рівноваги динамічної системи (9.7). Оскільки матриця A дійсна, то можуть бути три випадки:

1) власні значення λ_1, λ_2 матриці A дійсні і різні;

2) власні значення λ_1, λ_2 матриці A комплексно-спряжені;

3) матриця A має єдине дійсне власне значення λ_0.

У кожному з цих випадків поведінка траєкторій системи (9.7) в околі стану рівноваги різна. Розглянемо їх окремо.

А. Нехай $\lambda_1 \neq \lambda_2$ дійсні, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. У цьому випадку у матриці A існують два лінійно незалежні дійсні власні вектори $\vec{h}^{\,1}$ і $\vec{h}^{\,2}$ з власними значеннями λ_1 і λ_2 відповідно. Загальний розв'язок системи (9.7) має вигляд

$$\vec{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} \vec{h}^{\,1} + C_2 e^{\lambda_2 x} \vec{h}^{\,2},$$

де C_1 і C_2 – довільні дійсні сталі. Оскільки вектори $\vec{h}^{\,1}$ і $\vec{h}^{\,2}$ утворюють базис в $\mathbb{R}^2$, то функції

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \; z_2 = C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{10.7}$$

можна розглядати як координати вектора $\vec{y}$ щодо базису $\vec{h}^{\,1}$, $\vec{h}^{\,2}$. Зауважимо, що достатньо дослідити поведінку траєкторій при $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, оскільки поряд з траєкторією (10.7) система (9.7) має траєкторії:

$$\begin{cases} z_1 = -C_1 e^{\lambda_1 x}, \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 x}, \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = -C_1 e^{\lambda_1 x}, \\ z_2 = -C_2 e^{\lambda_2 x}, \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \\ z_2 = -C_2 e^{\lambda_2 x}, \end{cases}$$

які розташовані відповідно у другому, третьому і четвертому квадрантах.

1) Нехай λ_1 і λ_2 одного знаку. Не порушуючи загальності, можна вважати, що

$$|\lambda_1| < |\lambda_2|. \tag{11.7}$$

а) Якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то згідно з (11.7), $\lambda_1 > \lambda_2$. При $C_1 > 0$, $C_2 > 0$,

$$z_1 \to 0, \quad z_2 \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty,$$
$$z_1 \to +\infty, \quad z_2 \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to -\infty.$$

Крім того,

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{C_2\lambda_2}{C_1\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \to 0,$$

коли $x \to +\infty$. Таким чином, при $x \to +\infty$ траєкторія входить в початок координат і в границі дотикається до осі z_1, а при $x \to -\infty$ віддаляється від початку координат, залишаючись у першому квадранті системи координат z_1, z_2.

При $C_1 = C_2 = 0$ траєкторія є станом рівноваги $\vec{y} = 0$. При $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ траєкторія збігається з додатною піввіссю осі z_1, а при $C_1 > 0$, $C_2 = 0$ – з додатною піввіссю осі z_2. Схематично розташування траєкторій зображено на рис.15 (стрілки показують напрям руху точки по траєкторії при зростанні x). Таке розташування траєкторій поблизу $\vec{y} = 0$ називається стійким вузлом.

б) Якщо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то $\lambda_1 < \lambda_2$. При $C_1 > 0$, $C_2 > 0$

$$z_1 \to 0, \quad z_2 \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to -\infty,$$
$$z_1 \to +\infty, \quad z_2 \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty.$$

Розташування траєкторій залишається таким самим, як у випадку а), лише змінюється напрям руху точки при зростанні x. Таке розташування називається нестійким вузлом (рис.16).

2) λ_1 і λ_2 мають різні знаки. Достатньо розглянути випадок $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Тоді при $C_1 > 0$, $C_2 > 0$

$$z_1 \to 0, \quad z_2 \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty,$$
$$z_1 \to +\infty, \quad z_2 \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to -\infty.$$

У даному випадку розташування траєкторій називається сідлом (рис. 17).

B. λ_1 і λ_2 комплексно спряжені: $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\quad \lambda_2 = \mu - i\nu$, $\nu \neq 0$. Матриця A має комплексний власний вектор $\vec{h} = \frac{1}{2}(\vec{h}^{\,1} - i\vec{h}^{\,2})$ з власним значенням λ_1 (вектори $\vec{h}^{\,1}$ і $\vec{h}^{\,2}$ – дійсні). Крім того, очевидно, $\overline{\vec{h}} = \frac{1}{2}(\vec{h}^{\,1} + i\vec{h}^{\,2})$ – власний вектор матриці A з власним значенням $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Вектори $\vec{h}^{\,1}$ і $\vec{h}^{\,2}$ лінійно незалежні, оскільки у протилежному випадку були б лінійно залежними вектори $\vec{h}$ і $\overline{\vec{h}}$, які відповідають різним власним значенням.

Довільний комплексний розв'зок системи (9.7) можна записати у вигляді

$$\vec{y} = C_1 e^{\lambda_1 x}\vec{h} + C_2 e^{\overline{\lambda_1} x}\overline{\vec{h}}, \tag{12.7}$$

де C_1, C_2 – комплексні сталі. Довільний дійсний розв'язок, як було показано у главі 6, отримується з формули (12.7), якщо сталі C_1 і C_2 комплексно спряжені: $C_1 = \overline{C_2}$. Нехай $C_1 = Re^{i\alpha}$. Тоді $C_2 = Re^{-i\alpha}$ і

$$\vec{y} = \frac{1}{2}Re^{\mu x}e^{(\alpha+\nu x)i}(\vec{h}^{\,1} - i\vec{h}^{\,2}) + \frac{1}{2}Re^{\mu x}e^{-(\alpha+\nu x)i}(\vec{h}^{\,1} + i\vec{h}^{\,2}) =$$
$$= Re^{\mu x}\left[\frac{e^{(\alpha+\nu x)i} + e^{-(\alpha+\nu x)i}}{2}\vec{h}^{\,1} + \frac{e^{(\alpha+\nu x)i} - e^{-(\alpha+\nu x)i}}{2i}\vec{h}^{\,2}\right] =$$
$$= Re^{\mu x}\cos(\alpha + \nu x)\vec{h}^{\,1} + Re^{\mu x}\sin(\alpha + \nu x)\vec{h}^{\,2}.$$

Позначивши через z_1 і z_2 координати вектора $\vec{y}$ відносно базису $\vec{h}^{\,1}$ і $\vec{h}^{\,2}$, отримаємо

$$z_1 = Re^{\mu x}\cos(\alpha + \nu x), \quad z_2 = Re^{\mu x}\sin(\alpha + \nu x).$$

1)Якщо $\mu < 0$, то при $R = 0$ отримаємо стан рівноваги, а при $R > 0$

$$z_1 \to 0, \quad z_2 \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty,$$
$$z_1^2 + z_2^2 \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to -\infty.$$

Траєкторія є спіраллю.

Розташування траєкторій у цьому випадку називається стійким фокусом (рис. 18).

2) Якщо $\mu > 0$, то при $R > 0$

$$z_1^2 + z_2^2 \to +\infty, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty,$$
$$z_1 \to 0, \quad z_2 \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to -\infty.$$

Розташування траєкторій у цьому випадку (рис.19) називається нестійким фокусом.

3) Якщо $\mu = 0$, то $z_1^2 + z_2^2 = R^2$ і траєкторіі є еліпсами з центром у початку кординат (рис. 20).

Перейдемо до вироджених випадків, тобто коли одне з власних значень дорівнює нулю, або $\lambda_1 = \lambda_2$.

C. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. У цьому випадку, як і у випадку A, існують два лінійно незалежні власні вектори $\vec{h}^{\,1}$ і $\vec{h}^{\,2}$ з власними значеннями λ_1 і 0 відповідно. Загальний розв'язок системи (9.7) має вигляд

$$\vec{y} = C_1 e^{\lambda_1 x}\vec{h}^{\,1} + C_2\vec{h}^{\,2},$$

Позначивши через z_1 і z_2 координати вектора $\vec{y}$ в базисі $\vec{h}^{\,1}$ і $\vec{h}^{\,2}$, отримаємо

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = C_2.$$

Траєкторіями у цьому випадку будуть півпрямі, паралельні осі z_1, які закінчуються на осі z_2. Всі точки осі z_2 будуть станами рівноваги (рис. 21).

D. Матриця A має єдине власне значення λ_1. У цьому випадку існує хоча б один дійсний власний вектор $\vec{h}^{\,1}$ з власним значенням $\lambda_1 : A\vec{h}^{\,1} = \lambda\vec{h}^{\,1}$. Доповнюючи $\vec{h}^{\,1}$ довільним вектором $\vec{h}^{\,2}$ до базису $\mathbb{R}^2$ і покладаючи

$$\vec{y} = z_1\vec{h}^{\,1} + z_2\vec{h}^{\,2},$$

отримаємо

$$z_1'\vec{h}^{\,1} + z_2'\vec{h}^{\,2} = \vec{y}\,' = A\vec{y} = A(z_1\vec{h}^{\,1} + z_2\vec{h}^{\,2}) = z_1\lambda_1\vec{h}^{\,1} +$$
$$+ z_2(\mu\vec{h}^{\,1} + \nu\vec{h}^{\,2}) = (\lambda_1 z_1 + \mu z_2)\vec{h}^{\,1} + \nu z_2\vec{h}^{\,2},$$

де $A\vec{h}^{\,2} = \mu\vec{h}^{\,1} + \nu\vec{h}^{\,2}$. Таким чином,

$$z_1' = \lambda_1 z_1 + \mu z_2, \quad z_2' = \nu z_2. \tag{13.7}$$

Характеристичний многочлен матриці системи (13.7) має вигляд

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & \mu \\ 0 & \nu - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\nu - \lambda).$$

Але у даному випадку матриця A має єдине власне значення λ_1. Отже, $\nu = \lambda_1$ і система (13.7) набирає вигляду

$$z_1' = \lambda_1 z_1 + \mu z_2, \quad z_2' = \lambda_1 z_2. \tag{14.7}$$

1)Якщо $\mu = 0$, то маємо таку систему

$$z_1' = \lambda_1 z_1, \quad z_2' = \lambda_1 z_2.$$

Її загальний розв'язок

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = C_2 e^{\lambda_1 x}.$$

При $\lambda_1 \neq 0$ траєкторії є або півпрямі, які виходять з початку координат, або стан рівноваги $\vec{y} = 0$ при $C_1 = C_2 = 0$ (рис. 22). Таке розташування траєкторій називається дикритичним вузлом. При $\lambda_1 = 0$ кожна траєкторія $z_1 = C_1$, $z_2 = C_2$ є станом рівноваги. Іншими словами, вся фазова площина заповнена станами рівноваги. При цьому, очевидно, A – нульова матриця.

2)$\mu \neq 0$. Візьмемо за базис вектори $\vec{H}^{\,1} = \mu \vec{h}^{\,1}$, $\vec{H}^{\,2} = \mu \vec{h}^{\,2}$. Тоді

$$A\vec{H}^{\,1} = \lambda_1 \vec{H}^{\,1}, \quad A\vec{H}^{\,2} = \vec{H}^{\,2} + \lambda_1 \vec{H}^{\,2}.$$

Поклавши $\vec{y} = z_1 \vec{H}^{\,1} + z_2 \vec{H}^{\,2}$, замість (14.7) матимемо

$$z_1' = \lambda_1 z_1 + z_2, \quad z_2' = \lambda_1 z_2. \tag{15.7}$$

Загальний розв'язок системи (15.7) має вигляд

$$z_1 = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = C_2 e^{\lambda_1 x}.$$

а)$\lambda_1 < 0$. При $C_2 = 0$ маємо

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = 0.$$

Траєкторія є піввіссю $z_1 > 0$ (при $C_1 > 0$), $z_2 < 0$ (при $C_1 < 0$), або стан рівноваги при $C_1 = 0$. Якщо $C_2 \neq 0$, то

$$z_1 = C_2 \left(\frac{C_1}{C_2} + x \right) e^{\lambda_1 x} = C_2 \xi \exp\left(\left(\xi - \frac{C_1}{C_2} \right) \lambda_1 \right),$$
$$z_2 = C_2 e^{\lambda_1 x} = C_2 \exp\left(\lambda_1 \left(\xi - \frac{C_1}{C_2} \right) \right).$$

Тут $\xi = x + \dfrac{C_1}{C_2}$. Позначивши $C_2 \exp\left(-\lambda_1 \dfrac{C_1}{C_2} \right) = a$, отримаємо $z_1 = a\xi e^{\lambda_1 \xi}$, $z_2 = a\xi e^{\lambda_1 \xi}$.

На рис. 23 зображено графік функції $z_1 = a\xi e^{\lambda_1 \xi}$ при $a > 0$. У точці $\xi = -\dfrac{1}{\lambda_1}$ функція

z_1 має максимум. При $a < 0$ графік отримується дзеркальним відображенням відносно осі ξ. Очевидно,

$$z_1 \to 0, \quad z_2 \to 0 \quad \text{коли} \quad \xi \to +\infty,$$
$$z_1 \to +\infty, \quad z_2 \to +\infty, \quad \text{коли} \quad \xi \to -\infty.$$

Крім того,

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{a\lambda_1 e^{\lambda_1 \xi}}{ae^{\lambda_1 \xi}(1+\lambda_1 \xi)} \to 0,$$

коли $\xi \to +\infty$. Розташування траєкторій у цьому випадку називається стійким виродженим вузлом (рис. 24).

в) при $\lambda_1 > 0$ з аналогічних міркувань отримується картина, зображена на рис. 25. Таке розташування траєкторій називається нестійким виродженим вузлом.

с) при $\lambda_1 = 0$

$$z_1 = C_1 + C_2 x, \quad z_2 = C_2.$$

Якщо $C_2 \neq 0$, то траєкторії є прямими, паралельними осі z_1. При $C_2 = 0$ всі точки осі z_1 будуть станами рівноваги (рис. 26).

Приклад 1.7. Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$my'' + \alpha y' + \beta y = 0,$$

де $m > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$. Це рівняння описує прямолінійний рух матеріальної точки з масою m відносно осі y під дією сили тертя $-\alpha y'$ і пружної сили $-\beta y$. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

де $a_1 = \dfrac{\alpha}{m} \geq 0$, $a_2 = \dfrac{\beta}{m} > 0$. Вводячи нові невідомі функції $y_1 = y$, $y_2 = y'$, зведемо наше рівняння до лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -a_2 y_1 - a_1 y_2, \end{cases} \tag{16.7}$$

матриця A якої має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення λ_1, λ_2 матриці A є коренями характеристичного многочлена

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

При $\dfrac{a_1^2}{4} > a_2$ корені дійсні різні, причому $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Розташування траєкторій системи є стійким вузлом. При $x \to +\infty$ матеріальна точка наближається до початку координат, оскільки $y = y_1 \to 0$. При $\dfrac{a_1^2}{4} < a_2$ корені спряжені, причому $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = -\dfrac{a_1}{2} \leq 0$.

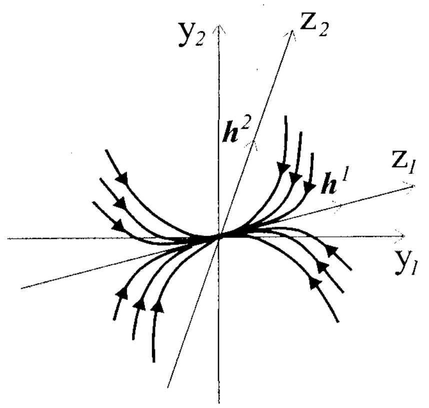


Рис. 15

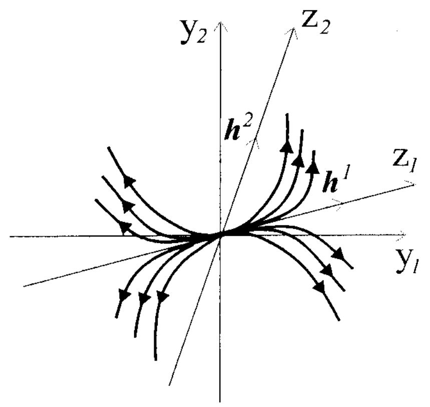


Рис. 16

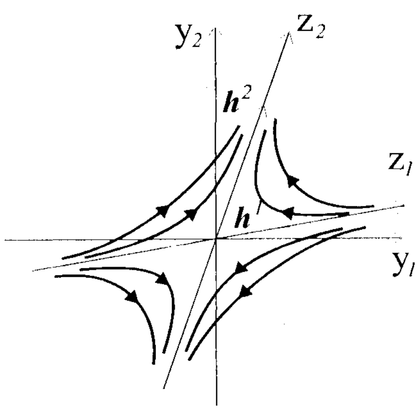


Рис. 17

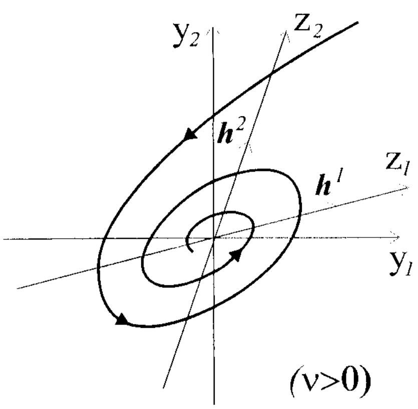


Рис. 18

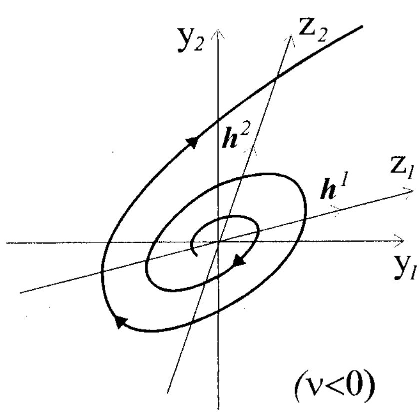


Рис. 19

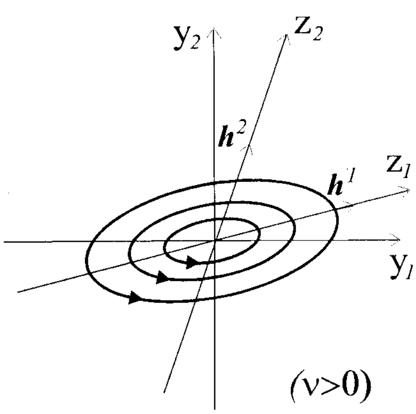
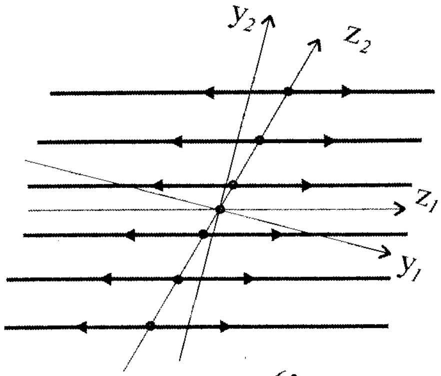
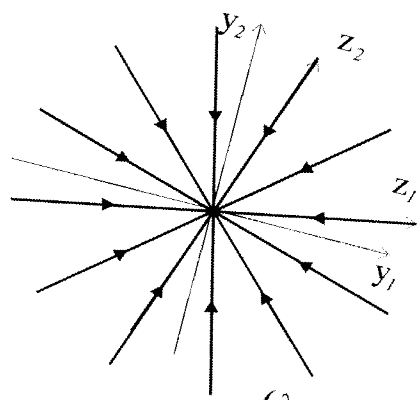


Рис. 20



$(\lambda_1 > 0)$

Рис. 21



$(\lambda_1 < 0)$

Рис. 22

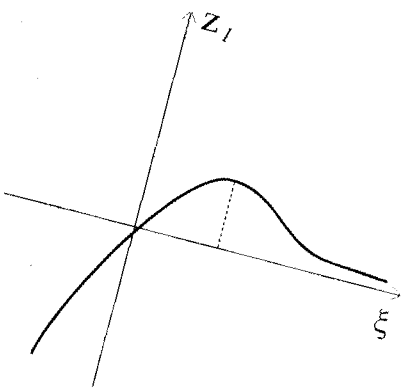


Рис. 23

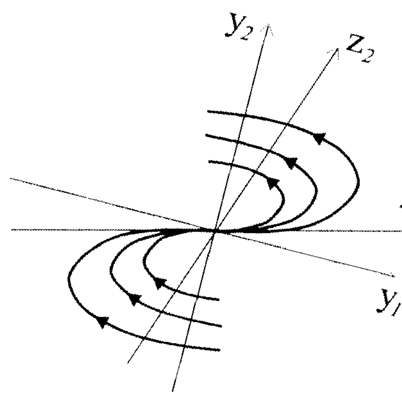


Рис. 24

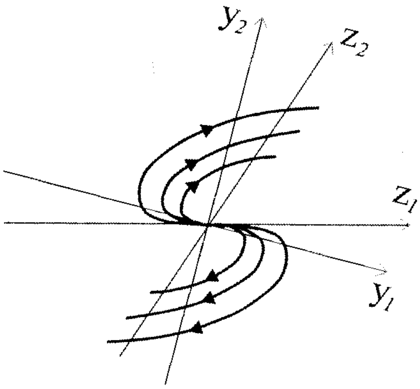


Рис. 25

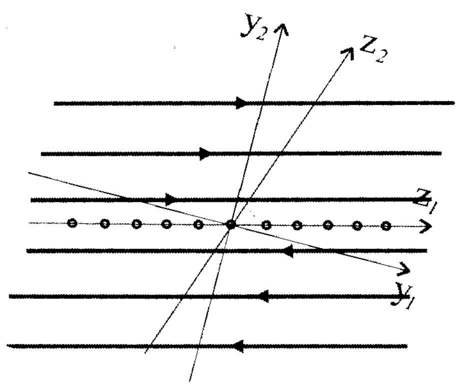


Рис. 26

Якщо $a_1 > 0$, то розташування траєкторій є стійким фокусом. Матеріальна точка здійснює затухаючі коливання навколо початку координат $y = 0$.

Якщо $a_1 = 0$ (тертя відсутнє), то розташування траєкторій є центром – матеріальна точка здійснює незатухаючі коливання навколо початку координат.

При $\dfrac{a_1^2}{4} = a_2$ корені характеристичного рівняння дійсні і збігаються, причому $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{a_1}{2} < 0$. Розташування траєкторій у цьому випадку є стійким виродженим вузлом.

Зауваження 3.7. *Розглянемо динамічну систему*

$$\vec{y}\,' = A\,\vec{y} + \vec{F}(\vec{y}), \tag{17.7}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad |\vec{F}(\vec{y})| \le M\,|\vec{y}|^{1+\alpha}$$

при достатньо малих $\vec{y}$; M, α – деякі додатні сталі.

Якщо матриця A така, що її власні значення λ_1, λ_2 різні і їх дійсні частини відмінні від нуля, то в достатньо малому околі початку координат розташування траєкторій динамічної системи (17.7) буде таким самим як і системи (9.7).

§ 5.7. Перші інтеграли динамічних систем

Знову розглянемо динамічну систему

$$y_i' = f_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.7}$$

або у векторному записі

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(\vec{y}).$$

Як і раніше, будумо припускати, що $f_i(y_1, \ldots, y_n)$, $\dfrac{\partial f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \in C(D)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Означення 7.7. *Функція $u(y_1, \ldots, y_n) = u(\vec{y})$, визначена і неперервна разом зі своїми частинними похідними в деякій області $\Omega \subset D$, називається першим інтегралом системи (1.7), якщо вона зберігає стале значення вздовж будь-якого розв'язку системи (1.7), траєкторія якого лежить в Ω. Тобто, якщо $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, – довільний розв'язок системи (1.7) такий, що $\vec{y} = \vec{\varphi}(x) \in \Omega$, $x \in \langle a, b\rangle$, то* $u(\vec{\varphi}(x)) \equiv \text{const}$.

Теорема 13.7. *Для того, щоб функція $u(\vec{y})$, визначена і неперервна разом зі своїми частинними похідними в області Ω, $\Omega \subset D$, була першим інтегралом системи (1.7) необхідно і достатньо, щоб*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{y} \in \Omega. \tag{18.7}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $u(\vec{y})$ – перший інтеграл системи (1.7). Нехай $\vec{\eta}$ – довільна точка області Ω. Позначимо через $\vec{\varphi}(x, \vec{\eta})$ розв'язок системи (1.7), який починається у точці $\vec{\eta}$, тобто задовольняє умову $\vec{\varphi}(0,\vec{\eta}) = \vec{\eta}$. Тоді згідно з означенням 7.7 $v(x) = u(\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})) \equiv \text{const}$ і

$$\left.\frac{dv(x)}{dx}\right|_{x=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{\varphi}(x,\vec{\eta}))}{\partial y_i} \left.\frac{d\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})}{dx}\right|_{x=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{\varphi}(x,\vec{\eta}))}{\partial y_i} f_i(\vec{\varphi}(x,\vec{\eta}))\Big|_{x=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{\eta})}{\partial y_i} f_i(\vec{\eta}) = 0.$$

Оскільки $\vec{\eta}$ – довільна точка Ω, то рівність (18.7) доведено.

Нехай навпаки, виконується рівність (18.7) і $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$, – довільний розв'язок системи (1.7), траєкторія якого лежить в Ω. Розглянемо функцію $v(x) = u(\vec{\varphi}(x))$. Диференціюючи цю функцію за x, маємо:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{\varphi}(x))}{\partial y_i}\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\vec{\varphi}(x))}{\partial y_i} f_i(\vec{\varphi}(x)) = 0,$$

для всіх $x \in \langle a,b\rangle$, оскільки $\vec{\varphi}(x) \in \Omega$. Таким чином, $v(x) = u(\vec{\varphi}(x)) \equiv \text{const}$ і теорему доведено.

Означення 8.7. *Перші інтеграли $u_1(\vec{y}),\ldots,u_k(\vec{y})$ системи (1.7), визначені у деякому околі $\vec{a}$, називаються незалежними, якщо матриця*

$$U(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(\vec{y})}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(\vec{y})}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

має ранг k у точці $\vec{y} = \vec{a}$.

Теорема 14.7. *Нехай $\vec{a}$ не є станом рівноваги динамічної системи (1.7). Тоді у деякому околі точки $\vec{a}$ існують $(n-1)$ незалежних перших інтегралів системи (1.7).*

Доведення.. Оскільки $\vec{f}(\vec{a}) \neq 0$, то хоча б одна з координат цього вектора $\vec{f}$ не дорівнює нулю. Нехай для визначеності $f_n(\vec{a}) \neq 0$ і точка $\vec{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},a_n)$ близька до $\vec{a}$. Розглянемо розв'язок $y = \vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$ системи (1.7), який починається у точці $\vec{\eta}$: $\vec{\varphi}(0,\vec{\eta}) = \vec{\eta}$. У координатній формі цей розв'язок можна записати у вигляді

$$y_i = \varphi_i(x,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},a_n), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{19.7}$$

Зауважимо, що $\varphi_i(0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n) = a_i$, $\quad i = 1,\ldots,n$. Будемо розглядати співвідношення (19.7) як відображення деякого околу Δ точки $\eta_1 = a_1,\ldots,\eta_{n-1} = a_{n-1}$, $x = 0$ з простору $\mathbb{R}^n$ у окіл точки $\vec{a}$ цього простору. Функції φ_i, $i = 1,\ldots,n$, є неперервними разом зі своїми частинними похідними в Δ (згідно з теоремою 7.2). Обчислимо матрицю Якобі J відображення (19.7) у точці $(a_1,\ldots,a_{n-1},0)$. Для цього використаємо рівності

$$\varphi_i(0,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},a_n) = \eta_i, \quad i = 1,\ldots,n-1;$$
$$\varphi_n(0,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},a_n) = a_n.$$

Отже,

$$\frac{\partial\varphi_i(0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial\eta_j}=\begin{cases}1, & \text{коли} \quad i=j,\\ 0, & \text{коли} \quad i\neq j,\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi_i(0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial x}=f_i(\vec{a}),\ \ i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,n-1.$$

Тому

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0 & f_1(\vec{a})\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & f_2(\vec{a})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & f_{n-1}(\vec{a})\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_n(\vec{a})\end{pmatrix},$$

і оскільки $f_n(\vec{a})\neq 0$, то $\det J\neq 0$. Таким чином, на підставі теореми з математичного аналізу у деякому околі Ω точки $\vec{a}$ існує обернене відображення до (19.7):

$$\eta_1=u_1(\vec{y}),\ldots,\eta_{n-1}=u_{n-1}(\vec{y}), \quad x=v(\vec{y}), \tag{20.7}$$

причому матрицею Якобі цього відображення у точці $\vec{a}$ є матриця J^{-1}. Легко переконатись, що матриця $U(\vec{y})$ (означення 8.7) функцій $u_1(\vec{y}),\ldots,$ $u_{n-1}(\vec{y})$ у точці $\vec{a}$ має вигляд:

$$U(\vec{a})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial u_{n-1}(\vec{a})}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}(\vec{a})}{\partial y_n}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0 & -\dfrac{f_1(\vec{a})}{f_n(\vec{a})}\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\dfrac{f_2(\vec{a})}{f_n(\vec{a})}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\dfrac{f_{n-1}(\vec{a})}{f_n(\vec{a})}\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця $U(\vec{a})$ має ранг $n-1$ і функції $u_1(\vec{y}),\ldots,u_{n-1}(\vec{y})$ є незалежними. Оскільки відображення (19.7) і (20.7) є взаємно оберненими, то

$$u_i(\vec{\varphi}(x,\vec{\eta}))\equiv\eta_i, \quad i=1,\ldots,n-1, \tag{21.7}$$

тобто при підстановці у функції $u_1(\vec{y}),\ldots,u_{n-1}(\vec{y})$ розв'язку $\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$ системи (1.7) ми отримаємо сталі величини.

Нехай тепер $\vec{y}=\vec{\psi}(x)$ – довільний розв'язок системи (1.7), траєкторія якого лежить в Ω і $\vec{\psi}(x_0)=\vec{y}^{\,0}, \quad \vec{y}^{\,0}\in\Omega$. Покладемо

$$\eta_1^0=u_1(\vec{y}^{\,0}),\ldots,\eta_{n-1}^0=u_{n-1}(\vec{y}^{\,0}), \quad x_1=v(\vec{y}^{\,0}).$$

Тоді розв'язок

$$y_i=\varphi_i(x+x_1,\eta_1^0,\ldots,\eta_{n-1}^0,a_n), \quad i=1,\ldots,n$$

системи (1.7) (теорема 1.7) при $x = 0$ проходить через точку $\vec{y}^0$, оскільки

$$\varphi_i(x_1, \eta_1^0, \ldots, \eta_{n-1}^0, a_n) = \varphi_i(v(\vec{y}^0), u_1(\vec{y}^0), \ldots, u_{n-1}(\vec{y}^0), a_n) = y_i^0,$$

$i = 1, \ldots, n$. Отже, згідно з теоремою 2.7

$$\vec{\psi}(x) = \vec{\varphi}(x + x_1 - x_0, \eta_1^0, \ldots, \eta_{n-1}^0, a_n),$$

а тому

$$u_i(\vec{\psi}(x)) = u_i(\vec{\varphi}(x + x_1 - x_0, \eta_1^0, \ldots, \eta_{n-1}^0, a_n)) \equiv \eta_i^0,$$
$$i = 1, \ldots, n-1.$$

Звідси випливає, що функції $u_1(\vec{y}), \ldots, u_{n-1}(\vec{y})$ є першими інтегралами системи (1.7), незалежними в Ω. Теорему доведено.

Зауваження 4.7. *Як випливає з доведення теореми 14.7, у випадку $f_n(\vec{a}) \neq 0$ у деякому околі Ω точки $\vec{a}$ існують $n-1$ незалежних інтегралів $u_1(\vec{y}), \ldots, u_{n-1}(\vec{y})$ системи (1.7), причому*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^0)}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^0)}{\partial y_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^0)}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^0)}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^0) \in \Omega$, y_n^0 – фіксоване.

Теорема 15.7. *Нехай $\vec{f}(\vec{a}) \neq 0$, $\vec{a} \in D$,*

$$u_1(\vec{y}), \ldots, u_{n-1}(\vec{y}) \quad - \tag{22.7}$$

незалежні перші інтеграли системи (1.7), визначені у деякому околі Ω точки $\vec{a}$, причому $u_i(\vec{a}) = b_i$, $i = 1, \ldots, n-1$; $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$, і нехай $v(\vec{y})$ – деякий перший інтеграл системи (1.7), визначений в Ω. Тоді існує така функція $w(\vec{z})$, визначена у деякому околі точки $\vec{b}$, що має місце рівність

$$v(\vec{y}) = w(u_1(\vec{y}), \ldots, u_{n-1}(\vec{y})) \tag{23.7}$$

у деякому околі точки $\vec{a}$.

Доведення. На підставі теореми 13.7 в Ω справедливі рівності

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(\vec{y}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(\vec{y}) = 0. \tag{24.7}$$

Співвідношення (24.7) можна розглядати як однорідну систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $f_1(\vec{y}), \ldots, f_n(\vec{y})$. Оскільки ця система має ненульовий розв'язок у деякому околі точки $\vec{a}$, то перші інтеграли $u_1(\vec{y})$, ..., $u_{n-1}(\vec{y}), v(\vec{y})$ є залежними. За умовою теореми інтеграли (22.7) є незалежні. Це означає, що мінор $n-1$-го порядку матриці $U(\vec{a})$ відмінний від нуля. Нехай

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial y_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}(\vec{a})}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}(\vec{a})}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Розглянемо сукупність функцій

$$z_1 = u_1(\vec{y}), \ldots, z_{n-1} = u_{n-1}(\vec{y}), \quad z_n = y_n. \tag{25.7}$$

Легко бачити, що якобіан відображення (25.7) у точці $\vec{a}$ відмінний від нуля. Тоді у деякому околі точки $(b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n)$ існує обернене відображення

$$y_1 = w_1(\vec{z}), \ldots, y_n = w_n(\vec{z}). \tag{26.7}$$

Покладемо

$$w(\vec{z}) = v(w_1(\vec{z}), \ldots, w_n(\vec{z})). \tag{27.7}$$

З огляду на те, що визначник системи (24.7) рівний нулю,

$$\frac{\partial v(\vec{y})}{\partial y_j} = \theta_1(\vec{y})\frac{\partial u_1(\vec{y})}{\partial y_j} + \cdots + +\theta_{n-1}(\vec{y})\frac{\partial u_{n-1}(\vec{y})}{\partial y_j},$$
$$j = 1, \ldots, n. \tag{28.7}$$

Тоді з урахуванням формули (28.7) матимемо

$$\frac{\partial w(\vec{z})}{\partial z_n} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\theta_i(\vec{y})\frac{\partial u_i(\vec{y})}{\partial y_j}\frac{\partial w_j(\vec{z})}{\partial z_n} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\theta_i(\vec{y})\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i(\vec{y})}{\partial y_j}\frac{\partial w_j(\vec{z})}{\partial z_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\theta_i(\vec{y})\frac{\partial z_i}{\partial z_n} = 0,$$

тобто w не залежить від z_n. Оскільки відображення (25.7) і (26.7) є взаємно оберненими, то $v(\vec{y}) = w(u_1(\vec{y}), \ldots, u_{n-1}(\vec{y}))$ і теорему повністю доведено.

Теорема 16.7. *Якщо*

$$u_1(\vec{y}), \ldots, u_k(\vec{y}), \quad k < n, \quad - \tag{29.7}$$

незалежні перші інтеграли системи (1.7), визначені у деякому околі Ω точки $\vec{a} \in D$, то систему (1.7) можна звести до динамічної системи з $n - k$ рівнянь.

Доведення. Оскільки інтеграли (29.7) незалежні, то матриця $U(\vec{a})$ цих інтегралів має мінор порядку k, відмінний від нуля. Нехай для визначеності

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1(\vec{a})}{\partial y_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_k(\vec{a})}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_k(\vec{a})}{\partial y_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Введемо в околі точки $\vec{a}$ нові координати $z_1, \ldots, z_n$ за формулами

$$z_1 = u_1(\vec{y}), \ldots, z_k = u_k(\vec{y}), \quad z_{k+1} = y_{k+1}, \ldots, z_n = y_n. \tag{30.7}$$

Оскільки якобіан відображення (30.7) відмінний від нуля у точці $\vec{a}$, то це відображення є бієктивним. Тоді

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i(\vec{y})}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dx} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i(\vec{y})}{\partial y_j}f_j(\vec{y}) = 0$$

в Ω для $i = 1, \ldots, k$, а

$$\frac{dz_{j+k}}{dx} = \frac{dy_{j+k}}{dx} = f_{j+k}(\vec{y}), \quad j = 1, \ldots, n-k.$$

Тому, знайшовши обернене відображення до (30.7), ми отримаємо нову динамічну систему

$$z_i' = 0, \quad i = 1, \ldots, k;$$
$$z_{j+k}' = g_{j+k}(z_1, \ldots, z_n), \quad j = 1, \ldots, n-k.$$

Звідси $z_i = C_i$, $i = 1, \ldots, k$, де C_i – довільні сталі. Отже, приходимо до динамічної системи

$$z_j' = g_j(C_1, \ldots, C_k, z_{k+1}, \ldots, z_n), \quad j = k+1, \ldots, n,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження 5.7. *Якщо відомо $n-1$ незалежних перших інтегралів системи (1.7), то вона зведеться до одного рівняння*

$$z_n' = g_n(C_1, \ldots, C_{n-1}, z_n),$$

яке, очевидно, інтегрується. Тому знаходження максимальної кількості перших інтегралів динамічної системи веде до її повного інтегрування.

Зауваження 6.7. *Систему (1.7) можна записати у іншій, так званій симетричній формі. Справді, перепишемо її у вигляді*

$$\frac{dy_i}{f_i(y_1, \ldots, y_n)} = dx, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Оскільки всі відношення $\dfrac{dy_i}{f_i(\vec{y})}$ *рівні* dx, *то вони рівні між собою:*

$$\frac{dy_1}{f_1(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(y_1, \ldots, y_n)} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n(y_1, \ldots, y_n)}. \tag{31.7}$$

Співвідношення (31.7) називаються симетричною системою звичайних диференціальних рівнянь. Очевидно, кожна симетрична система може бути зведена до динамічної. Для цього достатньо відношення (31.7) покласти рівним dx.

§ 6.7. Перші інтеграли нормальних систем

Розглянемо тепер нормальну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{32.7}$$

Будемо припускати, що функції f_i, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$ є визначені і неперервні в області $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Як випливає з зауваження 2.7, нормальна система (32.7) може бути зведена до динамічної системи вигляду

$$\begin{aligned} &y_i' = f_i(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \\ &y_{n+1}' = 1, \end{aligned} \tag{33.7}$$

шляхом збільшення розмірності фазового простору на одиницю (заміна $x = y_{n+1}$). Очевидно, система (33.7) не має станів рівноваги в області G. Згідно з означенням 7.7 функція $u(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n)$, визначена і неперервна разом зі своїми частинними похідними у деякій області Ω, $\Omega \subset G$, буде першим інтегралом системи (33.7), якщо вона зберігає стале значення вздовж кожного розв'язку цієї системи, траєкторія якого лежить в Ω. Тому повертаючись до системи (32.7), будемо мати означення.

Означення 9.7. *Функція $u(x, y_1, \ldots, y_n)$, визначена і неперервна разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y_i}$, $i = 1, \ldots, n$, в області Ω, називається першим інтегралом системи (32.7), якщо для будь-якого розв'язку $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, цієї системи такого, що $(x, \vec{\varphi}(x)) \in G$, $x \in \langle a, b \rangle$, має місце рівність $u(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \equiv \mathrm{const}$.*

З теореми 13.7 випливає така теорема.

Теорема 17.7. *Для того, щоб функція $u(x, y_1, \ldots, y_n)$, визначена і неперервна разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y_i}$, $i = 1, \ldots, n$, в області Ω, була першим інтегралом системи (32.7), необхідно і достатньо, щоб для всіх $(x, y_1, \ldots, y_n) \in \Omega$ виконувалась рівність*

$$\frac{\partial u(x, \vec{y})}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x, \vec{y})}{\partial y_j} f_j(x, \vec{y}) = 0.$$

Далі можна сформулювати теорему, аналогічну до 14.7.

Теорема 18.7. *У деякому околі довільної точки $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in G$ існує n незалежних перших інтегралів*

$$u_1(x, \vec{y}), \ldots, u_n(x, \vec{y}) \tag{34.7}$$

системи (32.7).

Нехай маємо сукупність n незалежних перших інтегралів (34.7) нормальної системи (32.7). Для запису перших інтегралів використовують формули

$$u_i(x, \vec{y}) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{35.7}$$

Як випливає з зауваження 4.7, у точці $(x_0, \vec{y}^{\,0})$ визначник матриці

$$U(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(x, \vec{y})}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1(x, \vec{y})}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_n(x, \vec{y})}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n(x, \vec{y})}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

відмінний від нуля. Тому згідно з теоремою про неявну функцію співвідношення (45.7) визначають $\vec{y}$ як функцію змінної x і сталих $C_1, \ldots, C_n$:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, \ldots, n \tag{36.7}$$

у деякому околі точки x_0. Неважко переконатись, що функції (36.7) дають загальний розв'язок системи (32.7). Тому знаходження максимальної кількості незалежних перших інтегралів нормальної системи еквівалентне її повному розв'язуванню. Зауважимо, що нормальна система (32.7) теж може бути зведена до симетричної

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)}. \tag{37.7}$$

У системі (37.7) всі змінні можна вважати рівноправними і будь-яка з них може бути вибрана в якості незалежної.

ГЛАВА 8. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ РОЗВ'ЯЗКІВ НОРМАЛЬНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 1.8. Означення і приклади

Розглянемо нормальну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)\,, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.8}$$

або у векторному вигляді

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}).$$

Будемо припускати, що функції $f_i(x, \vec{y})$, $\dfrac{\partial f_i(x, \vec{y})}{\partial y_i}$, $i, j = 1, \dots, n$, визначені і неперервні в області $G = I_a \times D$, де $I_a = (a, +\infty)$, причому a може бути і символом $-\infty$, D – область з простору $\mathbb{R}^n$. Як випливає з глави 2 система (1.8) має єдиний розв'язок $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})$, який задовольняє початкову умову

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{\,0}, \tag{2.8}$$

яка б не була точка $(x_0, \vec{y}^{\,0}) \in G$. Крім того, розв'язок $\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})$ неперервно залежить від початкових даних $x_0, \vec{y}^{\,0}$, коли x змінюється на відрізку $[x_0, b]$.

У даній главі будемо досліджувати залежність розв'язку задачі Коші (1.8),(2.8) від початкових даних, коли $x \in [x_0, +\infty)$.

Означення 1.8. *Розв'язок $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ системи (1.8) називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для довільного вектора $\vec{y}^{\,0}$, який задовольняє умову $|\vec{\psi}(x_0) - \vec{y}^{\,0}| < \delta$, розв'язок $\vec{y} = \vec{\psi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})$ визначений для всіх $x \in I_{x_0}$ і задовольняє нерівність*

$$|\vec{\psi}(x) - \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})| < \varepsilon\,, \quad x \in I_{x_0}.$$

Якщо, крім того,

$$\lim_{x \to +\infty} |\vec{\psi}(x) - \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})| = 0\,,$$

то розв'язок $\vec{\psi}(x)$ називається асимптотично стійким.

Приклад 1.8. Розглянемо рівняння

$$y' = ky, \quad k = \text{const}.$$

Розв'язок цього рівняння з початковими умовами (x_0, y_0) має вигляд

$$y = y_0 e^{k(x - x_0)}. \tag{3.8}$$

При $k \le 0$ розв'язок (3.8) буде стійким за Ляпуновим, оскільки для всіх $x \ge x_0$

$$|y_1 e^{k(x-x_0)} - y_0 e^{k(x-x_0)}| = e^{k(x-x_0)} |y_1 - y_0| \le |y_1 - y_0| < \varepsilon\,,$$

У випадку $k < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{k(x-x_0)}|y_1 - y_0| = 0$$

і розв'язок (3.8) асимптотично стійкий. Якщо $k = 0$ і $y_1 \neq y_0$, то розв'язок $y = y_0$ є стійкий за Ляпуновим, але не асимптотично стійкий, оскільки різниця $|y_1 - y_0|$ не прямує до нуля, коли $x \to +\infty$. При $k > 0$, $y_1 \neq y_0$

$$\lim_{x \to +\infty} |y_1 - y_0| e^{k(x-x_0)} = +\infty$$

і розв'язок (3.8) нестійкий.

Приклад 2.8. Розглянемо лінійну однорідну систему рівнянь зі сталими коефіцієнтами (§ 4.7). У випадку стійкого вузла і стійкого фокуса розв'язок $\vec{y} = 0$ буде, очевидно, асимптотично стійким. У випадку центра розв'язок $\vec{y} = 0$ буде стійким за Ляпуновим, але не буде асимптотично стійким. У випадку сідла розв'язок $\vec{y} = 0$ нестійкий.

Лема 1.8. *Дослідження стійкості розв'язку $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ системи (1.8) може бути зведено до дослідження стійкості тотожно нульового розв'язку іншої нормальної системи.*

Доведення. Введемо нову невідому функцію

$$\vec{z}(x) = \vec{y}(x) - \vec{\psi}(x)\,. \tag{4.8}$$

Очевидно, вона задовольняє таку систему рівнянь:

$$\vec{z}\,'(x) = \vec{y}\,'(x) - \vec{\psi}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{z} + \vec{\psi}) - \vec{f}(x, \vec{\psi}(x)) \equiv \vec{g}(x, \vec{z})\,, \tag{5.8}$$

де $\vec{g}(x, 0) \equiv 0$. При цьому стійкість за Ляпуновим або асимптотична стійкість розв'язку $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ системи (1.8) рівносильна стійкості або асимптотичній стійкості розв'язку $\vec{z} = 0$ системи (5.8).

§ 2.8. Стійкість розв'язків лінійних нормальних систем

У даному параграфі розглянемо нормальну лінійну систему

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(x) y_j + b_i(x)\,, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.8}$$

або у векторній формі

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)\,, \tag{7.8}$$

де

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_1^1(x) & \ldots & a_1^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1(x) & \ldots & a_n^n(x) \end{pmatrix}$$

і вектор-стовпчик $\vec{b}(x) = \mathrm{colon}(b_1(x), \ldots, b_n(x))$ мають неперервні компоненти на інтервалі I_a. Як відомо (теорема 1.4), всі розв'язки системи (6.8) визначені на I_a. На підставі леми 1.8 дослідження стійкості розв'язку $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ системи (7.8) заміною (4.8) легко звести до дослідження стійкості нульового розв'язку $\vec{z} = 0$ лінійної однорідної системи

$$\vec{z}\,' = A(x)\vec{z}. \tag{8.8}$$

Нехай $\vec{\varphi}^{\,i}(x)\,, i = 1, \ldots, n,$ – розв'язки системи (8.8), причому

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x) = (\varphi_1^i(x), \ldots, \varphi_n^i(x))\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Аналогічно як у главі 4, введемо матрицю

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(x) & \ldots & \varphi_1^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1(x) & \ldots & \varphi_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що матриця $\Phi(x)$ задовольняє рівняння

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)\,, \tag{9.8}$$

де $\Phi'(x) = ((\varphi_j^i(x))')$. Справді, оскільки функції $\vec{\varphi}^{\,i}(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ є розв'язком системи (8.8), то

$$(\varphi_i^k(x))' = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(x)\varphi_j^k(x)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, k = 1, \ldots, n.$$

Тоді згідно з правилом множення матриць, маємо

$$\Phi'(x) = ((\varphi_i^k(x))') = \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^j(x)\varphi_j^k(x)\right) \equiv A(x)\Phi(x)\,,$$

що й потрібно було довести.

Навпаки, якщо матриця $\Phi(x)$ задовольняє рівняння (9.8), то її стовпчики $\vec{\varphi}^{\,i}(x)\,, i = 1, \ldots, n,$ є розв'язками системи (8.8). Справді, очевидно, маємо

$$\vec{\varphi}^{\,i}(x) = \Phi(x)\vec{e}^{\,i}\,,$$

де $\vec{e}^{\,i} = \mathrm{colon}(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$ (одиниця стоїть на i–тому місці). Помноживши справа на $\vec{e}^{\,i}$ рівняння (9.8), отримаємо

$$\frac{d}{dx}\left(\Phi(x)\vec{e}^{\,i}\right) = A(x)\left(\Phi(x)\vec{e}^{\,i}\right)\,,$$

тобто

$$\frac{d\,\vec{\varphi}^{\,i}(x)}{dx} = A(x)\vec{\varphi}^{\,i}(x)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Якщо $\vec{\varphi}^{\,i}(x)\,, i = 1, \ldots, n,$ – фундаментальна система розв'язків системи (8.8), то кожен розв'язок цієї системи може бути записаний у вигляді (теорема 6.4)

$$\vec{\varphi}(x) = \Phi(x)C\,, \tag{10.8}$$

де $C = \text{colon}(C_1, \ldots, C_n)$ – деякий сталий вектор-стовпчик. Згідно з теоремою 5.4 ми можемо вибрати матрицю $\Phi(x)$ так, що

$$\Phi(x_0) = E\,, \quad x_0 \in I_a\,.$$

Тут E – одинична матриця.

Нехай розв'язок $\vec{z} = \vec{\varphi}(x)$ задовольняє початкову умову

$$\vec{z}(x_0) = \vec{z}^{\,0}\,. \tag{11.8}$$

Поклавши в (10.8) $x = x_0$, будемо мати

$$C = \Phi^{-1}(x_0)\vec{\varphi}(x_0)\,.$$

Отже, розв'язок

$$\vec{z} = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\vec{\varphi}(x_0)$$

системи (8.8) задовольняє початкову умову (11.8).

Оскільки $\Phi^{-1}(x_0) = E$, то формула

$$\vec{\varphi}(x) = \Phi(x)\vec{\varphi}(x_0) \tag{12.8}$$

дає розв'язок задачі Коші (8.8),(11.8).

Теорема 1.8. *Нульовий розв'язок системи (8.8) стійкий за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли кожний розв'язок $\vec{\varphi}(x)\,, x \in [x_0, +\infty)\,,\ x_0 \in I_a$б цієї системи обмежений на півосі $[x_0, +\infty)$.*

Доведення. Нехай довільний розв'язок системи (8.8) є обмежений на $[x_0, +\infty)$. Розглянемо фундаментальну систему розв'язків системи (8.8) $\vec{\varphi}^{\,i}(x)\,, i = 1, \ldots, n$, таку, що $\Phi(x_0) = E$. Оскільки всі розв'язки $\vec{\varphi}^{\,i}(x)\,, i = 1, \ldots, n$, обмежені на $[x_0, +\infty)$, то функція

$$p(x) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} (\varphi_i^j(x))^2\right)^{1/2}$$

теж буде обмеженою на $[x_0, +\infty)$, тобто $p(x) \le M\,, x \in [x_0, +\infty)$, де M – деяка додатна стала, яка, взагалі кажучи, залежить від x_0. Згідно з формулою (12.8) кожний розв'язок $\vec{z} = \vec{\varphi}(x)\,, x \in [x_0, +\infty)$, системи (8.8) може бути записаний у вигляді:

$$\vec{\varphi}(x) = \Phi(x)\vec{\varphi}(x_0).$$

Звідси отримаємо (на підставі нерівності Коші)

$$|\vec{\varphi}(x)| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi_i^j(x)\varphi_j(x_0)\right)^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varphi_i^j(x))^2\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j(x_0))^2\right)^{1/2} = p(x)|\vec{\varphi}(x_0)| \le M|\vec{\varphi}(x_0)|.$$

Отже, якщо виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, то з нерівності $|\vec{\varphi}(x_0)| < \delta$ випливає нерівність $|\vec{\varphi}(x)| \le M|\vec{\varphi}(x_0)| < M\delta = \varepsilon$ для всіх $x \in [x_0, +\infty)$, тобто нульовий розв'язок системи (8.8) стійкий за Ляпуновим. Нехай тепер нульовий розв'язок системи (8.8) стійкий за Ляпуновим. Припустимо, що система (8.8) допускає розв'язок $\vec{z} = \vec{\psi}(x)$, необмежений на $[x_0, +\infty)$. Очевидно, $\vec{\psi}(x_0) \ne 0$. Задамо два додатні числа $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ і розглянемо розв'язок

$$\vec{z}(x) = \frac{\vec{\psi}(x)}{|\vec{\psi}(x_0)|}\frac{\delta}{2}\,.$$

Очевидно, $|\vec{z}(x_0)| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, причому з необмеженості розв'язку $\vec{\psi}(x)$ для деякого $x_1 > x_0$, маємо

$$|\vec{z}(x_1)| = \frac{|\vec{\psi}(x_1)|}{|\vec{\psi}(x_0)|}\frac{\delta}{2} > \varepsilon\,.$$

Таким чином нульовий розв'язок системи (8.8) нестійкий за Ляпуновим, що суперечить припущенню. Теорему повністю доведено.

Зауваження 1.8. *Для нелінійної диференціальної системи з обмеженості її розв'язків, взагалі кажучи, не випливає стікість.*

Справді, розглянемо рівняння

$$y' = \sin^2 y.$$

Інтегруючи його , будемо мати $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y_0 - x)$ при $y_0 \ne k\pi$ і $y = k\pi$ при $y_0 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Всі розв'язки, очевидно, обмежені на $\mathbb{R}^1$. Але розв'язок $y = 0$ нестійкий за Ляпуновим, оскільки при довільному виборі $y_0 \in (0, \pi)$ маємо

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \pi\,.$$

Теорема 2.8. *Нульовий розв'язок системи (8.8) асимптотично стійкий тоді і тільки тоді, коли всі розв'язки $\vec{z} = \vec{\varphi}(x)\,, x \in [x_0, +\infty)$, цієї системи задовольняють умову*

$$\lim_{x \to +\infty} \vec{\varphi}(x) = 0\,. \tag{12.8}$$

Доведення. Нехай нульовий розв'язок системи (8.8) асимптотично стійкий. Тоді згідно з означенням 1.8 кожний розв'язок $\vec{z} = \vec{\psi}(x)\,, x \in [x_0, +\infty)$, для якого $|\vec{\psi}(x_0)| < \delta$, задовольняє умову (12.8). Розглянемо довільний розв'язок $\vec{z} = \vec{\varphi}(x)\,, x \in [x_0, +\infty)$, системи (8.8) з початковою умовою $\vec{z}(x_0) = \vec{z}^{\,0} \ne 0$. Покладемо

$$\vec{\varphi}(x) = \vec{\psi}(x)\frac{2|\vec{\varphi}(x_0)|}{\delta}\,, \text{ де } \vec{\psi}(x) = \frac{\vec{\varphi}(x)}{|\vec{\varphi}(x_0)|}\frac{\delta}{2}\,.$$

Вибраний розв'язок системи (8.8) задовольняє умову

$$|\vec{\psi}(x_0)| = \frac{\delta}{2} < \delta\,,$$

тому $\lim\limits_{x \to +\infty} \vec{\psi}(x) = 0$. Тоді $\lim\limits_{x \to +\infty} \vec{\varphi}(x) = \dfrac{2|\vec{\varphi}(x_0)|}{\delta} \lim\limits_{x \to +\infty} \vec{\psi}(x) = 0$, що й потрібно було показати. Нехай, навпаки, умова (12.8) виконується. Тоді всі розв'язки системи (8.8) обмежені і згідно з теоеремою 1.8 нульовий розв'язок цієї системи стійкий за Ляпуновим. Таким чином на підставі означення 1.8 розв'язок $\vec{z} = 0$ асимптотично стійкий і теорему доведено повністю.

Зауваження 2.8. *Для нелінійної диференціальної системи прямування до нуля всіх її розв'язків, взагалі кажучи, не є достатньою умовою асимптотичної стійкості її нульового розв'язку.*

Справді, розглянемо систему

$$\begin{cases} z_1' = \dfrac{z_1}{x} - x^2 z_1 z_2^2, \\ z_2' = -\dfrac{z_2}{x}, \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Інтегруючи її, отримаємо

$$\begin{cases} z_1 = C_1 x e^{-C_2^2 x}, \\ z_2 = \dfrac{C_2}{x} \end{cases}$$

або, поклавши $x_0 = 1$, будемо мати

$$\begin{cases} z_1(x) = z_1(x_0) x \exp(-z_2^2(x_0)(x-1)), \\ z_2 = \dfrac{z_2(x_0)}{x}. \end{cases}$$

Очевидно, $z_1(x) \to 0$, $z_2(x) \to 0$, коли $x \to +\infty$. Але для довільного $\delta > 0$ при $z_1(x_0) = \delta^2$, $z_2(x_0) = \delta$, будемо мати

$$z_1(x)\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) > e^{-1}.$$

Отже розв'язок $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ не є стійким і, тим більше, асимптотично стійким.

Нехай тепер у системі (8.8) матриця A має сталі коефіцієнти: $a_i^j(x) \equiv a_i^j = \mathrm{const}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Позначимо через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ різні власні значення матриці A, причому $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$, $j = 1, \ldots, m$, $m \le n$, $i = \sqrt{-1}$. Покладемо $x_0 = 0$.

Теорема 3.8. *Для того, щоб стан рівності $\vec{z} = 0$ системи рівнянь (8.8) був асимптотично стійким, необхідно і достатньо, щоб*

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mu_j < 0$, $j = 1, \ldots, m$. Нехай $\lambda > 0$ таке, що $\mu_j < \lambda < 0$, $j = 1, \ldots, m$. Як відомо з глави 6 кожний розв'язок $\vec{z} = \vec{\varphi}(x)$ системи (8.8) може бути записаний у вигляді

$$\vec{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^{m} \vec{P}^{\,j}(x) e^{\lambda_j x}, \tag{13.8}$$

де $\vec{P}^{\,j}(x)$ – вектор-функція, кожна координата якої є деякий многочлен. З співвідношення (13.8) випливає, що

$$|\vec{\varphi}(x)| \le \sum_{j=1}^{m} \left|\vec{P}^{\,j}(x)\right| \left|e^{(\mu_j + i\nu_j)x}\right| = \sum_{j=1}^{m} \left|\vec{P}^{\,j}(x)\right| e^{\mu_j x}. \tag{14.8}$$

Помноживши нерівність (14.8) на $e^{\lambda x}$, отримаємо

$$|\vec{\varphi}(x)|\, e^{\lambda x} \le \sum_{j=1}^{m} \left|\vec{P}^{\,j}(x)\right| e^{(\mu_j+\lambda)x}\,. \tag{15.8}$$

Оскільки $\mu_j + \lambda < 0$, $j = 1, \ldots, m$, і кожна координата вектора $\vec{P}^{\,j}(x)$ є многочлен, то

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left|\vec{P}^{\,j}(x)\right| e^{(\mu_j+\lambda)x} = 0\,.$$

З цієї рівності випливає, що функція $\sum\limits_{j=1}^{m} \left|\vec{P}^{\,j}(x)\right| e^{(\mu_j+\lambda)x}$ обмежена. Нехай

$$\sum_{j=1}^{m} \left|\vec{P}^{\,j}(x)\right| e^{(\mu_j+\lambda)x} \le R\,.$$

Тоді згідно з (15.8),

$$|\vec{\varphi}(x)| \le Re^{-\lambda x}, \quad x \in (0, +\infty)\,. \tag{16.8}$$

Нехай $\vec{\varphi}^{\,j}(x)$, $j = 1, \ldots, n$, – фундаментальна система розв'язків системи (8.8), причому $\Phi(0) = E$. Тоді на підставі формули (12.8) кожний розв'язок $\vec{z} = \vec{\varphi}(x, \vec{z}^{\,0})$ системи (8.8) з початковою умовою

$$\vec{\varphi}(0, \vec{z}^{\,0}) = \vec{z}^{\,0}$$

можна записати у вигляді

$$\vec{\varphi}(z, \vec{z}^{\,0}) = \Phi(x)\vec{z}^{\,0} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\varphi}^{\,j}(x) z_j^0\,. \tag{17.8}$$

Як було показано вище (оцінка (16.8)) для кожного розв'язку $\vec{\varphi}^{\,j}(x)$, $j = 1, \ldots, n$, існує таке число $R_j > 0$ і $\lambda > 0$, що

$$|\vec{\varphi}^{\,j}(x)| \le R_j e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, +\infty)\,.$$

Покладемо $R = \max\{R_1, \ldots, R_n\}$. Тоді з (17.8) отримаємо оцінку

$$|\vec{\varphi}(x, \vec{z}^{\,0})| \le \sum_{j=1}^{n} |\vec{\varphi}^{\,j}(x)||z_j^0| \le$$

$$\le Re^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{n} |\vec{z}^{\,0}| = n|\vec{z}^{\,0}|Re^{-\lambda x}, \quad x \in [0, +\infty)\,.$$

Таким чином

$$\lim_{x\to+\infty} \vec{\varphi}(x, \vec{z}^{\,0}) = 0$$

і згідно з теоремою 2.8 нульовий розв'язок системи рівнянь (8.8) асимптотично стійкий.

Припустимо тепер, що нульовий розв'язок системи (8.8) є асимтотично стійкий і покажемо, що $\mu_j < 0$, $j = 1, \ldots, m$. Справді, якщо б, наприклад, $\mu_1 \ge 0$, то виберемо власний вектор $\vec{h}$ матриці A, який відповідає власному значенню λ, і розв'язок

$$\vec{z} = \mathrm{Re}\left(\vec{h} e^{\lambda_1 x}\right)$$

системи (8.8). Нехай $\vec{h} = \vec{h}^{\,1} + i\vec{h}^{\,2}$; тоді

$$\vec{z} = \mathrm{Re}\left[(\vec{h}^{\,1} + i\vec{h}^{\,2})e^{(\mu_1+i\nu_1)x}\right] = e^{\mu_1 x}(\vec{h}^{\,1}\cos\nu_1 x - \vec{h}^{\,2}\sin\nu_1 x)$$

не прямує до нуля, коли $x \to +\infty$. А це згідно з теоремою 2.8 суперечить тому, що нульовий розв'ок системи (8.8) асимптотично стійкий. Теорему доведено.

§ 3.8. Стійкість розв'язків нормальних систем. Метод функцій Ляпунова

Знову розглянемо нормальну систему звичайних диференціальних рівнянь (1.8) і припустимо, що виконуються умови на функції $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, наведені в § 1.8. Крім того, нехай $\vec{f}(x, 0) \equiv 0$, тобто функція $\vec{y} = 0$ є розв'язком системи (1.8).

Теорема 4.8 (перша теорема Ляпунова). *Нехай існує така невід'ємна функція $V(y_1, \dots, y_n) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset D$, яка обертається в нуль тільки у точці $\vec{y} = 0$, що*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(x, \vec{y}) \leq 0 \quad \text{на } \Omega .$$

Тоді розв'язок $\vec{y} = 0$ системи рівнянь (1.8) стійкий за Ляпуновим.

Доведення. Нехай ε – довільне число таке, що $\varepsilon > 0$ і куля

$$K_\varepsilon = \{(y_1, \dots, y_n) : |\vec{y}| \leq \varepsilon\}$$

лежить в Ω. Нехай S_ε – поверхня кулі K_ε і

$$\min_{\vec{y} \in S_\varepsilon} V(\vec{y}) = \alpha .$$

Оскільки $V(\vec{y}) > 0$ на S_ε, то, очевидно, $\alpha > 0$. Виберемо $\delta > 0$ таким чином, щоб для $|\vec{y}| < \delta$ виконувалась нерівність $V(\vec{y}) < \alpha$. Таке δ існує, бо функція $V(\vec{y})$ неперервна в K_ε і $V(0) = 0$. Покажемо, що кожний розв'язок

$$\vec{y} = \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0}), \quad x_0 \in I_a, \quad |\vec{y}^{\,0}| < \delta,$$

системи (1.8) визначений на $[x_0, +\infty)$ і для нього має місце нерівність

$$|\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})| < \varepsilon, \quad x \in [x_0, +\infty),$$

тобто розв'язок $\vec{y} = 0$ є стійкий за Ляпуновим.

Припустимо, що існує непродовжуваний розв'язок системи (1.8) $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$, визначений на проміжку $[x_0, b)$ з початковою умовою

$$\left|\vec{\psi}(x_0)\right| < \delta ,$$

для якого не виконується умова

$$|\vec{\psi}(x)| < \varepsilon, \quad x \in (x_0, b) .$$

Тоді знайдеться таке значення $x_1 > x_0$, для якого траєкторія розв'язку $\vec{\psi}(x)$ вперше попаде на сферу S_ε : $|\vec{\psi}(x_1)| = \varepsilon$.

Розглянемо функцію
$$v(x) = V(\vec{\psi}(x)).$$
За умовою теореми
$$v'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{\psi}(x))}{\partial y_j} \frac{d\,\psi_j(x)}{d\,x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{\psi}(x))}{\partial y_j} f_j(x, \vec{\psi}(x)) \le 0,$$
тобто функція $v(x)$ не зростає вздовж розв'язку $\vec{\psi}(x)$. Але тоді
$$\alpha > V(\vec{\psi}(x_0)) = v(x_0) \ge v(x_1) = V(\vec{\psi}(x_1)) \ge \alpha,$$
що неможливо. Отже, траєкторія розв'язку $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ не може перетнути сферу S_ε. У цьому випадку $b \to +\infty$, бо якби це було не так, то розв'язок $\vec{\psi}(x)$ можна було б продовжити вправо від b, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

Теорема 5.8 (друга теорема Ляпунова). *Якщо існує така невід'ємна функція*
$$V(\vec{y}) \in C^1(\Omega), \quad \Omega \subset D,$$
яка обертається в нуль тільки у точці $\vec{y} = 0$, що
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(x, \vec{y}) \le -W(x), \text{ в } \Omega,$$
де $W(\vec{y}) \ge 0$ – деяка неперервна функція, яка обертається в нуль тільки у точці $\vec{y} = 0$, то нульовий розв'язок $\vec{y} = 0$ системи (1.8) асимптотично стійкий.

Доведення. Оскільки всі умови теореми 4.8 виконуються, то нульовий розв'язок ситеми рівнянь (1.8) стійкий за Ляпуновим. Тобто для довільного ε $(\varepsilon > 0, K_\varepsilon \subset \Omega)$ існує $\delta > 0$ таке, що для кожного розв'язку $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ системи (1.8) з умови $|\vec{\psi}(x_0)| < \delta$ випливає нерівність
$$|\vec{\psi}(x)| < \varepsilon, \quad x \in [x_0, +\infty).$$
Розглянемо функцію $v(x) = V(\vec{\psi}(x))$ і покажемо, що
$$\lim_{x \to +\infty} V(\vec{\psi}(x)) = 0. \tag{18.8}$$
Згідно з умовою теореми
$$v'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{\psi}(x))}{\partial y_j} f_j(x, \vec{\psi}(x)) \le 0,$$
тобто $v(x)$ – незростаюча функція на $[x_0, +\infty)$. Припустимо, що
$$\lim_{x \to +\infty} V(\vec{\psi}(x)) = \alpha > 0.$$
Тоді, очевидно,
$$v(x) = V(\vec{\psi}(x)) \ge \alpha, \quad x \in [x_0, +\infty).$$

Але у такому випадку

$$|\vec{\psi}(x)| \geq \sigma > 0, \quad x \in [x_0, +\infty),$$

бо якби це було не так, то існувала б послідовність $\{x_m\} \subset (x_0, +\infty)$ така, що $|\vec{\psi}(x_m)| \to 0$ і, тим самим, $V(\vec{\psi}(x_m)) \to 0$, оскільки $V(0) = 0$. Отже, ми отримали нерівності

$$\sigma \leq |\vec{\psi}(x)| \leq \varepsilon.$$

За умовою теореми на замкненій обмеженій множині $\sigma \leq |\vec{y}| \leq \varepsilon$ функція $W(\vec{y})$ строго додатна, тому існує таке $\beta > 0$, що $W(\vec{y}) \geq \beta$ на цій множині і

$$v'(x) = \frac{dV(\vec{\psi}(x))}{dx} \leq -W(\vec{\psi}(x)) \leq -\beta. \tag{19.8}$$

Інтегруючи нерівність (19.8) в межах від x_0 до x, отримаємо:

$$V(\vec{\psi}(x)) - V(\vec{\psi}(x_0)) \leq -\beta(x - x_0).$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{x\to+\infty} V(\vec{\psi}(x)) = -\infty,$$

хоча функція $V(\vec{y})$ невід'ємна.

Таким чином $\alpha = 0$. Доведемо тепер, що

$$\lim_{x\to+\infty} \vec{\psi}(x) = 0.$$

Якщо припустити протилежне, то знайдеться таке $\eta > 0$ і така послідовність $\{x_k\} \subset (x_0, +\infty), x_k \to +\infty$, що $|\vec{\psi}(x_k)| \geq \eta$. На замкненій обмеженій множині $\eta \leq |\vec{y}| \leq \varepsilon$ функція $V(\vec{y})$ строго додатна, тому існує таке число $\omega > 0$, що $V(\vec{y}) \geq \omega$ і тоді $V(\vec{\psi}(x_k)) \geq \omega > 0$, що суперечить (18.8). Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty} \vec{\psi}(x) = 0$ і асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (1.8) доведено.

Приклад 3.8. Дослідити стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2^3 - y_1^5, \\ y_2' = -y_1 - y_2^3 - y_2^5. \end{cases} \tag{20.8}$$

Будемо шукати функцію $V(y_1, y_2)$ для системи (20.8) у вигляді

$$V(y_1, y_2) = Y_1(y_1) + Y_2(y_2).$$

Тоді

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(\vec{y}) = Y_1'(y_1)(2y_2^3 - y_1^5) + Y_2'(y_2)(-y_1 - y_2^3 - y_2^5) =$$

$$= -y_1^5 Y_1'(y_1) - (y_2^3 + y_2^5)Y_2'(y_2) + 2y_2^3 Y_1'(y_1) - y_1 Y_2'(y_2).$$

Покладемо

$$2y_2^3 Y_1'(y_1) - y_1 Y_2'(y_2) \equiv 0$$

або

$$\frac{Y_1'(y_1)}{y_1} \equiv \frac{Y_2'(y_2)}{2y_2^3}.$$

Очевидно, остання тотожність можлива лише тоді, коли

$$\frac{Y_1'(y_1)}{y_1} = \mu, \quad \frac{Y_2'(y_2)}{2y_2^3} = \mu, \quad \mu \equiv \text{const}.$$

Звідси

$$Y_1(y_1) = \frac{\mu}{2} y_1^2, \quad Y_2(y_2) = \frac{\mu}{2} y_2^4.$$

Виберемо $\mu = 2$. Тоді

$$V(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^4, \quad V(\vec{y}) > 0, \text{ коли } \vec{y} \neq 0 \text{ і } V(0) = 0.$$

Крім того,

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(\vec{y}) = -(2y_1^6 + 4y_2^6 + 4y_2^8) = -W(\vec{y}),$$

причому $W(\vec{y}) > 0$, коли $\vec{y} \neq 0$ і $W(0) = 0$. Отже, на підставі теореми 5.8 розв'язок $y_1 = 0, y_2 = 0$ системи (20.8) асимптотично стійкий.

Теорема 6.8 (Четаєва). *Нехай існує функція $V(\vec{y}) \in C^1(\Omega), \Omega \subset D$, така, що:*

1) точка $\vec{y} = 0$ належить межі $\partial\Omega$ області Ω;

2) $V(\vec{y}) = 0$ на $\partial\Omega$ при $|\vec{y}| < \varepsilon_0$;

3) в області Ω при $x > x_0$ маємо $V(\vec{y}) > 0$ і

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(x, \vec{y}) \geq W(\vec{y}) > 0,$$

де функція $W(\vec{y})$ неперервна. Тоді нульовий розв'язок системи (1.8) нестійкий.

Доведення.. Нехай δ $(0 < \delta < \varepsilon_0)$ як завгодно мале. Розглянемо множину точок $B_\delta = \{(y_1, \dots, y_n) : y \in \Omega, |y| < \delta\}$. Покажемо, що траєкторія розв'язку $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^0)$, $\vec{y}^0 \in B_\delta$, вийде за межі множини $|y| < \varepsilon_0$ при зростанні x $(x > x_0)$. Згідно з умовами теореми

$$v'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^0))}{\partial y_j} f_j(x, \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^0)) > 0$$

там, де

$$v(x) = V(\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^0)) > 0.$$

Отже, при $x \geq x_0$

$$v(x) > v(x_0) = V(\vec{y}^0) = \alpha > 0,$$

якщо тільки $v(x) > 0$. При зростанні змінної x траєкторія розв'язку $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^0)$ може покинути область $B_{\varepsilon_0} = \Omega \cap \{|\vec{y}| < \varepsilon_0\}$ через межу $\partial\Omega$.

Нехай $x_1 > x_0$ – те значення змінної x, для якої траєкторія розв'язку $\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^0)$ виходить на межу $\partial\Omega$, тобто $V(\vec{\varphi}(x_1, x_0, \vec{y}^0)) = 0$, причому

$$v(x) > \alpha, \quad x \in [x_0, x_1).$$

Перейшовши у цій нерівності до границі, коли $x \to x_1 - 0$, будемо мати

$$v(x_1) = V(\vec{\varphi}(x_1, x_0, \vec{y}^{\,0})) \geq \alpha > 0,$$

що неможливо.

Припустимо, що траєкторія розв'язку $\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})$ залишається в області B_{ε_0} для всіх $x \geq x_0$. Тоді

$$v(x) \geq \alpha, \quad x \in [x_0, +\infty),$$

і з умови теореми випливає, що

$$v'(x) \geq W(\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})) \geq \inf_{[x_0, +\infty)} W(\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})) \geq \beta > 0.$$

Інтегруючи цю нерівність в межах від x_0 до x, отримаємо

$$v(x) \geq v(x_0) + \beta(x - x_0).$$

Звідси випливає, що функція $v(x)$ є необмеженою на проміжку $[x_0, +\infty)$. Але множина $\overline{B}_{\varepsilon_0}$ обмежена і неперервна функція $V(\vec{y})$ є обмеженою на цій множині. Тому обмеженою буде і функція $V(\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0}))$. Отримали протиріччя, яке доводить, що траєкторія розв'язку $\vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}^{\,0})$ перетне межу області B_{ε_0} через сферу $|\vec{y}| = \varepsilon_0$. Оскільки δ як завгодно мале, то звідси випливає, що нульовий розв'язок системи (1.8) нестійкий і теорема доведена.

Приклад 4.8. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y_1' = y_1^3 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2^3. \end{cases}$$

Будемо шукати функцію $V(\vec{y})$ у вигляді

$$V(y_1, y_2) = Y_1(y_1) + Y_2(y_2).$$

Тоді

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(\vec{y}) = Y_1'(y_1)(y_1^3 - y_2) + Y_2'(y_2)(y_1 + y_2^3) =$$

$$= Y_1'(y_1)y_1^3 + Y_2'(y_2)y_2^3 - y_2 Y_1'(y_1) + y_1 Y_2'(y_2).$$

Покладемо

$$-y_2 Y_1'(y_1) + y_1 Y_2'(y_2) \equiv 0$$

або

$$\frac{Y_1'(y_1)}{y_1} = \frac{Y_2'(y_2)}{y_2} = 2.$$

Звідси

$$V(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2,$$

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(\vec{y}) = 2(y_1^4 + y_2^4) = W(\vec{y}).$$

Отже, якщо за область Ω взяти множину $\{|\vec{y}| < \varepsilon_0\} \setminus \{0\}$, то виконуються усі умови теореми Четаєва і нульовий розв'язок даної системи диференціальних рівнянь не стійкий.

Приклад 5.8. Консервативна механічна система з одним ступенем вільності (без тертя) описується рівнянням другого порядку

$$y'' = f(y). \tag{21.8}$$

Нехай $f(y) \in C^1([a, b])$. Функція

$$U(y) = -\int_c^x f(\xi)d\xi, \quad a < c < b,$$

називається потенціальною енергією механічної системи.

Рівняння другого порядку (21.8) еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = -U'(y). \end{cases} \tag{22.8}$$

Нехай $y = 0, p = 0$ – стан рівноваги системи (22.8), тобто $f(0) \equiv 0$, і нехай $y = 0$ – точка строгого мінімуму потенціальної енергії. Тоді у деякому околі точки $y = 0$ маємо $U(y) > U(0)$. Побудуємо функцію

$$V(y, p) = U(y) - U(0) + \frac{p^2}{2}.$$

Як відомо, $V(y, p)$ є повною енергією механічної системи. Очевидно,

$$\frac{\partial V}{\partial y}p + \frac{\partial V}{\partial p}(-U'(y)) = 0,$$

і тоді згідно з теоремою 4.8 стан рівноваги $y = 0, p = 0$ стійкий за Ляпуновим.

§ 4.8. Стійкість розв'язків динамічної системи за першим наближенням

У даному параграфі розглянемо динамічну систему

$$y_i' = f_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{23.8}$$

або у векторному записі

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}).$$

Будемо припускати, що функції

$$f_i(\vec{y}) \in C^2(D), \quad D \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

і $\vec{y} = 0$ є станом рівноваги системи (23.8), тобто $\vec{f}(0) = 0$. Застосовуючи формулу Тейлора, запишемо функції $f_i(\vec{y})$ у вигляді

$$f_i(\vec{y}) = f_i(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(0)}{\partial y_j} y_j + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(\theta \vec{y})}{\partial y_k \partial y_m} y_k y_m, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де θ – число з інтервалу $(0,1)$. Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(0)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(0)}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n(0)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n(0)}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

$$F_i(\vec{y}) = \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(\theta\vec{y})}{\partial y_k \partial y_m} y_k y_m, \quad \vec{F}(\vec{y}) = \mathrm{colon}(F_1(\vec{y}),\dots,F_n(\vec{y})).$$

Тоді систему (23.8) можна записати у вигляді

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{F}(\vec{y}). \tag{24.8}$$

Нехай Ω – деяка обмежена область, така, що $0 \in \Omega$ і $\Omega \subset D$. Тоді, очевидно, на $\overline{\Omega}$ для функцій $\vec{F}(\vec{y})$ справедлива оцінка

$$|\vec{F}(\vec{y})| \le M|\vec{y}|^2, \tag{25.8}$$

де $M = \mathrm{const}, \quad M > 0$.

Теорема 7.8 (Ляпунова). *Якщо всі власні значення матриці A мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок системи (21.8) є асимптотично стійкий.*

Доведення. Нехай $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$ – розв'язок системи рівнянь (23.8). Введемо допоміжну вектор-функцію $\vec{z}(x)$ (взагалі кажучи, комплексну) за допомогою рівності $\vec{y}(x) = R\vec{z}(x)$, де R – невироджена стала матриця. Очевидно,

$$\vec{z}\,' = B\vec{z} + \vec{P}(\vec{z}), \tag{26.8}$$

де $B = R^{-1}AR, \quad \vec{P}(\vec{z}) = R^{-1}\vec{F}(R\vec{z})$. Як було показано у главі 6, матрицю R (взагалі кажучи, комплексну) можна підібрати так, щоб матриця B мала вигляд

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ 0 & \lambda_2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{27.8}$$

де $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – власні значення матриці A (з урахуванням їх кратності), а елементи b_j^k, $k > j$, менші за модулем заданого числа $b > 0$. Використовуючи оцінку (23.8), отримаємо

$$\begin{aligned} |\vec{P}(\vec{z})| &\le \|R^{-1}\|\ |\vec{F}(R\vec{z})| \le \|R^{-1}\|\ M\ |R\vec{z}|^2 \le \\ &\le \|R^{-1}\|\ M\ \|R\|^2\,|\vec{z}| = M_1|\vec{z}|^2, \end{aligned} \tag{28.8}$$

де $M_1 = M\|R^{-1}\|\ \|R\|^2, \quad$ а $\|R\| = \left(\sum\limits_{k,m=1}^{n} |r_k^m|^2\right)^{1/2}$, r_k^m – елементи матриці R.

Розглянемо функцію

$$V(\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z}_j = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = |\vec{z}|^2,$$

де $\overline{z}_j$ – число, комплексно спряжене до z_j, а $\vec{z} = R^{-1}\vec{y}$. Очевидно, $V(\vec{y}) > 0$, при $\vec{y} \neq 0$ і $V(0) = 0$. Через кожну точку $\vec{y}^0 \in \Omega$ можна провести єдину траекторію системи (23.8) з рівнянням $\vec{y} = \vec{\psi}(x)$, де $\vec{\psi}(0) = \vec{y}^0$. Тому

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(\vec{y}) = \frac{d}{dx} V(\vec{y}) = \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dz_j}{dx} \overline{z}_j + z_j \frac{d\overline{z}_j}{dx} \right). \tag{29.8}$$

На підставі (25.8), (27.8)

$$\begin{aligned} \frac{dz_j}{dx} &= \lambda_j z_j + \sum_{j<k} b_j^k z_k + P_j, \\ \frac{d\overline{z}_j}{dx} &= \overline{\lambda}_j \overline{z}_j + \sum_{j<k} \overline{b}_j^k \overline{z}_k + \overline{P}_j, \end{aligned} \tag{30.8}$$

Підставляючи (30.8) у (29.8), матимемо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j &= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j y_j \overline{y}_j + \overline{\lambda}_j y_j \overline{y}_j) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{j<k} (b_j^k z_k \overline{z}_j + \overline{b}_j^k \overline{z}_k z_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} (P_j \overline{z}_j + \overline{P}_j z_j) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \overline{\lambda}_j) y_j \overline{y}_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{j<k} (b_j^k z_k \overline{z}_j + \overline{b}_j^k \overline{z}_k z_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} (P_j \overline{z}_j + \overline{P}_j z_j). \end{aligned} \tag{31.8}$$

Оскільки за умовою теореми $\operatorname{Re} \lambda_j < 0, \quad j = 1, \ldots, n$, то існує таке $\alpha > 0$, що $\operatorname{Re} \lambda_j < -\alpha$ і

$$\lambda_j + \overline{\lambda}_j = 2\operatorname{Re} \lambda_j \leq -2\alpha, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нехай $|b_j^k| = |\overline{b}_j^k| \leq b$. Згідно з (28.8) $|P_j| = |\overline{P}_j| \leq |\vec{P}| \leq M_1 |\vec{z}|^2$. З рівності (31.8) випливає, що

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j &\leq \sum_{j=1}^{n} (-2\alpha |z_j|^2) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{j<k} (|b_j^k||z_k||\overline{z}_j| + |\overline{b}_j^k||\overline{z}_k||z_j|) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} (|P_j||\overline{z}_j| + |\overline{P}_j||z_j|) \leq -2\alpha V + \sum_{j=1}^{n} \sum_{j<k} 2b|\vec{z}|^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} M|\vec{z}|^3 = \\ &= -2\alpha V + 2b \frac{n(n-1)}{2} |\vec{z}|^2 + 2M_1 n |\vec{z}|^3 = -2\alpha V + bn(n-1)V + 2nM_1 V^{3/2}. \end{aligned} \tag{32.8}$$

Матрицю R підберемо так, щоб $b \leq \dfrac{\alpha}{2n(n+1)}$, а область Ω виберемо так, щоб

$$(V(\vec{z}))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\alpha}{4M_1 n}, \quad \vec{y} \in \overline{\Omega}.$$

Тоді з нерівності (32.8) отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j \leq -2\alpha V + \frac{\alpha}{2} V + \frac{\alpha}{2} V = -\alpha V.$$

Якщо тепер покласти

$$W(\vec{y}) = -\alpha V(\vec{y}),$$

то згідно з другою теоремою Ляпунова (теорема 5.8) нульовий розв'язок системи (23.8) асимптотично стійкий. Теорему доведено.

Приклад 6.8. Розглянемо динамічну систему

$$\begin{cases} y_1' = \mathrm{tg}\,(y_2 - y_1), \\ y_2' = 2^{y_2} - 2\cos(\frac{\pi}{3} - y_1). \end{cases} \tag{33.8}$$

Легко бачити, що $\vec{y} = 0$ є станом рівноваги даної системи. Функції

$$f_1(\vec{y}) = \mathrm{tg}(y_2 - y_1),$$
$$f_2(\vec{y}) = 2^{y_2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - y_1\right),$$

є двічі неперервно диференційовними в околі точки $\vec{y} = 0$. Тому систему (33.8) можна звести до вигляду (24.8), причому

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \ln 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1 - \ln 2}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - \ln 2)^2}{4} - \sqrt{3}} \quad -$$

власні значення матриці A. Очевидно, $0 < \ln 2 < 1$. Тому

$$\frac{(1 - \ln 2)^2}{4} < \sqrt{3} \quad \text{і} \quad \mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0.$$

Отже, згідно з теоремою 7.8 нульовий розв'язок системи (33.8) асимптотично стійкий.

ГЛАВА 9. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§ 1.9. Розв'язування лінійних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Означення 1.9. *Функцію $f(x)$, задану на інтервалі (a,b), будемо називати аналітичною у точці $x_0 \in (a,b)$, якщо вона може бути розвинена у степеневий ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, (x - x_0)^k,$$

збіжний у деякому околі точки x_0. Якщо $f(x)$ аналітична у кожній точці $x \in (a,b)$, то будемо говорити, що вона є аналітичною на інтервалі (a,b).

У математичній фізиці часто виникають рівняння вигляду

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{1.9}$$

де коефіцієнти $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ є аналітичні функції у деякій точці x_0, або на деякому інтервалі (a,b). Розглянемо спочатку випадок, коли $a_0(x) \equiv 1$, тобто рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{2.9}$$

Будемо припускати, що функції $a_1(x), a_2(x)$ визначені на інтервалі (a,b) і аналітичні у точці $x_0 \in (a,b)$. Тоді ці функції можуть бути розвинені у степеневі ряди:

$$a_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^1 \, (x - x_0)^k, \quad a_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \, (x - x_0)^k. \tag{3.9}$$

Нехай ряди (3.9) збігаються на інтервалі $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$.

Теорема 1.9. *Задача Коші для рівняння (2.9) має розв'язок для довільних початкових даних*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \tag{4.9}$$

який зображається у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = y_0 + y_0^1(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \, (x - x_0)^k$$

з тим самим радіусом збіжності r, що і ряди (3.9).

Доведення. Для спрощення запису покладемо $x_0 = 0$ і будемо шукати розв'язок задачі (2.9), (4.9) у вигляді

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \tag{5.9}$$

Диференціюючи (5.9), отримаємо:

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)C_{k+1}x^k,$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kC_{k+1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k.$$

Тоді

$$a_1(x)y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^1 x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)C_{k+1}x^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k^1 C_1 + a_{k-1}^1 2C_0 + \dots + a_0^1(k+1)C_{k+1}\right] x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^1 x^k,$$

$$a_2(x)y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^2 C_0 + a_{k-1}^2 C_1 + \dots + a_0^2 C_k\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 x^k.$$

Після підстановки у рівняння (2.5), отримаємо рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + \alpha_k^1 + \alpha_k^2\right] x^k = 0.$$

Зрівнювання коефіцієнтів при x^k дає наступні співвідношення для визначення коефіцієнтів C_k, $k \geq 2$:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 \cdot C_2 + \alpha_0^1 + \alpha_0^2 = 0, \\ 3 \cdot 2 \cdot C_3 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (k+2)(k+1)C_{k+2} + \alpha_k^1 + \alpha_k^2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{6.9}$$

Числа α_k^1 і α_k^2 виражаються через коефіцієнти $C_0, C_1, \dots, C_{k+1}$. Коефіцієнти C_0 і C_1 знаходяться з початкових умов

$$C_0 = y(x_0) = y_0, \quad C_1 = y'(x_0) = y_0^1.$$

Після цього з першого рівняння системи (6.9) знаходиться C_2, з другого – C_3 і так далі.

Доведемо збіжність отриманого ряду (5.9) при $|x| < r$. Нехай ρ – довільне додатне число, $\rho < r$. Оскільки ряди (3.9) збіжні, то знайдеться таке число M, що

$$|a_k^1| < \frac{M}{\rho^k}, \quad |a_k^2| < \frac{M}{\rho^k}.$$

Визначимо величини A_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, зі співідношень

$$A_0 = |C_0|, \quad A_1 = |C_1|,$$

$$(k+2)(k+1)A_{k+2} = \frac{M}{\rho^{k+1}}A_0 + \frac{2M}{\rho^k}A_1 +$$

$$+\frac{3M}{\rho^{k-1}}A_2 + \dots + (k+1)\frac{M}{\rho}A_0 + (k+2)MA_{k+1}, \ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Легко бачити, що $|C_k| \le A_k$. З іншого боку справедливе співвідношення

$$\rho(k+2)(k+1)A_{k+2} - (k+1)kA_{k+1} = \rho(k+2)MA_{k+1}.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{k+1}}{A_{k+2}} = \rho.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k x^k$ збігається при $|x| < \rho$. Тим більше при $|x| < \rho$ збігається ряд (5.9). Оскільки ρ можна взяти як завгодно близьким до r, то теорему доведено.

Зауваження 1.9. *Запропонований метод називається методом невизначених коефіцієнтів.*

Всі коефіцієнти C_k, $k \ge 2$, ряду (5.9) лінійно виражаються через C_0 і C_1. Групуючи члени, ряд (5.9) можна записати у вигляді

$$y(x) = C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x),$$

де $y_0(x), y_1(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.9).

Нехай тепер у рівнянні (1.9)

$$\begin{gathered} a_0(x) = (x-x_0)^2, \\ a_1(x) = (x-x_0)\sum_{k=0}^{\infty} a_k^1 (x-x_0)^k, \\ a_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 (x-x_0)^k, \end{gathered} \tag{7.9}$$

і ряди (7.9) збігаються при $|x-x_0| < r$.

Назвемо квадратне рівняння

$$Q(\alpha) \equiv \alpha(\alpha-1) + a_0^1\alpha + a_0^2 = 0 \tag{8.9}$$

визначальним.

Теорема 2.9. *Нехай хоча б один з коефіцієнтів a_0^1, a_0^2, a_1^2 у рівнянні (1.9) відмінний від нуля і визначальне рівняння (8.9) має дійсні корені. Тоді існує розв'язок рівняння (1.9) у вигляді узагальненого степеневого ряду*

$$y(x) = (x-x_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-x_0)^k, \quad C_0 \ne 0, \tag{9.9}$$

де α – більший корінь рівняння (8.9), причому степеневий ряд у (9.9) збігається при $|x-x_0| < r$.

Доведення. Знову для спрощення записів будемо вважати $x_0 = 0$. Підставляючи (9.9) у рівняння (1.9), отримаємо

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{\infty} \big[(k+\alpha)(k+\alpha-1)C_k + (k+\alpha)a_0^1 C_k + \\ +(k+\alpha-1)a_1^1 C_{k-1} + \cdots + \alpha a_k^1 C_0 + \\ +a_0^2 C_k + a_1^2 C_{k-1} + \cdots + a_k^2 C_0\big]\, x^{k+\alpha} = 0. \end{gathered} \tag{10.9}$$

Для визначення чисел C_k прирівняємо до нуля коефіцієнти при $x^{k+\alpha}$.

Для $k = 0$ маємо

$$\alpha(\alpha-1)C_0 + \alpha a_0^1 C_0 + a_0^2 C_0 = C_0 Q(\alpha) = 0.$$

Легко бачити, що якщо $C_0 = 0$ то отримуємо розв'язок, тотожно рівний нулю. Тому $C_0 \neq 0$ і покладемо для визначеності $C_0 = 1$. Розглянемо тепер рівняння (8.9). Нехай α_1 і α_2 – його корені. Якщо різниця $\alpha_1 - \alpha_2$ не дорівнює цілому числу, то візьмемо за α у ряді (9.9) який-небудь з цих коренів, у протилежному випадку – більший з них (нехай для визначеності $\alpha_1 > \alpha_2$). Тоді $\alpha + k \neq \alpha_2, k \geq 1$, і отже, $Q(\alpha+k) \neq 0$. Запишемо співвідношення для визначення $C_1, C_2, \ldots$. Зрівнюючи коефіцієнти при $x^{k+\alpha}$ $k \geq 1$, у рівності (10.9) до нуля, матимемо:

$$\begin{cases} \left[(\alpha+1)\alpha + a_0^1(\alpha+1) + a_0^2\right] C_1 + a_1^1\alpha C_0 + a_1^2 C_0 = 0, \\ \left[(\alpha+2)(\alpha+1) + a_0^1(\alpha+2) + a_0^2\right] C_2 + a_1^1(\alpha+1)C_1 + \\ + a_2^1\alpha C_0 + a_1^2 C_1 + a_2^2 C_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[(\alpha+k)(\alpha+k-1) + a_0^1(\alpha+k) + a_0^2\right] C_k + \\ + \sum\limits_{j=0}^{k-1} [(\alpha+j)a_{k-j}^1 + a_{k-j}^2]C_j = 0. \end{cases} \tag{11.9}$$

Коефіцієнтом при C_k, $k \geq 1$, є величина $Q(\alpha+k)$, яка згідно з вибором α не дорівнює нулю. Тому з системи (11.9) послідовно визначаються коефіцієнти:

$$C_k = -\frac{Q_k}{Q(\alpha+k)}, \quad k \geq 1, \tag{12.9}$$

де

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left[(\alpha+j)a_{k-j}^1 + a_{k-j}^2\right] C_j.$$

Доведемо збіжність отриманого ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k x^k$. Оскільки $Q(\alpha) = 0$ і $\alpha_1 + \alpha_2 = -(a_0^1 - 1)$, то

$$\begin{gathered} Q(\alpha+k) = (\alpha+k)(\alpha+k-1) + (\alpha+k)a_0^1 + a_0^2 = \alpha(\alpha-1) + \\ + \alpha a_0^1 + a_0^2 + k(2\alpha + k - 1 + a_0^1) = Q(\alpha) + \\ + k(2\alpha + k - (\alpha_1+\alpha_2)) = k(k + (\alpha-\alpha_1) + (\alpha-\alpha_2)). \end{gathered} \tag{13.9}$$

Побудуємо мажорантний ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ таким чином. При $k \leq |\alpha_1 - \alpha_2|$ покладемо $p_k = |C_k|$. При $k > |\alpha_1 - \alpha_2|$ будемо виходити з рівності (12.9),

$$|C_k| = \frac{|Q_k|}{|Q(\alpha+k)|}$$

і скористаємось тим, що згідно з (13.9)

$$|Q(\alpha+k)| \geq k(k - |\alpha_1 - \alpha_2|).$$

Як і в теоремі 1.9 знайдеться таке число $M > 0$, що при $\rho < r$

$$|a_m^1| \leq M\rho^{-m}, \quad |a_m^2| \leq M\rho^{-m}.$$

Користуючись формулою для Q_k, маємо

$$|Q_k| \leq M\left[(k+|\alpha|)\frac{|C_{k-1}|}{\rho} + (k-1+|\alpha|)\frac{|C_{k-2}|}{\rho^2} + \cdots + (1+|\alpha|)\frac{|C_0|}{\rho^k}\right].$$

Звідси ясно, що коли при $k > |\alpha_1 - \alpha_2|$ покласти

$$k(k-|\alpha_1-\alpha_2|)p_k = M\left[(k+|\alpha|)\frac{|p_{k-1}|}{\rho} + \right.$$
$$\left. +(k-1+|\alpha|)\frac{|p_{k-2}|}{\rho^2} + \cdots + (1+|\alpha|)\frac{|p_0|}{\rho^k}\right], \tag{14.9}$$

то для визначених таким співвідношенням чисел p_k отримаємо $p_k \geq |C_k|$. При цьому з (14.9) випливає рівність

$$\rho k(k-|\alpha_1-\alpha_2|)p_k - (k-1)(k-1-|\alpha_1-\alpha_2|)p_{k-1} = M(k+|\alpha|)p_{k-1}.$$

Звідси

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k-1}}{p_k} = \rho,$$

а це означає, що мажорантний ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ збігається при $|x| < r$. Тоді збігається і ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ при $|x| < r$, оскільки ρ можна взяти як завгодно близьким до r. Теорему доведено.

Терема 3.9. *Нехай хоча б один з коефіцієнтів a_0^1, a_0^2, a_1^2 у рівнянні (1.9) відмінний від нуля і визначальне рівняння (8.9) має дійсні корені. Якщо різниця коренів $\alpha_1 - \alpha_2$ рівняння (8.9) відмінна від цілого числа, то методом неозначених коефіцієнтів можна знайти два лінійно незалежні розв'язки*

$$y_1(x) = (x-x_0)^{\alpha_1}\sum_{k=0}^{\infty} C_k^1(x-x_0)^k,$$
$$y_2(x) = (x-x_0)^{\alpha_2}\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2(x-x_0)^k \tag{15.9}$$

рівняння (1.9), де коефіцієнти C_k^j $k = 1,2, j = 1,2$, визначаються з системи (11.9) при $\alpha = \alpha_j (C_0^1 = 1, C_0^2 = 1)$, причому ряди в (15.9) збігаються при $|x - x_0| < r$. Якщо ж $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm n$, де n – ціле невід'ємне число, то дійсний розв'язок $z(x)$ рівняння (1.9), лінійно незалежний з розв'язком $y(x)$ цього рівняння, який визначається формулою (9.9), зображається у вигляді

$$z(x) = Ay(x)\ln|x-x_0| + (x-x_0)^{\alpha-n}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(x-x_0)^k, \gamma_0 \neq 0, \tag{16.9}$$

де сталі A і γ_k можуть бути знайдені методом неозначених коефіцієнтів.

Доведення. Перше твердження випливає з доведення теореми 2.9. Лінійна незалежність функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ теж очевидна (їх лінійна комбінація не може обертатись тотожно в нуль, оскільки вони по різному поводять себе при $x \to x_0$). Для доведення другого твердження використаємо формулу Остроградського-Ліувілля. Позначимо через α і $\alpha - n$, $n \geq 0$, корені рівняння (8.9) і покладемо $x_0 = 0$. Нехай $x > 0$. Тоді

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -\frac{a_0^1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 x^{k-1}.$$

Звідси

$$\ln |W(x)| = -a_0^1 \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^1}{k} x^k + \ln |C|,$$

тобто, поклавши $C = \operatorname{sign} W(x_1)$, $0 < x_1 < r$, маємо

$$W(x) = x^{-a_0^1} \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^1}{k} x^k\right) = x^{-a_0^1} e^{g(x)}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^1}{k} x^k$ отримано почленним інтегруванням ряду, збіжного при $|x| < r$. Оскільки збіжні степеневі ряди можна множити, то функція

$$g^m(x) = \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^1}{k} x^k\right)^m$$

зображається збіжним при $|x| < r$ рядом

$$g^m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(m)} x^k. \tag{17.9}$$

Очевидно, справедлива рівність

$$e^{g(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^m(x)}{m!}, \quad |x| < r.$$

Підставляючи замість $g^m(x)$ його вираз (17.9) і змінюючи порядок сумування, отримаємо для $W(x)$ рівність

$$W(x) = x^{-a_0^1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

у вигляді збіжного при $|x| < r$ ряду, причому $A_0 = e^{g(0)} = 1$. Оскільки

$$W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix} = \left(\frac{z(x)}{y(x)}\right)' y^2(x),$$

то

$$z(x) = y(x)\int \frac{W(\xi)}{y^2(\xi)}d\xi = y(x)\int \sum_{k=0}^{\infty} A_k\xi^k \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k\xi^k\right)^{-2} \xi^{-2\alpha - a_0^1}d\xi.$$

Відношення

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\xi^k}{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k\xi^k\right)^2}$$

дає ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k\xi^k$, де $\beta_0 = 1$ (бо $C_0 = 1, A_0 = 1$), який збігається у деякому околі точки $x_0 = 0$. крім того сума коренів $\alpha + (\alpha - n) = 1 - a_0^1$, тобто $2\alpha + a_0^1 = n + 1$. Тому отримуємо

$$z(x) = y(x)\int \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\xi^{k-n-1}d\xi = \beta_n y(x)\ln x +$$
$$+y(x)\frac{1}{x^n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{k-n}x^k + y(x)\frac{1}{x^n}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k-n}x^k,$$

поклавши довільну сталу, яка виникає при інтегруванні, рівною нулю. Звідси

$$z(x) = \beta_n y(x)\ln x + x^{\alpha-n}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k, \tag{18.9}$$

причому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k$ збігається у деякому околі точки x_0. При $n = 0$ маємо $\beta_0 = 1$. Якщо $n > 0$, то в формулі (18.9) $\gamma_0 = C_0\beta_0 = 1$, а коефіцієнт β_n іноді може бути рівним нулю. Теорему доведено.

Зауваження 2.9. *Відзначимо, що теореми 2.9 і 3.9 можуть бути доведені і у тому випадку, коли рівняння (8.9) має комплексні корені. Тоді* $\alpha = \operatorname{Re}\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha_2$. *Якщо* $x < x_0$, *то будемо визначати степінь* $(x - x_0)^\alpha$ *рівністю*

$$(x - x_0)^\alpha = |x - x_0|^\alpha e^{i\pi\alpha}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Крім того, як випливає з теореми 3.9, у випадку $\beta_n \neq 0$ *розв'язок* $z(x)$ *визначений лише в правому або в лівому півоколі точки* x_0 *і стає необмеженим при* $x \to x_0 \pm 0$.

§ 2.9. Гіпергеометричні та циліндричні функції

1^0. **Рівняння Гауса.** Розглянемо рівняння

$$x(x-1)y'' + [-\gamma + (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0, \tag{19.9}$$

яке називається рівнянням Гауса або гіпергеометричним рівнянням. Це рівняння має дві особливі точки: $x = 0, x = 1$. Розглянемо розв'язки цього рівняння в околі точки $x = 0$ при умові, що $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Домножимо (19.9) на функцію $\dfrac{x}{x-1}$:

$$x^2 y'' + \left[-\frac{x}{x-1}\gamma + (\alpha+\beta+1)\frac{x^2}{x-1}\right] y' - \frac{\alpha\beta x}{x-1} y = 0.$$

Оскільки $\dfrac{x}{x-1} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x| < 1$, то останнє рівняння набере вигляду

$$x^2 y'' + x \sum_{k=0}^{\infty} a_k^1 x^k y' + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 x^k y = 0, \tag{20.9}$$

де

$$a_0^1 = \gamma, \quad a_k^1 = \gamma - (\alpha+\beta+1), \quad k = 1, 2, \ldots ;$$
$$a_0^2 = 0, \quad a_k^2 = -\alpha\beta, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отже, визначальним для (20.9) буде рівняння

$$\rho(\rho - 1) + \rho\gamma = 0$$

або $\rho(\rho + \gamma - 1) = 0$, яке має корені $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1 - \gamma$. Оскільки γ не є цілим числом, то згідно з теоремою 3.9 рівняння (19.9) має два розв'язки у вигляді узагальнених рядів. Більше того, оскільки $\gamma \neq 0$, то один розв'язок існує у вигляді степеневого ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

Підставимо цей ряд у рівняння (19.9):

$$x(x-1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^{k-2} +$$
$$+[-\gamma + (\alpha+\beta+1)x]\sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^{k-1} + \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при x^k $k \geq 0$, отримаємо:

$$-\gamma C_1 + \alpha\beta C_0 = 0,$$
$$k(k-1)C_k - (k+1)kC_{k+1} - \gamma(k+1)C_{k+1} +$$
$$+(1+\alpha+\beta)kC_k + \alpha\beta C_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Покладемо $C_0 = 1$. Тоді

$$C_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad C_{k+1} = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)} C_k, \quad k \geq 2.$$

Звідси
$$C_k = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots[\alpha+(k-1)]\beta(\beta+1)\ldots[\beta+(k-1)]}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots[\gamma+(k-1)]},$$
$k = 1, 2, \ldots$. Отже, розв'язок рівняння (19.9) має вигляд

$$y_1(x) \equiv F(\alpha, \beta, \gamma; x) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} x^k. \tag{21.9}$$

Функція $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ називається гіпергеометричною, оскільки при $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ вона перетворюється в суму геометричної прогресії

$$F(1, \beta, \beta; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Користуючись ознакою Даламбера, легко перевірити, що ряд (21.9) збігається при $|x| < 1$.

Другий частковий розв'язок рівняння (19.9) теж можна знайти методом неозначених коефіцієнтів, підставляючи
$$y = x^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$
в (19.9). Але ми зробимо це іншим шляхом. Позначимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = z;$$

тоді будемо мати $y = x^{1-\gamma} z$. Отже,

$$y' = (1-\gamma)x^{-\gamma} z + x^{1-\gamma} z',$$
$$y'' = -(1-\gamma)\gamma x^{-\gamma-1} z + 2(1-\gamma)x^{-\gamma} z' + x^{1-\gamma} z''$$

і рівняння (19.9) набере вигляду

$$x(x-1)z'' + [\gamma - 2 + (3 - 2\gamma + \alpha + \beta)x]z' +$$
$$+[-(1-\gamma)\gamma + (1+\alpha+\beta)(1-\gamma) + \alpha\beta]z = 0. \tag{22.9}$$

Але

$$-(1-\gamma)\gamma + (1+\alpha+\beta)(1-\gamma) + \alpha\beta =$$
$$= -\gamma + \gamma^2 + 1 + \alpha + \beta - \gamma - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\beta =$$
$$= -\gamma(1 - \gamma + \alpha) + 1 - \gamma + \alpha + \beta(1 - \gamma + \alpha) =$$
$$= (1 - \gamma + \alpha)(-\gamma + 1 + \beta) = (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma),$$
$$3 - 2\gamma + \alpha + \beta = 1 + (\alpha + 1 - \gamma) + (\beta + 1 - \gamma).$$

Тому рівняння (22.9) можна переписати таким чином:

$$x(x-1)z'' + [-\gamma_1 + (\alpha_1 + \beta_1 + 1)x]z' + \alpha_1\beta_1 z = 0, \tag{23.9}$$

де $\gamma_1 = 2 - \gamma, \alpha_1 = \alpha + 1 - \gamma, \beta_1 = \beta + 1 - \gamma$. Оскільки (23.9) є рівнянням Гауса і γ_1 не дорівнює нулю і цілому від'ємному числу, то його розв'язок можна записати формулою

$$z = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, x) = F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

Отже, другим частковим розв'язком рівняння (19.9) буде функція

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

визначена для $x \in (0,1)$ (або $x \in (-1, 0)$), якщо $1 - \gamma < 0$ і визначена на інтервалі $|x| < 1$, якщо $1 - \gamma > 0$.

Легко переконатись, що розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні. Тому загальний розв'язок рівняння (19.9) можна записати у вигляді

$$y = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

2^0. **Рівняння Бесселя.** Розглянемо рівняння

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{24.9}$$

де $\nu \geq 0$ – дійсний параметр. Це рівняння називається рівнянням Бесселя. Його особливою точкою є $x = 0$. Будемо шукати розв'язки рівняння (24.9) для $x > 0$. Легко бачити , що визначальним для (24.9) є рівняння

$$\alpha^2 - \nu^2 = 0. \tag{25.9}$$

При $\nu = 0$ корені рівняння (25.9) збігаються; при $\nu > 0$ більший корінь α_1 дорівнює ν, менший – α_2, дорівнює $-\nu$. Згідно з теоремою 2.9 можна знайти розв'язок рівняння (24.9) у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

Підставляючи цю функцію у рівняння (24.9), отримаємо

$$x^\nu \left[\sum_{k=0}^{\infty} ((\nu + k)^2 - \nu^2) C_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} \right] = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при x^k $k \geq 0$, матимемо:

$$\begin{gathered} \left[(\nu + 1)^2 - \nu^2\right] C_1 = 0, \\ \left[(\nu + k)^2 - \nu^2\right] C_k - C_{k-2} = 0, \quad k \geq 2. \end{gathered} \tag{26.9}$$

Звідси

$$C_{2k-1} = 0,$$
$$C_{2k} = -\frac{C_{2k-2}}{2k(2\nu + 2k)} = -\frac{C_{2k-2}}{2^2 k(\nu + k)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Нехай $C_0 \neq 0$. Тоді

$$C_{2k} = (-1)^k \frac{C_0}{2^{2k} k!(\nu + 1) \ldots (\nu + k)}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

і

$$y(x) = C_0 x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k!(\nu + 1) \ldots (\nu + k)}. \tag{27.9}$$

Легко перевірити, що ряд (27.9) збігається для всіх $x > 0$. Для спрощення запису цього ряду використаємо Γ-функцію:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu - 1} dx.$$

Даний інтеграл має сенс при $\nu > 0$, причому

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu). \tag{28.9}$$

Отже, якщо ν – натуральне число, $\nu = n$, то $\Gamma(n + 1) = n!$. Виберемо

$$C_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}.$$

Тоді функцію (27.9), враховуючи рівності (28.9), можна записати у вигляді

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu + k + 1)\Gamma(k + 1)}. \tag{29.9}$$

Функцію $J_\nu(x)$ називають функцією Бесселя першого роду ν-того порядку. Якщо ν – ціле число, то, очевидно, $J_\nu(x)$ – аналітична функція у точці $x = 0$. Різниця коренів $\alpha_1 - \alpha_2$ визначального рівняння (25.9) дорівнює 2ν.

Тому якщо $2\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$, то другий розв'язок рівняння (24.9) згідно з теоремою 3.9 можна знайти у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$z(x) = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

Для коефіцієнтів C_k отримуються ті самі рекурентні співвідношення (26.9), але з заміною ν на $-\nu$. Тоді прийдемо до другого розв'язку

$$J_{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(-\nu + k + 1)\Gamma(k + 1)}, \tag{30.9}$$

$\nu > 0, 2\nu \neq 1, 2, \ldots$.

Користуючись другою рівністю (28.9), продовжимо Г-функцію на всі дійсні $\nu, \nu \neq 0, -1, -2, \ldots$. Покладемо

$$\Gamma(\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu}. \tag{31.9}$$

Якщо $-1 < \nu < 0$, то права частина (31.9) має сенс, оскільки $0 < \nu+1 < 1$. Тому рівність (31.9) можна взяти за означення $\Gamma(\nu)$ при $-1 < \nu < 0$. Нехай тепер $-2 < \nu < -1$. Тоді $-1 < \nu+1 < 0$ і права частина в (31.9) означена. Отже, формула (31.9) дає можливість продовжити Г-функцію на інтервал $-2 < \nu < -1$. Продовжуючи $\Gamma(\nu)$ аналогічно далі, ми будемо мати функцію, визначену для всіх $\nu, \nu \neq 0, -1, -2, \ldots$. Тому для $2\nu = 2m+1, m = 0, 1, 2, \ldots$ формула (30.9) дає розв'язок рівняння (24.9). Отже, якщо $\nu \neq 0, -1, -2, \ldots$, то функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ складають фундаментальну систему розв'язків рівняння Бесселя (функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні, бо при $x \to +0$ функція $J_\nu(x)$ обмежена, а $J_{-\nu}(x)$ необмежена).

Нехай тепер $\nu = m, m = 1, 2, \ldots$. Розглянемо рівняння

$$x^2 y'' + xy' + [x^2 - (m-\varepsilon)^2]y = 0, \tag{32.9}$$

де $0 < \varepsilon < 1$. Оскільки $m-\varepsilon$ не буде цілим числом, то функції $J_{m-\varepsilon}(x)$ і $J_{-m+\varepsilon}(x)$ будуть лінійно незалежними розв'язками рівняння (32.9) для довільного $\varepsilon > 0$. Тоді функція

$$Y_{m-\varepsilon} = \frac{(-1)^m J_{-m+\varepsilon}(x) - J_{m-\varepsilon}(x)}{\varepsilon} \tag{33.9}$$

теж є розв'язком рівняння (32.9).

Якщо існує границя

$$Y_m(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} Y_{m-\varepsilon}(x),$$

то функція $Y_m(x)$ буде розв'язком рівняння Бесселя (24.9) для $\nu = m$. Перш за все зауважимо, що оскільки $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \cdots = \Gamma(-m) = \infty$, то

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}}{\Gamma(-m+k+1)\Gamma(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{1}{\Gamma(-m+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} =$$

$$= (-1)^m J_m(x).$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} ((-1)^m J_{-m+\varepsilon}(x) - J_{m-\varepsilon}(x)) = 0,$$

тобто права частина (33.9) є невизначеністю $\frac{0}{0}$ при $\varepsilon \to +0$. Для зручності розкриття цієї невизначеності перепишемо $Y_{m-\varepsilon}(x)$ у вигляді

$$Y_{m-\varepsilon}(x) = (-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+\varepsilon+2k}}{\varepsilon\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\Gamma(k+1)} +$$

$$+ (-1)^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+\varepsilon+2k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-\varepsilon+2k} =$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(m+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+\varepsilon+2k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-\varepsilon+2k} =$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \frac{f_k(\varepsilon)}{\varepsilon}, \tag{34.9}$$

де

$$f_k(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(m+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Знайдемо границі виразів

$$\frac{1}{\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\varepsilon}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \text{і} \quad \frac{f_k(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Використовуючи формулу доповнення

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

перепишемо перший з них у вигляді

$$\frac{1}{\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\varepsilon} = \frac{\sin[(m-\varepsilon-k)\pi]\Gamma(m-\varepsilon-k)}{\pi\varepsilon}.$$

Звідси, користуючись правилом Лопіталя, отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\Gamma(-m+\varepsilon+k+1)\varepsilon} = -\frac{\pi\cos[(m-k)\pi]\Gamma(m-k)}{\pi} =$$

$$= (-1)^{m-k+1}\Gamma(m-k), \quad k = 0, 1, \ldots m-1.$$

Далі

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{f_k(\varepsilon)}{\varepsilon} = f_k'(0) =$$

$$= -\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+m+1)\Gamma^2(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+m+1)\Gamma(k+1)} \ln\frac{x}{2} -$$

$$- \frac{\Gamma'(m+k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma^2(m+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+k+1)} \ln\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)} \left[2\ln\frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma'(m+k+1)}{\Gamma(m+k+1)}\right].$$

Використаємо формулу

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+a}\right),$$

де $C = 0,5772157\ldots$ – стала Ейлера. Тоді

$$Y_m(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} Y_{m-\varepsilon}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{k!(k+m)!}\left[2\ln\frac{x}{2} + 2C - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{m+k}\frac{1}{j}\right] -$$
$$- \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.$$

Функція $Y_m(x)$ називається функцією Бесселя другого роду m-того порядку. Очевидно, $J_m(x)$ і $Y_m(x)$ лінійно незалежні.

Аналогічно розглядається випадок $m = 0$. У цьому випадку

$$Y_{-\varepsilon}(x) = \frac{J_\varepsilon(x) - J_{-\varepsilon}(x)}{\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{f_k(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

де

$$f_k(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Тоді

$$Y_0(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[\ln\frac{x}{2} + C - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right].$$

Зауважимо, що розв'язки рівняння Бесселя називаються циліндричними функціями.

§ 3.9. Коливний характер розв'язків лінійних однорідних рівнянь другого порядку

У даному параграфі ми розглянемо найпростіші властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{35.9}$$

зв'язані з частотою зміни знака функції $y(x)$. Нехай функції $a_1(x)$, $a_1'(x)$, $a_2(x)$ неперервні на деякому проміжку (a,b). Замість $y(x)$ введемо нову невідому функцію $z(x)$ за формулою

$$y(x) = z(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{\alpha} a_1(\xi)d\xi\right). \tag{36.9}$$

Тоді для $z(x)$ отримаємо диференціальне рівняння

$$z'' + b(x)z = 0, \tag{37.9}$$

де $b(x) = a_2(x) - \dfrac{a_1^2(x)}{4} - \dfrac{a_1'(x)}{2}$ – неперервна на (a, b) функція.

Зауважимо, що згідно з (36.9) функції $y(x)$ і $z(x)$ змінюють знак при одних і тих самих значеннях x.

Точку x_0, в якій $z(x_0) = 0$ будемо називати нулем функції $z(x)$.

Лема 1.9. *Нехай $\varphi(x)$ – не рівний тотожно нулю розв'язок рівняння (37.9). Тоді множина нулів розв'язку $\varphi(x)$, яка міститься на довільному відрізку $[a_0, b_0] \subset (a, b)$, скінченна.*

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді існує нескінченна послідовність нулів $\{x_m\} \subset [a_0, b_0]$ функції $\varphi(x)$. З обмеженої послідовності $\{x_m\}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\{x_{m_k}\} \subset \{x_m\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x_0$, $\quad x_0 \in [a_0, b_0]$. Оскільки $\varphi(x)$ неперервна, то

$$\varphi(x_0) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{m_k}) = 0.$$

За означенням похідної

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(x_{m_k}) - \varphi(x_0)}{x_{m_k} - x_0} = 0.$$

Таким чином, $\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0$. Але тоді за теоремою єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (37.9) маємо $\varphi(x) \equiv 0$, що суперечить умові леми.

З доведеної леми безпосередньо випливає наслідок.

Наслідок 1.9. *Якщо не тотожно нульовий розв'язок $z = \varphi(x)$ рівняння (37.9) має більше ніж один нуль на (a, b) і $\varphi(x_0) = 0$, то існує такий нуль $x_1 \neq x_0$ розв'язку $\varphi(x)$, що інтервал (x_0, x_1) не містить інших нулів цього розв'язку. Такі точки x_0, x_1 називаються послідовними нулями розв'язку $\varphi(x)$.*

Означення 2.9. *Розв'язок рівняння (35.9) називається коливним на проміжку (a, b), якщо він має не менше двох нулів на (a, b). У протилежному випадку розв'язок називається неколивним.*

Теорема 4.9 (Штурма). *Нулі двох лінійно незалежних розв'язків рівняння (35.9) взаємно розділяють один одного.*

Доведення.. Нехай $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (35.9). Припустимо, що розв'язок $\varphi_1(x)$ має два послідовні нулі x_0, x_1, $a < x_0 < x_1 < b$. Потрібно довести, що існує така точка $\overline{x} \in (x_0, x_1)$, що $\varphi_2(\overline{x}) = 0$, причому функція $\varphi_2(x)$ має лише один нуль на (x_0, x_1).

Припустимо, що $\varphi_2 \neq 0$ на (x_0, x_1). На кінцях відрізка $[x_0, x_1]$ розв'язок $\varphi_2(x)$ не обертається в нуль, бо в протилежному випадку визначник Вронського $W(x)$ дорівнює нулю у точках x_0, x_1. Нехай для визначеності $W(x) > 0$ на $[x_0, x_1]$.

Справедлива тотожність

$$-\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)' = \frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)}, \quad x \in [x_0, x_1].$$

Інтегруючи цю тотожність по відрізку $[x_0, x_1]$, отримаємо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)} dx = 0.$$

Але з іншого боку

$$\frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)} > 0 \quad \text{i} \quad \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)} dx > 0.$$

Отже, $\varphi_2(x)$ обертається в нуль на інтервалі (x_0, x_1). Причому існує лише один нуль функції $\varphi_2(x)$ на (x_0, x_1), бо в протилежному випадку міняючи ролями розв'язки $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, ми знайшли б точку $x_2 \in (x_0, x_1)$, у якій $\varphi_1(x_2) = 0$, що неможливо. Теорему доведено.

Теорема 5.9 (порівняння). *Якщо задано два рівняння*

$$y'' + b_1(x)y = 0, \quad y'' + b_2(x)y = 0, \tag{38.9}$$

у яких функції $b_1(x), b_2(x)$ неперервні на проміжку (a, b), $b_1(x) \leq b_2(x)$, $x \in (a, b)$, і x_0 і x_1 – два послідовні нулі ненульового розв'язку $y = \varphi_1(x)$ першого рівняння (38.9), то довільний розв'язок другого рівняння (38.9) має хоча б один нуль на відрізку $[x_0, x_1]$.

Доведення. За умовою теореми $\varphi_1(x_0) = \varphi_1(x_1) = 0$ і на інтервалі (x_0, x_1) функція $\varphi_1(x)$ зберігає знак. Без обмеження загальності можна вважати, що $\varphi_1(x) > 0$ на (x_0, x_1), бо в протилежному випадку можна було б розглянути розв'язок $y = -\varphi_1(x)$. Нехай $\varphi_2(x)$ – довільний розв'язок другого рівняння (38.9). Припустимо, що $\varphi_2(x)$ не має нулів на $[x_0, x_1]$ і будемо вважати, що $\varphi_2(x) > 0$ на $[x_0, x_1]$. Розглянемо тотожності:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x)\varphi_1''(x) + b_1(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x) = 0, \\ \varphi_1(x)\varphi_2''(x) + b_2(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x) = 0, \quad x \in [x_0, x_1]. \end{aligned} \tag{39.9}$$

Віднімаючи від першої тотожності (39.9) другу, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)\right] = \\ = [b_2(x) - b_1(x)]\varphi_2(x)\varphi_1(x), \quad x \in [x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Інтегруємо цю тотожність в межах від x_0 до x_1 і користуємось тим, що $\varphi_1(x_0) = \varphi_1(x_1) = 0$:

$$\varphi_1'(x_1)\varphi_2(x_1) - \varphi_1'(x_0)\varphi_2(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_1} [b_2(x) - b_1(x)]\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx. \tag{40.9}$$

Оскільки $\varphi_1(x) > 0$ на (x_0, x_1), то $\varphi_1'(x_0) \geq 0$. Рівність $\varphi_1'(x_0) = 0$ неможлива, бо тоді $\varphi_1(x)$ була б тотожно рівна нулю. Аналогічно, $\varphi_1'(x_1) < 0$. Крім того, за припущенням $\varphi_2(x_0) > 0$, $\varphi_2(x_1) > 0$ і $b_2(x) \geq b_1(x)$ за умовою теореми. Тому з (40.9) отримуємо

$$0 > \varphi_1'(x_1)\varphi_2(x_1) - \varphi_1'(x_0)\varphi_2(x_0) \quad = \int\limits_{x_0}^{x_1} [b_2(x) - b_1(x)]\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx > 0,$$

що неможливо. Отримане протиріччя доводить теорему.

Наслідок 2.9. *Якщо в рівнянні (37.9) $b(x) \leq 0$ на (a, b), то кожний не тотожно нульовий розв'язок цього рівняння є неколивним на (a, b).*

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді знайдеться розв'язок $z = \varphi(x)$ рівняння (37.9), який має два послідовні нулі x_0, x_1 на (a, b). Розглянемо рівняння

$$z'' = 0, \tag{41.9}$$

для якого $b_2(x) = 0 \geq b(x)$. Згідно з теоремою 5.9 довільний розв'язок рівняння 41.9 має хоча б один нуль на відрізку $[x_0, x_1]$. Але це не так: розв'язок $z \equiv 1$ рівняння (41.9) взагалі не має нулів. Наслідок доведено.

Приклад 1.9. На інтервалі $0 < x < +\infty$ розглянемо рівняння Беселя нульового порядку

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0. \tag{42.9}$$

Замінюючи невідому функцію $y(x)$ за формулою

$$y = z \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_1^x \frac{d\xi}{\xi}\right) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}},$$

для z отримаємо диференціальне рівняння

$$z'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) z = 0. \tag{43.9}$$

Одним з розв'язків рівняння (42.9) є функція Бесселя нульового порядку

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Відповідний розв'язок рівняння (43.9) має вигляд

$$z = \sqrt{x} J_0(x). \tag{44.9}$$

Рівняння (43.9) порівняємо з рівнянням $z'' + z = 0$. Розв'язок $z = \sin x$ цього рівняння має на інтервалі $(0, +\infty)$ безліч нулів $x_k = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$.) За теоремою 5.9 розв'язок (44.9) рівняння (43.9), а отже, і функція $J_0(x)$ має на кожному з відрізків $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k = 1, 2, \ldots$, хоча б один нуль.

Приклад 2.9. Вивчимо коливний характер розв'язків рівняння

$$y'' + xy = 0 \tag{45.9}$$

на проміжку $(0, +\infty)$. Порівнюючи рівняння (45.9) з рівнянням

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{46.9}$$

ми бачимо, що якщо $x > k^2$, то відстань між двома послідовними нулями розв'язку рівняння (45.9) менша ніж $\frac{\pi}{k}$ (рівняння (46.9) має розв'язок $y = \sin kx$, для якого існує безліч нулів $x_m = \frac{\pi}{k}m$, $m = 1, 2, \ldots$). Отже, при необмеженому зростанні x ця відстань буде прямувати до нуля і послідовні нулі довільного розв'язку рівняння (45.9) при необмеженому зростанні x будуть необмежено зближуватись.

§ 4.9. Крайові задачі

У даному параграфі будемо розглядати лінійне диференційоване рівняння вигляду
$$L[y] \equiv a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{47.9}$$
Надалі будемо припускати, що функції $a_0(x), a_0'(x), a_0''(x), a_1(x), a_1'(x)$, $a_2(x), f(x)$ є неперервними на відрізку $[a,b]$ і $a_0(x) \neq 0, x \in [a,b]$.

Нехай $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння
$$L[y] \equiv a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{48.9}$$
Як було показано у главі 5, всі розв'язки рівняння (47.9) можуть бути описані формулою
$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \psi(x), \tag{49.9}$$
де C_1, C_2 – довільні сталі, а $\psi(x)$ – який-небудь частковий розв'язок цього рівняння. Відомо також, що умови Коші
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad x_0 \in [a,b] \tag{50.9}$$
дозволяють з множини (49.9) виділити єдиний розв'язок рівняння (47.9). Але як видно із зображення всіх розв'язків (49.9), єдиний розв'язок рівняння (47.9) отримується тоді, коли за допомогою деяких додаткових умов можна знайти сталі C_1 і C_2. Такими додатковими умовами можуть бути не лише умови Коші (50.9).

Будемо шукати тепер розв'язок рівняння (47.9), який задовольняв би умови:
$$\begin{cases} U_1(y) \equiv \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y'(b) + \alpha_3 y(a) + \alpha_4 y(b) = 0, \\ U_2(y) \equiv \beta_1 y'(a) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y(a) + \beta_4 y(b) = 0, \end{cases} \tag{51.9}$$
причому будемо вважати, що $\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_1^2 \neq 0, \sum\limits_{i=1}^{4} \beta_1^2 \neq 0$ і матриця
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$
має ранг 2. Умови (51.9) будемо називати (однорідними) крайовими умовами, а задачу (47.9), (51.9) – крайовою задачею. Крайову задачу (48.9), (51.9) будемо називати однорідною.

Нехай $y(x), z(x) \in C^2[a,b]$. Розглянемо інтеграл $\int\limits_a^b L[y]z dx$. Інтегруючи частинами, отримаємо
$$\int\limits_a^b L[y]zdx = \int\limits_a^b [a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y]z(x)dx =$$
$$= a_0(b)y'(b)z(b) - a_0(a)y'(a)z(a) + a_1(b)y(b)z(b) - a_1(a)y(a)z(a) -$$
$$- \int\limits_a^b [(a_0(x)z(x))'y'(x) + (a_1(x)z(x))'y'(x) - a_2(x)y(x)z(x)]dx =$$
$$= a_0(b)y'(b)z(b) - a_0(a)y'(a)z(a) + a_1(b)y(b)z(b) - a_1(a)y(a)z(a) -$$
$$-a_0'(b)y'(b)z(b) - a_0(b)y(b)z'(b) + a_0'(a)y(a)z(a) -$$
$$-a_0(a)y(a)z'(a) + \int\limits_a^b L^*[z]y(x)dx,$$

де
$$L^*[z] = (a_0(x)z)'' - (a_1(x)z)' + a_2(x)z.$$

Якщо позначити
$$P(y,z) = a_0(b)y'(b)z(b) - a_0(a)y'(a)z(a) + a_1(b)y(b)z(b) - a_1(a)y(a)z(a) - \\ -a_0'(b)y(b)z(b) - a_0(b)y(b)z'(b) + a_0'(a)y(a)z(a) + a_0(a)y(a)z'(a),$$

то остання рівність набере вигляду
$$\int_a^b L[y]zdx = P(y,z) + \int_a^b yL^*[z]dx. \qquad (52.9)$$

Формула (52.9) називається формулою Лагранжа, а $L^*[z]$ – спряженим диференціальним виразом до $L[y]$. Якщо $L[y] = L^*[y]$, то диференціальний вираз $L[y]$ називається самоспряженим.

Доповнимо крайові умови (51.9) ще двома умовами
$$U_3(y) \equiv \gamma_1 y'(a) + \gamma_2 y'(b) + \gamma_3 y(a) + \gamma_4 y(b) = 0,$$
$$U_4(y) \equiv \theta_1 y'(a) + \theta_2 y'(b) + \theta_3 y(a) + \theta_4 y(b) = 0,$$

причому так, щоб визначник матриці
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{pmatrix}$$

був відмінний від нуля.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь
$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y'(b) + \alpha_3 y(a) + \alpha_4 y(b) = U_1, \\ \beta_1 y'(a) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y(a) + \beta_4 y(b) = U_2, \\ \gamma_1 y'(a) + \gamma_2 y'(b) + \gamma_3 y(a) + \gamma_4 y(b) = U_3, \\ \theta_1 y'(a) + \theta_2 y'(b) + \theta_3 y(a) + \theta_4 y(b) = U_4 \end{cases}$$

щодо невідомих $y'(a), y'(b), y(a), y'(b)$. Оскільки визначник цієї системи відмінний від нуля, то вона має єдиний розв'язок, який, очевидно, можна записати у вигляді
$$y'(a) = p_1^1 U_1 + p_1^2 U_2 + p_1^3 U_3 + p_1^4 U_4,$$
$$y'(b) = p_2^1 U_1 + p_2^2 U_2 + p_2^3 U_3 + p_2^4 U_4,$$
$$y(a) = p_3^1 U_3 + p_3^2 U_2 + p_3^3 U_3 + p_3^4 U_4,$$
$$y(b) = p_4^1 U_4 + p_4^2 U_2 + p_4^3 U_3 + p_4^4 U_4. \qquad (53.9)$$

Підставляючи (53.9) у $P(y,z)$ і групуючи коефіцієнти при U_1, U_2, U_3, U_4, матимемо
$$P(y,z) = V_4 U_1 + V_3 U_2 + V_2 U_3 + V_1 U_4,$$

де V_1, V_2, V_3, V_4 виражаються через $z'(a), z'(b), z(a), z(b)$.

Крайові умови

$$V_1(z) = 0, \quad V_2(z) = 0 \tag{54.9}$$

називаються спряженими крайовими умовами до умов (51.9), а задача для рівняння

$$L^*[z] = f(x) \tag{55.9}$$

з умовами (54.9) – спряженою крайовою задачею до (47.9), (51.9).

Якщо $y(x)$ – розв'язок задачі (47.9), (51.9), а $z(x)$ – розв'язок задачі (55.9), (54.9), то формула Лагранжа набирає вигляду

$$(L[y], z) = (y, L^*[z]), \tag{56.9}$$

де через (y, z) позначено інтеграл

$$\int_a^b y(x)\overline{z(x)}dx.$$

Приклад 3.9. Розглянемо для рівняння

$$y'' + w^2 y = f(x) \tag{57.9}$$

умови Коші

$$U_1(y) \equiv y(a) = 0, \quad U_2(y) \equiv y'(a) = 0. \tag{58.9}$$

Побудуємо спряжену крайову задачу. Очевидно,

$$L^*[z] = z'' + w^2 z = L[z],$$

$$P(y, z) = y'(b)z(b) - y'(a)z(a) - y(b)z'(b) + y(a)z'(a).$$

Доповнимо умови (58.9) умовами

$$U_3(y) \equiv y'(b) = 0, \quad U_4(y) \equiv y(b) = 0.$$

Тоді $y'(a) = U_2, y'(b) = U_3, y(a) = U_1, y(b) = U_4$ і

$$P(y, x) = U_3 z(b) - U_2 z(a) - U_4 z'(b) - U_1 z'(a) =$$
$$= V_4 U_1 + V_3 U_2 + V_2 U_3 + V_1 U_4,$$

де $V_1 = -z'(b), \quad V_2 = z(b)$.

Отже, спряженими крайовими умовами у даному випадку будуть також умови Коші

$$V_2(y) \equiv z(b) = 0, \quad V_1(z) \equiv -z'(b) = 0,$$

а спряженою крайовою задачею до (57.9), (58.9) буде задача Коші

$$z''(b) + w^2 z = f(x),$$

$$z(b) = 0, \quad z'(b) = 0.$$

Розглянемо тепер однорідну крайову задачу

$$L[y] = \lambda y,$$
$$U_1(y) = 0, \quad U_2(y) = 0, \tag{59.9}$$

де λ – деяке число. Очевидно, задача (59.9) має розв'язок $y \equiv 0$.

Означення 3.9. *Число λ_0 називається власним значенням крайової задачі (59.9), якщо при $\lambda = \lambda_0$ ця задача має не тотожно нульові розв'язки; ці не тотожно нульові розв'язки називаються власними функціями задачі (59.9).*

Якщо власному значенню λ_0 відповідає декілька власних функцій, то їх лінійна комбінація буде власною функцією для λ_0. Справді, якщо

$$L[\varphi_1(x)] \equiv \lambda_0\varphi_1(x) \quad \text{i} \quad L[\varphi_2(x)] \equiv \lambda_0\varphi_2(x),$$

то

$$L[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = L[\varphi_1(x)] + L[\varphi_2(x)] \equiv$$
$$\equiv \lambda_0\varphi_1(x) + \lambda_0\varphi_2(x) \equiv \lambda_0[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)].$$

Оскільки рівняння $L[y] = \lambda_0 y$ має не більше двох лінійно незалежних розв'язків, то сукупність власних функцій, які відповідають одному і тому ж власному значенню, утворює скінченновимірний лінійний простір розмірності не більше 2.

Розмірністю цього простору є число лінійно незалежних розв'язків крайової задачі (59.9) при даному власному значенні λ; це число називається кратністю власного значення.

Знайдемо умови, які визначають власні значення. Позначемо через $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$ фундаментальну систему розв'язків рівняння $L[y] = \lambda y$, яка визначається початковими умовами

$$\varphi_j^{(k-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ якщо } j \neq k, \\ 1 \text{ якщо } j = k, \end{cases} \quad j,k = 1,2.$$

Як відомо, множину розв'язків рівняння $L[y] = \lambda y$ можна записати формулою

$$y = C_1\varphi_1(x,\lambda) + C_2\varphi_2(x,\lambda).$$

Тоді для знаходження сталих C_1 і C_2 отримаємо систему рівнянь

$$\alpha_1 C_2 + \alpha_2(C_1\varphi_1'(b,\lambda) + C_2\varphi_2'(b,\lambda)) + \alpha_3 C_1 + \alpha_4(C_1\varphi_1(b,\lambda)+$$
$$+C_2\varphi_2(b,\lambda)) = 0,$$
$$\beta_1 C_2 + \beta_2(C_1\varphi_1'(b,\lambda) + C_2\varphi_2'(b,\lambda)) + \beta_3 C_1 + \beta_4(C_1\varphi_1(b,\lambda)+$$
$$+C_2\varphi_2(b,\lambda)) = 0$$

або

$$(\alpha_2\varphi_1'(b,\lambda) + \alpha_3 + \alpha_4\varphi_1(b,\lambda))C_1 + (\alpha_2\varphi_2'(b,\lambda) + \alpha_1 + \alpha_4\varphi_1(b,\lambda))C_2 = 0,$$
$$(\beta_2\varphi_1'(b,\lambda) + \beta_3 + \beta_4\varphi_1(b,\lambda))C_1 + (\beta_2\varphi_2'(b,\lambda) + \beta_1 + \beta_4\varphi_2(b,\lambda))C_2 = 0. \tag{60.9}$$

Очевидно, система (60.9) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник

$$U(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_2\varphi_1'(b,\lambda) + \alpha_3 + \alpha_4\varphi_1(b,\lambda) & \alpha_1 + \alpha_2\varphi_2'(b,\lambda) + \alpha_4\varphi_2(b,\lambda) \\ \beta_2\varphi_1'(b,\lambda) + \beta_3 + \beta_4\varphi_1(b,\lambda) & \beta_1 + \beta_2\varphi_2'(b,\lambda) + \beta_4\varphi_2(b,\lambda) \end{vmatrix}$$

обертається в нуль, тобто власні значення задачі (59.9) знаходимо як розв'язки рівняння

$$U(\lambda) = 0. \tag{61.9}$$

Якщо $\lambda = \lambda_0$ – корінь рівняння (61.9), то з системи (60.9) знаходимо відповідну для λ_0 власну функцію.

Теорема 6.9. *Якщо λ_0 – дійсне власне значення крайової задачі (59.9), то λ_0 – власне значення спряженої крайової задачі до (59.9).*

Доведення. Нехай $L_1[y] = L[y] - \lambda_0 y$. Тоді $L_1^*[y] = L^*[y] - \lambda_0 y$. Позначемо через $\psi_1(x), \psi_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння

$$L_1^*[z] = 0. \tag{62.9}$$

Тоді формула Лагранжа для функцій $\varphi(x)$ і $\psi_j(x)$ ($\varphi(x)$ – власна функція задачі (59.9), яка відповідає власному значенню λ_0) матиме вигляд

$$V_2(\psi_j(x))U_3(\varphi(x)) + V_1(\psi_j(x))U_4(\varphi(x)) = 0,$$

$j = 1, 2$. Отже, U_3, U_4 задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} U_3(\varphi(x))V_2(\psi_1(x)) + U_4(\varphi(x))V_1(\psi_1(x)) = 0, \\ U_3(\varphi(x))V_2(\psi_2(x)) + U_4(\varphi(x))V_1(\psi_2(x)) = 0. \end{cases}$$

Дана система має ненульовий розв'язок і тому визначник

$$\begin{vmatrix} V_1(\psi_1(x)) & V_2(\psi_1(x)) \\ V_1(\psi_2(x)) & V_2(\psi_2(x)) \end{vmatrix} = 0.$$

У той же час довільний розв'язок рівняння (62.9) можна записати у вигляді

$$z = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x).$$

Підставляючи z в крайові умови

$$V_1(z) = 0, \quad V_2(z) = 0,$$

отримаємо

$$\begin{cases} C_1 V_1(\varphi_1) + C_2 V_1(\varphi_2) = 0, \\ C_1 V_2(\varphi_1) + C_2 V_2(\varphi_2) = 0. \end{cases} \tag{64.9}$$

Оскільки визначник системи (64.9) збігається з визначником системи (63.9), то система (64.9) має ненульовий розв'язок. А це означає, що λ_0 є власним значенням спряженої крайової задачі. Теорему доведено.

Означення 4.9. *Дві неперевні функції $y(x)$ і $z(x)$ будемо називати ортогональними на відрізку $[a, b]$, якщо*

$$\int_a^b y(x)z(x)dx = 0.$$

Теорема 7.9. *Нехай $\varphi(x)$ – власна функція задачі (59.9), яка відповідає дійсному власному значенню λ_0, а $\psi(x)$ – власна функція спряжної крайової задачі, яка відповідає дійсному власному значенню μ_0. Тоді, якщо $\lambda_0 \neq \mu_0$, то функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ ортогональні.*

Доведення. Оскільки

$$L[\varphi(x)] \equiv \lambda_0\varphi(x), \quad L^*[\psi(x)] \equiv \mu_0\psi(x),$$

то

$$(L[\varphi(x)], \psi(x)) = (\lambda_0\varphi(x), \psi(x)) = \lambda_0(\varphi(x), \psi(x)),$$
$$(\varphi(x), L^*[\psi(x)]) = (\varphi(x), \mu_0\psi(x)) = \mu_0(\varphi(x), \psi(x)).$$

Але згідно з формулою Лагранжа (56.9)

$$(L[\varphi(x)], \psi(x)) = (\varphi(x), L^*[\psi(x)]),$$

тому

$$0 = (L[\varphi(x)], \psi(x)) - (\varphi(x), L^*[\psi(x)]) = (\lambda_0 - \mu_0)(\varphi(x), \psi(x)).$$

Звідси при $\lambda_0 \neq \mu_0$ випливає рівність

$$(\varphi(x), \psi(x)) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Означення 5.9. *Крайову задачу (47.9), (51.9) будемо називати самоспряженою, якщо $L^*[y] = L[y]$ і $V_1(y) = U_1(y)$, $V_2(y) = U_2(y)$.*

Теорема 8.9. *Всі власні значення самоспряженої крайової задачі дійсні.*

Доведення. Оскільки $L^*[y] = L[y]$, то

$$(L[y], y) = (y, L[y]) = (\overline{\overline{L[y]}, \overline{y}})$$

і число $(L[y], y)$ дійсне. Нехай тепер λ – власне значення задачі (59.9), а $\varphi(x)$ – відповідна йому власна функція. Тоді з рівності $L[\varphi(x)] = \lambda\varphi(x)$ випливає, що

$$(L[\varphi(x)], \varphi(x)) = \lambda(\varphi(x), \varphi(x)).$$

Але $(\varphi(x), \varphi(x)) > 0$, а $(L[\varphi(x)], \varphi(x))$ – дійсне; тому

$$\lambda = \frac{(L[\varphi(x)], \varphi(x))}{(\varphi(x), \varphi(x))} \quad -$$

дійсне число.

Приклад 4.9. Нехай маємо задачу на власні значення і власні функції

$$-y'' = \lambda y; \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1).$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Підставляючи в крайові умови, матимемо систему

$$\begin{cases} C_1(1 - \cos\sqrt{\lambda}) - C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0, \\ C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + C_2\sqrt{\lambda}(1 - \cos\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases}$$

визначник якої

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos\sqrt{\lambda} & -\sin\sqrt{\lambda} \\ \sin\sqrt{\lambda} & 1 - \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 2(1 - \cos\sqrt{\lambda})$$

обертається в нуль у точках,

$$\lambda_n = (2\pi n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

При $n \neq 0$ власному значенню λ_n відповідають дві лінійно незалежні власні функції

$$\cos(2\pi nx), \quad \sin(2\pi nx).$$

Отже, λ_n при $n \neq 0$ є двократним власним значенням. При $n = 0$ власному значенню $\lambda_0 = 0$ відповідає власна функція $y = 1$ і отже, це власне значення однократне.

Означення 5.9. *Функцією Гріна крайової задачі (48.9), (51.9) будемо називати функцію $G(x,\xi)$, яка задовольняє такі умови:*

1)$G(x,\xi) \in C([a,b]\times[a,b])$;

2) для довільного фіксованого $\xi \in [a,b]$ функція $G(x,\xi)$ має неперервну похідну у кожному з проміжків $[a,\xi)$, $(\xi,b]$, причому

$$\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x} = \frac{1}{a_0(\xi)};$$

3) у кожному з проміжків $[a,\xi)$, $(\xi,b]$ функція $G(x,\xi)$, як функція змінної x задовольняє рівняння (48.9) і крайові умови (51.9).

Теорема 9.9. *Нехай $a_j(x) \in C([a,b]), j=0,1,2,\ , a_0(x)\neq 0, x\in[a,b]$. Якщо крайова задача (48.9), (51.9) має лише тотожно нульовий розв'язок, то для неї існує єдина функція Гріна.*

Доведення. Нехай $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (48.9). Покладемо

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1(\xi)\varphi_1(x) + C_2(\xi)\varphi_2(x), & a\le x<\xi, \\ C_3(\xi)\varphi_1(x) + C_4(\xi)\varphi_2(x), & \xi\le x\le b, \end{cases}$$

де $C_1(\xi),\dots C_4(\xi)$ – деякі функції. Умови 1), 2) означення 5.9 дають

$$C_1(\xi)\varphi_1(\xi) + C_2(\xi)\varphi_2(\xi) - C_3(\xi)\varphi_1(\xi) - C_4(\xi)\varphi_2(\xi) = 0,$$

$$C_1(\xi)\varphi_1'(\xi) + C_2(\xi)\varphi_2'(\xi) - C_3(\xi)\varphi_1'(\xi) - C_4(\xi)\varphi_2'(\xi) = \frac{-1}{a_0(\xi)}. \tag{65.9}$$

Покладемо

$$b_1 = C_1 - C_3, \quad b_2 = C_2 - C_4. \tag{66.9}$$

Тоді з (65.9) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b_1(\xi)\varphi_1(\xi) + b_2(\xi)\varphi_2(\xi) = 0, \\ b_1(\xi)\varphi_1'(\xi) + b_2(\xi)\varphi_2'(\xi) = -\dfrac{1}{a_0(\xi)}, \end{cases}$$

визначник якої є визначником Вронського $W(x)$ розв'язків $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$. Отже, $W(\xi)\neq 0$, $\xi\in[a,b]$, і функції $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$ знаходяться однозначно. Для визначення функцій $C_j(\xi)$ $(j=1,2,3,4)$ використаємо крайові умови (51.9). Підставляючи $G(x,\xi)$ в умови (51.9), маємо

$$U_1(y) \equiv \alpha_1(C_1(\xi)\varphi_1'(a) + C_2(\xi)\varphi_2'(a)) +$$
$$+\alpha_2(C_3(\xi)\varphi_1'(b) + C_4(\xi)\varphi_2'(b)) + \alpha_3(C_1(\xi)\varphi_1(a) + C_2(\xi)\varphi_2(a)) +$$
$$+\alpha_4(C_3(\xi)\varphi_1(b) + C_4(\xi)\varphi_2(b)) =$$
$$= C_3(\xi)(\alpha_2\varphi_1'(b) + \alpha_4\varphi_1(b)) + C_4(\xi)(\alpha_2\varphi_2'(b) + \alpha_4\varphi_2(b)) +$$
$$+(b_1(\xi) + C_3(\xi))(\alpha_1\varphi_1'(a) + \alpha_3\varphi_1(a)) +$$
$$+(b_2(\xi) + C_4(\xi))(\alpha_1\varphi_2'(a) + \alpha_3\varphi_2(a)) =$$
$$= C_3(\xi)U_1(\varphi_1(x)) + C_4(\xi)U_1(\varphi_2(x)) +$$
$$+b_1(\xi)(\alpha_1\varphi_1'(a) + \alpha_3\varphi_1(a)) + b_2(\xi)(\alpha_1\varphi_2'(a) + \alpha_3\varphi_2(a)) = 0,$$
$$U_2(y) = C_3(\xi)U_2(\varphi_1(x)) + C_4(\xi)U_2(\varphi_2(x)) +$$
$$+b_1(\xi)(\beta_1\varphi_1'(a) + \beta_3\varphi_1(a)) + b_2(\xi)(\beta_1\varphi_2'(a) + \beta_3\varphi_2(a)) = 0.$$

Звідси

$$\begin{cases} C_3(\xi)U_1(\varphi_1) + C_4(\xi)U_1(\varphi_2) = g_1, \\ C_3(\xi)U_2(\varphi_1) + C_4(\xi)U_2(\varphi_2) = g_2, \end{cases} \tag{67.9}$$

де

$$g_1 = -b_1(\xi)(\alpha_1\varphi_1'(a) + \alpha_3\varphi_1(a)) - b_2(\xi)(\alpha_1\varphi_2'(a) + \alpha_3\varphi_2(a)),$$
$$g_2 = -b_1(\xi)(\beta_1\varphi_1'(a) + \beta_3\varphi_1(a)) - b_2(\xi)(\beta_1\varphi_2'(a) + \beta_3\varphi_2(a)).$$

Оскільки крайова задача (48.9), (51.9) за умовою теореми має лише тотожно нульовий розв'язок, то визначник системи (67.9) відмінний від нуля і вона має єдиний розв'язок щодо $C_3(\xi), C_4(\xi)$. Тоді використовуючи рівності (66.9), знайдемо однозначно функції $C_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3, 4$, що й доводить теорему.

Теорема 10.9. *Нехай $a_j(x) \in C([a,b]), j = 0, 1, 2, , a_0(x) \neq 0, x \in [a,b]$. Якщо крайова задача (48.9), (51.9) має лише тотожно нульовий розв'язок, то для довільної функції $f(x) \in C([a,b])$ існує розв'язок крайової задачі (47.9), (51.9) і його можна записати формулою*

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{68.9}$$

де $G(x,\xi)$ – функція Гріна задачі (48.9), (51.9).

Доведення. Покажемо, що функція (68.9) є розв'язком крайової задачі (47.9), (51.9). Запишемо функцію $y(x)$ у вигляді

$$y(x) = \int\limits_a^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int\limits_x^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

На кожному з проміжків $[a,\xi)$ і $(\xi, b]$ підінтегральна функція має неперервні похідні за x до другого порядку включно. Диференціюючи $y(x)$, отримаємо

$$y'(x) = \int\limits_a^x \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)d\xi + \int\limits_x^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)d\xi +$$
$$+ G(x, x-0)f(x) - G(x, x+0)f(x) =$$
$$= \int\limits_a^x \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)d\xi + \int\limits_x^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)d\xi, \tag{69.9}$$

оскільки $G(x,\xi)$ неперервна за означенням. Функцію (69.9) ще раз диференціюємо за x:

$$y''(x) = \int\limits_a^x \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} f(\xi)d\xi + \int\limits_x^b \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} f(\xi)d\xi +$$
$$+ \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} f(x) =$$
$$= \int\limits_a^b \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} f(\xi)d\xi + \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

Оскільки функція $G(x, \xi)$ задовольняє крайові умови (51.9), то очевидно, задовольняє ці умови і функція (68.9). Покажемо, що $y(x)$ задовольняє рівняння (47.9). Маємо

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x) +$$
$$+ \int\limits_a^b \left[a_0(x) \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} + a_2(x) G(x,\xi) \right] f(\xi) d\xi = f(x),$$

що й потрібно довести.

Приклад 5.9. Побудувати розв'язок крайової задачі

$$y'' - y' = f(x),$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

використовуючи функцію Гріна.

Фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння $y'' - y' = 0$ має вигляд: $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$. Функцію Гріна будемо шукати у вигляді

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi) e^x, & 0 \le x < \xi, \\ C_3(\xi) + C_4(\xi) e^x, & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

Згідно з означенням 5.9 матимемо

$$\begin{cases} C_1(\xi) - C_2(\xi) + (C_2(\xi) - C_4(\xi)) e^{\xi} = 0, \\ -(C_2(\xi) - C_4(\xi)) e^{\xi} = 1. \end{cases}$$

Отже,

$$b_2(\xi) = C_2(\xi) - C_4(\xi) = -e^{-\xi},$$

$$b_1(\xi) = C_1(\xi) - C_3(\xi) = 1.$$

Далі,

$$\begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi) = 0, \\ C_4(\xi) e = 0. \end{cases}$$

Звідси $C_4(\xi) = 0, \quad C_1(\xi) = -C_2(\xi)$. Тому з рівностей

$$\begin{cases} C_2(\xi) = -e^{-\xi}, \\ -C_2(\xi) - C_3(\xi) = 1 \end{cases}$$

знаходимо: $C_2(\xi) = -e^{-\xi}, \quad C_3(\xi) = e^{-\xi} - 1$, $C_1(\xi) = e^{-\xi}$. Отже,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} e^{-\xi} - e^{x-\xi}, & 0 \le x < \xi, \\ e^{-\xi} - 1, & \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

і розв'язок вихідної задачі запишеться у вигляді

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

ГЛАВА 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§ 1.10. Основні означення

Означення 1.10. *Рівняння вигляду*

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1.10}$$

де $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ – невідома функція, а F визначена, неперервна і диференційовна за змінними $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ в деякій області $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, причому

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n, u, z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_i}\right)^2 \neq 0$$

в $\tilde{G}$, називається диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку.

У загальному випадку рівняння (1.10) називається нелінійним рівнянням з частинними похідними. Якщо ж функція F лінійна щодо змінних $(z_1, \ldots, z_n)$, то рівняння (1.10) називається квазілінійним.

Отже квазілінійне рівняння – це рівняння вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \ldots, x_n, u). \tag{2.10}$$

Якщо у рівнянні (2.10) коефіцієнти a_i не залежать від u, тобто $a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, то рівняння називається напівлінійним і має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \ldots, x_n, u). \tag{3.10}$$

Якщо в рівнянні (3.10) функція b є лінійною щодо u, то рівняння називається лінійним і має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x_1, \ldots, x_n)u + d(x_1, \ldots, x_n).$$

Рівняння вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{4.10}$$

називається лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку.

Означення 2.10. *Функція $u(x_1, \ldots, x_n)$, визначена в деякій області $D \subset \mathbb{R}^n$, називається розв'язком рівняння (1.10), якщо виконуються умови:*

1) $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C(D), \quad i = 1, \ldots, n;$

2) $\left(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right) \in \tilde{G}$
для всіх $(x_1, \ldots, x_n) \in D$;

3) $F\left(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right) \equiv 0$
в D.

Якщо $u(x_1, \ldots, x_n)$ *– розв'язок рівняння (1.10), то поверхня* $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ *у просторі змінних* $x_1, \ldots, x_n, u$ *називається інтегральною поверхнею рівняння (1.10).*

§ 2.10. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку

Спочатку розглянемо рівняння вигляду (4.10). Згідно з означенням 1.10 функції $a_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, не обертаються одночасно в нуль в області $G \subset \mathbb{R}^n$ і є неперервними в G.

Теорема 1.10. *Нехай* $a_i \in C^1(G)$, $i = 1, \ldots, n$. *Для того, щоб функція* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *була розв'язком рівняння (4.10) необхідно і достатньо, щоб вона була першим інтегралом наступної системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{5.10}$$

Доведення. Якщо функція $u(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння (4.10), то справедлива тотожність

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} a_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0. \tag{6.10}$$

Тоді згідно з теоремою 13.7 функція $u(x_1, \ldots, x_n)$ є першим інтегралом системи (5.10). Навпаки, якщо $u(x_1, \ldots, x_n)$ є першим інтегралом системи (5.10), то для неї справедлива тотожність (6.10). А це означає, що $u(x_1, \ldots, x_n)$ – розв'язок рівняння (4.10) і теорему доведено.

Збережемо надалі припущення, що $a_i \in C^1(G)$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді згідно з теоремою 14.7 в околі будь-якої точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$ існує $n-1$ незалежних перших інтегралів системи (5.10)

$$u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

На підставі теореми 15.7 будь-який перший інтеграл $v(x_1, \ldots, x_n)$ системи (5.10) можна записати у вигляді

$$v(x_1, \ldots, x_n) = w(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)),$$

де w – деяка неперервно диференційовна функція.

Крім того, легко переконатися, що якщо w – довільна неперервно диференційовна функція, то v буде розв'язком рівняння (4.10).

Отже множину всіх розв'язків рівняння (4.10) можна описати формулою

$$u = \Phi(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{7.10}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Таким чином, для знаходження всіх розв'язків рівняння (4.10) достатньо побудувати повну систему незалежних перших інтегралів системи (5.10).

Приклад 1.10. Розглянемо рівняння

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{8.10}$$

Відповідна система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \tag{9.10}$$

Вона має два незалежні перші інтеграли. Для їх знаходження скористаємося відомою властивістю пропорції: якщо

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}=t,$$

то

$$\frac{m_1a_1+\cdots+m_ka_k}{m_1b_1+\cdots+m_kb_k}=t.$$

Тоді

$$\frac{dx+dy+dz}{z-y+x-z+y-x}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

і $dx+dy+dz=0$. Звідси

$$u_1(x,y,z)\equiv x+y+z=C_1.$$

Для знаходження ще одного першого інтеграла помножимо чисельники і знаменики системи (9.10) відповідно на функції $2x$, $2y$, $2z$ і знову використаємо вказану властивість пропорції. Будемо мати

$$\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{2x(z-y)+2y(x-z)+2z(y-x)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}.$$

Отже,

$$u_2(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Легко переконатися, що u_1 і u_2 незалежні. Тому згідно з (7.10) формула

$$u=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$$

описує всі розв'язки рівняння (8.10).

Приклад 2.10. Задано рівняння

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{10.10}$$

Тут

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x},\quad u(x,y)\equiv x^2+y^2=C_1.$$

Тому множина розв'язків вихідного рівняння описується формулою

$$u = \Phi(x^2 + y^2)$$

і є, як відомо, поверхнею обертання з віссю обертання Ou. Таким чином, рівняння (10.10) є диференціальним рівнянням всіх поверхонь обертання з віссю обертання Ou.

Отже, рівняння з частинними похідними має безліч розв'язків і для виділення одного з них потрібно задавати додаткову умову. Такою умовою може бути, як і у випадку звичайного диференціального рівняння, умова Коші. Зафіксуємо яку-небудь із змінних $x_1, \ldots, x_n$, наприклад, $x_n = x_n^0$, і будемо вимагати, щоб для розв'язку $u(x_1, \ldots, x_n)$ рівняння (4.10) виконувалася умова

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{11.10}$$

де φ — задана функція в області $G' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, причому $\varphi \in C^1(G')$. Тоді задачу Коші для рівняння (4.10) формулюють таким чином.

Серед всіх розв'язків рівняння (4.10) знайти такий розв'язок $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, який задовольняє умову (11.10). Ця умова називається початковою умовою.

У випадку, коли $n = 2$, тобто коли ми маємо рівняння

$$P(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{12.10}$$

задача Коші полягає у тому, щоб знайти розв'язок рівняння (12.10), який задовольняє початкову умову

$$u(x, y_0) = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) \in C^1(a, b)$ — задана функція. Геометрично це означає, що серед всіх інтегральних поверхонь рівняння (12.10) потрібно знайти ту, яка проходить через задану криву $u = \varphi(x)$, що лежить у площині $y = y_0$.

Теорема 2.10. *Нехай $a_i(x_1, \ldots, x_n) \in C^1(G)$, $i = 1, \ldots, n$, і $a_n(x_1^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$. Тоді існує розв'язок задачі Коші (4.10), (11.10).*

Доведення. На підставі припущення теореми у деякому околі точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ існує $n - 1$ незалежних перших інтегралів $u_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$ системи (5.10). Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} u_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = C_{n-1}. \end{cases} \tag{13.10}$$

Згідно з зауваженням 4.7 якобіан системи (13.10) відмінний від нуля в точці $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тому існує єдиний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(C_1, \ldots, C_{n-1}) \end{cases}$$

системи (13.10). Функція

$$u = \varphi[\omega_1(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \ldots \\ \omega_{n-1}(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))], \tag{14.10}$$

очевидно, буде розв'язком рівняння (4.10). Крім того,

$$u\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi[\omega_1(u_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)), \ldots, \\ \omega_{n-1}(u_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0))] = \\ = \varphi[\omega_1(C_1, \ldots, C_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(C_1, \ldots, C_{n-1})] = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

тобто функція (14.10) задовольняє початкову умову (11.10). Таким чином, ми побудували розв'язок задачі Коші (4.10), (11.10). Теорему доведено.

Зауважимо, що метод доведення теореми дає одночасно метод побудови розв'язку задачі Коші для лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку.

Приклад 3.10. Задано рівняння

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Знайти його розв'язок, який задовольняє початкову умову

$$u\Big|_{z=1} = x - y.$$

Йдучи методом доведення теореми, маємо:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}};$$

$$u_1(x, y, z) \equiv \sqrt{x} - \sqrt{z} = C_1; \quad u_2(x, y, z) \equiv \sqrt{y} - \sqrt{z} = C_2;$$

$$\sqrt{x} - 1 = C_1, \quad \sqrt{y} - 1 = C_2; \quad x = (1 + C_1)^2, \quad y = (1 + C_2)^2;$$

$$u = \varphi[(1 + \sqrt{x} - \sqrt{z})^2, (1 + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2] = (1 + \sqrt{x} - \sqrt{z})^2 - (1 + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2.$$

§ 3.10. Квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

У даному параграфі розглянемо рівняння (2.10). Будемо припускати, що функції a_i, b визначені в області G, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 3.10. *Нехай $a_i, b \in C^1(G)$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді множина розв'язків рівняння (2.10) може бути описана формулою*

$$\Phi(u_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0, \tag{15.10}$$

де Φ – неперервно диференційовна функція, а $u_1(x_1,\dots,x_n,u)$, ..., $u_n(x_1,\dots,x_n,u)$ – незалежні перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\dots,x_n,u)}=\dots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{du}{b(x_1,\dots,x_n,u)}. \tag{16.10}$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (2.10) в неявному вигляді

$$V(x_1,\dots,x_n,u)=0, \tag{17.10}$$

де функція V має неперервні частинні похідні за всіма аргументами, причому $\dfrac{\partial V}{\partial u}\neq 0$ у деякій області зміни змінних $x_1,\dots,x_n,u$. Враховуючи те, що u залежить від $x_1,\dots,x_n$, продиференціюємо (17.10) за x_i :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0.$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\bigg/\frac{\partial V}{\partial u},\quad i=1,\dots,n.$$

Підставляючи ці значення $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ в рівняння (2.10), отримаємо лінійне однорідне рівняння з частинними похідними

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_i}+b(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0 \tag{18.10}$$

щодо невідомої функції V.

З виведення співвідношення (18.10) випливає: якщо (17.10) визначає $u(x_1,\dots,x_n)$ як розв'язок рівняння (2.10), то співвідношення (18.10) повинно задовольнятися тотожно за $x_1,\dots,x_n$ при умові, що замість u підставлено його значення, визначене формулою (17.10). Якщо ми будемо вимагати, щоб шукана функція V задовольняла співвідношення (18.10) тотожно щодо $x_1,\dots,x_n,u$, то (18.10) виявиться лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку з шуканою функцією V і $n+1$ незалежними змінними $x_1,\dots,x_n,u$. Очевидно, кожний розв'язок рівняння (18.10), який містить змінну u, будучи прирівняним до нуля, дасть співвідношення вигляду (17.10), яке визначатиме функцію u від $x_1,\dots,x_n$ і ця функція буде розв'язком рівняння (2.10).

Нехай $u_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,u_n(x_1,\dots,x_n,u)$ – незалежні перші інтеграли системи (16.10). Тоді множина розв'язків рівняння (18.10) описується формулою

$$V=\Phi(u_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,u_n(x_1,\dots,x_n,u)),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція. Доведемо, що формула (15.10) описує всі розв'язки рівняння (2.10). Нехай $u=u_0(x_1,\dots,x_n)$ – який-небудь розв'язок рівняння (2.10). Введемо позначення

$$u_k(x_1,\dots,x_n,u_0(x_1,\dots,x_n))=\psi_k(x_1,\dots,x_n),\quad k=1,\dots,n.$$

Тоді

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \quad k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n.$$

Оскільки функції $u_1, \ldots, u_n$ є розв'язками рівняння (18.10), то після підстановки їх у це рівняння отримаємо систему тотожностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u_0)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + b(x_1, \ldots, x_n, u_0)\frac{\partial u_k}{\partial u} = 0, \tag{19.10}$$

$k = 1, \ldots, n$. Крім того, функція $u_0(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння (2.10), тому справджується тотожність

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n, u_0(x_1, \ldots, x_n))\frac{\partial u_0}{\partial x_j} - b(x_1, \ldots, x_n, u_0(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

Помножимо останню рівність послідовно на $\frac{\partial u_1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial u}$ і додамо до відповідних рівностей (19.10). Враховуючи означення функцій ψ_k і їх похідних за x_j, будемо мати:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n, u_0(x_1, \ldots, x_n))\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отже, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ є системою n розв'язків лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n, u_0(x_1, \ldots, x_n))\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

з n незалежними змінними $x_1, \ldots, x_n$. Тому, як випливає з § 2.10, існує тотожна за $x_1, \ldots, x_n$ залежність між $\psi_1, \ldots, \psi_n$:

$$\Phi_0(\psi_1, \ldots, \psi_n) = 0.$$

Отже, існує така функція $\Phi_0(u_1, \ldots, u_n)$, що після підстановки в цю функцію замість u виразу $u_0(x_1, \ldots, x_n)$, ми отримаємо тотожний нуль, тобто формула (15.10) справді визначає загальний розв'язок рівняння (2.10). Теорему доведено.

Приклад 3.10. Розв'язати рівняння

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0.$$

Відповідна система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{y^2} = -\frac{du}{x(1 + x^2)}$$

має незалежні перші інтеграли

$$u_1(x, y, u) \equiv xy = C_1,$$
$$u_2(x, y, u) \equiv 2x^2 + x^4 + 4xyu = C_2.$$

Тому множина розв'язків вихідного рівняння описується формулою

$$\Phi(xy, 2x^2 + x^4 + 4xyu) = 0,$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Розглянемо тепер задачу Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними. Вона формулюється цілком аналогічно як для лінійного однорідного рівняння.

Теорема 4.10. *Нехай $a_i, b \in C^1(G)$, $i = 1, \ldots, n$, і $a_n(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \neq 0$. Тоді існує розв'язок задачі Коші (2.10), (11.10).*

Доведення. Згідно з умовами і теоремою 14.7 в околі точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ існує n незалежних перших інтегралів $u_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n, u)$ системи (16.10). Візьмемо у цій системі перших інтегралів за довільні сталі початкові значення $(\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_n^0, \overline{u}^0)$ з околу точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$; ця система має вигляд

$$\begin{cases} u_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, u) = \overline{x}_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, u) = \overline{x}_{n-1}^0, \\ u_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, u) = \overline{u}^0. \end{cases} \tag{20.10}$$

Підставимо в інтеграли (20.10) замість x_n початкове значення x_n^0 і результати позначимо через $\overline{u}_i$; маємо:

$$\begin{cases} u_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) = \overline{u}_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ u_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) = \overline{u}_n. \end{cases} \tag{21.10}$$

На підставі зауваження 4.7 якобіан системи (21.10) відмінний від нуля в околі точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$; отже, її можна розв'язати щодо змінних $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$. Отримаємо розв'язок системи (21.10)

$$\begin{cases} x_i = \psi_i(\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0, x_n, \overline{u}^0), \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ u = \psi(\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0, x_n, \overline{u}^0), \end{cases}$$

який набуває при $x_n = \overline{x}_n^0$ початкові значення $\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0, \overline{u}^0$. Підставимо у ці формули замість x_n числове значення x_n^0 і замінимо $\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0, \overline{u}^0$ відповідно на $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$. Отримаємо вирази вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n), \\ u = \omega(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n). \end{cases} \tag{22.10}$$

Легко бачити, що формули (22.10) є результатом розв'язування системи (21.10) щодо $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$.

Розглянемо функцію $u(x_1, \ldots, x_n)$, яка визначається неявно формулою

$$\begin{aligned} V(x_1, \ldots, x_n, u) \equiv \omega(u_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n, u)) - \\ -\varphi[\omega_1(u_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n, u)), \ldots, \\ \omega_{n-1}(u_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n, u))] = 0. \end{aligned} \tag{23.10}$$

Покажемо перш за все, що рівняння (23.10) визначає u як однозначну, неперервно диференційовну функцію від змінних $x_1, \ldots, x_n$ в околі точки $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Для цього достатньо показати, що

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)} \neq 0.$$

Обчислимо цю похідну:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial u}.$$

Оскільки

$$\omega(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n) = \psi(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{n-1}, x_n^0, \overline{u}_n) \equiv \overline{u}_n,$$

то

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial u_i}\right)_{(x_1^0,\ldots,x_n^0,u^0)} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \overline{u}_i}\right)_{(x_1^0,\ldots,x_n^0,u^0)} = \begin{cases} 0, & i = 1, \ldots, n-1, \\ 1, & i = n. \end{cases}$$

Аналогічно

$$\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial u_j}\right)_{(x_1^0,\ldots,x_n^0,u^0)} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Далі, користуючись результатами доведення теореми 14.7, матимемо

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial u}\right)_{(x_1^0,\ldots,x_n^0,u^0)} = \begin{cases} 0, & i = 1, \ldots, n-1, \\ 1, & i = n. \end{cases}$$

Отже,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{(x_1^0,\ldots,x_n^0,u^0)} = 1$$

і формула (23.10) визначає u як функцію від $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно, функція u, яка визначається формулою (23.10), є розв'язком рівняння (2.10). Нарешті, легко бачити, що вона задовольняє початкову умову (11.10).

Справді, при $x_n = \overline{x}_n^0$ функції u_i обертаються в $\overline{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$, згідно з рівностями (21.10); функції $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega$ від цих аргументів на підставі рівностей (22.10) дадуть відповідно $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$ і ми отримаємо:

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Отже, формула (23.10) дає нам розв'язок задачі Коші (2.10), (11.10) і теорему доведено.

Зауваження 1.10. *Для доведення існування розв'язку задачі Коші ми виходили з перших інтегралів спеціального вигляду. На практиці тієї ж мети можна досягти, виходячи з довільної системи n незалежних перших інтегралів*

$$u_i(x_1, \ldots, x_n, u) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{24.10}$$

Схема розв'язування наступна: підставляємо у (24.10) $x_n = x_n^0$, розв'язуємо її стосовно $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$

$$(x_i = \omega_i(C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad u = \omega(C_1, \ldots, C_n)),$$

і будуємо функцію $V(x_1, \ldots, x_n, u)$.

Приклад 4.10. Розглянемо рівняння

$$(1 + \sqrt{u - x - y})\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2.$$

Знайдемо його розв'язок, який задовольняє умову

$$u\Big|_{y=0} = 2x.$$

Відповідна система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\frac{dx}{1+\sqrt{u-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{2}.$$

Її першими інтегралами будуть:

$$u_1(x,y,u) \equiv u - 2y = C_1,$$
$$u_2(x,y,u) \equiv 2\sqrt{u-x-y} + y = C_2.$$

Оскільки ці інтеграли є незалежними, то для розв'язування задачі Коші розглянемо систему

$$\begin{cases} u_1(x,0,u) \equiv u = C_1, \\ u_2(x,0,u) \equiv 2\sqrt{u-x} = C_2. \end{cases}$$

Звідси

$$x = C_1 - \frac{C_2^2}{4}, \quad u = C_1.$$

Згідно з формулою (23.10) розв'язок даної задачі Коші можна записати у вигляді

$$C_1 - 2\left(C_1 - \frac{C_2^2}{4}\right) = 0; \quad 2C_1 - C_2^2 = 0;$$
$$2(u-2y) - (2\sqrt{u-x-y}+y)^2 = 0.$$

§ 4.10. Поняття характеристик квазілінійного рівняння з частинними похідними

Знову розглянемо рівняння (2.10) і припустимо, що $a_i, b \in C^1(G)$, $i = 1,\dots,n$, де G – деяка область простору $\mathbb{R}^{n+1}$. Нагадаємо, що згідно з означенням 1.10 у кожній точці області G

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x_1,\dots,x_n,u))^2 \neq 0.$$

Нехай $u = u(x_1,\dots,x_n)$ – розв'язок рівняння (2.10), визначений в деякій області D, $D \subset \mathbb{R}^n$, а

$$x_1 = \varphi_1(\tau), \dots, x_n = \varphi_n(\tau) \quad - \tag{25.10}$$

гладка крива, яка лежить в D. Тоді на цій кривій $u(\varphi_1(\tau),\dots,\varphi_n(\tau)) = U(\tau)$ є функцією змінної τ. Підберемо криву (25.10) так, щоб її дотичний вектор $(\varphi_1'(\tau),\dots,\varphi_n'(\tau))$ у кожній точці збігався з вектором

$$(a_1(\varphi_1(\tau),\dots,\varphi_n(\tau),U(\tau)),\dots,a_n(\varphi_1(\tau),\dots,\varphi_n(\tau),U(\tau))).$$

Для цього повинні виконуватися рівності

$$\frac{d\varphi_i(\tau)}{d\tau} = a_i(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau), U(\tau)), \ i = 1, \dots, n.$$

Диференціюючи функцію $U(\tau)$, отримаємо

$$\frac{dU}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau))}{\partial x_i} \frac{d\varphi_i(\tau)}{d\tau} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau))}{\partial x_i} a_i(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau), U(\tau)) =$$
$$= b(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau), U(\tau)).$$

Остання рівність має місце на підставі того, що $u(x_1, \dots, x_n)$ є розв'язком рівняння (2.10).

Отже, шукана крива повинна бути такою, щоб рівняння

$$x_1 = \varphi_1(\tau), \dots, x_n = \varphi_n(\tau), \ u = U(\tau)$$

визначали траєкторію системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(x_1, \dots, x_n, u), \quad i = 1, \dots, n,$$
$$\frac{du}{d\tau} = b(x_1, \dots, x_n, u). \tag{26.10.}$$

Означення 3.10. *Система рівнянь (26.10) називається характеристичною системою рівняння (2.10), а її траєкторії у просторі змінних $x_1, \dots, x_n, u$ – характеристиками цього рівняння.*

Зауважимо, що система (2.10) є не чим іншим, як системою (26.10), записаною у симетричній формі. Оскільки система (26.10) є динамічною, то згідно з властивостями траєкторій таких систем параметр τ на характеристиці рівняння (2.10) визначений лише з точністю до довільної сталої. Крім того, згідно з нашими припущеннями щодо функцій a_i, b задача Коші для системи (26.10) має єдиний непродовжуваний розв'язок.

Теорема 5.10. *Якщо поверхня $S : u = u(x_1, \dots, x_n)$, $u \in C^1(D)$, у просторі змінних $x_1, \dots, x_n, u$ така, що яка б не була точка $(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in S$, характеристика рівняння (2.10), яка проходить через точку $(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$, дотикається до S у цій точці, то S є інтегральною поверхнею рівняння (2.10).*

Доведення. Нехай $(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$, $u^0 = u(x_1^0, \dots, x_n^0)$ – довільна точка поверхні S. Розглянемо характеристику

$$x_1 = \varphi_1(\tau), \dots, x_n = \varphi_n(\tau), u = U(\tau) \tag{27.10}$$

рівняння (2.10), яка проходить через цю точку; тобто при деякому $\tau = \tau_0$

$$\varphi_1(\tau_0) = x_1^0, \dots, \varphi_n(\tau_0) = x_n^0, \quad U(\tau_0) = u_0.$$

Дотична площина до поверхні S у точці $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ має рівняння

$$u - u_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0).$$

За умовою теореми характеристика дотикається до поверхні S у точці $x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0$. Це означає, що вектор $(\varphi_1'(\tau_0), \ldots, \varphi_n'(\tau_0), U'(\tau_0))$, дотичний до характеристики, лежить у вказаній площині, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i}\varphi_i'(\tau_0) = U'(\tau_0). \tag{28.10}$$

Оскільки функції (27.10) є розв'язком системи (26.10), то

$$\begin{aligned} \varphi_i'(\tau_0) &= a_i(\varphi_1(\tau_0), \ldots, \varphi_n(\tau_0), U(\tau_0)) = a_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0), \quad i = 1, \ldots, n, \\ U'(\tau_0) &= b(\varphi_1(\tau_0), \ldots, \varphi_n(\tau_0), U(\tau_0)) = b(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0). \end{aligned} \tag{29.10}$$

Згідно з (29.10) рівність (28.10) можна переписати так:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)\frac{\partial u(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i} = b(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0),$$

тобто функція $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ задовольняє рівняння (2.10) при $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Оскільки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ – довільна точка поверхні S, то функція $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння (2.10) і теорему доведено.

Теорема 6.10. *Нехай $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ – розв'язок рівняння (2.10), визначений у деякій області D,*

$$x_1 = \varphi_1(\tau), \ldots, x_n = \varphi_n(\tau), u = U(\tau), \quad \alpha < \tau < \beta, \quad -$$

розв'язок системи (26.10). Якщо крива $x_1 = \varphi_1(\tau), \ldots, x_n = \varphi_n(\tau)$, $\alpha < \tau < \beta$ лежить в D і $U(\tau_0) = u(\varphi_1(\tau_0), \ldots, \varphi_n(\tau_0))$, то

$$u(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)) \equiv U(\tau).$$

Доведення. Нехай $v(\tau) = u(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))}{\partial x_i}\frac{d\varphi_i(\tau)}{d\tau} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))}{\partial x_i}a_i(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau), U(\tau)), \end{aligned} \tag{30.10}$$

оскільки

$$x_1 = \varphi_1(\tau), \ldots, x_n = \varphi_n(\tau), u = U(\tau), \quad \alpha < \tau < \beta, \quad -$$

розв'язок системи (26.10). Але $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння (2.10). Тому з (30.10) отримуємо, що

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau}.$$

Звідси $v(\tau) = U(\tau) + C$. Але $U(\tau_0) = u(\varphi_1(\tau_0), \ldots, \varphi_n(\tau_0)) = v(\tau_0)$. Отже, $C = 0$ і $v(\tau) \equiv U(\tau)$. Теорему доведено.

Зауваження 2.10. *Теорема 6.10 має простий геометричний зміст. Нехай* $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ *– інтегральна поверхня рівняння (2.10), а*

$$x_1 = \varphi_1(\tau), \ldots, x_n = \varphi_n(\tau), u = U(\tau), \quad -$$

його характеристика. Умова $U(\tau_0) = u(\varphi_1(\tau_0), \ldots, \varphi_n(\tau_0))$ *означає, що точка* $(\varphi_1(\tau_0), \ldots, \varphi_n(\tau_0), U(\tau_0))$ *характеристики лежить на інтегральній поверхні* $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. *Теорема стверджує, що при цьому вся характеристика лежить на інтегральній поверхні.*

Таким чином, довільна інтегральна поверхня рівняння (2.10) утворена деякою сім'єю характеристик.

Приклад 5.10. Для лінійного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

характеристична система має вигляд

$$\frac{dx}{d\tau} = 1, \quad \frac{dy}{d\tau} = 1, \quad \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Характеристиками у цьому випадку будуть прямі $x = \tau + C_1$, $y = \tau + C_2$, $u = C_3$.

§ 5.10. Узагальнена задача Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними

Розглянемо спочатку у випадку $n = 2$ рівняння

$$P(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u) \tag{31.10}$$

в деякій області $G \subset \mathbb{R}^3$. Як уже було сказано у §2.10, початкова умова для рівняння (31.10) може бути записана у вигляді

$$u(x, y_0) = \varphi(x) \tag{32.10}$$

або

$$u(x_0, y) = \psi(y). \tag{33.10}$$

Тобто у якій-небудь площині, паралельній одній з координатних площин Oxu або Oyu задається крива. Задача Коші полягає у тому, щоб знайти інтегральну поверхню рівняння (31.10), яка проходить через задану криву. Очевидно, цю задачу можна узагальнити наступним чином. Нехай у просторі змінних x, y, u задано гладку криву l. Потрібно знайти інтегральну поверхню рівняння (31.10), яка проходить через криву l.

Припустимо, що крива l задана параметрично рівняннями

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau), \quad u = \omega(\tau), \quad \tau \in (\alpha, \beta).$$

Тоді умову проходження інтегральноі поверхні через криву l можна записати так:

$$u(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = \omega(\tau), \quad \tau \in (\alpha, \beta). \tag{34.10}$$

Отже, задачу Коші для рівняння (31.10) можна сформулювати таким чином: знайти розв'язок рівняння (31.10), який задовольняє початкову умову (34.10). Таку задачу будемо називати узагальненою задачою Коші для рівняння з частинними похідними.

Легко бачити, що задача Коші (31.10), (32.10) (або (31.10), (33.10)) є частковим випадком задачі (31.10), (34.10).

Розглянемо тепер узагальнену задачу Коші для рівняння (2.10) у випадку довільної кількості змінних $x_1, \ldots, x_n$. Нехай S – поверхня у просторі $\mathbb{R}^n$, яка визначається рівняннями

$$x_i = \varphi_i(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) \in \tilde{D},$$

де $\tilde{D}$ – деяка область простору $\mathbb{R}^{n-1}$.

Будемо називати поверхню S регулярною, якщо вона не має точок самоперетину, $\varphi_i \in C^1(\tilde{D})$, $i = 1, \ldots, n$, і вектори

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_k}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_k}\right), \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

лінійно незалежні для всіх $(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) \in \tilde{D}$.

Нехай на регулярній поверхні S визначена функція $\omega(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$, $\omega \in C^1(\tilde{D})$. Будемо шукати розв'язок $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ рівняння (2.10), який задовольняє початкову умову

$$\begin{gathered} u(\varphi_1(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \ldots, \varphi_n(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})) = \omega(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \\ (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) \in \tilde{D}. \end{gathered} \tag{35.10}$$

Задачу (2.10), (35.10) будемо називати узагальненою задачою Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними. Геометричний зміст узагальненої задачі Коші полягає у тому, щоб у просторі змінних $x_1, \ldots, x_n, u$ через $(n-1)$-мірну регулярну поверхню S провести інтегральну поверхню $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ рівняння (2.10).

Зупинимося тепер на розв'язуванні задачі (2.10), (35.10). Згідно з теоремою 6.10 кожна характеристика рівняння (2.10), яка проходить через довільну точку поверхні S, лежить на шуканій інтегральній поверхні. Проведемо через кожну точку поверхні S характеристику рівняння (2.10). Параметр τ на ній виберемо так, щоб при $\tau = 0$ вона проходила через точку поверхні S. Нехай

$$x_i = \varPhi_i(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0), \quad i = 1, \ldots, n, \quad u = U(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \quad - \tag{36.10}$$

непродовжуваний розв'язок системи (26.10), який задовольняє початкові умови

$$\begin{gathered} \varPhi_i(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) = x_i^0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ U(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) = u^0, \end{gathered}$$

причому $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \in S$. Очевидно, траєкторія (36.10) і буде характеристикою рівняння (2.10), яка проходить через точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ поверхні S. Тоді сукупність характеристик

$$\begin{gathered} x_i = \varPhi_i(\tau, \varphi_1(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \ldots, \varphi_n(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \omega(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})), \\ i = 1, \ldots, n, \\ u = U(\tau, \varphi_1(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \ldots, \varphi_n(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \omega(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})) \end{gathered} \tag{37.10}$$

дасть нам шукану інтегральну поверхню рівняння (2.10), яка проходить через задану поверхню S.

Якщо система (37.10) допускає однозначне розв'язування щодо змінних $\tau, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, тобто

$$\tau = \tau(x_1, \dots, x_n), \ \ \tau_i = \tau_i(x_1, \dots, x_n), \ \ i = 1, \dots, n-1,$$

то функція

$$\begin{aligned} u = U(\tau(x_1, \dots, x_n), \varphi_1(\tau_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \tau_{n-1}(x_1, \dots, x_n)), \dots, \\ \varphi_n(\tau_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \tau_{n-1}(x_1, \dots, x_n)), \\ \omega(\tau_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \tau_{n-1}(x_1, \dots, x_n))) \end{aligned}$$

буде розв'язком задачі Коші (2.10), (35.10).

Приклад 6.10. Розв'яжемо задачу Коші для рівняння

$$-x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} = u \quad (y > 0) \tag{38.10}$$

з такою початковою умовою

$$u(x, y) = y, \quad x + y = 1. \tag{39.10}$$

Вибравши на кривій (39.10) $y = \xi$ за параметр, отримаємо таку криву у просторі змінних x, y, u :

$$x = 1 - \xi, \quad y = \xi, \quad u = \xi. \tag{40.10}$$

Відповідна характеристична система для рівняння (38.10) має вигляд:

$$\frac{dx}{d\tau} = -x, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{u}{2y}, \quad \frac{du}{d\tau} = u.$$

Розв'язавши її, отримаємо

$$x = C_1 e^{-\tau}, \quad y = \sqrt{C_3 e^{\tau} + C_2}, \quad u = C_3 e^{\tau}. \tag{41.10}$$

Інтегральна поверхня, яка дає розв'язок задачі Коші (38.10), (39.10), утворюється з кусків характеристик, які проходять через криву (40.10) при $\tau = 0$. Покладаючи в рівняннях (41.10) $\tau = 0$ і використовуючи (40.10), прийдемо до співвідношень:

$$C_1 = 1 - \xi, \quad \sqrt{C_3 + C_2} = \xi, \quad C_3 = \xi,$$

звідки $C_2 = \xi^2 - \xi$.

Підставляючи знайдені C_1, C_2, C_3 в (41.10), отримаємо розв'язок задачі Коші (38.10), (39.10) у параметричній формі

$$x = (1 - \xi)e^{-\tau}, \quad y = \sqrt{\xi e^{\tau} + \xi^2 - \xi}, \quad u = \xi e^{\tau}. \tag{42.10}$$

Якщо виключити з рівнянь (42.10) параметри τ, ξ, то отримаємо

$$u = \frac{y^2}{1 - x}.$$

Це і є шуканий розв'язок задачі Коші (38.10), (39.10).

Зауваження 3.10. *У випадку, коли поверхня S складається з характеристик, задача Коші має, взагалі кажучи, безліч розв'язків. Розглянемо для простоти випадок $n = 2$. Тоді S є кривою $x = \varphi(\tau), \quad u = \omega(\tau)$. Припустимо, що крива S – характеристика і l – така гладка крива, що перетинає S і жодна характеристика, яка перетинає l, до неї не дотикається. Розглянемо поверхню, утворену характеристиками, які проходять через точки кривої l і припустимо, що її рівняння можна записати у вигляді $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, де $u \in C^1(D)$. Тоді згідно з теоремою 5.10 функція $u(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком задачі Коші (2.10), (35.10). Оскільки існує безліч кривих, які перетинають S, то задача Коші має в даному випадку безліч розв'язків.*

Список рекомендованої літератури

1. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987. 160 с.
2. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1991. 303 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
5. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980. 288 с.
6. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 384 с.
7. *Лопатинский Я.Б.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. К.: Вища шк., 1984. 200 с.
8. *Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.* Диференціальні рівняння. К.: Вища шк., 1981. 504 с.
9. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1967. 564 с.
10. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
11. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.
12. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 312 с.
13. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.
14. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. К.: Либідь, 1994. 360 с.
15. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958. 468 с.
16. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.
17. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352 с.
18. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979. 128 с.
19. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
20. *Шкіль М.І., Сотниченко М.А.* Звичайні диференціальні рівняння. К.: Вища шк., 1992. 303 с.

ЗМІСТ