А. М. САМОЙЛЕНКО
С. А. КРИВОШЕЯ
М. О. ПЕРЕСТЮК

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

*Затверджено
Міністерством освіти України
як навчальний посібник
для студентів вузів,
що вивчають дисципліну
«Диференціальні рівняння»*

КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
1994

ББК 22.161.6я73
С17
УДК 517.2(07)

Рецензент — д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. І. Шкіль* (Київський державний педагогічний університет)

Редакція літератури з математики, фізики, інформатики
Редактор *Г. П. Трофімчук*

С $\frac{1602070100-154}{211-94}$ БЗ-1-5-94

ISBN 5-11-004479-1

ВСТУП

Вивчаючи явища природи, розв'язуючи різноманітні задачі з фізики, техніки, біології, економіки, не завжди можна безпосередньо встановити прямий зв'язок між величинами, що описують той чи інший еволюційний процес. Здебільшого можна встановити зв'язок між цими величинами (функціями) та швидкостями їхньої зміни відносно інших (незалежних) змінних величин. При цьому виникають рівняння, в яких невідомі функції містяться під знаком похідної. Ці рівняння называють *диференціальними*.

Прикладом найпростішого диференціального рівняння є рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

де $f(x)$ — відома, а $y = y(x)$ — шукана функція незалежної змінної x. Розв'язки цього рівняння називають *первісними функціями* для функції $f(x)$.

Наприклад, розв'язками диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \sin 2x$$

є функції

$$y = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C,$$

де C — довільна стала, причому інших розв'язків це рівняння не має.

Мати *безліч розв'язків* – характерна властивість диференціальних рівнянь. У цьому розумінні наведений приклад типовий. Тому, розв'язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, не можна одночасно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Щоб вибрати з нескінченної множини залежностей ту одну, яка притаманна саме цьому процесу, треба мати додаткову інформацію, наприклад знати початковий стан процесу. Без цієї додаткової умови задача недовизначена і схожа на таку:

Автомобіль рухається по прямолінійному шосе в напрямку міста A із сталою швидкістю v. Через який час він прибуде до міста A?

Позначивши шлях, який пройде автомобіль за час t з початку спостереження, через $s(t)$, матимемо закон руху автомобіля: $s'(t) = v$. Проте відповіді на поставлену задачу не дістанемо, не знаючи початкового положення автомобіля, тобто на якій відстані від міста A він перебував у початковий момент.

Розглянемо кілька задач, що приводять до диференціальних рівнянь.

Задача 1. У сприятливих для розмноження умовах перебуває певна кількість бактерій. Через який час кількість бактерій подвоїться?

Розв'язання. Нехай у початковий момент було m_0 бактерій. Позначимо через $m(t)$ кількість бактерій у момент часу t $(m(0) = m_0)$. Із експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій за сприятливих умов пропорційна їхній кількості. Цей біологічний експериментальний закон дає змогу написати диференціальне рівняння розмноження бактерій:

$$m'(t) = km(t), \quad k > 0. \tag{1}$$

Коефіцієнт пропорційності k залежить від виду бактерій та умов, в яких вони перебувають. Його можна визначити експериментально.

Вихідна задача звелась до чисто математичної задачі: знайти розв'язок $m = m(t)$ рівняння (1), для якого $m(0) = m_0$, і з рівняння $m(t) = 2m_0$ визначити час подвоєння початкової кількості бактерій.

Оскільки $m(t) > 0$, то, поділивши обидві частини рівняння (1) на $m(t)$, дістанемо

$$(\ln m(t))' = k.$$

Звідси

$$\ln m(t) = kt + C_1, \tag{2}$$

де C_1 — будь-яка стала, яку для зручності позначимо так: $C_1 = \ln C$, $C > 0$. З рівняння (2) маємо

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Щоб з цієї множини функцій виділити ту, яка описує процес розмноження бактерій, скористаємося рівністю $m(0) = m_0$. Остаточно матимемо:

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Час t, за який кількість бактерій подвоїться, визначається з рівняння

$$2m_0 = m_0 e^{kt}.$$

Звідси $t = \frac{1}{k} \ln 2$. Зауважимо, що цей час не залежить від початкової кількості бактерій.

Диференціальне рівняння

$$y'(x) = ky(x), \tag{3}$$

що утворилося в процесі розв'язання попередньої задачі, описує багато різноманітних процесів і залежностей між величинами, в яких шукані функції $y(x)$ можуть бути не тільки додатні.

Неважко впевнитися, що функції

$$y = Ce^{kx}, \tag{4}$$

де C — довільне число (додатне, від'ємне і нуль), є розв'язками даного рівняння. Виявляється, що інших розв'язків це рівняння не має.

Справді, нехай $y = \varphi(x)$ — розв'язок даного рівняння на деякому проміжку (a, b), тобто для всіх $x \in (a, b)$

$$\varphi'(x) = k\varphi(x).$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = \varphi(x) e^{-kx} \tag{5}$$

і обчислимо її похідну:

$$F'(x) = \varphi'(x) e^{-kx} - ke^{-kx}\varphi(x) = k\varphi(x) e^{-kx} - ke^{-kx}\varphi(x) \equiv 0.$$

Отже, функція $F(x)$ стала: $F(x) = C$ для всіх $x \in (a, b)$. З рівності (5) маємо

$$\varphi(x) = Ce^{kx}.$$

Оскільки за припущенням $\varphi(x)$ — будь-який розв'язок рівняння (3), то цим доведено, що формула (4) описує всі його розв'язки. Множина цих розв'язків має ту властивість, що графіки розв'язків покривають всю площину, причому через кожну точку площини проходить графік лише одного з цих розв'язків. Ця властивість дає змогу серед розв'язків диференціального рівняння однозначно виділити той, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0,$$

де (x_0, y_0) — фіксована точка площини.

Справді, для визначення сталої C з рівності (4) маємо рівняння $y_0 = Ce^{kx_0}$, єдиним розв'язком якого є $C = y_0 e^{-kx_0}$. Отже, серед функцій (4) є одна і тільки одна, графік якої проходить через точку $(x_0; y_0)$, а саме: $y = y_0 e^{k(x-x_0)}$. Вся площина ніби виткана з графіків розв'язків рівняння (3), причому жодні два із цих графіків не перетинаються.

Задача 2. Відомо, що чим вище над рівнем моря, тим повітря розрідженіше — атмосферний тиск з висотою зменшується. Встановити залежність $p = p(h)$ тиску p від висоти h.

Р о з в' я з а н н я. Нагадаємо, що за величину атмосферного тиску приймається вага вертикального стовпа повітря з площею перерізу $S = 1$ см². Уявімо собі два горизонтальних перерізи цього стовпа повітря на висотах h і $h + \Delta h$. Різниця тисків на вказаних висотах $p(h) - p(h + \Delta h) = -\Delta p(h)$ чисельно дорівнює вазі стовпа повітря між двома перерізами:

$$-\Delta p(h) = \Delta m g,$$

де Δm — маса цього повітря, g — прискорення вільного падіння. Об'єм Δv стовпа дорівнює $\Delta v = S\Delta h = \Delta h$, тому якщо середня густина повітря в стовпі дорівнює ρ_0, то $\Delta m = \rho_0 \Delta h$. Звідси $-\Delta p(h) = g\rho_0 \Delta h$, $\dfrac{\Delta p(h)}{\Delta h} = -g\rho_0$.

Позначимо густину повітря на висоті h через $\rho(h)$. Якщо $\Delta h \to 0$, то середня щільність ρ_0 наближатиметься до $\rho(h)$ і, переходячи до границі в останньому співвідношенні, маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dp}{dh} = -g\rho(h), \tag{6}$$

в якому функція $\rho(h)$ поки що також невідома.

Припустимо, що температура повітря стала на певних висотах. Тоді на основі закону Бойля — Маріотта робимо висновок, що тиск пропорційний до густини:

$$p(h) = b\rho(h). \tag{7}$$

Справді, $pV = RT$, звідки $p = \frac{RT}{V} = \frac{RT}{M} \cdot \frac{M}{V}$, де $b = \frac{RT}{M}$; $\rho(h) = \frac{M}{V}$, R — універсальна газова стала; M — молярна маса газу.

З рівностей (6) і (7) маємо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial p}{dh} = -\frac{g}{b}p,$$

яке збігається з рівнянням (3). Згідно з (4), розв'язками останнього рівняння є функції

$$p = Ce^{-\frac{g}{b}h},$$

де C — довільна стала.

Якщо над рівнем моря (при $h = 0$) атмосферний тиск дорівнює p_0, то $C = p_0$ і маємо залежність атмосферного тиску від висоти над рівнем моря:

$$p(h) = p_0e^{-\frac{g}{b}h}.$$

Ця формула називається *барометричною.* Вона показує, що величина тиску спадає з висотою за показниковим законом. Зауважимо, що на великих висотах (порівняних за величиною з радіусом Землі) ця формула дає велику похибку. Це викликано тим, що, виводячи цю формулу, нехтували не тільки зміною температури з висотою, але й зміною прискорення вільного падіння.

Задача 3. В резервуарі є a кг водяного розчину солі, в якому міститься b кг солі. В певний момент часу включається пристрій, який неперервно подає в резервуар c кг чистої води за секунду і одночасно забирає з нього щосекунди c кг розчину. При цьому в самому резервуарі рідина неперервно перемішується. Як змінюється з часом кількість солі в резервуарі?

Р о з в' я з а н н я. Момент початку процесу візьмемо за початок відліку часу t. Нехай $m(t)$ — шукана функція, значення якої в кожний момент часу t виражає кількість солі в резервуарі. За умовою задачі $m(0) = b$. Це поки що єдине значення шуканої функції $m(t)$, яке відоме.

Основна складність задачі полягає в тому, що концентрація розчину неперервно змінюється. Проте, застосовуючи належну методику розв'язування задачі, можна за допомогою цієї неперервної зміни перетворити цю, на перший погляд, основну складність у вирішальний засіб досягнення мети.

Розглянемо зміни, що відбудуться в резервуарі за досить малий проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, де t — деякий фіксований момент часу.

На початку цього проміжку в резервуарі міститься $m(t)$ кг солі, а в кінці — $m(t + \Delta t)$ кг. Різниця $m(t) - m(t + \Delta t)$ — це кількість солі, яка витекла з резервуара з розчином за час Δt. Оскільки концентрація розчину протягом часу споcтеремення спадала від $\frac{m(t)}{a}$ до $\frac{m(t+\Delta t)}{a}$, то

$$\frac{m(t+\Delta t)}{a} c\Delta t \leqslant m(t) - m(t+\Delta t) \leqslant \frac{m(t)}{a} c\Delta t,$$

причому нерівності є строгими, якщо $c \neq 0$ і $b \neq 0$.

Розділимо ці нерівності на Δt. Матимемо

$$\frac{m(t+\Delta t)}{a} c \leqslant -\frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} \leqslant \frac{m(t)}{a} c.$$

Враховуючи характер досліджуваного процесу, робимо висновок, що функція $m(t)$ неперервна. Отже,

$$\lim_{\Delta t \to 0} m(t+\Delta t) = m(t),$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -\frac{c}{a} m(t).$$

Шукана функція $m(t)$ в кожній точці t має похідну:

$$m'(t) = -\frac{c}{a} m(t). \tag{8}$$

Функція $m(t)$ є розв'язком рівняння (8). Це рівняння збігається з рівнянням (3), тому з урахуванням формули (4) і умови $m(0) = b$ шукана функція, що описує зміну з часом кількості солі в резервуарі, має вигляд

$$m(t) = be^{-\frac{c}{a}t}.$$

У різних сферах діяльності людини виникає багато задач, розв'язування яких аналогічне розв'язуванню задач, які було вже розглянуто. Про такі задачі кажуть, що вони зводяться до диференціальних рівнянь. Характер цих задач і методику розв'язування їх можна схематично описати так.

Відбувається деякий процес — фізичний, хімічний, біологічний, економічний та ін. При цьому інтерес становить певна функціональна характеристика процесу, наприклад зміна з часом температури чи тиску, маси, положення в просторі. Якщо маємо достатньо повну інформацію про хід цього процесу, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю є диференціальне рівняння, одним з розв'язків якого і є шукана функціональна характеристика процесу. Диференціальне рівняння моделює процес у тому розумінні, що воно описує еволюцію процесу, характер зміни матеріальної системи, можливі варіанти цих змін залежно від початкового стану системи. Наприклад, рівняння (8) з його незчисленною множиною розв'язків показує, що процес опріснення розчину в резервуарі протікає за експоненціальним законом незалежно від початкової концентрації цього розчину. При заданій початковій концентрації процес протікає одночасно і його описує певний розв'язок цього рівняння. Перший етап розв'язання задачі закінчується складанням диференціального рівняння для шуканої функції $m(t)$. З цього етапу задача перекладена на мову математики. Перейдемо до наступного етапу. Розглянемо математичну задачу в «чистому вигляді»: розв'язати дане диференціальне рівняння, тобто знайти всі його розв'язки або лише ті, які задовольняють певні додаткові умови. Цю задачу розв'язуватимемо на основі теорії диференціальних рівнянь. Досвід показує, що різні за змістом задачі зводяться до однакових або аналогічних диференціальних рівнянь. Про це й свідчать розглянуті вище задачі. Тому необхідно розробити прийоми розв'язування таких класів рівнянь для тих задач, які зведені або можуть зводитися до них. Ці всі питання вивчає математична наука, яка називається *теорією диференціальних рівнянь*.

Якщо задача зведена до диференціального рівняння, методи розв'язування якого вже відомі, то цю задачу можна вважати розв'язаною. При цьому перший творчий етап процесу розв'язання задачі закінчується складанням диференціального рівняння, а другий — являє собою чисто технічну процедуру. Тут повна аналогія із задачами на складання алгебраїчних рівнянь. Якщо рівняння за даними умови задачі складено і воно є, наприклад, квадратне, то розв'язання задачі закінчується відомим технічним прийомом — застосуванням формули для коренів квадратного рівняння.

Зауважимо, що в процесі розв'язання попередніх задач й розв'язувалося диференціальне рівняння виду (3). Розв'язання цього рівняння можна використовувати як складову частину розв'язання інших, складніших, задач. Прикладом цього може бути рівняння

$$y' = ky + a, \tag{9}$$

де a, як і k,— стале дійсне число. Рівняння (9) зводиться до рівняння (3), якщо його праву частину подати у вигляді

$$ky + a = k\left(y + \frac{a}{k}\right),$$

де $k \neq 0$, і позначити функцію $y(x) + \frac{a}{k}$ через $z(x)$:

$$z' = y' = ky + a = kz.$$

Функція $z = y + \frac{a}{k}$ задовольняє рівняння $z' = kz$, тому $z = Ce^{kx}$. Звідси

$$y(x) = Ce^{kx} - \frac{a}{k}. \tag{10}$$

Значення сталої C також визначається однозначно, якщо задана початкова умова $y(x_0) = y_0$.

Зауважимо, що другий доданок $-\frac{a}{k}$ у виразі (10) є розв'язком рівняння (9). Таким чином, усі розв'язки цього рівняння описуються формулою (10), в якій перший доданок — є всі розв'язки рівняння (3), а другий — один з розв'язків рівняння (9).

Аналогічну структуру має і множина розв'язків диференціального рівняння виду

$$y' = ky + f(x), \tag{11}$$

де $f(x)$ — відома функція.

Виявляється, щоб записати всі розв'язки цього рівняння, досить знати один який-небудь його розв'язок і всі розв'язки рівняння (3). Якщо $\varphi(x)$ — який-небудь фіксований розв'язок рівняння (11), то формула

$$y = Ce^{kx} + \varphi(x), \tag{12}$$

де C — довільна стала, описує всі розв'язки цього рівняння.

Справді, нехай $\psi(x)$ — будь-який розв'язок рівняння (11). Тоді

$$\psi'(x) = k\psi(x) + f(x).$$

Оскільки $\varphi(x)$ — також розв'язок цього рівняння, то

$$\varphi'(x) = k\varphi(x) + f(x).$$

З останніх двох рівностей маємо

$$(\psi(x) - \varphi(x))' = k(\psi(x) - \varphi(x)),$$

тобто різниця функцій $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ є розв'язком рівняння (3). Отже,

$$\psi(x) - \varphi(x) = Ce^{kx}, \quad \psi(x) = Ce^{kx} + \varphi(x).$$

Навпаки, кожна функція

$$\psi(x) = Ce^{kx} + \varphi(x), \quad C = \text{const}, \quad C \in \mathbf{R},$$

є розв'язком рівняння (11), у чому можна впевнитись безпосередньо. Отже, формула (12) справді дає всі розв'язки рівняння (11).

Розглянемо кілька задач, що зводяться до диференціального рівняння (9).

Задача 4. Тіло, маса якого дорівнює m, падає вертикально вниз з деякої висоти. Сила в'язкого тертя, що діє на тіло, пропорційна його швидкості: $F = -\alpha v$, де $\alpha > 0$ — коефіцієнт тертя. Встановити залежність швидкості тіла від часу.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $v(t)$ — швидкість тіла в момент часу t. На тіло діють дві протилежно напрямлені сили: сила ваги $P = mg$ і сила тертя $F = -\alpha v$.

У цьому випадку диференціальне рівняння можна скласти на основі другого закону Ньютона:

$$ma = P + F,$$

тобто

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v.$$

Розділивши обидві частини останньої рівності на m, дістанемо диференціальне рівняння руху тіла

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m} v, \tag{13}$$

яке має вигляд рівняння (9).

На основі формули (10) записуємо всі розв'язки рівняння (13):

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

Якщо тіло починає рух з нульовою швидкістю, тобто $v(0) = 0$, то $C = -\frac{mg}{\alpha}$ і

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

При вільному падінні тіла без тертя $\left(\frac{dv}{dt} = g\right)$ величина швидкості зростає лінійно: $v(t) = gt$, а з урахуванням тертя швидкість тіла зростає, але разом з тим вона наближається до сталої величини $v = \frac{mg}{\alpha}$.

Задача 5. Тіло, температура якого в початковий момент часу дорівнює T_0, *помістили в середовище з незмінною температурою* T_1. *Як змінюватиметься з часом температура тіла?*

Р о з в' я з а н н я. Позначимо через $T(t)$ температуру тіла в момент часу t, $T(0) = T_0$. При певних спрощеннях експериментально встановлено, що швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла і середовища. Це означає, що

$$T'(t) = -\gamma (T(t) - T_1), \tag{14}$$

де $\gamma > 0$ — коефіцієнт пропорційності.

Знак мінус у правій частині рівняння відповідає експериментальним даним: якщо $T(t) - T_1 > 0$, то температура тіла зменшується і тому швидкість її зміни від'ємна, якщо ж $T(t) - T_1 < 0$, то температура тіла зростає, а отже, швидкість її зміни додатна.

Таким чином, процес нагрівання (охолодження) тіла в середовищі з незмінною температурою моделюється рівнянням (14), яке можна записати у вигляді (9).

Один з розв'язків рівняння (14) очевидний: $T(t) = T_1$. Отже, згідно з формулою (10), можна записати всі розв'язки цього рівняння:

$$T(t) = T_1 + Ce^{-\gamma t}.$$

Враховуючи початкову умову $T(0) = T_0$, дістаємо шукану залежність температури тіла з часом:

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-\gamma t}.$$

Функція $T(t)$ зростає, коли $T_0 - T_1 < 0$ (тіло нагрівається), і спадає, коли $T_0 - T_1 > 0$ (тіло охолоджується). В обох випадках із зростанням t її значення прямує до T_1.

Різноманітні реальні процеси моделюються диференціальними рівняннями, які містять другу похідну від невідомої функції. Про такі рівняння кажуть, що вони є *диференціальними рівняннями другого порядку.*

Розглянемо дві задачі, які зводяться до диференціального рівняння другого порядку.

Задача 6. Матеріальна точка масою m вільно падає під дією сили земного тяжіння. Нехтуючи опором повітря, знайти закон руху точки.

Р о з в' я з а н н я. На вертикальній осі, вздовж якої падає точка, зафіксуємо точку відліку O і задамо додатний напрям — від точки O вниз. Положення точки визначається координатою $y(t)$ — відстанню її від фіксованої точки O в момент часу t.

Точка падає під дією сили земного тяжіння $F_т = mg$. Тому, згідно з другим законом Ньютона, $ma = F$. Маємо

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Інтегруючи двічі останню рівність, знаходимо

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2, \tag{15}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Формула (15) визначає закон руху матеріальної точки, але, як і в попередніх задачах, вона містить сталі інтегрування, в даному випадку — дві. Знаючи початкове положення падаючої точки відносно точки O, наприклад, $y(0) = y_0$ і початкову швидкість $v(0) = v_0$, з сукупності залежностей (15) виберемо ту, що описує рух точки:

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0.$$

Таким чином, дістали відому формулу шляху, пройденого точкою при рівномірно прискореному русі.

У задачі 6 прискорення було сталим. На практиці часто доводиться розв'язувати задачі, в яких прискорення змінюється за деяким законом. Розглянемо одну з таких задач.

Задача 7. Матеріальна точка масою m рухається вздовж осі Ox під дією сили, пропорційної до відхилення точки від початку координат і напрямленої до початку координат. Знайти закон руху точки, якщо в момент $t = 0$ вона мала координату x_0 і швидкість v_0.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо координату рухомої точки в момент часу t через $x(t)$. Тоді $\dot{x}(t)$ — швидкість точки в цей момент, а $\ddot{x}(t)$ — її прискорення. На основі другого закону Ньютона

$$m\ddot{x} = F,$$

де F — сила, що діє на матеріальну точку. За умовою задачі ця сила пропорційна відхиленню точки від початку координат і напрямлена в його бік: $F = -\gamma x(t)$, $\gamma > 0$. Отже, функція $x(t)$ задовольняє рівняння

$$m\ddot{x} = -\gamma x.$$

Позначимо $\frac{\gamma}{m}$ через k^2 і запишемо це рівняння у вигляді

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{16}$$

Знайдемо всі розв'язки цього рівняння. Безпосередньо впевнюємося, що функції $x = \cos kt$ і $x = \sin kt$ є його розв'язками.

Із правил обчислення похідної і характера рівняння (16) бачимо, що це рівняння має такі властивості:

1) сума двох будь-яких розв'язків цього рівняння є його розв'язком;

2) добуток будь-якого дійсного числа і розв'язку рівняння є розв'язком цього рівняння.

Звідси робимо висновок, що всі функції виду

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{17}$$

де C_1 і C_2 — будь-які дійсні числа, є розв'язками рівняння (16).

Інших, відмінних від (17), розв'язків рівняння (16) не існує. Доведемо це.

Нехай $\varphi(t)$ — який-небудь фіксований розв'язок рівняння (16). Тоді

$$\ddot{\varphi}(t) + k^2 \varphi(t) = 0$$

для всіх $t \in \mathbf{R}$.

Введемо допоміжні функції:

$$F(t) = \varphi(t) \sin kt + \frac{1}{k} \dot{\varphi}(t) \cos kt,$$

$$\Phi(t) = \varphi(t) \cos kt - \frac{1}{k} \dot{\varphi}(t) \sin kt.$$

Обчислимо похідні цих функцій:

$$\dot{F}(t) = \dot{\varphi}(t) \sin kt + \varphi(t) k \cos kt + \frac{1}{k} \ddot{\varphi}(t) \cos kt - \dot{\varphi}(t) \sin kt =$$

$$= (\ddot{\varphi}(t) + k^2 \varphi(t)) \frac{1}{k} \cos kt \equiv 0,$$

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\varphi}(t) \cos kt - \varphi(t) k \sin kt - \frac{1}{k} \ddot{\varphi}(t) \sin kt -$$

$$- \dot{\varphi}(t) \cos kt = -(\ddot{\varphi}(t) + k^2 \varphi(t)) \frac{1}{k} \sin kt \equiv 0.$$

Оскільки похідні функцій $F(t)$ і $\Phi(t)$ тотожно дорівнюють нулю, то $F(t) = C_1$, $\Phi(t) = C_2$, де C_1 і C_2 — сталі. Отже,

$$\varphi(t) \sin kt + \frac{1}{k} \dot{\varphi}(t) \cos kt = C_1,$$

$$\varphi(t) \cos kt - \frac{1}{k} \dot{\varphi}(t) \sin kt = C_2.$$

Помноживши почленно першу з цих рівностей на $\sin kt$, а другу — на $\cos kt$ і додавши їх, дістанемо

$$\varphi(t) = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Таким чином, формулою (17) визначаються всі розв'язки диференціального рівняння (16).

Згідно із (17), множина всіх розв'язків рівняння (16) залежить від двох довільних сталих C_1 і C_2. Щоб виділити з цієї множини якийсь один розв'язок, треба задати дві додаткові умови. Найзручніше задавати значення x_0 функції $x(t)$ в певній точці, наприклад $t = 0$ (положення матеріальної точки в момент часу $t = 0$) і значення x_0' похідної $\dot{x}(t)$ у цій точці (початкову швидкість).

Цими умовами розв'язок рівняння визначається однозначно. Справді, підставивши в рівності

$$x(t) = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

$$\dot{x}(t) = kC_1 \cos kt - kC_2 \sin kt$$

початкові значення $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = x_0'$, знайдемо, що

$$C_1 = \frac{x_0'}{k}, \quad C_2 = x_0.$$

Отже, розв'язком рівняння (16), що задовольняє умови $x(0) = x_0$ і $\dot{x}(0) = x_0'$, є функція

$$x = \frac{x_0'}{k} \sin kt + x_0 \cos kt.$$

Подамо цю функцію так:

$$x(t) = A_0\left(\frac{x_0'}{kA_0} \sin kt + \frac{x_0}{A_0} \cos kt\right) = A_0 \sin(kt + \theta_0), \tag{18}$$

де $A_0 = \sqrt{\left(\frac{x_0'}{k}\right)^2 + x_0^2}$, а θ_0 визначається з рівностей

$$\sin \theta_0 = \frac{x_0}{A_0}, \quad \cos \theta_0 = \frac{x_0'}{kA_0}.$$

Із рівності (18) випливає, що будь-який рух, крім спокою ($x(t) \equiv 0$), який описує диференціальне рівняння (16), є просте гармонічне коливання з амплітудою A_0 і коловою частотою k. Період коливань $T = \frac{2\pi}{k}$ (період функції $\sin(kt + \theta_0)$).

Повертаючись до задачі 7, можемо сказати, що матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом:

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\, t + \alpha\right),$$

де $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m^2 v_0^2}{\gamma^2}}$, $\sin \alpha = \frac{x_0}{A}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{m}\, v_0}{\sqrt{\gamma} A}$; A — амплітуда цих коливань, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\gamma}}$ — період їх.

Важливою задачею, яка приводить до рівняння (16), є задача про малі коливання маятника.

Задача 8. Тягарець масою m підвішено на нитці завдовжки l так, що одержали маятник, який коливається в одній площині. Знайти закон руху цього маятника.

Р о з в' я з а н н я. Якщо йдеться про коливання такого маятника, то вважають, що його відхилення x від нижнього положення рівноваги набагато менше від довжини маятника l. У цьому разі дугову величину відхилення можна наближено замінити половиною хорди, що стягує вдвоє більшу дугу. Скориставшись схемою, зображеною на рис. 1, знайдемо величину прискорення тягарця. Векторний трикутник (рис. 1, *а*) подібний трикутнику, зображеному на рис. 1, *б*. Тому

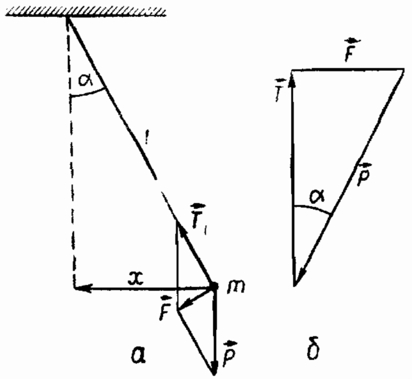


Рис. 1

$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{P}|} = \frac{x}{l}.$$

Оскільки $\vec{F} = m\vec{a}$, а $\vec{P} = m\vec{g}$, то

$$\frac{m|\vec{a}|}{m|\vec{g}|} = \frac{x}{l},$$

або

$$a = -\frac{g}{l}x.$$

Знак мінус введено тому, що прискорення a і відхилення x протилежно напрямлені.

Урахувавши, що $a = x''(t)$, дістанемо рівняння руху маятника

$$x''(t) + \frac{g}{l}x(t) = 0.$$

Поклавши $\frac{g}{l} = k^2$, матимемо рівняння (16).

Отже, при малих відхиленнях від положення рівноваги коливання маятника є гармонічними і описуються формулою (18). Зауважимо, що частота цих коливань $\sqrt{\frac{g}{l}}$ не залежить від маси маятника і від початкових умов x_0, x_0', якщо вони достатньо малі.

Рухи, розглянуті в задачах 7, 8, мають характерну ознаку — *відношення величини прискорення до величини відхилення від положення рівноваги — стале:*

$$\frac{x''(t)}{x(t)} = -k^2.$$

Це співвідношення виконується для багатьох інших рухів. Наприклад, сила пружності розтягнутої пружини пропорційна до її видовження. Ця властивість пружини називається *законом Гука.* Отже, тягарець, підвішений на кінці пружини, рухатиметься аналогічно маятнику.

Інші приклади таких рухів — коливання точки струни, коливання невеликого об'єму повітря в трубі органа, коливання атома в твердому тілі тощо.

Часто для описання еволюційного процесу необхідно кілька функцій від однієї незалежної змінної. У цьому випадку мають справу із *системою диференціальних рівнянь*. Розглянемо задачу, яка зводиться до дослідження системи двох диференціальних рівнянь.

Задача 9. У ставку живуть риби двох видів: карасі й щуки. Карасі харчуються зеленню ставка, а щуки — карасями. Як змінюється чисельність карасів і щук у ставку з плином часу?

Розв'язання. Якби щук у ставку не було, то карасі розмножувалися б за експоненціальним законом:

$$\dot{x} = kx$$

(див. задачу 1).

Якщо ж $y(t)$ — кількість щук у ставку, то треба врахувати кількість карасів, яких з'їли щуки. Припустимо, що число зустрічей карасів і щук пропорційне як до кількості карасів, так і до кількості щук. Тоді швидкість розмноження карасів

$$\dot{x} = kx - axy,$$

де a — коефіцієнт пропорційності.

Що стосується щук, то без карасів вони вимирають

$$y(t) = -ly(t),$$

а при наявності карасів починають розмножуватися зі швидкістю, пропорційною до кількості з'їдених карасів,

$$\dot{y} = -ly + bxy,$$

де b — коефіцієнт пропорційності.

Таким чином, маємо найпростішу математичну модель системи «хижак — жертва» — систему двох диференціальних рівнянь з двома шуканими функціями $x(t)$ і $y(t)$:

$$\dot{x} = kx - axy, \quad y = -ly + bxy.$$

Цю модель називають *системою Лотке — Вольтерра* на честь її авторів.

Здобута система описує зміну кількості карасів і щук в ставку з плином часу. Щоб мати явну залежність $x(t)$ і $y(t)$ від часу t, треба розв'язати цю систему рівнянь.

Розв'язання цієї системи значно складніше, ніж тих рівнянь, що розглядалися вище, тому тут розв'язувати її не будемо.

Звичайно, вся різновидність природних процесів і явищ не зводиться тільки до рівнянь тих кількох типів, які ми розглянули. Світ диференціальних рівнянь багатий майже настільки, наскільки різноманітний реальний світ.

У наступних розділах буде розглянуто багато типів диференціальних рівнянь, що описують різні еволюційні процеси і явища, складання та розв'язання таких диференційних рівнянь та якісне дослідження їх. Досвід показує, що використання диференціальних рівнянь як математичних моделей дуже корисне, якщо при цьому не забувати про обмеженість сфери застосування будь-якого роду моделей взагалі.

Розділ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення виду

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

де x — незалежна змінна (аргумент); $y = y(x)$ — невідома функція аргументу x; $F(x, y, y')$ — задана функція змінних $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$. Рівняння (1) не розв'язане відносно похідної.

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y), \tag{2}$$

де $f(x, y)$ — задана функція двох змінних, називається *диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної*.

Часто використовують симетричну форму запису диференціального рівняння першого порядку:

$$P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = 0,$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — задані функції змінних x і y.

Розв'язком диференціального рівняння (1) або (2) *на інтервалі I* називається неперервно диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює це рівняння в тотожність на I, тобто

$$F\left(x,\ \varphi(x),\ \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0 \quad \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x,\ \varphi(x)\right), \quad x \in I.$$

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ називається *інтегралом* рівняння (1) або (2), якщо воно неявно задає розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння.

Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ називається *інтегральною кривою* диференціального рівняння. Проекція інтегральної кривої на вісь ординат називається *фазовою кривою* або *траєкторією* диференціального рівняння.

Задача знаходження розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (2), який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, називається *задачею Коші*.

Через кожну точку $(x;\ y)$ області визначення рівняння (2) проведемо пряму, тангенс кута нахилу якої до осі абсцис дорівнює $f(x, y)$. Ця сім'я прямих називається *полем напрямків* рівняння (2) або полем напрямків функції $f(x, y)$.

Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до поля напрямків функції $f(x, y)$. Крива, яка в кожній своїй точці дотикається до напрямку, що є в цій точці, є інтегральною кривою.

Ізокліною називається крива, в кожній точці якої напрямок поля однаковий. Усі інтегральні криві, які перетинають дану ізокліну, утворюють з віссю абсцис один і той самий кут,

1.1. Довести, що функція $y = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+c^2}}$ при кожному $C \in \mathbf{R}$ є розв'язком рівняння $y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Розв'язання. Оскільки $y' = C$, то, підставивши в рівняння замість y та y' їхні значення, дістанемо тотожність

$$Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} - xC = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Отже, дана функція при кожному $C \in \mathbf{R}$ є розв'язком заданого рівняння.

1.2. Показати, що функція $y = x\left(1 + \int \frac{e^x}{x}\,dx\right)$ є розв'язком рівняння $xy' - y = xe^x$.

Розв'язання. Знайдемо похідну даної функції:

$$y' = 1 + \int \frac{e^x}{x}\,dx + x\frac{e^x}{x} = 1 + e^x + \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Маємо

$$xy' - y = x\left(1 + e^x + \int \frac{e^x}{x}\,dx\right) - x\left(1 + \int \frac{e^x}{x}\,dx\right) = xe^x.$$

Дана функція перетворює рівняння в тотожність і, отже, є розв'язком рівняння.

1.3. Показати, що функція $\varphi(x) = x\int\limits_0^x \sin t^2 dt$ є розв'язком диференціального рівняння $xy' - y = x^2 \sin x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \int\limits_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2.$$

Звідси

$$x\varphi'(x) - \varphi(x) = x\int\limits_0^x \sin t^2 dt + x^2 \sin x^2 - x\int\limits_0^x \sin t^2 dt,$$

або

$$x\varphi'(x) - \varphi(x) = x^2 \sin x^2,$$

тобто функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком даного рівняння.

1.4. Показати, що при кожному $C \in \mathbf{R}$ співвідношення $y = \operatorname{arctg}(x+y) + C$ є інтегралом диференціального рівняння

$$(x+y)^2 y' = 1.$$

Розв'язання. Застосувавши правило диференціювання неявної функції, дістанемо $y' = \frac{1+y'}{1+(x+y)^2}$. Звідси $y' =$

$= \frac{1}{(x+y)^2}$. Підставивши значення y' в дане диференціальне рівняння, дістанемо тотожність

$$(x+y)^2 \frac{1}{(x+y)^2} = 1.$$

1.5. Довести, що функція $y = \varphi(x)$, параметрично задана системою $x = te^t$, $y = e^{-t}$, є розв'язком рівняння $(1 + xy)\,y' + y^2 = 0$.

Розв'язання. При кожному значенні параметра t маємо

$$(1 + xy)\,y' + y^2 = (1 + te^t e^{-t}) \frac{-e^{-t}}{te^t + e^t} + e^{-2t} = 0,$$

тобто функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком заданого рівняння.

1.6. Показати, що функція

$$y = x + C\sqrt{1 + x^2} \qquad (3)$$

при кожному $C \in \mathbf{R}$ є розв'язком рівняння $(xy + 1)\,dx - (x^2 + 1) \times \times dy = 0$.

Довести, що інших розв'язків, відмінних від (3), дане рівняння не має.

Розв'язання. Підставимо задану функцію в ліву частину рівняння:

$$[x(x + C\sqrt{1 + x^2}) + 1]\,dx - (x^2 + 1)\left(1 + \frac{Cx}{\sqrt{1 + x^2}}\right)dx =$$

$$= (x^2 + Cx\sqrt{1 + x^2} + 1)\,dx - ((x^2 + 1) + Cx\sqrt{1 + x^2})\,dx = 0.$$

Отже, при будь-якому $C \in \mathbf{R}$ задана функція є розв'язком рівняння.

Доведемо, що інших розв'язків рівняння не має. Припустимо, що $y = \varphi(x)$ — розв'язок даного рівняння, який не збігається з жодним з розв'язків (3). Тоді маємо тотожність

$$x\varphi(x) + 1 - (x^2 + 1)\,\varphi'(x) = 0. \qquad (4)$$

Розглянемо функцію $F(x) = \frac{\varphi(x) - x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Похідна цієї функції

$$F'(x) =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + x^2}\,(\varphi' - 1) - (\varphi(x) - x)\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2} = -\frac{1 + x\varphi(x) - (1 + x^2)\,\varphi'}{(1 + x^2)^{3/2}} = 0,$$

внаслідок рівності (4). Звідси $F(x) = C_0$, де C_0 — дійсне число, тобто

$$\frac{\varphi(x) - x}{\sqrt{1 + x^2}} = C_0, \quad \varphi(x) = x + C_0\sqrt{1 + x^2}.$$

Розв'язок $y = \varphi(x)$ можна дістати з формули (3) при $C = C_0$. Отже, формула (3) містить усі розв'язки даного рівняння.

1.7. Довести, що всі розв'язки диференціального рівняння $y' - \frac{m}{x} y = 0$ визначаються формулою

$$y = C\,|x|^m, \quad C \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Розв'язання. Покажемо, що при будь-якому $C \in \mathbf{R}$ функція $y = C\,|x|^m$ є розв'язком даного рівняння. Маємо

$$y' = mC\,|x|^{m-1}\operatorname{sign} x = \frac{m}{x} C\,|x|^{m-1}\, x \operatorname{sign} x = \frac{m}{x} C\,|x|^m = \frac{m}{x} y.$$

Упевнимося, що формула (5) містить усі розв'язки вихідного рівняння.

Нехай $y = \varphi(x)$ — деякий розв'язок даного рівняння, тобто

$$\varphi'(x) - \frac{m}{x}\varphi(x) = 0.$$

Розглянемо функцію $F(x) = \varphi(x)\,|x|^{-m}$. Її похідна

$$F' = \varphi'(x)\,|x|^{-m} - m\,|x|^{-m-1}\operatorname{sign} x \cdot \varphi(x) = \left(\varphi'(x) - \frac{m}{x}\varphi(x)\right)|x|^{-m} =$$
$$= 0,$$

оскільки вираз у дужках тотожно дорівнює нулю. Отже, $F(x) = C_0$, де C_0 — деяке число. З рівності $\varphi(x)\,|x|^{-m} = C_0$ маємо $\varphi(x) = C_0\,|x|^m$, тобто $\varphi(x)$ має вид (5). Усі розв'язки вихідного рівняння визначаються формулою (5).

1.8. Скільки розв'язків $y = \varphi(x)$ рівняння

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

визначає співвідношення $y(x + \ln x) = 1 - y$?

Розв'язання. Продиференціювавши останню рівність, дістанемо

$$xy'(x + \ln x + 1) + y(x + 1) = 0.$$

Замінимо xy' на $-y + y^2 \ln x$:

$$(-y + y^2 \ln x)(x + \ln x + 1) + y(x + 1) = y[(-1 + y\ln x)(x +$$
$$+ \ln x + 1) + (x + 1)] = y\left(\left(-1 + \frac{\ln x}{x + \ln x + 1}\right)(x + \ln x + 1) +\right.$$
$$\left. + (x + 1)\right) = y\left(-\frac{x + 1}{x + \ln x + 1}(x + \ln x + 1) + (x + 1)\right) \equiv 0.$$

Отже, будь-яка неперервно диференційовна функція $y = \varphi(x)$, що визначається співвідношенням $y(x + \ln x) = 1 - y$, є розв'язком даного рівняння.

Це співвідношення визначає дві неперервно диференційовні функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, кожна з яких визначається формулою $y = \frac{1}{1 + x + \ln x}$. Одна з цих функцій визначена на проміжку $(0; b)$, а друга — на проміжку $(b; +\infty)$, де b — корінь рівняння $1 + x + \ln x = 0$.

Отже, задане в умові співвідношення визначає два розв'язки даного рівняння. Побудувавши інтегральні криві цих розв'язків (рис. 2), бачимо, що фазовою кривою одного з цих розв'язків (визначеного на проміжку $(0; b)$) є півпряма $x = 0$, $y < 0$, а фазовою кривою другого розв'язку (визначеного на проміжку $(b; +\infty)$) є півпряма $x = 0$, $y > 0$.

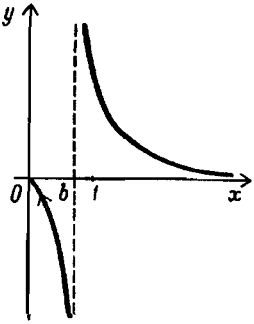


Рис. 2

1.9. Скільки розв'язків рівняння $(x - 1) y' + y = 0$ визначає співвідношення

$$y(x - 1) = C \tag{6}$$

при кожному фіксованому $C \in \mathbf{R}$?

Знайти розв'язки даного рівняння, які задовольняють такі початкові умови: 1) $y(0) = 0$; 2) $y(0) = -1$; 3) $y(2) = 1$.

Знайти область визначення кожного з цих розв'язків та інтегральну й фазову криві, які їм відповідають.

Розв'язання. Якщо $C \neq 0$, то співвідношення (6) визначає дві неперервно диференційовні функції: $\varphi_1(x) = \frac{C}{x - 1}$ з областю визначення $(-\infty; 1)$ і $\varphi_2(x) = \frac{C}{x-1}$ з областю визначення $(1; +\infty)$.

Кожна з цих функцій є розв'язком вихідного рівняння.

Справді, продиференціювавши (6), дістанемо $(x - 1) y' + y = 0$, тобто вихідне рівняння.

Якщо $C = 0$, то із співвідношення (6) дістаємо розв'язок $y \equiv 0$, визначений при всіх $x \in \mathbf{R}$.

Знайдемо розв'язки рівняння, які задовольняють задані початкові умови.

1) Початкову умову $y(0) = 0$ задовольняє нульовий розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок визначений при всіх $x \in \mathbf{R}$. Його інтегральна крива — вісь абсцис, а фазова крива — проекція осі абсцис на вісь ординат, тобто точка $(0; 0)$.

2) Підставивши в (6) $x = 0$ і $y = -1$, дістанемо, що $c = 1$. Тому умову $y(0) = -1$ задовольняє розв'язок $y = \frac{1}{x-1}$, визначений при $x < 1$. Інтегральна крива цього розв'язку — вітка гіперболи $y(x - 1) = 1$, яка відповідає проміжку $x \in (-\infty; 1)$. Фазова крива цього розв'язку — півпряма $x = 0$, $y < 0$.

3) Підставивши в (6) $x = 2$ і $y = 1$, дістанемо $C = 1$. Отже, початкову умову $y(2) = 1$ задовольняє розв'язок $y = \frac{1}{x-1}$, визначений при $x > 1$. Інтегральна крива цього розв'язку — вітка гіперболи $y(x-1) = 1$, яка відповідає проміжку $(1, +\infty)$. Фазова крива цього розв'язку — півпряма $x = 0$, $y > 0$.

1.10. Побудувати інтегральні криві таких рівнянь:

а) $y' = \frac{|xy|}{xy}$; б) $y' = \frac{x-y}{|x-y|}$;

в) $y' = -\frac{x+|x|}{y+|y|}$; г) $y' = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad y \neq x; \\ 1, & \text{якщо} \quad y = x. \end{cases}$

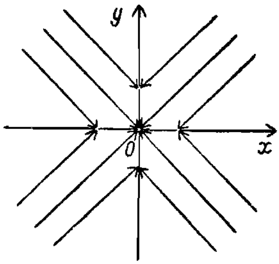


Рис. 3

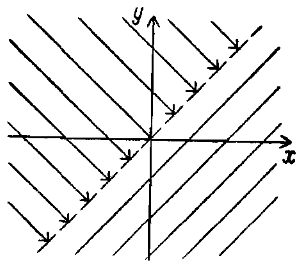


Рис. 4

Р о з в' я з а н н я. а) Дане рівняння визначене на всій площині xOy, крім точок на прямих $x = 0$ і $y = 0$. В області визначення рівняння можна записати так:

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad xy > 0; \\ -1, & \text{якщо} \quad xy < 0. \end{cases}$$

Тому в I і III квадрантах координатної площини інтегральні криві — це графіки функцій $y = x + C$, а в II і IV квадрантах — графіки функцій $y = -x + C$ (рис. 3).

б) Рівняння не визначене на прямій $y = x$. В області визначення маємо:

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad y < x; \\ -1, & \text{якщо} \quad y > x. \end{cases}$$

Тому $y = x + C$ у півплощині $y < x$ і $y = -x + C$ у півплощині $y > x$. Інтегральні криві зображено на рис. 4.

в) Область визначення даного рівняння є верхня півплощина координатної площини xOy. У цій області рівняння можна записати так:

$$y' = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0; \\ -\frac{x}{y}, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

У II квадранті маємо: $y' = 0$ або $y = C$. У I квадранті рівняння набирає вигляду $ydy + xdx = 0$, або $\frac{1}{2} d(y^2 + x^2) = 0$. Звідси $x^2 + y^2 = C^2$. Інтегральні криві рівняння зображені на рис. 5.

г) Рівняння визначене на всій координатній площині. Інтегральні криві цього рівняння зображені на рис. 6.

1.11. Знайти рівняння множини екстремальних точок розв'язків рівняння $y' = f(x, y)$. Як відрізнити точки мінімуму від точок максимуму?

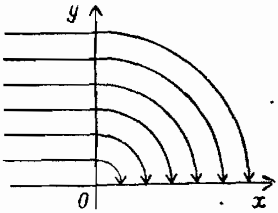


Рис. 5

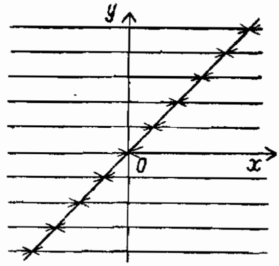


Рис. 6

Р о з в' я з а н н я. Нехай $y = \varphi(x)$ є будь-який розв'язок даного рівняння. Функція $\varphi(x)$ — неперервно диференційовна, і її похідна в точці екстремуму функції дорівнює нулю:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) = 0.$$

Отже, множина екстремальних точок розв'язків даного рівняння визначається співвідношенням $f(x, y) = 0$.

Нехай x_0 — екстремальна точка розв'язку $y = \varphi(x)$. Якщо $\varphi''(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму, а якщо $\varphi''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимуму. Оскільки

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y} f(x, \varphi(x)) = \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x},$$

то множина точок мінімуму розв'язків даного рівняння визначається системою співвідношень

$$\begin{cases} f(x, y) = 0; \\ f'_x(x, y) > 0, \end{cases}$$

а множина точок максимуму розв'язків — системою співвідношень

$$\begin{cases} f(x, y) = 0; \\ f'_x(x, y) < 0. \end{cases}$$

1.12. Скласти диференціальні рівняння сім'ї кривих:

а) $x^2 + y^2 - Cx = 0$; б) $x - y - Ce^{\frac{x}{y-x}} = 0$;

в) $y = \sin x + C\cos x$; г) $x + y + C(1 - xy) = 0$.

Розв'язання. а) Диференціюємо дане співвідношення по x:

$$2x + 2xy' - C = 0.$$

Звідси

$$C = 2x + 2yy'.$$

Підставивши C в рівняння сім'ї кривих, дістанемо шукане диференціальне рівняння:

$$x^2 + y^2 - (2x + 2yy')\,x = 0, \quad \text{або} \quad 2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

б) Запишемо рівняння сім'ї кривих у вигляді

$$(x - y)\,e^{\frac{x}{x-y}} = C.$$

Диференціюючи це співвідношення по x, дістаємо шукане рівняння:

$$(x - y)\,e^{\frac{x}{x-y}}\,\frac{x - y - x(1 - y')}{(x - y)^2} + (1 - y')\,e^{\frac{x}{x-y}} = 0,$$

або

$$\frac{xy' - y}{x - y} + 1 - y' = 0.$$

Остаточно

$$yy' - 2y + x = 0.$$

в) Рівняння сім'ї кривих диференціюємо по x:

$$y' = \cos x - C\sin x.$$

Щоб виключити довільну сталу C, рівняння сім'ї кривих помножимо на $\sin x$, а y' — на $\cos x$. Додавши почленно знайдені рівності, дістанемо шукане диференціальне рівняння:

$$y'\cos x + y\sin x = 1.$$

г) Рівняння сім'ї кривих диференціюємо по x:

$$1 + y' - C(xy' + y) = 0.$$

Виразивши з даного рівняння довільну сталу

$$C = \frac{x + y}{xy - 1}$$

і підставивши її в останнє співвідношення, дістанемо шукане диференціальне рівняння:

$$1 + y' - \frac{x + y}{xy - 1}(xy' + y) = 0,$$

або

$$y' + \frac{1+y^2}{1+x^2} = 0.$$

1.13. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл із спільним центром O (0; 1).

Р о з в' я з а н н я. Рівняння вказаної сім'ї кіл має вигляд

$$x^2 + (y-1)^2 = r^2.$$

Диференціюючи це співвідношення по x, дістаємо

$$2x + 2(y-1)y' = 0, \quad (y-1)y' + x = 0.$$

1.14. Скласти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і для яких вісь абсцис є віссю симетрії.

Р о з в' я з а н н я. Рівняння заданої сім'ї парабол має вигляд $y^2 = Cx$. Диференціюємо по x:

$$2y \cdot y' = C.$$

Виключивши з цих двох рівностей параметр C, дістанемо шукане диференціальне рівняння

$$y^2 = 2yy'x, \quad 2xy' - y = 0.$$

1.15. Скласти диференціальне рівняння сім'ї еліпсів, що мають сталу велику вісь, яка дорівнює $2a$.

Р о з в' я з а н н я. Прямокутну декартову систему координат на площині візьмемо так, щоб велика вісь кожного з еліпсів лежала на осі абсцис і її кінці збігалися з точками $(-a, 0)$ і $(a, 0)$. Тоді канонічне рівняння сім'ї еліпсів матиме вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{C^2} = 1,$$

де C — довільна стала, $0 < C < a$.

Диференціюючи рівняння сім'ї еліпсів по x, маємо

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{C^2} = 0.$$

Виключивши з двох останніх рівнянь довільну сталу C, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{xy}{a^2} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)y' = 0, \quad (a^2 - x^2)y' + xy = 0.$$

1.16. Рівняння силових ліній диполя (диполь — два заряди $+q$ і $-q$, розміщені один від одного на відстані $2a$), за законом Кулона, мають вигляд

$$\frac{x+a}{r_1} - \frac{x-a}{r_2} = C,$$

де $r_1^2 = (x + a)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - a)^2 + y^2$. Скласти диференціальне рівняння силових ліній.

Розв'язання. Диференціюючи по x обидві частини даного рівняння, маємо:

$$\frac{r_1 - (x + a) r_1'}{r_1^2} - \frac{r_2 - (x - a) r_2'}{r_2^2} = 0.$$

Оскільки

$$r_1' = \frac{x + a + yy'}{r_1}, \quad r_2' = \frac{x - a + yy'}{r_2},$$

то останнє співвідношення можна записати так:

$$\frac{r_1^2 - (x + a)^2 - (x + a) yy'}{r_1^3} - \frac{r_2^2 - (x - a)^2 - (x - a) yy'}{r_2^3} = 0,$$

або

$$\frac{y^2 - (x + a) yy'}{r_1^3} - \frac{y^2 - (x - a) yy'}{r_2^3} = 0.$$

Після нескладних перетворень дістаємо шукане диференціальне рівняння силових ліній:

$$\left(\frac{x - a}{r_2^3} - \frac{x + a}{r_1^3}\right) y' - \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = 0.$$

1.17. За допомогою ізоклін наближено побудувати інтегральні криві рівняння

$$y' = 2x (1 - y).$$

Розв'язання. Сім'я ізоклін даного рівняння визначається рівнянням $2x (1 - y) = k$, де k — дійсний параметр.

Це рівняння задає дві прямі $x = 0$ і $y = 1$ при $k = 0$ та сім'ю гіпербол $y = 1 - \frac{k}{2x}$.

Пряма $y = 1$ — інтегральна крива, оскільки функція $y = 1$ є розв'язком даного диференціального рівняння. Інтегральні криві перетинають вісь ординат (ізоклину при $k = 0$) під прямим кутом, тобто дотичні до них паралельні осі абсцис. Це означає, що точки прямої $x = 0$ є точками екстремуму розв'язків.

Щоб з'ясувати характер екстремальних точок, обчислимо другу похідну функції $y = y(x)$:

$$y'' = 2(1 - y) - 2xy' = 2(1 - y) - 2x \cdot 2x (1 - y) = \\ = 2(1 - y)(1 - 2x^2).$$

Отже, точки осі ординат, для яких $y > 1$, є точками максимуму, а точки осі ординат, для яких $y < 1$,— точками мінімуму інтегральних кривих. З виразу для другої похідної випливає також, що точки прямих $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ є точками перегину інтегральних кривих, оскільки в цих точках y'' перетворюється в нуль.

Прямі $x = 0$ і $y = 1$ (ізокліни при $k = 0$) ділять координатну площину на чотири частини, в кожній з яких похідна y' зберігає знак. Отже, перетинаючи пряму $x = 0$, інтегральні криві переходять з області зростання функції $y(x)$ в область спадання, якщо $y > 1$; і з області спадання функції $y(x)$ в область зростання, якщо $y < 1$. Роз-

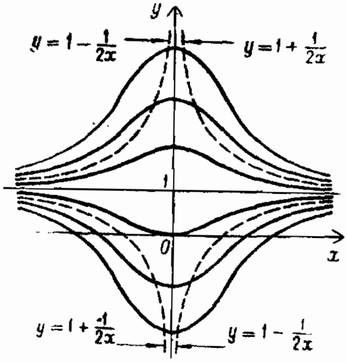


Рис. 7

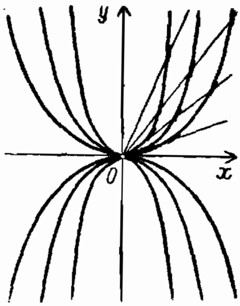


Рис. 8

глянемо ще дві ізокліни: $y = 1 - \frac{1}{2x}$ при $k = 1$ і $y = 1 + \frac{1}{2x}$ при $k = -1$. Дотичні, проведені до інтегральних кривих в точках перетину з цими ізоклінами, утворюють з віссю абсцис кути 45 і 135° відповідно.

Будуємо інтегральні криві даного рівняння (рис. 7).

1.18. За допомогою ізоклін побудувати наближено інтегральні криві рівняння $xy' = 2y$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що вісь абсцис є інтегральною кривою даного рівняння і що інтегральні криві розміщені симетрично відносно осі абсцис та осі ординат. Останнє випливає з того, що дане рівняння не змінюється при заміні x на $-x$ або y на $-y$. Тому досить дослідити поведінку інтегральних кривих в I квадранті координатної площини.

Сім'я ізоклін визначається рівнянням

$$kx = 2y, \quad y = \frac{k}{2}x.$$

Тому для будь-якого $k > 0$ дотичні до інтегральних кривих даного рівняння, проведені в точках прямої $y = \frac{k}{2}x$, утворюють з віссю абсцис кут, що дорівнює $\operatorname{arctg} k$. Побудувавши кілька ізоклін і поле напрямків, будуємо наближено інтегральні криві рівняння (рис. 8).

1.19. За допомогою ізоклін побудувати наближено інтегральні криві рівняння

$$(x - y)\, y' = x + y.$$

Розв'язання. Поклавши $y' = k$, дістанемо рівняння сім'ї ізоклін $(x - y)\, k = x + y$. Отже, ізоклінами є прямі $(k + 1)\, y = (k - 1)\, x$, які проходять через початок координат. При $k = 1$ маємо ізокліну $y = 0$ (вісь абсцис), яку інтегральні криві перетинають під кутом $45°$. При $k = 0$ маємо ізокліну $y = -x$, у точках якої дотичні до інтегральних кривих паралельні осі абсцис. При $k = -1$ маємо ізокліну $x = 0$, яку інтегральні криві перетинають також під кутом $45°$, при цьому дотичні в точках прямої $x = 0$ до інтегральних кривих утворюють кут $135°$ з віссю абсцис. Якщо рівняння ізоклін розв'язати відносно y

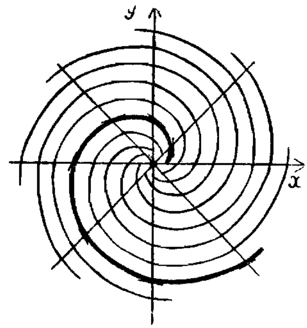


Рис. 9

$$y = \frac{k - 1}{k + 1}\, x$$

і перейти до границі при $k \to \infty$, то дістанемо ізокліну $y = x$, в точках якої інтегральні криві мають вертикальні дотичні. Побудуємо схематично інтегральні криві заданого рівняння (рис. 9).

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \tag{1}$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Якщо $g(c_0) = 0$, то функція $y = c_0$ є розв'язком рівняння (1). Розв'язки рівняння (1), вздовж яких $g(y) \neq 0$, задовольняють співвідношення

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)\, dx = C, \quad C = \text{const}.$$

Теорема. *Нехай функції $f(x)$ і $g(y)$ визначені і неперервно диференційовні в околах точок $x = x_0$, $y = y_0$ відповідно, причому $g(y_0) \neq 0$. Тоді розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1) з початковою умовою $\varphi(x_0) = y_0$ існує в деякому околі точки $x = x_0$, єдиний і задовольняє співвідношення*

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

Рівняння виду $y' = f(ax + by + c)$ заміною $z = ax + by + c$ зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

З диференціальним рівнянням виду $y' = f(y)$ пов'язане поняття векторного поля на прямій. Кожній точці y з області визначення функції $f(y)$ поставимо у відповідність вектор, довжина якого дорівнює $|f(y)|$, а напрям збігається з додатним напрямом на осі Oy, якщо $f(y) > 0$, і протилежний йому при $f(y) < 0$. Тоді множина векторів утворить векторне поле. Точки, в яких напрям поля не визначений, тобто в яких $f(y) = 0$, називаються *особливими точками* векторного поля або *положеннями рівноваги*. Побудувавши векторне поле, неважко схематично зобразити інтегральні криві даного рівняння.

1.20. Розв'язати рівняння $x(1 + y^2) + y(1 + x^2) y' = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$x(1 + y^2)\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0.$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на добуток $(1 + x^2) \times (1 + y^2) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{1 + x^2}\,dx + \frac{y}{1 + y^2} = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, послідовно знаходимо

$$\int \frac{xdx}{1 + x^2} + \int \frac{ydy}{1 + y^2} = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \frac{1}{2}\ln C, \quad \frac{1}{2}\ln C = C_1.$$

Звідси $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$.

1.21. Розв'язати рівняння $y' = xy^2 + 2xy$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = xy(y + 2).$$

Функції $y = 0$ і $y = -2$ є розв'язками рівняння. Інші розв'язки знайдемо, відокремивши змінні в рівнянні та проінтегрувавши його:

$$\frac{dy}{y(y+2)} - xdx = 0, \quad \int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy - \int xdx = 0,$$

$$\ln|y| - \ln|y + 2| - x^2 = \ln C_1,$$

$$\frac{|y|}{|y+2|} = C_1 e^{x^2}, \quad C_1 > 0.$$

Оскільки розв'язок $y = 0$ можна дістати з останнього співвідношення при $C_1 = 0$, то

$$\frac{y}{y+2} = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbf{R},$$

$$y = \frac{2Ce^{x^2}}{1 - Ce^{x^2}}.$$

1.22. Розв'язати рівняння $2\operatorname{ch} y dx - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})\, dy = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Відокремивши змінні, дістанемо

$$\frac{dy}{e^y + e^{-y}} - \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0.$$

Звідси

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + C,$$

$$\int \frac{d(e^y + 1)}{e^{2y} + 1} = \frac{1}{2} \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})\, dx + C,$$

$$\operatorname{arctg} e^y = \frac{1}{3} \left((x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}\right) + C.$$

Остаточно

$$e^y = \operatorname{tg}\left(C + \frac{1}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(x-1)^{3/2}\right),$$

або

$$y = \ln \operatorname{tg}\left(C + \frac{1}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(x-1)^{3/2}\right), \quad x \geqslant 1.$$

1.23. Знайти розв'язок рівняння

$$e^x dx - (1 + e^x)\, y dy = 0,$$

який задовольняє умову $y(0) = 1$.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{e^x}{1+e^x} dx = y dy.$$

Шуканий розв'язок цього рівняння задовольняє співвідношення

$$\int_0^x \frac{e^x dx}{1+e^x} = \int_1^y y dy.$$

Звідси

$$\ln(1 + e^x) - \ln 2 = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2},$$

або

$$y^2 = 1 + 2\ln\frac{1+e^x}{2}, \quad y = \sqrt{1 + 2\ln\frac{1+e^x}{2}}.$$

1.24. Знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $x^2y' - 1 = \cos 2y$, який задовольняє умову $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \frac{5\pi}{4}$.

Розв'язання. Позначимо $\varphi(1) = y_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Шуканий розв'язок задовольняє співвідношення

$$\int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{1+\cos 2y} = \int\limits_1^x \frac{dx}{x^2}.$$

Звідси $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi(x) - \operatorname{tg} y_0) = -\frac{1}{x} + 1$. З умови $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = \frac{5\pi}{4}$ дістаємо $\frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} y_0) = 1$, $\operatorname{tg} y_0 = -1$.

Отже, $\operatorname{tg}\varphi(x) = 1 - \frac{2}{x}$, $\varphi(x) = \pi + \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$, тобто

$$y = \pi + \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right).$$

1.25. Розв'язати рівняння

$$(1 + e^y)\,dx - e^{2y}\sin^3 x\,dy = 0.$$

Знайти розв'язок, який задовольняє умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{e^{2y}}{1+e^y}\,dy = \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Звідси

$$\int \frac{e^{2y}}{1+e^y}\,dy = \int\frac{dx}{\sin^3 x}, \quad \int\frac{e^y d(e^y)}{1+e^y} = -\int\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sin x},$$

$$e^y - \ln(1+e^y) = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx,$$

$$e^y - \ln(1+e^y) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int\frac{dx}{\sin^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Отже,

$$e^y - \ln(1+e^y) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

З умови $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ знаходимо $1 - \ln 2 = C$, тобто $C = 1 - \ln 2$. Шуканий розв'язок задається неявно:

$$e^y - \ln(1 + e^y) = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + 1 - \ln 2,$$

або

$$e^y + \ln\frac{2}{1+e^y} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + 1.$$

1.26. Розв'язати рівняння $y' + y = 2x + 1$.

Розв'язання. Це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, якщо покласти $y - 2x - 1 = z$. Тоді $y' - 2 = z'$, $z' + 2 + z = 0$. Очевидний розв'язок: $z = -2$. Знаходимо інші розв'язки:

$$\frac{dz}{z+2} + dx = 0, \quad \int\frac{dz}{z+2} + \int dx = \ln C_1,$$

$$\ln|z+2| + x = \ln C_1, \quad |z+2| = C_1 e^{-x}, \quad C_1 > 0.$$

Розв'язок $z = -2$ можна дістати з останнього співвідношення при $C_1 = 0$. Тоді

$$z = -2 + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Остаточно

$$y = 2x - 1 + Ce^{-x}.$$

1.27. Розв'язати рівняння $y' = \cos(x - y - 1)$.

Розв'язання. Поклавши $x - y - 1 = z$, зводимо дане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Дістанемо

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \quad 1 - \frac{dz}{dx} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - \cos z.$$

Функції $z = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, є розв'язками цього рівняння. Інші його розв'язки задовольняють співвідношення

$$\int\frac{dx}{1-\cos z} = \int dx - C.$$

Звідси

$$-\operatorname{ctg} z/2 = x - C,$$

або

$$z = 2\operatorname{arcctg}(C - x) + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Отже,

$$x - y - 1 = 2\operatorname{arcctg}(C - x) + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Остаточно

$$y = x - 1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$y = x - 1 - 2\operatorname{arcctg}(C - x) + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

1.28. Розв'язати рівняння $y' = k\,\frac{y}{x}$ і побудувати інтегральні криві цього рівняння.

Р о з в' я з а н н я. Права частина рівняння визначена на всій площині, крім точок прямої $x = 0$. Очевидно, функція $y = 0$ при $x <$

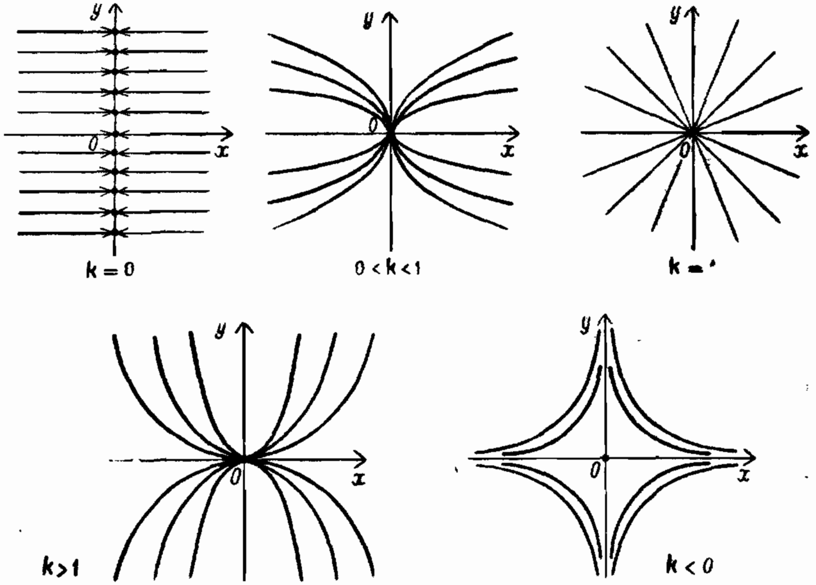


Рис. 10

< 0 і при $x > 0$ є розв'язком даного рівняння. Інші розв'язки знаходимо із співвідношення

$$\int \frac{dy}{y} = k \int \frac{dx}{x} + k \ln C_1.$$

Звідси

$$\ln|y| = k \ln|x| + k \ln C_1, \quad |y| = C_1 |x|^k, \quad C_1 > 0.$$

Якщо до цих розв'язків приєднати розв'язок $y = 0$, то всі розв'язки можна подати формулою:

$$y = C|x|^k, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Інтегральні криві залежно від параметра k зображено на рис. 10.

1.29. Побудувати інтегральні криві рівняння $y' = \frac{\sin y}{\sin x}$.

Р о з в' я з а н н я. Права частина рівняння визначена в усіх точках площини xOy, крім точок прямих $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Функції $y = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, на будь-якому проміжку, який не містить точок $x = k\pi$,

$k \in \mathbf{Z}$, є розв'язками даного рівняння. Інші розв'язки задовольняють співвідношення

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{dx}{\sin x} + \ln C_1.$$

Інтегруючи, дістаємо:

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C_1;$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = C_1\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \quad C_1 > 0.$$

Остаточно

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = C\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad C \in \mathbf{R},$$

$$y = 2\operatorname{arctg}\left(C\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Інтегральні криві зображено на рис. 11.

1.30. Нехай у рівнянні $y' = f(y)$ функція $f(y)$ неперервно диференційовна на відрізку $[a; b]$, $f(a) = f(b) = 0$ і $f(y) > 0$ ($f(y) < 0$) при $y \in (a, b)$. Довести, що для будь-якого розв'язку $y = \varphi(x)$, $\varphi(0) = y_0$, $y_0 \in (a, b)$, даного рівняння $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = b$ ($\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = a$).

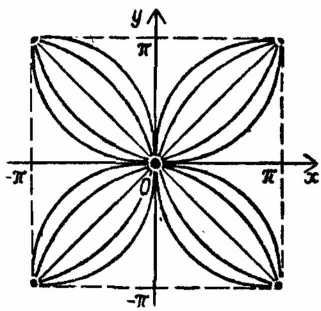


Рис. 11

Р о з в' я з а н н я. Функції $y = a$ і $y = b$ є розв'язками даного рівняння, бо $f(a) = f(b) = 0$. Розв'язок $y = \varphi(x)$, $\varphi(0) = y_0$, $y_0 \in (a, b)$ задовольняє тотожність $\varphi'(x) = f(\varphi(x))$. Якщо $f(y) > 0$ ($f(y) < 0$) при $y \in (a, b)$, то при всіх $x \geqslant 0$ функція $y = \varphi(x)$ монотонно зростає (спадає), оскільки $\varphi'(x) > 0$ ($\varphi'(x) < 0$) при всіх $x \geqslant 0$. Значення $y = b$ ($y = a$) функція $\varphi(x)$ не може досягти. Справді, якби $\varphi(x_1) = b$ ($\varphi(x_1) = a$) при деякому $x_1 > 0$, то в точці $(x_1; b)$ ($(x_1; a)$) порушилася б умова єдиності розв'язку, бо через цю точку проходило б дві інтегральні криві: $y = b$ і $y = \varphi(x)$. Отже, $\varphi(x)$ монотонно зростає (спадає) і обмежена зверху (знизу). Тому існує

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = C.$$

Доведемо, що $C = b$ ($C = a$). Припустимо, що $C \neq b$ ($C \neq a$). Тоді $C < b$ ($C > a$) і $f(C) > 0$ ($f(C) < 0$).

Оскільки $\varphi(x) \to C$ при $x \to \infty$ і є монотонною, то $\varphi'(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Проте

$$0 = \lim_{x \to \infty} \varphi'(x) = \lim_{x \to \infty} f(\varphi(x)) = f(C),$$

що неможливо.

Отже, коли умови задачі виконуються, то

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = b, \quad \text{якщо} \quad f(y) > 0 \quad \text{при} \quad y \in (a, b);$$

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = a, \quad \text{якщо} \quad f(y) < 0 \quad \text{при} \quad y \in (a, b).$$

1.31. Використавши результат попередньої задачі, схематично побудувати інтегральні криві таких рівнянь:

а) $y' = y(1 - y^2)$; б) $y' = \sin y$; в) $y' = f(y) = \begin{cases} y \ln y^2, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. а) Функція $f(y) = y(1 - y^2)$ перетворюється в нуль у трьох точках: $y = -1$, $y = 0$ і $y = 1$. Тому прямі $y = -1$,

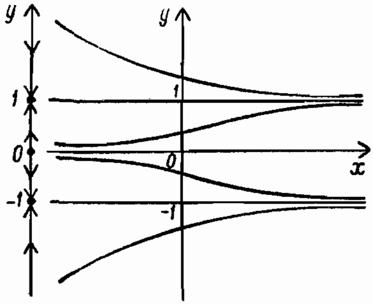


Рис. 12

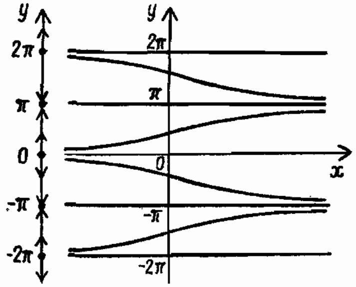


Рис. 13

$y = 0$ і $y = 1$ є інтегральними кривими даного рівняння. На проміжках $(-\infty, -1)$ і $(0, 1)$ функція $f(y) > 0$, тому кожна інтегральна крива, яка при $x = x_0$ проходить через точку $y_0 \in (-\infty, -1)$, із зростанням x наближається до прямої $y = -1$. Якщо $y_0 \in (0, 1)$, то відповідна інтегральна крива із зростанням x наближається до прямої $y = 1$.

На проміжках $(-1, 0)$ і $(1, +\infty)$ $f(y) < 0$. Тому інтегральна крива, яка проходить через точку $y_0 \in (-1, 0)$, наближається до прямої $y = -1$ при $x \to +\infty$. Якщо $y_0 \in (1, +\infty)$, то інтегральна крива при $x \to \infty$ наближається до прямої $y = 1$. Інтегральні криві зображено на рис. 12.

б) Точки $y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, є положеннями рівноваги рівняння. Якщо $y_0 \in (2n\pi, \pi + 2n\pi)$, то $\sin y > 0$ і інтегральна крива, яка проходить через цю точку, наближається до прямої $y = \pi + 2n\pi$ при $x \to +\infty$.

Якщо $y_0 \in (\pi + 2n\pi,\ 2\pi + 2n\pi)$, то $\sin y < 0$ і інтегральна крива, яка проходить через цю точку, при $x \to +\infty$ наближається до прямої $y = \pi + 2n\pi$ (рис. 13).

в) Рівняння має три положення рівноваги: $y = 0$ і $y = \pm 1$. Оскільки функція f непарна, то інтегральні криві розміщені симетрично відносно осі абсцис. Тому досить побудувати інтегральні криві в області $y > 0$. Якщо $y \in (0, 1)$, то $f(y) < 0$, а якщо $y > 1$, то $f(y) > 0$. Це означає, що інтегральні криві, які починаються в смузі $0 < y < 1$, при $x \to +\infty$ наближаються до прямої $y = 0$, а інтегральні криві, які проходять через точку області $y > 1$, при $x \to +\infty$ наближаються до нескінченно віддаленої точки площини. Інтегральні криві зображено на рис. 14.

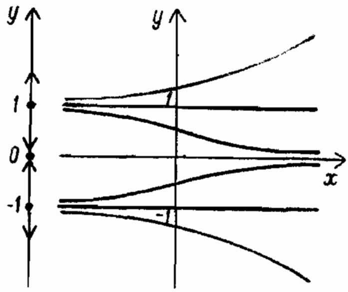


Рис. 14

У цьому випадку не можна стверджувати, що пряма $y = 0$ є асимптотою при $x \to +\infty$ інтегральних кривих, які лежать у смузі $|y| < 1$, бо функція $f(y)$ у точці $y = 0$ не є диференційовною і результат попередньої задачі не можна використати. Можливо що, починаючи з деякого x, інтегральна крива збігатиметься з прямою $y = 0$. Проте в розглядуваному випадку загальним розв'язком рівняння в області $y > 0$ є функція $y = e^{Ce^{2x}}$. Тому жодна з інтегральних кривих не збігається з прямою $y = 0$ при скінченному значенні x.

1.3. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь першого порядку

Складання диференціального рівняння, яке описує певний еволюційний процес або залежність між характеристиками досліджуваного явища, є часто не простою задачею. Універсального методу складання диференціального рівняння не існує, тому можна дати лише деякі загальні вказівки.

Нехай $y = y(x)$ — шукана залежність між характеристиками x і y даного процесу. Щоб скласти диференціальне рівняння, розв'язком якого є функція $y = y(x)$, треба виразити приріст цієї функції $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ через приріст Δx незалежної змінної x та інші величини, про які йдеться в задачі. Поділивши Δy на Δx та перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння, тобто залежність швидкості зміни величини y в точці x (похідної $y'(x)$) від x і $y(x)$. У багатьох випадках ця залежність грунтується на законі або експериментальному факті, який має місце в тій чи іншій галузі природознавства. При цьому, звичайно, використовують геометричний зміст похідної (тангенс кута нахилу дотичної) та її фізичний зміст (швидкість перебігу процесу).

При розв'язуванні деяких задач дістають рівняння, шукана функція в яких міститься не тільки під знаком похідної, а й під знаком інтеграла. Рівняння такого типу називають *інтегральними* або *інтегро-диференціальними*. Вони виникають, наприклад, при використанні геометричного змісту визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції та інших інтегральних формул (довжина дуги кривої, площа поверхні і об'єм тіла обертання, робота сили тощо). У найпростіших випадках такі рівняння шляхом диференціювання зводять до диференціальних рівнянь.

1.32. З експерименту відомо, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна до її кількості. Знайти півперіод розпаду речовини (час, за який розпадається половина речовини).

Розв'язання. Нехай $x(t)$ — кількість радіоактивної речовини в момент часу t, $x(0) = x_0$. З умови задачі випливає, що $x'(t) = -kx$, $k > 0$. Звідси

$$\frac{dx}{x} = -kt, \quad \ln x = -kt + \ln C, \quad x = Ce^{-kt}.$$

Оскільки $x(0) = x_0$, то закон зміни кількості речовини з часом має вигляд $x(t) = x_0e^{-kt}$.

Час T, за який розпадається половина речовини, визначається з рівняння $\frac{1}{2}x_0 = x_0e^{-kt}$, тобто $T = \frac{\ln 2}{k}$. Цей час не залежить від початкової кількості речовини.

1.33. З експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій при достатньому запасі їжі пропорційна до кількості їх. За який час кількість бактерій збільшиться в m разів порівняно з початковою кількістю?

Розв'язання. Якщо $x(t)$ — кількість бактерій у момент часу t, $x(0) = x_0$, то зміна кількості описується рівнянням

$$x'(t) = kx, \quad k > 0.$$

Звідси

$$\frac{dx}{x} = kdt, \quad x = Ce^{kt}, \quad x = x_0e^{kt}.$$

Час T, за який кількість бактерій збільшиться в m разів, знаходимо з рівняння

$$x(T) = mx_0, \quad mx_0 = x_0e^{kt};$$

$$T = \frac{\ln m}{k}.$$

1.34. На матеріальну точку, маса якої m, діє стала сила, що надає точці прискорення a. Навколишнє середовище чинить рухомій точці опір, пропорційний до швидкості її руху (γ — коефіцієнт пропорційності). Як змінюється швидкість руху залежно від часу, коли в початковий момент точка була в стані спокою?

Розв'язання. Вважаємо, що час відлічується від початку руху точки. Нехай $v(t)$ — швидкість руху точки в момент часу t. Тоді $v(0) = 0$. У будь-який момент часу t на точку діє сила $ma - \gamma v(t)$. За другим законом Ньютона, ця сила надає точці прискорення $\frac{ma - \gamma v(t)}{m}$. Прискорення в момент часу t є швидкість зміни швидкості в цей момент, тобто похідна швидкості по часу. Тому

$$v' = \frac{ma - \gamma v(t)}{m}.$$

Запишемо це рівняння так:

$$v' = -\frac{\gamma}{m} v + a.$$

Звідси

$$v(t) = \frac{m}{\gamma} a + Ce^{-\frac{\gamma}{m} t}. \tag{1}$$

Візьмемо той розв'язок, який задовольняє початкову умову $v(0) = 0$. Поклавши в (1) $t = 0$, дістанемо $0 = \frac{m}{\gamma} a + C$, звідки $C = -\frac{m}{\gamma} a$.

Отже, швидкість точки змінюється за таким законом:

$$v(t) = \frac{m}{\gamma} a \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}\right).$$

З цієї формули дістаємо, що швидкість руху матеріальної точки зростає з часом, наближаючись до $\frac{m}{\gamma} a$. Через деякий час після початку руху точка рухатиметься практично рівномірно зі швидкістю, близькою до $\frac{m}{\gamma} a$.

1.35. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною до пройденого шляху. В початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху і мала швидкість $v_0 = 20$ м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.

Розв'язання. Позначимо через $s = s(t)$ — відстань точки від початку відліку в момент t. Тоді $s(0) = 5$. За умовою зміна величини s від часу описується диференціальним рівнянням $s' = \frac{k}{s}$, де k — коефіцієнт пропорційності.

Відокремивши змінні в цьому рівняння і проінтегрувавши, дістанемо:

$$s^2 = 2(kt + C), \quad s = \sqrt{2(kt + C)}.$$

З умови $s(0) = 5$ знайдемо сталу інтегрування C:

$$5 = \sqrt{2C}, \quad C = \frac{25}{2}.$$

Отже,

$$s = \sqrt{25 + 2kt}.$$

Продиференціювавши це рівняння по t, знайдемо швидкість руху точки в момент t:

$$v(t) = s'(t) = \frac{k}{\sqrt{25 + 2kt}}.$$

З умови $v(0) = v_0 = 20$ м/с знаходимо коефіцієнт пропорційності k:

$$v(0) = \frac{k}{5} = 20 \text{ м/с}, \quad k = 100.$$

Отже, відстань $s(t)$ і швидкість $v(t)$ змінюються за законом

$$s(t) = \sqrt{25 + 200t}, \quad v(t) = \frac{100}{\sqrt{25 + 200t}}.$$

Через 10 с після початку руху

$$s(10) = \sqrt{25 + 200 \cdot 10} = 45 \text{ м},$$

$$v(10) = \frac{100}{\sqrt{25 + 200 \cdot 10}} = \frac{100}{45} = \frac{20}{9} \text{ м/с}.$$

Отже, через 10 с після початку руху швидкість точки становила $\frac{20}{9}$ м/с. За цей час точка пройшла відстань $s(10) - s(0) = 45 - 5 = 40$ м.

1.36. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний до швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 2 м/с, а його швидкість через 4 с дорівнює 1 м/с. Через скільки секунд швидкість човна дорівнюватиме 0,25 м/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

Розв'язання. Нехай $v = v(t)$ — швидкість човна в момент t. Тоді $v(0) = 2$. За другим законом Ньютона,

$$mv' = F(t),$$

де F — сила, яка діє на човна; m — маса човна.

За умовою

$$F(t) = -kv(t),$$

де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності, а знак мінус означає, що сила напрямлена проти руху човна (на зменшення швидкості). Тому

$$mv' = -kv$$

— диференціальне рівняння руху човна. Його розв'язки

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

За умовою $v(0) = 2$, тому $C = 2$ і $v(t) = 2e^{-\frac{k}{m}t}$. З умови $v(4) = 1$

визначаємо величину $\frac{k}{m}$:

$$1 = 2e^{-\frac{k}{m}4}; \quad \frac{k}{m} = \frac{\ln 2}{4}.$$

Швидкість човна $v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}$. Час T, через який швидкість човна дорівнюватиме 0,25 м/с, знаходимо з рівняння $0{,}25 = 2^{1-\frac{T}{4}}$, або $2^{-2} = 2^{1-\frac{T}{4}}$, звідки $T = 12$ с. Шлях, пройдений човном, обчислюємо за формулою

$$s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = \int_0^t 2^{1-\frac{x}{4}}\,dx = \frac{8}{\ln 2}\left(1 - 2^{-\frac{t}{4}}\right).$$

Отже, човен може пройти шлях, не більший від $\frac{8}{\ln 2} \simeq 11{,}5$ м.

1.37. Прискорення локомотива, початкова швидкість якого дорівнює v_0, прямо пропорційне до сили тяги F і обернено пропорційне до маси поїзда m. Сила тяги локомотива $F(t) = b - kv(t)$, де $v(t)$ — швидкість локомотива в момент t, а b і k — сталі величини. Знайти залежність сили тяги локомотива від часу t.

Р о з в' я з а н н я. Прискорення локомотива — це похідна його швидкості: $a = v'$. Тому за умовою $v' = \frac{b - kv}{m}$. Інтегруючи це рівняння, дістаємо

$$v(t) = \frac{b}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Початкова швидкість локомотива $v(0) = v_0$, тому $v(0) = v_0 = \frac{b}{k} + C$, $C = v_0 - \frac{b}{k}$. Отже, $v(t) = \frac{b}{k} + \left(v_0 - \frac{b}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$ і залежність сили тяги локомотива від часу виражається рівністю:

$$F(t) = b - kv(t) = (b - kv_0)\,e^{-\frac{k}{m}t}.$$

1.38. Матеріальна точка, маса якої m, рухається по координатній прямій Ox. Робота сили, яка діє на точку, пропорційна до часу t від початку руху (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент ($t = 0$) точка була в стані спокою на відстані s_0 від початку відліку.

Р о з в' я з а н н я. Якщо точка переміщується лінійно і напрямок сили та швидкості збігаються, то робота сили $F(s)$, яка діє на точку, виражається формулою

$$A = \int_{s_0}^{s} F(u)\, du.$$

За умовою $A = kt$. Прирівнявши останні два вирази, дістанемо рівняння

$$\int_{s_0}^{s} F(u)\, du = kt.$$

Диференціюючи по t обидві частини цього рівняння, дістаємо

$$F(s)\, s' = k,$$

або, враховуючи, що $s' = v$, маємо

$$F(s)\, v = k.$$

За другим законом Ньютона, $F(s) = mv'$, тому маємо диференціальне рівняння

$$mvv' = k.$$

Інтегруючи його, знаходимо

$$\frac{mv^2}{2} = kt + C.$$

З початкової умови $v(0) = 0$ (у початковий момент точка була в стані спокою) знаходимо, що $C = 0$. Тому $v = \sqrt{\frac{2k}{m} t}$. Замінюючи v на s' та інтегруючи, дістаємо

$$s = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2k}{m}}\, t^{3/2} + C_1.$$

Оскільки за умовою $s(0) = s_0$, то $C_1 = s_0$. Тому

$$s = s_0 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2k}{m}}\, t^{3/2}.$$

1.39. Парашутист спускається на парашуті, який має форму півсфери радіуса $R = 4$ м. Його маса разом з масою парашута дорівнює 82 кг. Знайти швидкість v парашутиста через 2 с після початку спускання і шлях, який він пройшов за час t. Вважати, що сила опору повітря $F_1 = 0{,}00081sv^2$, де s — площа найбільшого перерізу, перпендикулярного до напрямку руху; v — швидкість руху.

Р о з в' я з а н н я. У диференціальному рівнянні руху парашутиста $mv' = F$ сила F є рівнодійною двох протилежно напрямлених сил: ваги, яка дорівнює mg, і сили опору повітря, що дорівнює

$0{,}00081sv^2$. Тому диференціальне рівняння руху є

$$mv' = mg - 0{,}00081sv^2.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$v' = g - \alpha v^2,$$

де $\alpha = \dfrac{0{,}00081s}{m}$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо

$$\int \frac{dv}{g - \alpha v^2} = t + C.$$

Розклавши дріб $\dfrac{1}{g - \alpha v^2}$ на елементарні дроби

$$\frac{1}{g - \alpha v^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha}} \right),$$

обчислимо інтеграл

$$\int \frac{dv}{g - \alpha v^2} = \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \ln (\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha}) - \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \ln (\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \ln \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha}}.$$

Отже, $\dfrac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \ln \dfrac{\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha}} = t + C.$

Якщо $t = 0$, то $v = 0$. Таким чином,

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \ln \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha}}.$$

Звідси виражаємо v як функцію часу t:

$$v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot \frac{e^{\sqrt{g\alpha}t} - e^{-\sqrt{g\alpha}t}}{e^{\sqrt{g\alpha}t} + e^{-\sqrt{g\alpha}t}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{g\alpha}t)}{\operatorname{ch}(\sqrt{g\alpha}t)}. \tag{2}$$

Замінюючи v на s', дістаємо рівняння

$$s' = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{g\alpha}t)}{\operatorname{ch}(\sqrt{g\alpha}t)}.$$

Інтегруючи ці рівняння, знаходимо

$$s = \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{ch} (\sqrt{g\alpha}\, t) + C.$$

Оскільки $s = 0$ при $t = 0$, то $C = 0$. Отже,

$$s = \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{ch} (\sqrt{g\alpha}\, t). \tag{3}$$

Формули (2) і (3) описують закони зміни швидкості парашутиста і шляху, який він пройшов за час t.

Обчислимо швидкість через 2 с після початку руху:

$$g \approx 981, \ \alpha = \frac{0{,}00081s}{m} = \frac{0{,}00081\pi \cdot 160\,000}{82\,000} \approx 0{,}005,$$

$$\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \approx 443, \quad \sqrt{g\alpha} \approx 2{,}21.$$

Відповідна швидкість

$$v_1 = v\,(2) = 443\,\frac{e^{8,81}-1}{e^{8,81}+1} \approx 4{,}43 \ \text{м/с}.$$

Швидкість, яка визначається рівністю (2), має граничне значення $v_{\text{гр}} = \lim\limits_{t\to\infty} v\,(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$. Цю швидкість, яку теоретично ніколи не можна досягти, парашутист практично має вже через 2 с після початку руху.

Аналіз формули (3) дає змогу розкрити справжній характер руху парашутиста. Запишемо цю формулу у вигляді

$$s = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}{2}.$$

Другий доданок у чисельнику вже при дуже невеликих значеннях t стає дуже малим, тому при всіх t, більших від деякого певного значення, можна вважати, що

$$s = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{e^{\sqrt{g\alpha}t}}{2} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,t - \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Дістали лінійну залежність, фізичний зміст якої полягає в тому, що через деякий час рух парашутиста стає практично рівномірним. Швидкість рівномірного руху дорівнює $\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, тобто граничній швидкості руху.

1.40. Метеорит під впливом земного тяжіння із стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з висоти h. Якою була б швидкість метеорита на поверхні Землі, коли б не було земної атмосфери? Радіус Землі $R = 6377$ км.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $x = x\,(t)$ — відстань, яку метеорит пройшов з початку падіння, $h - x$ — відстань від метеорита в момент t до центра Землі. У момент t на метеорит діє сила $F = ma$, де m — маса метеорита, а a — його прискорення. На поверхні Землі на тіло діє сила тяжіння $P = mg$, де g — прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

За законом Ньютона ці сили обернено пропорційні до квадратів відстаней падаючого тіла від центра Землі:

$$\frac{F}{P}=\frac{R^2}{(h-x)^2}, \quad \frac{ma}{mg}=\frac{R^2}{(h-x)^2}.$$

Звідси $a=\frac{R^2g}{(h-x)^2}$, але $a=v'$. Тому $v'=\frac{R^2g}{(h-x)^2}$. Враховуючи рівність

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v,$$

дістаємо диференціальне рівняння руху:

$$v\frac{dv}{dx}=\frac{gR^2}{(h-x)^2}, \quad \frac{dv^2}{dx}=\frac{2gR^2}{(h-x)^2}.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$v^2=\frac{2gR^2}{h-x}+C.$$

Рух починався із стану спокою, тобто $x=0$ і $v=0$ при $t=0$:

$$0=\frac{2gR^2}{h-0}+C, \quad C=-\frac{2gR^2}{h}.$$

Тому швидкість метеорита залежно від шляху x виражається формулою

$$v^2=\frac{2gR^2x}{h(h-x)}.$$

На поверхні Землі $(x=h-R)$ швидкість метеорита $v=\sqrt{2gR\left(1-\frac{R}{h}\right)}$. Оскільки за умовою висота h може бути необмежено великою, то, перейшовши до границі при $h\to\infty$, дістанемо

$$v=\sqrt{2gR}.$$

Отже, на поверхні Землі метеорит мав би швидкість

$$v=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 6\,377\,000}\approx 11{,}2 \text{ км/с}.$$

1.41. Крива $y=\varphi(x)$ проходить через точку (1; 2). Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму y 1 у точці з абсцисою, яка дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву $y=\varphi(x)$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $(x; y)$ — довільна точка на даній кривій. Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $(x; y)$, має вигляд

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

де X, Y — змінні координати точок дотичної. З умови, що дотична перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою $2x$, дістаємо диференціальне рівняння, яке задовольняє шукана крива:

$$1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x), \quad x\frac{dy}{dx} = 1 - y.$$

Відокремивши змінні та проінтегрувавши це рівняння, знаходимо

$$y - 1 = \frac{C}{x}.$$

Шукана крива проходить через точку (1; 2), тому $C = 1$. Отже, $y = 1 + \frac{1}{x}$.

1.42. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (0; 1) і в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до цієї кривої дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Знайти криву $y = \varphi(x)$.

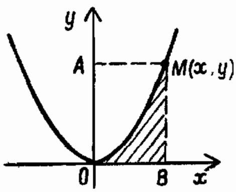


Рис. 15

Р о з в' я з а н н я. Нехай $(x; y)$ — довільна точка на шуканій кривій. Тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці $(x; y)$ дорівнює похідній шуканої функції в точці x, тобто y'. За умовою $y' = 2xy$. Звідси $y = Ce^{x^2}$. Оскільки $y(0) = 1$, то $C = 1$ і $y = e^{x^2}$.

1.43. Крива проходить через початок координат і лежить у півплощині $y \geqslant 0$. Кожний прямокутник, обмежений осями координат і перпендикулярами до них, опущеними з точки кривої, ділиться кривою на дві частини. При цьому площа частини прямокутника, яка лежить під кривою, в два рази менша від площі частини прямокутника, яка лежить над кривою. Знайти криву $y = y(x)$.

Р о з в' я з а н н я. З довільної точки $M(x; y)$ шуканої кривої $y = y(x)$ опустимо перпендикуляри MA і MB на координатні осі (рис. 15). Площу прямокутника $OAMB$ можна знайти за формулою $S = xy$ або $S = -xy$, якщо крива лежить у півплощині $x \leqslant 0$. Площу заштрихованої частини прямокутника обчислимо за формулою

$$Q = \int_0^x y(t)\,dt$$

або

$$Q = -\int_0^x y(t)\,dt, \quad \text{якщо } x < 0.$$

За умовою $S - Q = 2Q$, тобто

$$xy = 3\int_0^x y(t)\,dt.$$

Дістали інтегральне рівняння (невідома функція $y(x)$ міститься під знаком інтеграла). Перейдемо до диференціального рівняння, продиференціювавши інтегральне рівняння по x:

$$xy' + y = 3y, \text{ або } xy' = 2y.$$

Інтегруючи це рівняння, дістаємо $y = Cx^2$.

За умовою шукана крива лежить у півплощині $y \geqslant 0$, тому будь-яка парабола виду $y = Cx^2$, $C > 0$, задовольняє умову задачі.

1.44. У посудину, яка містить 20 л води, неперервно з швидкістю 5 л за хвилину вливається розчин, кожен літр якого містить 0,2 кг солі. У посудині розчин перемішується, і суміш витікає з посудини з тією самою швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 4 хв?

Розв'язання. Нехай $m(t)$ — кількість солі через t хв після початку процесу. Знайдемо, як зміниться кількість солі в посудині за проміжок часу $[t;\ t + \Delta t]$.

За час Δt у посудину буде влито $5\Delta t$ (л) розчину. У цій кількості розчину міститься $0{,}2 \cdot 5 \cdot \Delta t = \Delta t$ (кг) солі. За той самий час з посудини виллється $5\Delta t$ (л) розчину. У момент t в посудині було $m(t)$ кг солі, отже, в $5 \cdot \Delta t$ л розчину, який витікає, містилося б $\frac{m(t)}{20}\ 5 \times \times\ \Delta t = 0{,}25 \cdot m(t)\, \Delta t$ кг солі, якби за час Δt кількість солі в посудині не змінювалась. Оскільки за цей час дана кількість солі зміниться на деяку величину α ($\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$), то з посудини за час Δt виллється $0{,}25\,(m(t) + \beta)\,\Delta t$ (кг) солі, де $0 < \beta < \alpha$.

Отже, в розчині, який вливається в посудину за проміжок $[t,\ t + \Delta t]$, міститься Δt кг солі, а в розчині, який витікає за той самий час,— $0{,}25\,(m(t) + \beta)\,\Delta t$ кг солі. Приріст кількості солі за цей час дорівнює

$$m(t + \Delta t) - m(t) = \Delta t - 0{,}25\,(m(t) + \beta)\,\Delta t.$$

Обидві частини цієї рівності розділимо на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Враховуючи, що $\beta \to 0$ при $\Delta t \to 0$, дістаємо $m'(t) = 1 - 0{,}25m(t)$. Це диференціальне рівняння відносно функції $m(t)$.

Розв'язки цього рівняння мають вигляд $m(t) = 4 + Ce^{-\frac{t}{4}}$. Оскільки в момент $t = 0$ солі в посудині не було, тобто $m(0) = 0$, то $C = -4$. Отже,

$$m(t) = 4\,(1 - e^{-\frac{t}{4}}).$$

У момент $t = 4$ в посудині буде $m(4) = 4\,(1 - e^{-1}) \approx 2{,}4$ кг солі.

Витікання рідини через отвір у посудині. Швидкість витікання рідини через малий отвір у посудині, який лежить на відстані h нижче від рівня рідини в посудині, без урахування тертя, дорівнювала б швидкості вільного падіння тіла з висоти h, тобто $\sqrt{2gh}$. З урахуванням тертя залежність швидкості v від h визначається законом Торрічеллі: $v = \mu\sqrt{2gh}$, де g — прискорення вільного падіння; μ — коефіцієнт витрат, який визначається емпірично і залежить від рідини. Для води $\mu = 0{,}62$, для гасу $\mu = 0{,}6$.

1.45. Посудину, площа поперечного перерізу якої є відомою функцією висоти h, $S = S(h)$, наповнено рідиною до рівня H. У дні посудини є отвір площею σ, через який рідина виливається. Знайти час t, за який рівень рідини знизиться від початкового положення H до довільного h, $0 \leqslant h \leqslant H$, і час T, за який рідина повністю виллється.

Р о з в' я з а н н я. Нехай висота рідини в посудині в момент t дорівнює h. Об'єм рідини ΔV, яка витікає з посудини за час Δt від моменту t до моменту $t + \Delta t$, можна знайти, якщо відомим є об'єм циліндра з площею основи σ і висотою $v(h)$:

$$\Delta v = \sigma v(h)\,\Delta t.$$

Цей об'єм рідини можна знайти й інакше. Внаслідок витікання рідини її рівень h у посудині знизиться на величину $-\Delta h$, отже, $\Delta v = -S(h)\,\Delta h$. Прирівнявши обидва вирази для ΔV, маємо: $-S(h)\,\Delta h = \sigma v(h)\,\Delta t$. Поділивши обидві частини останньої рівності на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння, яке описує залежність рівня рідини в посудині від часу:

$$-S(h)\frac{dh}{dt} = \sigma v(h).$$

Підставивши замість $v(h)$ її значення, знайдені за законом Торрічеллі, і відокремивши в цьому рівнянні змінні, дістанемо

$$dt = -\frac{S(h)}{\sigma\mu\sqrt{2gh}}\,dh.$$

Звідси

$$t = -\frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int\limits_H^h \frac{S(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int\limits_h^H \frac{S(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Оскільки $h = 0$ при $v = 0$, то час T, за який рідина повністю виллється з посудини, визначається за формулою

$$T = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int\limits_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh. \tag{4}$$

1.46. Круглий циліндричний бак з вертикальною віссю діаметром $2R$ і висотою H наповнено водою. З баку вода витікає через круглий отвір діаметром $2a$ в дні бака. Знайти час T, за який вода повністю витече з бака.

Р о з в' я з а н н я. Площа поперечного перерізу бака $S = S(h)$ стала і дорівнює πR^2, а площа отвору $\sigma = \pi a^2$. За формулою (4)

$$T = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh = \frac{\pi R^2}{\pi a^2\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2R^2\sqrt{H}}{a^2\mu\sqrt{2g}}.$$

Зокрема, при $R = 1$ м, $H = 2{,}25$ м, $a = 0{,}05$ м і $\mu = 0{,}62$ дістанемо

$$T = \frac{2\cdot 1\cdot\sqrt{2{,}25}}{0{,}0025\cdot 0{,}62\cdot\sqrt{19{,}62}} \approx 452 \text{ с} = 7 \text{ хв } 32 \text{ с}.$$

1.47. У прямолінійній трубі радіуса R тече рідина. Швидкість течії v кожного шару рідини збільшується з наближенням цього шару до центра труби (осі циліндра). Знайти v як функцію відстані r відповідного шару рідини від осі циліндра.

Р о з в' я з а н н я. Як відомо, залежність між v і r виражається рівнянням $dv = -\frac{\gamma i}{2\varepsilon} r\,dr$, де ε — коефіцієнт в'язкості; i — гідравлічний спад; γ — густина рідини (знак мінус означає, що із збільшенням відстані r швидкість течії зменшується).

Після інтегрування цього рівняння маємо

$$v = -\frac{\gamma i}{4\varepsilon} r^2 + C.$$

Сталу C знайдемо з умови, що швидкість течії шару рідини, який безпосередньо прилягає до труби, дорівнює нулю, тобто $v(R) = 0$:

$$v(R) = -\frac{\gamma i}{4\varepsilon} R^2 + C = 0; \quad C = \frac{\gamma i}{4\varepsilon} R^2.$$

Отже,

$$v(r) = \frac{\gamma i}{4\varepsilon}(R^2 - r^2).$$

1.48. Порожня залізна куля перебуває в стаціонарному тепловому стані, тобто коли температура в різних точках тіла різна, але в кожній окремій точці з часом вона не змінюється. Внутрішній радіус кулі 6 см, зовнішній — 10 см, температура внутрішньої поверхні 200 °С, зовнішньої — 20 °С. Знайти температуру в точках, які лежать на відстані 9 см від центра кулі.

Р о з в' я з а н н я. Експериментально доведено, що кількість теплоти q, яка проходить через площадку S, перпендикулярну до напрямку теплової течії, пропорційна до площі S і швидкості зміни температури із зміною просторової координати x, тобто

$$q = -kS\frac{dT}{dx},$$

де k — коефіцієнт теплопровідності (для заліза $k = 0,14$). Внаслідок симетрії кулі теплота поширюється радіально, і тому температура в кожній точці є функція її відстані від центра кулі. Площа площадки, через яку проходить теплота, дорівнює площі поверхні кулі радіуса r, тобто $S = 4\pi r^2$. Тому $q = -4\pi k r^2 \frac{dT}{dr}$. Проте кількість теплоти, яка проходить через дві довільні концентричні сферичні поверхні, однакова. Отже, $-4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = q = \text{const}$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо $4\pi kT = \frac{q}{r} + C$. З умов $T(6) = 200$, $T(10) = 20$ визначимо q і C:

$$800\pi k = \frac{q}{6} + C, \quad 80\pi k = \frac{q}{10} + C,$$

$$q = 10\,800\pi k, \quad C = -1000\pi k.$$

Тоді $T = T(r) = \frac{2700}{r} - 250$, $T(9) = 300 - 250 = 50\,°\text{C}$.

1.49. Циліндричну котушку виготовлено з мідного дроту. При проходженні електричного струму через котушку виділяється теплота. Вивести формулу для температури $T = T(t)$ усталеного режиму як функції часу t.

Розв'язання. Нехай T_0 — температура середовища, в якому розміщена котушка; $T(0) = T_0$; c — питома теплоємність міді; γ — її густина, V — об'єм; S — площа поверхні котушки; q — кількість теплоти, яка виділяється за одиницю часу; k — коефіцієнт теплопровідності.

Кількість теплоти, яка виділяється за час Δt, дорівнює $q\Delta t$. Ця величина складається з двох частин: теплоти, яка витрачається на підвищення температури ΔT, і теплоти, яка втрачається в навколишньому середовищі. Перша частина дорівнює $cV\gamma\Delta T$, а друга — $kS(T - T_0)\Delta t$ (кількість цієї теплоти пропорційна до різниці температур T і T_0 котушки і середовища, а також величинам S і Δt). Звідси

$$q\Delta t = cv\gamma\Delta T + kS(T - T_0)\Delta t.$$

Розділивши обидві частини останньої рівності на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння

$$q = cV\gamma \frac{dT}{dt} + kS(T - T_0),$$

або

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_0) + \beta,$$

де $\alpha = \frac{kS}{cV\gamma}$, $\beta = \frac{q}{cV\gamma}$.

Відокремивши змінні та проінтегрувавши, дістанемо

$$t + C = -\frac{1}{\alpha}\ln\left|T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

Оскільки $T(0) = T_0$, то $C = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha}$, тому

$$t - \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\ln\left|T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

Звідси

$$T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t}.$$

Остаточно

$$T = T_0 + \frac{q}{ks}\left(1 - e^{-\frac{kS}{cV\gamma}}\right).$$

1.50. Поглинання світлового потоку тонким шаром води пропорційне до товщини шару й потоку, який падає на його поверхню. При проходженні через шар товщиною 1 м поглинається 1/4 початкового світлового потоку. Яка частина світлового потоку дійде до глибини h?

Р о з в' я з а н н я. Нехай $Q = Q(h)$ — світловий потік, який падає на поверхню на глибині h. При проходженні через шар води товщиною dh поглинутий світловий потік

$$dQ = -kQdh,$$

де k — коефіцієнт пропорційності. Звідси

$$Q(h) = Ce^{-kh}.$$

Нехай початковий світловий потік дорівнює Q_0. Тоді з початкової умови $Q(0) = Q_0$ знаходимо, що

$$C = Q_0.$$

Тому

$$Q(h) = Q_0e^{-kh}.$$

За умовою $Q(1) = \frac{3}{4}Q_0$. Отже,

$$\frac{3}{4}Q_0 = Q_0e^{-k},$$

звідки

$$e^{-k} = \frac{3}{4} \quad \text{і} \quad Q(h) = Q_0\left(\frac{3}{4}\right)^h.$$

До глибини $h = 4$ м дійде світловий потік

$$Q(4) = Q_0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}316Q_0,$$

тобто дійде менше ніж 1/3 початкового світлового потоку.

1.51. У циліндричній посудині, об'єм якої V_0, атмосферне повітря за допомогою поршня адіабатично (без обміну теплоти з навколишнім середовищем) стискується до об'єму V_1. Обчислити роботу стискання.

Розв'язання. При опусканні поршня на відстань dx виконується елементарна робота

$$dA = -pSdx,$$

де p — тиск повітря до опускання поршня, S — площа поршня. Проте $Sdx = dV$ — відповідна зміна об'єму, тому

$$dA = -pdV.$$

За законом Пуассона,

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

де k — стала (для певного газу) величина.

Дістаємо диференціальне рівняння

$$dA = -p_0 V_0^k \frac{dV}{V^k}.$$

Розв'язавши його, знайдемо:

$$A = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1)V^{k-1}} + C, \quad C = -\frac{p_0 V_0}{k-1}.$$

При $V = V_1$

$$A = \frac{p_0 V_0}{k-1}\left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right), \quad k \neq 1.$$

1.52. Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна до радіуса листка і кількості сонячного світла, яке падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна до площі листка і косинуса кута між напрямком променів і вертикаллю до листка. Знайти залежність між площею S листка і часом t, якщо о 6 год ця площа дорівнювала 1600 см^2, а о 18 год того самого дня 2500 см^2. Вважати, що кут між напрямком променя Сонця і вертикаллю о 6 год і о 18 год дорівнював 90°, а опівдні — 0°.

Розв'язання. Нехай $S = S(t)$ — площа листка в момент часу t. Якщо за початковий момент часу взяти 6 год, то $S(0) = 1600$ см^2, а $S(12) = 2500$ см^2 (площа листка о 18 год). Швидкість росту листка

$$S' = krQ,$$

де k — коефіцієнт пропорційності, r — радіус листка, Q — кількість сонячного світла.

За умовою $Q = \gamma S \cos \alpha$, де γ — коефіцієнт пропорційності, α — кут між напрямом сонячного променя і вертикаллю до листка. Кут $\alpha = \alpha(t)$ — функція часу, яка лінійно залежить від часу:

$$\alpha = at + b,\ \alpha(0) = -\frac{\pi}{2},\ \alpha(6) = 0,\ \alpha(12) = \frac{\pi}{2}.$$

З умов задачі дістанемо $a = \frac{\pi}{12}$, $b = -\frac{\pi}{2}$, тобто $\alpha = \frac{\pi}{12} \times$ $\times (t - 6)$. Отже,

$$Q = \gamma S \cos \frac{\pi}{12}(t - 6).$$

Оскільки радіус листка $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, то маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k\gamma}{\sqrt{\pi}} S \sqrt{S} \cos \frac{\pi}{12}(t - 6).$$

Відокремивши змінні й проінтегрувавши, дістанемо

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{12k\gamma}{\pi\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi}{12}(t - 6) + C.$$

З умов $S(0) = 1600$, $S(12) = 2500$:

$$C = -\frac{9}{200},\quad k\gamma = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2400}.$$

Підставивши ці значення в останню рівність, дістанемо

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{1}{200} \sin \frac{\pi}{12}(t - 6) - \frac{9}{200},$$

або

$$S = \frac{160\,000}{\left(9 - \sin \frac{\pi}{12}(t - 6)\right)^2}.$$

1.4. Однорідні рівняння

Функція $F(x, y)$ називається *однорідною степеня k*, якщо для всіх $\lambda > 0$ виконується рівність $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y)$. Прикладом однорідної функції може бути будь-яка форма (однорідний многочлен) степеня k. Функції

$$\frac{x - y}{x + y},\quad \frac{x^2 + xy}{x - y},\quad x^2 + y^2 - xy,\ x^{k-1} y + y^k,$$

наприклад, є однорідними відповідно степеня 0, 1, 2, k.

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

називається *однорідним*, якщо $f(x, y)$ — однорідна функція степеня нуль.

Диференціальне рівняння першого порядку в симетричній формі

$$A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy = 0$$

є однорідним, якщо $A(x, y)$ і $B(x, y)$ — однорідні функції одного степеня.

Однорідне рівняння можна розглядати в будь-якій однорідній (інваріантній відносно розтягу або стиску) області, наприклад, у куті з вершиною O тощо.

Заміна $y = zx$ приводить однорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідне рівняння можна також звести до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою переходу до полярних координат: $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$.

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

можна звести до однорідного за допомогою лінійної заміни $x = x_0 + t$, $y = y_0 + z$, де x_0, y_0 — координати точки перетину прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Якщо ці прямі не перетинаються, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ і рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $a_1x + b_1y + c_1 = z$.

Функція $g(x, y)$ називається *квазіоднорідною* (з вагами α і β) *степеня* k, якщо при деяких α і β виконується рівність

$$g(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^k g(x, y) \text{ при } \lambda > 0.$$

Диференціальне рівняння (1) називається *квазіоднорідним* (з вагами α і β), якщо функція $f(x, y)$ є квазіоднорідною (з вагами α і β) степеня $\beta - \alpha$, тобто $f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta-\alpha} f(x, y)$.

Заміною $y = z^{\beta/\alpha}$ квазіоднорідне рівняння можна звести до однорідного. На практиці, проте, зручніше відразу користуватися заміною $y = ux^{\beta/\alpha}$, яка зводить квазіоднорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

1.54. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}.$$

Розв'язання. Дане рівняння однорідне. Поклавши $y = zx$, дістанемо

$$x\frac{dz}{dx} + z = z + z^2 e^{-\frac{1}{z}}, \quad \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}\, dz = \frac{dx}{x},$$

$$-e^{\frac{1}{z}} = \ln|x| - C, \quad e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C.$$

1.55. Розв'язати рівняння

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) dx + x\cos\frac{y}{x}\, dy = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Поклавши $y = xz$, дістанемо

$$(x - xz\cos z)\,dx + x\cos z\,(xdz + zdx) = 0,$$

або

$$dx + x\cos z dz = 0, \quad \frac{dx}{x} + \cos z dz = 0,$$

звідки після інтегрування

$$\ln|x| + \sin z = C.$$

Отже,

$$\ln|x| + \sin\frac{y}{x} = C.$$

1.56. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

Р о з в' я з а н н я. Права частина рівняння є однорідною функцією нульового степеня, тому дане рівняння однорідне. Заміна змінної $y = zx$ приводить до рівняння

$$xz' + z = z + \frac{|x|}{x}\sqrt{1 - z^2},$$

або

$$x\frac{dz}{dx} = \operatorname{sign} x\sqrt{1 - z^2}.$$

Очевидно, функції $z = 1$ і $z = -1$ є розв'язками цього рівняння. Інші розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні. Маємо

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\operatorname{sign} x}{x}\,dx, \quad \arcsin z = \operatorname{sign} x \ln|x| + C.$$

Замінивши z на $\frac{y}{x}$, дістанемо:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \operatorname{sign} x \ln|x| + C, \quad y = x, \quad y = -x.$$

1.57. Крива проходить через точку (1; 1). Відстань будь-якої дотичної до цієї кривої від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику. Скласти рівняння кривої.

Р о з в' я з а н н я. Нехай точка $(x; y)$ належить вказаній кривій $y = y(x)$. Дотична до цієї кривої в точці $(x; y)$ лежить від початку координат на відстані

$$\frac{\left|y - x\frac{dy}{dx}\right|}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

яка за умовою дорівнює x. Тому дана крива є інтегральною кривою, рівняння її

$$\frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + y'^2}} = x.$$

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо

$$y^2 - 2xyy' + x^2y'^2 = x^2 + x^2y'^2,$$

тобто $2xyy' = y^2 - x^2$. Це однорідне рівняння. Розв'яжемо його. Покладемо $y = zx$. Тоді

$$2x^2z\left(\frac{dz}{dx}x + z\right) = x^2(z^2 - 1),$$

$$2xz\frac{dz}{dx} + z^2 + 1 = 0, \quad \frac{2z}{z^2 + 1}dz + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\ln(z^2 + 1) + \ln|x| = \ln C, \quad (z^2 + 1)x = C.$$

Оскільки $z = \frac{y}{x}$, то $y^2 + x^2 = Cx$. За умовою крива проходить через точку (1; 1). Тому $1 + 1 = C$, тобто $C = 2$. Отже, рівнянням шуканої кривої є

$$y^2 + x^2 = 2x, \text{ або } (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

1.58. Розв'язати рівняння

$$y' = 2\left(\frac{y + 1}{x + y - 2}\right)^2.$$

Розв'язання. Введемо змінні $y = z - 1$, $x = t + 3$. Відносно нової шуканої функції z дістанемо однорідне рівняння $z' = 2\frac{z^2}{(t + z)^2}$. Нехай $z = tu$. Тоді

$$t\frac{du}{dt} + u = \frac{2u^2}{(1 + u)^2}, \quad t\frac{du}{dt} + \frac{u + u^3}{(1 + u)^2} = 0.$$

Звідси після інтегрування матимемо

$$\ln|u| + 2\operatorname{arctg} u + \ln|t| = \ln C, \quad ut = Ce^{-2\operatorname{arctg} u}.$$

Повертаючись до змінних x і y, дістаємо

$$y + 1 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x-3}},$$

або

$$(y + 1)\exp\left(2\operatorname{arctg}\frac{y + 1}{x - 3}\right) = C.$$

1.59. Проінтегрувати рівняння

$$(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо точку перетину прямих $2x - 4y + 6 = 0$ і $x + y - 3 = 0$. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0; \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

знаходимо, що $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Введемо змінні $x = t + 1$, $y = z + 2$. Дістанемо однорідне рівняння

$$(2t - 4z)\,dt + (t + z)\,dz = 0.$$

Нехай $z = ut$. Тоді

$$2t(1 - 2u)\,dt + t(1 + u)(u\,dt + t\,du) = 0,$$

або

$$(2 - 3u + u^2)\,dt + t(1 + u)\,du = 0.$$

Очевидно, функції $u = 1$, $u = 2$ є розв'язками цього рівняння. Інші розв'язки знайдемо, відокремивши змінні:

$$\frac{dt}{t} + \frac{1 + u}{2 - 3u + u^2}\,du = 0.$$

Оскільки

$$\frac{1 + u}{2 - 3u + u^2} = \frac{3}{u - 2} - \frac{2}{u - 1},$$

то останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dt}{t} + \left(\frac{3}{u - 2} - \frac{2}{u - 1}\right) du = 0.$$

Після інтегрування дістанемо:

$$\ln|t| + \ln\frac{|u - 2|^3}{(u - 1)^2} = \ln C_1,$$

або

$$t\,\frac{(u - 2)^3}{(u - 1)^2} = C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Ураховуючи, що $u = \frac{z}{t} = \frac{y - 2}{x - 1}$, загальний інтеграл запишемо у вигляді

$$(z - 2t)^3 = C(z - t), \ (y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2. \tag{2}$$

Функціям $u = 1$ і $u = 2$ відповідають розв'язки $y = x + 1$ і $y = 2x$ вихідного рівняння. Розв'язок $y = 2x$ дістаємо з (2) при $C = 0$.

1.60. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg}\frac{y - 2x}{x + 1}.$$

Розв'язання. Рівняння стає однорідним, коли $x = t - 1$, $y = z - 2$. Тому заміною $x = t - 1$, $y = ut - 2$ зводимо дане рівняння до рівняння з відокремленими змінними:

$$t\frac{du}{dt} + u = u + \operatorname{tg}\frac{ut - 2 - 2(t-1)}{t}, \quad t\frac{du}{dt} = \operatorname{tg}(u - 2).$$

Функції $u = 2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, є розв'язками цього рівняння. Інші його розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні:

$$\frac{du}{\operatorname{tg}(u-2)} = \frac{dt}{t}, \quad \ln|\sin(u-2)| = \ln|t| + \ln C_1,$$

або $\sin(u - 2) = Ct$, $C \in \mathbf{R}$. Розв'язки $u = 2 + k\pi$ дістаємо з попередньої формули при $C = 0$. Перейшовши до змінних x і y, дістанемо

$$\sin\frac{y - 2x}{x + 1} = C(x + 1).$$

1.61. Довести, що інтегральні криві рівняння

$$[2x(x^2 - axy + y^2) - y^2\sqrt{x^2 + y^2}]\,dx +$$
$$+ y[2(x^2 - axy + y^2) + x\sqrt{x^2 + y^2}]\,dy = 0, \quad |a| < 2,$$

є замкнутими лініями, які охоплюють початок координат.

Розв'язання. Дане рівняння — однорідне. Тому в полярній системі координат воно перетворюється в рівняння з відокремленими змінними.

Введемо змінні: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді

$$\rho^2[2(1 - a\sin\varphi\cos\varphi)\cos\varphi - \sin^2\varphi](\cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi) +$$
$$+ \rho^3[2\sin\varphi(1 - a\sin\varphi\cos\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi](\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi) = 0,$$

або

$$2(1 - a\sin\varphi\cos\varphi)\,d\rho + \rho\sin\varphi d\varphi = 0.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{2 - a\sin 2\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Інтегруючи в межах від 0 до φ, дістаємо:

$$\ln\rho + \int_0^{\varphi}\frac{\sin t}{2 - a\sin t}\,dt = \ln\rho_0, \quad \rho_0 = \rho(0),$$

або

$$\rho = \rho_0 e^{\int_0^{\varphi}\frac{\sin t}{2 - a\sin t}dt}.$$

Доведемо, що $\int\limits_0^{\varphi} \frac{\sin t}{2 - a \sin t}\, dt$ є періодичною по φ функцією з періодом 2π. Тоді, очевидно, функція $\rho = \rho(\varphi)$ при будь-якому $\rho_0 > 0$ буде також 2π-періодичною функцією, а відповідна інтегральна крива $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$ є замкнутою, яка охоплює початок координат.

Маємо:

$$\int\limits_0^{\varphi+2\pi} \frac{\sin t dt}{2 - a \sin 2t} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin t dt}{2 - a \sin 2t} + \int\limits_{2\pi}^{\varphi+2\pi} \frac{\sin t dt}{2 - a \sin 2t} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{2 - a \sin 2t} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t dt}{2 - a \sin 2t} + \int\limits_0^{\varphi} \frac{\sin (2\pi + \theta)\, d\theta}{2 - a \sin 2(2\pi + \theta)} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{2 - a \sin 2t} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{2 - a \sin 2\theta} + \int\limits_0^{\varphi} \frac{\sin \theta d\theta}{2 - a \sin 2\theta} = \int\limits_0^{\varphi} \frac{\sin \theta d\theta}{2 - a \sin 2\theta}.$$

Розглядаючи однорідні рівняння в полярній системі координат, можна виділити досить широкі класи рівнянь, інтегральні криві яких є замкнутими кривими, що охоплюють початок координат.

Нехай рівняння $f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0$ — однорідне і функції $f(x, y)$, $g(x, y)$ визначені на всій площині xOy. Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, тоді

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)(\cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi) +$$
$$+ g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)(\sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi) = 0,$$

або

$$\rho^k [(f(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi + g(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi)\, d\rho +$$
$$+ \rho(-f(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi + g(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi)\, d\varphi] = 0,$$

де k — степінь однорідності функцій $f(x, y)$ і $g(x, y)$.

Скоротивши на ρ^k, запишемо рівняння у вигляді

$$F(\varphi)\, d\rho - \rho G(\varphi)\, d\varphi = 0,$$

де

$$F(\varphi) = f(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi + g(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi,$$
$$G(\varphi) = f(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi - g(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi.$$

Нехай функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ такі, що $F(\varphi) \neq 0$ для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Проінтегрувавши попереднє рівняння, дістанемо

$$\rho(\varphi) = \rho_0 \exp\left(\int_0^{\varphi} \frac{G(t)}{F(t)}\, dt\right).$$

Звідси випливає, що коли $\int_0^{\varphi} \frac{G(t)}{F(t)}\, dt$ — періодична з періодом 2π функція, а це маємо тоді, коли $\int_0^{2\pi} \frac{G(t)}{F(t)}\, dt = 0$, то всі інтегральні криві вихідного рівняння — замкнуті.

1.62. Показати, що рівняння $y' = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}$ є квазіоднорідним. Розв'язати його.

Р о з в' я з а н н я. Нехай x має вагу α, y — вагу β. Щоб дане рівняння було однорідним необхідно, щоб

$$\frac{4\lambda^{6\alpha} x^6 - \lambda^{4\beta} y^4}{2\lambda^{4\alpha+\beta} x^4 y} = \lambda^{\beta-\alpha} \frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y},$$

тобто щоб система рівнянь

$$6\alpha - 4\alpha - \beta = 4\beta - 4\alpha - \beta = \beta - \alpha$$

була сумісною. Розв'язавши цю систему, знайдемо, що будь-яка пара чисел (α, β) така, що $2\beta - 3\alpha = 0$, задовольняє систему. Отже, дане рівняння є квазіоднорідним. До рівняння з відокремленими змінними його можна звести, наприклад, за допомогою заміни $y = ux^{3/2}$. Справді, виконавши таку заміну, дістанемо:

$$\frac{du}{dx} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} u = \frac{4x^6 - u^4 x^6}{2x^4 u x^{3/2}}, \quad x\frac{du}{dx} + \frac{3}{2} u = \frac{4 - u^4}{2u};$$

$$\frac{2u\,du}{(u^2 + u)(u^2 - 1)} + \frac{dx}{x} = 0, \quad u \neq \pm 1;$$

$$\ln \frac{|u^2 - 1|}{u^2 + 4} + 5 \ln |x| = \ln C_1, \quad \frac{u^2 - 1}{u^2 + 4} x^5 = C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Оскільки $y = ux^{3/2}$, то остаточно

$$\frac{y^2 - x^3}{y^2 + 4x^3} x^5 = C.$$

1.63. При яких p і q рівняння

$$\frac{dy}{dx} = ax^p + by^q$$

є квазіоднорідним? Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = -2x^p + y^2$, якщо воно квазіоднорідне.

Розв'язання. Дане рівняння є квазіоднорідним, якщо при деяких α і β виконується рівність

$$a\lambda^{\alpha p}x^p + b\lambda^{\beta q}y^q = \lambda^{\beta-\alpha}(ax^p + by^q).$$

Це можливо, коли $p\alpha = q\beta = \beta - \alpha$, тобто при $p = q(p+1)$, або $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1$. Звідси випливає, що рівняння $y' = -2x^p + y^2$ — квазіоднорідне тільки при $p = -2$. У цьому разі воно має вигляд

$$y' = -\frac{2}{x^2} + y^2.$$

Заміною $y = ux^{\beta/\alpha} = \frac{u}{x}$ перетворюємо його у рівняння з відокремленими змінн ими:

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{u^2}{x^2},$$

$$x\frac{du}{dx} = u^2 + u - 2.$$

Розв'яжемо це рівняння. Функції $u = 1$ і $u = -2$ є розв'язками даного рівняння. Знаходимо інші його розв'язки:

$$\frac{du}{(u-1)(u+2)} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+2}\right| = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln C_1,$$

$$\frac{u-1}{u+2} = C|x|, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Виразивши u через x і y, дістанемо

$$y = \frac{1+2Cx}{x(1-Cx)}, \quad y = -\frac{2}{x}.$$

1.64. Довести, що інтегральні криві рівняння

$$x^2\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} - \sqrt{5x^4 + y^4 + x^2y^2}.$$

перетиняють пряму $y = 2x$ під кутом $45°$.

Розв'язання. Для однорідного рівняння $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ легко знайти тангенс кута, під яким інтегральні криві перетинають промінь $y = kx$. Нехай M — точка перетину деякої інтегральної кривої з прямою $y = kx$ (рис. 16) і β — величина кута між дотичною, проведеною до інтегральної кривої в точці M і віссю абсцис. Тоді кут φ

між дотичною до інтегральної кривої і прямою $y = kx$ дорівнює $\beta - \alpha$. Тому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Оскільки точка $M_0(x_0;\ y_0)$ лежить на прямій $y = kx$, то

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx}\bigg|_M = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = f(k).$$

Отже, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(k) - k}{1 + kf(k)}$. Дане рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2x^2} - \sqrt{5 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Для цього рівняння

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \sqrt{5 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Тому

$$f(k) = \frac{k^2}{2} - \sqrt{5 + k^4 + k^2}.$$

Обчислимо тангенс кута перетину інтегральних кривих вихідного рівняння з прямою $y = 2x$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(k) - k}{1 + kf(k)} = \frac{f(2) - 2}{1 + 2f(2)} = \frac{-3 - 2}{1 + 2(-3)} = 1.$$

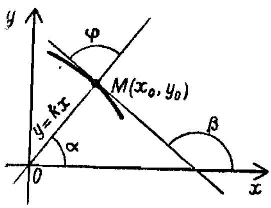


Рис. 16

Отже, $\varphi = 45°$.

1.65. Побудувати наближено інтегральні криві рівняння

$$xy\frac{dy}{dx} + x^2 = 2y^2,$$

не розв'язуючи його.

Р о з в' я з а н н я. У попередній задачі було виведено формулу для визначення тангенса кута між променем $y = kx$ і інтегральною кривою однорідного рівняння $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, яка його перетинає. Цю формулу можна застосувати для наближеної побудови інтегральних кривих однорідного рівняння. Оскільки інтегральні криві однорідного рівняння перетинають промінь $y = kx$ під тим самим кутом, то, досліджуючи знак виразу $\frac{f(k) - k}{1 + kf(k)}$ залежно від k, можна наближено визначити поведінку інтегральних кривих рівняння $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Запишемо дане рівняння у вигляді $y' = 2\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$. Тоді $f\left(\frac{y}{x}\right) = 2\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $f(k) = 2k - \frac{1}{k}$. Тангенс кута перетину інтегральної кривої з променем $y = kx$ визначимо за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(k) - k}{1 + kf(k)} = \frac{k - \frac{1}{k}}{1 + k\left(2k - \frac{1}{k}\right)} = \frac{k^2 - 1}{2k^3}. \qquad (3)$$

Вихідне рівняння не зміниться, якщо в ньому замінити x на $-x$ або y на $-y$. Отже, інтегральні криві розміщені симетрично відносно осей абсцис і ординат. Тому досить побудувати їх в I квадранті координатної площини, тобто дослідити формулу (3) лише для $k > 0$. При цьому $\operatorname{tg}\varphi > 0$, якщо $k > 1$; $\operatorname{tg}\varphi < 0$, якщо $0 < k < 1$; $\operatorname{tg}\varphi \to -\infty$, якщо $k \to 0$. Це означає, що інтегральні криві перетинають вісь абсцис під прямим кутом.

Якщо $k = 1$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Отже, промінь $y = x$, $x > 0$, є інтегральною кривою. Розглянувши ще кілька значень k, можна виконати наближену побудову інтегральних кривих вихідного рівняння (рис. 17).

1.66. Побудувати наближено інтегральні криві рівняння

$$xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{y^3}{x}},$$

не розв'язуючи його.

Р о з в' я з а н н я. Дане рівняння визначене в області $1 + \frac{y}{x} \geqslant 0$. Розглянемо це рівняння при $x > 0$, записавши його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}}.$$

У розглядуваному випадку

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}}, \quad f(k) = k + \sqrt{k^2 + k^3}.$$

Тому інтегральні криві перетинають промінь $y = kx$, $x > 0$, під кутом φ, для якого

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|k|\sqrt{1+k}}{1 + k^2 + k\sqrt{k^2 + k^3}}.$$

З цієї формули випливає, що промені $y = 0$ і $y = -x$, $x > 0$ (при $k = 0$ і $k = -1$) є інтегральними кривими вихідного рівняння. Досліджуючи функцію

$$g(k) = \frac{|k|\sqrt{1+k}}{1 + k^2 + k\sqrt{k^2 + k^3}}$$

на проміжках $(-1;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$, можна побудувати інші інтегральні криві вихідного рівняння (рис. 18).

Нехай $x < 0$. Тоді

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}}, \quad f(k) = k - \sqrt{k^2 + k^3}.$$

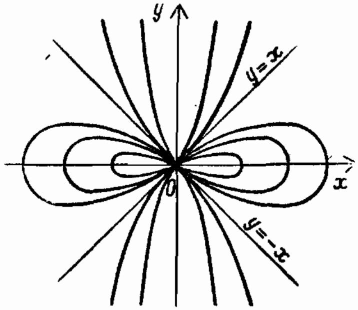


Рис. 17

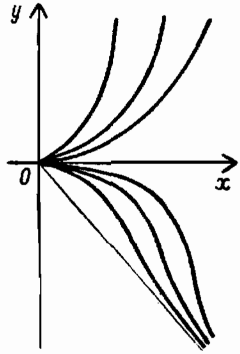


Рис. 18

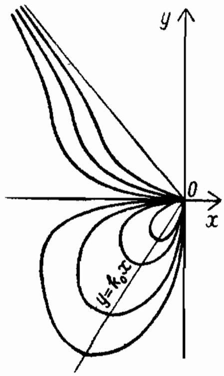


Рис. 19

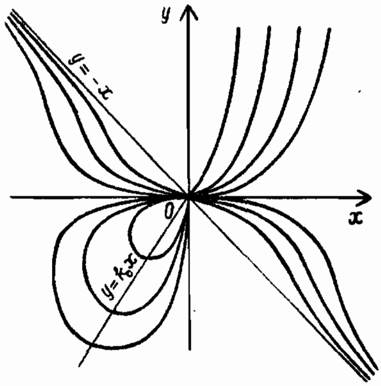


Рис. 20

Інтегральні криві перетинають промінь $y = kx$, $x < 0$, під кутом ψ таким, що

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{-|k|\sqrt{1+k}}{1 + k^2 - k\sqrt{k^2 + k^3}}.$$

Промені $y = 0$ і $y = -x$, $x < 0$, є інтегральними кривими вихідного рівняння. Інші інтегральні криві побудуємо, дослідивши функцію

$$g(k) = \frac{-|k|\sqrt{1+k}}{1 + k^2 - k|k|\sqrt{1+k}}$$

на проміжках $(-1;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$.

Зазначимо, що вираз у знаменнику функції $g(k)$ може перетворюватися в нуль при $k > 0$:

$$1 + k^2 = k^2 \sqrt{1+k}, \quad 1 + 2k^2 + k^4 = k^4 + k^5, \quad k^5 - 2k^2 - 1 = 0.$$

Досліджуючи функцію $z = k^5 - 2k^2 - 1$, наприклад, графічно, дістаємо, що рівняння $k^5 - 2k^2 - 1 = 0$ має лише один додатний корінь $k = k_0$. Отже, інтегральні криві вихідного рівняння перетинають промінь $y = k_0 x$, $x < 0$, під прямим кутом. Обчисливши, якщо треба, значення функції $g(k)$ ще в кількох точках $k \in (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, можемо наближено побудувати інтегральні криві вихідного рівняння при $x < 0$ (рис. 19). Поведінку інтегральних кривих на всій площині показано на рис. 20.

1.5. Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{1}$$

називається *лінійним*. Для розв'язування цього рівняння використовують певні методи. Розглянемо деякі з них.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Нехай маємо однорідне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = 0.$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд $y = Ce^{-\int a(x)dx}$. Розв'язки рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$y = C(x)\,e^{-\int a(x)dx}. \tag{2}$$

Підставивши (2) в (1), для визначення $C(x)$ дістанемо рівняння $C' = b(x)\,e^{\int a(x)dx}$. Звідси

$$C(x) = C + \int b(x)\,e^{\int a(x)dx}\,dx, \tag{3}$$

де C — довільна стала. Підставивши $C(x)$ з (3) в (2), знаходимо всі розв'язки рівняння (1):

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left(C + \int b(x)\,e^{\int a(x)dx}\,dx\right). \tag{4}$$

Будь-який розв'язок $y(x)$ лінійного рівняння (1), який проходить при $x = x_0$ через точку y_0, можна записати у вигляді

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)d}\; y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(\tau)\,e^{\int\limits_{\tau}^{x} a(t)dt}\,d\tau.$$

Метод Бернуллі. Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді $y = u(x)\,v(x)$. Маємо $u'v + uv' + a(x)\,uv = b(x)$, або $uv' + v(u' + a(x)\,u) = b(x)$. Функцію $u(x)$ виберемо з умови $u' + a(x)\,u = 0$. Звідси, наприклад, $u(x) = e^{-\int a(x)dx}$. Тоді для функції $v(x)$ маємо рівняння

$$e^{-\int a(x)dx}\frac{dv}{dx} = b(x),$$

звідки $v(x) = C + \int b(x)\,e^{\int a(x)dx}dx$, де C — довільна стала. Перемноживши $u(x)$ і $v(x)$, дістанемо (4).

Метод інтегрувального множника. Помножимо обидві частини рівняння (1) на $e^{\int a(x)dx}$ і запишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int a(x)dx}\right) = b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Інтегруючи, дістаємо

$$ye^{\int a(x)dx} = C + \int b(x)e^{\int a(x)dx},$$

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left(C + \int b(x)\,e^{\int a(x)dx}\right).$$

Деякі рівняння зводяться до лінійних за допомогою певних замін. Так, рівняння виду

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)\,a(x) = b(x)$$

зводиться до лінійного за допомогою заміни $z = f(y)$. Зокрема, рівняння Бернуллі

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = b(x)\,y^n, \qquad n \neq 0,\ 1,$$

яке можна записати у вигляді

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + a(x)\,y^{1-n} = b(x), \quad y \neq 0,$$

заміною $z = y^{1-n}$ зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язки рівняння Бернуллі зручніше відразу шукати за методом Бернуллі у вигляді $y = uv$.

Рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y + b(x)y^2 = C(x)$$

у загальному випадку не інтегрується в квадратурах. Проте якщо відомий частинний розв'язок $y = y_1(x)$ цього рівняння, то заміною $y = y_1 + z$ зводять рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі відносно функції z.

Деякі рівняння стають лінійними, якщо x вважати функцією, а y — аргументом. Так, нелінійне відносно y рівняння

$$A(y) + (B(y)x - C(y))\frac{dy}{dx} = 0$$

розв'язується аналогічно рівнянню (1), якщо записати його у вигляді

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)x = f(y),$$

де $\varphi(y) = \dfrac{B(y)}{A(y)}$, $f(y) = \dfrac{C(y)}{A(y)}$.

1.67. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4.$$

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо однорідне рівняння $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$. Функція $y \equiv 0$ є розв'язком цього рівняння. Інші його розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні: $\frac{dy}{dx} = 2xdx$. Звідси знаходимо

$$\ln|y| = x^2 + \ln C, \quad C > 0;$$

$$y = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbf{R}, \quad C \neq 0.$$

Розв'язок $y = 0$ можна дістати з останньої формули при $C = 0$, тому всі розв'язки однорідного рівняння визначаються формулою $y = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbf{R}$. Розв'язки вихідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{x^2}$. Підставивши цей вираз у дане рівняння, дістанемо

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{x^2} + 2xe^{x^2}C(x) - 2xC(x)e^{x^2} = 3x^2 - 2x^4,$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4), \quad C(x) = \int e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4)\,dx = x^3e^{-x^2} + C,$$

де $C \in \mathbf{R}$ — довільна стала. Розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$y = (C + x^3e^{-x^2})e^{x^2} = Ce^{x^2} + x^3.$$

1.68. Розв'язати рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо метод Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$. Маємо

$$xu'v + xuv' - 2uv = 2x^4.$$

Функцію v виберемо так, щоб $xv' - 2v = 0$. Наприклад, $v(x) = x^2$. Тоді для функції $u(x)$ дістаємо рівняння $x^3u' = 2x^4$, тобто

$$u(x) = x^2 + C.$$

Отже, всі розв'язки заданого рівняння визначаються формулою

$$y = Cx^2 + x^4.$$

1.69. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = e^{-\sin x}.$$

Розв'язання. Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0, \quad \frac{dy}{y} + \cos x dx = 0, \quad y \neq 0,$$

$$\ln|y| + \sin x = \ln C, \quad y = Ce^{-\sin x}.$$

Розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\sin x}.$$

Маємо

$$\frac{dC}{dx}e^{-\sin x} - \cos xe^{-\sin x}C(x) + C(x)e^{-\sin x}\cos x = e^{-\sin x},$$

$$\frac{dC}{dx} = 1, \quad C(x) = x + C.$$

Отже,

$$y = (x + C)e^{-\sin x}.$$

1.70. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'язання. Помноживши ліву і праву частини даного рівняння на $\frac{1}{\cos x}$, дістанемо

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dy}{dx} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{y}{\cos x} = C + \mathrm{tg}\,x,$$

$$y = C\cos x + \sin x.$$

1.71. Крива $y = y(x)$ проходить через точку $A(a; a)$ і має таку властивість: якщо в будь-якій точці $M(x; y)$ кривої з ординатою $|BM|$ (рис. 21) провести дотичну до перетину з віссю ординат у точці C, то площа трапеції $OCMB$ є сталою і дорівнює a^2. Знайти рівняння цієї кривої.

Розв'язання. Площу трапеції $OCMB$ знайдемо за формулою

$$S = \frac{1}{2}(|OC| + |MB|)|OB|.$$

Оскільки $|OC| = y - xy'$, $|OB| = x$, $|MB| = y$, то маємо диференціальне рівняння

$$\left(2y - x\frac{dy}{dx}\right)x = 2a^2,$$

або

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + 2a^2 = 0.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$x^4\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) + 2a^2 = 0.$$

Інтегруючи, дістаємо

$$y = x^2\left(\frac{2a^2}{3x^3} + C\right).$$

Урахувавши, що $y(a) = a$, знайдемо $a = \frac{2}{3}a + Ca^2$, $C = \frac{1}{3a}$.

Отже, рівняння шуканої кривої має вигляд

$$y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}$$

1.72. Крива $y = y(x)$ проходить через початок координат. Середина відрізка її нормалі, який міститься між будь-якою точкою кривої і віссю абсцис, лежить на параболі $y^2 = ax$. Скласти рівняння цієї кривої.

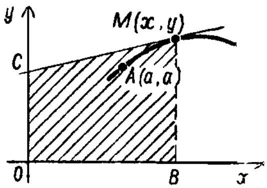


Рис. 21

Р о з в' я з а н н я. Нехай $M(x; y)$ — довільна точка кривої. Точка A перетину нормалі в точці M кривої з віссю абсцис має координати $A(x + yy';\ 0)$, а середина B відрізка AM нормалі — координати $B\left(x + \frac{1}{2}yy';\ \frac{y}{2}\right)$. Точка B лежить на параболі $y^2 = ax$, і її координати задовольняють рівняння параболи:

$$\frac{y^2}{4} = a\left(x + \frac{1}{2}yy'\right), \text{ або } y' - \frac{y}{2a} = -\frac{2x}{y}.$$

Це рівняння Бернуллі. Поклавши $y = u(x)\,v(x)$, дістанемо

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} - \frac{uv}{2a} = -\frac{2x}{uv}.$$

Функцію $v(x)$ виберемо з рівняння $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2a}$, наприклад $v = e^{\frac{x}{2a}}$. Тоді для $u(x)$ маємо рівняння

$$u\frac{du}{dx} = -2xe^{-\frac{x}{a}}.$$

Звідси

$$u^2 = -4\int xe^{-\frac{x}{a}}dx = 4e^{-\frac{x}{a}}(a^2 + ax + Ce^{\frac{x}{a}}),$$

або

$$y^2 = 4(a^2 + ax + Ce^{\frac{x}{a}}).$$

Задана крива проходить через початок координат, тому $0 = 4(a^2 + C)$, $C = -a^2$. Отже, її рівняння має вигляд

$$y^2 = 4ax + 4a^2(1 - e^{\frac{x}{a}}).$$

1.73. Знайти розв'язок рівняння $y' \sin x - y \cos x = -\sin^2 x/x^2$, який прямує до нуля при $x \to \infty$.

Р о з в' я з а н н я. Застосовуємо метод Бернуллі. Нехай

$$y = u(x)v(x).$$

Тоді

$$\frac{du}{dx}v \sin x + u\frac{dv}{dx}\sin x - uv \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Виберемо функцію $u(x)$ з умови

$$\frac{du}{dx}\sin x - u\cos x = 0,$$

наприклад $u = \sin x$. Для функції $v(x)$ дістаємо рівняння $\sin^2 x \times \times v' = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$. Звідси $v(x) = C + \frac{1}{x}$. Отже,

$$y = C\sin x + \frac{\sin x}{x}.$$

Серед цих розв'язків лише один $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$, а саме, $y = \frac{\sin x}{x}$, $C = 0$.

1.74. Знайти обмежений при $x \to \frac{\pi}{2}$ розв'язок рівняння

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x).$$

Р о з в' я з а н н я. Розв'язки даного рівняння шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$. Маємо

$$\frac{du}{dx}v\sin 2x + u\frac{dv}{dx}\sin 2x = 2uv + 2\cos x.$$

Нехай $u(x)$ — розв'язок рівняння $\frac{du}{dx}\sin 2x = 2u$, наприклад $u(x) = \operatorname{tg} x$. Функцію $v(x)$ знайдемо з рівняння $v' \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x =$

$= 2\cos x$. Звідси $v' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Отже, $v = -\frac{1}{\sin x} + C$, $y = C \times \times \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$ Для обмеженого при $x \to \frac{\pi}{2}$ розв'язку y маємо $\lim\limits_{x \to \pi/2} (y \cos x) = 0$. Тому

$$\lim_{x \to \pi/2} (y \cos x) = \lim_{x \to \pi/2} (C \sin x - 1) = C - 1 = 0.$$

Отже, $C = 1$, звідки

$$y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}.$$

1.75. Нехай у рівнянні $y' + a(x)\, y = f(x)$ функції $a(x)$ і $f(x)$ — неперервні. Крім того, $a(x) \geqslant c > 0$, $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Довести, що кожний розв'язок цього рівняння прямує до нуля при $x \to \infty$.

Р о з в' я з а н н я. Помножимо обидві частини даного рівняння на $e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$ і запишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\right) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} f(x).$$

Інтегруючи цю рівність від x_0 до x, дістаємо

$$y(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} - y_0 = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{\tau} a(t)dt} f(\tau)\, d\tau,$$

або

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\tau}^{x} a(t)dt} f(\tau)\, d\tau. \qquad (5)$$

За умовою $a(x) \geqslant c > 0$, тому $e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \leqslant e^{-c(x - x_0)}$ для всіх $x \geqslant x_0$, тобто перший доданок прямує до нуля при $x \to \infty$. Доведемо, що другий доданок також має таку властивість:

$$\left| \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\tau}^{x} a(t)dt} f(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} e^{-c(x-\tau)} |f(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{\frac{x}{2}} e^{-c(x-\tau)} |f(\tau)|\, d\tau + \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} e^{-c(x-\tau)} |f(\tau)|\, d\tau \leqslant e^{-\frac{c}{2}x} \frac{1}{c} \sup_{x_0 \leqslant t \leqslant \frac{x}{2}} |f(t)| +$$

$$+ \sup_{\frac{x}{2} \leqslant t \leqslant x} |f(t)| \frac{1}{c} e^{-c(x-\tau)} \Big|_{\tau=\frac{x}{2}}^{\tau=x} \leqslant e^{-\frac{c}{2}x} \frac{1}{c} \sup_{x_0 \leqslant t \leqslant \frac{x}{2}} |f(t)| +$$

$$+ \frac{1}{c} \sup_{\frac{x}{2} \leqslant t \leqslant x} |f(t)| \to 0$$

при $x \to \infty$, оскільки $\sup\limits_{x_0 \leqslant t \leqslant \frac{x}{2}} |f(t)| \leqslant K < \infty$, а $\sup\limits_{\frac{x}{2} \leqslant t \leqslant x} |f(t)| \to 0$ при $x \to \infty$.

Отже, при будь-якому y_0 обидва доданки в (5) прямують до нуля при $x \to \infty$. Тому кожний розв'язок вихідного рівняння $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

1.76. Сила струму в електричному колі з омічним опором R і коефіцієнтом самоіндукції L задовольняє диференціальне рівняння

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \tag{6}$$

де E — електрорушійна сила. Знайти залежність сили струму $i(t)$ від часу, якщо E змінюється за синусоїдним законом: $E = E_0 \sin \omega t$ і $i(0) = 0$.

Розв'язання. З рівняння (6) маємо

$$\frac{di}{dt} + \alpha i = \frac{E_0}{L} \sin \omega t, \tag{7}$$

де $\alpha = \frac{R}{L}$. Розв'язок рівняння (7) шукаємо у вигляді $i(t) = u(t)\, v(t)$. Підставивши в (7), дістанемо

$$\frac{du}{dt} v + u \frac{dv}{dt} + \alpha uv = \frac{E_0}{L} \sin \omega t. \tag{8}$$

Нехай $u(t)$ — один з розв'язків рівняння $\frac{du}{dt} + \alpha u = 0$, наприклад, $u = e^{-\alpha t}$. Тоді з (8) знаходимо $\frac{dv}{dt} = \frac{E_0}{L} e^{\alpha t} \sin \omega t$. Звідси

$$v(t) = \frac{E_0}{L} \int e^{\alpha t} \sin \omega t dt. \tag{9}$$

Інтеграл $I = \int e^{\alpha t} \sin \omega t dt$ обчислимо методом інтегрування частинами:

$$I = -e^{\alpha t} \frac{1}{\omega} \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \int e^{\alpha t} \cos \omega t dt = -e^{\alpha t} \frac{1}{\omega} \cos \omega t +$$

$$+ \frac{\alpha}{\omega^2} e^{\alpha t} \sin \omega t - \frac{\alpha^2}{\omega^2} \int e^{\alpha t} \sin \omega t dt =$$

$$= -\frac{1}{\omega} e^{\alpha t} \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega^2} e^{\alpha t} \sin \omega t - \frac{\alpha^2}{\omega^2} I.$$

Звідси $I = \frac{e^{\alpha t}(-\cos \omega t \cdot \omega + \alpha \sin \omega t)}{\omega^2 + \alpha^2}$. Підставивши в (9), дістанемо

$$v(t) = \frac{E_0}{L} \left(\frac{e^{\alpha t}(-\omega \cos \omega t + \alpha \sin \omega t)}{\omega^2 + \alpha^2} + C \right),$$

де C — довільна стала.

Перемноживши функції $u(t)$ і $v(t)$, дістанемо закон зміни сили струму:

$$i(t) = \frac{E_0}{L} \left(\frac{-\omega \cos \omega t + \alpha \sin \omega t}{\omega^2 + \alpha^2} + Ce^{-\alpha t} \right).$$

З початкової умови $i(0) = 0$ маємо: $0 = \frac{E_0}{L} \left(\frac{-\omega}{\omega^2 + \alpha^2} + C \right)$ звідси $C = \frac{\omega}{\omega^2 + \alpha^2}$. Отж,

$$i(t) = \frac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} (-\omega \cos \omega t + \alpha \sin \omega t + \omega e^{-\alpha t}).$$

При великих значеннях t величина $e^{-\alpha t}$ стає як завгодно малою ($\alpha > 0$). Тому $i(t)$ при $t \to \infty$ наближається до стаціонарного режиму:

$$i(t) = \frac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} (-\omega \cos \omega t + \alpha \sin \omega t) =$$

$$= \frac{E_0}{L\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{E_0}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

де $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}$ — початкова фаза струму.

1.77. Знайти періодичний з періодом 2π розв'язок рівняння $y' = 2y \sin^2 x + \cos x$.

Розв'язання. Відокремивши змінні в рівнянні $\frac{dy}{dx} = 2y \times \sin^2 x$, дістанемо $y = Ce^{x - \frac{1}{2} \sin 2x}$. Розв'язки заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x) e^{x - \frac{1}{2} \sin 2x}$.

Для визначення $C(x)$ дістаємо рівняння $\frac{dC}{dx}e^{x-\frac{1}{2}\sin 2x} = \cos x$, звідки

$$C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}\cos t dt.$$

Отже,

$$y = e^{x-\frac{1}{2}\sin 2x}\left(C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2x}\cos t dt\right). \qquad (10)$$

Якщо існує періодичний розв'язок заданого рівняння, то він є обмеженим. Запишемо рівність (10) у вигляді

$$e^{-x+\frac{1}{2}\sin 2x}y = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}\cos t dt$$

і перейдемо до границі при $x \to \infty$. Для обмеженого розв'язку значення $C(x_0)$ визначається з рівняння

$$C(x_0) + \int_{x_0}^{\infty} e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}\cos t dt = 0,$$

тобто

$$C(x_0) = -\int_{x_0}^{\infty} e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}\cos t dt.$$

(Доведіть, що інтеграл у правій частині останньої рівності абсолютно збігається для будь-якого $x_0 \in \mathbf{R}$.)

Підставляючи значення $C(x_0)$ в (10), знайдемо обмежений розв'язок заданого рівняння:

$$y^*(x) = -\int_{x}^{\infty} e^{x-t-\frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2t)}\cos t dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\tau - \sin\tau\cos(2x-\tau)}\cos(x-\tau)\,d\tau.$$

Як бачимо, розв'язок $y^*(x)$ є періодичним з періодом 2π.

1.78. Довести, що рівняння $y' + ay = f(x)$, де $a > 0$, $f(x)$ — обмежена при всіх $x \in \mathbf{R}$ функція, має лише один розв'язок, обмежений при всіх $x \in \mathbf{R}$. Знайти цей розв'язок. Показати, що коли $f(x)$ є періодична функція, то знайдений розв'язок є періодичним з тим самим періодом.

Р о з в' я з а н н я. З рівняння

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \tag{11}$$

знаходимо

$$\frac{dy}{y} + adx = 0, \quad y \neq 0,$$

$$\ln|y| + ax = \ln C, \quad y = Ce^{-ax}.$$

Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x)\, e^{-ax}.$$

Підставивши цей вираз у задане рівняння, дістанемо

$$e^{-ax}\frac{dC}{dx} = f(x), \quad \frac{dC}{dx} = e^{ax}f(x).$$

Інтегруємо останню рівність в межах від x_0 до x:

$$C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{at}f(t)\,dt.$$

Отже, $y = C(x_0)\,e^{-ax} + \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-t)}f(t)\,dt$. Звідси маємо, що для розв'язку $y(x)$ такого, що $y(x_0) = y_0$, значення $C(x_0)$ слід визначити з рівняння

$$y_0 = C(x_0)\,e^{-ax_0},$$

тобто

$$C(x_0) = e^{ax_0}y_0.$$

Розв'язок запишемо у вигляді

$$y = e^{-(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-t)}f(t)\,dt. \tag{12}$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $e^{a(x-x_0)}$. Нехай $x \to -\infty$. Для обмеженого розв'язку (якщо він існує) $e^{a(x-x_0)}\,y(x) \to 0$ при $x \to -\infty$. Отже,

$$0 = y_0 + \int_{x_0}^{-\infty} e^{a(t-x_0)}f(t)\,dt, \tag{13}$$

тобто $y_0 = \int_{-\infty}^{x_0} e^{a(t-x_0)}f(t)\,dt$, а обмежений розв'язок

$$y^*(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-t)}f(t)\,dt.$$

Доведемо, що $y^*(x)$ справді є єдиним обмеженим при всіх $x \in \mathbf{R}$ розв'язком заданого рівняння.

Нехай $|f(x)| \leqslant K < \infty$ при всіх $x \in \mathbf{R}$. Тоді

$$|y^*(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-t)} |f(t)| \, dt \leqslant \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-t)} K \, dt = \frac{K}{a}$$

при всіх $x \in \mathbf{R}$.

Цим самим доведена абсолютна збіжність інтеграла з рівняння (13). Тому $y^*(x)$ справді є обмеженим на всій осі розв'язком вихідного рівняння. Єдиність такого розв'язку випливає з того, що рівняння (13) має єдиний розв'язок відносно y_0.

Довести єдиність цього розв'язку можна й інакше, припустивши, наприклад, що крім $y^*(x)$ задане рівняння має обмежений на всій осі ще один розв'язок $y^\circ(x)$. Тоді різниця $y^*(x) - y^\circ(x) = z$ обмежена при всіх $x \in \mathbf{R}$, і оскільки

$$\frac{dy^*}{dx} + ay^* = f(x) \quad \text{і} \quad \frac{dy^\circ}{dx} + ay^\circ = f(x),$$

то, віднявши від першого рівняння друге, дістанемо

$$\frac{dz}{dx} + az = 0, \quad z(x) = y^*(x) - y^\circ(x) = Ce^{ax}.$$

Оскільки $z(x)$ — обмежена функція при всіх $x \in \mathbf{R}$, то остання рівність можлива лише при $C = 0$. Отже, $y^* = y^\circ$.

Доведемо, що коли $f(x)$ — періодична функція, то й $y^*(x)$ також періодична з тим самим періодом T.

Нехай $f(x + T) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbf{R}$, де T — період функції $f(x)$. Тоді

$$y^*(x + T) = \int_{-\infty}^{x+T} e^{-a(x+T-\tau)} f(\tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-t)} f(t + T) \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-t)} f(t) \, dt = y^*(x).$$

1.79. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_0^x (x - t) y(t) \, dt = 2x + \int_0^x y(t) \, dt.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$(x - 1) \int_0^x y(t) \, dt = 2x + \int_0^x t y(t) \, dt.$$

Продиференціювавши обидві частини цього рівняння по x, дістанемо

$$\int_0^x y(t)\,dt + (x-1)\,y(x) = 2 + xy(x),$$

або

$$\int_0^x y(t)\,dt = 2 + y(x). \qquad (14)$$

Якщо $\int_0^x y(t)\,dt$ позначити через z, то рівняння (14) можна записати у вигляді $z = 2 + z'$.

Розв'язавши його, дістанемо $z = 2 + Ce^x$. Отже, $y = Ce^x$. Оскільки рівняння (14) є наслідком диференціювання обох частин заданого рівняння, то не всі розв'язки рівняння (14) можуть бути розв'язками інтегрального рівняння. Підставимо $y = Ce^x$ у це рівняння:

$$(x-1)\int_0^x Ce^t dt = 2x + \int_0^x Cte^t dt,$$

$$(x-1)\,C\,(e^x - 1) = 2x + Cte^t\Big|_0^x - C\int_0^x e^t dt,$$

$$(x-1)\,C\,(e^x-1) = 2x + Cxe^x - C\,(e^x - 1),$$

$$-Cx = 2x.$$

Задане рівняння задовольняє функція $y = Ce^x$ тільки при $C = -2$. Отже,

$$y = -2e^x.$$

1.80. Розв'язати рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.

Р о з в' я з а н н я. Це рівняння Бернуллі. Його можна розв'язати за допомогою заміни $z = \frac{1}{y}$, яка приводить дане рівняння до лінійного. Проте зручніше застосувати метод Бернуллі, за яким $y = u(x)\,v(x)$. Маємо

$$xu\frac{dv}{dx} + xv\frac{du}{dx} + uv = u^2v^2 \ln x.$$

Функцію $u(x)$ знайдемо з умови $x\frac{du}{dx} + u = 0$. Наприклад, $u = \frac{1}{x}$. Тоді $x^2v' = v^2 \ln x$. Звідси, відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо:

$$-\frac{1}{v}=\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-C,$$

$$v(x)=\frac{x}{1+Cx+\ln x}.$$

Отже,

$$y=\frac{1}{1+Cx+\ln x}.$$

Крім цих розв'язків, рівняння має ще розв'язок $y=0$.

1.81. Розв'язати рівняння

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}-2xy=4\sqrt{y(1+x^2)}\operatorname{arctg}x.$$

Р о з в' я з а н н я. Це рівняння Бернуллі. Його розв'язок знайдемо у вигляді

$$y=u(x)\,v(x).$$

Підставивши цей добуток у задане рівняння, дістанемо

$$(1+x^2)\left(\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\right)-2xuv=4\sqrt{uv(1+x^2)}\operatorname{arctg}x,$$

$$(1+x^2)\frac{du}{dx}v+(1+x^2)\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{1+x^2}v\right)u=4\sqrt{uv(1+x^2)}\operatorname{arctg}x.$$

Функцію v виберемо з умови

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{1+x^2}v=0,$$

наприклад, $v(x)=1+x^2$. Тоді для $u(x)$ маємо рівняння

$$(1+x^2)\frac{du}{dx}v=4\sqrt{uv(1+x^2)}\operatorname{arctg}x,$$

або

$$(1+x^2)^2\frac{du}{dx}=4(1+x^2)\sqrt{u}\operatorname{arctg}x.$$

Один з розв'язків цього рівняння очевидний: $u=0$. Інші розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні:

$$\frac{du}{dx}=\frac{4\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\sqrt{u},\quad \frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx,$$

$$\sqrt{u}=\operatorname{arctg}^2x+C,\quad u=(\operatorname{arctg}^2x+C)^2.$$

Розв'язками заданого рівняння є функції

$$y=0\ \text{ і }\ y=(1+x^2)(\operatorname{arctg}^2x+C)^2.$$

1.82. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} x^3 \sin y + 2y = x \frac{dy}{dx}.$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо рівняння у вигляді

$$2y \frac{dx}{dy} - x = - x^3 \sin y.$$

Це рівняння Бернуллі відносно функції $x = x(y)$. Виконавши заміну $z = \frac{1}{x^2}$, дістанемо лінійне рівняння

$$y \frac{dz}{dy} + z = \sin y.$$

Розв'язки цього рівняння шукаємо у вигляді $z = u(y) v(y)$. Маємо

$$yu'v + yuv' + uv = \sin y.$$

Виберемо $u(y)$ з умови $yu' + u = 0$, наприклад $u = \frac{1}{y}$. Тоді для функції $v(y)$ дістанемо рівняння

$$v' = \sin y,$$

звідки

$$v(y) = -\cos y + C.$$

Отже,

$$z = \frac{1}{y}(C - \cos y), \text{ або } y = (C - \cos y) x^2.$$

Зазначимо, що функція $y \equiv 0$ також є розв'язком заданого рівняння.

1.83. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x y^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Відмінні від нуля розв'язки цього рівняння Бернуллі можна знайти за допомогою заміни $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$. Маємо

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} - 2z = e^{-x}.$$

Це лінійне рівняння. Помноживши обидві частини цього рівняння на e^{-2x}, дістанемо

$$\frac{d}{dx}(ze^{-2x}) = -e^{-x}, \text{ або } ze^{-2x} = e^{-x} + C.$$

Врахувавши заміну, остаточно знайдемо

$$y(e^x + Ce^{2x}) = 1.$$

Крім цих розв'язків, очевидно, дане рівняння має розв'язок $y \equiv 0$.

1.84. Довести, що рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + p(x)\,y + q(x),$$

де $p(x)$ і $q(x)$ — періодичні з періодом T функції, не може мати більше двох різних періодичних з періодом T розв'язків.

Р о з в' я з а н н я. Доведемо, що коли два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ даного рівняння в деякій точці x_0 збігаються, то вони збігаються для всіх x із спільного інтервалу визначення. Справді,

$$\frac{dy_1}{dx}\; y_1^2 + p(x)\,y_1 + q(x), \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2^2 + p(x)\,y_2 + q(x).$$

Звідси

$$\frac{d}{dx}(y_1 - y_2) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + p(x)(y_1 - y_2),$$

або

$$y_1(x) - y_2(x) = (y_1(x_0) - y_2(x_0))\, e^{\int_{x_0}^{x}(y_1(\tau)+y_2(\tau)+p(\tau))d\tau}.$$

Якщо при деякому x_0 $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, то $y_1(x) = y_2(x)$ для всіх x із спільного інтервалу визначення.

Припустимо, що, всупереч твердженню, рівняння має три періодичні з періодом T розв'язки: $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$. Внаслідок доведеної вище властивості розв'язків вважаємо, що при всіх $x \in \mathbf{R}$ виконуються нерівності

$$y_1(x) < y_2(x) < y_3(x).$$

З тотожностей

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + p(x)\,y_1 + q(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2^2 + p(x)\,y_2 + q(x),$$

$$\frac{dy_3}{dx} = y_3^2 + p(x)\,y_3 + q(x),$$

віднявши почленно першу й другу від третьої, дістанемо

$$\frac{d}{dx}(y_3 - y_1) = (y_3 - y_1)(y_3 + y_1 + p(x)),$$

$$\frac{d}{dx}(y_3 - y_2) = (y_3 - y_2)(y_3 + y_2 + p(x)).$$

Згідно з припущенням, $y_3 > y_2$ і $y_3 > y_1$. Тому з двох попередніх рівностей маємо

$$\frac{\frac{d}{dx}(y_3 - y_1)}{y_3 - y_1} - \frac{\frac{d}{dx}(y_3 - y_2)}{y_3 - y_2} = y_1 - y_2.$$

Проінтегрувавши цю тотожність по x на проміжку $0 \leqslant x \leqslant T$, дістанемо

$$(\ln|y_3(x) - y_1(x)| - \ln|y_3(x) - y_2(x)|)\big|_0^T =$$
$$= \int_0^T (y_1(x) - y_2(x))\,dx.$$

Ліва частина цієї тотожності дорівнює нулю внаслідок T-періодичності функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ і $y_3(x)$, а права частина — від'ємна, бо за припущенням $y_1 < y_2$ при всіх x. Зайшли у суперечність. Отже, задане рівняння не може мати більше двох періодичних з періодом T розв'язків.

1.85. Довести, що коли рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x),$$

де $f(x)$ — періодична з періодом T функція, має два різні T-періодичні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$, то

$$\int_0^T (y_1(x) + y_2(x))\,dx = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — розв'язки даного рівняння, то

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + f(x), \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2^2 + f(x)$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$. Віднімаючи почленно ці рівності, маємо

$$\frac{d}{dx}(y_1 - y_2) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2).$$

Звідси

$$y_1(x) - y_2(x) = e^{\int_0^x (y_1(t) + y_2(t))dt}(y_1(0) - y_2(0)).$$

При $x = T$

$$y_1(T) - y_2(T) = e^{\int_0^T (y_1(t) + y_2(t))dt}(y_1(0) - y_2(0)).$$

Звідси, внаслідок T-періодичності функцій y_1 і y_2,

$$1 = e^{\int_0^T (y_1(t)+y_2(t))dt},$$

тобто $\int_0^T (y_1(t) + y_2(t))\, dt = 0$.

1.86. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} + ay(y - x) = 1.$$

Р о з в' я з а н н я. Це рівняння Ріккаті. Неважко бачити, що $y = x$ є розв'язком рівняння. Тому заміна $y = x + z$ приводить дане рівняння до рівняння Бернуллі:

$$\frac{dz}{dx} + az(x + z) = 0.$$

Поклавши $z = uv$, дістанемо

$$\frac{du}{dx} v + u\frac{dv}{dx} + auv(x + uv) = 0.$$

Виберемо $u(x)$ з умови $\frac{dy}{dx} + axu = 0$. Наприклад, $u = e^{-\frac{ax^2}{2}}$. Тоді для $v(x)$ маємо рівняння

$$e^{-\frac{ax^2}{2}} \frac{dv}{dx} + ae^{-ax^2}v^2 = 0.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dv}{v^2} + ae^{-\frac{ax^2}{2}} dx = 0,$$

$$-\frac{1}{v} + a\int e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = -C, \quad v = \frac{1}{C + a\int e^{-\frac{ax^2}{2}} dx}.$$

Тому

$$y = x + \frac{e^{-\frac{ax^2}{2}}}{C + a\int e^{-\frac{ax^2}{2}} dx} \quad \text{і} \quad y = x.$$

1.87. Розв'язати рівняння $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$.

Р о з в' я з а н н я. Це рівняння Ріккаті. Іноді частинний розв'язок цього рівняння можна підібрати, враховуючи вигляд вільного члена рівняння ($c(x)$). Шукатимемо частинний розв'язок у вигляді $y_1 = \frac{k}{x}$. Підставивши $y_1(x)$ в рівняння

$$-\frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2} = \frac{2}{x^2},$$

бачимо, що функція y_1 є розв'язком цього рівняння при $k = -1$ і $k = 2$. Отже, дістали два розв'язки: $y = -\frac{1}{x}$ і $y = \frac{2}{x}$. Заміною $y = z - \frac{1}{x}$ зводимо задане рівняння до рівняння Бернуллі:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x^2} + z^2 - \frac{2z}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}, \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = -z^2.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на x^2, дістанемо $x\frac{d}{dx}(zx) = 3zx - (zx)^2$, або $x\frac{du}{dx} = u(3 - u)$, для $u = zx$. Звідси $u = c(u - 3)x^2$, $u = 3$, або $z = c(zx - 3)x^2$, $z = \frac{3}{x}$. Остаточно $y = z - \frac{1}{x} = \frac{2cx^3 + 1}{(cx^3 - 1)x}$ і $y = \frac{2}{x}$.

1.6. Рівняння в повних диференціалах

Рівняння

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$dU(x, y) \equiv \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

Щоб рівняння (1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно й достатньо, щоб

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{2}$$

Усі розв'язки рівняння в повних диференціалах задовольняють умову $U(x, y) = C$, де C — довільна стала.

Щоб знайти функцію $U(x, y)$, скористаємось рівностями

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \tag{3}$$

Інтегруючи першу з цих рівностей по x, визначимо функцію $U(x, y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$U(x, y) = \int M(x, y)\,dx = \Phi(x, y) + \varphi(y). \tag{4}$$

Диференціюючи (4) по y з урахуванням другої рівності з (3), дістанемо рівняння для визначення функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = N(x, y).$$

Інтегрувальним множником для рівняння

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{5}$$

називається така функція $m(x, y)$, після множення на яку рівняння (5) перетворюється в рівняння у повних диференціалах.

Якщо $m(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (5), то рівняння

$$m(x, y)\,M(x, y)\,dx + m(x, y)\,N(x, y)\,dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах і тому

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x, y)\,M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(m(x, y)\,N(x, y)),$$

тобто інтегрувальний множник $m(x, y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$m(x, y)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial m}{\partial x} - M\frac{\partial m}{\partial y}. \tag{6}$$

У деяких випадках рівняння (6) спрощується й інтегрувальний множник для рівняння (5) легко знайти. Розглянемо кілька таких випадків.

1. Якщо рівняння (5) має інтегрувальний множник, що залежить лише від x, тобто $m(x, y) = m(x)$, то з (6) маємо

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

2. Якщо рівняння (5) має інтегрувальний множник, що залежить лише від y, тобто $m(x, y) = m(y)$, то

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dy} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}.$$

3. Якщо рівняння (5) має інтегрувальний множник, що залежить від деякої відомої функції $\omega(x, y)$, тобто $m(x, y) = m(\omega(x, y))$, то

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{d\omega} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}, \tag{7}$$

Нехай $m_0(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (5) і $U_0(x, y) = C$ — інтеграл цього рівняння, який йому відповідає. Тоді всі інтегрувальні множники рівняння (5) виражаються формулою $m(x, y) = m_0(x, y)\,\varphi(U_0(x, y))$, де $\varphi(z)$ — довільна неперервно диференційовна функція. Використовуючи це твердження, інтегрувальний множник іноді можна знайти так. Запишемо рівняння (5) у вигляді

$$M_1(x, y)\,dx + N_1(x, y)\,dy + M_2(x, y)\,dx + N_2(x, y)\,dy = 0$$

і припустимо, що знайдено інтегральні множники $m_1(x, y)$ і $m_2(x, y)$ та інтеграли $U_1(x, y) = C$, $U_2(x, y) = C$ відповідно рівнянь

$$M_1(x, y)\,dx + N_1(x, y)\,dy = 0 \quad \text{і} \quad M_2(x, y)\,dx + N_2(x, y)\,dy = 0.$$

Тоді всі інтегрувальні множники першого з цих рівнянь мають вигляд $m(x, y) = m_1(x, y)\,\varphi_1(U_1(x, y))$, а другого — $m(x, y) = m_2(x, y)\,\varphi_2(U_2(x, y))$, де $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ — довільні диференційовні функції. Якщо функції $\varphi_1^*(z)$ і $\varphi_2^*(z)$ можна підібрати так, щоб

$$m_1(x, y)\,\varphi_1^*(U_1(x, y)) = m_2(x, y)\,\varphi_2^*(U_2(x, y)),$$

то

$$m(x, y) = m_1(x, y)\,\varphi_1^*(U_1(x, y))$$

— інтегрувальний множник рівняння (5).

1.88. Розв'язати рівняння

$$(2xy + 3y^2)\,dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)\,dy = 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$M(x, y) = 2xy + 3y^2, \quad N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Отже, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, тобто ліва частина даного рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

З першого рівняння знаходимо

$$U(x, y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y).$$

Останню рівність диференціюємо по y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

тобто $\dfrac{d\varphi}{dy} = -3y^2$. Звідси

$$\varphi(y) = -y^3 + C_1.$$

Тому

$$U(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + C_1.$$

Остаточно

$$x^2y + 3xy^2 - y^3 = C.$$

1.89. Розв'язати рівняння

$$(3y^2 + 2xy + 2x)\,dx + (6xy + x^2 + 3)\,dy = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y}(3y^2+2xy+2x)=6y+2x=\frac{\partial}{\partial x}(6xy+x^2+3),$$

то дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Функцію $U(x, y)$ знайдемо з рівнянь

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3y^2+2xy+2x,\ \frac{\partial U}{\partial y}=6xy+x^2+3. \tag{8}$$

Інтегруючи, наприклад, друге з цих рівнянь по y (вважаючи x сталою), маємо

$$U(x, y)=\int(6xy+x^2+3)\,dy=3xy^2+x^2y+3y+\varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ — довільна диференційовна функція. Згідно з першим рівнянням (8),

$$\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2+x^2y+3y+\varphi(x))=3y^2+2xy+2x.$$

Отже,

$$3y^2+2xy+\frac{d\varphi}{\partial x}=3y^2+2xy+2x,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=2x,\ \varphi(x)=x^2+\text{const},$$

$$U(x, y)=3xy^2+yx^2+3y+x^2,$$

$$3xy^2+yx^2+3y+x^2=C.$$

1.90. Розв'язати рівняння

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})\,dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x(1+\sqrt{x^2-y}))=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}=\frac{\partial}{\partial x}(-\sqrt{x^2-y}),$$

то дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Функцію $U(x, y)$ знаходимо з рівнянь:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2x(1+\sqrt{x^2-y}),\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}. \tag{9}$$

Інтегруємо по x перше з цих рівнянь (вважаючи y сталою):

$$U(x, y)=\int(2x+\sqrt{x^2-y}\cdot 2x)\,dx=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\varphi(y).$$

Підставивши $U(x, y)$ у друге з рівнянь (9), дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + \varphi(y)\right) = -\sqrt{x^2 - y},$$

$$-\sqrt{x^2 - y} + \frac{d\varphi}{dy} = -\sqrt{x^2 - y}, \ \varphi(y) = \text{const}.$$

Отже, $U(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}}$ і розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C, \text{або } y = x^2 - \left[\frac{3}{2}(C - x^2)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

1.91. Розв'язати рівняння

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x-y)^3},$$

тобто ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$. З рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}$$

знаходимо

$$U(x, y) = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \varphi(y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y).$$

Ураховуємо, що $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}$:

$$\frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi}{dy} = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1 - \frac{1}{y}, \quad \varphi(y) = y - \ln y + C_1.$$

Тому

$$U(x, y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln y + C_1.$$

Усі розв'язки заданого рівняння виражаються формулою

$$\ln\frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = C.$$

1.92. Розв'язати рівняння

$$(y^2+x^2+a)\,y\frac{dy}{dx}+(y^2+x^2-a)\,x=0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$(y^2+x^2-a)\,xdx+(y^2+x^2+a)\,y\,dy=0.$$

Це рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\,(y^2+x^2-a))=2xy=\frac{\partial}{\partial x}(y\,(y^2+x^2+a)).$$

Проінтегруємо рівняння:

$$(x^2+y^2)(xdx+ydy)-a\,(xdx-ydy)=0,$$
$$(x^2+y^2)\,d\,(x^2+y^2)-ad\,(x^2-y^2)=0,$$
$$(x^2+y^2)^2-2a\,(x^2-y^2)=C.$$

Дістали сім'ю овалів Кассіні. Рівняння їх у полярній системі координат таке:

$$\rho^4=2a\rho^2\cos 2\varphi+C.$$

1.93. Розв'язати рівняння

$$(x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x)\frac{dy}{dx}+y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y=0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y)\,dx+(x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x)\,dy=0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y}(y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y)=\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=\frac{\partial}{\partial x}(x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x),$$

то дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах і

$$\frac{\partial U}{\partial x}=y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x.$$

Звідси

$$U(x,\ y)=\int(y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y)\,dx=y\operatorname{sh}x+x\operatorname{sh}y+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y\operatorname{sh}x+x\operatorname{sh}y+\varphi(y))=x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x,$$

$$\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}y+\frac{d\varphi}{dy}=x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x,\quad \frac{d\varphi}{dy}=0,$$

$$\varphi(y)=\mathrm{const}.$$

Отже, $U(x,\ y)\equiv y\operatorname{sh}x+x\operatorname{sh}y=C.$

1.94. Знайти форму дзеркала, коли відомо, що воно відбиває всі промені, які виходять з даної точки, паралельно даному напрямку.

Розв'язання. Нехай точкове джерело світла є початком координат, а вісь Ox паралельна даному напрямку (рис. 22). Нехай $M(x; y)$ — довільна точка дзеркала. Розглянемо переріз дзеркала площиною xOy, яка проходить через вісь Ox і точку $M(x; y)$. Проведемо дотичну MN у точці $M(x; y)$ до перерізу дзеркала площиною xOy. За законом відбивання променя (кут падіння дорівнює куту відбивання) трикутник NOM — рівнобедрений: $|NO| = |OM|$. Тому

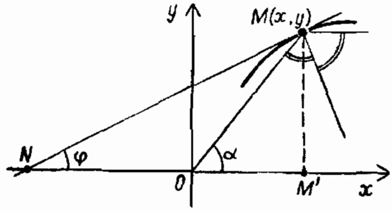


Рис. 22

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|MM'|}{|NO| + |OM'|} = \frac{|MM'|}{\sqrt{|OM'|^2 + |MM'|^2} + |OM'|}.$$

Ураховуючи, що $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$, $|MM'| = y$, $|OM'| = x$, дістаємо диференціальне рівняння, яке описує форму перерізу дзеркала площиною xOy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Це однорідне рівняння, його можна розв'язати за допомогою заміни $y = zx$. Проте простіше розв'язати його так. Позбавимося ірраціональності в знаменнику:

$$dy = \frac{y\,(x - \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 - (x^2 + y^2)}\,dx, \quad x\,dx + y\,dy = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$$

Рівняння має інтегрувальний множник $m(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, тому

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - dx = 0, \quad \frac{d\,(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - dx = 0,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C, \quad y^2 = 2Cx + C^2.$$

Отже, перерізом дзеркала є парабола, а поверхнею дзеркала є параболоїд обертання.

1.95. Розв'язати рівняння

$$x\frac{dy}{dx} = (3x^2 \cos y - \sin y)\cos y,$$

коли відомо, що воно має інтегрувальний множник як функцію однієї змінної x або y.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y \, dx - x dy = 0 \tag{10}$$

і знайдемо різницю

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2 \cdot 2 \cos y \sin y - \cos 2y + 1 =$$

$$= -2(3x^2 \cos y - \sin y) \sin y.$$

Якщо цей вираз розділити на $-M(x, y)$, то частка буде функцією лише від y. Отже, інтегрувальний множник є функцією від y. Знайдемо його з рівняння

$$\frac{1}{m(y)} \frac{dm}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = 2 \operatorname{tg} y, \quad \frac{dm}{m} = 2 \operatorname{tg} y \, dy,$$

$$\ln |m| = -2 \ln |\cos y| + \ln C.$$

Виберемо $m(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$. Помноживши рівняння (10) на $\frac{1}{\cos^2 y}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах:

$$(3x^2 - \operatorname{tg} y) \, dx - \frac{x}{\cos^2 y} \, dy = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - \operatorname{tg} y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{\cos^2 y},$$

$$U(x, y) = \int (3x^2 - \operatorname{tg} y) \, dx = x^3 - x \operatorname{tg} y + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - x \operatorname{tg} y + \varphi(y)) = -\frac{x}{\cos^2 y},$$

$$-\frac{x}{\cos^2 y} + \varphi'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y},$$

$$\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = \text{const}.$$

Отже, $U(x, y) = x^3 - x \operatorname{tg} y$, $x^3 - x \operatorname{tg} y = C$. Зазначимо, що при діленні на $\cos^2 y$ були втрачені розв'язки заданого рівняння $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.96. Розв'язати рівняння

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right) dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. З'ясуємо, чи має дане рівняння інтегрувальний множник як функцію однієї змінної. Обчислимо

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2} = -\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right).$$

Отже, функція $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ залежить лише від x, тому інтегрувальний множник можна знайти з рівняння $\frac{1}{m}\frac{dm}{dx} = -\frac{1}{x}$, $\frac{dm}{m} + \frac{dx}{x} = 0$, тобто $m = \frac{1}{x}$.

Помноживши задане рівняння на $\frac{1}{x}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах: $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$. Записавши його у вигляді

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{y} + 2y\right)dy - \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0,$$

$$d\left(\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right) = 0,$$

дістанемо

$$\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = C.$$

1.97. Розв'язати рівняння $(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y dy = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-2\sin y\cos y - \sin 2y}{x\sin 2y} = -\frac{2}{x}.$$

Отже,

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dx} = -\frac{2}{x},\ \ln m + 2\ln x = C,\ m(x,\ y) = \frac{1}{x^2}.$$

Рівняння $\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{\sin 2y}{x}dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах.

Запишемо його у вигляді

$$dx + \frac{x\sin 2y dy - \sin^2 y dx}{x^2} = 0.$$

Тоді

$$d\left(x + \frac{\sin^2 y}{x}\right) = 0,\quad x + \frac{\sin^2 y}{x} = C,\quad x^2 + \sin^2 y = Cx.$$

1.98. Розв'язати рівняння $ydx - (x + x^2 + y^2)\,dy = 0$, коли відомо, що воно має інтегрувальний множник, який залежить від $x^2 + y^2$.

Р о з в' я з а н н я. Інтегрувальний множник знайдемо з рівняння (7), поклавши в ньому $\omega = x^2 + y^2$. Маємо

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{d\omega} = \frac{1 + 1 + 2x}{-(x + x^2 + y^2)\,2x - y \cdot 2y} = \frac{2(1 + x)}{-2(1 + x)(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{\omega},$$

$$\frac{dm}{m} + \frac{d\omega}{\omega} = 0, \quad m(x, y) = \frac{1}{\omega(x, y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Помноживши вихідне рівняння на $\frac{1}{x^2 + y^2}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{ydx}{x^2 + y^2} - \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 1\right) dy = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 1\right),$$

$$U(x, y) = \int \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y)\right) = -\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 1\right),$$

$$-\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{x}{y^2} + \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2} - 1,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -1, \quad \varphi(y) = -y + \text{const},$$

$$U(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - y,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - y = C, \quad y = 0.$$

1.99. Розв'язати рівняння

$$(x^3 - xy^2 - y)\,dx + (x^2y - y^3 + x)\,dy = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо рівняння у вигляді

$$x(x^2 - y^2)\,dx + y(x^2 - y^2)\,dy + xdy - ydx = 0.$$

Розглянемо рівняння

$$x(x^2 - y^2)\,dx + y(x^2 - y^2)\,dy = 0, \tag{11}$$

його інтегрувальний множник $m_1^0(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$. Отже,

$$xdx + ydy = 0, \quad x^2 + y^2 = C.$$

Тому всі інтегрувальні множники рівняння (11) виражаються формулою

$$m_1(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}\varphi_1(x^2 + y^2),$$

де $\varphi_1(z)$ — довільна диференційовна функція.

Рівняння

$$xdy - ydx = 0 \tag{12}$$

має інтегрувальний множник $m_2^0(x, y) = \frac{1}{xy}$. Отже,

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \frac{y}{x} = C.$$

Тому всі інтегрувальні множники рівняння (12) виражаються формулою

$$m_2(x, y) = \frac{1}{xy}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

де $\varphi_2(z)$ — довільна диференційовна функція.

Користуючись тим, що $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ — довільні функції, підберемо їх так, щоб виконувалася рівність

$$\frac{1}{x^2 - y^2}\varphi_1(x^2 + y^2) = \frac{1}{xy}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Це буде тоді, коли, наприклад, $\varphi_1(z) = 1$, $\varphi_2(z) = \frac{z}{1 - z^2}$. Вибравши так функції $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$, знайдемо інтегрувальний множник заданого рівняння:

$$m(x, y) = m_1(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2} = m_2(x, y) = \frac{1}{xy}\,\frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Помноживши обидві частини заданого рівняння на $m(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах:

$$\left(x - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2 - y^2},$$

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| + \varphi(y)\right) = y + \frac{x}{x^2-y^2}; \quad \frac{x}{x^2-y^2} +$$

$$+ \varphi'(y) = y + \frac{x}{x^2-y^2},$$

$$\varphi'(y) = y, \quad \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + \text{const},$$

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| = C.$$

1.7. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші

Наведемо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Теорема Пікара. *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику*

$$\Pi = \{(x;\, y) \mid |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

і задовольняє умову Ліпшиця по y рівномірно відносно x, тобто $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|$ для всіх x таких, що $|x - x_0| \leqslant a$ і всіх y_1, y_2 таких, що $|y_1 - y_0| \leqslant b$, $|y_2 - y_0| \leqslant b$.

Нехай $M = \max\limits_{(x;y)\in\Pi} |f(x, y)|$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. *Тоді задача Коші* (1) *на проміжку $[x_0 - h, x_0 + h]$ має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$.*

Розв'язок задачі Коші (1) при виконанні умов теореми Пікара можна знайти як границю при $n \to \infty$ рівномірно збіжної послідовності функцій $\{y_n(x)\}$:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt, \quad y_0(x) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

— метод послідовних наближень. Оцінка похибки наближеної заміни точного розв'язку $y(x)$ наближеним $y_n(x)$ виражається нерівністю

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!}h^n.$$

Теорема Пеано. *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику* Π, *причому*

$$M = \max_{(x;y)\in\Pi} |f(x, y)|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Тоді задача Коші на проміжку $[x_0 - h, x_0 + h]$ має принаймні один розв'язок $y = \varphi(x)$.

Часто розв'язок задачі Коші існує не лише на відрізку, заданому в теоремах Пікара і Пеано, а й на більших проміжках.

Якщо функція $f(x, y)$ в прямокутнику П задовольняє умови теореми Пікара, то будь-який її розв'язок $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in П$ можна продовжити до виходу на межу прямокутника П. Якщо функція $f(x, y)$ у смузі $\alpha < x < \beta$, $-\infty < y < \infty$ $(\alpha \geqslant -\infty,\ \beta \leqslant +\infty)$ неперервна й задовольняє нерівності $|f(x, y)| \leqslant a(x)|y| + b(x)$, де $a(x)$ і $b(x)$ — неперервні функції, то будь-який розв'язок рівняння (1) можна продовжити на весь інтервал $\alpha < x < \beta$.

Точка $(x_0; y_0)$ називається *точкою єдиності розв'язку задачі Коші*, якщо через цю точку проходить лише одна інтегральна крива рівняння (1). Якщо через точку $(x_0; y_0)$ проходить більше ніж одна інтегральна крива рівняння (1), то таку точку називають *точкою неєдиності розв'язку задачі Коші*. Множина точок неєдиності називається *особливою множиною*. Якщо особлива множина містить інтегральну криву, то таку криву називають *особливою інтегральною кривою*, а розв'язок, який відповідає цій інтегральній кривій,— *особливим розв'язком*.

1.100. Знайти найменше з чисел M, які обмежують функцію $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2(2 - x - y)$ в прямокутнику $D = \{(x; y) \mid |x - 1| \leqslant a,\ |y - 1| \leqslant b\}$.

Р о з в' я з а н н я. Функція $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2$ набуває в області D найбільшого значення в точках цієї області, які найбільше віддалені від точки (1.1). Цими точками є вершини прямокутника D, і в кожній з цих точок дана функція набуває одного й того самого значення:

$$\max_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(a + 1,\ b + 1) = a^2 + b^2 + 2.$$

Найменшим числом M, при якому виконується нерівність $|f(x, y)| \leqslant M$ для всіх $(x; y) \in D$, є число $M = a^2 + b^2 + 2$.

1.101. Перевірити, що функція $f(x, y) = y^2 \sin x + e^x$ у смузі $П = \{(x, y) \mid |y| \leqslant b\}$ задовольняє умову Ліпшіца по y рівномірно відносно $x \in \mathbf{R}$. Знайти найменшу із сталих Ліпшіца.

Р о з в' я з а н н я. Нехай (x, y_1), $(x, y_2) \in П$. Оцінимо різницю $f(x, y_1) - f(x, y_2)$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 \sin x - y_2^2 \sin x| = |\sin x|\,|y_1 + y_2|\,|y_1 - y_2|.$$

Оскільки $\sup\limits_{(x;y)\in П} |\sin x|\,|y_1 + y_2| = 2b$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant 2b|y_1 - y_2|.$$

Це означає, що $f(x, y)$ у смузі П задовольняє умову Ліпшіца по y рівномірно відносно $x \in \mathbf{R}$. Найменша із сталих Ліпшіца є

$$N = 2b.$$

1.102. Перевірити, чи задовольняє умову Ліпшіца функція

$$f(y) = \begin{cases} y \ln|y| & \text{при} \quad y \neq 0; \\ 0 & \text{при} \quad y = 0 \end{cases}$$

на відрізку $[-b, b]$.

Р о з в' я з а н н я. Припустимо, що дана функція задовольняє умову Ліпшіца на відрізку $[-b, b]$. Нехай y_1 і y_2 — дві довільні точки цього відрізка. Тоді $|f(y_1) - f(y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|$ для деякої незалежної від y_1 і y_2 додатної сталої N. Виберемо $y_2 = 0$, $y_1 \neq 0$. Тоді повинна виконуватися нерівність

$$|y_1||\ln|y_1|| \leqslant N|y_1| \quad \text{або} \quad |\ln|y_1|| \leqslant N$$

для всіх y_1, $0 < |y_1| \leqslant b$, що неможливо. Тому задана функція на відрізку $[-b, b]$ умову Ліпшіца не задовольняє.

1.103. Довести, що функція $f(x, y) = (2 + \cos x)\, y^{\frac{2}{3}} - \sin x$ не задовольняє умову Ліпшіца по y у смузі $\Pi = \{(x, y) \mid |y| \leqslant b\}$. При яких α і β ($\alpha < \beta$) дана функція задовольняє умову Ліпшіца у смузі $\Pi_1 = \{(x, y) \mid \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$?

Р о з в' я з а н н я. Припустимо, що $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшіца по y у смузі Π, тобто існує така додатна стала N, що

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = (2 + \cos x)|y_1^{2/3} - y_2^{2/3}| \leqslant N|y_1 - y_2|$$

для всіх (x, y_1), $(x, y_2) \in \Pi$.

Нехай $y_2 = 0$. Тоді повинна виконуватися нерівність

$$(2 + \cos x)\, y_1^{2/3} \leqslant |y_1| \quad \text{або} \quad (2 + \cos x)|y_1||^{-1/3} \leqslant N$$

для всіх $x \in \mathbf{R}$ і y_1, $|y_1| \leqslant b$. Очевидно остання нерівність не виконується для досить малих за абсолютною величиною значень y_1. Отже, припущення про те, що задана функція у смузі Π задовольняє умову Ліпшіца, неправильне.

Розглянемо функцію $f(x, y)$ у смузі Π_1. Для різниці $f(x, y_1) - f(x, y_2)$ маємо

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = (2 + \cos x)|y_1^{2/3} - y_2^{2/3}| =$$
$$= (2 + \cos x)\left|\frac{y_1^{1/3} + y_2^{1/3}}{y_1^{2/3} + y_1^{1/3}y_2^{1/3} + y_2^{2/3}}\right||y_1 - y_2|.$$

Отже, величина

$$(2 + \cos x)\left|\frac{y_1^{1/3} + y_2^{1/3}}{y_1^{2/3} + y_1^{1/3}y_2^{1/3} + y_2^{2/3}}\right|$$

обмежена при всіх (x, y_1) і (x, y_2) зі смуги Π_1 тоді й тільки тоді, коли відрізок $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ не містить нуля, тобто коли $\alpha\beta > 0$. За цієї умови

$$(2+\cos x)\left|\frac{y_1^{1/3}+y_2^{1/3}}{y_1^{2/3}+y_1^{1/3}y_2^{1/3}+y_2^{2/3}}\right| =$$

$$= (2+\cos x)\frac{\left|\dfrac{1}{y_2^{1/3}}+\dfrac{1}{y_1^{1/3}}\right|}{1+\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^{1/3}+\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)^{1/3}} \leqslant \frac{2}{\gamma},$$

де

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt[3]{\alpha} & \text{при} \quad \alpha > 0, \\ \sqrt[3]{|\beta|} & \text{при} \quad \beta < 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $\alpha\beta > 0$, то дана функція $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшіца по y у смузі Π_1 із сталою Ліпшіца $N = \dfrac{2}{\gamma}$.

1.104. Методом послідовних наближень знайти розв'язок задачі Коші $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Послідовні наближення до розв'язку даної задачі визначимо рекуррентною формулою

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x (\tau + y_n(\tau))\, d\tau, \tag{2}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \; y_0(x) = 1.$$

Підставивши в (2) $n = 0, 1, 2, \ldots$, дістанемо:

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (\tau + 1)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(\tau + 1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right) d\tau = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\tau + 1 + \tau + \sigma^2 + \frac{\tau^3}{3!}\right) d\tau = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!},$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(\tau + 1 + \tau + \tau^2 + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4!}\right) d\tau =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{5!},$$

. . . .

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x \left(\tau + 1 + \tau + \tau^2 + \frac{\tau^3}{3} + \cdots + \frac{2\tau^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\tau^n}{n!}\right) d\tau =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} + \cdots + \frac{2x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зазначимо, що $y_n(x)$ можна записати у вигляді

$$y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - x - 1.$$

Тому, перейшовши до границі при $n \to \infty$, дістанемо розв'язок вихідної задачі Коші:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - x - 1 = 2e^x - x - 1.$$

1.105. Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$ і $y_2(x)$ до розв'язку задачі Коші $y' = 1 - (1 + x)y + y^2$, $y(0) = 1$. Оцінити різницю між $y_2(x)$ і точним розв'язком задачі при $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Послідовні наближення до розв'язку даної задачі Коші визначимо за формулою

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x (1 - (1+\tau)y_n(\tau) + y_n^2(\tau))\, d\tau, \quad y_0(x) = 1,$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

При $n = 0$ маємо

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (1 - (1+\tau) + 1)\, d\tau = 1 + x - \frac{x^2}{2}.$$

Знайдемо $y_2(x)$:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 - (1+\tau)y_1(\tau) + y_1^2(\tau))\, d\tau =$$

$$= 1 + \int_0^x (1 + y_1(\tau)(y_1(\tau) - \tau - 1))\, d\tau = 1 + \int_0^x \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tau - \frac{\tau^2}{2}\right)\right) d\tau = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}.$$

Щоб оцінити різницю між $y_2(x)$ і точним розв'язком $y(x)$ даної задачі Коші, знайдемо $y(x)$. Записавши вихідне рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx}(y - x - 1) = y(y - x - 1),$$

дістанемо

$$y(x) = x + 1.$$

Отже,

$$|y(x) - y_2(x)| = \frac{|x|^3}{2}\left|\frac{1}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{10}\right|.$$

Вираз $\left|\frac{1}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{10}\right|$ набуває найбільшого значення на проміжку $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ в точці $x = \frac{1}{4}$. Тоді

$$|y(x) - y_2(x)| \leqslant \frac{2}{2 \cdot 4^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{16} - \frac{1}{160}\right) < 0{,}0032,$$

тобто

$$|y(x) - y_2(x)| < 0{,}0032, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

1.106. Методом послідовних наближень знайти третє наближення до розв'язку задачі Коші $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$ в квадраті П: $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. На якому проміжку теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень? Оцінити похибку між точним розв'язком даної задачі Коші і третім наближенням.

Розв'язання. Функція $f(x, y) = x - y^2$ неперервно диференційовна по y і $f'_y = -2y$. Тому $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшіца із сталою

$$N = \max_{(x;y) \in \Pi} |f'_y| = 2.$$

Оскільки

$$M = \max_{(x;y) \in \Pi} |f| = \max_{(x;y) \in \Pi} |x - y^2| = 2,$$

то

$$h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right) = \min\left(1; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, пікаровські наближення до розв'язку даної задачі Коші збігаються принаймні на проміжку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Наближення обчислюємо за формулою

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (\tau - y_n^2(\tau))\, d\tau, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Маємо:

$$y_1(x) = \int_0^x (\tau - 0)\, d\tau = \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\tau - \frac{\tau^4}{4}\right) d\tau = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(\tau - \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^5}{20}\right)^2\right) d\tau = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Різниця між точним розв'язком $y(x)$ і третім наближенням оцінюється так:

$$|y(x) - y_3(x)| \leqslant \frac{MN^2}{3!} h^3 = \frac{2 \cdot 2^2}{6} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{6}.$$

Теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень на проміжку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Абсолютна похибка третього наближення не перевищує 1/6.

1.107. Знайти максимальний проміжок існування розв'язку задачі Коші $y' = (x^2 + y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$, $y(0) = 0$, і збіжності пікаровських наближень, який гарантується теоремою Пікара.

Р о з в' я з а н н я. У будь-якому квадраті

$$\Pi = \{(x;\ y) \in \mathbf{R}^2 |\ |x| \leqslant a,\quad |y| \leqslant a\},\quad a > 0$$

права частина даного рівняння неперервна і частинна похідна по y

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left((x^2 + y^2)\, e^{1-x^2-y^2}\right) = (-2y(x^2 + y^2) + 2y)\, e^{1-x^2-y^2}$$

обмежена. Тому $f(x, y)$ задовольняє по y умову Ліпшіца рівномірно по x, $|x| \leqslant a$. Отже, виконуються умови теореми Пікара. Теорема гарантує існування розв'язку даної задачі на проміжку

$$|x| \leqslant h,\quad h = \min\left\{a,\ \frac{a}{M}\right\},\quad \text{де } M = \max_{(x;\ y) \in \Pi} (x^2 + y^2)\, e^{1-x^2-y^2}.$$

Для знаходження M зазначимо, що функція $f(x, y)$ є сталою на кожному колі $x^2 + y^2 = r^2$. Знайдемо найбільше значення функції $g(t) = te^{1-t}$ при $t \geqslant 0$. Оскільки $g(0) = 0$ і $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, то найбільшого значення при $t \geqslant 0$ функція $g(t)$ набуває в одній з точок максимуму. Похідна

$$g'(t) = e^{1-t} - te^{1-t} = e^{1-t}(1 - t)$$

дорівнює нулю тільки в одній точці $t = 1$, причому $g'(t) > 0$ при $t < 1$ і $g'(t) < 0$ при $t > 1$. Отже, $t = 1$ — точка максимуму функції $g(t)$.

Тому найбільшого значення, яке дорівнює 1, функція $f(x, y)$ набуває в точках кола $x^2 + y^2 = 1$. Отже, $h = a$.

1.108. Нехай

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0, \quad -\infty < y < \infty; \\ 2x, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \quad -\infty < y < 0; \\ 2x - \frac{4y}{x}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^2; \\ -2x, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \quad x^2 < y < +\infty. \end{cases}$$

Довести, що пікаровські наближення, побудовані для задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$, не збігаються на жодному проміжку $[0; \varepsilon]$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Р о з в' я з а н н я. Неважко показати, що в смузі П: $0 \leqslant x \leqslant 1$; $-\infty < y < \infty$ функція $f(x, y)$ неперервна й обмежена, $|f(x, y)| \leqslant 2$. Згідно з теоремою Пеано, розв'язок задачі Коші існує. Побудуємо пікаровські наближення при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Маємо:

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x f(t, 0)\, dt = \int_0^x 2t dt = x^2,$$

$$y_2(x) = \int_0^x f(t, y_1(t))\, dt = \int_0^x f(t, t^2)\, dt = \int_0^x (-2t)\, dt = -x^2.$$

Оскільки $f(x, x^2) = -2x$, а $f(x, -x^2) = 2x$, то $y_{2m-1}(x) = x^2$, $y_{2m}(x) = -x^2$ $m = 1, 2, \ldots$. Тому послідовність $\{y_n(x)\}$ для кожного $x \neq 0$ має дві граничні точки і, отже, послідовні наближення не збігаються. Зауважимо також, що жодна із збіжних підпослідовностей $\{y_{2m-1}(x)\}$, $\{y_{2m}(x)\}$ не збігається до розв'язку даної задачі Коші, оскільки

$$\frac{dy_{2m-1}}{dx} = 2x \neq f(x, x^2) \quad \text{і} \quad \frac{dy_{2m}}{dx} = -2x \neq f(x, -x^2).$$

Цей приклад показує, що однієї неперервності функції $f(x, y)$ недостатньо для збіжності послідовних наближень.

1.109. Нехай $f(x, y)$ — функція, неперервна по сукупності змінних x і y в області

$$\Pi = \{(x, y) \mid x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}$$

і незростаюча по y при кожному фіксованому x. Довести, що задача Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на будь-якому відрізку $[x_0, x_0 + \varepsilon]$, $0 < \varepsilon \leqslant a$ має не більше одного розв'язку.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$ — два розв'язки даної задачі Коші на проміжку $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Позначимо $z(x) =$

$= (\varphi(x) - \psi(x))^2$. Отже, $z(x_0) = 0$, $z(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant x_0$. Знайдемо похідну функції $z(x)$:

$$z'(x) = 2(\varphi(x) - \psi(x))(\varphi'(x) - \psi'(x)) =$$
$$= 2(\varphi(x) - \psi(x))(f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)).$$

Ця похідна недодатна, оскільки за умовою функція $f(x, y)$ є незростаючою по y при фіксованому x. З нерівності $z'(x) \leqslant 0$ і умови $z(x_0) = 0$ випливає, що $z(x) \equiv 0$, тобто $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при всіх $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$. Отже, дана задача Коші має єдиний розв'язок.

1.110. Довести, що коли функція $f(x, y)$ неперервна по сукупності змінних x і y в області

$$\Pi = \{(x, y) \mid x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}$$

і задовольняє умову

$$(f(x, y_2) - f(x, y_1))(y_2 - y_1) \leqslant \frac{(y_2 - y_1)^2}{x - x_0}$$

при $x_0 < x \leqslant x_0 + a$, то задача Коші $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на будь-якому відрізку $[x_0, x_0 + a]$, $0 < \varepsilon \leqslant a$ має не більше одного розв'язку.

Р о з в' я з а н н я. Припустимо, що дана задача Коші має принаймні два розв'язки $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$ на проміжку $[x_0, x_0 + a]$. Нехай $z(x) = (\varphi(x) - \psi(x))^2$. Тоді $z(x_0) = 0$ і $z(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant x_0$. Знайдемо похідну функції $z(x)$:

$$z'(x) = 2(\varphi(x) - \psi(x))(\varphi'(x) - \psi'(x)) =$$
$$= 2(\varphi(x) - \psi(x))(f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))) \leqslant \frac{2(\varphi(x) - \psi(x))^2}{x - x_0}.$$

Функція $z(x)$ задовольняє при $x > x_0$ нерівність $z'(x) \leqslant \frac{2z}{x - x_0}$, $z(x) \leqslant z(x_0)(x - x_0)^2$, $x > x_0$. Оскільки $z(x) \geqslant 0$ і $z(x_0) = 0$, то $z(x) \equiv 0$, тобто $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Отже, дана задача Коші має єдиний розв'язок.

1.111. Знайти всі розв'язки задачі Коші $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$, визначені на проміжку $[0, +\infty]$.

Р о з в' я з а н н я. Один з розв'язків даної задачі Коші очевидний: $y(x) \equiv 0$. Покажемо, що $f(y)$ не задовольняє умову Ліпшіца в точці $y = 0$. Припустимо від супротивного, що $f(y)$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто існує така додатна стала N, що $|y_1^{\frac{2}{3}} - y_2^{\frac{2}{3}}| \leqslant N|y_1 - y_2|$. Поклавши $y_2 = 0$, $y_1 \neq 0$, дістанемо $|y_1^{2/3}| \leqslant N|y_1|$, або $N|y_1|^{1/3} \geqslant 1$. Проте ця нерівність, очевидно, не виконується при достатньо малих $|y_1|$. Тому функція $f(y)$ не задовольняє умову Ліпшіца в точці $y = 0$ і дана задача Коші може мати не єдиний розв'язок. При $y \neq 0$, відокремлюючи змінні в рівнянні $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, дістанемо: $y^{-2/3}dy = 3dx$, $\int y^{-2/3}dy = \int 3dx, 3y^{1/3} = 3(x-c), y = (x-c)^3$.

Сім'я функцій $y = (x-c)^3$ містить один розв'язок даної задачі Коші: $y = x^3$. Крім двох зазначених розв'язків даної задачі Коші, її розв'язком, визначеним на проміжку $[0, +\infty)$, є також будь-яка функція виду

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant c_0; \\ (x - c_0) \text{ при } x > c_0 \end{cases}$$

для будь-якого $c_0 > 0$ (рис. 23). Отже, дана задача Коші має нескінченну множину розв'язків.

1.112. З'ясувати, чи має рівняння $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}(y-x)^{\frac{1}{3}}$ особливі розв'язки і знайти їх, якщо вони існують. Побудувати інтегральні криві даного рівняння.

Розв'язання. Виконавши заміну $y - x = z$ відносно z, дістанемо рівняння

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{3}}. \tag{3}$$

Функція $f(z) = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{3}}$ не задовольняє умову Ліпшіца при $z = 0$. Оскільки $z = 0$ — розв'язок рівняння (3), то він може бути особливим розв'язком. Знайдемо інші розв'язки рівняння (3):

$$z^{-\frac{1}{3}} dz = \frac{3}{2} dx, \quad \int z^{-\frac{1}{3}} dz = \frac{3}{2} \int dx,$$

$$\frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(x-c), \quad z = (x-c)^{\frac{3}{2}}.$$

При $x = x_0$ умову $z(x_0) = 0$ задовольняють принаймні два розв'язки рівняння (3):

$$z = 0 \text{ і } z = (x - x_0)^{\frac{3}{2}}.$$

Тому $z = 0$ — особливий розв'язок рівняння (3). Враховуючи заміну $y - x = z$, дістаємо, що функція $y = x$ є особливим розв'язком вихідного рівняння. Інші розв'язки цього рівняння визначаються формулою $y = x + (x-c)^{\frac{3}{2}}$. Їх графіки зображено на рис. 24.

1.113. Чи може рівняння Ріккаті $\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, де $a(x)$, $b(x)$ і $c(x)$ — неперервні на $\mathbf{R}$ функції, мати особливий розв'язок?

Розв'язання. Функція $f(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ неперервно диференційовна по y, а її частинна похідна $f'_y = 2a(x)y + b(x)$ обмежена в будь-якому прямокутнику

$$\Pi = \{(x;\ y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}.$$

Тому в прямокутнику Π функція $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшіца по y, тобто права частина заданого рівняння задовольняє умови теореми Пікара. Отже, рівняння Ріккаті не має особливих розв'язків.

1.114. Нехай $f(y)$ — неперервна на проміжку $[a, b]$ функція, яка перетворюється в нуль лише в одній точці $y^* \in (a, b)$: $f(y^*) = 0$. Довести, що коли інтеграл $\int\limits_{y}^{y^*} \frac{dy}{f(y)}$ розбігається, то задача Коші

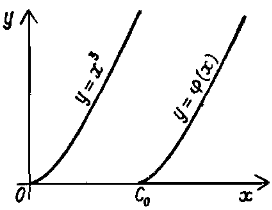


Рис. 23

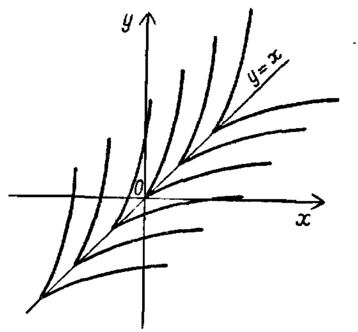


Рис. 24

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad y(x_0) = y^*, \tag{4}$$

має єдиний розв'язок $y(x) \equiv y^*$, а якщо $\int\limits_{y}^{y^*} \frac{dy}{f(y)}$ збігається, то єдиність розв'язку задачі Коші порушується.

Розв'язання. Нехай $y = \varphi(x)$ — розв'язок рівняння $y' = f(y)$, для якого $\varphi(x_0) = y_0 < y^*$ (випадок $y_0 > y^*$ досліджується аналогічно). Припустимо, що $f(y) > 0$ при $y \in [y_0, y^*]$. Функція $y = \varphi(x)$ задовольняє співвідношення

$$x - x_0 = \int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{f(y)}.$$

Звідси маємо, що коли $\varphi(x)$ наближається до y^*, то, внаслідок розбіжності інтеграла $\int\limits_{y_0}^{y^*} \frac{dy}{f(y)}$, змінна x необмежено зростає. Це означає, що інтегральна крива $y = \varphi(x)$ асимптотично наближається до прямої $y = y^*$ при необмеженому зростанні x і не має з нею спільних точок при жодному скінченному значенні x. Отже, у цьому випадку задача Коші (4) має єдиний розв'язок.

Нехай тепер $\int\limits_{y_0}^{y^*} \frac{dy}{f(y)} = A < \infty$. При $x = x_0 + A = \bar{x}$ крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку $(x; y^*)$, яка лежить на інтегральній кривій $y = y^*$. Тому в цій точці єдиність розв'язку порушується. Оскільки функція $y = \varphi(x - c)$ при будь-якому $c \in \mathbf{R}$ є розв'язком рівняння $\frac{dy}{dx} = f(y)$, то єдиність розв'язку порушується для будь-якої точки прямої $y = y^*$. Отже, якщо інтеграл $\int\limits_{y}^{y^*} \frac{dy}{f(y)}$ збіжний, то пряма $y = y^*$ є особливою інтегральною кривою, а функція $y(x) \equiv y^*$ — особливим розв'язком рівняння.

1.115. Використавши результат попередньої задачі, знайти особливі інтегральні криві рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}(y^2 - 1)$. Зобразити наближені інтегральні криві цього рівняння на рисунку.

Р о з в' я з а н н я. Права частина рівняння перетворюється в нуль у трьох точках: $y = 0$ і $y = \pm 1$.

Нехай $|y_0| < 1$. Тоді

$$\int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{y^{2/3}(y^2 - 1)} = \int\limits_{y_0^{1/3}}^{0} \frac{3dz}{z^6 - 1}.$$

Отже, $\int\limits_{y_0}^{0} \frac{dy}{y^{2/3}(y^2 - 1)}$ збігається, а тому в точках прямої $y = 0$ порушується єдиність розв'язків заданого рівняння. Неважко довести, що інтеграли

$$\int\limits_{y_0}^{-1} \frac{dy}{y^{2/3}(y^2 - 1)}, \quad \int\limits_{y_0}^{1} \frac{dy}{y^{2/3}(y^2 - 1)}$$

є розбіжними. Тому в точках прямих $y = \pm 1$ єдиність розв'язків не порушується.

Враховуючи також, що в проміжках $(-1, 0)$ і $(0, 1)$

$$y^{2/3}(y^2 - 1) < 0,$$

а в проміжках $(-\infty, -1)$ і $(1, +\infty)$

$$y^{2/3}(y^2-1)>0,$$

можна показати, що інтегральні криві даного рівняння мають вигляд, зображений на рис. 25.

1.116. Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна в прямокутнику

$$\Pi=\{(x;\ y)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\},$$

а $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$ — розв'язки задачі Коші $y'=f(x, y)$, $y(0)=y_0$, визначені на проміжку $[0, h]$, $h<a$. Покладемо $\varphi_1(h)=y_1$, $\varphi_2(h)=y_2$ (нехай $y_1<y_2$).

Довести, що для будь-якого $y^*\in(y_1, y_2)$ існує такий розв'язок $y=\varphi(x)$ даної задачі Коші, що $\varphi(h)=y^*$.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо розв'язок $y=\psi(x)$ такої задачі Коші:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),\quad y(h)=y^*.$$

Існування такого розв'язку гарантує теорема Пеано. Продовжуватимемо розв'язок $y=\psi(x)$ вліво від точки $x=h$ (рис. 26). Тоді інтегральна крива цього розв'язку проходитиме через точку $(0;\ y_0)$ (у цьому разі $\psi(x)$ і буде шуканим розв'язком),

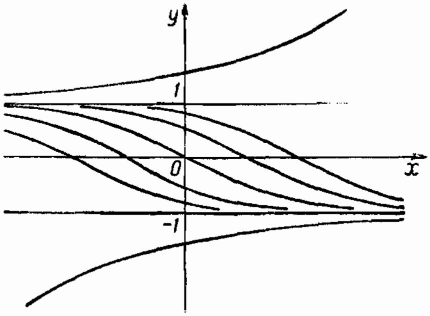


Рис. 25

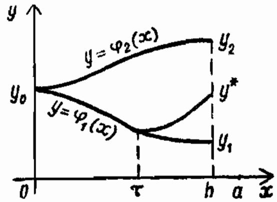


Рис. 26

або при деякому $x=\tau$, $0<\tau<h$, перетне один з графіків розв'язків $y=\varphi_1(x)$ або $y=\varphi_2(x)$. Вважатимемо (для певності), що $\varphi_1(\tau)=\psi(\tau)$. Однак в точці $(\tau, \varphi_1(\tau))$ збігаються не лише графіки розв'язків $y=\varphi_1(x)$ і $y=\psi(x)$, а й дотичні, проведені до цих графіків, оскільки $f(\tau, \varphi_1(\tau))=f(\tau, \psi(\tau))$.

Тому шуканий розв'язок $y=\varphi(x)$ можна побудувати у вигляді

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\tau;\\ \psi(x) \text{ при } \tau\leqslant x\leqslant h.\end{cases}$$

Отже, функція $\varphi(x)$ є розв'язком даної задачі Коші на проміжку $[0;\ h]$ і $\varphi(h)=\psi(h)=y^*$.

З цієї задачі, яка є окремим випадком теореми Кнезера, випливає, що коли через деяку точку (x_0, y_0) проходять хоча б дві різні інтегральні криві, то через цю точку проходить безліч інтегральних кривих.

1.8. Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{1}$$

Для якісного дослідження таке рівняння бажано розв'язати відносно похідної $y' = \frac{dy}{dx}$, тобто дістати одне або кілька рівнянь типу

$$y' = f_i(x,\ y),\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k. \tag{2}$$

Проте рівняння (1) не завжди можна в явному вигляді розв'язати відносно y'. На практиці рівняння виду (1) розв'язують методом введення параметра. Розглянемо найпростіший варіант цього методу. Докладніше метод описано в [13, 17].

Припустимо, що рівняння (1) можна розв'язати відносно x або y. Наприклад, його можна записати у вигляді $y = f(x, y')$. Ввівши параметр $y' = p$, дістанемо $y = f(x,\ p)$.

Взявши повний диференціал від обох частин останньої рівності і замінивши dy на pdx, дістанемо рівняння

$$pdx = \frac{\partial f(x,\ p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,\ p)}{\partial p}dp,$$

тобто

$$M(x,\ p)\,dx + N(x,\ p)\,dp = 0.$$

Якщо розв'язки останнього рівняння задані формулою $x = \Phi(p,\ c)$, то розв'язки рівняння (1) можна записати в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \Phi(p,\ c), \\ y = f(x,\ p). \end{cases}$$

Прикладами рівнянь, які можна розв'язати викладеним методом, є

рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y') + \psi(y')$

і

рівняння Клеро $y = xy' + \psi(y')$.

Говорять, що задача Коші для рівняння (1) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок (точка (x_0, y_0) є точкою єдиності розв'язку), якщо не існує двох інтегральних кривих рівняння (1), які б проходили через точку (x_0, y_0) і мали б у цій точці спільну дотичну. У противному разі в точці (x_0, y_0) єдиність розв'язку задачі Коші порушується (точка (x_0, y_0) є точкою неєдиності розв'язку задачі Коші).

Достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (1) визначає така теорема.

Т е о р е м а. *Нехай функція $F(x, y, y')$ в околі точки (x_0, y_0, y_0'), де y_0' — один з коренів рівняння $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, неперервна по x і неперервно диференційовна по*

y і y', а її похідна по y' відмінна від нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші $F(x, y, y') = 0$, $y(x_0) = y_0$, визначений в досить малому околі точки x_0, для якого $\varphi'(x_0) = y_0'$.

Як і рівняння, розв'язані відносно похідної, рівняння виду (1) можуть мати особливі розв'язки, тобто такі розв'язки, відповідна інтегральна крива яких складається з точок неєдиності.

Якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна по x і неперервно диференційовна по y і y', то особливий розв'язок (якщо він існує) задовольняє системі рівнянь

$$F(x, y, y') = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0.$$

Тому, щоб знайти особливі розв'язки рівняння (1), з системи рівнянь (3) виключають y', внаслідок чого дістають рівняння $\Psi(x, y) = 0$ так званої дискримінантної кривої. Для кожної вітки дискримінантної кривої необхідно перевірити, чи є ця вітка графіком деякого розв'язку рівняння (1) і, якщо це так, то чи є цей розв'язок особливим. Якщо сім'я інтегральних кривих $\Phi(x, y, c) = 0$ рівняння (1) має обвідну $y = \varphi(x)$, то ця обвідна є особливою інтегральною кривою цього ж рівняння. *Якщо функція $\Phi(x, y, c)$ неперервно диференційовна, то обвідна входить до складу дискримінантної кривої*

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c}(x, y, c) = 0. \end{cases}$$

Деяка вітка $y = \varphi(x)$ дискримінантної кривої є обвідною, якщо $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \varphi(x), C) \neq 0$, або $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \varphi(x), C) \neq 0$.

У загальному випадку, щоб дізнатися, чи є вітка $y = \varphi(x)$ дикримінантної кривої обвідною (особливою інтегральною кривою), слід з'ясувати, чи дотикаються до неї в кожній точці криві сім'ї $\Phi(x, y, C) = 0$. Якщо ці криві є інтегральними кривими рівняння $F(x, y, y') = 0$, то інтегральні криві рівняння

$$F\left(x, y, \frac{y' \mp k}{1 \pm ky'}\right) = 0$$

перетинають криві даної сім'ї під однаковим кутом α, для якого $\operatorname{tg}\alpha = k$. Зокрема, інтегральні криві рівняння $F\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0$ ортогональні кривим $\Phi(x, y, C) = 0$.

1.117. Розв'язати рівняння $(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x$.

Розв'язання. Оскільки

$$(y')^3 - 2x(y')^2 + y' - 2x = (y' - 2x)((y')^2 + 1),$$

то дане рівняння еквівалентне рівнянню $y' - 2x = 0$. Його розв'язки мають вигляд $y = x^2 + C$.

1.118. Розв'язати рівняння $(y')^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(y' + y^2)(y' - xy) = 0.$$

Отже, вихідне рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$y' + y^2 = 0 \text{ і } y' - xy = 0.$$

Розв'язки першого з них $y = 0$ і $y = \frac{1}{x+C}$, а другого $y = Ce^{x^2/2}$. Остаточно

$$(y - Ce^{x^2/2})\left(y - \frac{1}{x+C}\right) = 0.$$

1.119. Розв'язати рівняння

$$(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy\sin x = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y' + \sin x = 0 \text{ і } y' - 2xy = 0.$$

Розв'язками першого з цих рівнянь є $y = \cos x + C$, а другого $y = Ce^{x^2}$. Тому розв'язки заданого рівняння

$$(y - \cos x - C)(ye^{-x^2} - C) = 0.$$

1.120. Розв'язати рівняння $(y')^2 - 1 = 0$ і зобразити його інтегральні криві. Чи порушується в яких-небудь точках площини xOy єдиність розв'язку цього рівняння?

Розв'язання. Дане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь $y' = 1$ і $y' = -1$. Розв'язками цих рівнянь є функції $y = x + C$ і $y = -x + C$ відповідно.

Через кожну точку $(x_0; y_0)$ площини xOy проходять дві інтегральні криві заданого рівняння: $y - y_0 = x - x_0$ і $y - y_0 = -x + x_0$. Оскільки ці інтегральні криві перетинаються під прямим кутом, то єдиність розв'язку не порушується (рис. 27).

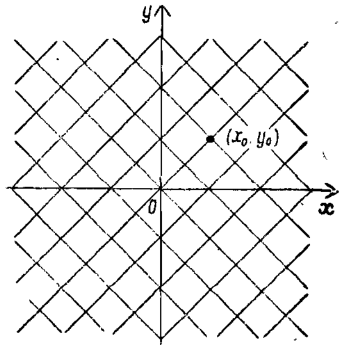


Рис. 27

1.121. В яких точках площини xOy порушується єдиність розв'язків рівняння $(y')^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$? Написати по три різних розв'язки даного рівняння, які проходять через точки (0; 0) і (1; 1).

Розв'язання. Дане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$y' = y \text{ і } y' = x^2. \tag{4}$$

Через кожну точку площини xOy проходить по одній інтегральній кривій кожного з цих рівнянь. Єдиність розв'язків заданого рівняння порушується в тих точках площини, в яких дотичні до інтегральних кривих рівнянь (4) збігаються, тобто в точках, в яких збігаються праві частини рівнянь (4). Це точки параболи $y = x^2$.

Щоб знайти відповідь на друге запитання задачі, розв'яжемо рівняння (4). Інтегруючи ці рівняння, дістаємо

$$y = Ce^x \text{ і } y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Запишемо розв'язки вихідного рівняння, які проходять через вказані точки. Через точку (0; 0) проходять, наприклад, розв'язки

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = \frac{x^3}{3}, \quad y_3(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ \frac{x^3}{3} \text{ при } x > 0, \end{cases}$$

а через точку (1; 1) — розв'язки

$$y_1(x) = e^{x-1}, \quad y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}, \quad y_3(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \text{ при } x < 1; \\ e^{x-1} \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1.122. Розв'язати рівняння $y = (y')^2 e^{y'}$.

Розв'язання. Введемо параметр $y' = p$. Тоді $y = p^2 e^p$, $dy = (2pe^p + p^2 e^p)dp$. Крім того, $dy = pdx$, тому $pdx = p(2 + p)e^p dp$. Звідси $p = 0$ або $x = 2e^p + e^p(p - 1) + C = e^p(p + 1) + C$.

1.123. Розв'язати рівняння $\ln y' + \sin y' - x = 0$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p$. Тоді $x = \ln p + \sin p$. Оскільки $dy = pdx$, то $dy = (1 + p\cos p)\,dp$. Звідси $y = p + \cos p + p \sin p + C$. Розв'язки даного рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \ln p + \sin p; \\ y = p + \cos p + p\sin p + C. \end{cases}$$

1.124. Розв'язати рівняння $y' \sin y' + \cos y' - y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння можна розв'язати відносно y, тому, поклавши $y' = p$, маємо $y = p\sin p + \cos p$. Диференціюючи цю рівність по x, дістаємо

$$p = \frac{dp}{dx}\sin p + p\cos p\frac{dp}{dx} - \sin p\frac{dp}{dx}, \quad p = p\cos p\frac{dp}{dx}.$$

З цього рівняння знаходимо $p = 0$ і $x = \sin p + C$.

Отже,

$$y = 1 \;\; і \;\; \begin{cases} x = \sin p + C, \\ y = p\sin p + \cos p. \end{cases}$$

1.125. Розв'язати рівняння $(y')^2 + (x + a)\, y' - y = 0$.

Розв'язання. Введемо параметр $y' = p$. Тоді

$$y = p^2 + (x + a)\, p.$$

З рівностей $dy = pdx$ і $dy = 2pdp + (x + a)\, dp + pdx$ маємо $pdx = 2pdp + (x + a)\, dp + pdx$, $(2p + x + a)\, dp = 0$. Звідси $p = C$, або $2p + x + a = 0$. Тому розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$y = (x + a)\, C + C^2 \text{ і } \begin{cases} y = p^2 + (x + a)\, p; \\ 2p + x + a = 0. \end{cases}$$

Виключивши з останніх двох рівностей параметр p, дістанемо

$$y = C(x + a) + C^2 \text{ і } y = -\frac{(x + a)^2}{4}.$$

1.126. Розв'язати рівняння $\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0$.

Розв'язання. Це рівняння Клеро. Покладемо $y' = p$, тоді $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$. Диференціюючи останню рівність по x, дістаємо

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p\dfrac{dp}{dx}}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Звідси $\left(x + \dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\dfrac{dp}{dx} = 0$, $x = -\dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$

або $p = C$. Отже,

$$y = Cx + \sqrt{1 + C^2} \text{ і } \begin{cases} x = -\dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ y = px + \sqrt{1 + p^2}. \end{cases}$$

Виключивши з останніх двох рівностей параметр p, дістанемо $y = \sqrt{1 - x^2}$.

1.127. Розв'язати рівняння $x^4 (y')^2 - xy' - y = 0$.

Розв'язання. Введемо параметр $y' = p$. Тоді $y = x^4p^2 - xp$. З рівностей $dy = pdx$ і $dy = 4x^3p^2dx + 2px^4dp - xdp - pdx$ дістаємо

$$(2p - 4x^3p^2)\, dx = (2px^4 - x)\, dp, \text{ або } (1 - 2px^3)(2pdx + xdp) = 0.$$

Звідси

$$1 - 2px^3 = 0, \text{ або } 2pdx + xdp = 0.$$

Перше з цих рівнянь дає шуканий розв'язок:

$$\begin{cases} 1 - 2px^3 = 0; \\ y = x^4p^2 - xp, \end{cases} \text{ або } y = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{4x^2}.$$

Розв'язавши рівняння $2pdx + xdp = 0 \Rightarrow p = \frac{C}{x^2}$, дістанемо інші розв'язки заданого рівняння: $y = C^2 - \frac{C}{x}$.

1.128. Розв'язати рівняння

$$x\frac{dy}{dx} = y + x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді $y = x(p - \sqrt{1 + p^2})$. Диференціюючи цю рівність по x, дістаємо

$$\frac{dy}{dx} = p - \sqrt{1 + p^2} + x\left(1 - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\frac{dp}{dx},$$

$$p = p - \sqrt{1 + p^2} + x\left(1 - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\frac{dp}{dx},$$

$$x\left(1 - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}.$$

Відокремивши змінні, проінтегруємо:

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{p}{1 + p^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}\right)dp = 0,$$

$$\ln|x| - \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + \frac{1}{2}\ln(1 + p^2) = \ln C,$$

$$x = \frac{C(p + \sqrt{1 + p^2})}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Розв'язки заданого рівняння запишемо в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C(p + \sqrt{1 + p^2})}{\sqrt{1 + p^2}}; \\ y = x(p - \sqrt{1 + p^2}). \end{cases}$$

Виключивши з цих рівностей параметр p, дістанемо

$$(x - C)^2 + y^2 = C.$$

1.129. Розв'язати рівняння $y' + y = x(y')^2$.

Розв'язання. Дане рівняння розв'язується відносно y:

$$y = x(y')^2 - y'.$$

Це рівняння Лагранжа. Введемо параметр $y' = p$. Тоді $y = xp^2 - p$. Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}, \text{ або } p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}.$$

Дістаємо лінійне рівняння

$$x' + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)};$$

його розв'язок

$$x = \frac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}.$$

1.130. Розв'язати рівняння $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$.

Розв'язання. Це рівняння, як і попереднє, можна розв'язати методом введення параметра. Проте доцільніше виконати заміну $y^2 = z$. Тоді $2yy' = z'$ і задане рівняння набирає вигляду

$$(z')^2 + 4xz' - 4z = 0.$$

Це рівняння Клеро відносно функції z. Його розв'язки $z = Cx + \frac{C^2}{4}$ і $z = -x^2$. Врахувавши, що $z = y^2$, дістанемо

$$y^2 = Cx + \frac{C^2}{4}.$$

1.131. Розв'язати рівняння $(y')^2 + y^2 = 1$. Записати три розв'язки цього рівняння, які задовольняють умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. Введемо параметр, поклавши $y' = \sin p$, $y = \cos p$. З рівностей $\frac{dy}{dx} = \sin p$ і $\frac{dy}{dx} = -\sin p \frac{dp}{dx}$ дістаємо $\sin p = -\sin p \frac{dp}{dx}$. Звідси $\sin p = 0$ або $\frac{dp}{dx} = -1$, тобто $p = -x + C$. Отже, функції, задані параметрично рівностями

$$\begin{cases} \sin p = 0, \\ y = \cos p \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x = C - p, \\ y = \cos p, \end{cases}$$

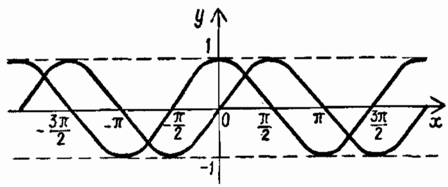


Рис. 28

є розв'язками заданого рівняння. Виключивши параметр p, дістанемо $y = -1$, $y = 1$ і $y = \cos(x - c)$. Прямі $y = \pm 1$ є обвідними сім'ї кривих $y = \cos(x - c)$ (рис. 28). У кожній точці прямої $y = \pm 1$ порушується єдиність розв'язку, тому розв'язки $y = -1$ і $y = 1$ є особливими.

Прикладами розв'язків даного рівняння, які задовольняють умову $y(0) = 1$, є такі функції:

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = \begin{cases} \cos x \text{ при } x < 0; \\ 1 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ \sin x \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Початковій умові $y(x_0) = 1$ або $y(x_0) = -1$ задовольняє нескінченна множина розв'язків даного рівняння.

1.132. Розв'язати рівняння $(y')^2 - 2xy' + y = 0$. Чи має це рівняння особливі розв'язки?

Розв'язання. Покладемо $y' = p$. Тоді $y = 2xp - p^2$. З рівностей $dy = pdx$ і $dy = 2pdx + 2xdp - 2pdp$ дістанемо $pdx + 2(x - p)\,dp = 0$. Звідси $p = 0$ або $\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 2$. Це лінійне рівняння. Розв'язавши його, дістаємо

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}.$$

Розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}; \\ y = 2px - p^2, \quad y = 0. \end{cases}$$

Дослідимо, чи має це рівняння особливі розв'язки. Для визначення дискримінантної кривої складемо систему

$$\begin{cases} (y')^2 - 2xy' + y = 0; \\ 2y' - 2x = 0. \end{cases}$$

Виключивши з цих рівнянь y', знайдемо дискримінантну криву $y = x^2$.

Безпосередньо перевіркою впевнюємося, що функція $y = x^2$ не є розв'язком заданого рівняння, а отже, і його особливим розв'язком. Таким чином, задане рівняння особливих розв'язків не має.

1.133. Знайти особливий розв'язок рівняння $y = x + 2y' - (y')^2$.

Розв'язання. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y - x - 2y' + (y')^2 = 0; \\ 2 - 2y' = 0 \end{cases}$$

знаходимо дискримінантну криву $y = x + 1$. Підставивши цю функцію в рівняння, дістанемо, що $y = x + 1$ є розв'язком. Перевіримо, чи дотикаються до прямої $y = x + 1$ в кожній її точці інші інтегральні криві даного рівняння.

Для цього розв'яжемо дане рівняння. Поклавши $y' = p$, $y = x + 2p - p^2$, із співвідношень $dy = pdx$ і $dy = dx + (2 - 2p)\,dp$ дістанемо $(p - 1)\,dx + 2(p - 1)\,dp = 0$. Звідси $p = 1$ або $x = -2p + C$.

Тому розв'язками заданого рівняння є функції

$$y = x + 1 \ \text{ і } \ \begin{cases} x = -2p + C; \\ y = x + 2p - p^2. \end{cases}$$

Виключивши параметр p, дістанемо $y = x + 1$, $y = x + C - x - \frac{(C-x)^2}{4} = C - \frac{(C-x)^2}{4}$. Умови дотику кривих $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$ в точці з абсцисою $x = x_0$ такі: $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$. Для розв'язків $y = x + 1$ і $y = C - \frac{(C-x)^2}{4}$ ці умови запишемо у вигляді

$$x_0 + 1 = C - \frac{(C-x_0)^2}{4}, \quad 1 = \frac{C-x_0}{2}.$$

З другої рівності знаходимо $C = 2 + x_0$. Підставивши значення C в перше рівняння, дістанемо $x_0 + 1 = 2 + x_0 - \frac{2^2}{4}$, $x_0 + 1 = x_0 + 1$. Ця рівність виконується при всіх x_0. Отже, при кожному x_0 пряма $y = x + 1$ в точці з абсцисою x_0 дотикається до однієї з парабол $y = C - \frac{(C-x)^2}{4}$, а саме, до тієї параболи, для якої $C = 2 + x_0$.

Отже, $y = x + 1$ — особливий розв'язок.

1.134. Розв'язати рівняння $8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x)$. Виділити особливі розв'язки, якщо вони існують.

Р о з в' я з а н н я. Дане рівняння розв'яжемо відносно y:

$$y = \frac{8}{27}(y')^3 - \frac{4}{9}(y')^2 + x.$$

Введемо параметр $y' = p$, тобто $dy = pdx$. Тоді

$$y = \frac{8}{27}p^3 - \frac{4}{9}p^2 + x, \quad dy = \frac{8}{9}(p^2 - p)\,dp + dx.$$

З рівностей $dy = pdx$ і $dy = \frac{8}{9}(p^2 - p)\,dp + dx$ дістаємо

$$\frac{8}{9}(p^2 - p)\,dp + (1 - p)\,dx = 0, \quad (p - 1)\left(\frac{8}{9}pdp - dx\right) = 0.$$

Звідси $p = 1$ або $x = \frac{4}{9}p^2 + C$. Розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$y = x - \frac{4}{27} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{9}p^2 + C; \\ y = \frac{8}{27}p^3 - \frac{4}{9}p^2 + x. \end{cases}$$

Виключивши параметр p, остаточно знайдемо

$$y = x - \frac{4}{27} \quad \text{і} \quad y = (x - C)^{\frac{3}{2}} + C. \qquad (5)$$

Дослідимо, чи є серед функцій (5) особливі розв'язки заданого рівняння. Складемо систему рівнянь для визначення дискримінантної кривої:

$$\begin{cases} 8y'^3 - 12y'^2 = 27(y - x); \\ 24y'^2 - 24y' = 0. \end{cases}$$

Виключивши з цих рівнянь y', знайдемо дискримінантну криву: $y = x$ і $y = x - \frac{4}{27}$.

Вітка $y = x$ дискримінантної кривої не є інтегральною кривою. Функція $y = x - \frac{4}{27}$ є розв'язком заданого рівняння. Перевіримо, чи дотикаються в кожній точці до прямої $y = x - \frac{4}{27}$ інші інтегральні криві. Умови дотику в цьому разі набирають вигляд $x_0 - \frac{4}{27} = (x_0 - C)^{\frac{3}{2}} + C$, $1 = \frac{3}{2}(x_0 - C)^{\frac{1}{2}}$. Ці умови задовольняють всі пари чисел $(x_0; C)$ такі, що $x_0 - C = \frac{4}{9}$. Це означає, що в будь-якій точці $(x_0; y_0)$ прямої $y = x - \frac{4}{27}$ до неї дотикається одна з кривих сім'ї $y = (x - C)^{3/2} + C$, а саме та, для якої $C = x_0 - \frac{4}{9}$. Отже, пряма $y = x - \frac{4}{27}$ складається з точок неєдиності і є особливою інтегральною кривою.

1.135. Кожна з функції сім'ї $y = Ce^x + \frac{4}{C}$ є розв'язком диференціального рівняння $(y')^2 - yy' + 4e^x = 0$. Знайти особливі розв'язки цього рівняння.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо систему рівнянь для визначення дискримінантної кривої:

$$\begin{cases} y = Ce^x + \frac{4}{C}, \\ e^x - \frac{4}{C^2} = 0. \end{cases}$$

Виключивши параметр C, дістанемо $y = \pm 4e^{\frac{x}{2}}$. Неважко бачити, що обидві вітки $y = 4e^{x/2}$ і $y = -4e^{x/2}$ дискримінантної кривої є інтегральними кривими даного рівняння. Оскільки функція $\Phi(x, y, C) \equiv y - Ce^x - \frac{4}{C}$ неперервно диференційовна по x і по y і $\Phi'_y = 1 \neq 0$, то криві $y = \pm 4e^{x/2}$ є обвідними сім'ї ліній $y = Ce^x + \frac{4}{C}$, а отже, особливими інтегральними кривими даного рівняння.

Такий самий висновок можна зробити, впевнившись, що в кожній своїй точці лінії $y = \pm 4e^{x/2}$ дотикаються до однієї з кривих $y = Ce^x + \frac{4}{C}$. Справді, запишемо умови дотику в точці з абсцисою x_0 лінії $y = 4e^{x/2}$ і однієї з ліній $y = Ce^x + \frac{4}{C}$:

$$\begin{cases} 4e^{\frac{x_0}{2}} = Ce^{x_0} + \frac{4}{C}; \\ 2e^{\frac{x_0}{2}} = Ce^{x_0}. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи знайдемо $C = 2e^{-\frac{x_0}{2}}$ і підставимо в друге рівняння. Маємо $4e^{\frac{x_0}{2}} = 2e^{x_0/2} + 2e^{x_0/2}$. Ця тотожність означає, що в будь-якій точці кривої $y = 4e^{x/2}$ з абсцисою x_0 до неї дотикається одна з кривих $y = Ce^x + \frac{4}{C}$, а саме та, в якої $C = 2e^{-x_0/2}$, тобто крива

$$y = 2e^{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)} + 2e^{\frac{x_0}{2}} = 2e^{\frac{x_0}{2}}\left(e^{x - x_0} + 1\right).$$

Отже, ще раз доведено, що $y = 4e^{x/2}$ є особливим розв'язком заданого рівняння. Так само можна показати, що в кожній точці кривої $y = -4e^{x/2}$ з абсцисою x_0 до неї дотикається одна з кривих $y = Ce^x + \frac{4}{C}$, тобто що й $y = -4e^{x/2}$ є особливим розв'язком даного рівняння.

1.136. Кожна з парабол $x^2 + C(x - 3y) + C^2 = 0$ є інтегральною кривою диференціального рівняння $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$. Знайти особливі розв'язки цього рівняння.

Р о з в' я з а н н я. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) \equiv x^2 + C(x - 3y) + C^2 = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C}(x, y, C) \equiv x - 3y + 2C = 0 \end{cases}$$

знаходимо рівняння дискримінантної кривої:

$$x^2 - \frac{1}{4}(x - 3y)^2 = 0,$$

тобто $y = x$ і $y = -\frac{x}{3}$. Обидві вітки $y = x$ і $y = -\frac{x}{3}$ дискримінантної кривої є інтегральними кривими даного рівняння. Перевіримо, чи будуть ці вітки обвідними даної сім'ї парабол.

Пряма $y = x$ в точці $(x_0; x_0)$ перетинається з однією з парабол $x^2 + C(x - 3y) + C^2 = 0$, а саме, з параболою $y = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{x_0} + x + x_0\right)$.

Крім того, похідні функцій $y = x$ і $y = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{x_0} + x + x_0\right)$ в точці $x = x_0$ дорівнюють 1, тобто пряма $y = x$ дотикається до параболи $y = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{x_0} + x + x_0\right)$. Отже, вона є обвідною даної сім'ї парабол, а функція $y = x$ є особливим розв'язком заданого рівняння.

Пряма $y = -\frac{x}{3}$ в точці $\left(-\frac{x_0}{3};\ x_0\right)$ перетинається з однією з парабол даної сім'ї, а саме з тією, для якої $C = -x_0$, тобто з параболою $y = \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{x_0} + x - x_0\right)$. Похідна від цієї функції в точці $x = x_0$ дорівнює $-\frac{1}{3}$. Таким чином, пряма $y = -\frac{x}{3}$ в цій точці дотикається до параболи, а тому вона є обвідною даної сім'ї парабол. Отже, функція $y = -\frac{x}{3}$ також є особливим розв'язком заданого рівняння.

1.137. Знайти лінії, ортогональні до ліній сім'ї гіпербол $xy = a$.

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння даної сім'ї гіпербол:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Диференціальне рівняння ліній, ортогональних до даних гіпербол, має вигляд

$$-\frac{x}{\frac{dy}{dx}} + y = 0, \quad y\frac{dy}{dx} - x = 0.$$

Звідси

$$ydy - xdx = 0,$$
$$y^2 - x^2 = C.$$

Отже, шукані лінії утворюють сім'ю гіпербол.

1.138. Знайти лінії, ортогональні до ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ax$.

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння даної сім'ї кіл: $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2a$, $2x^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$.

Диференціальне рівняння шуканих ліній має вигляд

$$-\frac{2xy}{\frac{dy}{dx}} = y^2 - x^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Розв'язавши його (наприклад, як однорідне рівняння), знаходимо шукані лінії:

$$C(x^2 + y^2) = y.$$

1.139. Знайти рівняння сім'ї ліній, ортогональних до інтегральних кривих диференціального рівняння $y \ln y' + x = \frac{x}{y'}$.

Р о з в' я з а н н я. Складемо диференціальне рівняння шуканої сім'ї ліній. Для цього в даному рівнянні замінимо y' на $-\frac{1}{y'}$. Маємо

$$y \ln\left(-\frac{1}{y'}\right) + x = -xy', \text{ або } y \ln(-y') = x(1 + y').$$

Розв'яжемо це рівняння методом введення параметра. Покладемо $p = -y'$, тобто $dy = -pdx$. Тоді

$$y = \frac{1-p}{\ln p} x, \quad dy = \frac{1-p}{\ln p} dx - x \frac{p \ln p - p + 1}{p \ln^2 p} dp.$$

Прирівнявши вирази при dy, дістанемо диференціальне рівняння

$$-pdx = \frac{1-p}{\ln p} dx - x \frac{p \ln p - p + 1}{p \ln^2 p} dp,$$

або

$$\frac{1 - p + \ln p \cdot p}{\ln p} dx = \frac{p \ln p - p + 1}{p \ln^2 p} dp, \quad dx = \frac{x}{p \ln p} dp.$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд $x = C \ln p$. Тому лінії шуканої сім'ї описуються параметричними рівняннями: $x = C \ln p$, $y = \frac{1-p}{\ln p} x$. Виключивши параметр p, дістанемо

$$y = C(1 - e^{x/C}).$$

1.140. Використавши результат задачі 1.16, скласти рівняння сім'ї еквіпотенціальних ліній електричного поля, який створюється диполем. (Еквіпотенціальні лінії, або лінії однакового потенціалу, ортогональні до силових ліній поля.)

Р о з в' я з а н н я. Нехай відстань між зарядами $+q$ і $-q$, які утворюють диполь, дорівнює $2a$. Як показано в задачі 1.16, диференціальне рівняння силових ліній має вигляд:

$$\left(\frac{x-a}{r_2^3} - \frac{x+a}{r_1^3}\right)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) y = 0,$$

де

$$r_1^2 = (x+a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x-a)^2 + y^2.$$

Оскільки лінії однакового потенціалу ортогональні до силових ліній, то їх диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$r_1^3 r_2 dr_2 - r_2^3 r_1 dr_1 = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, дістаємо $\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = C$. Здобуте рівняння виражає основну геометричну властивість ліній однакового потенціалу даного електричного поля: різниця величин, обернених відстаням довільної точки від заряджених центрів поля, є сталою величиною. Перейшовши до змінних x і y, дістанемо шукане рівняння ліній:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = C.$$

1.141. Знайти рівняння сім'ї ліній, ортогональних до інтегральних кривих диференціального рівняння

$$yy' + x + y' \sin \frac{1}{y'} = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Замінюючи в даному рівнянні y' на $-\frac{1}{y'}$, дістанемо диференціальне рівняння шуканої сім'ї: $y = xy' + \sin y'$. Це рівняння Клеро. Розв'яжемо його. Нехай $y' = p$, $y = xp + \sin p$. Тоді $pdx = xdp + pdx + \cos pdp$, $(x + \cos p)\, dp = 0$, $x = -\cos p$ або $p = C$. Розв'язки рівняння Клеро такі:

$$y = Cx + \sin C$$

і

$$\begin{cases} x = -\cos p; \\ y = px + \sin p \end{cases} \quad \text{(особливий розв'язок).}$$

1.142. Скласти рівняння сім'ї ліній, які перетинають еліпси $3x^2 + y^2 = C$ під кутом 45°.

Р о з в' я з а н н я. Продиференціювавши обидві частини рівняння еліпсів, дістанемо диференціальне рівняння їх:

$$3x + yy' = 0.$$

Замінюючи в цьому рівнянні y' на $\frac{y' \pm 1}{1 \pm y'}$, дістанемо диференціальні рівняння шуканої сім'ї ліній:

$$3x + y\frac{y' \pm 1}{1 \pm y'} = 0,$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-3x}{y+3x} \text{ і } \frac{dy}{dx} = \frac{3x+y}{3x-y}. \qquad (6)$$

Розв'язавши перше з цих рівнянь (наприклад, як однорідне), знайдемо

$$y^2 + 2xy + 3x^2 = Ce^{-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y+x}{\sqrt{2}x}}.$$

Оскільки друге з рівнянь (6) збігається з першим, якщо в ньому замінити y на $-y$, то його розв'язки визначаються співвідношенням

$$y^2 - 2xy + 3x^2 = Ce^{-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-y}{\sqrt{2}x}}.$$

1.143. Знайти криву, в якої відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис дорівнює абсцисі точки дотику.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $y = y(x)$ — шукана крива, AM — дотична до неї в точці $(x; y(x))$, $MB \perp Ox$ (рис. 29). За умовою, $|AM| = |OB|$. Оскільки $|OB| = x$, $|MB| = y$, а $|AB| = |MB| \operatorname{ctg} \varphi$, $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{y'}$, то

$$|AM| = \sqrt{|AB|^2 + |BM|^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Складемо диференціальне рівняння, яке задовольняє шукана крива:

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = x, \text{ або } y = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Розв'яжемо це рівняння. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = \frac{xp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad dy = \frac{pdx}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{xdp}{(1+p^2)^{3/2}},$$

$$pdx = \frac{pdx}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{xdp}{(1+p^2)^{3/2}}, \quad p(\sqrt{1+p^2} - 1)\,dx = \frac{xdp}{1+p^2},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} - 1)(1+p^2)}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{(\sqrt{1+p^2}+1)\,dp}{p^3(1+p^2)}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\ln|x| = \int \frac{(\sqrt{1+p^2}+1)\,dp}{p^3(1+p^2)} + \ln C.$$

Обчислимо інтеграл, виконавши заміну $\sqrt{1+p^2} = z$. Знаходимо

$$\int \frac{(\sqrt{1+p^2}+1)}{p^3(1+p^2)}\,dp = \int \frac{dz}{z(z+1)(z-1)^2} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}\right)dz =$$

$$= \ln z - \frac{1}{4}\ln(z+1) - \frac{3}{4}\ln|z-1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}.$$

Перейшовши до змінної p, дістанемо

$$\ln|x| = \ln\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{1+p^2}+1) - \frac{3}{4}\ln|\sqrt{1+p^2} - 1| -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}-1}+\ln C_1,$$

$$x=\left(\frac{(1+p^2)\,|\sqrt{1+p^2}-1\,|}{|\,p\,|^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2(\sqrt{1+p^2}-1)}}C.$$

Отже, умову задачі задовольняють криві, задані такими параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x=\left(\dfrac{(1+p^2)\,|\sqrt{1+p^2}-1\,|}{|\,p\,|^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2(\sqrt{1+p^2}-1)}}C; \\ y=\dfrac{xp}{\sqrt{1+p^2}}. \end{cases}$$

1.144. Знайти криву, в якої відрізок будь-якої її нормалі, який міститься між координатними осями, дорівнює a.

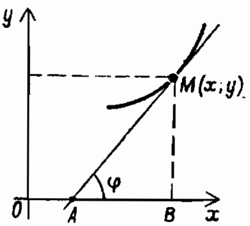


Рис. 29

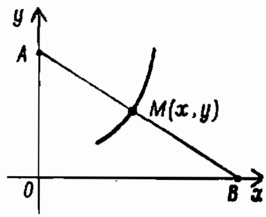


Рис. 30

Р о з в' я з а н н я. Нехай AB — нормаль, проведена до шуканої кривої $y=y(x)$ в точці $M(x;\ y)$ (рис. 30). Рівняння цієї нормалі має вигляд

$$Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x),$$

де X, Y — змінні координати точки на нормалі. Ординату точки A і абсцису точки B знаходимо з рівнянь

$$Y-y=\frac{x}{y'},\qquad -y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

тобто $A\left(0;\ y+\dfrac{x}{y'}\right)$, $B(x+yy';\ 0)$.

За умовою

$$\sqrt{(x+yy')^2+\left(y+\frac{x}{y'}\right)^2}=a, \text{ або } \sqrt{\frac{(x+yy')^2}{y'^2}(1+y'^2)}=a.$$

Введемо параметр, поклавши $y' = \operatorname{tg} p$, $dy = \operatorname{tg} p dx$. Тоді

$$\left| \frac{x + y \operatorname{tg} p}{\sin p} \right| = a, \text{ або } x = -y \operatorname{tg} p \pm a \sin p.$$

Обчислимо dx:

$$dx = -dy \operatorname{tg} p - y \frac{1}{\cos^2 p} dp \pm a \cos p dp.$$

Замінюючи в останньому співвідношенні dx на $\operatorname{ctg} p dy$, дістаємо

$$\frac{dy}{dp} + \operatorname{tg} p y = \pm a \sin p \cos^2 p.$$

Розв'язавши це лінійне рівняння, знайдемо

$$y = C \cos p \mp \frac{a}{2} \cos^3 p.$$

Отже, шукані лінії визначаються рівняннями

$$\begin{cases} x = -y \operatorname{tg} p \pm a \sin p; \\ y = C \cos p \mp \frac{a}{2} \cos^3 p. \end{cases}$$

1.145. Знайти криву, в якої відрізок будь-якої її дотичної між координатними осями дорівнює a.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ — точка шуканої кривої. Рівняння дотичної до кривої в цій точці має вигляд

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

де X і Y — змінні координати точки на дотичній, а x, y — координати точки дотику (координати точки на кривій). Дотична перетинає осі координат в точках $\left(x - \frac{y}{y'}; 0\right)$ і $(0; y - xy')$.

За умовою

$$\sqrt{\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2} = a.$$

Розв'язавши це рівняння відносно y, дістанемо

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Отже, шукана крива є інтегральною кривою рівняння Клеро.

Розв'язавши це рівняння, знаходимо

$$y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}} \text{ і } \begin{cases} x = \pm \dfrac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}, \\ y = xp \pm \dfrac{a}{\sqrt{1 + p^2}} = \pm \dfrac{ap^3}{(1 + p^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Виключивши параметр p з останніх двох рівностей, дістанемо

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Це рівняння астроїди. Отже, зазначену в умові задачі властивість мають астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ і сім'ї прямих $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$. Зазначимо, що астроїда є обвідною цих сімей прямих.

Задачі для самостійної роботи

Знайти розв'язки рівнянь

1. $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.
2. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
3. $y' = 2e^x \cos x$.
4. $y' = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = -1$.
5. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 1$.
6. $y' + 1 = y$.
7. $y' = \sin y$.
8. $y' = y \ln y$.
9. $y' = x + y + 1$.
10. $y' = \sqrt{y - x} + 1$.
11. $y' = \sqrt{4y^2 - 1}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$.
12. $y = \int\limits_1^x e^{-y} dx, \quad x > 0$.
13. $y = 1 + \int\limits_0^x y dx$.
14. $2x\sqrt{1 - y^2}\, dx + y dy = 0$.
15. $y' = \dfrac{y - 1}{x + 1}$.
16. $(y^2 + xy^2)\, dx + (x^2 - yx^2)\, dy = 0$.

Не розв'язуючи рівнянь, зобразити схематично поведінку їхніх інтегральних кривих

17. $y' = y(1 - y^4)$.
18. $y' = (y - 1)^2, (y - 2)$.
19. $y' = y^2 \sin y$.
20. $y' = \sqrt{4 - y} \ln y$.
21. $y' = x - e^y$.
22. $y' = \dfrac{y}{x + y}$.

Розв'язати задачі

23. Скласти диференціальне рівняння кіл радіуса 1, центри яких лежать на прямій $y = 2x$.

24. Скласти диференціальне рівняння парабол з віссю, паралельною осі ординат, *які одночасно дотикаються до прямих* $y = 0$ *і* $y = x$.

25. Є деяка кількість радіоактивної речовини. Відомо, що через 30 днів розпадається 50 % цієї речовини. Через скільки днів залишиться 1 % початкової кількості речовини?

26. У середовищі із сталою температурою 20 °С помістили тіло, нагріте до 100 °С. Через 10 хв. температура тіла знизилася до 60 °С. Через який час температура тіла дорівнюватиме 25 °С?

27. Через 12 год після початку досліду кількість деякої популяції бактерій зросла втричі. У скільки разів збільшиться число бактерій через три доби?

28. Знайти криву, яка проходить через точку (2; 3) і має властивість, що відрізок її довільної дотичної між осями координат ділиться в точці дотику навпіл.

29. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (1; 1) і має властивість, що тангенс кута нахилу кожної її дотичної пропорційний до квадрата ординати точки дотику. Знайти рівняння цієї кривої.

30. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (0; —2) і має властивість, що тангенс кута нахилу її дотичної в будь-якій точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці. Знайти рівняння цієї кривої.

31. Знайти криву, для якої тангенс кута нахилу її дотичної в будь-якій точці на кривій в n разів більший від тангенса кута нахилу прямої, що проходить через цю саму точку і початок координат.

32. Довести, що крива, тангенс кута нахилу дотичної якої до осі абсцис у будь-якій точці пропорційний до абсциси точки дотику, є парабола.

33. Знайти в полярних координатах рівняння такої кривої, в кожній точці якої тангенс кута між радіусом-вектором і дотичною до кривої дорівнює квадрату радіуса-вектора.

34. Моторний човен рухається по озеру із швидкістю 20 км/год. Через 40 с після виключення двигуна швидкість човна зменшується до 8 км/год. Опір води пропорційний до швидкості руху човна. Якою буде швидкість човна через 2 хв після виключення двигуна?

35. Матеріальна точка M масою m знаходиться на кривій $y = y(x)$, яка обертається навколо вертикальної осі із сталою кутовою швидкістю. Скласти рівняння кривої, якщо матеріальна точка буде в рівновазі при довільному положенні на кривій.

36. Ракету пущено вертикально вгору з початковою швидкістю 100 м/с. Опір повітря сповільнює її рух, надаючи ракеті від'ємного прискорення, пропорційного до квадрата її швидкості ($-kv^2$). Через який час ракета досягне найбільшої висоти?

37. Куля, рухаючись із швидкістю $v_0 = 400$ м/с, пробиває стіну товщиною $h = 0{,}2$ м і вилітає з неї із швидкістю 100 м/с. Вважаючи, що сила опору стіни пропорційна до квадрата швидкості руху кулі, знайти час T руху кулі в стіні.

38. У посудину, в якій є 100 л 10 %-ного розчину солі, кожну хвилину вливається 30 л води і витікає 20 л суміші. Яка кількість солі залишиться в посудині через 10 хв (вважати, що суміш безперервно перемішується)?

39. На дні циліндричної посудини, наповненої рідиною, утворилася щілина. Протягом першої доби витекло 10 % рідини. Вважаючи, що швидкість витікання рідини пропорційна до висоти рівня її в посудині, знайти час, за який з посудини витече половина рідини.

40. Вітер, проходячи через ліс, внаслідок опору дерев, втрачає швидкість. На нескінченно малому шляху ця втрата пропорційна до швидкості вітру на початку цього шляху і до його довжини. Знайти швидкість вітру, який пройшов у лісі 150 м, знаючи, що початкова його швидкість дорівнювала 12 м/с, а після проходження в лісі шляху $s = 1$ м швидкість зменшилась до 11,8 м/с.

41. У закритому приміщенні об'ємом V м³ стоїть відкрита посудина з водою. Швидкість випаровування води пропорційна до різниці між кількістю q водяної пари, яка насичує 1 м³ повітря при даній температурі, і кількістю q водяної пари, яка є в 1 м³ повітря в даний момент (вважатимемо, що температура повітря й води, а також площа, з якої випаровується вода, сталі). У початковий момент у посудині було m_0 (г) води, а в 1 $м^3$ повітря q_0 (г) пари. Скільки води залишиться в посудині через час t?

Розв'язати рівняння

42. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

43. $xy' = y + x\,(1 + e^{y/x})$.

44. $(4y^2 + x^2)\,y' = xy$.

45. $xy' = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right)$.

46. $(3x - 7y - 3)\,y' + (7x - 3y - 7) = 0$.

47. $(x + y - 2)\,y' = 1 - 2x - 2y$.

48. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

49. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

50. $x^2 y' - y = x^2 e^{x - \frac{1}{x}}$.

51. $y' \sin x \cos x = y + \sin^3 x$.

52. $y' + 4x^3 y^3 + 2xy = 0$.

53. $xy' + xy^2 = y$.

54. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$.

55. $x\,(2x - 1)\,y' + y^2 + 4x = (4x + 1)\,y$.

56. $yy' + y^2 + 4x\,(x + 1) = 0$.

57. $(2x^2 y - 2x^3)\,y' + 2y^2 x - 6x^2 y + 4x^3 = 0$.

58. $x^2\,(3y + 2x)\,y' + 3x\,(y + x)^2 = 0$.

59. $(x^2 y - 1)\,y' + xy^2 - 1 = 0$.

60. $x\,(xy - 3)\,y' + xy^2 - y = 0$.

61. $(2x^2 y + x)\,y' - x^2 y^2 + 2xy^2 + y = 0$.

62. $(2x^3 y - x)\,y' - 2xy^2 - y = 0$.

Розв'язати задачі

63. Побудувати послідовні пікаровського наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ у задачі Коші:

а) $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$; б) $y' = 1 + x \sin y$, $y(\pi) = 2\pi$.

64. При яких невід'ємних a порушується єдиність розв'язків рівняння $y' = |y|^a$ і в яких точках?

65. На якому проміжку існує розв'язок рівняння $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$?

66. Довести, що для розв'язку рівняння $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ на проміжку $[0;\ 1]$ справедлива оцінка

$$\left| y - \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} \right| \leqslant 0{,}0015 x^8.$$

67. Як поводяться на проміжку $[0;\ 2]$ послідовні наближення для рівнянь $y' = y^2$, $y' = -y^2$, $y' = y$, якщо для всіх рівнянь $y(0) = 1$?

Розв'язати рівняння

68. $y'^2 = y^3 - y^2$.

69. $y'^2 + y^2(\ln^2 y - 1) = 0$.

70. $y'^2 + xy'^2 - y = 0$.

71. $xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0$.

72. $xy'^2 + xy' - y = 0$.

73. $(3x + 1)\,y'^2 - 3\,(y + 2)\,y' + 9 = 0$.

74. $x^2 y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0$.

75. $x^4 y'^2 - xy' - y = 0$.

76. $yy' - 2xy' + y = 0$.

77. $\ln y' + 2\,(xy' - y) = 0$.

78. $\sin y' + y' = x$.

79. $y'^2 \sin y' = y$.

Знайти особливі розв'язки рівнянь

80. $y'^2 - yy' + e^x = 0$. 81. $4(1 - y) = (3y - 2)^2 y'^2$.

82. $y' = \sqrt[3]{y}$. 83. $y' = \sqrt{y} + 1$.

84. $y' = 2x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{y}$. 85. $y' = (\sqrt[5]{y} + \sqrt[6]{x} \sqrt[15]{y}) \frac{5}{8}$.

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Рівняння, інтегровні в квадратурах.

Рівняння, які допускають зниження порядку

1. Загальні поняття й означення. Рівняння

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

де x — незалежна змінна, y — шукана функція, а функція F визначена й неперервна в деякій області $G \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geqslant 1$, та залежна від $y^{(n)}$, називається *звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку*.

Диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2}$$

де функція f також неперервна в деякій області $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Розв'язком рівняння (2) на інтервалі $I = (a, b)$ називається функція $y(x)$, яка задовольняє умови:

1) $y(x)$ неперервно диференційовна n разів на I;

2) $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in D$, $\forall x \in I$;

3) $y(x)$ перетворює рівняння (2) в тотожність, тобто

$$y^{(n)}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in I.$$

Аналогічно означається розв'язок рівняння (1).

Задачею Коші або *початковою задачею* для рівняння (2) називається задача знаходження розв'язку $y(x)$ рівняння (2), який задовольняє початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

де $x_0 \in I$, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ — задані числа.

Теорема Пеано. *Якщо функція f неперервна в області D, то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y^{(n-1)}) \in D$ існує розв'язок рівняння* (2), *визначений в деякому околі точки $x_0 \in I$, який задовольняє початкові умови* (3).

Існування та єдність розв'язку задачі Коші гарантує наступна теорема.

Теорема Коші — Пікара. *Якщо функція f неперервна в області D і задовольняє умову Ліпшіца по змінним y, y', ..., $y_0^{(n-1)}$, то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ існує єдиний розв'язок рівняння* (2), *визначений в деякому околі точки $x_0 \in I$, який задовольняє початкові умови* (3).

Умови теореми Коші — Пікара виконуються, зокрема, якщо функція f неперервна на D і має в околі точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ обмежені частинні похідні по y, $y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Нехай D — область, в кожній точці якої задача Коші для рівняння (2) має єдиний розв'язок. Функція

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{4}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі, називається *загальним розв'язком рівняння* (2) *в області* D, якщо:

1) функція φ має неперервні частинні похідні по x до n-го порядку включно;

2) для будь-якої точки $(x_0, y_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ система

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{aligned} C_1^0 &= \psi_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \\ C_2^0 &= \psi_2(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n^0 &= \psi_n(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}); \end{aligned} \tag{5}$$

3) функція $\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$ є розв'язком рівняння (2) при будь-яких допустимих значеннях $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, які визначаються рівностямм (5), при умові, що точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ належить області D.

Якщо загальний розв'язок (4) в області D заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{6}$$

то (6) називають *загальним інтегралом рівняння* (2) в області D.

Розв'язок, який можна знайти з (4) при конкретних числових значеннях $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називають *частинним розв'язком рівняння* (2). Аналогічно вводиться поняття частинного інтеграла. Якщо відомий загальний розв'язок (4) або загальний інтеграл (6), то розв'язати задачу Коші можна так. Із співвідношень (4) або (6) і тих, які дістають з них за допомогою $(n-1)$-кратного диференціювання по x з використанням початкових умов (3), складають систему рівнянь для визначення $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Розв'язавши цю систему і підставивши конкретні значення $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ в (4) або (6), дістанемо розв'язок задачі Коші

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) \tag{7}$$

або *частинний інтеграл* $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) = 0$, яким неявно задається розв'язок задачі Коші.

Якщо в рівності (7) врахувати явний вид залежності $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ від $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, то дістанемо загальний розв'язок у так званій *формі Коші*:

$$y = \psi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}).$$

Якщо співвідношення (4) або (6) задані у вигляді

$$x = x(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$y = y(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (8)$$
$$t \in T,$$

то (8) називають *загальним інтегралом у параметричній формі.*

Для рівняння (1), не розв'язаного відносно похідної $y^{(n)}$, задача Коші ставиться аналогічно задачі Коші для рівняння (2). При цьому, якщо заданим числам $x_0, y_0, \ldots$ $\ldots, y_0^{(n-1)}$ і кожному із значень $y_0^{(n)}$, які визначаються з рівняння

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) = 0,$$

відповідає лише один розв'язок, то кажуть, що задача Коші має єдиний розв'язок.

Теорема (існування і единості розв'язку задачі Коші для рівняння (1)). *Нехай функція F неперервна в області G і має неперервні частинні похідні по $y, y', \ldots$ $\ldots, y^{(n)}$. Тоді для будь-якої точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) \in G$ такої, що*

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) \neq 0,$$

існує єдиний розв'язок рівняння (1), *визначений в деякому околі точки $x_0 \in I$, який задовольняє початкові умови* (3).

Поняття загального розв'язку й загального інтеграла рівняння (1) вводяться аналогічно цим поняттям для рівняння (2).

Якщо $y(x)$ — розв'язок рівняння (1), то множина точок $\{(x, y(x)) \mid x \in I\}$, тобто графік розв'язку $y = y(x)$, називається *інтегральною кривою рівняння* (1).

З геометричної точки зору розв'язок (загальний інтеграл) є сім'єю інтегральних кривих на площині, яка залежить від n параметрів $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Якщо дано рівняння n-параметричної сім'ї кривих, наприклад, у вигляді (6), то продиференціювавши його n разів по x і виключивши з утворених співвідношень сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, дістанемо диференціальне рівняння даної сім'ї кривих (його порядок не перевищує n).

Співвідношення виду

$$\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0, \qquad (9)$$

де y — розв'язок рівняння (1), здобуте внаслідок інтегрування рівняння (1), називається *проміжним інтегралом k-го порядку рівняння* (1).

Якщо відомий проміжний інтеграл k-го порядку (9), то задача інтегрування рівняння n-го порядку (1) зводиться до простішої задачі інтегрування рівняння $(n - k)$-го порядку (9). Проміжний інтеграл

$$\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0 \qquad (10)$$

називається *першим інтегралом.*

Якщо відомо k різних перших інтегралів, то порядок рівняння можна знизити на k одиниць. Якщо відомо n різних перших інтегралів, то, виключивши з них всі похідні $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, дістанемо загальний інтеграл рівняння.

Функція $\xi(x)$ називається *особливим розв'язком диференціального рівняння* (1), якщо:

1) $\xi(x)$ перетворює диференціальне рівняння в тотожність;
2) для будь-якої точки $x_0 \in I$ задача Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = \xi(x_0), \quad y'(x_0) = \xi'(x_0), \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \xi^{(n-1)}(x_0)$$

має більш як один розв'язок.

2. Деякі види рівнянь вищих порядків, інтегровних у квадратурах.

а) ***Рівняння, які містять лише похідну n-го порядку шуканої функції й незалежну змінну.*** Розглянемо рівняння

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{11}$$

У багатьох випадках рівняння (11) можна параметризувати: $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, де $\varphi(t)$ — диференційовна функція. У цьому випадку можна знайти загальний інтеграл в параметричній формі (8). Маємо $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, $dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$, звідки $y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1)$.

Аналогічно знаходимо $y^{(n-2)}$ тощо. Для y дістаємо вираз виду $y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Тому система $x = \varphi(t)$, $y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ є загальним інтегралом рівняння (11) у параметричній формі.

Окремим випадком (11) є рівняння

$$y^{(n)} = f(x), \tag{12}$$

де $f(x)$ — неперервна функція на $I = (a, b)$.

Якщо вважати $x = x \in I$ параметром, то загальний розв'язок рівняння (12) дістанемо у вигляді

$$y = \int\int \ldots \int f(x)\,dxdx \ldots dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n.$$

Загальний розв'язок рівняння (12) у формі Коші має вигляд

$$y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dxdx \ldots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \cdots + y_0'(x - x_0) + y_0,$$

де $x_0 \in I$; $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — будь-які числа.

б) ***Рівняння виду***

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{13}$$

Якщо рівняння (13) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}), \tag{14}$$

то, ввівши нову невідому функцію $u = y^{(n-1)}$, рівняння (14) зведемо до виду

$$u' = f(u). \tag{15}$$

Загальним інтегралом рівняння (15) є

$$x + C_1 = \int \frac{du}{f(u)}, \quad f(u) \neq 0. \tag{16}$$

Припустимо, що (16) можна розв'язати відносно u:

$$u = \psi(x, C_1), \quad y^{(n-1)} = \psi(x, C_1). \tag{17}$$

Оскільки (17) є рівняння типу (12), то загальний розв'язок рівняння (13) дістанемо у вигляді

$$y = \underbrace{\int\int \dots \int}_{n-1} \psi(x, C_1)\, dx dx \dots dx + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n.$$

Якщо рівняння (13) задано в параметричній формі $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-1)} = \psi(t)$, де $\psi(t)$ — диференційовна функція, то його інтегрують так.

Із співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ дістають

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)},$$

звідки

$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_1 \equiv \xi(t, C_1), \tag{18}$$

Далі

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}, \quad y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_2,$$
$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx, \dots, dy = y'dx, \quad y = \int y'dx + C_n \equiv \eta(t, C_2, \dots, C_n). \tag{19}$$

Сукупність (18), (19) є загальним інтегралом рівняння (13) у параметричній формі.

в) ***Рівняння виду***

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \tag{20}$$

За допомогою заміни

$$y^{(n-2)} = u \tag{21}$$

рівняння (20) зводиться до рівняння другого порядку

$$F(u, u'') = 0. \tag{22}$$

Припустимо, що рівняння (22) можна розв'язати відносно u'':

$$u'' = f(u). \tag{23}$$

Помноживши (23) на інтегрувальний множник $\mu = 2u'$, дістанемо

$$2u'u'' = 2f(u)\,u'. \tag{24}$$

З (24) маємо перший інтеграл рівняння (23):

$$u'^2 = 2\int f(u)\,du + C_1. \tag{25}$$

Звідси знаходимо

$$\frac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)\,du + C_1}} = dx, \quad 2\int f(u)\,du + C_1 \neq 0.$$

Тоді загальний інтеграл рівняння (23) має вигляд

$$\int \frac{du}{\pm\sqrt{2f(u)\,du + C_1}} = x + C_2. \tag{26}$$

Врахувавши заміну (21), з (26) дістанемо проміжний інтеграл рівняння (20) виду

$$\Psi(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0,$$

тобто диференціальне рівняння $(n-2)$-го порядку типу (11), яке інтегрується в квадратурах.

Якщо рівняння (20) задано в параметричному вигляді $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-2)} = \psi(t)$, то його інтегрують так.

Із співвідношень $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$, дістаємо рівняння відносно $y^{(n-1)}$ виду

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

звідки

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt + C_1} \equiv \xi(t, C_1).$$

Отже, для $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ маємо параметричне зображення $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-1)} = \xi(t, C_1)$, яке вже зустрічалося при інтегруванні рівняння (13).

3. Деякі типи рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку

а) ***Рівняння, які не містять шуканої функції і кількох послідовних похідних.*** Розглянемо рівняння виду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k < n. \tag{27}$$

За допомогою заміни $y^{(k)} = u$, де u — нова невідома функція, рівняння (27) можна звести до рівняння $(n-k)$-го порядку:

$$F(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0. \tag{28}$$

Якщо рівняння (28) інтегрується в квадратурах, то, повертаючись до змінної y, дістаємо проміжний інтеграл рівняння (27):

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}), \text{ або } \Phi(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0. \tag{29}$$

Рівняння (29) є рівняннями виду (11).

б) ***Рівняння, які явно не містять незалежної змінної.*** Розглянемо рівняння виду

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{30}$$

За допомогою заміни

$$y' = p, \tag{31}$$

де $p = p(y)$ — нова шукана функція, y — нова незалежна змінна, порядок рівняння (30) можна знизити на одиницю, оскільки

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = pp',$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = (p''p + p'^2)\,p \tag{32}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = g(p, p', \ldots, p^{(n-1)}),$$

$$p^{(i)} = \frac{d^ip}{dy^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Підставивши (31), (32) в (30), дістанемо рівняння (n — 1)-го порядку відносно нової шуканої функції p:

$$F_1(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0. \qquad (33)$$

Якщо відомий загальний інтеграл рівняння (33):

$$\Phi_1(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0,$$

то співвідношення

$$\Phi_1(y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0 \qquad (34)$$

є проміжним інтегралом (n — 1)-го порядку рівняння (30) — диференціальним рівнянням першого порядку інтегровного типу. Загальний інтеграл рівняння (34), який має вид $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі, є загальним інтегралом рівняння (30).

При виконанні заміни (31) можлива втрата розв'язків виду $y = \text{const}$. Безпосередньою підстановкою необхідно перевірити, чи справді рівняння (30) має такі розв'язки.

в) ***Рівняння, однорідні відносно* y, y′, ..., y$^{(n)}$.** Розглянемо рівняння виду

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (35)$$

де функція F є однорідною відносно $y, y', \ldots, y^{(n)}$ з показником однорідності m, тобто

$$F(x, \lambda^t y, \lambda^t y', \ldots, \lambda^t y^{(n)}) = \lambda^{mt} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$
$$\lambda > 0.$$

За допомогою заміни

$$y' = yu, \qquad (36)$$

де u — нова невідома функція, порядок рівняння (35) можна знизити на одиницю. Маємо:

$$\begin{aligned} y' &= yu, \\ y'' &= y(u^2 + u'), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= yg(u, u', \ldots, u^{(n-1)}). \end{aligned} \qquad (37)$$

Підставивши (37) у (35), дістанемо

$$y^m F(x, 1, u, u^2 + u', \ldots, g(u, u', \ldots, u^{(n-1)})) = 0. \qquad (38)$$

Скоротивши рівняння (38) на y^m (розв'язок $y = 0$ не втратиться), дістанемо диференціальне рівняння (n — 1)-го порядку відносно функції u:

$$F(x, 1, u, u^2 + u', \ldots, g(u, u', \ldots, u^{(n-1)})) = 0. \qquad (39)$$

Якщо відомий загальний розв'язок $u = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ рівняння (39), то, як випливає з (36), загальний розв'язок рівняння (35) має вигляд

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1 C_2, \ldots, C_{n-1}) dx}, \qquad (40)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі. Розв'язок $y = 0$ дістаємо з (40) при $C_n = 0$.

г) ***Узагальнено-однорідні рівняння.*** Розглянемо рівняння виду

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{41}$$

Рівняння (41) називається узагальнено-однорідним, якщо існують числа k і m такі, що

$$F(\lambda^t x, \lambda^{kt} y, \lambda^{(k-1)t} y', \ldots, \lambda^{(k-n)t} y^{(n)}) = \lambda^{mt} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

За допомогою заміни

$$x = e^t, \quad y = ue^{kt} \tag{42}$$

($x = -e^t$ при $x < 0$), де t — нова незалежна змінна, u — нова шукана функція рівняння (41) можна звести до рівняння, яке явно не містить незалежну змінну t.

Похідні при заміні (42) перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} e^{-t} = \left(\frac{du}{dt} e^{kt} + kue^{kt}\right) e^{-t} = (u' + ku)\, e^{(k-1)t}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dt} e^{-t} = (u'' + (2k-1)\, u' + k\,(k-1)\, u)\, e^{(k-2)t}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= g(u, u', \ldots, u^{(n)})\, e^{(k-n)t}. \end{aligned} \tag{43}$$

Підставивши (42) і (43) в рівняння (41), дістанемо рівняння виду

$$e^{mt} F_1(u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0,$$

яке після скорочення на e^{mt} перетворюється в рівняння виду (30).

д) ***Рівняння в точних похідних.*** Розглянемо рівняння виду

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{44}$$

ліві частини яких є точними похідними від деякої функції $\Phi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, тобто

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{45}$$

Такі рівняння називаються *рівняннями в точних похідних.* Із (45) випливає, що співвідношення

$$\Phi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1$$

є першим інтегралом рівняння (44) — рівнянням $(n-1)$-го порядку відносно шуканої функції. Отже, рівняння в точних похідних допускають зниження порядку на одиницю.

Якщо рівняння (44) не є рівнянням у точних похідних, то іноді можна підібрати таку функцію $\mu = \mu(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *(інтегрувальний множник)*, що після множення на неї рівняння (44) стає рівнянням у точних похідних. При множенні на інтегрувальний множник можуть з'явитися зайві розв'язки (розв'язки рівняння $\mu = 0$), а також можлива втрата деяких розв'язків (у випадку розривності множника μ).

При розв'язуванні задачі Коші для рівнянь вищих порядків методом зниження порядку довільні сталі доцільно знаходити після кожного інтегрування.

2.1. Показати, що функція $y = y(x)$, неявно задана рівнянням

$$x = y^2 + y, \tag{46}$$

є розв'язком рівняння

$$y'y''' - 3y''^2 = 0. \tag{47}$$

Розв'язання. Знаходимо y', y'', y''':

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{(2y+1)\,dy} = \frac{1}{2y+1},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2y+1)^3}, \tag{48}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dy}\left(-\frac{2}{(2y+1)^3}\right)\frac{1}{2y+1} = \frac{12}{(2y+1)^5}.$$

Підставимо (48) в рівняння (47):

$$\frac{1}{2y+1}\cdot\frac{12}{(2y+1)^5} - 3\frac{4}{(2y+1)^6} \equiv 0.$$

Отже, функція $y = y(x)$ є розв'язком даного рівняння.

2.2. Показати, що функція $y = y(x)$, параметрично задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln t + \frac{3}{4t^2}; \\ y = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4t^3}, \quad t > 0, \end{cases} \tag{49}$$

є розв'язком рівняння

$$y''^2 - 2y'y'' + 3 = 0. \tag{50}$$

Розв'язання. Знаходимо y', y'':

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{9}{4t^2}}{\frac{1}{2t} - \frac{3}{2t^3}} = \frac{t^2+3}{2t},$$

$$y'' = \frac{(\dot{y'})}{\dot x} = \frac{\frac{t^2-3}{2t^2}}{\frac{1}{2t} - \frac{3}{2t^3}} = t. \tag{51}$$

Підставимо (51) в рівняння (50):

$$t^2 - 2\frac{t^2+3}{2t}t + 3 \equiv 0.$$

Отже, функція $y = y(x)$ є розв'язком даного рівняння.

2.3. Показати, що співвідношення

$$y \ln y - x - \int_0^x e^{t^2} dt = 0 \tag{52}$$

є інтегралом рівняння

$$y(1 + \ln y) y'' + y'^2 = 2xye^{x^2}. \tag{53}$$

Р о з в' я з а н н я. Диференціюємо (52) двічі по x:

$$(1 + \ln y) y' - 1 - e^{x^2} = 0, \quad \frac{1}{y} y'^2 + (1 + \ln y) y'' - 2xe^{x^2} = 0,$$

звідки

$$y(1 + \ln y) y'' = 2xye^{x^2} - y'^2. \tag{54}$$

Підставивши (54) в рівняння (53), дістанемо, що функція $y = y(x)$, неявно задана співвідношенням (52), перетворює рівняння (53) у тотожність.

2.4. Знайти диференціальне рівняння двопараметричної сім'ї кіл

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1. \tag{55}$$

Р о з в' я з а н н я. Співвідношення (55) диференціюємо двічі по x:

$$x - C_1 + (y - C_2) y' = 0, \tag{56}$$

$$1 + y'^2 + (y - C_2) y'' = 0. \tag{57}$$

З (55) — (57) виключаємо сталі C_1 і C_2. З (57) знаходимо

$$y - C_2 = -\frac{1 + y'^2}{y''} \quad \text{при } y'' \neq 0. \tag{58}$$

З (56) дістаємо

$$x - C_1 = \frac{(1 + y'^2) y'}{y''}. \tag{59}$$

Вирази (58), (59) підставляємо в (55). Маємо

$$\frac{(1 + y'^2)^2 y'^2}{y''^2} + \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2} = 1,$$

або

$$y''^2 = (1 + y'^2)^3.$$

2.5. Побудувати загальний розв'язок рівняння

$$y''' = x \ln x \tag{60}$$

у формі Коші і знайти частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = -1. \tag{61}$$

Розв'язання. Рівняння виду (60) розглянуто в п. 2, а). З (60) за допомогою послідовного інтегрування знаходимо

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1,\\
y' &= \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5x^3}{36} + C_1x + C_2, \qquad (62)\\
y &= \frac{x^4}{24}\ln x - \frac{13}{288}x^4 + C_1x^2/2 + C_2x + C_3.
\end{aligned}
$$

Сталі C_1, C_2, C_3 знайдемо із системи

$$
\begin{aligned}
\frac{x_0^2}{2}C_1 + x_0C_2 + C_3 &= y_0 - \frac{x_0^4}{24}\ln x_0 + \frac{13}{288}x_0^4,\\
x_0C_1 + C_2 &= y_0' - \frac{x_0^3}{6}\ln x_0 + \frac{5x_0^3}{36},\\
C_1 &= y_0'' - \frac{x_0^2}{2}\ln x_0 + \frac{x_0^2}{4}, \quad x_0 > 0.
\end{aligned}
$$

Маємо:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= y_0'' - \frac{x_0^2}{2}\ln x_0 + \frac{x_0^2}{4},\\
C_2 &= y_0' - x_0y_0'' + \frac{x_0^3}{3}\ln x_0 - \frac{x_0^3}{9}, \qquad (63)\\
C_3 &= y_0 - x_0y_0' + \frac{x_0^2}{2}y_0'' - \frac{1}{8}x_0^4\ln x_0 + \frac{1}{32}x_0^4.
\end{aligned}
$$

Підставивши (63) в (62), дістанемо загальний розв'язок рівняння (60) у формі Коші:

$$
\begin{aligned}
y = \frac{x^4}{24}\ln x - \frac{13}{288}x^4 + \frac{1}{2}\left(y_0'' - \frac{x_0^2}{2}\ln x_0 + \frac{x_0^2}{4}\right)x^2 +\\
+\left(y_0' - x_0y'' + \frac{x_0^3}{3}\ln x_0 - \frac{x_0^3}{9}\right)x +\\
+ y_0 - x_0y_0' + \frac{x_0^2}{2}y_0'' - \frac{1}{8}x_0^4\ln x_0 + \frac{1}{32}x_0^4. \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Поклавши в (64) $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y_0' = 0$, $y_0'' = -1$, дістанемо шуканий частинний розв'язок

$$y = \frac{x^4}{24}\ln x - \frac{13}{288}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{17}{32}.$$

2.6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = \sqrt{1-x^2} \tag{65}$$

Розв'язання. Рівняння виду (65) розглянуто в п. 2, а). З (65) випливає, що $x \in [-1, 1]$. Введемо параметр t, поклавши $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді $y''' = |\cos t| = \cos t$. Отже, рівняння (65) можна задати в параметричній формі:

$$x = \sin t, \quad y''' = \cos t. \tag{66}$$

Проінтегруємо рівняння (66). Маємо:

$$dy'' = y'''dx = \cos^2 t dt, \quad y'' = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t + C_1\right);$$

$$y' = \int y''dx = \frac{1}{2}\int\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t + C_1\right)\cos t dt + \frac{C_2}{2},$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(t\sin t + \cos t - \frac{1}{3}\cos^2 t + C_1\sin t + C_2\right);$$

$$y = \int y'dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\sin 2t + \cos^2 t - \frac{1}{3}\cos^4 t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}C_1\sin 2t + C_2\cos t\right)dt + \frac{C_3}{2},$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}t\cos 2t + \frac{3}{8}t + \frac{7}{24}\sin 2t - \frac{1}{96}\sin 4t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}C_1\cos 2t + C_2\sin t + C_3\right).$$

Тому загальний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$y = -\frac{1}{8}t\cos 2t + \frac{3}{16}t + \frac{7}{48}\sin 2t - \frac{1}{192}\sin 4t -$$

$$-\frac{C_1}{4}\cos 2t + C_2\sin t + C_3, \quad x = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

2.7. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y''^2 - x^2 = 1, \tag{67}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{68}$$

Розв'язання. Рівняння виду (67) розглянуто в п. 2, а). Введемо параметр t, поклавши $x = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbf{R}$. Тоді $y''^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$, $|y''| = \operatorname{ch} t$.

Розглянемо рівняння, задане в такій параметричній формі:

$$x = \operatorname{sh} t, \quad y'' = \operatorname{ch} t. \tag{69}$$

Знаходимо значення $t = t_0$, яке відповідає значенню $x = 0$. Маємо $\operatorname{sh} t = 0$, $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = 0$, звідки $t_0 = 0$. Інтегруємо рівняння (69):

$$y' = \int y''dx = \int \operatorname{ch}^2 t + C_1 = \frac{1}{2}\int (1 + \operatorname{ch} 2t)\, dt + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t + C_1, \tag{70}$$

$$y = \int y'dx = \int \left(\frac{1}{2} t \operatorname{ch} t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} t + C_1 \operatorname{ch} t\right) dt + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t - \frac{1}{2} \operatorname{ch} t + \frac{1}{6} \operatorname{ch}^3 t + C_1 \operatorname{sh} t + C_2. \tag{71}$$

Підставляючи $t = 0$ в (70) і (71) і враховуючи початкові умови (68), дістаємо: $1 = C_1$, $0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + C_2$, звідки $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{3}$. Тому

$$y = \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t - \frac{1}{2} \operatorname{ch} t + \frac{1}{6} \operatorname{ch}^3 t + \operatorname{sh} t + \frac{1}{3}, \quad x = \operatorname{sh} t \tag{72}$$

— шуканий розв'язок задачі Коші (67), (68) в параметричній формі. Виразимо t через x:

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = x, \quad e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0,$$

звідки

$$e^t = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 1}.$$

Підставивши ці значення в (72), дістанемо явну залежність розв'язку y від x:

$$y = \frac{1}{2} x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{6}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + x + \frac{1}{3}.$$

2.8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''^3 - 2y'' - x = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Рівняння такого виду розглянуто в п. 2, а). Введемо параметр t, поклавши $y'' = t$. Тоді $x = t^3 - 2t$. Маємо

$$dy' = y''dx = t(3t^2 - 2)\, dt = (3t^3 - 2t)\, dt,$$

звідки

$$y' = \int (3t^3 - 2t)\,dt + C_1 = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1,$$

$$y = \int y'dx = \int \left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right)(3t^2 - 2)\,dt + C_2 =$$

$$= \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \left(\frac{2}{3} + C_1\right)t^3 - 2C_1t + C_2.$$

Тому загальний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \left(\frac{2}{3} + C_1\right)t^3 - 2C_1t + C_2, \quad x = t^3 - 2t,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

2.9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = \sqrt{1 + y''^2} \tag{73}$$

у формі Коші.

Розв'язання. Права частина рівняння (73) — функція $f(x, y, y', y'') = \sqrt{1 + y''^2}$, вона неперервна і має неперервні частинні похідні: $f'_y = f'_{y'} = 0$, $f'_{y''} = \dfrac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}}$.

Тому, внаслідок теореми існування і єдиності, задача Коші для рівняння (73) з будь-якими початковими даними (x_0, y_0, y'_0, y''_0) має єдиний розв'язок.

Рівняння виду (73) розглянуто в п. 2, б).

Нехай $y'' = u$. Тоді

$$u' = \sqrt{1 + u^2}, \quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = dx, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = x + C_1,$$

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = x + C_1, \quad u + \sqrt{1 + u^2} = e^{x + C_1},$$

звідки

$$\sqrt{1 + u^2} = e^{x + C_1} - u, \quad 1 + u^2 = e^{2(x + C_1)} - 2ue^{x + C_1} + u^2, \tag{74}$$

$$u = \frac{1}{2}(e^{x + C_1} - e^{-(x + C_1)}), \quad y'' = \operatorname{sh}(x + C_1).$$

Із (74) за допомогою послідовного інтегрування знаходимо:

$$y' = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2, \quad y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Сталі C_1, C_2, C_3 знайдемо із системи

$$\operatorname{sh}(x_0 + C_1) + C_2x_0 + C_3 = y_0, \quad \operatorname{ch}(x_0 + C_1) + C_2 = y'_0,$$

$$\operatorname{sh}(x_0 + C_1) = y''_0.$$

Маємо:

$$C_1 = \operatorname{arcsh} y_0'' - x_0,$$

$$C_2 = y_0' - \operatorname{ch}(\operatorname{arcsh} y_0'') = y_0' - \sqrt{1 + y''^2},$$

$$C_3 = y_0 - (y_0' - \sqrt{1 + y_0''^2})\, x_0 - y_0''.$$

Тому

$$y = \operatorname{sh}(x + \operatorname{arcsh} y_0'' - x_0) +$$

$$+ (y_0' - \sqrt{1 + y_0''^2})\, x + y_0 - (y_0' - \sqrt{1 + y_0''^2})\, x_0 - y_0''.$$

2.10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'''y'' - \sqrt{1 + y''^2} = 0. \tag{75}$$

Розв'язання. Рівняння (75) не розв'язане відносно y'''. Ліва частина рівняння (75) — функція $F(x, y, y', y'', y''') = y'''y'' - \sqrt{1 + y''^2}$, вона неперервна і має неперервні частинні похідні:

$$F'_y = F'_{y'} = 0, \quad F'_{y''} = y''' - \frac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}}, \quad F'_{y'''} = y''.$$

Тому, внаслідок теореми існування і єдиності, задача Коші для рівняння (75) з будь-якими початковими умовами виду (x_0, y_0, y_0', y_0''), $y_0'' \neq 0$, має єдиний розв'язок. Функція y така, що $y'' = 0$ не є розв'язком даного рівняння. Рівняння (75) належить до типу, який було розглянуто в п. 2, б). Поклавши $y'' = u$, зведемо рівняння (75) до вигляду

$$u'u = \sqrt{1 + u^2},$$

звідки

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u\,du}{\sqrt{1 + u^2}} = dx, \quad \sqrt{1 + u^2} = x + C_1, \\ &u^2 = (x + C_1)^2 - 1, \quad u = \pm\sqrt{(x + C_1)^2 - 1}. \end{aligned}\right. \tag{76}$$

В результаті послідовного інтегрування знаходимо:

$$y' = \pm\left(\frac{1}{2}(x + C_1)\sqrt{(x + C_1)^2 - 1} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\ln\left|x + C_1 + \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\right|\right) + C_2,$$

$$y = \pm\left(\frac{1}{6}\sqrt{((x + C_1^2) - 1)^3} - \frac{1}{2}(x + C_1)\ln|x + C_1 +\right.$$

$$\left. + \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\,| + \frac{1}{2}\sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\right) + C_2 x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Знак «плюс» відповідає загальному розв'язку для області $y'' > 0$, знак «мінус» — для області $y'' < 0$.

2.11. Знайти розв'язок задачі Коші

$$4y''\sqrt{y} = 1, \tag{77}$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = -1. \tag{78}$$

Р о з в' я з а н н я. Рівняння виду (77) розглянуто в п. 2, в). З (77), враховуючи, що $y > 0$, дістаємо

$$y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}. \tag{79}$$

Помножимо (79) на інтегрувальний множник $\mu = 2y'$: $2y'y'' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, звідки $(y'^2)' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$,

$$y'^2 = \sqrt{y} + C_1. \tag{80}$$

Сталу C_1 знайдемо з початкових умов. Підставивши у (80) $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, дістанемо, що $C_1 = 0$. Оскільки $y'(0) = -1$, то з (80) випливає, що $y' = -\sqrt[4]{y}$. Тоді

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = -dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = -x + C_2, \quad \frac{4}{3} y^{\frac{3}{4}} = -x + C_2. \tag{81}$$

Ураховуючи початкові умови (78), з (81) дістаємо $C_2 = \frac{4}{3}$. Тому $y = \left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}}$.

2.12. Довести, що рівняння виду $y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} = f(x) \times (y^{(n-1)})^m$, де $m = \text{const}$, завжди може бути проінтегроване в квадратурах.

Р о з в' я з а н н я. Виконавши заміну $y^{(n-1)} = u$, дістанемо (відносно u) інтегровне в квадратурах рівняння Бернуллі, загальний розв'язок якого $u = \varphi(x, C_1)$. Для y маємо рівняння інтегровного типу:

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1).$$

2.13. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' + 2xy'' = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Поклавши $y'' = u$, дістанемо (відносно u) лінійне однорідне рівняння першого порядку

$$u' + 2xu = 0,$$

загальний розв'язок якого $u = C_1 e^{-x^2}$. Використовуючи заміну, знаходимо

$$y' = C_1 \int e^{-x^2}dx + C_2, \quad y = C_1 \int \left(\int e^{-x^2}dx\right)dx + C_2x + C_3.$$

Проінтегрувавши частинами, дістанемо

$$y = C_1\left(\frac{1}{2}e^{-x^2} + x\int e^{-x^2}dx\right) + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

2.14. Проінтегрувати рівняння $y'' + 2y' = e^x y'^2$.

Р о з в' я з а н н я. Поклавши $y' = u$, дістанемо (відносно u) рівняння Бернуллі

$$u' + 2u = e^x u^2.$$

Очевидно, що останнє рівняння має розв'язок $u = 0$. Поділивши ліву й праву частини на $u^2 \neq 0$ і поклавши $u^{-1} = z$, дістанемо (відносно z) лінійне рівняння першого порядку

$$z' - 2z = -e^x,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $z = e^{2x}(C_1 + e^{-x})$. Використовуючи наведену заміну, маємо:

$$u = \frac{1}{e^x + C_1e^{2x}},$$

$$y = \int \frac{dx}{e^x + C_1e^{2x}} + C_2 = \int\left[\frac{1}{e^{2x}} - \frac{C_1}{e^x} + \frac{C_1^2}{1 + C_1e^x}\right]de^x + C_2 =$$

$$= -e^{-x} - C_1x + C_1\ln|1 + C_1e^x| + C_2,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Розв'язком рівняння є також функція $y = C = \text{const}$, $u = 0$.

2.15. Проінтегрувати рівняння $y'' - xy''' + y''^2 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Рівняння не містить шуканої функції та її похідної (див. п. 3, а)). Поклавши $y'' = u$, де u — нова шукана функція, дістанемо

$$u - xu' + u^2 = 0.$$

Відокремлюємо змінні при $u \neq 0$, $u \neq -1$. Маємо

$$\frac{du}{u(u+1)} = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{du}{u(u+1)} = \int\frac{dx}{x} + \ln C, \quad C > 0,$$

$$\ln|u| - \ln|u+1| = \ln C|x|,$$

$$\left|\frac{u}{u+1}\right| = C|x|, \quad \frac{u}{u+1} = C_1x, \quad C_1 \neq 0.$$

Звідси $u = y'' = \frac{C_1 x}{1 - C_1 x}$. За допомогою послідовного інтегрування знаходимо:

$$y' = \int \frac{C_1 x}{1 - C_1 x}\, dx + C_2 = -x - \frac{1}{C_1} \ln|1 - C_1 x| + C_2,$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{C_1} x \ln|1 - C_1 x| + \frac{1}{C_1} x + \frac{1}{C_1^2} \ln|1 - C_1 x| +$$

$$+ C_2 x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі, $C_1 \neq 0$.

Розглянемо випадки $u = 0$ і $u = -1$. Якщо $u = 0$, то $y = ax + b$; якщо $u = -1$, то

$$y = -\frac{x^2}{2} + cx + d,$$

де a, b, c, d — довільні сталі. За допомогою підстановки впевнюємося в тому, що ці функції також є розв'язками даного рівняння.

2.16. Знайти розв'язок задачі Коші $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, впевнившись спочатку, що шуканий розв'язок існує і єдиний.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y'' = -\frac{y'^2 + y'^4}{2y}. \tag{82}$$

Права частина рівняння (82) — функція $f(x, y, y') = -\frac{y'^2 + y'^4}{2y}$, вона неперервна і має неперервні частинні похідні

$$f'_y = \frac{y'^2 + y'^4}{2y^2}, \quad f'_{y'} = -\frac{y' + 2y'^3}{y}$$

в околі точки (0; 1; 2)

Тому, згідно з теоремою існування і єдиності, шуканий розв'язок існує і єдиний. Дане рівняння явно не містить незалежної змінної x (див. п. 3, б)). Нехай $y' = p$, де $p = p(y)$ — нова невідома функція. Тоді відносно $p = p(y)$ дістанемо рівняння

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 + p^4 = 0. \tag{83}$$

Для шуканого розв'язку $p \neq 0$, $y \neq 0$. Тому з (83), відокремлюючи змінні, дістанемо $-\frac{d(p^2)}{p^2 + p^4} = \frac{dy}{y}$, звідки

$$\begin{aligned} \ln\frac{p^2+1}{p^2} &= \ln C|y|, \quad C > 0, \\ \frac{p^2+1}{p^2} &= C_1 y, \quad C_1 \neq 0. \end{aligned} \tag{84}$$

Сталу C_1 знайдемо, використовуючи початкові умови. Оскільки

$$y(0)=1, \quad y'(0)=p(1)=2>0,$$

то з (84) випливає, що $C_1=\frac{5}{4}$, $p=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}}$. Згідно із заміною, маємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}}, \quad \sqrt{\frac{5}{4}y-1}\,dy=dx,$$

$$\frac{8}{15}\left(\frac{5}{4}y-1\right)^{\frac{3}{2}}=x+C_2. \tag{85}$$

З (85), враховуючи початкові умови, знайдемо: $C_2=\frac{1}{15}$. Тому

$$y=\frac{1}{5}(15x+1)^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{5}.$$

2.17. Проінтегрувати рівняння $yy''-y'^2=y^2\ln y$ в області $y>0$, $y'>0$.

Р о з в' я з а н н я. Рівняння явно не містить незалежної змінної x (див. п. 3, б)). Поклавши $y'=p$, де $p=p(y)$ — нова невідома функція, дістанемо

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^2\ln y. \tag{86}$$

Домножимо (86) на $\frac{2}{y}$:

$$2p\frac{dp}{dy}-\frac{2}{y}p^2=2y\ln y, \text{ або } (p^2)'-\frac{2}{y}p^2=2y\ln y.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно функції p^2. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$p^2=e^{\int\frac{2}{y}dy}\left(C_1+\int 2y\ln y e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy\right),$$

звідки $p^2=y^2(C_1+\ln^2 y)$. Оскільки $y>0$, $p>0$, то $p=y\sqrt{C_1+\ln^2 y}$. В результаті заміни маємо:

$$\frac{dy}{dx}=y\sqrt{C_1+\ln^2 y}, \quad \frac{dy}{y\sqrt{C_1+\ln^2 y}}=dx,$$

$$\ln|\ln y+\sqrt{C_1+\ln^2 y}|=x+\ln C, \quad C>0;$$

$$\ln y+\sqrt{C_1+\ln^2 y}=C_2e^x, \quad C_2\neq 0. \tag{87}$$

Звідси знаходимо:

$$C_1 + \ln^2 y = C_2^2 e^{2x} - 2C_2 e^x \ln y + \ln^2 y,$$

$$\ln y = \frac{C_2^2 e^{2x} - C_1}{2C_2 e^x}, \quad y = e^{\frac{C_2^2 e^{2x} - C_1}{2C_2 e^x}}.$$

2.18. Проінтегрувати рівняння $x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

Розв'язання. Ліва частина рівняння — однорідна функція відносно змінних y, y', y'' з показником однорідності 2 (див. п. 3, в)):

$$F(x, \lambda^t y, \lambda^t y', \lambda^t y'') =$$
$$= \lambda^{2t}[x^2 yy'' - (y - xy')^2] = \lambda^{2t} F(x, y, y', y'').$$

Виконаємо заміну $y' = yu$, $y'' = y(u^2 + u')$, де u — нова невідома функція. Тоді

$$x^2 y^2 (u^2 + u') - (y - xyu)^2 = 0, \quad y^2 (x^2 (u^2 + u') - (1 - xu)^2) = 0.$$

Функція $y \equiv 0$ є розв'язком заданого рівняння. При $y \neq 0$ маємо

$$x^2 u^2 + x^2 u' - 1 + 2xu - x^2 u^2 = 0,$$

звідки для функції u дістаємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку:

$$u' + \frac{2}{x} u = \frac{1}{x^2}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$u = e^{-\int \frac{2}{x} dx}\left(C_1 + \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx\right) = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Ураховуємо заміну $y' = yu$:

$$y = C_2 e^{\int u dx},$$

$$y = C_2 e^{\int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

Розв'язок $y \equiv 0$ маємо при $C_2 = 0$.

2.19. Проінтегрувати рівняння $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0$.

Розв'язання. Нехай $F(x, y, y', y'') = x^4 y'' + (xy' - y)^3$. Тоді

$$F(\lambda^t x, \lambda^{kt} y, \lambda^{(k-1)t} y', \lambda^{(k-2)} y'') = \lambda^{4t}\lambda^{(k-2)t} x^4 y'' + (\lambda^t x \lambda^{(k-1)t} y' - \lambda^{kt} y)^3 =$$
$$= \lambda^{(k+2)t} x^4 y'' + \lambda^{3kt}(xy' - y)^3 = \lambda^{3t} F(x, y, y', y''), \quad k = 1,$$

звідки випливає, що дане рівняння є узагальнено-однорідним ($m = 3$, $k = 1$). Виконаємо заміну $x = e^t$, $y = ue^t$. Тоді $y' = u' + u$, $y'' =$

$= (u'' + u')\, e^{-t}$. Звідси

$$e^{4t}(u'' + u')\, e^{-t} + (e^t(u' + u) - ue^t)^3 = 0, \quad u'' + u' + u'^3 = 0.$$

Це рівняння явно не містить незалежної змінної t. Покладемо $u' = p(u)$, $u'' = p\dfrac{dp}{du}$. Тоді $p\dfrac{dp}{du} + p + p^3 = 0$, звідки $\dfrac{dp}{du} = -1 - p^2$, або $p = 0$. З рівняння $p = 0$ випливає $u' = 0$, $u = C$, або $y = Cx$. З рівняння $\dfrac{dp}{du} = -1 - p^2$ маємо

$$\frac{dp}{1 + p^2} = -du, \quad \operatorname{arctg} p = C_1 - u, \quad p = \operatorname{tg}(C_1 - u).$$

Тому

$$u' = \operatorname{tg}(C_1 - u), \quad \operatorname{ctg}(C_1 - u)\, du = dt,$$

$$\int \operatorname{ctg}(C_1 - u)\, du = t - \ln C, \quad C > 0,$$

$$\ln|\sin(u - C_1)| = -t + \ln C,$$

$$\sin(u - C_1) = C_2 e^{-t}, \quad C_2 \neq 0,$$

$$u = C_1 + \arcsin C_2 e^{-t}.$$

Ураховуючи заміну $y = ux$, $e^{-t} = \dfrac{1}{x}$, знаходимо:

$$y = x\left(C_1 + \arcsin\frac{C_2}{x}\right).$$

Розв'язок $y = Cx$ маємо при $C_2 = 0$, $C_1 = C$.

2.20. Проінтегрувати рівняння $yy'' - y'^2 = y'$.

Р о з в' я з а н н я. Очевидним розв'язком рівняння є функція $y \equiv 0$. Розділимо ліву й праву частини рівняння на $y^2 \neq 0$:

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2},$$

звідки

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{1}{y}\right)' = 0, \text{ або } \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y}\right)' = 0.$$

Отже, дане рівняння зведено до рівняння в точних похідних (див. п. 3, д)). Маємо $\dfrac{y'}{y} + \dfrac{1}{y} = C_1$, $y' - C_1 y = -1$, звідки при $C_1 = 0$ $y = -x + C$. При $C_1 \neq 0$ дістаємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку, загальний розв'язок якого

$$y = e^{C_1 x}\left(C_2 - \int e^{-C_1 x} dx\right) = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}, \quad C_1 \neq 0.$$

2.21. Знайти розв'язок задачі Коші

$$xy'' - y' - x^2yy' = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2.$$

Р о з в' я з а н н я. Розділивши ліву й праву частини рівняння на $x^2 \neq 0$, зведемо його до рівняння в точних похідних:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0, \quad \left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2\right)' = 0,$$

звідки

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2 = C_1.$$

Сталу C_1 знайдемо з початкових умов. Маємо: $C_1 = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} \times \times 0^2 = 2$. Тоді

$$\frac{y'}{x} = \frac{1}{2}y^2 + 2, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{y^2+4}{2}, \quad \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}xdx,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}C_2, \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

Знаходимо: $C_2 = \operatorname{arctg}\frac{0}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Тому $\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y = 2\operatorname{tg}\frac{x^2-1}{2}.$$

2.22. Довести, що функція $\xi(x) = \alpha_1x^2 + \alpha_2x + \alpha_3$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — довільні сталі) є особливим розв'язком рівняння $y^{IV} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y'''}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $\xi'''(x) = \xi^{IV}(x) \equiv 0$, то $\xi(x)$ при будь-яких $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є розв'язком даного рівняння Знайдемо загальний розв'язок. Поклавши $y''' = u$, при $u \neq 0$ дістанемо

$$u' = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{3}}, \quad u^{-\frac{1}{3}}du = \frac{3}{2}dx,$$

звідки

$$u = y''' = (x + C_1)^{\frac{3}{2}}, \quad y'' = \frac{2}{5}(x + C_1)^{\frac{5}{2}} + C_2,$$

$$y' = \frac{4}{5\cdot 7}(x + C_1)^{\frac{7}{2}} + C_2x + C_3,$$

$$y = \frac{8}{5\cdot 7\cdot 9}(x + C_1)^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

З рівняння $u = y''' = 0$ маємо $y = \xi(x)$. Покажемо, що задача Коші для даного рівняння з початковими умовами $y(x_0) = \xi(x_0)$, $y'(x_0) = \xi'(x_0)$, $y''(x_0) = \xi''(x_0)$, $y'''(x_0) = \xi'''(x_0) = 0$, крім розв'язку $y = \xi(x)$, має ще один. Для визначення C_1, C_2, C_3, C_4 маємо систему:

$$\frac{8}{315}(x_0 + C_1)^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{2} C_2 x_0^2 + C_3 x_0 + C_4 = \xi(x_0),$$

$$\frac{4}{35}(x_0 + C_1)^{7/2} + C_2 x_0 + C_3 = \xi'(x_0),$$

$$\frac{2}{5}(x_0 + C_1)^{5/2} + C_2 = \xi''(x_0),$$

$$(x_0 + C_1)^{3/2} = \xi'''(x_0) = 0.$$

Звідси

$$C_1^* = -x_0, \quad C_2^* = \xi''(x_0), \quad C_3^* = \xi'(x_0) - C_2^* x_0,$$

$$C_4^* = \zeta(x_0) - \frac{1}{2} C_2^* x_0^2 - C_3^* x_0.$$

Тому $\xi(x)$ є особливим розв'язком даного рівняння.

2.2. Загальні властивості лінійних диференціальних рівнянь

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = F(x), \tag{1}$$

де функції $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ неперервні на інтервалі $I = (a, b)$, причому $a_0(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Поділивши (1) на $a_0(x) \neq 0$ і позначивши $h_i(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_0(x)}$, $i = 1, \ldots, n$, $f(x) = \dfrac{F(x)}{a_0(x)}$, дістанемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку в *канонічній формі*:

$$y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y = f(x). \tag{2}$$

Якщо $f(x) \not\equiv 0$ при $x \in I$, то (2) називається *лінійним неоднорідним рівнянням*. Якщо $f(x) \equiv 0$ при $x \in I$, то рівняння (2) називається *лінійним однорідним*. При цьому рівняння

$$y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y = 0$$

називається *лінійним однорідним рівнянням, яке відповідає неоднорідному рівнянню* (2). Лінійне однорідне рівняння завжди має розв'язок $y \equiv 0$, який називається *тривіальним*. Записавши рівняння (2) у вигляді

$$y^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\, y^{(n-i)} + f(x) \equiv \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3}$$

зазначимо, що функція Φ неперервна разом зі своїми частинними похідними $\Phi'_{y^{(n-i)}} = -h_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, при $x \in [\alpha, \beta] \subset I$ і будь-яких $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Тому права частина рівняння (3) задовольняє умови теореми існування та єдиності. Більше того, доведено, що для будь-якої точки $x_0 \in I$ і будь-яких початкових значень y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ розв'язок задачі Коші для рівняння (2) існує і єдиний на всьому інтервалі I неперервності коефіцієнтів рівняння.

Лінійне диференціальне рівняння (2) можна записати у вигляді $L(y) = f(x)$, де L — лінійний диференціальний оператор n-го порядку

$$L(y) \equiv y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y,$$

визначений на множині n разів неперервно диференційовних функцій.

2.23. Дано рівняння $y'' + h_1(x)\, y' + h_2(x)\, y = f(x)$. Треба:

а) виконати заміну незалежної змінної за формулою $x = x(t)$, ($t \in (\alpha, \beta)$, $x \in I = (a, b)$, де $x(t)$ — довільна двічі неперервно диференційовна функція така, що $x'(t) \neq 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$;

б) підібрати таку заміну незалежної змінної, щоб у перетвореному рівнянні був відсутній член з похідною $\frac{dy}{dt}$.

Р о з в' я з а н н я. а) Виразимо похідні y по x через похідні y по новій незалежній змінній t. Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)}\right)\frac{1}{x'(t)} =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x'^2(t)} - \frac{x''(t)}{x'^2(t)} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Ці вирази підставляємо в задане рівняння:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x'^2(t)} - \frac{x'(t)}{x'^3(t)} \cdot \frac{dy}{dt} + h_1(x(t))\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x'(t)} + h_2(x(t))\, y = f(x),$$

або

$$a_0(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\, y = F(t),$$

де

$$F(t) = f(x(t)),$$

$$a_0(t) = \frac{1}{x'^2(t)}, \quad a_1(t) = h_1(x(t))\frac{1}{x'(t)} - \frac{x''(t)}{x'^3(t)}, \quad a_2(t) = h_2(x(t)).$$

Отже, заміною $x = x(t)$ зводимо лінійне рівняння теж до лінійного, причому якщо задане рівняння є однорідним, то перетворене рівняння буде також однорідним.

б) Функцію $x(t)$ знайдемо з умови $a_1(t) = 0$. Тоді

$$\frac{h_1(x)}{x'(t)} - \frac{x''(t)}{x'^3(t)} = 0, \quad \frac{x''}{x'^2} = h_1(x).$$

Останнє рівняння явно не містить незалежної змінної t. Використовуючи заміну $x' = p(x)$, $x'' = p'p$, дістаємо

$$\frac{p'p}{p^2} = h_1(x), \quad \frac{dp}{p} = h_1(x)\,dx, \quad p = C_1 e^{\int h_1(x)dx},$$

$$e^{-\int h_1(x)dx}dx = C_1 dt, \quad C_1 t + C_2 = \int e^{-\int h_1(x)dx}dx.$$

Отже, шукана заміна незалежної змінної має вигляд

$$t = \int e^{-\int h_1(x)dx}dx,$$

$$C_1 = 1, \; C_2 = 0.$$

2.24. За допомогою заміни незалежної змінної позбавитися члена з першою похідною в рівняннях:

а) $y'' - y' + e^{2x}y = 0$;

б) $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \nu = \text{const} \geqslant 0, \quad x > 0.$

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося результатом задачі 2.23:

а) $h_1(x) = -1$, $h_2(x) = e^{2x}$. Виконаємо заміну незалежної змінної:

$$t = \int e^{-\int(-1)dx}dx = e^x, \quad x = \ln t.$$

Тоді рівняння набирає вигляду

$$a_0(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_2(t)\,y = 0,$$

де

$$a_0(t) = \frac{1}{x'^2(t)} = t^2, \quad a_2(t) = e^{2\ln t} = t^2,$$

тобто

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

б) $h_1(x) = \frac{1}{x}$, $h_2(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$. Виконаємо заміну незалежної змінної:

$$t = \int e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx = \int e^{-\ln x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x, \quad x = e^t.$$

Знайдемо коефіцієнти перетвореного рівняння:

$$a_0(t) = \frac{1}{x'^2(t)} = e^{-2t}, \quad a_2(t) = 1 - \nu^2 e^{-2t}.$$

Отже, рівняння має вигляд

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (e^{2t} - \nu^2)\, y = 0.$$

2.25. Довести, що коли лінійне однорідне рівняння n-го порядку

$$L(y) = y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y = 0,$$
$$h_n(x) \not\equiv 0,$$

можна звести за допомогою заміни незалежної змінної

$$t = \psi(x),$$

де $x \in I = (a, b)$, $t \in (\alpha, \beta)$, $\psi(x)$ — неперервно диференційовна n разів функція і $\psi'(x) \neq 0$ при $x \in I$, до лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, то необхідно, щоб

$$\psi(x) = \int \sqrt[n]{k h_n(x)}\, dx,$$

де $k = \text{const} \neq 0$.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо випадок, коли $n = 2$. У рівнянні $y'' + h_1(x)\, y' + h_2(x)\, y = 0$ виконаємо заміну $t = \psi(x)$. Тоді, згідно з результатом задачі 2.23, дістанемо рівняння

$$[\psi'(x)]^2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + h_2(x)\, y = 0, \quad t = \psi(x).$$

Розділивши обидві частини на $[\psi'(x)]^2 \neq 0$, дістанемо

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{a_1(t)}{[\psi'(x)]^2} \frac{dy}{dt} + \frac{h_2(x)}{[\psi'(x)]^2}\, y = 0.$$

За умовою останнє рівняння є рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Тому, зокрема,

$$\frac{h_2(x)}{[\psi'(x)]^2} = C = \text{const} \neq 0,$$

звідки

$$\psi'(x) = \sqrt{k h_2(x)}, \ \psi(x) = \int \sqrt{k h_2(x)}\, dx, \ k = \frac{1}{C}.$$

2.26. У рівнянні $x^3y''' - 9x^2y'' + 3xy' - 4y = 5 \ln x + \ln^2 x$ виконати заміну змінної так, щоб коефіцієнти перетвореного рівняння були сталими.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо дане рівняння в канонічному вигляді

$$y''' - \frac{9}{x} y'' + \frac{3}{x^2} y' - \frac{4}{x^3} y = \frac{5 \ln x + \ln^2 x}{x^3}, \quad x > 0.$$

З розв'язання задачі 2.25 випливає, що функцію $t = \psi(x)$ треба шукати у вигляді

$$t = \psi(x) = \int \sqrt[3]{k\left(-\frac{4}{x^3}\right)}\,dx = -\sqrt[3]{4k}\ln x + C.$$

Нехай $C = 0$, $k = -\frac{1}{4}$. Тоді $t = \ln x$, $x = e^t$.

Знаходимо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} + \frac{dy}{dt}(-l^{-2t}) =$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t},$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}\right) =$$

$$= \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t}.$$

Ці вирази підставимо у задане рівняння:

$$e^{3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t} - 9e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} +$$

$$+ 3e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} - 4y = 5t + t^2,$$

або

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 12\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} - 4y = 5t + t^2.$$

2.27. Дано рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + h_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\,y' + h_n(x)\,y = f(x).$$

Треба:

а) виконати заміну невідомої функції за формулою $y = p(x)\,v + q(x)$, де $p(x)$, $q(x)$ — неперервно диференційовні n разів на $I = (a, b)$ функції і $p(x) \neq 0$ при $x \in I$, v — нова шукана функція;

б) підібрати функції $p(x)$ і $q(x)$ так, щоб перетворене рівняння було лінійним і однорідним і не містило члена з $v^{(n-1)}$;

в) з'ясувати, якою повинна бути функція $p(x)$, щоб перетворене рівняння допускало зниження порядку на одиницю.

Р о з в' я з а н н я. а) За формулою Лейбніца маємо

$$y^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i p^{(i)}(x)\, v^{(k-i)}(x) + q^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Підставляємо цей вираз у дане рівняння:

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^{(i)} v^{(n-i)} + q^{(n)} + h_1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^{(i)} v^{(n-1-i)} + q^{(n-1)} \right) + \cdots +$$
$$+ h_{n-1}(pv' + p'v + q') + h_n(pv + q) = f.$$

Звівши подібні члени, дістанемо лінійне неоднорідне рівняння n-го порядку відносно функції v:

$$v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} v' + a_n v = F(x),$$

де

$$a_j = a_j(x) = \sum_{i=0}^{j} C_{n-i}^{j-i} h_i p^{(j-i)}/p, \quad h_0 \equiv 1,$$

$$F(x) = \frac{1}{p}\,[f(x) - L(q)]. \tag{4}$$

Зокрема,

$$a_1(x) = \frac{1}{p}(np' + h_1 p), \; a_n(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{n} h_i p^{(n-i)} = \frac{1}{p} L(p).$$

б) Функції $p(x)$, $q(x)$ виберемо з умов $a_1(x) = 0$, $F(x) = 0$. Маємо

$$a_1(x) = \frac{1}{p}(np' + h_1 p) = 0, \; np' + h_1 p = 0,$$

звідки після відокремлення змінних

$$p = Ce^{-\frac{1}{n}\int h_1(x)dx},$$

де $C \neq 0$ — довільна стала. Оскільки $F(x) = 0$, то

$$\frac{1}{p}(f(x) - L(q)) = 0, \quad L(q) = f(x).$$

Отже, шукана функція $p = p(x)$ визначається однозначно з точністю до сталого множника, а перетворене рівняння буде однорідним, якщо функція $q = q(x)$ є будь-яким частинним розв'язком рівняння $L(y) = f(x)$.

в) Перетворене рівняння допускає зниження на одиницю, якщо $a_n(x) = \frac{1}{p} L(p) = 0$, тобто якщо $p = p(x)$ — нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $L(y) = 0$. При цьому за допомогою заміни

$y = p(x)\int u(x)\,dx$ ($v' = u$ — нова невідома функція) знижуємо порядок заданого рівняння на одиницю.

2.28. Заміною невідомої функції $y = pu$ рівняння $y'' + h_1(x)y' + h_2(x)y = 0$ звести до рівняння $u'' + a_2(x)u = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Згідно з результатом задачі 2.27, функцію p вибираємо так:

$$p = Ce^{-\frac{1}{2}\int h_1(x)dx}, \quad C = \text{const} \neq 0.$$

Коефіцієнт $a_2(x)$ рівняння визначається за формулою (4) при $j = 2$, $n = 2$:

$$a_2(x) = \frac{1}{C}e^{\frac{1}{2}\int h_1(x)dx}\left(C\left(e^{-\frac{1}{2}\int h_1(x)dx}\right)'' + Ch_1\left(e^{-\frac{1}{2}\int h_1(x)dx}\right)' + \right.$$

$$\left. + Ch_2e^{-\frac{1}{2}\int h_1(x)dx}\right) = \frac{1}{4}h_1^2 - \frac{1}{2}h_1' - \frac{1}{2}h_1^2 + h_2.$$

Отже,

$$a_2(x) = h_2(x) - \frac{1}{4}h_1^2(x) - \frac{1}{2}h_1'(x)$$

2.29. Вираз $Q(x) = h_2(x) - \frac{1}{4}h_1^2(x) - \frac{1}{2}h_1'(x)$ називається інваріантом рівняння

$$y'' + h_1(x)y' + h_2(x)y = 0. \tag{5}$$

Довести, що умова рівності інваріантів двох рівнянь виду (5) є необхідною й достатньою для того, щоб одне з них перетворювалося в друге за допомогою заміни невідомої функції

$$y = p(x)u. \tag{6}$$

Р о з в' я з а н н я. Крім рівняння (5), розглянемо рівняння

$$\bar{y}'' + \bar{h}_1(x)\bar{y}' + \bar{h}_2(x)\bar{y} = 0. \tag{7}$$

Інваріантом рівняння (7) є функція $\bar{Q}(x) = \bar{h}_2(x) - \frac{1}{4}\bar{h}_1^2(x) - \frac{1}{2}\bar{h}_1'(x)$. Припустимо, що рівняння (5) за допомогою заміни

$$y = p\bar{y} \tag{8}$$

перетворюється в рівняння (7). Рівняння (7) за допомогою заміни

$$\bar{y} = Ce^{-\frac{1}{2}\int \bar{h}_1(x)dx}v, \quad C = \text{const} \neq 0, \tag{9}$$

(див. задачу 2.28) перетворюється в рівняння

$$v'' + \bar{Q}(x)v = 0. \tag{10}$$

Отже, рівняння (5) перетворено в рівняння (10) за допомогою заміни

$$y = pe^{-\frac{1}{2}\int \bar{h}_1(x)dx} v. \tag{11}$$

Зазначимо, що рівняння (5) за допомогою заміни виду (11) єдиним чином можна перетворити до виду (10) (див. задачі 2.27 і 2.28). При цьому

$$pe^{-\frac{1}{2}\int \bar{h}_1 dx} = Ce^{-\frac{1}{2}\int h_1 dx}, \quad p = Ce^{\frac{1}{2}\int (\bar{h}_1 - h_1)dx},$$

де $C = \text{const} \neq 0$ і

$$\bar{Q}(x) = h_2(x) - \frac{1}{4} h_1^2(x) - \frac{1}{2} h_1'(x) = Q(x).$$

Припустимо, що інваріанти рівнянь (5) і (7) рівні:

$$Q(x) = \bar{Q}(x). \tag{12}$$

Покажемо, що при виконанні умови (12) рівняння (5) **може бути** перетворене в рівняння (7) за допомогою заміни

$$y = e^{\frac{1}{2}\int (\bar{h}_1 - h_1)dx} \bar{y} \equiv p\bar{y}.$$

Справді, коефіцієнти перетвореного рівняння $\bar{y}'' + a_1(x)\bar{y}' + a_2(x)\bar{y} = 0$ визначаються за формулами (4):

$$a_1(x) = \frac{1}{p}(2p' + h_1 p) = e^{-\frac{1}{2}\int (\bar{h}_1 - h_1)dx}((\bar{h}_1 - h_1) + h_1)e^{\frac{1}{2}\int (\bar{h}_1 - h_1)dx} =$$

$$= \bar{h}_1(x),$$

$$a_2(x) = \frac{1}{p}(p'' + h_1 p' + h_2 p) = e^{-\frac{1}{2}\int (\bar{h}_1 - h_1)dx}\Big(\frac{1}{4}(\bar{h}_1 - h_1)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{h}_1' - h_1') + \frac{1}{2} h_1(\bar{h}_1 - h_1) + h_2\Big)e^{\frac{1}{2}\int (\bar{h}_1 - h_1)dx} =$$

$$= h_2 - \frac{1}{4} h_1^2 - \frac{1}{2} h_1' + \frac{1}{2}\bar{h}_1' + \frac{1}{4}\bar{h}_1^2 =$$

$$= Q(x) - \bar{Q}(x) + \bar{h}_2(x) = \bar{h}_2(x).$$

2.30. Показати, що рівняння

$$y'' + \frac{\alpha}{p^4(x)} y = 0, \quad \alpha = \text{const} \neq 0,$$

за допомогою підстановки Ліувілля $y = p(x)v$, $t = \int \frac{dx}{p^2(x)}$ може бути зведене до такого вигляду:

$$\frac{d^2v}{dt^2}+(\alpha+p''_{xx}p^3)\,v=0.$$

Р о з в' я з а н н я. Спочатку виконаємо заміну невідомої функції:

$$y'=p'v+pv',\quad y''=p''v+2p'v'+pv'',$$

$$p''v+2p'v'+pv''+\frac{\alpha}{p^4}pv=0,\quad v''+\frac{2p'}{p}v'+\left(\frac{p''}{p}+\frac{\alpha}{p^4}\right)v=0.$$

Перейдемо тепер до нової незалежної змінної за формулами

$$t=\int\frac{dx}{p^2(x)},\quad t'_x=\frac{1}{p^2(x)}.$$

Маємо:

$$v'=\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dt}\cdot t'_x=\frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{p^2(x)},$$

$$v''=\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{p^2(x)}\right)=\frac{d^2v}{dt^2}\cdot\frac{1}{p^4(x)}-\frac{dv}{dt}\cdot\frac{2p'}{p^3(x)}.$$

Підставивши ці вирази в дане рівняння, дістанемо

$$\frac{d^2v}{dt^2}\cdot\frac{1}{p^4}-\frac{dv}{dt}\cdot\frac{2p'}{p^3}+\frac{2p'}{p}\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{p^2}+\left(\frac{p''}{p}+\frac{\alpha}{p^4}\right)v=0,$$

звідки

$$\frac{d^2v}{dt^2}+(\alpha+p''_{xx}p^3)\,v=0.$$

2.31. Застосувати підстановку Ліувілля до рівняння $y''+e^{2x}y=0$.

Р о з в' я з а н н я. Згідно з позначеннями задачі 2.30, маємо $p(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$, $t=\int\frac{dx}{e^{-x}}=\int e^x dx=e^x$. Підстановка Ліувілля $y=e^{-1/2x}v=\frac{1}{\sqrt{t}}v$, $t=e^x$ зводить дане рівняння до вигляду

$$\frac{d^2v}{dt^2}+(1+p''_{xx}p^3)\,v=0.$$

Враховуючи, що $p''_{xx}=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{t}}$, $p^3=e^{-\frac{3}{2}x}=\frac{1}{t\sqrt{t}}$, дістаємо

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)v=0.$$

2.32. Довести, що за допомогою заміни невідомої функції

$$y'=yu,\quad u=\frac{y'}{y},\tag{13}$$

лінійне однорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)}+h_1(x)\,y^{(n-1)}+h_2(x)\,y^{(n-2)}+\cdots+h_{n-1}(x)\,y'+h_n(x)\,y=0,$$
$$n>1,$$

може бути перетворене в нелінійне рівняння $(n-1)$-го порядку виду

$$u^{(n-1)}+h_1(x)\,u^{(n-2)}+\cdots+h_{n-1}(x)\,u+$$
$$+\sum_{i=0}^{n-2}h_i(x)\,u^{n-i}+h_n(x)+f(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(n-2)})=0\text{ — рівняння}$$

Ейлера — Ріккаті, (14)

де $h_0(x)\equiv 1$, а $f(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(n-2)})$ — нелінійна функція, яка залежить від x, u і похідних u до $(n-2)$-го порядку.

Р о з в' я з а н н я. Похідні $y^{(i)}$, $i=2,3,\ldots,n$, обчислимо, застосовуючи формулу Лейбніца:

$$y^{(i)}=(y')^{(i-1)}=(yu)^{(i-1)}=\sum_{k=0}^{i-1}C_{i-1}^{k}y^{(i-k-1)}u^{(k)}. \tag{15}$$

З (15) при $i=2,3$ відповідно маємо:

$$y''=y'u+yu'=y\,(u^2+u'),$$
$$y'''=y''u+2y'u'+yu''=y\,(u^2+u')\,u+2yuu'+$$
$$+yu''=y\,(u^3+3uu'+u''). \tag{16}$$

Застосовуючи метод математичної індукції, покажемо, що похідна $y^{(i)}$, $i=3,\ \ldots,\ n$, виражається формулою

$$y^{(i)}=y\,(u^i+u^{(i-1)}+f_i), \tag{17}$$

де f_i — нелінійна функція, яка залежить від u і похідних u до $(i-2)$-го порядку включно. Справедливість формули (17) при $i=3$ випливає з (16). Припустимо, що формула (17) справедлива при всіх $3\leqslant i<m\leqslant n$, і доведемо її справедливість при $i=m$. З (15), враховуючи припущення індукції, маємо

$$y^{(m)}=\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^{k}y^{(m-1-k)}u^{(k)}=\sum_{k=0}^{m-4}C_{m-1}^{k}y^{(m-1-k)}u^{(k)}+C_{m-1}^{m-3}y''u^{(m-3)}+$$
$$+C_{m-1}^{m-2}y'u^{(m-2)}+C_{m-1}^{m-1}yu^{(m-1)}=\sum_{k=0}^{m-4}C_{m-1}^{k}y\,(u^{m-1-k}+u^{(m-2-k)}+$$
$$+f_{m-1-k})\,u^{(k)}+C_{m-1}^{m-3}y\,(u^2+u')\,u^{(m-3)}+C_{m-1}^{m-2}yuu^{(m-2)}+$$
$$+C_{m-1}^{m-1}yu^{(m-1)}=y\,[(u^{m-1}+u^{(m-2)}+f_{m-1})\,u+C_{m-1}^{1}(u^{m-2}+u^{(m-3)}+$$
$$+f_{m-2})\,u'+\cdots+C_{m-1}^{m-4}(u^3+u''+f_3)\,u^{(m-4)}+C_{m-1}^{m-3}(u^2+$$
$$+u')\,u^{(m-3)}+C_{m-1}^{m-2}uu^{(m-2)}+u^{(m-1)}]=y\,[u^m+u^{(m-1)}+f_m],$$

де

$$f_m = (u^{(m-2)} + f_{m-1})\, u + \sum_{k=1}^{m-4} C_{m-1}^{k} (u^{m-1-k} + u^{(m-2-k)} + f_{(m-1-k)} u^{(k)} +$$
$$+ C_{m-1}^{m-3} (u^2 + u')\, u^{(m-3)} + C_{m-1}^{m-2} u u^{(m-2)}$$

— нелінійна функція, яка залежить від u і похідних u до $(m-2)$-го порядку Формулу (17) доведено.

Підставивши (13), (16), (17) у задане рівняння і скоротивши на $y \neq 0$, дістанемо (відносно u) рівняння $(n-1)$-го порядку виду

$$u^{(n)} + u^{(n-1)} + f_n + h_1(x)(u^{n-1} + u^{(n-2)} + f_{n-1}) + \cdots +$$
$$+ h_{n-2}(x)(u^2 + u') + h_{n-1}(x)\, u + h_n(x) = 0,$$

або після групування членів

$$u^{(n-1)} + h_1(x)\, u^{(n-2)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, u +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-2} h_i(x)\, u^{n-i} + h_n(x) + f(x, u, u', \ldots, u^{(n-2)}) = 0,$$

де $h_0(x) \equiv 1$, $f(x, u, u', \ldots, u^{(n-2)}) = f_n + \sum_{i=1}^{n-3} h_i(x) f_{n-i}$ — нелінійна функція, яка залежить від x, u і похідних u до $(n-2)$-го порядку, тобто рівняння виду (14).

2.33. Застосувавши заміну $y' = yu$, показати, що лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 = \mathrm{const}$, інтегрується в квадратурах. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + y = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Внаслідок заміни $y' = yu$, $y'' = y(u^2 + u')$ відносно нової шуканої функції дістанемо рівняння Ейлера — Ріккаті $u^2 + u' + a_1 u + a_2 = 0$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Для даного рівняння $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Відокремлюємо змінні:

$$u' = -(u+1)^2, \quad \frac{du}{(u+1)^2} = -dx, \quad u \neq -1,$$

$$-\frac{1}{u+1} = -x + \frac{1}{C_1'}, \quad \frac{1}{(u+1)} = x - \frac{1}{C_1'},$$

$$\frac{1}{u+1} = \frac{C_1' x - 1}{C_1'}, \quad u = \frac{C_1'}{C_1' x - 1} - 1$$

(розв'язок $u = -1$ маємо при $C_1' = 0$).

Урахувавши заміну, знаходимо:

$$y' = \left(\frac{C_1'}{C_1'x-1} - 1\right)y,$$

$$y = C_2' e^{\int\left(\frac{C_1'}{C_1'x-1} - 1\right)dx} = C_2' e^{\ln|C_1'x-1|} = C_1 e^{-x}x + C_2 e^{-x},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2.3. Лінійні однорідні рівняння

1. Основні поняття. Лінійне однорідне рівняння має вигляд

$$L(y) \equiv y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y = 0, \tag{1}$$

де функції $h_i(x)$ неперервні на $I = (a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Основні властивості розв'язків рівняння (1)

1°. *Якщо* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — *розв'язки рівняння* (1), *то й будь-яка лінійна комбінація їх*

$\sum\limits_{i=1}^{m} C_i y_i$, де $C_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *є розв'язком рівняння* (1).

2°. *Якщо лінійне однорідне рівняння* (1) *з дійсними коефіцієнтами має комплексний розв'язок* $y = u + iv$, *то функції* $u = \operatorname{Re} y$, $v = \operatorname{Im} y$ *кожна окремо також є розв'язками рівняння* (1).

Функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ називаються *лінійно залежними на множині I*, якщо існують сталі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ такі, що

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \quad x \in I, \tag{2}$$

причому $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$.

Якщо тотожність (2) виконується лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ називаються *лінійно незалежними на I*.

Будь-яка система з n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійного однорідного рівняння (1) називається *фундаментальною системою розв'язків рівняння* (1).

Фундаментальна система розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називається *нормальною* (при $x = x_0$), якщо

$$\begin{gathered}
y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \; \ldots, \; y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \; \ldots, \; y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n(x_0) = 0, \quad y_n'(x_0) = 0, \; \ldots, \; y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,
\end{gathered}$$

де $x_0 \in I$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (1) має вигляд $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі, а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (1).

Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — нормальна при $x = x_0$ фундаментальна система розв'язків рівняння (1), то розв'язок задачі Коші для рівняння (1) з початковими умовами $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ має вигляд

$$y=y_0y_1(x)+y_0'y_2(x)+\cdots+y_0^{(n-1)}y_n(x).$$

2. Умови лінійної залежності й незалежності функцій.

1°. Для того щоб функції $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, неперервні на $[a, b]$, були лінійно незалежні на $[a, b]$, необхідно й достатньо, щоб *визначник Грама* системи функцій $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, який має вигляд

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)=\begin{vmatrix}(\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_1, \varphi_m)\\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_2, \varphi_m)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ (\varphi_m, \varphi_1) & (\varphi_m, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_m, \varphi_m)\end{vmatrix},$$

де $(\varphi_i, \varphi_j)=\int\limits_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx$, $i, j=1, 2, \ldots, m$, був відмінний від нуля:

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)\neq 0.$$

2°. Для того щоб функції $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, неперервні разом з своїми похідними до $(m-1)$-го порядку включно на I, були лінійно незалежні на I, достатньо, щоб *визначник Вронського (вронскіан)* $W(x)\equiv W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$ системи функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ був відмінний від нуля хоча б в одній точці x інтервала I, тобто

$$W(x)\equiv W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_m(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_m'(x)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(x)\end{vmatrix}\neq 0,\quad x\in I.$$

3°. Якщо функції $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$, неперервні разом зі своїми похідними до $(m-1)$-го порядку включно на $I=(a, b)$, є лінійно залежними на I, то

$$W(x)\equiv W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]\equiv 0,\quad x\in I.$$

4°. Для того щоб розв'язки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійного однорідного рівняння n-го порядку (1) були лінійно незалежні на $I=(a, b)$, необхідно й достатньо, щоб

$$W(x)\equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\neq 0,\quad x\in I.$$

Для вронскіана n розв'язків лінійного однорідного рівняння (1) справедлива *формула Ліувілля — Остроградського:*

$$W(x)\equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=W(x_0)\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x} h_1(s)ds}.$$

З формули Ліувілля — Остроградського випливає така умова.

5°. Для того щоб розв'язки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійного однорідного рівняння n-го порядку (1) були лінійно незалежними на $I=(a, b)$ необхідно й достатньо, щоб вронскіан $W(x)\equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не перетворювався в нуль хоча б в одній точці $x_0\in I$.

2.34. Показати, що система функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, визначених на $I = (a, b)$, є лінійно залежною на I, якщо серед цих функцій є хоча б одна, яка тотожньо дорівнює нулю на I.

Розв'язання. Нехай, наприклад, $\varphi_1(x) \equiv 0$. Виберемо $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 2, \ldots, m$. Тоді, очевидно, на I виконується тотожність

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0,$$

причому $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$. Тому функції $\varphi_1(x) \equiv 0, \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ лінійно залежні на I.

2.35. Показати, що система функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, визначених на $I = (a, b)$, лінійно залежна на I, якщо серед цих функцій є принаймні дві, які тотожньо рівні на I.

Розв'язання. Нехай, наприклад, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Виберемо $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 3, \ldots, m$. Тоді на I виконується тотожність

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \alpha_3\varphi_3(x) + \cdots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0,$$

причому $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$. Тому функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ лінійно залежні на I.

2.36. Довести, що будь-яка підсистема лінійно незалежної на $I = (a, b)$ системи функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ також лінійно незалежна на I.

Розв'язання. Припустимо супротивне, що підсистема $\varphi_{k_1}(x), \varphi_{k_2}(x), \ldots, \varphi_{k_p}(x)$, $1 \leqslant k_i \leqslant m$, $i = 1, 2, \ldots, p$, даної системи лінійно залежна на I. Тоді на I виконується тотожність

$$\alpha_{k_1}\varphi_{k_1}(x) + \alpha_{k_2}\varphi_{k_2}(x) + \cdots + \alpha_{k_p}\varphi_{k_p}(x) \equiv 0, \tag{3}$$

причому $\sum_{i=1}^{p} \alpha_{k_i}^2 > 0$. Поклавши $\alpha_l = \alpha_{k_i}$, якщо $l = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha_l = 0$, якщо $l \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$, дістанемо, що разом з (3) на I виконується тотожність $\sum_{l=1}^{m} \alpha_l\varphi_l(x) \equiv 0$, причому $\sum_{l=1}^{m} \alpha_l^2 = \sum_{i=1}^{p} \times$

$\times\, \alpha_{k_i}^2 > 0$.

Тому функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ лінійно залежні, що суперечить умові.

2.37. Показати, що система функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, визначених на $I = (a, b)$, є лінійно залежною на I, якщо яка-небудь підсистема цієї системи лінійно залежна на I.

Розв'язання. Нехай функції $\varphi_{k_1}(x), \varphi_{k_2}(x), \ldots, \varphi_{k_p}(x)$, $1 \leqslant k_i \leqslant m$, $i = 1, 2, \ldots, p$, лінійно залежні на I. Припустимо супротивне, що система $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ лінійно незалежна на I. Тоді, внаслідок результату задачі 2.36, підсистема $\varphi_{k_1}(x)$, $\varphi_{k_2}(x)$, ..., $\varphi_{k_p}(x)$ також лінійно незалежна на I, що неможливо.

2.38. Показати, що коли система функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$, визначених на $I = (a, b)$, лінійно залежна на I, то вона лінійно залежна на будь-якому проміжку $I_1 = (\alpha, \beta) \subset I$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки дана система функцій лінійно залежна на I, то виконується тотожність

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \quad x \in I, \tag{4}$$

причому $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$.

Тотожність (4) справедлива й на $I_1 \subset I$. Тому дана система функцій лінійно залежна на I_1.

2.39. Нехай функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$, визначені на $I = (a, b)$, лінійно незалежні на I. Чи випливає звідси, що функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ лінійно незалежні на будь-якому проміжку $I_1 = (\alpha, \beta) \subset I$?

Р о з в' я з а н н я. Ні, не випливає. Розглянемо приклад. Функції x і $|x|$ лінійно незалежні на проміжку $(-1, 1)$, оскільки тотожність

$$\alpha_1 x + \alpha_2 |x| \equiv, \quad x \in (-1, 1), \tag{5}$$

можлива лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Справді, при $x = 0{,}5$ з (5) маємо $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 0{,}5 = 0$, звідки $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; при $x = -0{,}5$ з (5) випливає $(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 0{,}5 = 0$, звідки $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Тому $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, а отже, функції x і $|x|$ лінійно незалежні на $(-1, 1)$.

Якщо $x \in (0, 1)$, то $x - |x| = x - x \equiv 0$ $(\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = -1)$ і якщо $x \in (-1, 0)$, то $x + |x| = x - x \equiv 0$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1)$. Тому функції x і $|x|$ лінійно залежні на проміжках $(-1, 0)$ і $(0, 1)$ окремо.

2.40. Нехай функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ визначені на проміжку $I = (a, b)$ і лінійно незалежні на проміжку $I_1 = (\alpha, \beta) \subset I$. Довести, що тоді функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ лінійно незалежні на I.

Р о з в' я з а н н я. Припустимо супротивне, що функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ лінійно залежні на I. Тоді на I виконується тотожність

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \tag{6}$$

причому $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$. Зрозуміло, що тотожність (6) справедлива також і на проміжку I_1, оскільки $I_1 \subset I$. Тому дані функції лінійно залежні на I_1, що суперечить умові.

2.41. Нехай функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ визначені і $m-1$ раз неперервно диференційовні на $I=(a, b)$. Довести, що з умови $W(x)=W[\varphi_1 \varphi_2, \ldots, \varphi_m] \not\equiv 0$ на I випливає лінійна незалежність на I даної системи функцій.

Розв'язання. Припустивши, що функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_m(x)$ лінійно залежні на I, дістанемо, що $W(x) \equiv 0$, а це неможливо.

2.42. Довести, що:

а) коли $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \not\equiv \text{const}$ на $I=(a, b)$, то функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ лінійно незалежні на I;

б) коли $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv \text{const}$ на I, то функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ лінійно залежні на I.

Розв'язання

а) Припустимо, що $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \not\equiv \text{const}$ на I, але функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ лінійно залежні на I. Тоді на I виконується тотожність

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x) \equiv 0, \tag{7}$$

причому $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$. Нехай, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$. Тоді з тотожності (7), враховуючи, що $\varphi_2(x) \neq 0$ на I, дістанемо

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \equiv \text{const},$$

що суперечить припущенню.

б) Припустимо, що $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv \text{const}=C$ на I Тоді на I виконується тотожність $\varphi_1(x)-C\varphi_2(x) \equiv 0$, причому $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1^2+$ $+(-C)^2>0$. Тому функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ лінійно залежні на I.

2.43. Дослідити на лінійну залежність функції:

а) $1, x, x^2, x^3$; б) $1, \ln x$; в) $\sin x, \cos x$;

г) $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8$; д) $x^3+2x,\ 3x^2-1,\ x+4$;

е) $\ln x^4,\ \ln 5x,\ 1$; є) $x,\ x^3,\ |x|^3$.

Функції розглядаються на своїх областях визначення.

Розв'язання.

а) Припустимо, що функції $1, x, x^2, x^3$ лінійно залежні на $I=(-\infty, +\infty)$. Тоді на I виконується тотожність

$$\alpha_1 \cdot 1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\alpha_4 x^3 \equiv 0, \tag{8}$$

де $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2>0$, що неможливо, оскільки многочлен третього степеня може перетворитися в нуль не більш ніж у трьох точках. Отже, функції $1, x, x^2, x^3$ лінійно незалежні на I і взагалі на будь-якому проміжку $I_1=(a, b)$.

б) Скористаємось результатом задачі 2.42. Оскільки $\frac{\ln x}{1} = \ln x \neq \text{const}$ при $x > 0$, то дані функції лінійно незалежні на $I = (0, +\infty)$.

в) Припустимо, що дані функції лінійно залежні на $I = (-\infty, +\infty)$. Тоді

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \equiv 0, \quad x \in I, \tag{9}$$

де, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$. Нехай $x = \frac{\pi}{2}$. Тоді з (9) випливає, що $\alpha_1 = 0$, а це неможливо. Отже, дані функції лінійно незалежні на I.

г) З'ясуємо, чи можна знайти такі сталі $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, щоб $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$ і на проміжку $I = (-\infty, +\infty)$ виконувалася тотожність

$$\alpha_1 (4 - x) + \alpha_2 (2x + 3) + \alpha_3 (6x + 8) \equiv 0. \tag{10}$$

З тотожності (10) маємо

$$(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3) x + (4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3) \cdot 1 \equiv 0. \tag{11}$$

Оскільки функції 1 і x лінійно незалежні на I (див. приклад а)), то з тотожності (11) випливає система

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0; \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Запишемо систему (12) у вигляді

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 6\alpha_3; \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 = -8\alpha_3. \end{cases} \tag{13}$$

Головний визначник системи (13) відносно невідомих α_1, α_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Тому система (13) при будь-яких $\alpha_3 \neq 0$ має нетривіальний розв'язок і дані функції лінійно залежні на I.

д) З'ясуємо, чи можна знайти такі сталі $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$, щоб на проміжку $I = (-\infty, +\infty)$ виконувалася тотожність

$$\alpha_1 (x^2 + 2x) + \alpha_2 (3x^2 - 1) + \alpha_3 (x + 4) \equiv 0. \tag{14}$$

З тотожності (14) маємо

$$(\alpha_1 + 3\alpha_2) x^2 + (2\alpha_1 + \alpha_3) x + (-\alpha_2 + 4\alpha_3) \cdot 1 \equiv 0. \tag{15}$$

Як і в прикладі г), внаслідок лінійної незалежності функцій 1, x, x^2, з (15) дістаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0; \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0; \\ -\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Оскільки головний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -23 \neq 0,$$

то система (16) має лише тривіальний розв'язок: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Тому дані функції лінійно незалежні на I.

е) Внаслідок лінійної незалежності функцій $\ln x$ і 1 на проміжку $I = (0, +\infty)$ (див. приклад б)), тотожність $\alpha_1 \ln x^4 + \alpha_2 \ln 5x + \alpha_3 \cdot 11 \equiv 0$ можлива лише за умов

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_2 \ln 5 + 11\alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) має нетривіальний розв'язок $\left(\text{наприклад, } \alpha_1 = \frac{11}{4 \ln 5},\ \alpha_2 = -\frac{11}{\ln 5},\ \alpha_3 = 1\right)$. Тому дані функції лінійно залежні на I.

є) Оскільки $|x^3| = \begin{cases} x^3, & x \geqslant 0; \\ -x^3, & x < 0, \end{cases}$ то дані функції, очевидно, лінійно залежні на проміжках $(-\infty, 0)$ і $(0, +\infty)$ окремо. Розглянемо тепер проміжок $I = (-\infty, +\infty)$. З припущення про лінійну залежність даних функцій на I маємо

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 |x^3| \equiv 0, \tag{18}$$

причому $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$. Якщо $x \geqslant 0$, то з (18) дістаємо

$$\alpha_1 x + (\alpha_2 + \alpha_3) x^3 \equiv 0. \tag{19}$$

При $x < 0$

$$\alpha_1 x + (\alpha_2 - \alpha_3) x^3 \equiv 0. \tag{20}$$

Оскільки функції x і x^3 лінійно незалежні на будь-якому проміжку, то з (19) і (20) дістаємо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, звідки $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, що суперечить припущенню. Отже, дані функції лінійно незалежні на I.

2.44. Користуючись визначником Грама, дослідити функції на лінійну залежність на даних проміжках:

а) $\varphi_1(x) = 2x - 1$, $\varphi_2(x) = 2x + 1$, $\varphi_3(x) = x$, $I = [-1, 1]$;

б) $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1^{(1)} = \sin x$, $\varphi_1^{(2)} = \cos x, \ldots, \varphi_n^{(1)} = \sin nx$, $\varphi_n^{(2)} = \cos nx$, $= [-\pi, \pi]$;

в) $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = |x|$, $I = [-1, 1]$;

г) $\varphi_1(x) = x^3$, $\varphi_2(x) = x^2|x|$, $\varphi_3(x) = x$, $I = [0, 1]$;

д) $\varphi_1(x) = x^3$, $\varphi_2(x) = x^2|x|$, $\varphi_3(x) = x$, $I = [-1, 1]$.

Розв'язання.

а) Обчислюємо елементи визначника Грама:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} (4x^2 - 4x + 1)\,dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{14}{3};$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} (4x^2 - 1)\,dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3};$$

$$(\varphi_1, \varphi_3) = \int_{-1}^{1} (2x^2 - x)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3};$$

$$(\varphi_2, \varphi_1) = \frac{2}{3};$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} (4x^2 + 4x + 1)\,dx = \left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{14}{3};$$

$$(\varphi_2, \varphi_3) = \int_{-1}^{1} (2x^2 + x)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3};$$

$$(\varphi_3, \varphi_1) = \frac{4}{3};$$

$$(\varphi_3, \varphi_2) = \frac{4}{3};$$

$$(\varphi_3, \varphi_3) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \begin{vmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{8}{27}(49 + 4 + 4 - 28 - 28 - 1) = 0.$$

Тому дані функції лінійно залежні на проміжку I.

б) Маємо:

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi,$$

$$(\varphi_0, \varphi_i^{(1)}) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin ix dx = 0,$$

$$(\varphi_0, \varphi_i^{(2)}) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos ix dx = 0.$$

Аналогічно

$$(\varphi_i^{(\mu)}, \varphi_j^{(\nu)}) = 0, \ i \neq j, \quad \mu, \ \nu = 1, 2;$$

$$(\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(1)}) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ix dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2ix)\, dx = \pi;$$

$$(\varphi_i^{(2)}, \varphi_i^{(2)}) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ix dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2ix)\, dx = \pi;$$

$$(\varphi_i^{(\mu)}, \varphi_i^{(\nu)}) = 0, \ \mu \neq \nu, \quad i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

$$\Gamma(\varphi_0, \varphi_1^{(1)}, \ \ldots, \varphi_n^{(2)}) = \begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \pi \end{vmatrix} = 2\pi^{2n+1} \neq 0.$$

Тому дані функції φ_0, $\varphi_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(2)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, лінійно незалежні на I.

в) Маємо:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x\,|x|\, dx = 0;$$

$$(\varphi_2, \varphi_1) = 0, \quad (\varphi_2, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} |x|^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3};$$

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} \neq 0.$$

Тому функції x і $|x|$ лінійно незалежні на I.

г) Маємо:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 x^5 |x| dx = \frac{1}{7}, \quad (\varphi_1, \varphi_3) =$$

$$= \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5};$$

$$(\varphi_2, \varphi_1) = \frac{1}{7},$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 x^4 |x|^2 dx = \frac{1}{7}, \quad (\varphi_2, \varphi_3) = \int_0^1 x^3 |x| dx = \frac{1}{5};$$

$$(\varphi_3, \varphi_1) = \frac{1}{5}, \quad (\varphi_3, \varphi_2) = \frac{1}{5}, \quad (\varphi_3, \varphi_3) = \frac{1}{3};$$

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Функції x^3, $x^2|x|$, x лінійно залежні на $I = [0; 1]$.

д) Маємо:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-1}^1 x^6 dx = \frac{2}{7}, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-1}^1 x^5 |x| dx = 0 \quad (\varphi_1, \varphi_3) =$$

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5};$$

$$(\varphi_2, \varphi_1) = 0, \quad (\varphi_2, \varphi_2) = \int_{-1}^1 x^4 |x|^2 dx = \frac{2}{7}, \quad (\varphi_2, \varphi_3) = \int_{-1}^1 x^3 |x| \times$$

$$\times dx = 0;$$

$$(\varphi_3, \varphi_1) = \frac{2}{5}, \quad (\varphi_3, \varphi_2) = 0, \quad (\varphi_3, \varphi_3) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{8}{147} - \frac{8}{175} \neq 0.$$

Тому функції x^3, $x^2|x|$, x — лінійно незалежні на $I=[-1, 1]$.

2.45. Довести, що функції

$$x^{k_1},\ x^{k_2},\ \ldots,\ x^{k_m}, \tag{21}$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — дійсні числа і $k_i \neq k_j$, $i \neq j$, лінійно незалежні на будь-якому проміжку $I=(a, b)$, $b > a > 0$.

Розв'язання. Припустимо, що дані функції лінійно залежні на I. Це означає, що на I виконується тотожність

$$\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \cdots + \alpha_m x^{k_m} \equiv 0, \tag{22}$$

причому $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$. Нехай, наприклад, $\alpha_m \neq 0$. Поділивши (22) на x^{k_1}, дістанемо

$$\alpha_1 + \alpha_2 x^{l_2} + \cdots + \alpha_m x^{l_m} \equiv 0,$$

де $l_i = k_i - k_1$, $i = 2, \ldots, m$.

Продиференціювавши останню тотожність, дістанемо

$$\beta_2 x^{l_2'} + \beta_3 x^{l_3'} + \cdots + \beta_m x^{l_m'} \equiv 0, \tag{23}$$

де $l_i' = l_i - 1 = k_i - k_1 - 1$, $\beta_i = \alpha_i l_i$, $i = 2, \ldots, m$, причому $\beta_m = \alpha_m (k_m - k_1) \neq 0$. Тотожність (23) розділимо на $x^{l_2'}$, після чого знову продиференціюємо. Тоді знайдемо

$$\gamma_3 x^{n_3'} + \cdots + \gamma_m x^{n_m'} \equiv 0,$$

де

$$n_i' = n_i - 1 = l_i' - l_2' - 1 = k_i - k_1 - 1 - (k_2 - k_1 - 1) - 1 =$$
$$= k_i - k_2 - 1, \quad \gamma_i = \beta_i n_i = \alpha_i l_i (l_i' - l_2') = \alpha_i (k_i - k_1)(k_i - k_2),$$
$$i = 3, \ldots, m,$$

причому $\gamma_m = \alpha_m (k_m - k_1)(k_m - k_2) \neq 0$.

Продовжуючи цей процес, на $(m-1)$-му кроці дістанемо

$$\delta_m x^{p_m'} \equiv 0, \tag{24}$$

де $\delta_m = \alpha_m (k_m - k_1)(k_m - k_2) \ldots (k_m - k_{m-1})$, $p_m' = k_m - k_{m-1} -$

Тотожність (24) є суперечливою, оскільки $\delta_m \neq 0$. Ця суперечність доводить лінійну незалежність функцій (21) на I.

2.46. Довести, що функції

$$\begin{matrix} e^{p_1 x}, & x e^{p_1 x}, & \ldots, & x^{m_1} e^{p_1 x}, \\ e^{p_2 x}, & x e^{p_2 x}, & \ldots, & x^{m_2} e^{p_2 x}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{p_k x}, & x e^{p_k x}, & \ldots, & x^{m_k} e^{p_k x}, \end{matrix} \tag{25}$$

де $m_j \geqslant 0$ — цілі числа, при будь-яких комплексних $p_l \neq p_j$, $l \neq \neq j$, $l, j = 1, 2, \ldots, k$, лінійно незалежні на будь-якому проміжку $I = (a; \quad b)$.

Р о з в' я з а н н я. Припустимо супротивне, що функції (25) лінійно залежні на I. Це означає, що на I виконується тотожність

$$e^{p_1 x}Q_1(x) + e^{p_2 x}Q_2(x) + \cdots + e^{p_k(x)}Q_k(x) \equiv 0, \tag{26}$$

де $Q_j(x), j = 1, 2, \ldots, k$,— многочлени степеня, не вище m_j, причому серед цих многочленів знайдеться принаймні один (нехай $Q_k(x)$), який не є тотожнім нулем. Розділимо (26) на $e^{p_1 x}$ і продиференціюємо здобуту тотожність $m_1 + 1$ раз. Тоді дістанемо тотожність виду

$$e^{(p_2 - p_1)x}A_2(x) + \cdots + e^{(p_k - p_1)x}A_k(x) \equiv 0. \tag{27}$$

Тут степені многочленів $A_j(x)$, $j = 2, \ldots, k$, збігаються зі степенями многочленів $Q_j(x)$, оскільки при l-кратному диференціюванні виразу $e^{px}Q_j(x)$ дістаємо вираз $e^{px}A_j(x)$, де $A_j(x)$ — многочлен, коефіцієнт при старшому члені якого відрізняється від коефіцієнта при старшому члені многочлена $Q_j(x)$ сталим множником p^l. Тому, зокрема, многочлен $A_k(x)$ не є тотожнім нулем. Тотожність (27) розділимо на $e^{(p_2 - p_1)x}$ і диференціюємо $m_2 + 1$ раз і т. д. На $(k-1)$-му кроці дістаємо тотожність виду

$$D_k(x)\, e^{(p_k - p_{k-1})x} \equiv 0,$$

звідки $D_k(x) \equiv 0$, що неможливо, бо степінь многочлена $D_k(x)$ дорівнює степеню многочлена $Q_k(x)$, який за припущенням не є тотожнім нулем.

2.47. Довести, що коли система функцій

$$w_1 = u_1(x) + iv_1(x), \ \ldots, \ w_n = u_n(x) + iv_n(x),$$
$$\overline{w}_1 = u_1(x) - iv_1(x), \ \ldots, \ \overline{w}_n = u_n(x) - iv_n(x),$$

($u_j(x)$, $v_j(x)$ — дійсні функції, $i^2 = -1$), лінійно незалежна на $I \subseteq \mathbb{R}$, то функції $u_j(x) = \operatorname{Re} w_j$, $v_j(x) = \operatorname{Im} w_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, також лінійно незалежні на I.

Р о з в' я з а н н я. Складемо тотожність

$$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_j u_j(x) + \beta_j v_j(x)] \equiv 0,$$

де α_j, $\beta_j = \text{const}$. Урахувавши, що

$$u_j = \frac{1}{2}(w_j + \overline{w}_j), \quad v_j = \frac{1}{2i}(w_j - \overline{w}_j),$$

дістанемо

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\alpha_j}{2}(w_j + \overline{w}_j) + \frac{\beta_j}{2i}(w_j - \overline{w}_j)\right] \equiv 0,$$

або

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(\alpha_j - i\beta_j)\,\omega_j + \frac{1}{2}(\alpha_j + i\beta_j)\,\overline{\omega}_j\right] \equiv 0.$$

З останньої рівності, внаслідок лінійної незалежності функцій ω_j, $\overline{\omega}_j$, випливає, що $\frac{1}{2}(\alpha_j - i\beta_j) = 0$, $\frac{1}{2}(\alpha_j + i\beta_j) = 0$, звідки $\alpha_j = \beta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Це означає, що функції $u_j(x)$, $v_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, лінійно незалежна на I.

2.48. Довести, що функції

$$\begin{array}{l}
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ \ldots,\ x^{m_1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ \ldots,\ x^{m_1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\ xe^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\ \ldots,\ x^{m_k}e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\\
e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,\ xe^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,\ \ldots,\ x^{m_k}e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,
\end{array}$$

де α_j, β_j — дійсні числа, $\beta_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$; $m_j \geqslant 0$ — цілі числа; $p_j = \alpha_j + i\beta_j \neq p_l = \alpha_l + i\beta_l$, $i^2 = -1$, при $j \neq l$, $j, l = 1, \ldots, k$, лінійно незалежна на будь-якому проміжку виду $I = (a, b)$.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємось результатом задачі 2.47. Дані функції лінійно незалежні, оскільки вони є відповідно дійсними й уявними частинами функцій

$$\omega_j = x^{r_j}e^{p_j x} = x^{r_j}e^{\alpha_j x}(\cos\beta_j x + i\sin\beta_j x),$$

$$\overline{\omega}_j = x^{r_j}e^{\overline{p}_j x} = x^{r_j}e^{\alpha_j x}(\cos\beta_j x - i\sin\beta_j x),$$

$$r_j = 0, 1, \ldots . m_j; \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

лінійна незалежність яких доведена в задачі 2.46.

2.49. Нехай функція $x = g(t)$ здійснює взаємно однозначне відображення множини $\Lambda = (\alpha; \beta)$ на множину $I = (a; b)$. Довести, що функції

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x), \tag{28}$$

визначені на I, лінійно незалежні на I тоді і тільки тоді, коли функції

$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \ldots,\ \psi_m(t), \tag{29}$$

де $\psi_i(t) \equiv \varphi_i(g(t))$, $i = 1, \ldots, m$, лінійно незалежні на Λ.

Р о з в' я з а н н я. З умови випливає, що на множині I визначена функція $t = f(x)$, яка є оберненою до функції $x = g(t)$: $g(f(x)) = x$, $\forall x \in I$.

Нехай функції (28) лінійно незалежні на I. Припустимо супротивне, що функції (29) лінійно залежні на Λ. Це означає, що на Λ

виконується тотожність

$$\alpha_1\psi_1(t)+\alpha_2\psi_2(t)+\cdots+\alpha_m\psi_m(t)\equiv 0,$$

причому

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2>0. \tag{30}$$

Оскільки $\psi_i(t)=\varphi_i(g(t))=\varphi_i(g(f(x))=\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, то на множині I виконується тотожність

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(x)\equiv 0$$

і виконується нерівність (30), що неможливо, внаслідок лінійної незалежності функцій (28) на I. Отже, функції (29) лінійно незалежні на I. Аналогічно можна показати, що з лінійної незалежності функцій (29) на Λ випливає лінійна незалежність функцій (28) на I.

2.50. Довести, що функції

$$\begin{gathered}
x^{\alpha_1}\cos(\beta_1\ln x),\ x^{\alpha_1}\ln x\cos(\beta_1\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha_1}\ln^{m_1}x\cos(\beta_1\ln x),\\
x^{\alpha_1}\sin(\beta_1\ln x),\ x^{\alpha_1}\ln x\sin(\beta_1\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha_1}\ln^{m_1}x\sin(\beta_1\ln x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{\alpha_k}\cos(\beta_k\ln x),\ x^{\alpha_k}\ln x\cos(\beta_k\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha_k}\ln^{m_k}x\cos(\beta_k\ln x),\\
x^{\alpha_k}\sin(\beta_k\ln x),\ x^{\alpha_k}\ln x\sin(\beta_k\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha_k}\ln^{m_k}x\sin(\beta_k\ln x),
\end{gathered} \tag{31}$$

де α_j, β_j — дійсні числа, $\beta_j\neq 0$, $j=1, \ldots, k$, $m_j\geqslant 0$ — цілі числа, $p_j=\alpha_j+i\beta_j\neq p_l=\alpha_l+i\beta_l$, $i^2=-1$, при $j\neq l$, $j, l=1, 2, \ldots, k$, лінійно незалежні на будь-якому проміжку $I=(a, b)$, $b>a>0$.

Р о з в' я з а н н я. За допомогою функції $t=\ln x$ здійснюється взаємно однозначне відображення множини I на множину $\Lambda=(\alpha, \beta)$, де $\alpha=\ln a$, $\beta=\ln b$. Підставивши $x=e^t$ в (31), дістанемо функції змінної:

$$\begin{gathered}
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,\ te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,\ \ldots,\ t^{m_1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t,\ te^{\alpha_k t}\sin\beta_k t,\ \ldots,\ t^{m_k}e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t.
\end{gathered} \tag{32}$$

Функції (32) лінійно незалежні на Λ (див. задачу 2.48); тоді, згідно з доведеним в задачі 2.49, функції (31) лінійно незалежні на I.

2.51. Довести, що функції

$$\begin{gathered}
x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_1}\ln x,\ \ldots,\ x^{\alpha_1}\ln^{m_1}x,\\
x^{\alpha_2},\ x^{\alpha_2}\ln x,\ \ldots,\ x^{\alpha_2}\ln^{m_2}x,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{\alpha_k},\ x^{\alpha_k}\ln x,\ \ldots,\ x^{\alpha_k}\ln^{m_k}x,
\end{gathered} \tag{33}$$

де $m_j \geqslant 0$ — цілі числа, при будь-яких дійсних $\alpha_j \neq \alpha_l, j \neq l; j, l = 1, \ldots, k$, лінійно незалежні на будь-якому проміжку $I = (a, b)$, $(b > a > 0)$.

Розв'язання. За допомогою функції $t = \ln x$ здійснюється взаємно однозначне відображення множини I на множину $\Lambda = (\alpha, \beta)$, де $\alpha = \ln a$, $\beta = \ln b$. Підставивши $x = e^t$ в (33), дістанемо функції

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha_1 t}, & te^{\alpha_1 t}, & \ldots, & t^{m_1}e^{\alpha_1 t}, \\ e^{\alpha_2 t}, & te^{\alpha_2 t}, & \ldots, & t^{m_2}e^{\alpha_2 t}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{\alpha_k t}, & te^{\alpha_k t}, & \ldots, & t^{m_k}e^{\alpha_k t}, \end{array}$$

лінійна незалежність яких на Λ доведена при розв'язанні задачі 2.48. Тому, згідно з результатом задачі 2.49, функції (33) лінійно незалежні на I.

2.52. Знайти визначник Вронського систем функцій:

а) e^x, xe^x, x^2e^x, $I = (-\infty, +\infty)$;

б) 10, $\arcsin x$, $\arccos x$, $I = (-1, 1)$;

в) 5, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $I = (-\infty, +\infty)$;

г) x^2, $x\,|x|$, $I = (-\infty, +\infty)$.

Які висновки відносно лінійної залежності даних функцій на I можна зробити за значенням їх визначника Вронського?

Розв'язання

$$\text{а) } W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x}(4x+2-4x) = 2e^{3x};$$

$$\text{б) } W(x) = \begin{vmatrix} 10 & \arcsin x & \arccos x \\ 0 & (1-x^2)^{-1/2} & -(1-x^2)^{-1/2} \\ 0 & x(1-x^2)^{-3/2} & -x(1-x^2)^{-3/2} \end{vmatrix} = 0;$$

в) $W(x) = \begin{vmatrix} 5 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0;$

г) $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0.$

У прикладі а) $W(x) = 2e^{3x} \neq 0$ на I. Тому функції лінійно незалежні на I.

У прикладах б) — г) висновок про лінійну залежність функцій за їх визначником Вронського зробити не можна.

У прикладі б) функції лінійно залежні на I, оскільки на I виконується тотожність

$$\alpha_1 \cdot 10 + \alpha_2 \arcsin x + \alpha_3 \arccos x \equiv 0,$$

де $\alpha_1 = -\frac{\pi}{20}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

У прикладі в) функції лінійно залежні на I, оскільки на I виконується тотожність

$$\alpha_1 \cdot 5 + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin^2 x \equiv 0,$$

де $\alpha_1 = -\frac{1}{5}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

У прикладі г) функції лінійно незалежні на I, оскільки тотожність

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x|x| \equiv 0, \quad x \in I, \tag{34}$$

виконується лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Справді, при $x = 1$ і $x = -1$ відповідно маємо $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ і $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, звідки $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2.53. Нехай функції $\varphi = \varphi(x)$ і $\psi = \psi(x)$ неперервні і лінійно незалежні на інтервалі $I = (a, b)$. Довести, що ці функції лінійно незалежні також і на множині $I_0 = I \setminus \{x_0\}$, де $x_0 \in I$.

Р о з в' я з а н н я. Припустивши, що функції φ і ψ лінійно залежні на I_0, дістанемо тотожність $\lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\psi(x) \equiv 0$, $x \in I$, $x \neq x_0$, причому $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$. Перейшовши до границі при $x \to x_0$, внаслідок неперервності функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ на I, дістанемо $\lambda_1\varphi(x_0) + \lambda_2\psi(x_0) = 0$. Тому функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ є лінійно залежними і на I, що суперечить умові.

2.54. Нехай функції $\varphi = \varphi(x)$ і $\psi = \psi(x)$ неперервно диференційовні і лінійно незалежні на $I = (a, b)$, причому $W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2] \equiv 0$ на I.

Довести, що:

а) існує хоча б одна точка x_1 і одна точка x_1', $(x_1, x_1' \in I)$, такі, що $\varphi(x_1) = 0$ і $\psi(x_1') = 0$;

б) існує інтервал $I_0 = (\alpha_0, \beta_0) \subset I$ такий, що функції φ і ψ лінійно залежні на I_0;

в) існує точка $\alpha \in I$ така, що $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \psi'(\alpha) = 0$.

Навести приклади таких функцій.

Р о з в' я з а н н я.

а) Припустимо, що такої точки (наприклад, x_1) не існує, тобто $\varphi(x) \neq 0$, $x \in I$. Тоді вронскіан можна записати у вигляді

$$W(x) = \varphi^2 \frac{\psi'\varphi - \psi\varphi'}{\varphi^2} = \varphi^2 \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' \equiv 0, \quad x \in I,$$

звідки $\psi(x) = C\varphi(x)$, $C = \mathrm{const}$, $x \in I$, що суперечить лінійній незалежності функцій φ і ψ на I.

б) Припустимо супротивне, що функції φ і ψ лінійно незалежні на будь-якому інтервалі $(\alpha, \beta) \subset I$. Нехай x — довільна точка інтервалу I. Розглянемо послідовність інтервалів $I_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \subset I$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ Оскільки функції φ і ψ за припущенням лінійно незалежні на I_n і $W(x) \equiv 0$ на I_n, то з п. а) випливає існування точки $x_{n_0} \in I_{n_0}$ такої, що $\varphi(x_{n_0}) = 0$. Розглянувши інтервал I_{n_1}, $n_1 > n_0$, який не містить x_{n_0}, покажемо існування точки $x_{n_1} \in I_{n_1}$ такої, що $\varphi(x_{n_1}) = 0$ і т. д. Дістанемо послідовність точок $x_{n_k} \to x$, $k \to +\infty$, причому $\varphi(x_{n_k}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Внаслідок неперервності функції φ маємо $\varphi(x) = \varphi(\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(x_{n_k}) = 0$. Оскільки x — довільна точка інтервалу I, то $\varphi(x) \equiv 0$ на I, що суперечить умові лінійної незалежності функцій φ і ψ на I.

в) Вище було встановлено існування інтервалу $I_0 = (\alpha_0, \beta_0) \subset I$ лінійної залежності функцій φ і ψ:

$$\lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\psi(x) \equiv 0, \quad x \in I_0,$$

$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0)$. Припустимо, що $I' = (\alpha, \beta) \supset I_0$ — максимальний з цих інтервалів (з тими самими коефіцієнтами лінійної залежності λ_1, λ_2). Наприклад, на інтервалі $I_\varepsilon = (\alpha - \varepsilon, \beta) \subset I$ (ε — довільне досить мале додатне число) φ і ψ вже є лінійно незалежними. Розглянемо інтервал $(\alpha - \varepsilon, \alpha)$ (якщо $(\alpha - \varepsilon, \alpha) \not\subset I$, то розглядатимемо інтервал $(\beta, \beta + \varepsilon) \subset I$).

Якщо на цьому інтервалі φ і ψ — лінійно залежні, то, очевидно, коефіцієнти цієї лінійної залежності λ_1', λ_2' не пропорційні до коефіцієнтів λ_1, λ_2, оскільки в цьому випадку інтервал I' не був би максимальним. Тому

$$\lambda_1'\varphi(x) + \lambda_2'\psi(x) \equiv 0, \qquad \lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\psi(x) \equiv 0,$$

$$\lambda_1'\varphi'(x) + \lambda_2'\psi'(x) \equiv 0, \quad \lambda_1\varphi'(x) + \lambda_2\psi'(x) \equiv 0,$$

$$x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha) \qquad\qquad x \in (\alpha, \beta)$$

$$\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0,$$

де
$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1' & \lambda_2' \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Перейшовши в цих рівностях до границі при $x \to \alpha - 0$ і при $x \to \alpha + 0$ відповідно, внаслідок неперервності φ, φ', ψ, ψ', дістанемо

$$\begin{cases} \lambda_1'\varphi(\alpha) + \lambda_2'\psi(\alpha) = 0; \\ \lambda_1\varphi(\alpha) + \lambda_2\psi(\alpha) = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \lambda_1'\varphi'(\alpha) + \lambda_2'\psi'(\alpha) = 0; \\ \lambda_1\varphi'(\alpha) + \lambda_2'\psi'(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1' & \lambda_2' \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то це можливо лише при $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \psi'(\alpha) = 0$.

Якщо на інтервалі $(\alpha - \varepsilon, \alpha)$ функції φ і ψ лінійно незалежні, то, скориставшись результатом п. б) і тим, що ε — довільне додатне мале число, дістанемо, що при деякому ε_0 φ і ψ будуть лінійно залежними на $(\alpha - \varepsilon_0, \alpha)$, тобто матимемо попередній випадок.

Як приклад можна навести такі функції:

$$\varphi(x) = x^3, \quad \psi(x) = |x|^3, \quad I = (-1, 1);$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1); \\ (x-1)^2, & x \in [1, 2), \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \in (0, 1); \\ 0, & x \in [1, 2), \end{cases} \quad I = (0, 2).$$

Перевірку виконання умов задачі і тверджень а) — в) рекомендуємо виконати самостійно.

2.55. Довести, що лінійне однорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + h_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\,y' + h_n(x)\,y = 0 \qquad (35)$$

з неперервними на $I = (a, b)$ коефіцієнтами $h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, завжди має фундаментальну систему розв'язків.

Р о з в' я з а н н я. Задача Коші для рівняння (35) має єдиний розв'язок при $x_0 \in I$ і будь-яких початкових значеннях y_0, y_0, ..., $y_0^{(n-1)}$.

Побудуємо n розв'язків даного рівняння $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, які визначаються такими початковими умовами:

$$\begin{array}{lll} y_1(x_0) = y_{10}^{(0)}, & y_2(x_0) = y_{20}^{(0)}, \ \ldots, & y_n(x_0) = y_{n0}^{(0)}, \\ y_1'(x_0) = y_{10}^{(1)}, & y_2'(x_0) = y_{20}^{(1)}, \ \ldots, & y_n'(x_0) = y_{n0}^{(1)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, \ \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)}, \end{array}$$
$$x_0 \in I,$$

і умовою

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{10}^{(0)} & y_{20}^{(0)} & \dots & y_{n0}^{(0)} \\ y_{10}^{(1)} & y_{20}^{(1)} & \dots & y_{n0}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оскільки $W[y_1, \dots, y_n]|_{x=x_0} = W(x_0) = \Delta \neq 0$, то функції $y_1, \dots$ $\dots, y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (35).

2.56. Дослідити на лінійну залежність розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \neq 0, \quad a = \text{const},$$

на $I = (0, +\infty)$, коли відомо, що

а) $y_1(1) = 3$, $y_2(1) = 0$, б) $y_1(1) = -6$, $y_2(1) = \frac{1}{3}$,

$y_1'(1) = -1$, $y_2'(1) = 0$; $y_1'(1) = 2$, $y_2'(1) = -\frac{1}{9}$.

Знайти $W[y_1, y_2]$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи формулу Ліувілля — Остроградського, дістаємо

$$W[y_1, y_2] = W(1)\,e^{-\int\limits_1^x \frac{ds}{s}} = W(1)\frac{1}{|x|}.$$

Далі знаходимо:

а) $W(1) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ і $W[y_1, y_2] = -\frac{6}{|x|}$;

б) $W(1) = \begin{vmatrix} -6 & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{9} \end{vmatrix} = \frac{6}{9} - \frac{2}{3} = 0$ і $W[y_1, y_2] \equiv 0$.

Тому у випадку а) розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні, а у випадку б) — лінійно залежні на I.

2.57. Нехай функції $y_1(x), \dots, y_n(x)$ неперервно диференційовні n разів на проміжку $I = (a, b)$. Довести, що коли $W(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, $x \in I$, то існує лише одне лінійне однорідне рівняння n-го порядку з неперервними на I коефіцієнтами і з коефіцієнтом 1 при $y^{(n)}$, для якого задані функції $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — утворюють фундаментальну систему розв'язків. Побудувати це рівняння.

Розв'язання. Нехай $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_n(x)$ — коефіцієнти шуканого рівняння. Оскільки функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ задовольняють це рівняння, то

$$y_j^{(n)} + h_1(x)\, y_j^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y_j' + h_n(x)\, y_j = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Головний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \ldots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_2' & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \ldots & y_n' & y_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0,$$
$$x \in I.$$

Тому коефіцієнти $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_n(x)$ визначаються із системи однозначно. Безпосередньою підстановкою легко перевірити, що шукане рівняння має вигляд

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

2.58. Перевірити, що функції $y_1 = x^2$, $y_2 = x^5$ утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння другого порядку, і знайти розв'язок задачі Коші для цього рівняння з початковими умовами $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

Розв'язання. Знаходимо визначник Вронського:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 5x^6 - 2x^6 = 3x^6.$$

Отже, функції y_1, y_2 утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння другого порядку, коефіцієнти якого є неперервними функціями при $x \neq 0$. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $y = C_1x^2 + C_2x^5$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Визначимо сталі C_1 і C_2 так, щоб виконувались задані початкові умови. Маємо $C_1 + C_2 = 1$, $2C_1 + 5C_2 = -2$, звідки $C_1 = \frac{7}{3}$, $C_2 = -\frac{4}{3}$. Отже, $y = \frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^5$.

2.59. Довести, що функції $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = e^x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння третього порядку. Скласти це рівняння.

Розв'язання. Знаходимо:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = -2(xe^x - e^x) + e^x(2x^2 - x^2) =$$

$$= e^x[(x-1)^2 + 1] \neq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Отже, дані функції утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння третього порядку:

$$y''' + h_1(x)y'' + h_2(x)y' + h_3(x)y = 0. \tag{36}$$

Знайдемо $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$. Для цього в (36) послідовно підставимо $y = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = e^x$. Дістанемо систему

$$0 \cdot h_1(x) + 1 \cdot h_2(x) + xh_3(x) = 0,$$

$$2h_1(x) + 2xh_2(x) + x^2h_3(x) = 0,$$

$$e^xh_1(x) + e^xh_2(x) + e^xh_3(x) = -e^x.$$

Застосовуємо правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ e^x & e^x & e^x \end{vmatrix} = -W[y_1, y_2, y_3] = -e^x(x^2 - 2x + 2),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 2x & x^2 \\ -e^x & e^x & e^x \end{vmatrix} = x^2e^x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 2 & 0 & x^2 \\ e^x & -e^x & e^x \end{vmatrix} = -2xe^x,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2x & 0 \\ e^x & e^x & -e^x \end{vmatrix} = 2e^x,$$

$$h_1(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}, \quad h_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2x}{x^2 - 2x + 2},$$

$$h_3(x) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{2}{x^2 - 2x + 2}.$$

Шукане рівняння:

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

2.60. Довести, що коли $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — лінійно незалежні на $I = (a, b)$ розв'язки лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y = 0, \tag{37}$$

де $n \geqslant m$, $h_i(x)$ — неперервні на I функції, $i = 1, \ldots, n$, то функції $y_1, y_2, \ldots, y_m$ лінійно незалежні на будь-якому проміжку $I_1 = (\alpha, \beta) \subset I$. (Порівняти із задачею 2.39).

Розв'язання. З припущення, що функції $y_1, y_2, \ldots, y_m$ лінійно залежні на I_1 випливає, що

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_m y_m \equiv 0, \quad x \in I_1, \tag{38}$$

причому $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 > 0$.

Розглянемо функцію y, визначену на I рівністю $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m$. Ця функція є, очевидно, розв'язком рівняння (37). Нехай $x_0 \in I_1$. Як випливає з (38), $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тому за теоремою існування та єдиності маємо $y \equiv 0$, тобто $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m \equiv 0$, $x \in I$, що суперечить умові лінійної незалежності функцій $y_1, \ldots, y_m$ на I.

2.61. Довести, що коли функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неперервно диференційовні $n - 1$ раз на $I = (a, b)$ і $y_1 \neq 0$ на I, то для вронскіана $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ справедлива *формула зниження порядку*

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = y_1^n W\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right]. \tag{39}$$

Розв'язання. Маємо:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \cdots & y_n^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Щоб перетворити визначник, виведемо деякі співвідношення. Користуючись формулою Лейбніца, знаходимо

$$\left(\frac{y_i}{y_1}\right)^{(k)} = (y_i y_1^{-1})^{(k)} = y_i^{(k)} y_1^{-1} + C_k^1 y_i^{(k-1)} (y_1^{-1})' + \cdots + C_k^{k-1} y_i' (y_1^{-1})^{(k-1)} + $$
$$+ C_k^k y_i (y_1^{-1})^{(k)},$$

звідки
$$y_1 \left(\frac{y_i}{y_1}\right)^{(k)} = y_i^{(k)} + C_k^1 y_i^{(k-1)} (y_1^{-1})\, y + \cdots +$$
$$+ C_k^{k-1} y_i' (y_1^{-1})^{(k-1)}\, y_1 + C_k^k y_i (y_1^{-1})^{(k)}\, y_1,$$

$$i=1, \ldots, n; \quad k=1, 2, \ldots, n-1.$$

Помножимо перший рядок визначника на $C_k^k (y_1^{-1})^{(k)} y_1$, другий — на $C_k^{k-1} (y_1^{-1})^{(k-1)} y_1$, ..., k-й рядок — на $C_k^1 (y_1^{-1})' y_1$ і додамо до $(k+1)$-го рядка. Таку процедуру послідовно повторюємо при $k = n-1, n-2, \ldots, 1$. Внаслідок цих перетворень, які, очевидно, не змінюють значення визначника W, дістанемо

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ 0 & y_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' & \ldots & y_1\left(\frac{y_n}{y_1}\right)' \\ 0 & y_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'' & \ldots & y_1\left(\frac{y_n}{y_1}\right)'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & y_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{(n-1)} & \ldots & y_1\left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= y_1^n \begin{vmatrix} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' & \ldots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)' \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'' & \ldots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{(n-1)} & \ldots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{(n-1)} \end{vmatrix} = y_1^n W\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right].$$

2.62. Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — лінійно незалежні на $I = (a, b)$ розв'язки лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + h_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x) y' + h_n(x) y = 0,$$

де $n \geqslant m$, $h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — неперервні на I функції. Довести, що $W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \not\equiv 0$ на I.

Розв'язання. При $m = 1$ твердження є очевидним. При $m = n$ воно випливає з формули Ліувілля — Остроградського.

Нехай $1 < m < n$. Припустимо супротивне, що

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \equiv 0 \text{ на } I.$$

Розглянемо проміжок $I_0 = (\alpha, \beta)$ такий, що $y_1 \neq 0$ при $\forall x \in I_0$. Як доведено в задачі 2.60, розв'язки $y_1, y_2, \ldots, y_m$ лінійно незалежні на I_0.

Використовуючи формулу (39), можна записати

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = y_1^m W\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_m}{y_1}\right)'\right]. \quad (40)$$

Позначимо:

$$u_{0j}=y_j,\quad u_{1j}=\left(\frac{u_{0j+1}}{u_{01}}\right)'=\left(\frac{y_{j+1}}{y_1}\right)'\quad j=1,\ \ldots,\ m, \tag{41}$$

і розглянемо функції, які визначаються рекурентною формулою

$$u_{ij}=\left(\frac{u_{i-1\,j+1}}{u_{i-1\,1}}\right)',$$

де при фіксованому i, $1\leqslant i\leqslant m-1$, індекс j змінюється від 1 до $m-i$, а функції u_{0j} визначаються за формулами (41).

Покажемо, що існує послідовність проміжків

$$I_{m-1}\subset I_{m-2}\subset\cdots\subset I_i\subset\cdots\subset I_0\subset I \tag{42}$$

таких, що $u_{i1}\neq 0$ при $\forall\, x\in I_i$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$.

Очевидно, що коли існування проміжку I_{i-1} встановлено, то функції u_{ij}, $j=1,\ \ldots,\ m-i$, неперервно диференційовні $n-1$ раз на I_{i-1}. Маємо

$$u_{01}=y_1\neq 0,\quad \forall\, x\in I_0;$$

$$u_{11}=\left(\frac{u_{02}}{u_{01}}\right)'=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\neq 0\ \text{ на }\ I_0,$$

бо коли $u_{11}\equiv 0$, то $y_2-C_1y_1\equiv 0$ на I_0, де $C_1=\text{const}$, що суперечить лінійній незалежності функцій y_1, y_2 на I_0. Тому, внаслідок неперервності функції u_{11} на I_0, існує проміжок $I_1=(\alpha_1,\ \beta_1)\subset I_0$ такий, що $u_{11}\neq 0$, $\forall\, x\in I_1$.

Припустимо, що існування проміжку I_{i-1} встановлено. Доведемо існування проміжку I_i, $i=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1$. Маємо

$$u_{i1}=\left(\frac{u_{i-1\,2}}{u_{i-1\,1}}\right)'\neq 0\ \text{ на }\ I_{i-1},$$

бо коли $u_{i1}\equiv 0$ на I_{i-1}, то $u_{i-1\,2}-C_1u_{i-1\,1}\equiv 0$, тобто

$$\left(\frac{u_{i-2\,3}}{u_{i-2\,1}}\right)'-C_1\left(\frac{u_{i-2\,2}}{u_{i-2\,1}}\right)'\equiv 0\ \text{ на }\ I_{i-1},$$

звідки

$$u_{i-2\,3}-C_1u_{i-2\,2}-C_2u_{i-2\,1}\equiv 0\ \text{ на }\ I_{i-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{0\,i+1}-C_1u_{0i}-C_2u_{0\,i-1}-\cdots-C_iu_{01}\equiv 0\ \text{ на }\ I_{i-1},$$

тобто

$$y_{i+1}-C_1y_i-C_2y_{i-1}-\cdots-C_iy_1\equiv 0\ \text{ на }\ I_{i-1},$$

що суперечить лінійній незалежності функцій y_1, y_2, ..., y_{i+1} на I_{i-1}. Тому, внаслідок неперервності функції u_{i1} на I_{i-1}, існує проміжок $I_i \subset I_{i-1}$ такий, що $u_{i1} \neq 0$, $\forall x \in I_i$. Тим самим існування послідовності (42) доведено.

Розглянемо вронскіан $W[y_1, ..., y_m]$ на проміжку I_{m-i}. Застосовуючи формулу зниження порядку (40) $m-1$ раз, дістанемо

$$W[y_1, y_2, \dots, y_m] = y_1^m W[u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1\,m-1}] =$$
$$= u_{01}^m u_{11}^{m-1} W[u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2\,m-2}] = \dots =$$
$$= u_{01}^m u_{11}^{m-1} \dots u_{m-3\,1}^3 W[u_{m-2\,1}, u_{m-2\,2}] =$$
$$= u_{01}^m u_{11}^{m-1} u_{21}^{m-2} \dots u_{m-3\,1}^3 u_{m-2\,1}^2 u_{m-1\,1}, \quad x \in I_{m-1}.$$

Оскільки $u_{01} = y_1 \neq 0$, $u_{i1} \neq 0$, $i = 1, 2, ..., m-1$, при $\forall x \in \in I_{m-1}$, то

$$W[y_1, y_2, \dots, y_m] \neq 0, \quad \forall x \in I_{m-1},$$

що суперечить припущенню. Отже,

$W[y_1, y_2, ..., y_m] \not\equiv 0$ на I.

2.63. Нехай y_1 — нетривіальний частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y'' + h_1(x)y' + h_2(x)y = 0,$$

де $h_1(x)$, $h_2(x)$ — неперервні на $I = (a, b)$ функції, причому $y_1 \neq \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Довести, що загальний розв'язок рівняння можна знайти за *формулою Абеля:*

$$y = C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int h_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2 y_1, \quad x \in I, \tag{43}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Розв'язання. Знизимо порядок рівняння за допомогою заміни

$$y = y_1 \int u dx, \tag{44}$$

де $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$, $x \in I$.

Відносно функції u дістанемо рівняння (див. задачу 2.27)

$$u' + \frac{2y_1' + h_1 y_1}{y_1} u = 0.$$

Відокремлюючи змінні, маємо

$$u = C_1 e^{-\int h_1(x)dx} \frac{1}{y_1^2(x)}. \tag{45}$$

Підставивши (45) в (44), знайдемо

$$y = C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int h_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2 y_1,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Оскільки розв'язки y_1, $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int h_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$ лінійно незалежні $\left(\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const},\ x \in I\right)$, то формула (43) справді дає загальний розв'язок.

2.64. Рівняння $(2x - x^2) y'' + (x^2 - 2) y' + 2(1 - x) y = 0$ має розв'язок $y_1 = e^x$. Знайти розв'язок задачі Коші для цього рівняння з початковими умовами

$$y(3) = 1, \quad y'(3) = 0. \tag{46}$$

Розв'язання. Лінійно незалежний з y_1 розв'язок y_2 рівняння знаходимо за формулою Абеля при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int h_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

Розглянемо проміжок $I = (2, +\infty)$. Маємо

$$-\int h_1(x)\,dx = \int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x} dx = \int \left(1 + 2\,\frac{x - 1}{x^2 - 2x}\right) dx =$$

$$= x + \int \frac{d(x-1)^2}{(x-1)^2 - 1} = x + \ln(x^2 - 2x), \quad x \in I,$$

$$y_2 = e^x \int e^{x + \ln(x^2 - 2x)} e^{-2x} dx = e^x \int (x^2 - 2x) e^{-x} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 - 2x = u, & du = (2x - 2)\,dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = e^x(-(x^2 - 2x)e^{-x} +$$

$$+ 2\int (x - 1)e^{-x}dx) = \begin{bmatrix} x - 1 = u, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = e^x(-e^{-x}(x^2 - 2x) -$$

$$- 2(x - 1)e^{-x} - 2e^{-x}) = -x^2 + 2x - 2x + 2 - 2 = -x^2.$$

Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 x^2$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Врахувавши початкові умови, дістанемо $y = -2e^{x-3} + \frac{1}{3} x^2$

2.65. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

коли відомі два частинні розв'язки:

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3.$$

Розв'язання. Оскільки $W[x^2, x^3] = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^4 \neq 0$ при $x \neq 0$, то розв'язки y_1 і y_2 лінійно незалежні на R.

Знизимо порядок рівняння за допомогою заміни (див. задачу 2.27)

$$y = x^2 \int u dx,$$

де u — нова шукана функція, $u = \left(\frac{y}{x^2}\right)'$, $x \neq 0$. Маємо:

$$y' = 2x \int u dx + x^2 u, \quad y'' = 2 \int u dx + 4xu + x^2 u',$$

$$y''' = 6u + 6xu' + x^2 u''.$$

Підставивши ці вирази в рівняння, дістанемо лінійне однорідне рівняння

$$u'' + \frac{3}{x} u' = 0.$$

Оскільки це рівняння має розв'язок $u_1 = \left(\frac{x^3}{x^2}\right)' = 1$, то за формулою Абеля

$$u = \int e^{-\int \frac{3}{x} dx} dx + C_2 = \frac{C_1}{2} x^{-2} + C_2.$$

Тому загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

2.66. (Узагальнення формули Абеля). Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння порядку $n \geqslant 2$

$$L(y) = y^{(n)} + h_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x) y' + h_n(x) y = 0 \quad (47)$$

з неперервними на $I = (a, b)$ коефіцієнтами $h_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, такі, що $W(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}] \neq 0$, $\forall x \in I$. Довести, що загальний розв'язок рівняння (47) можна знайти за формулою

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} C_i y_i + C_n \int_{x_0}^{x} \frac{K_{n-1}(x, \tau)}{W^2(\tau)} e^{-\int_{x_0}^{\tau} h_1(s) ds} d\tau, \quad x_0, x \in I, \quad (48)$$

де
$$K_1(x,\tau)\equiv y_1(x),$$
$$\underset{(n\geq 3)}{K_{n-1}(x,\tau)}=\begin{vmatrix} y_1(\tau) & y_2(\tau) & \dots & y_{n-1}(\tau)\\ y_1'(\tau) & y_2'(\tau) & \dots & y_{n-1}'(\tau)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-3)}(\tau) & y_2^{(n-3)}(\tau) & \dots & y_{n-1}^{(n-3)}(\tau)\\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x)\end{vmatrix},$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні сталі.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо функцію

$$y_n=\int_{x_0}^{x}\frac{K_{n-1}(x,\tau)}{W^2(\tau)}e^{-\int_{x_0}^{\tau}h_1(s)ds}d\tau,\quad x,\ x_0\in I. \tag{49}$$

Покажемо, що функція y_n є розв'язком рівняння (47) при $\forall x\in I$. Розклавши визначник $K_{n-1}(x,\tau)$ за елементами останнього рядка, дістанемо, що функція $K_{n-1}(x,\tau)$ при кожному $\tau\in I$ є розв'язком рівняння (47):

$$L(K_{n-1}(x,\tau))=0. \tag{50}$$

Використавши правило диференціювання інтеграла по параметру, знайдемо

$$y_n'=\int_{x_0}^{x}\frac{K_{n-1}'(x,\tau)}{W^2(\tau)}e^{-\int_{x_0}^{\tau}h_1(s)ds}d\tau,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\frac{K_{n-1}^{(n-2)}(x,\tau)}{W^2(\tau)}e^{-\int_{x_0}^{\tau}h_1(s)ds}d\tau,$$

$$y_n^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}\frac{K_{n-1}^{(n-1)}(x,\tau)}{W^2(\tau)}e^{-\int_{x_0}^{\tau}h_1(s)ds}d\tau+\frac{1}{W(x)}e^{-\int_{x_0}^{x}h_1(s)ds},$$

$$y_n^{(n)}=\int_{x_0}^{x}\frac{K_{n-1}^{(n)}(x,\tau)}{W^2(\tau)}e^{-\int_{x_0}^{\tau}h_1(s)ds}d\tau-\frac{h_1(x)}{W(x)}e^{-\int_{x_0}^{x}h_1(s)ds}. \tag{51}$$

Підставивши (51) і (49) в рівняння (47), з урахуванням (50) дістанемо

$$L(y_n) = \int_{x_0}^{x} \frac{L(K_{n-1}(x,\tau))}{W^2(\tau)} e^{-\int_{x_0}^{\tau} h_1(s)ds} d\tau - \frac{h_1(x)}{W(x)} e^{-\int_{x_0}^{x} h_1(s)ds} +$$

$$+ \frac{h_1(x)}{W(x)} e^{-\int_{x_0}^{x} h_1(s)ds} = 0, \quad \forall\, x \in I.$$

Обчислимо $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]|_{x=x_0}$. З (49) і (51) випливає, що $y_n(x_0) = y_n'(x_0) = \cdots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0$, $y_n^{(n-1)}(x_0) = [W(x_0)]^{-1}$.

Тому

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_{n-1}(x_0) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}(x_0) & y_2^{(n-2)}(x_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x_0) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) & [W(x_0)]^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= 1$$

і, отже, функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (47).

2.67. Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + h_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x) y' + h_n(x) y = 0 \tag{52}$$

з неперервними на $I = (a, b)$ коефіцієнтами $h_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Довести, що система функцій

$$z_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{53}$$

де $a_{kl} = \text{const}$, утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння (52) тоді й тільки тоді, коли $\Delta = \det((a_{kl})) \neq 0$.

Р о з в' я з а н н я. З (53) випливає, що функції $z_1, \ldots, z_n$ є розв'язками рівняння (52) при будь-яких a_{kl}. Тому достатньо показати, що вронскіан системи (53) $W[z_1, z_2, \ldots, z_n] \neq 0$, $\forall\, x \in I$, тоді й тільки тоді, коли $\Delta \neq 0$.

Маємо

$$W[z_1, z_2, \ldots, z_n] = \begin{vmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{1l}y_l & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}y_l & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{nl}y_l \\ \sum_{l=1}^{n} a_{1l}y_l' & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}y_l' & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{nl}y_l' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{l=1}^{n} a_{1l}y_l^{(n-1)} & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}y_l^{(n-1)} & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{nl}y_l^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \right| = \Delta \cdot W[y_1, y_2, \ldots, y_n].$$

Оскільки $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in I$, то $W[z_1, z_2, \ldots, z_n] \neq 0$, $\forall x \in I$ тоді й тільки тоді, коли $\Delta \neq 0$.

2.68. Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y = 0 \tag{54}$$

з неперервними на $I = (a, b)$ коефіцієнтами $h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Довести, що нормальна фундаментальна система розв'язків z_1, $z_2, \ldots, z_n$ рівняння (54) може бути знайдена за формулою

$$z_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{W_{kl}(x_0)}{W(x_0)} y_l, \tag{55}$$

де $W(x_0) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]|_{x=x_0}$, $W_{kl}(x_0)$ — алгебраїчне доповнення елемента k-го рядка і l-го стовпця вронскіана $W(x_0)$, $x_0 \in I$.

Р о з в' я з а н н я. Функції z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, шукаємо у вигляді

$$z_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_l, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{56}$$

Числа a_{kl}, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, підберемо так, щоб виконувались умови

$$z_k(x_0) = 0, \quad z_k'(x_0) = 0, \ \ldots, \ z_k^{(k-2)}(x_0) = 0, \quad z_k^{(k-1)}(x_0) = 1,$$
$$z_k^{(k)}(x_0) = 0, \ \ldots, \ z_k^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{57}$$

Підставивши (56) в (57), дістанемо систему для визначення a_{kl}:

$$a_{k1}y_1(x_0) + a_{k2}y_2(x_0) + \cdots + a_{kn}y_n(x_0) = 0,$$

$$a_{k1}y_1'(x_0)+a_{k2}y_2'(x_0)+\dots+a_{kn}y_n'(x_0)=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{k1}y_1^{(k-2)}(x_0)+a_{k2}y_2^{(k-2)}(x_0)+\dots+a_{kn}y_n^{(k-2)}(x_0)=0,$$

$$a_{k1}y_1^{(k-1)}(x_0)+a_{k2}y_2^{(k-1)}(x_0)+\dots+a_{kn}y_n^{(k-1)}(x_0)=1,$$

$$a_{k1}y_1^{(k)}(x_0)+a_{k2}y_2^{(k)}(x_0)+\dots+a_{kn}y_n^{(k)}(x_0)=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{k1}y_1^{(n-1)}(x_0)+a_{k2}y_2^{(n-1)}(x_0)+\dots+a_{kn}y_n^{(n-1)}(x_0)=0.$$

$$k=1,\ 2,\ \dots,\ n$$

Оскільки головний визначник цієї системи $W(x_0)\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за правилом Крамера:

$$a_{kl}=\frac{W_{kl}(x_0)}{W(x_0)},\quad k,\ l=1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{58}$$

де $W_{kl}(x_0)$ — алгебраїчне доповнення елемента k-го рядка і l-го стовпця визначника $W(x_0)$. Покажемо, що $\Delta=\det((a_{kl}))\neq 0$. Маємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{W_{11}(x_0)}{W(x_0)} & \frac{W_{12}(x_0)}{W(x_0)} & \dots & \frac{W_{1n}(x_0)}{W(x_0)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{W_{n1}(x_0)}{W(x_0)} & \frac{W_{n2}(x_0)}{W(x_0)} & \dots & \frac{W_{nn}(x_0)}{W(x_0)}\end{vmatrix}=W^{-1}(x_0)\neq 0.$$

2.69. Довести, що функції $\cos\omega x$, $\sin\omega x$, $x\cos\omega x$, $x\sin\omega x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$L(y)\equiv y^{\mathrm{IV}}+2\omega^2y''+\omega^4y=0,\quad \omega=\mathrm{const}>0.$$

Р о з в' я з а н н я. Покажемо, що функції $\varphi(x)=e^{i\omega x}$, $\psi(x)=xe^{i\omega x}$, $i^2=-1$, задовольняють дане рівняння. Знаходимо:

$$\varphi'(x)=i\omega e^{i\omega x},\quad \varphi''(x)=-\omega^2e^{i\omega x},\quad \varphi'''(x)=-i\omega^3e^{i\omega x},$$

$$\varphi^{\mathrm{IV}}(x)=\omega^4e^{i\omega x};$$

$$\psi'(x)=(1+i\omega x)e^{i\omega x},\qquad \psi''(x)=(2i\omega-\omega^2x)e^{i\omega x},$$

$$\psi'''(x)=-(3\omega^2+i\omega^3x)e^{i\omega x},\quad \psi^{\mathrm{IV}}(x)=-(4i\omega^3-\omega^4x)e^{i\omega x}.$$

Тому

$$L(\varphi)=(\omega^4-2\omega^4+\omega^4)e^{i\omega x}\equiv 0,$$

$$L(\psi)=(-4i\omega^3+x\omega^4+4i\omega^3-2x\omega^4+\omega^4x)e^{i\omega x}\equiv 0,$$

1, отже, функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ є розв'язками рівняння. Оскільки коефіцієнти рівняння — дійсні числа, то функції

$$y_1 = \operatorname{Re}\varphi = \cos\omega x, \quad y_3 = \operatorname{Im}\varphi = \sin\omega x,$$
$$y_2 = \operatorname{Re}\psi = x\cos\omega x, \quad y_4 = \operatorname{Im}\psi = x\sin\omega x$$

також є розв'язками рівняння. Лінійна незалежність функцій y_1, y_2, y_3, y_4 випливає з результату задачі 2.48.

2.4. Лінійні неоднорідні рівняння

Лінійним неоднорідним рівнянням n-го порядку називається рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + h_{n-1}(x)\, y' + h_n(x)\, y = f(x), \tag{1}$$

де функції $f(x) \not\equiv 0$, $h_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, неперервні на $I = (a; b)$. Загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = \bar{y} + \tilde{y}. \tag{2}$$

Тут $\bar{y}$ — загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $L(y) = 0$, яке відповідає рівнянню (1), а $\tilde{y}$ — який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1).

Якщо відома фундаментальна система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ розв'язків лінійного однорідного рівняння $L(y) = 0$, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) завжди можна знайти *методом варіації довільних сталих* (методом Лагранжа). Суть цього методу полягає в тому, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i, \tag{3}$$

де функції $c_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, визначаються із системи

$$\begin{aligned} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x)\, y_2 + \cdots + c_n'(x)\, y_n &= 0, \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' + \cdots + c_n'(x)\, y_n' &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + c_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)\, y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Відносно $c_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, система (4) є лінійною неоднорідною алгебраїчною системою, причому головний визначник цієї системи

$$\Delta = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0, \quad \forall\, x \in I. \tag{5}$$

Тому система має єдиний розв'язок:

$$c_i'(x) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

звідки

$$c_i(x) = \int \psi_i(x)\, dx + \alpha_i, \tag{7}$$

де α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — довільні сталі. Врахувавши рівності (3) і (7), загальний розв'язок рівняння (1) дістанемо у вигляді

$$y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\cdots+\alpha_n y_n+\sum_{i=1}^{n}\int \psi_i(x)\,dx\cdot y_i. \tag{8}$$

Для знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (1) можна застосувати *метод Коші*. Згідно з методом Коші окремий розв'язок рівняння (1) з нульовими початковими умовами

$$y(x_0)=y'(x_0)=\cdots=y^{(n-1)}(x_0)=0,\quad x_0\in I, \tag{9}$$

має вигляд

$$y=\int_{x_0}^{x} K(x,s)\,f(s)\,ds,\quad x_0,\ x\in I, \tag{10}$$

де $K(x, s)$ — *функція Коші*, яка при кожному значенні параметра $s\in I$ є розв'язком однорідного рівняння $L(y)=0$ і задовольняє умовам

$$K(s,s)=K'(s,s)=\cdots=\overset{(n-2)}{K}(s,s)=0,\quad \overset{(n-1)}{K}(s,s)=1. \tag{11}$$

Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальна система розв'язків рівняння $L(y)=0$, то функцію Коші $K(x, s)$ можна шукати у вигляді

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n} c_i(s)\,y_i(x), \tag{12}$$

де коефіцієнти c_i, (s), $i=1, 2, \ldots, n$, підбираються так, щоб виконувалися умови (11).

Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — нормальна (при $x=x_0$) фундаментальна система розв'язків рівняння $L(y)=0$, то розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1) з початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

має вигляд

$$y=y_0 y_1(x)+y_0' y_2(x)+\cdots+y_0^{(n-1)} y_n(x)+\tilde{y}(x), \tag{13}$$

де $\tilde{y}(x)$ — частинний розв'язок рівняння (1), побудований за методом Коші.

Принцип суперпозиції розв'язків полягає в тому, що коли y_i є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$L(y)=f_i(x),\quad i=1,\ \ldots,\ m, \tag{14}$$

то функція $y=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$L(y)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x), \tag{15}$$

де $\alpha_i=\text{const}$. Якщо $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x)$, а y_i є розв'язком неоднорідного рівняння

$$L(y)=f_i(x),\quad i=1, 2, \ldots, \tag{16}$$

причому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ збігається й допускає n-кратне почленне диференціювання, то функція $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$L(y) = f(x). \tag{17}$$

Якщо лінійне неоднорідне рівняння

$$L(y) = \varphi(x) + i\psi(x), \tag{18}$$

коефіцієнти якого $h_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, і функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ — дійсні, має комплексний розв'язок $y = u(x) + iv(x)$, то функції $u = \mathrm{Re}\, y$, $v = \mathrm{Im}\, y$ є відповідно розв'язками рівнянь $L(y) = \varphi(x)$, $L(y) = \psi(x)$.

2.70. Застосовуючи метод Лагранжа, знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = \sqrt{x}, \tag{19}$$

Розв'язання. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння.

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0. \tag{20}$$

Розв'язки рівняння (20) шукатимемо у вигляді многочлена $y = ax^n + \ldots$. Підставивши цей вираз у (20) і виписавши лише члени, які містять старший степінь x, дістанемо

$$an(n-1)(n-2)x^{n-3} - \frac{3}{x} an(n-1)x^{n-2} +$$

$$+ \frac{6}{x^2} anx^{n-1} - \frac{6}{x^3} ax^n + \cdots = 0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнт при x^{n-3}, матимемо

$$n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) + 6n - 6 = 0,$$

$$(n-1)(n^2 - 5n + 6) = 0,$$

звідки $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$.

Отже, якщо рівняння (20) має розв'язок у вигляді многочлена, то степінь цього многочлена може дорівнювати лише 1, 2 або 3. Безпосередньою перевіркою впевнюємося, що функції $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (20).

Згідно з методом Лагранжа, загальний розв'язок рівняння (20) шукаємо у вигляді $y = c_1(x)x + c_2(x)x^2 + c_3(x)x^3$, де функції $c_1(x)$, $c_2(x)$, $c_3(x)$ визначаються із системи

$$c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 + c_3'(x)x^3 = 0,$$

$$c_1'(x)\cdot 1 + c_2'(x)\cdot 2x + c_3'(x)\cdot 3x^2 = 0,$$
$$c_2'(x)\cdot 2 + c_3'(x)\cdot 6x = \sqrt{x}. \tag{21}$$

Розв'язавши систему (21), дістанемо $c_1'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$, $c_2'(x) = -\sqrt{x}$, $c_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, звідки

$$c_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \alpha_1, \quad c_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \alpha_2, \quad c_3(x) = \sqrt{x} + \alpha_3,$$

де α_1, α_2, α_3 — довільні сталі.

Отже, загальний розв'язок рівняння (19) має вигляд

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \frac{8}{15}\sqrt{x^7}.$$

2.71. Знайти розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y''' + y'' = f(x), \tag{22}$$

де $f(x)$ — неперервна на $I = (a, b)$ функція, який задовольняє нульові початкові умови

$$y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = 0, \quad x_0 \in I, \tag{23}$$

застосовуючи: а) метод Лагранжа; б) метод Коші.

Розв'язання. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння

$$y''' + y'' = 0. \tag{24}$$

Знизивши порядок рівняння за допомогою заміни $y'' = u$, де u — нова невідома функція, дістанемо рівняння $u' + u = 0$, загальний розв'язок якого $u = C_1 e^{-x}$, C_1 — довільна стала. Тоді $y' = C_1 e^{-x}$. Звідси

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x + C_1,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. Отже, функції $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x$, $y_3 = 1$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (24).

а) Згідно з методом Лагранжа, загальний розв'язок рівняння (22) шукаємо у вигляді

$$y = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)x + c_3(x), \tag{25}$$

де функції $c_1(x)$, $c_2(x)$, $c_3(x)$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)x + c_3(x) = 0, \\ -c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x) = 0, \\ c_1'(x)e^{-x} = f(x). \end{cases} \tag{26}$$

З (26) знаходимо:

$$c_1'(x) = e^x f(x), \quad c_2'(x) = f(x), \quad c_3'(x) = -(x+1) f(x),$$

звідки

$$c_1(x) = \int_{x_0}^{x} e^s f(s)\,ds + \alpha_1, \quad c_2(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + \alpha_2,$$

$$c_3(x) = -\int_{x_0}^{x} (s+1) f(s)\,ds + \alpha_3, \tag{27}$$

де α_1, α_2, α_3 — довільні сталі, x, $x_0 \in I$. Підставивши (27) у (25), дістанемо загальний розв'язок рівняння (22):

$$y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 x + \alpha_3 + \int_{x_0}^{x} (e^{s-x} + x - s - 1) f(s)\,ds. \tag{28}$$

Із загального розв'язку (28) виділимо шуканий частинний розв'язок. Послідовно знаходимо

$$y' = -\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 + \int_{x_0}^{x} (-e^{s-x} + 1) f(s)\,ds + (e^{x-x} + x - x - 1) f(x) =$$

$$= -\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 + \int_{x_0}^{x} (-e^{s-x} + 1) f(s)\,ds,$$

$$y'' = \alpha_1 e^{-x} + \int_{x_0}^{x} e^{s-x} f(s)\,ds + (1 - e^{x-x}) f(x) = \alpha_1 e^{-x} + \int_{x_0}^{x} e^{s-x} f(s)\,ds.$$

Початкові умови (23) дають систему для визначення α_1, α_2, α_3:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^{-x_0} + \alpha_2 x_0 + \alpha_3 = 0; \\ -\alpha_1 e^{-x_0} + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_1 e^{-x_0} = 0. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, шуканий частинний розв'язок

$$y = \int_{x_0}^{x} (e^{s-x} + x - s - 1) f(s)\,ds.$$

б) Згідно з методом Коші, шуканий розв'язок

$$y = \int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s)\,ds,$$

де $K(x, S)$ — функція Коші, яка має вигляд

$$K(x, s) = c_1(s) e^{-x} + c_2(s) x + c_3(s).$$

Коефіцієнти $c_1(s)$, $c_2(s)$, $c_3(s)$ шукаємо з умов

$$\begin{aligned} K(s, s) &= c_1(s)e^{-s} + c_2(s)s + c_3(s) = 0, \\ K'(s, s) &= -c_1(s)e^{-s} + c_2(s) = 0, \\ K''(s, s) &= c_1(s)e^{-s} = 1. \end{aligned} \tag{29}$$

З (29) маємо:

$$c_1(s) = e^s, \quad c_2(s) = 1, \quad c_3(s) = -(1 + s).$$

Тому

$$K(x, s) = e^{s-x} + x - s - 1$$

і

$$y = \int_{x_0}^{x} (e^{s-x} + x - s - 1) f(s)\, ds, \quad x, \ x_0 \in I.$$

2.72. Знайти розв'язок рівняння

$$y''' + y'' = f(x), \tag{30}$$

де $f(x)$ — неперервна на $I = (a, \ b)$ функція, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \quad x_0 \in I. \tag{31}$$

Розв'язання. Як випливає з розв'язання задачі 2.71, загальним розв'язком рівняння (30) є функція $y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 x + \alpha_3 + \tilde{y}$, де $\tilde{y} = \int_{x_0}^{x} (e^{s-x} + x - s - 1)\ f(s)\, ds$ — частинний розв'язок рівняння (30) з нульовими початковими умовами.
Маємо:

$$y' = -\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 + \tilde{y}'', \quad y'' = \alpha_1 e^{-x} + \tilde{y}''.$$

Оскільки $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}'(x_0) = \tilde{y}''(x_0) = 0$, то для визначення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ дістаємо систему

$$\begin{cases} \alpha_1 e^{-x_0} + \alpha_2 x_0 + \alpha_3 = y_0, \\ -\alpha_1 e^{-x_0} + \alpha_2 = y_0', \\ \alpha_1 e^{-x_0} = y_0''. \end{cases} \tag{32}$$

З (32) дістаємо:

$$\alpha_1 = y_0'' e^{x_0}, \quad \alpha_2 = y_0' + y_0'', \quad \alpha_3 = y_0 - x_0 y_0' - (1 + x_0)\, y_0''.$$

Тому шуканий розв'язок має вигляд

$$y = y_0'' e^{x_0 - x} + (y_0' + y_0'')\, x + y_0 - x_0 y_0' - (1 + x_0)\, y_0'' +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} (e^{s-x} + x - s - 1) f(s)\, ds, \quad x, \ x_0 \in I.$$

2.73. Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння $L(y) = 0$. Довести, що розв'язок рівняння $L(y) = f(x)$, де $f(x)$ — неперервна на $I = (a, b)$ функція, з початковими умовами

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

можна знайти за формулою

$$y = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} y_i(x) \right) f(s)\, ds, \tag{33}$$

де $W(s) = W[y_1(s), y_2(s), \ldots, y_n(s)]$ — вронскіан системи розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а $W_{ni}(s)$ — алгебраїчне доповнення i-го елемента n-го рядка вронскіана $W(s)$.

Розв'язання. Згідно з методом Коші, шуканий розв'язок

$$y = \int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s)\, ds, \tag{34}$$

де $K(x, s)$ — функція Коші. Шукатимемо її у вигляді

$$K(x, s) = c_1(s) y_1(x) + c_2(s) y_2(x) + \cdots + c_n(s) y_n(x).$$

Коефіцієнти $c_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, знаходимо з умов

$$K(s, s) = K'(s, s) = \cdots = K^{(n-2)}(s, s) = 0, \quad K^{(n-1)}(s, s) = 1.$$

Маємо:

$$c_1(s) y_1(s) + c_2(s) y_2(s) + \cdots + c_n(s) y_n(s) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1(s) y_1^{(n-2)}(s) + c_2(s) y_2^{(n-2)}(s) + \cdots + c_n(s) y_n^{(n-2)}(s) = 0,$$
$$c_1(s) y_1^{(n-1)}(s) + c_2(s) y_2^{(n-1)}(s) + \cdots + c_n(s) y_n^{(n-1)}(s) = 1.$$

Оскільки головний визначник цієї системи $\Delta = W(s) \equiv W[y_1(s), y_2(s), \ldots, y_n(s)] \not\equiv 0$, то за правилом Крамера для $c_i(s)$ дістаємо

$$c_i(s) = \frac{W_{ni}(s)}{W(s)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де $W_{ni}(s)$ — алгебраїчне доповнення i-го елемента n-го рядка вронскіана $W(s)$.

2.74. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + \omega^2 y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad x_0 \in I), \tag{35}$$

де $\omega = \mathrm{const} > 0$, $f(x)$ — неперервна на $I = (a, b)$ функція.

Р о з в' я з а н н я. Можна показати, що функції $y_1 = \cos \omega x$, $y_2 = \sin \omega x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$.

Загальний розв'язок рівняння (35) має вигляд

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \tilde{y},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі, $\tilde{y}$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (35). Розв'язок $\tilde{y}$ побудуємо, використовуючи формулу (33) задачі 2.73:

$$\tilde{y} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{W(s)} \left(W_{21}(s) y_1(x) + W_{22}(s) y_2(x)\right) f(s)\, ds,$$

де

$$W(s) = \begin{vmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s \\ -\omega \sin \omega s & \omega \cos \omega s \end{vmatrix} = \omega (\cos^2 s + \sin^2 s) = \omega.$$

$$W_{21}(s) = -\sin \omega s, \quad W_{22}(s) = \cos \omega s.$$

Тому

$$\tilde{y} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\omega} (-\sin \omega s \cos \omega x + \cos \omega s \sin \omega x) f(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} \sin \omega (x - s) f(s)\, ds.$$

Оскільки $\tilde{y}$ задовольняє (при $x = x_0$) нульові початкові умови, то для визначення сталих C_1, C_2 дістаємо систему

$$\begin{cases} C_1 \cos \omega x_0 + C_2 \sin \omega x_0 = y_0, \\ -\omega C_1 \sin \omega x_0 + \omega C_2 \cos \omega x_0 = y_0', \end{cases}$$

звідки

$$C_1 = y_0 \cos \omega x_0 - \frac{1}{\omega} y_0' \sin \omega x, \quad C_2 = y_0 \sin \omega x_0 + \frac{1}{\omega} y_0' \cos \omega x_0.$$

Тому

$$y = y_0 \cos \omega (x - x_0) + \frac{1}{\omega} y_0' \sin \omega (x - x_0) +$$

$$+ \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} \sin \omega (x - s) f(s)\, ds, \quad x, x_0 \in I.$$

2.75. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - \omega^2 y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad x_0 \in I, \tag{36}$$

де $\omega = \text{const} > 0$, $f(x)$ — неперервна на $I = (a, b)$ функція.

Розв'язання. Шуканий розв'язок знайдемо за формулою

$$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \tilde{y}(x), \tag{37}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ — нормальна (при $x = x_0$) фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння $y'' - \omega^2 y = 0$, а $\tilde{y}(x)$ — розв'язок рівняння (36), побудований за методом Коші. Можна показати, що функції $e^{\omega x}$, $e^{-\omega x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння. Нормальну фундаментальну систему шукаємо у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x}, \quad y_2 = \beta_1 e^{\omega x} + \beta_2 e^{-\omega x}, \tag{38}$$

де сталі α_1, α_2, β_1, β_2 визначаються з умов

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0,$$

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1. \tag{39}$$

Підставивши (38) у (39), дістанемо

$$\alpha_1 e^{\omega x_0} + \alpha_2 e^{-\omega x_0} = 1, \quad \beta_1 e^{\omega x_0} + \beta_2 e^{-\omega x_0} = 0,$$

$$\alpha_1 \omega e^{\omega x_0} - \alpha_2 \omega e^{-\omega x_0} = 0, \quad \beta_1 \omega e^{\omega x_0} - \beta_2 \omega e^{-\omega x_0} = 1,$$

звідки

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} e^{-\omega x_0}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} e^{\omega x_0}; \quad \beta_1 = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega x_0}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\omega} e^{\omega x_0}.$$

Тому

$$y_1 = \frac{1}{2} e^{\omega(x - x_0)} + \frac{1}{2} e^{-\omega(x - x_0)} = \operatorname{ch} \omega (x - x_0),$$

$$y_2 = \frac{1}{2\omega} e^{\omega(x - x_0)} - \frac{1}{2\omega} e^{-\omega(x - x_0)} = \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega (x - x_0).$$

Функцію $\tilde{y}$ знайдемо, використовуючи формулу (33) задачі 2.73:

$$\tilde{y} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{W(s)} \left(W_{21}(s) y_1(x) + W_{22}(s) y_2(x)\right) f(s)\, ds, \quad x, \ x_0 \in I.$$

Маємо:

$$W(s) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\omega(s - x_0) & \frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(s - x_0) \\ \omega\operatorname{sh}\omega(s - x_0) & \operatorname{ch}\omega(s - x_0) \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2\omega(s - x_0) - \operatorname{sh}^2\omega(s - x_0) = 1,$$

$$W_{21}(s) = -\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}(s - x_0), \quad W_{22}(s) = \operatorname{ch}\omega(s - x_0).$$

Тому

$$\tilde{y} = \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(s - x_0)\operatorname{ch}\omega(x - x_0) + \frac{1}{\omega}\operatorname{ch}\omega(s - x_0)\operatorname{sh}\omega(x - x_0)\right) f(s)\,ds = \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\operatorname{sh}\omega(x - s)\,f(s)\,ds.$$

Підставивши значення y_1, y_2, $\tilde{y}$ в (37), дістанемо шуканий розв'язок.

2.76. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - \omega^2 y = f(x), \tag{40}$$

де $f(x)$ — неперервна 2π-періодична функція, задана графічно (рис. 31).

Р о з в' я з а н н я. Загальний розв'язок даного рівняння $y = C_1e^{\omega x} + C_2e^{-\omega x} + \tilde{y}$, де $\tilde{y}$ — частинний розв'язок рівняння (40).

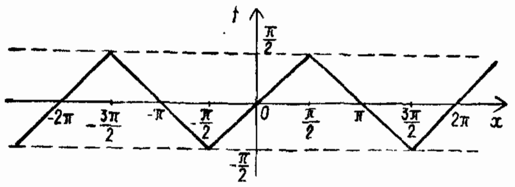


Рис. 31

Побудуємо $\tilde{y}$, використовуючи принцип суперпозиції. Функцію $f(x)$ розкладемо в ряд Фур'є. Маємо

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \pi - x & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Функція $f(x)$ — непарна. Тому коефіцієнти ряду Фур'є визначаються за формулами

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Маємо

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin kx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin kx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos kx dx - \frac{(\pi - x)\cos kx}{k}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos kx dx\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2}.$$

Отже, $b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Тому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n\sin(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2}. \tag{41}$$

Оскільки $f(-\pi) = f(\pi)$, а функція $f(x)$ — кусково-гладка на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фур'є (41) рівномірно збігається на всій числовій осі до $f(x)$. Розглянемо рівняння

$$y'' - \omega^2 y = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\sin(2n+1)x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{42}$$

Шукатимемо частинний розв'язок $\tilde{y}_n$ цього рівняння у вигляді

$$\tilde{y}_n = c_n\sin(2n+1)x. \tag{43}$$

Підставивши (43) в (42), дістанемо

$$-c_n(\omega^2 + (2n+1)^2)\sin(2n+1)x = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\sin(2n+1)x,$$

звідки

$$c_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2(\omega^2 + (2n+1)^2)}.$$

Отже,

$$\tilde{y}_n = \frac{4(-1)^n \sin(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Згідно з принципом суперпозиції, якщо ряд

$$\tilde{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n \sin(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)} \tag{44}$$

збігається й допускає двократне почленне диференціювання, то функція $\tilde{y}$ є частинним розв'язком рівняння (40).

Доведемо, що ряд (44) можна почленно диференціювати два рази. Складемо ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}'_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cos(2n+1)x}{\pi(2n+1)(\omega^2+(2n+1)^2)} \tag{45}$$

і

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}''_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1} \sin(2n+1)x}{\pi(\omega^2+(2n+1)^2)}. \tag{46}$$

Оскільки

$$|\tilde{y}_n| \leqslant \frac{4}{\pi(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

$$|\tilde{y}'_n| \leqslant \frac{4}{\pi(2n+1)(\omega^2+(2n+1)^2)}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

$$|\tilde{y}''_n| \leqslant \frac{4}{\pi(\omega^2+(2n+1)^2)}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

а числові ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^{2-i}(\omega^2+(2n+1)^2)}, \quad i = 0, 1, 2,$$

збігаються, то за ознакою Вейєрштраса, ряди (44) — (46) збігаються рівномірно на всій числовій осі. Отже, ряд (44) можна почленно диференціювати. Тому

$$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)x}{(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2.77. Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь

$$y'' + \omega^2 y = e^{\alpha x} \cos \beta x, \tag{47}$$

$$y'' + \omega^2 y = e^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{48}$$

де $\omega > 0$, $\alpha, \beta = \mathrm{const} \in \mathbf{R}$.

Р о з в' я з а н н я. Загальні розв'язки рівнянь (47) і (48) відповідно мають вигляд

$$y = C_1^{(1)} \cos \omega x + C_2^{(1)} \sin \omega x + \tilde{y}_1,$$

$$y = C_1^{(2)} \cos \omega x + C_2^{(2)} \sin \omega x + \tilde{y}_2,$$

де $C_1^{(j)}$, $C_2^{(j)}$, $j = 1,\ 2,$— довільні сталі, $\tilde{y}_1$ — частинний розв'язок рівняння (47), а $\tilde{y}_2$ — частинний розв'язок рівняння (48). Розглянемо рівняння

$$y'' + \omega^2 y = e^{px}, \tag{49}$$

де $p = \alpha + i\beta$, $i^2 = -1$. Якщо $\tilde{y}$ — розв'язок рівняння (49), то функції $\tilde{y}_1 = \operatorname{Re} \tilde{y}$, $\tilde{y}_2 = \operatorname{Im} \tilde{y}$ є частинними розв'язками рівнянь (47) і (48) відповідно. З результату задачі 2.74 випливає, що $\tilde{y}$ можна знайти за формулою

$$\tilde{y} = \frac{1}{\omega} \int_0^x \sin \omega (x - s)\, e^{ps} ds.$$

Маємо

$$\tilde{y} = \frac{1}{2i\omega} \int_0^x [e^{i\omega(x-s)} - e^{-i\omega(x-s)}]\, e^{ps} ds =$$

$$= \frac{1}{2i\omega} \int_0^x [e^{(\alpha + i(\beta - \omega))s + i\omega x} - e^{(\alpha + i(\beta + \omega))s - i\omega x}]\, ds.$$

Розглянемо такі випадки.

I. $\alpha \neq 0$. Тоді $\alpha + i(\beta - \omega) \neq 0$, $\alpha + i(\beta + \omega) \neq 0$ і

$$\tilde{y} = \frac{1}{2i\omega} \left[\frac{e^{ps + i\omega(x-s)}}{\alpha + i(\beta - \omega)} \Bigg|_0^x - \frac{e^{ps - i\omega(x-s)}}{\alpha + i(\beta + \omega)} \Bigg|_0^x \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega i} \frac{i\omega e^{px} - i\alpha \sin \omega x + \beta \sin \omega x - i\omega \cos \omega x}{[\alpha + i(\beta - \omega)]\,[\alpha + i(\beta + \omega)]}. \tag{50}$$

Відокремлюючи в (50) дійсну й уявну частини, дістанемо

$$\tilde{y} = \frac{e^{\alpha x} \omega (a \cos \beta x - b \sin \beta x) + (b\beta - a\alpha) \sin \omega x - a\omega \cos \omega x}{\omega (a^2 + b^2)} +$$

$$+ i\, \frac{e^{\alpha x} \omega (b \cos \beta x + a \sin \beta x) - (a\beta + b\alpha) \sin \omega x - b\omega \cos \omega x}{\omega (a^2 + b^2)}, \tag{51}$$

$$a = \alpha^2 + \omega^2 - \beta^2, \quad b = 2\alpha\beta. \tag{52}$$

Оскільки функції $\sin\omega x$, $\cos\omega x$ є розв'язками однорідного рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$, то з (51) випливає, що частинний розв'язок рівняння (49) можна вибрати у вигляді

$$\tilde{y}^* = \frac{e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x)}{a^2+b^2} + i\,\frac{e^{\alpha x}(b\cos\beta x + a\sin\beta x)}{a^2+b^2}, \tag{53}$$

де a і b визначаються за формулами (52). Тому

$$\tilde{y}_1 = \operatorname{Re}\tilde{y}^* = \frac{e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x)}{a^2+b^2}, \tag{54}$$

$$\tilde{y}_2 = \operatorname{Im}\tilde{y}^* = \frac{e^{\alpha x}(b\cos\beta x + a\sin\beta x)}{a^2+b^2}. \tag{55}$$

Зокрема, при $\beta = 0$ маємо $a^2 = \alpha^2 + \omega^2$, $b = 0$ і

$$\tilde{y}_1 = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\omega^2}, \quad \tilde{y}_2 = 0. \tag{56}$$

II. $\alpha = 0$, $\beta \neq \pm\omega$. Тоді $\alpha + i(\beta \pm \omega) = i(\beta \pm \omega) \neq 0$, $a = \omega^2 - \beta^2$, $b = 0$. Із (54) і (55) дістаємо

$$\tilde{y}_1 = \frac{\cos\beta x}{\omega^2-\beta^2}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{\sin\beta x}{\omega^2-\beta^2}. \tag{57}$$

III. $\alpha = 0$, $\beta = \omega$. Тоді

$$\tilde{y} = \frac{1}{2i\omega}\int_0^x \left(e^{i\omega x} - e^{2i\omega s - i\omega x}\right) ds = \frac{1}{2i\omega}\left(xe^{i\omega x} - \frac{1}{2i\omega}\, e^{2i\omega s - i\omega x}\Big|_0^x\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\omega}\left(xe^{i\omega x} - \frac{1}{\omega}\sin\omega x\right) = \frac{1}{2\omega}\, x\sin\omega x - \frac{i}{2\omega}\, x\cos\omega x +$$

$$+ i\,\frac{1}{2\omega^2}\sin\omega x. \tag{58}$$

З (58) випливає, що частинний розв'язок рівняння (49) можна вибрати у вигляді

$$\tilde{y}^{**} = \frac{1}{2\omega}\, x\sin\omega x - \frac{i}{2\omega}\, x\cos\omega x.$$

Тому

$$\tilde{y}_1 = \operatorname{Re}\tilde{y}^{**} = \frac{x}{2\omega}\sin\omega x, \quad \tilde{y}_2 = \operatorname{Im}\tilde{y}^{**} = -\frac{x}{2\omega}\cos\omega x. \tag{59}$$

IV. $\alpha = 0$, $\beta = -\omega$. Тоді рівняння (47) і (48) мають вигляд

$$y'' + \omega^2 y = \cos\omega x, \quad y'' + \omega^2 y = -\sin\omega x$$

і, згідно з принципом суперпозиції, $\tilde{y}_1 = \dfrac{x}{2\omega}\sin\omega x$, $\tilde{y}_2 =$

$= \frac{x}{2\omega} \cos \omega x$. Отже, загальні розв'язки даних рівнянь мають вигляд

$$y = C_1^{(1)} \cos \omega x + C_2^{(1)} \sin \omega x + \tilde{y}_1,$$

$$y = C_1^{(2)} \cos \omega x + C_2^{(2)} \sin \omega x + \tilde{y}_2,$$

де $C_1^{(j)}, C_2^{(j)}$ — довільні сталі, $j = 1, 2$, а $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ визначаються формулами

$$\tilde{y}_1 = \frac{e^{\alpha x} (a \cos \beta x - b \sin \beta x)}{a^2 + b^2}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{e^{\alpha x} (b \cos \beta x + a \sin \beta x)}{a^2 + b^2}$$

при $\alpha \neq 0$,

де $a = \alpha^2 + \omega^2 - \beta^2, \quad b = 2\alpha\beta$;

$$\tilde{y}_1 = \frac{\cos \beta x}{\omega^2 - \beta^2}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{\sin \beta x}{\omega^2 - \beta^2} \text{ при } \alpha = 0, \ \beta \neq \pm \omega;$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{x}{2\omega} \sin \omega x, \quad \tilde{y}_2 = \mp \frac{x}{2\omega} \cos \omega x \text{ при } \alpha = 0, \quad \beta = \pm \omega.$$

2.5. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

де $a_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Многочлен $D(\lambda)$ степеня n виду

$$D(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \tag{2}$$

називається *характеристичним многочленом* лінійного диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами $L(y)$. Рівняння

$$D(\lambda) = 0 \tag{3}$$

називається *характеристичним рівнянням оператора* $L(y)$.

Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — корені рівняння (3), які мають кратності $m_1, m_2, \ldots, m_l$, $\sum_{j=1}^{l} m_j = n$, відповідно, то функції

$$e^{\lambda_1 x}, \ xe^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ e^{\lambda_2 x}, \ xe^{\lambda_2 x}, \ \ldots,$$
$$x^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_l x}, \ xe^{\lambda_l x}, \ \ldots, \ x^{m_l - 1} e^{\lambda_l x} \tag{4}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1).

Якщо в рівнянні (1) коефіцієнти a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$,— дійсні числа, а характеристичне рівняння (3) має дійсні корені

k_1 — кратності m_1, k_2 — кратності m_2, ..., k_r — кратності m_r,

а також комплексні корені, які входять комплексно спряженими парами з однаковою кратністю:

$\alpha_1 \pm i\beta_1$ — кратності μ_1, $\alpha_2 \pm i\beta_2$ — кратності μ_2, ..., $\alpha_s \pm i\beta_s$ — кратності μ_s, $\sum_{j=1}^{r} m_j + 2\sum_{l=1}^{s} \mu_l = n$,

то фундаментальну систему розв'язків рівняння (1) можна вибрати в дійсній формі

$$
\begin{gathered}
e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ xe^{k_2x},\ \ldots,\ x^{m_2-1}e^{k_2x},\ \ldots \\
\ldots,\ e^{k_rx},\ xe^{k_rx},\ \ldots,\ x^{m_r-1}e^{k_rx}, \\
e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\ xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\ \ldots,\ x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, \\
e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\ xe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\ \ldots,\ x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x, \qquad (5)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx,\ xe^{\alpha_sx}\cos\beta_sx,\ \ldots,\ x^{\mu_s-1}e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx, \\
e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx,\ xe^{\alpha_sx}\sin\beta_sx,\ \ldots,\ x^{\mu_s-1}e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx.
\end{gathered}
$$

Отже, лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами завжди можна проінтегрувати в елементарних функціях, причому інтегрування зводиться до алгебраїчних операцій.

Розглянемо деякі диференціальні рівняння, які зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння Ейлера. Це рівняння виду

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0,$$

де $a_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Заміною $x = e^t$ при $x > 0$ рівняння зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. На практиці розв'язки рівняння Ейлера шукають у вигляді $y = e^{rt} = (e^t)^r = x^r$. Невідомий параметр r знаходять з характеристичного рівняння. Простому кореню r_1 характеристичного рівняння відповідає розв'язок x^{r_1}, а m-кратному кореню r_1 — m лінійно незалежних розв'язків виду x^{r_1}, $x^{r_1}\ln x, \ldots, x^{r_1}(\ln x)^{m-1}$. Якщо коефіцієнти рівняння дійсні, а характеристичне рівняння має комплексно спряжені корені $r_0 = \alpha_0 \pm i\beta_0$ кратності μ, то цим кореням відповідають 2μ лінійно незалежних розв'язків виду

$$
\begin{gathered}
x^{\alpha_0}\cos(\beta_0\ln x),\ x^{\alpha_0}\ln x\cos(\beta_0\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha_0}(\ln x)^{\mu-1}\cos(\beta_0\ln x), \\
x^{\alpha_0}\sin(\beta_0\ln x),\ x^{\alpha_0}\ln x\sin(\beta_0\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha_0}(\ln x)^{\mu-1}\sin(\beta_0\ln x).
\end{gathered}
$$

Рівняння Лагранжа. Це рівняння виду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = 0,$$

де $a, b, a_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Заміною $ax + b = e^t$ рівняння Лагранжа зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння Чебишова. Це рівняння виду

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad n = \text{const}.$$

Заміною $x = \cos t$ при $|x| < 1$. рівняння Чебишова зводиться до рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

Лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + h_1(x)\,y' + h_2(x)\,y = 0$$

за допомогою заміни $y = e^{-\frac{1}{2}\int h_1(x)dx}\,u$ зводитьтя до рівняння

$$u'' + Q(x)\,u = 0,$$

де $Q(x) = h_2(x) - \frac{1}{4}h_1^2(x) - \frac{1}{2}h_1'(x)$ — *інваріант* рівняння. Якщо $Q(x) \equiv C$ або $Q(x) = \frac{C}{(ax+b)^2}$, a, b, $C = \text{const}$, то це рівняння є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, або рівнянням Лагранжа.

2.78. Довести тотожність

$$L(e^{\lambda x}) = D(\lambda)\,e^{\lambda x},$$

де $D(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного диференціального оператора з сталими коефіцієнтами $L(y)$.

Розв'язання. Маємо

$$L(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})^{(n)} + a_1(e^{\lambda x})^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(e^{\lambda x})' + a_n e^{\lambda x} =$$
$$= \lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots\ a_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} =$$
$$= (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda + a_n)\,e^{\lambda x} = D(\lambda)\,e^{\lambda x}.$$

Тому

$$L(e^{\lambda x}) = D(\lambda)\,e^{\lambda x}.$$

2.79. Нехай λ_0 — корінь характеристичного рівняння $D(\lambda) = 0$ кратності m. Довести, що функції $y_k = x^k e^{\lambda_0 x}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, є лінійно незалежними розв'язками рівняння $L(y) = 0$.

Розв'язання. Тотожність $L(e^{\lambda x}) = D(\lambda)\,e^{\lambda x}$ продиференціюємо k разів по λ, застосовуючи формулу Лейбніца:

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}(L(e^{\lambda x})) = L\left(\frac{d^k(e^{\lambda x})}{d\lambda^k}\right) = L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j D^{(j)}(\lambda)\,x^{k-j}e^{\lambda x}. \tag{6}$$

При $\lambda = \lambda_0$ з (6) дістаємо

$$L(x^k e^{\lambda_0 x}) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j D^{(j)}(\lambda_0)\,x^{k-j}e^{\lambda_0 x}. \tag{7}$$

Оскільки λ_0 — корінь характеристичного многочлена $D(\lambda)$ кратності m, то $D(\lambda_0) = D'(\lambda_0) = \ldots = D^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, $D^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$. Тому з (7) випливає, що $L(x^k e^{\lambda_0 x}) = 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Лінійна незалежність функцій $e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$ випливає з результату задачі 2.46.

2.80. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega = \text{const} > 0. \tag{8}$$

Р о з в' я з а н н я. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ і знаходимо його корені: $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$.

Тому функції $e^{i\omega x}$, $e^{-i\omega x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків (комплексних) рівняння (8). Оскільки коефіцієнти рівняння (8) — дійсні числа, то функції $y_1 = \operatorname{Re} e^{i\omega x} = \cos \omega x$, $y_2 = \operatorname{Im} e^{i\omega x} = \sin \omega x$ також утворюють фундаментальну систему розв'язків (дійсних) рівняння (8). Тому

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2.81. Знайти фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$y'' - \omega^2 y = 0, \quad \omega = \text{const} > 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - \omega^2 = 0$: $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$. Тому фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1 = e^{\omega x}$, $y_2 = e^{-\omega x}$.

2.82. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q = \text{const}. \tag{9}$$

У площині параметрів (p, q) зобразити множини, для яких загальний розв'язок рівняння (9) має заданий вигляд.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Розглянемо такі випадки.

I. $\Delta = p^2 - 4q = -\omega^2$, де $\omega = \sqrt{4q - p^2}$. Тоді $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\frac{\omega}{2}$.

Фундаментальну систему утворюють функції

$$e^{-\frac{p}{2}x} \cos \frac{\omega}{2} x, \quad e^{-\frac{p}{2}x} \sin \frac{\omega}{2} x.$$

II. $\Delta = p^2 - 4q = 0$. Тоді $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$. Фундаментальну систему утворюють функції $e^{-\frac{p}{2}x}$, $xe^{-\frac{p}{2}x}$.

III. $\Delta = p^2 - 4q = \omega^2$, де $\omega = \sqrt{p^2 - 4q}$. Тоді $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\omega}{2}$.

Фундаментальну систему утворюють функції

$$e^{-\frac{1}{2}(p+\omega)x}, \quad e^{-\frac{1}{2}(p-\omega)x}.$$

Якщо ввести множини

$$\Lambda_1 = \{(p, q) \mid \Delta = p^2 - 4q < 0\},$$
$$\Lambda_2 = \{(p, q) \mid \Delta = p^2 - 4q = 0\},$$
$$\Lambda_3 = \{(p, q) \mid \Delta = p^2 - 4q > 0\}$$

у площині параметрів (рис. 32), то, очевидно Λ_1 відповідає випадку I, Λ_2 — випадку II, Λ_3 — випадку III.

2.83. Побудувати нормальні (при $x = x_0$) фундаментальні системи розв'язків рівнянь: а) $y'' + \omega^2 y = 0$; б) $y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega = \text{const} > 0$.

Розв'язання. Використаємо формулу (55) задачі (2.68):

$$z_k = \frac{W_{k1}(x_0)}{W(x_0)} y_1 + \frac{W_{k2}(x_0)}{W(x_0)} y_2, \quad k = 1, 2,$$

де y_1, y_2 — яка-небудь фундаментальна система розв'язків, $(W x_0) = W[y_1, y_2]|_{x=x_0}$, $W_{kl}(x_0)$ — алгебраїчне доповнення елемента k-го рядка і l-го стовпця вронскіана $W(x_0)$.

а) Маємо:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \cos \omega x_0 & \sin \omega x_0 \\ -\omega \sin \omega x_0 & \omega \cos \omega x_0 \end{vmatrix} = \omega,$$

$$W_{11}(x_0) = \omega \cos \omega x_0, \quad W_{12}(x_0) = \omega \sin \omega x_0,$$

$$W_{21}(x_0) = -\sin \omega x_0, \quad W_{22}(x_0) = \cos \omega x_0.$$

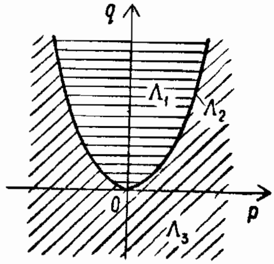


Рис 32.

Тому

$$z_1 = \cos \omega x_0 \cos \omega x + \sin \omega x_0 \sin \omega x = \cos \omega (x - x_0),$$

$$z_2 = -\frac{1}{\omega} \sin \omega x_0 \cos \omega x + \frac{1}{\omega} \cos \omega x_0 \sin \omega x = \frac{1}{\omega} \sin \omega (x - x_0).$$

б) Аналогічно дістаємо

$$z_1 = \operatorname{ch} \omega (x - x_0), \quad z_2 = \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega (x - x_0).$$

2.84. Нехай $y = y(x, y_0, y_0')$ — розв'язок задачі Коші

$$y'' - \omega^2 y = 0, \quad \omega = \text{const} > 0,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

У фазовій площині (y_0, y_0') знайти множини Φ_0^+, Φ_0^-, $\Phi_{+\infty}^+$, $\Phi_{-\infty}^-$, $\Phi_{-\infty}^+$, $\Phi_{-\infty}^-$ такі, що

$$\lim_{x \to +\infty} y = 0, \text{ якщо } (y_0, y_0') \in \Phi_0^+,$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = 0, \text{ якщо } (y_0, y_0') \in \Phi_0^-,$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \begin{cases} +\infty, \text{ якщо } (y_0, y_0') \in \Phi_{+\infty}^+, \\ -\infty, \text{ якщо } (y_0, y_0') \in \Phi_{-\infty}^+, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \begin{cases} +\infty, \text{ якщо } (y_0, y_0') \in \Phi_{+\infty}^-. \\ -\infty, \text{ якщо } (y_0, y_0') \in \Phi_{-\infty}^-. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи результат задачі 2.83, запишемо розв'язок $y = y(x, y_0, y_0')$ у вигляді

$$y = y_0 \operatorname{ch} \omega (x - x_0) + \frac{1}{\omega} y_0' \operatorname{sh} \omega (x - x_0),$$

або

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 + y_0' \frac{1}{\omega}\right) e^{\omega(x-x_0)} + \frac{1}{2}\left(y_0 - y_0' \frac{1}{\omega}\right) e^{-\omega(x-x_0)}. \tag{10}$$

Звідси

$$\lim_{x\to+\infty} y = 0, \text{ якщо } y_0 + y_0' \frac{1}{\omega} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = 0, \text{ якщо } y_0 - y_0' \frac{1}{\omega} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \begin{cases} +\infty, \text{ якщо } y_0 + y_0' \frac{1}{\omega} > 0; \\ -\infty, \text{ якщо } y_0 + y_0' \frac{1}{\omega} < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \begin{cases} +\infty, \text{ якщо } y_0 - y_0' \frac{1}{\omega} > 0; \\ -\infty, \text{ якщо } y_0 - y_0' \frac{1}{\omega} < 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\Phi_0^+ = \left\{(y_0, y_0') \mid y_0 + y_0' \frac{1}{\omega} = 0\right\}, \quad \Phi_0^- = \left\{(y_0, y_0') \mid y_0 - y_0' \frac{1}{\omega} = 0\right\},$$

$$\Phi_{+\infty}^+ = \left\{(y_0, y_0') \mid y_0 + y_0' \frac{1}{\omega} > 0\right\}, \quad \Phi_{-\infty}^+ = \left\{(y_0, y_0') \mid y_0 + y_0' \frac{1}{\omega} < 0\right\},$$

$$\Phi_{+\infty}^- = \left\{(y_0, y_0') \mid y_0 - y_0' \frac{1}{\omega} > 0\right\}, \quad \Phi_{-\infty}^- = \left\{(y_0, y_0') \mid y_0 - y_0' \frac{1}{\omega} < 0\right\}.$$

Множина Φ_0^+ складається з точок прямої $y_0 + y_0' \frac{1}{\omega} = 0$, множина Φ_0^- — з точок прямої $y_0 - y_0 \frac{1}{\omega} = 0$ (рис. 33).

2.85. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y'' + 3y' + 2y = 0$; б) $y'' - 8y' = 0$;

в) $y'' - 8y' + 16y = 0$; г) $y'' + 2y' + 9y = 0$.

Розв'язання. а) Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ є числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, а фундаментальною системою є e^{-2x}, e^{-x}.

б) Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 8\lambda = 0$ є числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 8$, а фундаментальною системою є 1, e^{8x}.

в) Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ є числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, а фундаментальною системою є e^{4x}, xe^{4x}.

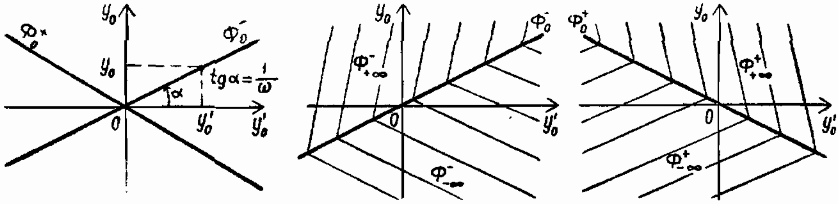


Рис. 33

г) Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 9 = 0$ є числа $\lambda_{1,2} = -1 \pm i2\sqrt{2}$, а фундаментальною системою є $e^{-x} \cos 2\sqrt{2}x$; $e^{-x} \sin 2\sqrt{2}x$.

Отже,

$$\text{а) } y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}; \quad \text{б) } y = C_1 + C_2 e^{8x};$$

$$\text{в) } y = e^{4x}(C_1 + C_2 x); \qquad \text{г) } y = e^{-x}(C_1 \cos 2\sqrt{2}\,x + C_2 \sin 2\sqrt{2}x);$$

C_1, C_2 — довільні сталі.

2.86. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y''' + 8y = 0$, б) $y''' - 8y = 0$.

Розв'язання.

а) Знаходимо корені характеристичного рівняння $\lambda^3 + 8 = 0$. Маємо $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$, звідки $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Фундаментальну систему розв'язків утворюють функції e^{-2x}, $e^{x} \cos \sqrt{3}x$, $e^{x} \sin \sqrt{3}x$.

б) Знаходимо корені характеристичного рівняння $\lambda^3 - 8 = 0$. Маємо $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$, звідки $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Фундаментальну систему розв'язків утворюють функції e^{2x}, $e^{-x} \times \cos \sqrt{3}x$, $e^{-x} \sin \sqrt{3}x$.

Отже,

$$\text{а) } y = C_1 e^{-2x} + e^{x}(C_2 \cos \sqrt{3}\,x + C_3 \sin \sqrt{3}\,x);$$

$$\text{б) } y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}\,x + C_3 \sin \sqrt{3}\,x);$$

C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

2.87. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 4y'' + 4y' - y = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо корені характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0.$$

Маємо:

$$\lambda^3 - 1 - 4\lambda(\lambda - 1) = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Отже,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} + C_3 e^{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}.$$

2.88. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 5y'' - 4y' + y = 0. \tag{11}$$

Р о з в' я з а н н я. Характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \tag{12}$$

є симетричним рівнянням четвертого степеня. Очевидно $\lambda \neq 0$. Розділимо рівняння (12) на λ^2 і перетворимо його:

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 5 = 0. \tag{13}$$

Введемо змінну

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = t. \tag{14}$$

Тоді $\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = t^2 - 2$. Відносно t дістанемо рівняння $t^2 - 4t + 3 = 0$, звідки $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Враховуючи заміну (14), дістанемо

$$\begin{array}{l|l} \lambda + \dfrac{1}{\lambda} = 1, & \lambda + \dfrac{1}{\lambda} = 3, \\[2ex] \lambda^2 - \lambda + 1 = 0, & \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0, \\[2ex] \lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, & \lambda_{3,4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}$$

Тому

$$y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + C_4 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі.

2.89. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{\mathrm{V}} + 2y = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Корені характеристичного рівняння знаходимо за формулою

$$\lambda = \sqrt[5]{-2} = \sqrt[5]{2(\cos\pi + i\sin\pi)} =$$
$$= \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right),$$

де $k = 0, 1, \ldots, 4$. Маємо:

$$\lambda_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right), \quad k = 0;$$

$$\lambda_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right), \quad k = 1;$$

$$\lambda_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\sqrt[5]{2}, \quad k = 2;$$

$$\lambda_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} - i\sin\frac{3\pi}{5}\right), \quad k = 3;$$

$$\lambda_5 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right), \quad k = 4.$$

Тому

$$y = C_1 e^{-\sqrt[5]{2}x} + e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{\pi}{5}}\left(C_2\cos\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x + \right.$$
$$\left. + C_3\sin\left(\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x\right)\right) + e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{3\pi}{5}}\left(C_4\cos\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x + \right.$$
$$\left. + C_5\sin\left(\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x\right)\right),$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_5$ — довільні сталі.

2.90. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{\mathrm{VI}} - 4y^{\mathrm{V}} + 8y^{\mathrm{IV}} - 8y''' + 4y'' = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0,$$
$$\lambda^2(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 8\lambda) = 0,$$
$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1 + i$, $\lambda_5 = \lambda_6 = 1 - i$.

Отже,

$$y = C_1 + C_2x + e^x(C_3\cos x + C_4\sin x + C_5x\cos x + C_6x\sin x).$$

2.91. Довести, що функції

$$y_1 = e^{\sqrt{2}x}(\cos\sqrt{2}\,x + i\sin\sqrt{2}\,x),$$
$$y_2 = e^{-\sqrt{2}x}(\cos\sqrt{2}\,x - i\sin\sqrt{2}\,x)$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$y'' + 4iy = 0. \tag{15}$$

Чи має це рівняння дійсні розв'язки?

Розв'язання. Розв'язуємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4i = 0$:

$$\lambda_{1,2} = 2\sqrt{i} = 2\sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} =$$
$$= 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right),$$

де $k = 0,\ 1$. Маємо:

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad k = 0,$$
$$\lambda_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad k = 1.$$

Отже, функції

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})x} = e^{\sqrt{2}x}(\cos\sqrt{2}\,x + i\sin\sqrt{2}\,x),$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})x} = e^{-\sqrt{2}x}(\cos\sqrt{2}\,x - i\sin\sqrt{2}\,x)$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (15).

Якщо припустити, що дійсна функція u є розв'язком рівняння (15), то $u'' - 4iu = 0$, звідки $u'' = 0$, $-4u = 0$ (оскільки u'', $u \in \mathbf{R}$), тобто $u \equiv 0$. Отже, задане рівняння інших дійсних розв'язків, крім тривіального $y \equiv 0$, не має.

2.92 *. Матеріальна точка M масою m рухається по прямій OT під дією сили $\vec{f}_1$, яка притягує її до точки O, і сили опору середовища $\vec{f}_2$. Значення сили $\vec{f}_1$ пропорційне до відхилення матеріальної точки від положення O, значення сили $\vec{f}_2$ пропорційне до швидкості точки M. Початкове відхилення матеріальної точки дорівнює s_0, початкова швидкість дорівнює v_0. Знайти закон руху точки.

Розв'язання. Координатну вісь Os напрямимо по прямій OT, взявши точку O за початок (рис. 34). Позначимо через $\vec{i}$ орт координатної осі Os, через $s = s(t)$ — координату (відхилен-

* Перш ніж розглядати задачі 2,92—2,94, рекомендуємо розв'язати задачу 105 (с. 240)

ня) рухомої точки в момент часу t. Тоді $\vec{s} = \vec{s}(t) = s(t)\vec{i}$ — вектор відхилення точки M, $\vec{v} = \vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = s'(t)\vec{i} = v(t)\vec{i}$ — миттєва швидкість точки M, $\vec{a} = \vec{a}(t) = \vec{s}''(t) = s''(t)\vec{i} = a(t)\vec{i}$ — миттєве прискорення точки M, $\vec{f}_1 = -k\vec{s}(t) = -ks(t)\vec{i}$, $k = \text{const} > 0$; сила $\vec{f}_1$ напрямлена від точки M до початку O, $\vec{f}_2 = -b\vec{v}(t) = -bs'(t)\vec{i}$, $b = \text{const} > 0$; напрямок опору середовища протилежний напрямку швидкості точки.

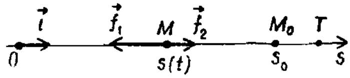


Рис. 34

Згідно з другим законом Ньютона, $m\vec{a} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$. Спроектувавши цю векторну рівність на вісь Os, дістанемо $ms'' = -ks - bs'$, звідки

$$s'' + ps' + qs = 0, \tag{16}$$

де $p = \frac{b}{m}$, $q = \frac{k}{m} > 0$.

Отже, для визначення закону руху матеріальної точки маємо задачу Коші:

$$s'' + ps' + qs = 0, \quad s(t_0) = s_0, \quad s'(t_0) = v_0. \tag{17}$$

Розглянемо такі випадки.

I. $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Тоді

при $p = 0$ (вважаємо, що опору середовища немає)

$$s(t) = s_0 \cos\sqrt{q}\,(t - t_0) + \frac{v_0}{\sqrt{q}} \sin\sqrt{q}\,(t - t_0); \tag{18}$$

при $p > 0$

$$s(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{p}{2}(t-t_0)} \left(s_0\omega \cos\frac{\omega}{2}(t - t_0) + (s_0 p + 2v_0)\sin\frac{\omega}{2}(t - t_0)\right), \tag{19}$$

де $\omega = \sqrt{4q - p^2}$.

З (18) і (19) випливає, що при $p = 0$ матеріальна точка коливається вздовж осі Os відносно точки O з періодом $\frac{2\pi}{\sqrt{q}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (гармонічний коливний процес), а при $p > 0$ вона здійснює періодичні затухаючі коливання відносно точки O з періодом $\frac{4\pi}{\sqrt{4q - p^2}}$. Амплітуда коливань зменшується за експоненціальним законом.

II. $\Delta = p^2 - 4q = 0$. Тоді

$$s(t) = e^{-\frac{p}{2}(t-t_0)}\left(s_0 + \left(\frac{s_0 p}{2} + v_0\right)(t - t_0)\right). \tag{20}$$

Отже, матеріальна точка прямує до початку координат O. Оскільки $s(t)$ може перетворитися в нуль лише при одному значенні t, то рух відбувається без коливань (згасаючий аперіодичний процес).

III. $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Тоді

$$s(t) = \frac{s_0(p+\omega)+2v_0}{2\omega} e^{-\frac{1}{2}(p-\omega)(t-t_0)} -$$

$$- \frac{s_0(p-\omega)+2v_0}{2\omega} e^{-\frac{1}{2}(p+\omega)(t-t_0)}, \tag{21}$$

де $\omega = \sqrt{p^2-4q} < p$.

Оскільки $p+\omega > 0$, $p-\omega > 0$, то з (21) дістаємо, що матеріальна точка з часом наближається до початку координат O. Як і в попередньому випадку, рух відбувається без коливань.

2.93. (Лінійне рівняння математичного маятника). *Математичним маятником* називається матеріальна точка M масою m, підвищена на нерозтяжній нитці довжиною l, яка рухається під дією сили тяжіння. Вважаючи, що маятник здійснює малі відхилення від вертикалі і що опір середовища пропорційний до швидкості точки, знайти закон руху математичного маятника.

Розв'язання. Очевидно матеріальна точка M рухається по колу радіуса l. Тому положення точки M на колі в момент часу t можна визначити кутом $\theta = \theta(t)$ відхилення нитки від вертикалі.

Диференціальне рівняння для кута θ має вигляд

$$\theta'' + p\theta' + q\sin\theta = 0, \tag{22}$$

де $p = \frac{b}{m}$, $q = \frac{g}{l}$,

коефіцієнт b характеризує опір середовища.

Рівняння (22) називається *рівнянням математичного маятника*. Враховуючи, що $\sin\theta = \theta + o(\theta^2)$, $\theta \to 0$, і те, що маятник здійснює малі коливання від вертикалі, $|\theta(t)| \ll 1$, в рівнянні (22) покладемо $\sin\theta \approx \theta$. Дістанемо лінійне рівняння математичного маятника

$$\theta'' + p\theta' + q\theta = 0. \tag{23}$$

Врахуємо початкові умови:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta_0',$$

Розглянемо такі випадки.

I. $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Тоді

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0) + \theta_0'\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0),$$

якщо опору середовища немає; маятник здійснює періодичні з періодом $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ коливання (гармонічний коливний процес);

$$\theta(t)=\frac{1}{\omega}e^{-\frac{p}{2}(t-t_0)}\Big(\theta_0\omega\cos\frac{\omega}{2}(t-t_0)+$$

$$+(\theta_0 p+2\theta_0')\sin\frac{\omega}{2}(t-t_0)\Big),$$

якщо $p>0$, де $\omega=\sqrt{4q-p^2}$; маятник здійснює періодичні з періодом $\frac{4\pi}{\sqrt{4q-p^2}}$ коливання, які затухають за експоненціальним законом.

II. $\Delta=p^2-4q=0$. Тоді

$$\theta(t)=e^{-\frac{p}{2}(t-t_0)}\Big(\theta_0+\Big(\frac{\theta_0 p}{2}+\theta_0'\Big)(t-t_0)\Big).$$

Рух здійснюється без коливань (згасаючий аперіодичний процес).

III. $\Delta=p^2-4q>0$. Тоді

$$\theta(t)=\frac{\theta_0(p+\omega)+2\theta_0'}{2\omega}e^{-\frac{1}{2}(p-\omega)(t-t_0)}-$$

$$-\frac{s_0(p-\omega)+2\theta_0'}{2\omega}e^{-\frac{1}{2}(p+\omega)(t-t_0)},$$

де $\omega=\sqrt{p^2-4q}$. Оскільки $p+\omega>0$, $p-\omega>0$, то рух здійснюється без коливань (згасаючий аперіодичний процес).

2.94. Конденсатор ємності C розряджується через коло з опором R і коефіцієнтом самоіндукції L. Знайти закон зміни напруги на обкладинках конденсатора $v=v(t)$, якщо $v(t_0)=v_0$, а сила струму $i=i(t)$ у колі в початковий момент часу t_0 дорівнює $i(t_0)=i_0$.

Р о з в' я з а н н я. Використавши закони Кірхгофа, маємо

$$i=-Cv', \tag{24}$$

$$v=Ri+Li'. \tag{25}$$

Підставивши (24) в (25), дістанемо

$$R(-Cv')+L(-Cv'')=v,$$

або

$$v''+pv'+qv=0, \tag{26}$$

де $p=\frac{R}{L}$, $q=\frac{1}{LC}>0$.

Отже, для $v(t)$ маємо задачу Коші:

$$v''+pv'+qv=0,\quad v(t_0)=v_0,\quad v'(t_0)=-\frac{i_0}{c}. \tag{27}$$

Лінійне рівняння (26) збігається з рівняннями (16) і (23), які були розглянуті в задачах 2.92 і 2.93.

Тому при $p = \frac{R}{L}$, $q = \frac{1}{LC}$ маємо такі випадки.

I. $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Тоді

$$v(t) = v_0 \cos \frac{t - t_0}{\sqrt{LC}} - i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \frac{t - t_0}{\sqrt{LC}},$$

якщо $p = 0$ (активна складова кола $R = 0$);

$$v(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{p}{2}(t-t_0)} \Big(v_0\omega \cos \frac{\omega}{2}(t - t_0) +$$

$$+ \left(v_0 p - \frac{2i_0}{c}\right) \sin \frac{\omega}{2}(t - t_0)\Big),$$

якщо $p > 0$, де $\omega = \sqrt{4q - p^2}$.

II. $\Delta = p^2 - 4q = 0$. Тоді

$$v(t) = e^{-\frac{p}{2}(t-t_0)} \left(v_0 + \left(\frac{v_0 p}{2} - \frac{i_0}{C}\right)(t - t_0)\right).$$

III. $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Тоді

$$v(t) = \frac{Cv_0(p + \omega) - 2i_0}{2\omega C} e^{-\frac{1}{2}(p-\omega)(t-t_0)} -$$

$$- \frac{Cv_0(p - \omega) - 2i_0}{2\omega C} e^{-\frac{1}{2}(p+\omega)(t-t_0)}.$$

2.95. Вузька трубка обертається із сталою кутовою швидкістю ω навколо перпендикулярної до неї вертикальної осі. У початковий момент на відстані a_0 від осі всередині трубки лежить кулька масою m. Вважаючи, що тертя немає і в початковий момент швидкість кульки відносно трубки дорівнювала нулю, знайти закон руху кульки відносно трубки.

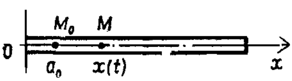


Рис. 35

Р о з в' я з а н н я. Напрямимо вісь координат Ox уздовж осі трубки, взявши точку O за початок координат (рис. 35). Позначимо через $x = x(t)$ координату кульки (точка M) в момент часу t. Оскільки *за умовою кулька рухається по трубці без тертя, то на неї діє лише* відцентрова сила $f_c = m\omega^2 x$.

Тому за другим законом Ньютона для відносного руху маємо $mx'' = m\omega^2 x$, або

$$x'' - \omega^2 x = 0. \tag{28}$$

Ураховуємо початкові умови:

$$x(t_0) = a_0, \quad x'(t_0) = 0.$$

Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (28) побудована в задачі 2.83. Використавши її, дістанемо

$$x(t) = a_0 \operatorname{ch} \omega (t - t_0).$$

2.96. Розв'язати попередню задачу, припустивши, що кулька прикріплена до точки O пружиною. Сила дії пружини на кульку пропорційна до деформації пружини. Довжина пружини у вільному положенні дорівнює a_0.

Розв'язання. На кульку діють дві сили: відцентрова $f_c = m\omega^2 x$ і пружна $f = -k(x - a_0)$, k — коефіцієнт пружності.

Згідно з другим законом Ньютона для відносного руху,

$$mx'' = m\omega^2 x - k(x - a_0),$$

або

$$mx'' + (k - m\omega^2) x = a_0 k. \tag{29}$$

Ураховуємо початкові умови:

$$x(t_0) = a_0, \quad x'(t_0) = 0.$$

Розглянемо такі випадки.

I. $k = m\omega^2$. Тоді рівняння (29) має вигляд $x'' = a_0 k/m$, звідки

$$x = \frac{a_0 k}{2m}(t - t_0)^2 + a_0.$$

II. $k - m\omega^2 \neq 0$. Рівняння (29) зведемо до лінійного однорідного, поклавши $y = x - \dfrac{a_0 k}{k - m\omega^2}$. Відносно нової невідомої функції y дістанемо рівняння

$$y'' + \nu y = 0, \tag{30}$$

де $\nu = \dfrac{k}{m} - \omega^2$. Ураховуємо початкові умови:

$$y(t_0) = -\frac{m\omega^2 a_0}{k - m\omega^2}, \quad y'(t_0) = 0.$$

Фундаментальні системи розв'язків рівняння (30) для випадків $\nu > 0$ і $\nu < 0$ побудовані в задачі 2.83. Тому

$$x = \frac{a_0}{k - m\omega^2}\left(k - m\omega^2 \cos\sqrt{\nu}\,(t - t_0)\right), \quad \text{якщо } \nu > 0,$$

$$x = \frac{a_0}{k - m\omega^2}\left(k - m\omega^2 \operatorname{ch}\sqrt{-\nu}\,(t - t_0)\right), \quad \text{якщо } \nu < 0.$$

2.97. Проінтегрувати рівняння Ейлера.

а) $x^2 y'' + xy' + \omega^2 y = 0$;
б) $x^2 y'' + xy' - \omega^2 y = 0$;
в) $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$;

г) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$;
д) $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$, $\omega = \text{const}$, $x > 0$.

Р о з в' я з а н н я. Шукаємо розв'язки даних рівнянь Ейлера у вигляді $y = x^r$. Тоді:

а) $x^2r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} + \omega^2x^r = 0$, $\quad r(r-1) + r + \omega^2 = 0$, $r^2 + \omega^2 = 0$, звідки $r_{1,2} = \pm i\omega$.

При $\omega = 0$ маємо двократний корінь характеристичного рівняння $r_{1,2} = 0$. Тому загальний розв'язок $y = C_1 + C_2 \ln x$. При $\omega \neq 0$ маємо

$$y = C_1 \cos(\omega \ln x) + C_2 \sin(\omega \ln x).$$

б) $x^2r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} - \omega^2x^r = 0$,
$r(r-1) + r - \omega^2$, $r^2 - \omega^2 = 0$, звідки $r_{1,2} = \pm\omega$.
Випадок $\omega = 0$ розглянуто в п. 1. При $\omega \neq 0$
$y = C_1x^{\omega} + C_2x^{-\omega}$.
в) $x^2r(r-1)x^{r-2} + 6xrx^{r-1} + 4x^r = 0$, $\quad r(r-1) + 6r + 4 = 0$, $r^2 + 5r + 4 = 0$, звідки $r_1 = -1$, $r_2 = -4$. Тому

$$y = C_1x^{-1} + C_2x^{-4}.$$

г) $x^2r(r-1)x^{r-2} + 5xrx^{r-1} + 4x^r - 1 = 0$, $r(r-1) + 5r + 4 = 0$, $r^2 + 4r + 4 = 0$, звідки $r_{1,2} = -2$ — двократний корінь характеристичного рівняння. Тому

$$y = C_1x^{-2} + C_2x^{-2}\ln x.$$

д) $x^2r(r-1)x^{r-2} + 3xrx^{r-1} + 2x^r = 0$, $r(r-1) + 3r + 2 = 0$, $r^r + 2r + 2 = 0$, звідки $r_{1,2} = -1 \pm i$. Тому

$$y = C_1x^{-1}\cos(\ln x) + C_2x^{-1}\sin(\ln x).$$

2.98. Проінтегрувати рівняння Чебишова:
а) $(1-x^2)y'' - xy' + 3y = 0$;
б) $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$, $|x| < 1$.

Р о з в' я з а н н я. а) Виконавши заміну змінної $x = \cos t$, $t \in (0, \pi)$, дістанемо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt}\frac{\cos t}{\sin^3 t}.$$

Тоді задане рівняння набирає вигляду

$$(1-\cos^2 t)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt}\frac{\cos t}{\sin^3 t}\right) +$$

$$+\cos t\,\frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\sin t}+3y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3y=0,$$

звідки

$$y=C_1\cos\sqrt{3}\,t+C_2\sin\sqrt{3}\,t=C_1\cos(\sqrt{3}\arccos x)+$$
$$+C_2\sin(\sqrt{3}\arccos x).$$

б) Виконавши заміну $x=\cos t$, $t\in(0,\pi)$, дістанемо

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0,$$

звідки

$$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t=C_1\cos(2\arccos x)+$$
$$+C_2\sin(2\arccos x)=C_1(2x^2-1)+2C_2x\sqrt{1-x^2}.$$

2.99. Проінтегрувати рівняння Чебишова

$$(1-x^2)\,y''-xy'+n^2y=0,\quad n=\text{const}\neq 0,\quad |x|>1.$$

Розв'язання. Виконаємо заміну незалежної змінної за формулою $x=\pm\,\mathrm{ch}\,t$, $t\in\mathrm{R}$ ($x=\mathrm{ch}\,t$ при $x>1$, $x=-\mathrm{ch}\,t$ при $x<-1$). Тоді

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{\pm 1}{\mathrm{sh}\,t},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\,\frac{\pm 1}{\mathrm{sh}\,t}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{\mathrm{sh}^2\,t}-\frac{dy}{dt}\,\frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}^3\,t},\quad 1-x^2=$$
$$=1-\mathrm{ch}^2 t=-\,\mathrm{sh}^2\,t.$$

Тоді задане рівняння набирає вигляду

$$-\,\mathrm{sh}^2 t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{\mathrm{sh}^2 t}-\frac{dy}{dt}\,\frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}^3\,t}\right)\pm\mathrm{ch}\,t\,\frac{dy}{dt}\,\frac{\pm 1}{\mathrm{sh}\,t}+n^2y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-n^2y=0.$$

Вибравши фундаментальну систему розв'язків останнього рівняння у вигляді $y_1=\mathrm{ch}\,nt$, $y_2=\mathrm{sh}\,nt$, дістанемо

$$y=C_1\,\mathrm{ch}\,nt+C_2\,\mathrm{sh}\,nt=C_1\,\mathrm{ch}\,(n\,\mathrm{arc\,ch}\,x)+C_2\,\mathrm{sh}\,(n\,\mathrm{arc\,ch}\,x).$$

2.100. Розв'язати задачу Коші

$$(1-x^2)\,y''-xy'+4y=0,\ y(\sqrt{2})=1,\ y'(\sqrt{2})=0.$$

Розв'язання. Виконавши заміну $x = \operatorname{ch} t$, $x > 1$, дістанемо рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0,$$

загальний розв'язок якого

$$y = C_1 \operatorname{ch} 2t + C_2 \operatorname{sh} 2t = C_1 \operatorname{ch}(2 \operatorname{arcch} x) + C_2 \operatorname{sh}(2 \operatorname{arcch} x) =$$
$$= C_1 [2\operatorname{ch}^2(\operatorname{arcch} x) - 1] + C_2 2\operatorname{sh}(\operatorname{arcch} x) \operatorname{ch}(\operatorname{arcch} x) = C_1(2x^2 - 1) +$$
$$+ 2C_2 x \sqrt{x^2 - 1}.$$

(використано залежності $\operatorname{ch} 2\alpha = 2\operatorname{ch}^2\alpha - 1$, $\operatorname{sh} 2\alpha = 2 \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha$). Знаходимо

$$y' = 4xC_1 + 2C_2\sqrt{x^2 - 1} + 2C_2 x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} =$$
$$= 4xC_1 + 2C_2\sqrt{x^2 - 1} + 2C_2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Враховуємо початкові умови:

$$3C_1 + 2\sqrt{2}\, C_2 = 1, \quad 4\sqrt{2}\, C_1 + 6C_2 = 0,$$

звідки $C_1 = 3$, $C_2 = 2\sqrt{2}$.

Тому

$$y = 3(2x^2 - 1) - 4\sqrt{2}\, x\sqrt{x^2 - 1}.$$

2.101. Проінтегрувати рівняння

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 6)\, y = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо інваріант рівняння:

$$Q = h_2(x) - \frac{1}{4} h_1^2(x) - \frac{1}{2} h_1'(x) = x^2 + 6 - \frac{1}{4} \cdot 4x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 5.$$

Як відомо, заміною $y = e^{-\frac{1}{2}\int 2x dx} u$ дане рівняння зводиться до вигляду $u'' + 5u = 0$. Тому

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} (C_1 \cos\sqrt{5}\, x + C_2 \sin\sqrt{5}\, x).$$

2.102. Проінтегрувати рівняння

$$y'' - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\, y' + \frac{8 - x^2}{4x^2}\, y = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Розв'язання. Знаходимо інваріант рівняння:

$$Q = \frac{8 - x^2}{4x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x/2} =$$
$$= \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \frac{1}{\cos^2 x/2}\right) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{x^2}.$$

Заміною $y = e^{\int \mathrm{tg}\frac{x}{2}\,dx} u = e^{-2\ln\cos\frac{x}{2}} u = \frac{u}{\cos^2 x/2}$ дане рівняння зводиться до рівняння Ейлера $x^2u'' + 2u = 0$. Розв'язки шукаємо у вигляді $u = x^r$. Тоді $r(r-1)x^r - 2x^r = 0$, $r^2 - r + 2 = 0$, $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Тому

$$u = C_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right) + C_2\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right),$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right)\right).$$

2.6. Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{1}$$

де $f(x)$ — неперервна на $I = (a; b)$ функція, $a_j = \mathrm{const}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Оскільки фундаментальну систему розв'язків рівняння завжди можна побудувати, задача інтегрування рівняння (1) зводиться до задачі побудови якого-небудь частинного розв'язку рівняння (1). Частинний розв'язок рівняння (1) завжди можна знайти, застосовуючи *метод варіації довільних сталих* (Лагранжа) або *метод Коші*.

Якщо права частина $f(x)$ в (1) має спеціальний вид

$$f(x) = P_m(x)e^{\sigma x}, \tag{2}$$

де σ — комплексна (зокрема дійсна) стала, яка називається *контрольним числом* функції $f(x)$; $P_m(x)$ — многочлен степеня m, то знаходження частинного розв'язку по суті зводиться до алгебраїчних операцій. Нехай контрольне число σ є коренем характеристичного рівняння оператора $L(y)$ кратності $r \geqslant 0$ (якщо $r > 0$, то дістаємо *резонансний випадок;* якщо σ не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$ і дістаємо *нерезонансний випадок*). Тоді рівняння (1) має єдиний частинний розв'язок виду

$$\tilde{y} = x^rR_m(x)e^{\sigma x}, \tag{3}$$

де $R_m(x)$ — многочлен степеня m, коефіцієнти якого можна знайти за допомогою *методу невизначених коефіцієнтів*.

Якщо коефіцієнти a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, рівняння (1) — дійсні числа, а права частина має спеціальний вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x), \tag{4}$$

де α, β — дійсні сталі, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлени степеня m і n відповідно з дійсними коефіцієнтами, то рівняння (1) має єдиний частинний розв'язок виду

$$\tilde{y} = x^re^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x), \tag{5}$$

де $r \geqslant 0$ — кратність контрольного числа $\sigma = \alpha \pm i\beta$ функції $f(x)$ як кореня характеристичного рівняння оператора $L(y)$ ($r > 0$ — резонансний випадок, $r = 0$ — нерезонансний випадок), $R_l(x)$, $S_l(x)$ — многочлени степеня $l = \max\{m, n\}$, коефіцієнти яких можуть бути знайдені методом невизначених коефіцієнтів.

Отже, лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами завжди можна проінтегрувати в квадратурах, причому у випадку, коли права частина рівняння (1) — функція $f(x)$ має спеціальний вид (2) або (4), інтегрування по суті зводиться до алгебраїчних операцій.

2.103. Знайти контрольне число σ правої частини рівняння

$$L(y) = f(x), \tag{6}$$

якщо:

а) $f(x) = 2$; б) $f(x) = 3x^2 - 2ix + 5$;

в) $f(x) = 2e^{-3x}$; г) $f(x) = 3e^{2ix}$;

д) $f(x) = 3e^{2x}(\cos 5x - i\sin 5x)$;

е) $f(x) = (2ix - 1)e^{3x}$; є) $f(x) = 3xe^{ix}$.

Записати вид загального розв'язку для випадків а) — є).

Р о з в' я з а н н я. Права частина має спеціальний вид (2). Маємо:

а) $\sigma = 0$; б) $\sigma = 0$; в) $\sigma = -3$; г) $\sigma = 2i$;

д) $\sigma = 2 - 5i$; е) $\sigma = 3$; є) $\sigma = i$.

Загальний розв'язок рівняння (6) має вид $y = \bar{y} + \tilde{y}$, де $\bar{y}$ — загальний розв'язок однорідного рівняння $L(y) = 0$, $\tilde{y}$ — частинний розв'язок відповідного неоднорідного рівняння.

Використавши формулу (3), дістанемо:

а) $\tilde{y} = ax^r$; б) $\tilde{y} = x^r(ax^2 + bx + c)$; в) $\tilde{y} = ax^re^{-3x}$;

г) $\tilde{y} = ax^re^{2ix}$; д) $\tilde{y} = ax^re^{(2-5i)x}$;

е) $\tilde{y} = x^r(ax + b)e^{3x}$; є) $\tilde{y} = (ax + b)x^re^{ix}$,

де a, b, c — невизначені коефіцієнти, а $r \geqslant 0$ — кратність контрольного числа σ як кореня характеристичного рівняння оператора $L(y)$.

2.104. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$L(y) \equiv y''' - iy'' = f(x), \tag{7}$$

де $f(x)$ визначена так само, як і в задачі 2.103.

Р о з в' я з а н н я. Характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння $y''' - iy'' = 0$ має вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2x + C_3e^{ix},$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. Знайдемо частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (7) для випадків а) — є).

а) Контрольне число $\sigma = 0$ — корінь характеристичного рівняння кратності 2. Тому $r = 2$ і

$$\tilde{y} = ax^2 \tag{8}$$

Підставивши (8) у рівняння (7), дістанемо $-i2a = 2$, звідки $a = i$.

б) Контрольне число $\sigma = 0$ — корінь характеристичного рівняння кратності 2. Тому $r = 2$ і

$$\tilde{y} = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2. \tag{9}$$

Підставивши (9) у (7), дістанемо

$$(3 + 12ia)\,x^2 + (-24a + 6bi - 2i)\,x + (5 + 2ci - 6b) \cdot 1 \equiv 0,$$

звідки, внаслідок лінійної незалежної функцій 1, x, x^2 (див. задачу 2.45), дістанемо систему для визначення a, b, c:

$$\begin{cases} 3 + 12ia = 0; \\ 6bi - 2i - 24a = 0; \\ 5 + 2ci - 6b = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Звідси знаходимо: $a = \frac{i}{4}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = -\frac{3i}{2}$.

в) Контрольне число $\sigma = -3$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r = 0$ і

$$\tilde{y} = ae^{-3x}. \tag{11}$$

Підставивши (11) в (7), дістанемо

$$-27ae^{-3x} - 9aie^{-3x} \equiv 2e^{-3x},$$

звідки

$$a = \frac{-2}{27 + 9i} = -\frac{1}{45}(3 - i).$$

г) Контрольне число $\sigma = 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r = 0$ і

$$\tilde{y} = ae^{2ix}. \tag{12}$$

Підставивши (12) у (7), дістанемо

$$-8aie^{2ix} + 4aie^{2ix} \equiv 3e^{2ix},$$

звідки

$$a = \frac{3}{4}i.$$

д) Контрольне число $\sigma = 2 - 5i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r = 0$ і

$$\tilde{y} = ae^{(2-5i)x}. \tag{13}$$

Підставивши (13) у (7), дістанемо

$$a(65i - 150)e^{(2-5i)x} - ia(-20i - 21)e^{(2-5i)x} \equiv 3e^{(2-5i)x},$$

звідки

$$a = -\frac{3}{2}\,\frac{85 + 43i}{9074}.$$

е) Контрольне число $\sigma = 3$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r = 0$ і

$$\tilde{y} = (ax + b)e^{3x}. \tag{14}$$

Підставивши (14) у (7), дістанемо

$$e^{3x}(27ax + 27a + 27b) - ie^{3x}(9ax + 6a + 9b) \equiv (2ix - 1)e^{3x},$$

$$(27a - 9ia - 2i)x + (27a + 27b - 6ia - 9ib + 1)\cdot 1 \equiv 0,$$

звідки, внаслідок лінійної незалежності функцій 1, x,

$$27a - 9ia - 2i = 0,$$

$$27a + 27b - 6ia - 9ib + 1 = 0,$$

звідки

$$a = \frac{1}{45}(3i - 1), \quad b = \frac{-7 - 99i}{1350}.$$

є) Контрольне число $\sigma = i$ — корінь характеристичного рівняння кратності 1. Тому $r = 1$ і

$$\tilde{y} = x(ax + b)e^{ix} = (ax^2 + bx)e^{ix}. \tag{15}$$

Підставивши (15) у (7), дістанемо

$$e^{ix}(-iax^2 + x(-6a - ib) + 6ia - 3b) -$$

$$- ie^{ix}(-ax^2 + x(4ia - b) + 2a + 2ib) \equiv 3xe^{ix},$$

$$(-2a - 2ib - 3)x + (4ia - b)\cdot 1 \equiv 0,$$

звідки, внаслідок лінійної незалежності 1, x,

$$-2a - 2ib - 3 = 0, \quad 4ia - b = 0. \tag{16}$$

Звідси $a = \frac{1}{2}$, $b = 2i$.

Отже, частинний розв'язок $\tilde{y}$ рівняння (7) визначається так:

а) $\tilde{y} = ix^2$; б) $\tilde{y} = \frac{i}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3i}{2}x^2$;

в) $\tilde{y} = -\frac{1}{45}(3-i)e^{-3x}$; г) $\tilde{y} = \frac{3}{4}ie^{2ix}$;

д) $\tilde{y} = -\frac{3}{2}\frac{85+43i}{9074}e^{(2-5i)x}$; е) $\tilde{y} = \left(\frac{3i-1}{45}x - \frac{7+99i}{1350}\right)e^{3x}$;

є) $\tilde{y} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2ix\right)e^{ix}$.

2.105. Знайти контрольне число σ правої частини рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (17)$$

якщо $a_j = \text{const} \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

а) $f(x) = 2$; б) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$; в) $f(x) = 2e^{-3x}$;
г) $f(x) = 2xe^x$; д) $f(x) = 3\sin 2x$; е) $f(x) = 5\cos 2x$;
є) $f(x) = 3\sin 2x + 5\cos 2x$; ж) $f(x) = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$.

Записати вид загального розв'язку рівняння (17) для випадків а) — ж).

Розв'язання. Права частина має спеціальний вид (4). Дістаємо:

а) $\alpha = \beta = 0$, $\sigma = \alpha \pm i\beta = 0$;
б) $\alpha = \beta = 0$, $\sigma = \alpha \pm i\beta = 0$;
в) $\alpha = -3$; $\beta = 0$, $\sigma = \alpha \pm i\beta = -3$;
г) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\sigma = \alpha \pm i\beta = 1$;
д) $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\sigma = \alpha \pm i\beta = \pm 2i$;
е) $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\sigma = \alpha + i\beta = \pm 2i$;
є) $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\sigma = \alpha \pm i\beta = \pm 2i$;
ж) $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\sigma = \alpha \pm i\beta = \pm 2i$.

Загальний розв'язок рівняння (17) в $y = \bar{y} + \tilde{y}$, де $\bar{y}$ — загальний розв'язок однорідного рівняння $L(y) = 0$, а $\tilde{y}$ — частинний розв'язок відповідного неоднорідного рівняння.

Скористаємось формулою (5). Маємо:

а) $\tilde{y} = ax^r$; б) $\tilde{y} = x^r(ax^2 + bx + c)$; в) $\tilde{y} = ax^re^{-3x}$;

г) $\tilde{y} = x^r(ax + b)e^x$; д) $\tilde{y} = x^r(a\cos 2x + b\sin 2x)$;

е) $\tilde{y} = x^r(a\cos 2x + b\sin 2x)$; є) $\tilde{y} = x^r(a\cos 2x + b\sin 2x)$;

ж) $\tilde{y} = x^r((ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x)$,
де a, b, c, d — невизначені коефіцієнти, а $r \geqslant 0$ — кратність контрольного числа σ як кореня характеристичного рівняння.

2.106. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$L(y) \equiv y''' - y'' = f(x), \qquad (18)$$

де $f(x)$ визначена так само, як і в задачі 2.105.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$. Тому загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x,$$

C_2, C_3 — довільні сталі.

Знайдемо частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (16) для випадків а) — ж).

а) Контрольне число $\sigma = 0$ — корінь характеристичного рівняння кратності 2. Тому $r = 2$ і

$$\tilde{y} = ax^2. \tag{19}$$

Підставивши (19) у рівняння (18), дістанемо

$$-2a = 2, \quad a = -1.$$

б) Контрольне число $\sigma = 0$. Тоді $r = 2$,

$$\tilde{y} = x^2 (ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2.$$

Рівняння (18) набирає вигляду

$$(3 + 12a) x^2 + (6b - 24a - 2) x + (5 + 2c - 6b) \cdot 1 \equiv 0. \tag{20}$$

Звідси знаходимо

$$3 + 12a = 0, \quad 6b - 24a - 2 = 0, \quad 5 + 2c - 6b = 0,$$

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = -\frac{2}{3}, \quad c = -\frac{9}{2}.$$

в) Контрольне число $\sigma = -3$ не є коренем характеристичного рівняння.
Тому $r = 0$ і

$$\tilde{y} = ae^{-3x}. \tag{21}$$

Підставивши (21) у (18), дістанемо

$$-27ae^{-3x} - 9ae^{-3x} \equiv 2e^{-3x},$$

звідки $a = -\dfrac{1}{18}$.

г) Контрольне число $\sigma = 1$ — корінь характеристичного рівняння кратності 1. Тому $r = 1$ і

$$\tilde{y} = x(ax + b) e^x = (ax^2 + bx) e^x. \tag{22}$$

Підставивши (22) у (18), дістанемо

$$(ax^2 + (6a + b) x + 6a + 3b) e^x - (ax^2 + (4a + b) x + 2a +$$
$$+ 2b) e^x \equiv 2xe^x,$$

$$(2a - 2) x + (4a + b) \cdot 1 \equiv 0,$$

звідки

$$2a-2=0,\quad 4a+b=0,\quad a=1,\quad b=-4.$$

д) Контрольне число $\sigma=\pm 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r=0$ і

$$\tilde{y}=a\cos 2x+b\sin 2x. \tag{23}$$

Підставивши (23) у (18), дістанемо

$$8(a\sin 2x-b\cos 2x)-4(-a\cos 2x-b\sin 2x)\equiv 3\sin 2x,$$
$$(8a+4b-3)\sin 2x+(4a-8b)\cos 2x\equiv 0.$$

Звідси, внаслідок лінійної незалежності функцій $\sin 2x, \cos 2x$ (див. задачу 2.48), маємо

$$8a+4b-3=0,\quad 4a-8b=0; \tag{24}$$
$$a=\frac{3}{10},\quad b=\frac{3}{20}$$

е) Як і в попередньому випадку, шукаємо $\tilde{y}$ у вигляді

$$\tilde{y}=a\cos 2x+b\sin 2x. \tag{25}$$

Підставивши (25) у (18), дістанемо

$$8(a\sin 2x-b\cos 2x)-4(-a\cos 2x-b\sin 2x)\equiv 5\cos 2x,$$
$$(8a+4b)\sin 2x+(4a-8b-5)\cos 2x\equiv 0.$$

Звідси

$$8a+4b=0,\quad 4a-8b-5=0; \tag{26}$$
$$a=\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{2}.$$

є) Шукаємо $\tilde{y}$ у вигляді

$$\tilde{y}=a\cos 2x+b\sin 2x. \tag{27}$$

Підставивши (27) у (18), дістанемо

$$8(a\sin 2x-b\cos 2x)-4(-a\cos 2x-b\sin 2x)\equiv 3\sin 2x+5\cos 2x,$$
$$(8a+4b-3)\sin 2x+(4a-8b-5)\cos 2x\equiv 0.$$

Звідси

$$8a+4b-3=0,\quad 4a-8b-5=0;$$
$$a=\frac{11}{20},\quad b=-\frac{7}{20}.$$

ж) Контрольне число $\sigma = \pm 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r = 0$ і

$$\tilde{y} = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x. \qquad (28)$$

Підставивши (28) у рівняння (18), дістанемо

$$(-8d - 12a + 4b - 4c)\cos 2x + (8b - 12c + 4d + 4a - 3)\sin 2x +$$
$$+ (-8c + 4a - 5)\,x\cos 2x + (8a + 4c)\,x\sin 2x \equiv 0.$$

Внаслідок лінійної незалежності функцій $\cos 2x$, $\sin 2x$, $x\cos 2x$, $x\sin 2x$ (див. задачу 2.48), маємо

$$-8d - 12a + 4b - 4c = 0, \quad 8b - 12c + 4d + 4a - 3 = 0,$$
$$-8c + 4a - 5 = 0, \quad 8a + 4c = 0;$$
$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{3}{4}, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння (18) визначаємо так:

а) $\tilde{y} = -x^2$; б) $\tilde{y} = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2$; в) $\tilde{y} = -\frac{1}{18}e^{-3x}$;

г) $\tilde{y} = (x^2 - 4x)e^x$; д) $\tilde{y} = \frac{3}{10}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x$;

е) $\tilde{y} = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$; є) $\tilde{y} = \frac{11}{20}\cos 2x - \frac{7}{20}\sin 2x$;

ж) $\tilde{y} = \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)\cos 2x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\sin 2x$.

2.107. Знайти загальні розв'язки рівнянь

$$y'' + \omega^2 y = H\cos\nu x, \qquad (29)$$
$$\omega,\ \nu = \text{const} > 0, \quad H = \text{const} \in \mathbf{R},$$
$$x'' + \omega^2 y = H\sin\nu x. \qquad (30)$$

Розв'язання. ***I спосіб.*** Характеристичне рівняння має корені $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Праві частини рівнянь (29), (30) мають спеціальний вид (4), причому в обох випадках контрольне число $\sigma = \pm i\nu$. Розглянемо такі випадки.

Нерезонансний випадок: $\nu \neq \omega$. Тоді число σ не є коренем характеристичного рівняння, $r = 0$ і частинні розв'язки шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}_1 = a_1\cos\nu x + b_1\sin\nu x, \qquad (31)$$

$$\tilde{y}_2 = a_2\cos\nu x + b_2\sin\nu x. \qquad (32)$$

Підставивши (31) і (32) відповідно в рівняння (29) і (30), дістанемо

$$(a_1(\omega^2-\nu^2)-H)\cos\nu x+b_1(\omega^2-\nu^2)\sin\nu x\equiv 0,$$
$$a_2(\omega^2-\nu^2)\cos\nu x+(b_2(\omega^2-\nu^2)-H)\sin\nu x\equiv 0.$$

Звідси, внаслідок лінійної незалежності функцій $\cos\nu x$, $\sin\nu x$, маємо

$$a_1(\omega^2-\nu^2)-H=0,\quad b_1(\omega^2-\nu^2)=0,$$
$$a_2(\omega^2-\nu^2)=0;\quad b_2(\omega^2-\nu^2)-H=0. \tag{33}$$

Беручи до уваги те, що $\nu\neq\omega$, знаходимо

$$a_1=\frac{H}{\omega^2-\nu^2},\quad b_1=0,\quad a_2=0,\quad b_2=\frac{H}{\omega^2-\nu^2}.$$

Тому

$$\tilde{y}_1=\frac{H}{\omega^2-\nu^2}\cos\nu x,\quad \tilde{y}_2=\frac{H}{\omega^2-\nu^2}\sin\nu x.$$

Резонансний випадок: $\nu=\omega$. Контрольне число σ є коренем характеристичного рівняння кратності $r=1$. Частинні розв'язки шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}_1=x(a_1\cos\omega x+b_1\sin\omega x), \tag{34}$$

$$\tilde{y}_2=x(a_2\cos\omega x+b_2\sin\omega x). \tag{35}$$

Підставивши (34) і (35) відповідно в рівняння (29) і (30), дістанемо

$$\omega^2x(-a_1\cos\omega x-b_2\sin\omega x)+2\omega(-a_1\sin\omega x+b_1\cos\omega x)+$$
$$+\omega^2x(a_1\cos\omega x+b_1\sin\omega x)\equiv H\cos\omega x,$$
$$\omega^2x(-a_2\cos\omega x-b_2\sin\omega x)+2\omega(-a_2\sin\omega x+b_2\cos\omega x)+$$
$$+\omega^2x(a_2\cos\omega x+b_2\sin\omega x)\equiv H\sin\omega x,$$
$$(2\omega b_1-H)\cos\omega x-2\omega a_1\sin\omega x\equiv 0,$$
$$2\omega b_2\cos\omega x+(-2\omega a_2-H)\sin\omega x\equiv 0,$$

звідки

$$a_1=0,\quad b_1=\frac{H}{2\omega},\quad a_2=-\frac{H}{2\omega},\quad b_2=0$$

Тому

$$\tilde{y}_1=\frac{xH}{2\omega}\sin\omega x,\quad \tilde{y}_2=-\frac{xH}{2\omega}\cos\omega x.$$

II спосіб. Знайдемо частинний розв'язок $\tilde{y}$ допоміжного рівняння

$$y'' + \omega^2 y = He^{i\nu x}, \quad i^2 = -1. \tag{36}$$

Тоді частинні розв'язки $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ можна знайти за формулами $\tilde{y}_1 = \mathrm{Re}\,\tilde{y}$, $\tilde{y}_2 = \mathrm{Im}\,\tilde{y}$.

Нерезонансний випадок: $\nu \neq \omega$.

Розв'язок $\tilde{y}$ шукаємо у вигляді

$$y = ce^{i\nu x}. \tag{37}$$

Підставивши (37) у рівняння (36), дістанемо

$$-c\nu^2 e^{i\nu x} + \omega^2 c e^{i\nu x} = He^{i\nu x},$$

звідки

$$c = \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Тому

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{Re}\,\tilde{y} = \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}\cos \nu x, \quad \tilde{y}_2 = \mathrm{Im}\,\tilde{y} = \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}\sin \nu x.$$

Резонансний випадок: $\nu = \omega$.

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = xce^{i\omega x}. \tag{38}$$

Підставивши (38) у рівняння (36), дістанемо

$$-\omega^2 xce^{i\omega x} + 2ci\omega e^{i\omega x} + \omega^2 xce^{i\omega x} = He^{i\omega x}, \tag{39}$$

звідки

$$c = \frac{H}{2i\omega} = -\frac{Hi}{2\omega}.$$

Тому

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{Re}\,\tilde{y} = \frac{xH}{2\omega}\sin \omega x,$$

$$\tilde{y}_2 = \mathrm{Im}\,\tilde{y} = -\frac{xH}{2\omega}\cos \omega x.$$

Отже, загальні розв'язки рівнянь (29) і (30) мають вигляд

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}\cos \nu x,$$

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}\sin \nu x,$$

якщо $\nu \neq \omega$ і

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{xH}{2\omega} \sin \omega x,$$

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x - \frac{xH}{2\omega} \cos \omega x,$$

якщо $\nu = \omega$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

2.108. Нехай σ — корінь кратності $r \geqslant 0$ характеристичного рівняння $D(\lambda) = 0$ лінійного диференціального оператора

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y,$$
$$a_j = \text{const}, \quad j = 1;\ 2, \ldots, n.$$

Довести, що частинний розв'язок $\tilde{y}$ лінійного неоднорідного рівняння

$$L(y) = He^{\sigma x}, \ H, \ \sigma = \text{const}, \tag{40}$$

можна знайти за формулою

$$\tilde{y} = \frac{Hx^r}{D^{(r)}(\sigma)} e^{\sigma x}. \tag{41}$$

Розв'язання. Оскільки за умовою контрольне число σ є коренем характеристичного рівняння кратності r, то розв'язок $\tilde{y}$ шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = ax^r e^{\sigma x}. \tag{42}$$

Тотожність $L(ae^{\lambda x}) = aD(\lambda) e^{\lambda x}$, a, $\lambda = \text{const}$, продиференціюємо r разів по параметру λ. Застосувавши формулу Лейбніца, маємо

$$L(ax^r e^{\lambda x}) = a \sum_{k=0}^{r} C_r^k D^{(r-k)}(\lambda) x^k e^{\lambda x}. \tag{43}$$

Оскільки $D^{(j)}(\sigma) = 0$ при $j = 0, 1, \ldots, r-1$, а $D^{(r)}(\sigma) \neq 0$, то із (43) при $\lambda = \sigma$ дістаємо

$$L(ax^r e^{\sigma x}) = aD^{(r)}(\sigma) e^{\sigma x}. \tag{44}$$

Підставимо тепер (42) в рівняння (40). Беручи до уваги (44), маємо

$$aD^{(r)}(\sigma) e^{\sigma x} = He^{\sigma x},$$

звідки $a = \dfrac{H}{D^r(\sigma)}$. Тому $\tilde{y} = \dfrac{Hx^r}{D^{(r)}(\sigma)} e^{\sigma x}$.

2.109. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = H \sin(\nu t + \varphi), \tag{45}$$
$$p, q, \varphi, \nu \geqslant 0, \quad H > 0 = \text{const} \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання. Скористаємося тим, що коли $\tilde{z}$ — частинний розв'язок допоміжного рівняння

$$z'' + pz' + qz = He^{i(\nu t+\varphi)},$$

то $\hat{y} = \operatorname{Im}\tilde{z}$ — частинний розв'язок даного рівняння. Для побудови $\tilde{z}$ використаємо формулу (41) задачі 2.108.

Розглянемо такі випадки:

I. $D(i\nu) = q - \nu^2 + ip\nu \neq 0$. Тоді ($r = 0$, $\sigma = i\nu$)

$$\tilde{y} = \operatorname{Im}\tilde{z} = \operatorname{Im}\frac{He^{i(\nu t+\varphi)}}{D(i\nu)} = H\operatorname{Im}\frac{e^{i(\nu t+\varphi)}}{q-\nu^2+ip\nu} =$$

$$= H\operatorname{Im}\frac{e^{i(\nu t+\varphi)}(q-\nu^2-ip\nu)}{(q-\nu^2)^2+p^2\nu^2} = \frac{H((q-\nu^2)\sin(\nu t+\varphi) - p\nu\cos(\nu t+\varphi))}{(q-\nu^2)^2+p^2\nu^2} =$$

$$= \frac{H\sin(\nu t+\varphi+\alpha)}{\sqrt{(q-\nu^2)^2+p^2\nu^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{p\nu}{\nu^2-q^2}.$$

II. $D(i\nu) = q - \nu^2 + ip\nu = 0$, звідки

або а) $p = 0$, $q = \nu^2$, $\nu \neq 0$,

або б) $p \neq 0$, $\nu = 0$, $q = 0$;

або в) $p = 0$, $\nu = 0$, $q = 0$.

Тоді

а) $r = 1$, $\sigma = i\nu$, $D'(i\nu) = 2i\nu \neq 0$ і

$$\tilde{y} = \operatorname{Im}\tilde{z} = \operatorname{Im}\frac{Hte^{i(\nu t+\varphi)}}{2i\nu} = -\frac{Ht}{2\nu}\operatorname{Im} ie^{i(\nu t+\varphi)} =$$

$$= \frac{Ht}{2\nu}\sin\left(\nu t + \varphi + \frac{3\pi}{2}\right);$$

б) $r = 1$, $\sigma = 0$, $D'(0) = p \neq 0$ і

$$\tilde{y} = \operatorname{Im}\tilde{z} = \operatorname{Im}\frac{Hte^{i\varphi}}{p} = \frac{Ht}{p}\sin\varphi;$$

в) $r = 2$, $\sigma = 0$, $D'(0) = 0$, $D''(0) = 2$ і

$$\tilde{y} = \operatorname{Im}\tilde{z} = \operatorname{Im}\frac{Ht^2e^{i\varphi}}{2} = \frac{Ht^2}{2}\sin\varphi.$$

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = \bar{y} + \tilde{y}$, де $\tilde{y}$ — загальний розв'язок однорідного рівняння.

2.110. Якщо загальний розв'язок лінійного рівняння

$$\begin{gathered} L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = H\sin(\nu t+\varphi) \\ H > 0,\ \nu > 0,\ \varphi,\ a_j \in \mathbf{R},\quad j = 1, 2, \dots, n, \end{gathered} \tag{46}$$

має вигляд $y = \bar{y} + \tilde{y}$, де загальний розв'язок однорідного рівняння

$\bar{y} \to 0$ при $t \to +\infty$, а $\tilde{y}$ — періодичний з періодом $T = \frac{2\pi}{\nu}$ частинний розв'язок рівняння (46), то говорять, що розв'язок y описує *перехідний режим,* а розв'язок $\tilde{y}$ — *усталений режим.*

Довести, що коли всі корені характеристичного рівняння $D(\lambda) = 0$ оператора $L(y)$ мають від'ємні дійсні частини, то рівняння (46) має єдиний $T = \frac{2\pi}{\nu}$-періодичний (усталений) розв'язок

$$\tilde{y} = H \operatorname{Im} \frac{e^{i(\nu t + \varphi)}}{D(i\nu)},$$

який описує усталений режим.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — корені характеристичного рівняння $D(\lambda) = 0$, $m_1, m_2, \ldots, m_s$ — їх кратності $\left(\sum\limits_{j=1}^{s} m_j = n\right)$. Загальний розв'язок $\bar{y}$ однорідного рівняння $L(y) = 0$ має вигляд

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{s} e^{\lambda_j t} (C_1 + C_2 t + \cdots + C_{m_j} t^{m_j - 1}),$$

де $C_1, \ldots, C_{m_j}$ — довільні сталі. Оскільки $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$, то $\bar{y} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Крім рівняння (46), розглянемо ще таке допоміжне рівняння:

$$L(z) = He^{i(\nu t + \varphi)}.$$

Оскільки $D(i\nu) \neq 0$, то частинний розв'язок $\tilde{z}$ можна знайти за формулою (41) ($r = 0$, $\sigma = i\nu$):

$$\tilde{z} = \frac{He^{i(\nu t + \varphi)}}{D(i\nu)}.$$

Отже, єдиним окремим $T = \frac{2\pi}{\nu}$-періодичним розв'язком рівняння (46) є функція

$$\tilde{y} = \operatorname{Im} \tilde{z} = H \operatorname{Im} \frac{e^{i(\nu t + \varphi)}}{D(i\nu)},$$

яка описує усталений режим.

2.111. Один кінець пружини закріплений нерухомо, до другого кінця прикріплено вантаж масою m, на який діє періодична збурююча сила $H \sin(\nu t + \varphi)$, напрямлена по вертикалі. При відхиленні вантажу на відстань x від положення рівноваги пружина діє на нього із силою kx (пружна сила), яка напрямлена до положення рівноваги. Під час руху вантажу зі швидкістю v сила опору середовища дорівнює bv ($H > 0$, $\nu > 0$, $k > 0$, $0 < b \ll m$, φ — сталі). Знайти закон руху вантажу в усталеному режимі та частоту збурюючої сили $\nu_{\text{рез}}$

(резонансну частоту), при якій амплітуда коливань вантажу в усталеному режимі є найбільшою. Знайти цю амплітуду.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $x = x(t)$ — відхилення вантажу від положення рівноваги в момент часу t. Згідно з другим законом Ньютона, $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + H\sin(\nu t + \varphi)$, звідки для визначення закону руху $x = x(t)$ вантажу дістаємо лінійне неоднорідне рівняння виду

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = \frac{H}{m}\sin(\nu t + \varphi), \tag{47}$$

де $p = \frac{b}{m}$, $q = \frac{k}{m}$.

Оскільки $p > 0$, $q > 0$, то, як випливає з результатів задач 2.109, 2.110, усталений рух вантажу існує й описується розв'язком рівняння (47) виду

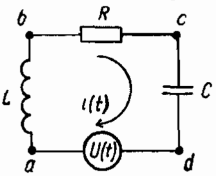


Рис. 36

$$\tilde{x}(t) = A(\nu)\sin(\nu t + \varphi + \alpha),$$

де $A(\nu) = \dfrac{H}{m\sqrt{(q-\nu^2)^2 + p^2\nu^2}}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{p\nu}{q-\nu^2}$.

Частоту $\nu_{\text{рез}}$, при якій амплітуда $A(\nu)$ коливань вантажу в усталеному режимі має найбільше значення, можна знайти з умови мінімуму функції $\psi(\nu) = (q-\nu^2)^2 + p^2\nu^2$. Маємо

$$\psi'(\nu) = -4\nu(q-\nu^2) + 2p^2\nu = 0,$$

звідки

$$\nu_{\text{рез}} = \sqrt{q - \frac{p^2}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}.$$

Амплітуда коливань вантажу при резонансі

$$A(\nu_{\text{рез}}) = \frac{H}{mp\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = \frac{2mH}{b\sqrt{4km - b^2}}.$$

2.112. Послідовний коливальний контур складається з послідовноз'єднаних (рис. 36): джерела струму, напруга якого змінюється за законом $u(t) = E\sin(\nu t + \varphi)$; опору R; індуктивності L і ємності C ($E > 0$, $R > 0$, $C > 0$, $L > 0$, $\nu > 0$, φ — сталі).

Знайти силу струму в контурі при усталеному режимі й частоту $\nu_{\text{рез}}$ джерела струму (резонансну частоту), коли амплітуда коливань струму в усталеному режимі найбільша.

Р о з в' я з а н н я. Послідовний коливальний контур є електричним колом з чотирма вузлами a, b, c, d. Застосувавши перший закон

Кірхгофа, дістанемо

$$I_{da} + I_{ba} = 0, \quad I_{ab} + I_{cb} = 0,$$
$$I_{bc} + I_{dc} = 0, \quad I_{cd} + I_{ad} = 0,$$

звідки $I_{da} = I_{ab} = I_{bc} = I_{cd} = i\,(t)$,
де $i\,(t)$ — шукана сила струму (символом I_{xy} позначена сила струму, який напрямлений від вузла x до вузла y). Спад напруги u_{xy} визначається так:

$$u_{ab} = L\frac{di}{dt}, \quad u_{bc} = Ri, \quad u_{cd} = \frac{1}{C}\int idt,$$
$$u_{da} = -u\,(t) = -E\sin(\nu t + \varphi).$$

Тому, згідно з другим законом Кірхгофа,

$$u_{ab} + u_{bc} + u_{cd} + u_{da} = 0,$$

або

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = E\sin(\nu t + \varphi).$$

Продиференціювавши останнє співвідношення, для визначення $i = i\,(t)$ дістанемо лінійне неоднорідне рівняння виду

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + p\frac{di}{dt} + qi = \frac{E\nu}{L}\cos(\nu t + \varphi), \tag{48}$$

де $p = \frac{R}{L}$, $q = \frac{1}{LC}$.

Оскільки $p > 0$, $q > 0$, то, як показано в задачах 2.109, 2.110, усталений режим коливань струму в контурі існує й описується розв'язком рівняння (48) виду

$$\tilde{i}\,(t) = A\,(\nu)\cos(\nu t + \varphi + \alpha),$$

де

$$A\,(\nu) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{(q - \nu^2)^2}{\nu^2} + p^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{p\nu}{\nu^2 - q}.$$

Резонансну частоту знайдемо з умови мінімуму функції $\psi(\nu) = \frac{(q-\nu^2)^2}{\nu^2} + p^2$. Очевидно, що функція $\psi(\nu)$ набуває найменшого значення при $q - \nu^2 = 0$, звідки $\nu_{рез} = \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Амплітуда коливань при резонансі дорівнює

$$A\,(\nu_{рез}) = \frac{E}{Lp} = \frac{E}{R}.$$

2.113. Електричний фільтр низьких частот — це електричне коло, зображене на рис. 37 ($U(t) = E\sin(\nu t + \varphi)$; $E > 0$, $\nu > 0$, $L > 0$, $C > 0$, $R > 0$ — сталі). Знайти спад напруги на опорі R в усталеному режимі. Довести, що $\lim\limits_{\nu\to 0}\frac{A(\nu)}{E} = 1$, $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{A(\nu)}{\nu} = 0$, де $A(\nu)$ — амплітуда спаду напруги на опорі R в усталеному режимі.

Розв'язання. Згідно з першим законом Кірхгофа,

$$I_{ab} + I_{db} + I_{cb} = 0,\ I_{bc} + I_{dc} = 0,\ I_{cd} + I_{ad} + I_{bd} = 0,\ I_{da} + I_{ba} = 0.$$

Позначивши $I_{ab} = i_1$, $I_{bc} = i_2$, дістанемо $I_{bd} = i_1 - i_2$, $I_{cd} = i_2$, $I_{da} = i_1$. Маємо

$$u_{ab} = L\frac{di_1}{dt},\quad u_{bc} = L\frac{di_2}{dt},\ u_{cd} = Ri_2,$$

$$u_{da} = -u(t) = -E\sin(\nu t + \varphi),\quad u_{db} = \frac{1}{C}\int(i_2 - i_1)\,dt.$$

Тому за другим законом Кірхгофа

$$L\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 - E\sin(\nu t + \varphi) = 0,$$

$$L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C}\int(i_2 - i_1)\,dt = 0, \tag{49}$$

$$L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int(i_1 - i_2)\,dt - E\sin(\nu t + \varphi) = 0.$$

Через те що останнє рівняння системи (49) є наслідком перших двох рівнянь, то вилучимо з цієї системи i_1. Тоді для i_2 дістанемо лінійне неоднорідне рівняння виду

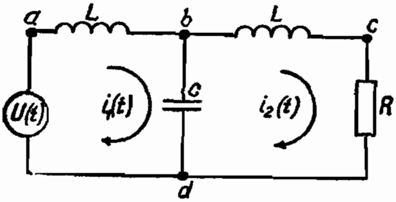


Рис. 37

$$\frac{d^3i_2}{dt^3} + p\frac{d^2i_2}{dt^2} + q\frac{di_2}{dt} + ri_2 = \frac{E}{CL^2}\sin(\nu t + \varphi), \tag{50}$$

де $p = \frac{R}{L}$, $q = \frac{2}{LC}$, $r = \frac{R}{L^2C}$. Оскільки $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $pq > r$, то за критерієм Рауса — Гурвіца* всі дійсні частини коренів характеристичного рівняння $D(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$ від'ємні, рівняння (50) має усталений розв'язок:

$$\tilde{i}_2(t) = \frac{E}{CL^2}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i(\nu t+\varphi)}}{D(i\nu)} = \frac{\frac{E}{CL^2}\sin(\nu t + \varphi + \alpha)}{\sqrt{(r - p\nu^2)^2 + \nu^2(q - \nu^2)^2}} =$$

* Формулювання критерію Рауса — Гурвіца наведено в п. 5.2

$$= \frac{\frac{E}{C}\sin(\nu t+\varphi+\alpha)}{\sqrt{\left(\frac{R}{C}-RL\nu^2\right)^2+\nu^2\left(\frac{2L}{C}-L^2\nu^2\right)^2}},$$

де $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\nu\left(L^2\nu^2-\frac{2L}{C}\right)}{\frac{R}{C}-RL\nu^2}$.

Спад напруги на опорі R дорівнює

$$u_{cd} = Ri_2 = A(\nu)\sin(\nu t+\varphi+\alpha),$$

де

$$A(\nu) = \frac{\frac{ER}{C}}{\sqrt{\left(\frac{R}{C}-RL\nu^2\right)^2+\nu^2\left(\frac{2L}{C}-L^2\nu^2\right)^2}}. \qquad (51)$$

Звідси

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{A(\nu)}{E} = 1, \quad \frac{A(\nu)}{E} \sim \frac{R}{L^2C\nu^3}, \quad \nu\to+\infty, \quad \lim_{\nu\to+\infty}\frac{A(\nu)}{E} = 0.$$

Задачі для самостійної роботи

Вказати метод інтегрування або зниження порядку для наступних рівнянь

1. $y^{IV} = x\sin x$. 2. $3y^{III^2} + 2x^2 = 4$. 3. $y''^2 - y' = 1$.
4. $x = e^{-y^{III}} + y^{III}$. 5. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$. 6. $(1+y^2)yy'' = (3y^2-1)y'^2$.
7. $xy'' + y' - xe^x$. 8. $2\sqrt{y'}\,y^{III} = 3$. 9. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$.
10. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$. 11. $x^2y^2y'' = 3xy^2y' - 4y^3 - x^6$.
12. $\dfrac{y''}{y^{I}} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$. 13. $(1+y'^2)y^{III} - 3y'y''^2 = 0$.
14. $y'' + y'\cos x - y\sin x = 0$.

Знайти розв'язок задачі Коші, дослідивши питання про його існування та единість

15. $y'' = 6x + 2$; $y(0) = y''(0) = 0$. 16. $y''^2 - 2y'' = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.
17. $y'' = 2\sqrt{y'}$; $y(0) = y'(0) = 1$; $y(0) = y'(0) = 0$.
18. $yy'' - y'^2 = y^2\ln y$; $y(0) = y'(0) = 1$.
19. $y'' + 2xy^{I} + 2y = 1$; $y(0) = y'(0) = 0$.

Проінтегрувати дані рівняння

20. $xy^{III} - y'' = 0$. 21. $x(y''y - y'^2) = yy' + xy^2$. 22. $\frac{y''}{y'} + e^{y'}y'' = 1$.

23. $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 3x^2$.

24. Знайти плоскі криві, радіус кривизни яких пропорційний до довжини відрізка нормалі. Розглянути випадки, коли коефіцієнт пропорційності k дорівнює ± 1; ± 2.

25. Знайти форму рівноваги однорідної нерозтяжної нитки під дією її сили ваги (ланцюгова лінія).

26. Скласти диференціальне рівняння сім'ї плоских кривих

$$x^2 + y^2 + C_1x + C_2y + C_3 = 0.$$

27. Скласти лінійне однорідне рівняння, для якого функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = \cos x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Знайти загальні розв'язки рівнянь, використовуючи формулу Абеля

28. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

29. $(\cos x + \sin x)y'' - 2\cos x \cdot y' + (\cos x - \sin x)y = 0$; $y_1 = \cos x$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь за допомогою формули Абеля, якщо кожне рівняння має розв'язок у вигляді многочлена

30. $(x - 1)y'' - (x + 1)y' + 2y = 0$.

31. $x^2(2\ln x - 1)y'' - x(2\ln x + 1)y' + 4y = 0$.

32. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{III} + \frac{4x - 3}{x(2x - 1)}y'' - \frac{2}{x(2x - 1)}y' + \frac{2}{x^2(2x - 1)}y = 0$, застосовуючи узагальнення формули Абеля, якщо відомі два частинні розв'язки: $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$.

33. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, застосовуючи узагальнення формули Абеля.

Знайти загальні розв'язки рівнянь

34. $y^{III} - 13y' - 12y = 0$. 35. $y^{III} - 2y'' - y' + 2y = 0$. 36. $y'' - 2y' = 0$.

37. $y'' - y' + y = 0$. 38. $y^{V} - 10y^{III} + 9y' = 0$. 39. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

40. $y'' + 4y = 0$. 41. $y^{IV} - y = 0$. 42. $y^{IV} + y = 0$.

43. $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$. 44. $y^{III} - 7y'' + 16y' - 12y = 0$.

45. $y^{IV} + 2y^{III} - 8y' + 5y = 0$. 46. $y^{IV} - 2y^{III} + 2y'' - 2y' + y = 0$.

47. $y^{IV} + 2y^{III} + 3y'' + 2y' + y = 0$. 48. $y^{V} + y^{IV} + 2y^{III} + 2y'' + y' + y = 0$.

49. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$. 50. $y'' + 4y = \sin 2x$.

51. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$. 52. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$.

53. $y'' - 2y' + y = 4e^x$. 54. $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x$.

55. $y^{III} - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$. 56. $y'' + y = 4x\cos x$.

57. $y'' - 9y = e^{3x}\cos 3x$. 58. $y^{IV} - y = 5e^x \sin x$.

59. $y^{IV} - 8y' = xe^{2x}$. 60. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$.

61. $y^{III} + y = x^2 - x + 1$. 62. $y^{III} - 7y'' + 6y = x^2$.

Записати вид частинних розв'язків (числові значення коефіцієнтів не знаходити)

63. $y'' + 9y' = 4x + e^{-3x} + x\cos 3x$.
64. $y^{III} - 4y' = 3 + e^{2x} + e^{2x}\sin 2x$.
65. $y^{III} + 5y'' + 4y' = x^2 + xe^{-4x} + x^2e^{-x} + \sin 2x$.
66. $y^{III} + 6y'' + 10y' = xe^{-3x}\cos x + x$.
67. $y^{IV} - 5y^{III} + 6y'' = 2\sin 2x + x^2e^{3x} + e^{-2x}\cos 3x$.
68. $y^{IV} - 4y^{III} + 5y'' = x^2\cos 2x + xe^x\sin 2x + 3e^x\sin x$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь методом варіації довільних сталих

69. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$. 70. $y^{III} + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

71. $y'' - y = \dfrac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$. 72. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

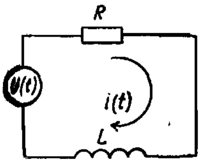


Рис. 38

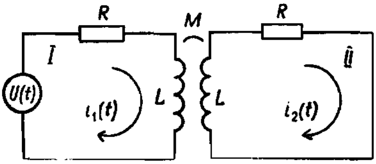


Рис. 39

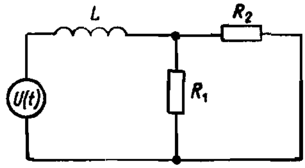


Рис. 40

Розв'язати задачі Коші

73. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$.
74. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$ (Застосувати метод Коші).
75. $y'' + 4y = \sin 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь Ейлера

76. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$. 77. $x^2y'' - xy' + y = 6x\ln x$.

78. $x^3y^{III} - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$. 79. $y^{III} - \dfrac{3}{x}y'' + \dfrac{6}{x^2}y' - \dfrac{6}{x^3}y = \dfrac{x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь Ейлера, Лагранжа, Чебишова

80. $x^3y^{III} + xy' - y = 0$. 81. $x^2y^{III} - 2y' = 0$.
82. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$. 83. $x^3y^{III} - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.
84. $2(2x + 1)^2y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$. 85. $(x + 2)^2y'' - 4(x + 2)y' + 6y = 0$.
86. $x^3y^{III} - xy' - 3y = x^2$. 87. $x^2y^{III} + 8x^2y'' + 12xy' = \ln x$.
88. $(x + 2)^3y^{III} + 9(x + 2)^2y'' + 18(x + 2)y' + 6y = \ln(x + 2)$.
89. $(1 - x^2)y'' - xy' + 2y = 0$, $|x| < 1$. 90. $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, $|x| < 1$.
91. $(x^2 - 1)y'' + xy' - 2y = 0$, $|x| > 1$.
92. $(x^2 - 1)y'' + xy' - 16y = 0$, $|x| > 1$.

За допомогою заміни шуканої функції або незалежної змінної звести дані рівняння до рівнянь зі сталими коефіцієнтами і знайти загальні розв'язки

93. $2xy'' + y' - 2y = 0.$ **94.** $(1 - x^2) y'' - xy' + 4y = 0.$

95. $\frac{1}{2} y'' \sin 2x - y' + 9y \operatorname{th} x \cdot \sin^3 x = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

96. $x^4 y'' + 2x^3 y' - 4y = \frac{1}{x}.$ **97.** $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2) y = 0.$

98. $x^2 y'' - 4xy' + (6 - x^2) y = 0.$ **99.** $(1 + x^2) y'' + 4xy' + 2y = 0.$

100. $xy'' - y' - 4x^3 y = 0.$ **101.** $(1 + x^2) y'' + xy' + y = 0.$

102. Скласти диференціальне рівняння і визначити силу струму $i(t)$ в контурі (рис. 38) в усталеному режимі, якщо: а) $u(t) = E = \text{const}$; б) $u(t) = E \sin(\nu t + \varphi)$.

103. Скласти диференціальне рівняння й визначити силу струму $i_2(t)$ при усталеному режимі в контурі II (рис. 39), якщо коефіцієнт взаємної індукції $M = L$, $u(t) = E \sin \nu t$.

104. Скласти диференціальне рівняння і знайти спад напруги на опорі R_2 (рис. 40) при усталеному режимі, якщо $u(t) = E \sin(\nu t + \varphi)$.

105. Побудувати нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння $y'' + py' + qy = 0, \quad p, \ q = \text{const}.$

Розділ 3

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3.1. Перетворення рівнянь і властивості їхніх розв'язків

3.1. Нехай задано диференціальне рівняння

$$a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0, \tag{1}$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — функції, неперервні на деякому інтервалі $I = (x_0; \ x_1)$, $a(x) \neq 0$.

Довести, що це рівняння можна записати в самоспряженій формі

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) + q(x) y = 0. \tag{2}$$

Р о з в' я з а н н я. Припустимо, що $p(x)$ — неперервно диференційовна на I функція. Рівняння (2) запишемо у вигляді

$$p(x) y'' + p'(x) y' + q(x) y = 0.$$

Як бачимо, коефіцієнт при y' дорівнює похідній коефіцієнта при y''. Помножимо обидві частини рівняння (1) на деяку функцію $\mu(x)$ і підберемо її так, щоб виконувалась умова

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) a(x)) = \mu(x) b(x).$$

За допомогою заміни шуканої функції або незалежної змінної звести дані рівняння до рівнянь зі сталими коефіцієнтами і знайти загальні розв'язки

93. $2xy'' + y' - 2y = 0$. **94.** $(1 - x^2)\, y'' - xy' + 4y = 0$.

95. $\frac{1}{2} y'' \sin 2x - y' + 9y \operatorname{th} x \cdot \sin^3 x = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

96. $x^4 y'' + 2x^3 y' - 4y = \frac{1}{x}$. **97.** $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)\, y = 0$.

98. $x^2 y'' - 4xy' + (6 - x^2)\, y = 0$. **99.** $(1 + x^2)\, y'' + 4xy' + 2y = 0$.

100. $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$. **101.** $(1 + x^2)\, y'' + xy' + y = 0$.

102. Скласти диференціальне рівняння і визначити силу струму $i\,(t)$ в контурі (рис. 38) в усталеному режимі, якщо: а) $u\,(t) = E = \mathrm{const}$; б) $u\,(t) = E \sin(\nu t + \varphi)$.

103. Скласти диференціальне рівняння й визначити силу струму $i_2\,(t)$ при усталеному режимі в контурі II (рис. 39), якщо коефіцієнт взаємної індукції $M = L$, $u\,(t) = E \sin \nu t$.

104. Скласти диференціальне рівняння і знайти спад напруги на опорі R_2 (рис. 40) при усталеному режимі, якщо $u\,(t) = E \sin(\nu t + \varphi)$.

105. Побудувати нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння $y'' + py' + qy = 0$, p, $q = \mathrm{const}$.

Розділ 3

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3.1. Перетворення рівнянь і властивості їхніх розв'язків

3.1. Нехай задано диференціальне рівняння

$$a\,(x)\, y'' + b\,(x)\, y' + c\,(x)\, y = 0, \tag{1}$$

де $a\,(x)$, $b\,(x)$, $c\,(x)$ — функції, неперервні на деякому інтервалі $I = (x_0;\ x_1)$, $a\,(x) \neq 0$.

Довести, що це рівняння можна записати в самоспряженій формі

$$\frac{d}{dx}\left(p\,(x) \frac{dy}{dx}\right) + q\,(x)\, y = 0. \tag{2}$$

Розв'язання. Припустимо, що $p\,(x)$ — неперервно диференційовна на I функція. Рівняння (2) запишемо у вигляді

$$p\,(x)\, y'' + p'\,(x)\, y' + q\,(x)\, y = 0.$$

Як бачимо, коефіцієнт при y' дорівнює похідній коефіцієнта при y''. Помножимо обидві частини рівняння (1) на деяку функцію $\mu\,(x)$ і підберемо її так, щоб виконувалась умова

$$\frac{d}{dx}\,(\mu\,(x)\, a\,(x)) = \mu\,(x)\, b\,(x).$$

Очевидно, що $\mu(x)$ є розв'язком рівняння

$$\mu'(x) = \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)} \mu(x),$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{b(x)}{a(x)} - \frac{d}{dx} \ln a(x)\right) dx.$$

Отже, можна вибрати

$$\mu(x) = \frac{1}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}.$$

Після множення на $\mu(x)$ рівняння (1) матиме вигляд (2):

$$e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} y'' + \frac{b(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} y' + \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} y = 0,$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \frac{dy}{dx}\right) + \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} y = 0,$$

де

$$p(x) = e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}, \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}.$$

3.2. Нехай в рівнянні $(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ функція $p(x) \neq 0$, $\forall x \in I = (a; b)$. Довести, що заміною незалежної змінної рівняння можна звести до рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)y = h(t). \tag{3}$$

Розв'язання. Виконаємо заміну $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — функція, обернена до функції

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{p(s)}, \quad x_0, \quad x \in I.$$

Оскільки $p(x) \neq 0$, то функція $t = t(x)$ має похідну і є строго монотонною. Тому вона має обернену функцію $x = \varphi(t)$, визначену на деякому інтервалі. Маємо:

$$p(x)y' = p(x)\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = p(x)\frac{dy}{dt}\frac{1}{p(x)} = \frac{dy}{dt},$$

$$(p(x)y')' = \left(\frac{dy}{dt}\right)' = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{p(x)}.$$

Підставивши ці значення в задане рівняння, дістанемо

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(x)q(x)y = p(x)f(x),$$

або

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(\varphi(t))\, q(\varphi(t))\, y = p(\varphi(t))\, f(\varphi(t)),$$

де

$$Q(t) \equiv p(\varphi(t))\, q(\varphi(t)), \quad h(t) \equiv p(\varphi(t))\, f(\varphi(t)).$$

3.3. Проінтегрувати рівняння $2xy'' + y' - 2y = 0$, записавши його в самоспряженому вигляді.

Розв'язання. Розділимо обидві частини рівняння на $2\sqrt{|x|}$ і запишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{|x|}\,\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, y = 0.$$

Виконавши заміну незалежної змінної $t = 2\sqrt{|x|}$, дістанемо рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0,$$

звідки

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Отже,

$$y = C_1 e^{2\sqrt{|x|}} + C_2 e^{-2\sqrt{|x|}}.$$

3.4. Довести, що коли $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — розв'язки рівняння $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, $p(x) \neq 0$, то існує така стала C, що

$$\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = \frac{C}{px}.$$

Розв'язання. За формулою Ліувілля — Остроградського маємо

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{p'(\tau)}{p(\tau)} d\tau} = W(x_0)\, e^{-\ln p(x) + \ln p(x_0)} = \frac{W(x_0)\, p(x_0)}{p(x)},$$

тобто

$$\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = \frac{C}{p(x)},$$

де стала $C = W(x_0)\, p(x_0)$ залежить від розв'язків $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Зокрема, якщо $C \neq 0$, то розв'язки $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — лінійно незалежні.

3.5. Довести, що два розв'язки $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ рівняння $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ ($p(x) \neq 0$, $p(x)$ і $q(x)$ — неперервні функції), які мають спільну точку екстремуму $x = x_0$,— лінійно залежні.

Розв'язання. З попередньої задачі випливає, що

$$\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = \frac{p(x_0)}{p(x)}\left(\varphi(x_0)\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)\psi(x_0)\right).$$

Якщо $x = x_0$ — точка екстремуму обох розв'язків $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то $\varphi'(x_0) = \psi'(x_0) = 0$. Тому вронскіан $W(x_0) = \varphi(x_0)\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)\psi(x_0) = 0$, тобто розв'язки $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — лінійно залежні.

3.6. Дано два рівняння

$$(p(x)u')' + q(x)u = f(x),$$
$$(p(x)v')' + q(x)v = g(x).$$

Довести *формулу Гріна:*

$$(p(t)(u(t)v'(t) - u'(t)v(t)))_{t=x_0}^{t=x} = \int_{x_0}^{x} (g(\tau)u(\tau) - f(\tau)v(\tau))\,d\tau.$$

Розв'язання. Якщо перше рівняння помножити на $v(x)$, а друге — на $u(x)$ і від першого рівняння відняти друге, то дістанемо

$$(p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x)))' = g(x)u(x) - f(x)v(x), \tag{4}$$

оскільки $(p(x)(uv' - vu'))' = u(p(x)v')' - v(p(x)u')'$.

Співвідношення (4) називається *тотожністю Лагранжа.* Інтегруючи його в межах від x_0 до x, дістанемо формулу Гріна.

3.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Розв'язки лінійного диференціального рівняння вище першого порядку зі змінними коефіцієнтами не завжди виражаються через елементарні функції, інтегрування такого рівняння досить рідко зводиться до квадратур. На практиці широко використовується метод зображення шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду.

Розглянемо рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Припустимо, що коефіцієнти $p(x)$ і $q(x)$ рівняння (1) є *аналітичними функціями* на інтервалі $|x - x_0| < a$, тобто

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \tag{2}$$
$$|x - x_0| < a.$$

Теорема. *Якщо функції $p(x)$ і $q(x)$ — аналітичні при $|x - x_0| < a$, то будь-який розв'язок $y = y(x)$ рівняння (1) є аналітичною функцією на інтервалі $|x - x_0| < a$, тобто*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

причому степеневий ряд збігається на інтервалі $|x - x_0| < a$.

Сформульована теорема дає змогу побудувати розв'язки рівняння (1) у вигляді степеневих рядів. Поклавши для спрощення викладок $x_0 = 0$, розв'язок рівняння

(1) шукатимемо у вигляді степеневого ряду за степенями x:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{3}$$

з невизначеними коефіцієнтами.

Підставивши (3) в рівняння (1), дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при степенях x^0, x^1, x^2, x^3, ..., дістанемо рекурентну систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів c_0, c_1, c_2, ...:

$$\begin{gathered} q_0 c_0 + p_0 c_1 + 1 \cdot 2 c_2 = 0, \\ q_1 c_0 + (q_0 + p_1) c_1 + 2 p_0 c_2 + 2 \cdot 3 c_0 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} [q_{k-i} c_i + (i+1) p_{k-i} c_{i+1}] + (k+1)(k+2) c_{k+2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{4}$$

Коефіцієнти c_0 і c_1 можна задавати довільно, але хоча б один з них повинен бути відмінним від нуля, інакше дістанемо розв'язок $y \equiv 0$. Зафіксувавши c_0 і c_1, шукаємо розв'язок рівняння (1), який задовольняє початковим умовам $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$. З першого рівняння знаходимо c_2, з другого — c_3 і т. д.

Якщо в рівнянні (1) функції $p(x)$ і $q(x)$ — раціональні, тобто

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad q(x) = \frac{q_1(x)}{q_0(x)},$$

де $p_0(x)$, $p_1(x)$, $q_0(x)$, $q_1(x)$ — многочлени, то точки, в яких $p_0(x) = 0$ або $q_0(x) = 0$, називаються *особливими точками* рівняння (1).

Розглянемо рівняння другого порядку

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0, \tag{5}$$

в якому $p(x)$ і $q(x)$ — аналітичні функції на проміжку $|x| < a$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k.$$

Якщо точка $x = 0$ є особливою для рівняння (5), то вона називається *регулярною особливою точкою* або *особливою точкою першого роду*.

Точка $x = 0$ не є особливою лише тоді, коли

$$p_0 = q_0 = q_1 = 0.$$

В околі особливої точки $x = x_0$ розв'язки рівняння (1) у вигляді степеневого ряду можуть не існувати. В цьому випадку розв'язки шукають у вигляді узагальненого степеневого ряду:

$$y = (x - x_0)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{6}$$

де λ, c_0, c_1, c_2, ... — невизначені коефіцієнти; $c_0 \neq 0$.

Розглянемо рівняння (5) (при $x > 0$). Підставивши в (5) ряд (6) (при $x_0 = 0$), дістанемо

$$(\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0)c_0+((\lambda(\lambda+1)+p_0(\lambda+1)+q_0)c_1+$$
$$+(\lambda p_0+q_0)c_0)x+\cdots+(((\lambda+n)(\lambda+n-1)+\cdots+p_0(\lambda+n)+q_0)c_k+$$
$$+\cdots+(\lambda p_0+q_0)c_0)x^k+\cdots=0.$$

Прирівнявши коефіцієнти при степенях x до нуля, дістанемо рекурентну систему рівнянь:

$$\begin{gathered} f_0(\lambda)c_0=0,\\ f_0(\lambda+1)c_1+f_1(\lambda)c_0=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_0(\lambda+k)c_k+f_1(\lambda+k-1)c_{k-1}+f_2(\lambda+k-2)c_{k-2}+\cdots+f_k(\lambda)c_0=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{7}$$

де

$$f_0(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0,\quad f_m(\lambda)=\lambda p_m+q_m,\quad m\geqslant 1. \tag{8}$$

Оскільки $c_0 \neq 0$, то λ задовольняє рівнянню

$$\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0=0, \tag{9}$$

яке називається *визначальним рівнянням.*

Нехай λ_1, λ_2 — корені цього рівняння. Якщо різниця $\lambda_1 - \lambda_2$ не є цілим числом, то $f_0(\lambda_1+k)\neq 0$, $f_0(\lambda_2+k)\neq 0$ при жодному цілому $k > 0$, а тому цим методом можна побудувати два лінійно незалежних розв'язки рівняння (1):

$$y_1 = x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}x^k,\quad y_2 = x^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}x^k.$$

Якщо ж різниця $\lambda_1-\lambda_2$ є цілим числом, то можна побудувати один розв'язок $y_1(x)$ у вигляді узагальненого степеневого ряду. Знаючи цей розв'язок, за допомогою формули Абеля можна знайти другий, лінійно незалежний з $y_1(x)$ розв'язок

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx.$$

З цієї ж формули випливає, що розв'язок $y_2(x)$ можна шукати у вигляді

$$y_2(x)=Ay_1(x)\ln x+x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$$

(число A може дорівнювати нулю).

3.7. Розв'язати рівняння $y''+xy=0$.

Р о з в' я з а н н я. Коефіцієнти $p(x)=0$, $q(x)=x$ є аналітичними функціями при всіх x.

Розв'язки шукаємо у вигляді ряду

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k.$$

Підставляємо цей ряд у дане рівняння:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + x\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях x у лівій частині, дістанемо рекурентну систему рівнянь для визначення c_k:

$$2\cdot 1\cdot c_2 = 0, \quad 3\cdot 2\cdot c_3 + c_0 = 0,$$

$$4\cdot 3\cdot c_4 + c_1 = 0, \ \dots, \ k(k-1)c_k + c_{k-3} = 0, \ \dots$$

звідки

$$c_2 = 0, \quad c_{k+3} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+3)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Покладемо $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Тоді відмінними від нуля будуть лише коефіцієнти c_{3m}. Маємо

$$c_{3(m+1)} = -\frac{c_{3m}}{(3m+2)(3m+3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

звідки

$$c_{3m} = \frac{(-1)^m}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3m-1)3m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Побудовано розв'язок рівняння

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3m-1)3m}.$$

Другий розв'язок, лінійно незалежний з $y_1(x)$, дістанемо, поклавши $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Тоді відмінними від нуля будуть лише коефіцієнти c_{3m+1}:

$$c_{3m+4} = -\frac{c_{3m+1}}{(3m+3)(3m+4)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Звідси

$$c_1 = 1, \ c_{3m+1} = \frac{(-1)^m}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\dots 3m(3m+1)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тому

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\dots 3m(3m+1)}$$

і загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3m-1)3m}\right) +$$

$$+ C_2\left(x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\dots 3m(3m+1)}\right),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Отже, будь-який розв'язок даного рівняння є аналітичною функцією при всіх x.

3.8. Розв'язати рівняння $y'' + xy' + y = 0$.

Розв'язання. Коефіцієнти $p(x) = x$ і $q(x) = 1$ є аналітичними функціями при всіх x. Розв'язки шукаємо у вигляді ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Підставивши цей ряд в рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$$

звідки

$$(k+1)(k+2) c_{k+2} + (k+1) c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Поклавши $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, знайдемо

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)}, c_{2m+1} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Тому

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)} + \cdots = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Розв'язок $y_2(x)$, лінійно незалежний з $y_1(x)$, знайдемо, поклавши $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Маємо

$$c_{2m} = 0, \; c_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Отже,

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m+1)}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

3.9. Довести, що диференціальне рівняння Вебера $y'' - \left(a + \frac{x^2}{4}\right) y = 0$ має лінійно незалежні розв'язки виду

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

де $c_0 = c_1 = 1,\ c_2 = c_3 = a$

і $$c_{k+2} = ac_k + \frac{1}{4} k(k-1) c_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Р о з в' я з а н н я. Підставивши $y_1(x)$ в дане рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2k(2k-1) c_{2k} \frac{x^{2k-2}}{(2k)!} - \left(a + \frac{x^2}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 0,$$

звідки

$$\frac{(2k+2)(2k+1)}{(2k+2)!} c_{2k+2} = \frac{a}{(2k)!} c_{2k} + \frac{1}{4(2(k-1))!} c_{2k-2},$$

або $c_{2k+2} = ac_{2k} + \frac{1}{4}(2k-1) 2kc_{2k-2}$.

Отже, якщо коефіцієнти c_{2k} задовольняють заданому в умові співвідношенню, то $y_1(x)$ є розв'язком рівняння Вебера.

Підставивши $y_2(x)$ у рівняння, знайдемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) 2kc_{2k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} - \left(a + \frac{x^2}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0,$$

звідки

$$\frac{(2k+3)(2k+2)}{(2k+3)!} c_{2k+3} = \frac{a}{(2k+1)!} c_{2k+1} + \frac{1}{4(2k-1)!} c_{2k-1},$$

або

$$c_{2k+3} = ac_{2k+1} + \frac{1}{4}(2k+1) 2kc_{2k-1}.$$

Отже, якщо коефіцієнти c_{2k+1} задовольняють вказаному в задачі співвідношенню, то $y_2(x)$ також є розв'язком рівняння Вебера. Очевидно $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні, оскільки розвинення $y_1(x)$ в степеневий ряд починається з 1, а $y_2(x)$ — з x.

3.10. Розв'язати рівняння $y'' - 2xy' + 2my = 0$, де m — ціле невід'ємне число.

Р о з в' я з а н н я. Коефіцієнти $-2x$ і $2m$ є аналітичними функціями при всіх x. Розв'язки шукаємо у вигляді степеневого ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Підставивши цей ряд в дане рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + 2m \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях x в лівій частині, знайдемо

$$c_{k+2} = \frac{2(m-k)}{(k+1)(k+2)} c_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Нехай $c_1 = 0$. Тоді всі коефіцієнти c_k з непарними номерами дорівнюватимуть нулю, c_{2k+1} 0, а коефіцієнти з парними номерами є:

$$c_2 = \frac{2m}{1 \cdot 2}, \; c_4 = \frac{2(m-2)}{3 \cdot 4} c_2, \; \ldots, \; c_{2n} = \frac{2(m-2n+2)}{(2n-1)2n} c_{2n-2}, \; \ldots$$

Перемноживши ці рівності, дістанемо

$$c_{2n} = \frac{2^n m(m-2)\ldots(m-2n+2)}{(2n)!} c_0.$$

Отже,

$$y_1(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k m(m-2)\ldots(m-2k+2)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Зазначимо, що коли m — парне число ($m = 2p$), то всі коефіцієнти з номерами $2k > 2p$ перетворюються в нуль і розв'язок $y_1(x)$ справді є многочленом:

$$y_1(x) = c_0 \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{2k} p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Цей многочлен відрізняється від многочлена Ерміта лише сталим множником

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x}) = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4} + \cdots$$

Останній член в цьому співвідношенні при $m = 2p$ дорівнює $(-1)^p \frac{(2p)!}{p!}$. Тому, якщо у формулі для $y_1(x)$ вважати, що c_0 дорівнює цьому числу, то $y_1(x) = H_{2p}(x)$. Щоб знайти другий розв'язок даного рівняння, лінійно незалежний з $y_1(x)$, покладемо, що $c_0 = 0$. Тоді всі коефіцієнти з парними номерами перетворюються в нуль: $c_{2n} = 0$. Для коефіцієнтів з непарними номерами дістанемо рекурентну систему рівнянь:

$$c_{2n+1} = \frac{2(m-2n+1)}{2n(2n+1)} c_{2n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Звідси

$$c_3 = \frac{2(m-1)}{2\cdot 3}c_1,\ c_5 = \frac{2^2(m-1)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}c_1,\ \ldots,$$

$$c_{2n+1} = \frac{2^n(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)}{(2n+1)!}c_1,\ \ldots,$$

$$y_2(x) = c_1x + c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = y_1(x) + y_2(x)$, де у виразах для $y_1(x)$ і $y_2(x)$ сталі c_0 і c_1 набувають будь-яких значень. Якщо m — непарне число, $m = 2p+1$, то $y_2(x)$ стає многочленом:

$$y_2(x) = c_1\left(x + \frac{2^2\cdot p}{3!}x^3 + \frac{2^4p(p-1)}{5!}x^5 + \cdots + \frac{2^{2p}p(p-1)\ldots 2\cdot 1}{(2p+1)!}x^{2p+1}\right).$$

Якщо покласти $c_1 = (-1)^p\frac{2(2p+1)!}{p!}$, то дістанемо

$$y_2(x) = H_{2p+1}(x).$$

3.11. Знайти розв'язок рівняння $xy'' + y = 0$, для якого $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Точка $x = 0$ є регулярною особливою точкою. Складемо визначальне рівняння $\lambda(\lambda - 1) = 0$, звідки $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Отже, дане рівняння має розв'язок у вигляді степеневого ряду. Шуканий розв'язок має вигляд

$$y = \sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k,$$

причому $c_1 = 1$.

Підставивши цей ряд у рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k = 0.$$

Звідси

$$2\cdot 1\cdot c_2 + c_1 = 0,\ 3\cdot 2\cdot c_3 + c_2 = 0,\ \ldots,\ (k+1)kc_{k+1} + c_k = 0,\ \ldots,$$

або, враховуючи, що $c_1 = 1$, знаходимо

$$c_2 = -\frac{1}{1\cdot 2},\ c_3 = \frac{1}{2!\,3!},\ \ldots,\ c_{k+1} = \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!},\ \ldots$$

Тому шуканий розв'язок має вигляд

$$y=\left(x-\frac{x^2}{1!\,2!}+\frac{x^3}{2!\,3!}-\ \cdots\ +\frac{(-1)^{k-1}x^k}{(k-1)!\,k!}+\ \cdots\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,k!}x^k.$$

3.12. Розв'язати рівняння $2x^2y''+(3x-2x^2)y'-(x+1)y=0$.

Р о з в' я з а н н я. Точка $x=0$ є регулярною особливою точкою даного рівняння. Складаємо визначальне рівняння

$$2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1=0,$$

звідки

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_2=-1.$$

Розв'язок рівняння, який відповідає кореню $\lambda=\lambda_1$, шукаємо у вигляді

$$y_1=x^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,\quad c_0\neq 0,\quad x>0.$$

Тоді

$$y_1'=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)c_kx^{k-\frac{1}{2}},\ y_1''=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)c_kx^{k-\frac{3}{2}}.$$

Підставляємо $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ у рівняння:

$$2x^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(k^2-\frac{1}{4}\right)c_kx^{k-\frac{3}{2}}+(3x-2x^2)\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)c_kx^{k-\frac{1}{2}}-$$

$$-(x+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\frac{1}{2}}=0,$$

або

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(2k+3)c_kx^{k+\frac{1}{2}}-\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)c_kx^{k+\frac{3}{2}}=0.$$

Звідси, скоротивши на $x^{\frac{1}{2}}$, дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(2k+3)c_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)c_kx^{k+1}=0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях x, дістанемо рекурентну систему для визначення c_k:

$$k(2k+3)c_k=2kc_{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Поклавши $c_0 = 1$, знаходимо

$$c_k = \frac{2^k}{5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (2k+3)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отже,

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (2k+3)} \right).$$

Розв'язок, який відповідає кореню $\lambda = \lambda_2$, шукаємо у вигляді

$$y_2(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Підставивши цей вираз у рівняння і прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях x, дістанемо

$$2(k-1)(k-2)c_k + 3(k-1)c_k - 2(k-2)c_{k-1} - c_{k-1} - c_k = 0,$$

або

$$k(2k-3)c_k = (2k-3)c_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поклавши $c_0 = 1$, знайдемо

$$c_1 = 1, \; c_2 = \frac{1}{2!}, \; c_3 = \frac{1}{3!}, \; \ldots, \; c_k = \frac{1}{k!}, \; \ldots,$$

тобто

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots\right) = \frac{e^x}{x}.$$

Загальний розв'язок рівняння запишемо у вигляді
$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

3.3. Гіпергеометричне рівняння

Гіпергеометричним рівнянням або *рівнянням Гауса* називається рівняння

$$x(x-1)y'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)x)y' + \alpha\beta y = 0,$$

де α, β, γ — дійсні числа.

Точки $x = 0$, $x = 1$ є особливими точками рівняння. В околі точки $x = 0$ рівняння можна записати у вигляді

$$y'' + \frac{(\gamma - (\alpha + \beta + 1)x) \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k}{x} y' - \frac{\alpha\beta \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+1}}{x^2} y = 0.$$

Визначальне рівняння, яке відповідає точці $x = 0$, має вигляд $\lambda(\lambda - 1) + \gamma\lambda = 0$. Його корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 - \gamma$. Якщо γ не є цілим недодатним числом, то можна знайти два лінійно незалежних розв'язки гіпергеометричного рівняння у вигляді узагальнених степеневих рядів, які збігаються при $|x| < 1$.

3.13. Знайти розв'язок гіпергеометричного рівняння

$$x(x-1)y'' + (-\gamma + (\alpha+\beta+1)x)y' + \alpha\beta y = 0$$

при $|x| < 1$ у випадку, коли γ не є цілим недодатним числом.

Розв'язання. Корені визначального рівняння $\lambda_1 = 0$, $\alpha_2 = 1 - \gamma$. Кореню $\lambda_1 = 0$ відповідає розв'язок

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Підставивши в рівняння, маємо

$$x(x-1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + (-\gamma + (\alpha+\beta+1)x) \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях x до нуля, дістаємо рівняння для визначення c_k:

$$k(k-1)c_k - (k+1)kc_{k+1} - \gamma(k+1)c_{k+1} +$$
$$+ (\alpha+\beta+1)kc_k + \alpha\beta c_k = 0,$$
$$c_{k+1} = \frac{k(k-1) + k(\alpha+\beta+1) + \alpha\beta}{(k+1)(k+\gamma)} c_k = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)} c_k,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Поклавши $c_0 = 1$, послідовно знаходимо

$$c_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)},$$
$$c_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}, \ldots$$
$$\ldots, c_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}, \ldots.$$

Шуканий розв'язок $y_1(x)$ має вигляд

$$y_1(x) = 1 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} x^k.$$

Ряд у правій частині цієї рівності називається *гіпергеометричним*. Він збігається при $|x| < 1$, а його суму називають *гіпергеометричною* *функцією* і позначають символом $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, тобто

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} x^k.$$

Другий розв'язок даного рівняння, лінійно незалежний з $y_1(x)$, можна знайти у вигляді

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

аналогічно тому, як це було зроблено для $y_1(x)$. Проте можна зробити й так. У заданому рівнянні замінимо шукану функцію за формулою $y = x^{1-\gamma}z$. Тоді

$$y' = x^{1-\gamma}z' + (1-\gamma)x^{-\gamma}z,$$

$$y'' = x^{1-\gamma}z'' + 2(1-\gamma)x^{-\gamma}z' - \gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1}z.$$

Підставивши в рівняння і скоротивши на $x^{1-\gamma}$, дістанемо

$$x(x-1)z'' + (-(2-\gamma) + (1 + (\alpha+1-\gamma) + (\beta+1-\gamma))x)z' +$$
$$+ (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)z = 0.$$

Це гіпергеометричне рівняння, параметрами якого є числа $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$, $2 - \gamma$. Якщо $2 - \gamma$ також не є цілим недодатним числом, тобто γ не є цілим числом, то частинний розв'язок цього рівняння існує у вигляді гіпергеометричного ряду $z = F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma)$.

Отже,

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma)$$

і всі розв'язки гіпергеометричного рівняння при $|x| < 1$ виражаються формулою

$$y = C_1F(\alpha, \beta, \gamma, x) + C_2x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гіпергеометрична функція, $\gamma \notin \mathbf{Z}$.

Зазначимо, що коли вираз $x^{1-\gamma}$ не визначений при $x < 0$, то у формулі для загального розв'язку слід вважати $0 < x < 1$.

3.14. Знайти два лінійно незалежних розв'язки гіпергеометричного рівняння в околі точки $x = 1$, якщо $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ не є цілим недодатним числом.

Р о з в' я з а н н я. Заміна незалежної змінної $x = 1 - t$ переводить точку $x = 1$ у точку $t = 0$, а гіпергеометричне рівняння —

в рівняння

$$-t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}-(-\gamma+(\alpha+\beta+1)(1-t))\frac{dy}{dt}+\alpha\beta y=0,$$

яке можна записати так:

$$t(t-1)y''+(-(\alpha+\beta+1-\gamma)+(\alpha+\beta+1)t)y'+\alpha\beta y=0.$$

Останнє рівняння також є гіпергеометричним з параметрами α, β і $\alpha+\beta+1-\gamma$. За умовою $\alpha+\beta+1-\gamma$ не є цілим недодатним числом, тому лінійно незалежними розв'язками перетвореного рівняння в околі особливої точки $t=0$ є такі функції (див. розв'язок попередньої задачі):

$$y_1(t)=F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ t),$$

$$y_2(t)=t^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma+1-\alpha-\beta,\ t).$$

Отже, лінійно незалежні розв'язки даного гіпергеометричного рівняння в околі точки $x=1$ мають вигляд

$$y_1(x)=F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x),$$

$$y_2(x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma+1-\alpha-\beta,\ 1-x).$$

3.15. Гіпергеометрична функція залежить від трьох параметрів α, β і γ. Довести, що при $|x|<1$:

а) $F(1,\ \beta,\ \beta,\ x)=\dfrac{1}{1-x}$; б) $\ln(1+x)=xF(1,\ 1,\ 2,\ -x)$;

в) $F(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ x)=(1-x)^{-\beta}$; г) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2xF\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2},\ x^2\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо:

а) $F(1,\ \beta,\ \beta,\ x)=$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\ \ldots\ k\beta(\beta+1)(\beta+2)\ \ldots\ (\beta+k-1)}{k!\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ \ldots\ (\beta+k-1)}x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x};$$

б) $$xF(1,\ 1,\ 2,\ -x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!\,k!\,(-1)^k}{k!\,(k+1)!}x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=$$

$$=\ln(1+x);$$

в) $$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ x)=1+\frac{\beta}{1}x+\frac{\beta(\beta+1)}{1\cdot2}x^2+\cdots+$$

$$+\frac{\beta(\beta+1)\ \ldots\ (\beta+k-1)}{k!}x^k+\cdots=(1-x)^{-\beta};$$

г) $2xF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ x^2\right) =$

$$= 2x\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)k!}{k!\,\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{3}{2}+k-1\right)}\,x^{2k}\right) =$$

$$= 2x\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}\,x^{2k}\right) = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{x^{2k}}{2k+1} + \cdots\right).$$

При $|x| < 1$ дістанемо

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \cdots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^k}{k} - \cdots\right) =$$

$$= 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right).$$

Отже, справді

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2xF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ x^2\right).$$

3.16. Довести, що при будь-якому натуральному k справедлива рівність

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{\gamma+k-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\frac{d^ky}{dx^k}\right) = (-1)^k\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\times$$

$$\times\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)\,x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}y,$$

де

$$y = F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x).$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо гіпергеометричне рівняння в самоспряженому вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\frac{dy}{dx}\right) + \alpha\beta x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}y = 0. \qquad (1)$$

Диференціюючи n разів функцію $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, дістанемо

$$y^{(n)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\times$$

$$\times F(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ x),$$

тобто похідна n-го порядку гіпергеометричної функції з параметрами α, β, γ лише сталим множником відрізняється від гіпергеометричної функції з параметрами $\alpha+n$, $\beta+n$, $\gamma+n$. Отже, функція $F^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ задовольняє рівнянню (1), якщо в ньому замінити α, β, γ відповідно на $\alpha+n$, $\beta+n$, $\gamma+n$, тобто

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma+n}(x-1)^{\alpha+\beta-1-\gamma+n}\frac{dF^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}\right)+(\alpha+n)(\beta+n)\times$$

$$\times x^{\gamma-1+n}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}F^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma, x)=0.$$

Диференціюючи цю тотожність n разів, дістанемо

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{\gamma+n}(x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+n}\frac{dF^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}\right)=$$

$$-(\alpha+n)(\beta+n)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\gamma-1+n}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}F^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma, x)\right).$$

Останню тотожність запишемо при $n=0, 1, 2, \ldots, k-1$ і почленно перемножимо. Після скорочення на однакові множники дістанемо шукану тотожність.

3.17. *Многочленами Лежандра* називаються функції виду

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

Кожна з цих функцій є розв'язком рівняння Лежандра $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$, де $n\in\mathbf{N}$. Показати, що многочлени Лежандра можна дістати з гіпергеометричної функції при відповідних значеннях її параметрів.

Р о з в' я з а н н я. Покажемо, що рівняння Лежандра можна звести до гіпергеометричного рівняння. Нехай $x=1-2t$. Тоді

$$t=\frac{1-x}{2}, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Підставивши в рівняння Лежандра, дістанемо

$$\frac{1}{4}\left(1-(1-2t)^2\right)\frac{d^2y}{dt^2}+(1-2t)\frac{dy}{dt}+n(n+1)y=0,$$

або

$$t(t-1)\frac{d^2y}{dt^2}+(-1+2t)\frac{dy}{dt}-n(n+1)y=0,$$

тобто гіпергеометричне рівняння з параметрами $\alpha=n+1$, $\beta=-n$, $\gamma=1$. Одним з розв'язків цього рівняння є гіпергеометрична функція $y_1=F(n+1, -n, 1, t)$.

Отже, одним з розв'язків рівняння Лежандра є функція $y_1(x) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right)$. Покажемо, що $y_1(x) = p_n(x)$.

Справді, $F(n+1, -n, 1, t)$ є многочленом степеня n від t з коефіцієнтом при t^n, який дорівнює

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n(-n)(-n+1)\ldots(-1)}{n!\,2\ldots n} = (-1)^n\frac{2n!}{(n!)^2}.$$

Поклавши в тотожності попередньої задачі $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$, дістанемо

$$F^{(n)}(n+1, -n, 1, t) = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!}.$$

Після скорочення дістанемо

$$F(n+1, -n, 1, t) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n(t-1)^n\right),$$

або

$$F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right),$$

тобто многочлени Лежандра $p_n(x)$ — це окремий випадок гіпергеометричної функції при $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$, якщо замінити x на $\frac{1-x}{2}$.

Так, при $n = 1, 2, 3, 4$ маємо

$$p_1(x) = F\left(2, -1, 1, \frac{1-x}{2}\right) = x,$$

$$p_2(x) = F\left(3, -2, 1, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$p_3(x) = F\left(4, -3, 1, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$p_4(x) = F\left(5, -4, 1, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

3.18. Довести, що многочлени Лежандра ортогональні на проміжку $[-1; 1]$, тобто

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\,p_n(x)\,dx = 0 \quad \text{при } m \neq n.$$

Р о з в' я з а н н я. Многочлени Лежандра $p_m(x)$ і $p_n(x)$ задовольняють тотожності

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_m(x)}{dx}\right)+m(m+1)p_m(x)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\right)+n(n+1)p_n(x)=0.$$

Першу рівність помножимо на $p_n(x)$, другу — на $p_m(x)$. Результати почленно віднімемо й проінтегруємо по відрізку $[-1;\ 1]$. Тоді

$$(m(m+1)-n(n+1))\int_{-1}^{1}p_m(x)\,p_n(x)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\Bigg(p_m(x)\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\right)-$$

$$-p_n(x)\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_m(x)}{dx}\right)\Bigg)dx.$$

Застосовуючи до правої частини цієї рівності інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int_{-1}^{1}p_m(x)\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\right)dx=(1-x^2)\,p_m(x)\frac{dp_n(x)}{dx}\Bigg|_{x=-1}^{x=1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dp_m(x)}{dx}\frac{dp_n(x)}{dx}\,dx=-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dp_m(x)}{dx}\frac{dp_n(x)}{dx}\,dx,$$

$$\int_{-1}^{1}p_n(x)\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_m(x)}{dx}\right)dx=(1-x^2)\,p_n(x)\frac{dp_m(x)}{dx}\Bigg|_{x=-1}^{x=1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\frac{dp_m(x)}{dx}\,dx=$$

$$=-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\frac{dp_m(x)}{dx}\,dx.$$

Отже,

$$(m(m+1)-n(n+1))\int_{-1}^{1}p_m(x)\,p_n(x)\,dx=0,$$

або $\int_{-1}^{1}p_m(x)\,p_n(x)\,dx=0$, оскільки $m\neq n$.

3.19. Довести, що для многочленів Лежандра $p_n(x)$ виконується тотожність $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$.

Р о з в' я з а н н я. Многочлен $p_n(x)$ запишемо у вигляді

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x-1)^n (x+1)^n) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}((x-1)^n) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}((x+1)^n) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(x+1)^k =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k.$$

Звідси

$$p_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (-1)^{n-k} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k} \cdot (-1)^k \left(\frac{x-1}{2}\right)^k =$$

$$= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} (C_n^{n-j})^2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-(n-j)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-j} =$$

$$= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^j \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-j} = (-1)^n p_n(x).$$

3.20. Знайти розв'язок рівняння Лежандра $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$, який задовольняє умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

Р о з в' я з а н н я. Одним з розв'язків цього рівняння є многочлен Лежандра $p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ (див. розв'язок задачі 3.17), тому функція $Cp_2(x)$ при будь-якому C є розв'язком рівняння, але жодний з цих розв'язків не задовольняє заданим початковим умовам. Оскільки точка $x = 0$ є звичайною для рівняння Лежандра, то розв'язок шукаємо у вигляді степеневого ряду по x. Ураховуючи початкові умови, покладемо

$$y = -2x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k.$$

Підставивши цей вираз в дане рівняння, дістанемо

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\left(-2 + \sum_{k=2}^{\infty} kc_k x^{k-1}\right) +$$

$$+ 6\left(-2x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k\right) = 0,$$

звідки

$$c_1 = -2,\ c_2 = 0,\ (k+2)(k+1)c_{k+2} = (k+3)(k-2)c_k,$$
$$k = 1,\ 2,\ \ldots$$

З цих рівнянь знаходимо

$$c_{2m} = 0,\ c_{2m+1} = \frac{(2m+2)(2m-3)}{(2m+1)\,2m}c_{2m-1},\quad m = 1,\ 2,\ \ldots,$$

тобто

$$c_{2m+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2m-1} - \frac{1}{2m+1}\right),\quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Отже, шуканий розв'язок виражається формулою

$$y = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2m-1} - \frac{1}{2m+1}\right)x^{2m+1}.$$

Можна показати, що

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(3x^2-1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m-1}}{m} =$$
$$= \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x.$$

Розв'язок

$$y = Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x$$

називається *функцією Лежандра другого роду.*

3.21. Розв'язати рівняння $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

Розв'язання. Це окремий випадок гіпергеометричного рівняння: $\alpha = \beta = -1$, $\gamma = 0$. Корені визначаючого рівняння: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1-\gamma = 1$. Один розв'язок (з точністю до сталого множника) даного рівняння можна знайти у вигляді степеневого ряду.

Неважко бачити, що $y_1(x) = x$ є цим розв'язком. Оскільки $\lambda_2 - \lambda_1$ — ціле число, то лінійно незалежний з $y_1(x)$ розв'язок у вигляді степеневого ряду може і не існувати. Щоб знайти $y_2(x)$, скористаємося формулою Абеля

$$y_2(x) = y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx.$$

При цьому $y_1(x) = x$, $p(x) = \frac{1}{1-x}$, тому

$$y_2(x) = x\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{1-x}}}{x^2}dx = x\left(-\frac{1}{x} - \ln|x|\right) = -1 - x\ln|x|.$$

Отже,

$$y = C_1 x + C_2 (1 + x \ln |x|),$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

3.22. Розв'язати рівняння $xy'' + (\gamma - x) y' - \alpha y = 0$.

Розв'язання. Це вироджене гіпергеометричне рівняння, яке на скінченному проміжку має одну особливу точку $x = 0$. Розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді узагальненого степеневого ряду:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\lambda}, \quad c_0 \neq 0.$$

Підставивши цей ряд в рівняння і прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях x, дістанемо рівняння для визначення c_k:

$$(\lambda(\lambda - 1) + \gamma\lambda) c_0 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{\alpha + \lambda + k}{(\gamma + \lambda + k)(1 + \lambda + k)} c_k,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Оскільки $c_0 \neq 0$, то $\lambda(\lambda - 1 + \gamma) = 0$, тобто $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 - \gamma$.

При $\lambda = 0$, поклавши $c_0 = 1$, дістанемо

$$c_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \; c_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!\gamma(\gamma + 1)}, \; \ldots, \; c_k = \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + k - 1)}{k!\gamma(\gamma + 1) \ldots (\gamma + k - 1)}, \; \ldots.$$

Тому

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!\gamma(\gamma + 1)} x^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + k - 1)}{k!\gamma(\gamma + 1) \ldots (\gamma + k - 1)} x^k + \cdots$$

Ряд у правій частині останньої рівності називається *виродженим гіпергеометричним рядом,* а його сума

$$F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + k - 1)}{k!\gamma(\gamma + 1) \ldots (\gamma + k - 1)} x^k$$

— *виродженою гіпергеометричною функцією* або *функцією Куммера.*

Якщо в рівнянні для визначення c_k підставимо $\lambda_2 = 1 - \gamma$, то при умові, що γ не є цілим недодатним числом, знайдемо другий, лінійно незалежний з $y_1(x)$ розв'язок:

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x).$$

Тому якщо $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, то всі розв'язки даного рівняння мають вигляд

$$y = C_1 F(\alpha, \gamma, x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x).$$

Якщо $\gamma = 1$, $\alpha = -n$, то вироджене гіпергеометричне рівняння має вигляд

$$xy'' + (1 - x) y' + ny = 0.$$

У цьому випадку функція Куммера є многочленом степеня n і лише сталим множником $n!$ відрізняється від *многочлена Лагерра:*

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = (n!)^2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^2 (n-k)!} = n! F(-n, 1, x).$$

Для многочленів Лагерра виконуються рекурентні формули

$$L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x) L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x).$$

$$\frac{d}{dx} L_{n+1}(x) = (n+1)\left(\frac{d}{dx} L_n(x) - L_n(x)\right).$$

Ці формули рекомендуємо довести самостійно.

3.4. Рівняння Бесселя

3.23. Розв'язати *рівняння Бесселя* $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$ в припущенні, що $\nu \notin \mathbf{Z}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки рівняння не змінюється при заміні в ньому x на $-x$, досить розглянути невід'ємні значення x. Єдина особлива точка

$$x = 0,$$

визначальне рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0, \text{ або } \lambda^2 - \nu^2 = 0.$$

Якщо $\nu \neq 0$, то визначальне рівняння має два корені: $\lambda_1 = \nu$ і $\lambda_2 = -\nu$. Знайдемо розв'язок цього рівняння у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\lambda}, \quad c_0 \neq 0.$$

Маємо:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \lambda) c_k x^{k+\lambda-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)(\lambda + k - 1) c_k x^{k+\lambda-2}.$$

Підставивши y, y', y'' в рівняння Бесселя, дістанемо

$$x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)(\lambda + k - 1) c_k x^k + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k) c_k x^k +$$

$$+ x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} - x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 c_k x^k = 0.$$

Скорочуючи на x^λ, знаходимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda + k)(\lambda + k - 1) + \lambda + k - \nu^2) c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = 0,$$

або

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda + k)^2 - \nu^2) c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при степенях x, дістаємо:

$$(\lambda^2 - \nu^2) c_0 = 0, \quad ((\lambda + 1)^2 - \nu^2) c_1 = 0,$$

$$((\lambda + k)^2 - \nu^2) c_k + c_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Знайдемо розв'язок, який відповідає кореню $\lambda = \nu$. Підставивши $\lambda = \nu$, бачимо, що $c_0 \neq 0$ може бути будь-яким числом, число $c_1 = 0$, а для $k = 2, 3, \ldots$

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2\nu + k)}.$$

Звідси $c_{2m+1} = 0$ при всіх $m = 0, 1, 2, \ldots$,

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (\nu + 1)}, \quad c_4 = \frac{c_0}{2^4 \cdot 2!(\nu + 1)(\nu + 2)}, \ldots,$$

$$c_k = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k!(\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + k)}.$$

Отже,

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k!(\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + k)} x^{2k+\nu}.$$

Можна показати, наприклад за ознакою д'Аламбера, що цей ряд рівномірно збігається на будь-якому скінченному проміжку $[0; a]$. Тому $y_1(x)$ є розв'язком рівняння Бесселя при будь-якому c_0. Візьмемо

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

де $\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$,— гамма-функція Ейлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha - 1} e^{-x} dx.$$

Беручи до уваги, що $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$, подамо $y_1(x)$ у вигляді

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0 \cdot 2^\nu}{k!(\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + 1)(\nu + 1) \ldots (\nu + k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Функція

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

називається *функцією Бесселя першого роду ν-го порядку.*

Другий частинний розв'язок рівняння Бесселя, лінійно незалежний з $y_1(x)$, шукаємо у вигляді

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k-\nu}.$$

Рівняння для визначення c_k при $\lambda=-\nu$ мають вигляд

$(\nu^2-\lambda^2)\,c_0=0,\ (1-2\nu)\,c_1=0,\ \ldots,\ ((-\nu+k)^2-\nu^2)\,c_k+c_{k-2}=0.$

Поклавши $c_0\neq 0$, $c_1=0$, знаходимо

$$c_{2k+1}=0,\quad c_{2k}=-\frac{c_{2k-2}}{2^2\,k\,(-\nu+k)}.$$

За умовою $\nu\notin\mathbf{Z}$, тому всі коефіцієнти c_k з парними номерами однозначно виражаються через c_0:

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k\,c_0}{2^{2k}k!\,(-\nu+1)\,(-\nu+2)\ldots(-\nu+k)}.$$

Отже,

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,c_0}{2^{2k}k!\,(-\nu+1)\,(-\nu+2)\ldots(-\nu+k)}\,x^{2k-\nu}.$$

Поклавши $c_0=\dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$, подамо $y_2(x)$ у вигляді

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Функція

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

називається *функцією Бесселя першого роду з від'ємним індексом.*

Отже, якщо $\nu\notin\mathbf{Z}$, то всі розв'язки рівняння Бесселя є лінійними комбінаціями функцій Бесселя:

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

3.24. Розв'язати рівняння $y''+\dfrac{1}{x}y'+\left(1-\dfrac{1}{9x^2}\right)y=0.$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $x^2y''+xy'+\left(x^2-\dfrac{1}{9}\right)y=0$. Це рівняння Бесселя $\left(\nu=\dfrac{1}{3}\right)$. Тому $y=C_1J_{1/3}(x)+C_2J_{-1/3}(x)$.

3.25. Розв'язати рівняння $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$

Р о з в' я з а н н я. Покладемо $2x = t$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{d^2y}{dt^2}$$

і рівняння матиме вигляд:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

Це рівняння Бесселя $\left(\nu = \frac{1}{2}\right)$. Тому

$$y = C_1 J_{1/2}(t) + C_2 J_{-1/2}(t) = C_1 J_{1/2}(2x) + C_2 J_{-1/2}(2x).$$

3.26. Довести, що коли $\nu \in \mathbf{Z}$, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $\Gamma(-n + k + 1)$ перетворюється в нескінченність при $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, то

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\,\Gamma(-n + k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+k+1)}.$$

Поклавши в останній сумі $k = n + m$, дістанемо

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x).$$

3.27. Довести, що для довільного ν справедливі рівності:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_{\nu}(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

Р о з в' я з а н н я. Маємо

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+\nu)(-1)^k x^{2\cdot+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k)(\nu+k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\nu} x^{\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k-1}\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k)} = x^{\nu} J_{\nu-1}(x).$$

Друга рівність доводиться аналогічно.

3.28. Довести, що

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_{\nu}'(x), \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x).$$

Розв'язання. Запишемо рівності, які було доведено в задачі 3.27.

Помножимо обидві частини першої з рівностей на $x^{-\nu}$, а другої — на x^{ν}:

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x), \quad J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x).$$

Додаючи і віднімаючи почленно ці рівності, дістаємо

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x), \; J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

Ці співвідношення називаються *рекурентними формулами для функцій Бесселя.* Перша з них дає змогу виразити похідну функції Бесселя через функції Бесселя, а друга —знайти функцію Бесселя порядку $\nu + 1$, якщо відомі функції порядків ν і $\nu - 1$.

3.29. Знайти функції Бесселя $J_{-1/2}(x)$, $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$.

Розв'язання. Маємо

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{\sqrt{2x}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sin x.$$

Згідно з означенням гамма-функції,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отже,

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$J_{-1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

У рекурентній формулі

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

покладемо $\nu = \frac{1}{2}$. Тоді

$$J_{3/2}(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x -$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

3.30. Розв'язати рівняння $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Покладемо $x^2 = t$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}4x^2 + 2\frac{dy}{dt} = 4t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}.$$

Підставивши ці вирази в дане рівняння, дістанемо

$$4t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2t\frac{dy}{dt} + 2t\frac{dy}{dt} + 4(t^2 - 2)y = 0,$$

або $t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - 2)y = 0$. Це рівняння Бесселя $(\nu = \sqrt{2})$. Його розв'язки

$$y = C_1J_{\sqrt{2}}(t) + C_2J_{-\sqrt{2}}(t).$$

Отже,

$$y = C_1J_{\sqrt{2}}(x^2) + C_2J_{-\sqrt{2}}(x^2).$$

3.31. Розв'язати рівняння $xy'' + y' + xy = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Це окремий випадок рівняння Бесселя $(\nu = 0)$. Одним з його розв'язків є функція Бесселя першого роду нульового порядку $y_1(x) = J_0(x)$. Як відомо (п. 3.2), у випадку, коли різниця коренів визначального рівняння дорівнює цілому числу, то другий розв'язок, лінійно незалежний з $y_1(x)$, треба шукати у вигляді суми узагальненого степеневого ряду й добутку $y_1(x)\ln x$. У цьому випадку $\nu = 0 \in \mathbf{Z}$. Тому шукаємо $y_2(x)$ у вигляді

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k.$$

Підставивши $y_2(x)$ в рівняння, дістанемо

$$x\left(J_0''(x)\ln x + 2J_0'(x)\frac{1}{x} - J_0(x)\frac{1}{x^2}\right) + J_0'(x)\ln x +$$

$$+ J_0(x)\frac{1}{x} + xJ_0(x)\ln x + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_kx^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} kc_kx^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^{k+1} = 0.$$

Звідси

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}c_{k}x^{k+1}=-2J_0'(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}((k+1)kc_{k+1}+(k+1)c_{k+1}+c_{k-1})x^{k}+c_1=$$

$$=-2\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, дістаємо рівняння для визначення c_k:

$$c_1=0,\ (2m+1)^2c_{2m+1}+c_{2m-1}=0,\quad m=1,\ 2,\ \dots,$$

$$4(m+1)^2c_{2m+2}+c_{2m}=\frac{(-1)^m}{(m+1)!\,m!\,2^{2m}},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Поклавши $c_0=0$, знаходимо, що $c_{2m-1}=0$, а при $k=2m$ маємо

$$c_0=0,\ c_2=\frac{1}{2^2},\ c_4=\frac{1}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right),$$

$$c_6=\frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),\ \dots,$$

$$c_{2m}=(-1)^{m+1}\frac{1}{2^2\cdot 4^2\dots(2m)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{m}\right),\ \dots$$

Отже,

$$y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}}{2^2\cdot 4^2\dots(2m)^2}x^{2m}.$$

3.5. Крайові задачі

На відміну від задачі Коші для звичайного диференціального рівняння в крайовій задачі значення шуканої функції або значення лінійної комбінації функції і її похідної задається не в одній, а в двох точках (для двоточкової задачі), які обмежують відрізок, на якому шукається розв'язок.

Щоб розв'язати лінійну крайову задачу виду

$$l(y)\equiv a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x),\quad x\in[a;\ b],\tag{1}$$

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\quad \gamma y(b)+\delta y'(b)=0,\tag{2}$$

де

$$a(x)\neq 0,\quad x\in[a;\ b],$$

треба знайти загальний розв'язок рівняння (1) і підібрати значення довільних сталих так, щоб виконувались крайові умови (2). Крайова задача не завжди має розв'язок, а якщо й має, то цей розв'язок не обов'язково єдиний.

Інтегральне зображення розв'язку лінійної крайової задачі (1), (2)

Теорема. *Якщо лінійна однорідна задача* (1), (2) ($f(x) \equiv 0$) *має лише тривіальний розв'язок, то лінійна неоднорідна задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок, який можна записати в інтегральній формі*

$$y = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds, \tag{3}$$

де $G(x, s)$ — *функція Гріна (впливу) задачі* (1), (2). Функція $G(x, s)$ визначена при $x \in [a; b]$, $s \in (a; b)$ і при кожному $s \in (a; b)$ має такі властивості:

1°. При $x \neq s$ функція $G(x, s)$ задовольняє лінійне однорідне рівняння

$$a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0. \tag{4}$$

2°. При $x = a$ і $x = b$ функція $G(x, s)$ задовольняє крайові умови (2).

3°. При $x = s$ функція $G(x, s)$ неперервна по x, а її похідна по x має розрив першого роду зі стрибком, який дорівнює $\frac{1}{a(x)}$, тобто

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \quad G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \frac{1}{a(s)}. \tag{5}$$

Щоб знайти функцію Гріна задачі (1), (2), треба побудувати розв'язок $y_1(x) \neq 0$ рівняння (4), який задовольняє лише першій ($x = a$) крайовій умові, і розв'язок $y_2(x)$, який задовольняє другій ($x = b$) крайовій умові. Ці розв'язки є лінійно незалежними, бо, якщо $y_1 = c y_2$, $c = \text{const} \neq 0$, то функція $y_1(x) \neq 0$ була б нетривіальним розв'язком лінійної однорідної ($f(x) \equiv 0$) задачі (1), (2), що суперечить умові теореми.

Функцію $G(x, s)$ шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s) y_1(x) & \text{при } a \leqslant x \leqslant s; \\ \psi(s) y_2(x) & \text{при } s \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{6}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ вибираються так, щоб виконувались умови (5), тобто, щоб

$$\psi(s) y_2(s) = \varphi(s) y_1(s), \quad \psi(s) y_2'(s) - \varphi(s) y_1'(s) = \frac{1}{a(s)}. \tag{7}$$

Оскільки головний визначник системи (7)

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} y_2(s) & -y_1(s) \\ y_2'(s) & -y_1'(s) \end{vmatrix} = W[y_1(s); \ y_2(s)] \neq 0,$$

внаслідок лінійної незалежності розв'язків y_1 і y_2, то функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначаються з (7) однозначно.

При розв'язуванні лінійних крайових задач наближеними методами часто застосовують такий прийом.

Розв'язок лінійного рівняння (1) шукають у вигляді

$$y = y_0(x) + \mu u(x) + \nu v(x), \tag{8}$$

де $y_0(x)$, $u(x)$, $v(x)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$l(y) = f(x), \ y(a) = y'(a) = 0; \quad l(y) = 0, \ y(a) = 1, \ y'(a) = 0;$$
$$l(y) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1. \tag{9}$$

Підставляючи (8) у крайові умови (2), дістаємо систему двох рівнянь для визначення коефіцієнтів μ і ν.

Якщо коефіцієнти рівняння (1) або крайових умов (2) залежать від деякого параметра λ, то при певних умовах існують такі значення цього параметра, для яких крайова задача має нетривіальний розв'язок. Ці значення параметра λ називаються *власними значеннями*, а відповідні їм розв'язки крайової задачі *власними функціями*. Важливим окремим випадком задачі на власні значення є *задача Штурма — Ліувілля:*

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dy}\right) - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \tag{10}$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{11}$$

де функції p, p', q, ρ — неперервні на $[a; b]$, $p > 0$, $\rho > 0$, $x \in [a; b]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$.

3.33. Розв'язати задачу

$$y'' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(1) - y'(1) = 1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 + C_2e^x$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Підберемо C_1 і C_2 так, щоб виконувались задані крайові умови. Маємо

$$C_1 + C_2 = 3, \quad C_1 + C_2e - C_2e = 1,$$

звідки

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2.$$

Отже, розв'язком даної задачі є функція

$$y = 1 + 2e^x.$$

3.34. Розв'язати задачу

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = y_0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Умова $y(0) = 0$ задовольняється при $C_1 = 0$.

Якщо $a \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, то з другої крайової умови знаходимо: $y_0 = C_2 \sin a$, $C_2 = \frac{y_0}{\sin a}$.

Отже, в цьому випадку існує єдиний розв'язок даної крайової задачі:

$$y = \frac{y_0}{\sin a} \sin x.$$

Якщо $a = n\pi$, то з другої крайової умови маємо:

$$C_2 \sin n\pi = y_0.$$

Якщо $y_0 = 0$, то крайова задача має нескінченну множину розв'язків $y = C_2 \sin x$, де C_2 — довільна стала.

Якщо $a = n\pi$, а $y_0 \neq 0$, то крайова задача розв'язків не має.

3.35. Знайти розв'язок рівняння $x^2y'' - 2y = 0$, який задовольняє умовам:

1) $y(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$, $y'(1) = 1$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Ейлера. Його розв'язки шукаємо у вигляді $y = x^k$. Для визначення k маємо рівняння $k(k-1) - 2 = 0$, звідки $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2x^2.$$

Виберемо C_1 і C_2 так, щоб виконувалися крайові умови.

1) З умови $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$ випливає, що $C_2 = 0$, оскільки $y'(x) = -\frac{C_1}{x^2} + C_2x^2$, а з умови $y(1) = 1$ знаходимо:

$$C_1 = 1.$$

Тому

$$y = \frac{1}{x}.$$

2) Умова $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ виконується при $C_1 = 0$. З другої крайової умови знаходимо:

$$y'(1) = 2C_2,\ C_2 = \frac{1}{2}.$$

Тому $y = \frac{x^2}{2}$.

3.36. Побудувати функцію Гріна для задачі $y'' - y = f(x)$, де розв'язок $y(x)$ обмежений при всіх $x \in (-\infty, +\infty)$.

Розв'язання. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Розв'язок $y_1(x) = e^x$ обмежений при $x \to -\infty$, а $y_2(x) = e^{-x}$ — при $x \to +\infty$. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)\, e^x, & \text{якщо } -\infty < x \leqslant s; \\ \psi(s)\, e^{-x}, & \text{якщо } s \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначаються з рівнянь

$$\psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^s, \quad -\psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^s + 1.$$

Звідси $\varphi(s) = -\frac{1}{2}e^{-s}$, $\psi(s) = -\frac{1}{2}e^s$.

Отже,

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{x-s}, & \text{якщо } -\infty < x \leqslant s; \\ -\frac{1}{2} e^{s-x}, & \text{якщо } s \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

3.37. Записати в інтегральній формі розв'язок задачі $y'' = f(x)$, $y(-1) = y(1) = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Розв'язання. Загальним розв'язком однорідного рівняння $y'' = 0$ є $y = C_1 + C_2 x$. Розв'язок $y_1(x) = 1 + x$ задовольняє першу крайову умову $y(-1) = 0$, а розв'язок $y_2(x) = 1 - x$ — другій умові $y(1) = 0$. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)(1 + x), & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant s; \\ \psi(s)(1 - x), & \text{якщо } s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ знаходимо з умов:

$$\varphi(s)(1 + s) = \psi(s)(1 - s), \quad -\psi(s) - \varphi(s) = 1.$$

Звідси

$$\varphi(s) = -\frac{1 - s}{2}, \quad \psi(s) = -\frac{1 + s}{2}.$$

Отже,

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 - s)(1 + x), & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant s; \\ -\frac{1}{2}(1 + s)(1 - x), & \text{якщо } s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

і розв'язок даної задачі має вигляд

$$y = \int_{-1}^{1} G(x, s) f(s)\, ds = -\frac{1 + x}{2} \int_{-1}^{x} (1 - s) f(s)\, ds - $$

$$- \frac{1 - x}{2} \int_{x}^{1} (1 + s) f(s)\, ds.$$

3.38. Розв'язати задачу

$$x^2 y'' + 2xy' = m(m + 1) x^m, \quad m > 0, \; y(1) = y'(1),$$

розв'язок $y(x)$ обмежений при $x \to 0$.

Розв'язання. Побудуємо функцію Гріна цієї задачі. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y = C_1 + \frac{C_2}{x}$.

Розв'язок $y_1(x) = 2 - \frac{1}{x}$ задовольняє першій крайовій умові, а розв'язок $y_2(x) = 1$ — другій. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s), & \text{якщо } 0 < x \leqslant s; \\ \psi(s)\left(2 - \frac{1}{x}\right), & \text{якщо } s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ знаходимо з умов

$$\varphi(s) = \psi(s)\left(2 - \frac{1}{s}\right),$$

$$\psi(s)\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}; \quad \psi(s) = 1, \ \varphi(s) = 2 - \frac{1}{s}.$$

Звідси

$$G(x, s) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{s}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant s; \\ 2 - \frac{1}{x}, & \text{якщо } s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Шуканий розв'язок має вигляд

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s)\, m(m+1)s^m ds = m(m+1)\left(\int_0^x \left(2 - \frac{1}{x}\right)s^m ds + \right.$$

$$\left. + \int_x^1 \left(2 - \frac{1}{s}\right)s^m ds\right) = m(m+1)\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{m+1}x^{m+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{m+1}s^{m+1} - \frac{1}{m}s^m\right)\Big|_{s=x}^{s=1}\right) = x^m + m - 1.$$

3.39. Побудувати функцію Гріна задачі

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{m^2}{x}y = f(x), \quad m > 0,$$

$$y(0) = \text{const}, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Рівняння $xy'' + y' - \frac{m^2}{x}y = 0$ має два лінійно незалежних розв'язки x^m і x^{-m}. Першій крайовій умові задовольняє, наприклад, розв'язок $y_1(x) = x^m$, а другій — розв'язок

$y_2(x) = x^m - x^{-m}$. Функція Гріна має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)\, x^m, & \text{якщо } 0 < x \leqslant s; \\ \psi(s)\,(x^m - x^{-m}), & \text{якщо } s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

де $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ знаходимо з рівнянь

$$\psi(s)(s^m - s^{-m}) = \varphi(s)\, s^m,\ \psi(s)\, m\,(s^{m-1} + s^{-m-1}) = \varphi(s)\, ms^{-1} + \frac{1}{s}.$$

Маємо:

$$\varphi(s) = \frac{s^m - s^{-m}}{2m}, \quad \psi(s) = \frac{s^m}{2m}.$$

Отже,

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2m}\left((xs)^m - \left(\dfrac{x}{s}\right)^m\right), & \text{якщо } 0 < x \leqslant s; \\[2ex] \dfrac{1}{2m}\left((xs)^m - \left(\dfrac{s}{x}\right)^m\right), & \text{якщо } s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3.40. Оцінити зверху і знизу розв'язок задачі $x^2y'' + 3xy' - 3y = f(x)$ (розв'язок $y(x)$ обмежений при $x \to 0$ і $x \to +\infty$) і його першу похідну, якщо $0 \leqslant f(x) \leqslant M$.

Р о з в' я з а н н я. Побудуємо функцію Гріна даної задачі. Рівняння $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$ має два лінійно незалежні розв'язки $y_1 = x$ і $y_2 = \frac{1}{x^3}$, причому y_1 обмежений при $x \to 0$, а y_2 — при $x \to +\infty$. Тому

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)\, x, & \text{якщо } 0 < x \leqslant s, \\[1ex] \psi(s)\ \dfrac{1}{x^3}, & \text{якщо } s \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

де $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ задовольняють систему

$$\frac{\psi(s)}{s^3} = \varphi(s)\, s, \quad -\frac{3}{s^2}\psi(s) = \varphi(s) + \frac{1}{s^2}.$$

З цієї системи знаходимо

$$\varphi(s) = -\frac{1}{s^2(3s^2+1)}, \ \psi(s) = -\frac{s^2}{3s^2+1}.$$

Отже,

$$G(x, s) = \begin{cases} -\dfrac{x}{s^2(3s^2+1)}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant s; \\[2ex] -\dfrac{s^2}{3s^2+1}\,\dfrac{1}{x^3}, & \text{якщо } s \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Розв'язок даної задачі має вигляд

$$y(x) = \int_0^{+\infty} G(x, s) f(s)\, ds.$$

Оцінимо $y(x)$ і $y'(x)$ знизу і зверху, враховуючи, що $0 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant M$. Маємо

$$y(x) = \int_0^x G(x, s) f(s)\, ds + \int_x^{+\infty} G(x, s) f(s)\, ds =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{s^2 f(s)}{3s^2+1}\, ds - x\int_x^{+\infty} \frac{f(s)\, ds}{s^2(3s^2+1)}.$$

Звідси

$$-M\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{s^2 ds}{3s^2+1} + x\int_x^{+\infty} \frac{ds}{s^2(3s^2+1)}\right) \leqslant y(x) \leqslant 0.$$

Оскільки

$$\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{s^2 ds}{3s^2+1} \leqslant \frac{1}{x^3}\int_0^x s^2 ds = \frac{1}{3},$$

$$x\int_x^{+\infty} \frac{ds}{s^2(3s^2+1)} \leqslant x\int_x^{+\infty} \frac{ds}{s^2} = 1,$$

то для $y(x)$ дістаємо оцінку $-\frac{4M}{3} \leqslant y(x) \leqslant 0$.

Обчислюємо $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x G(x, s) f(s)\, ds + \int_x^{+\infty} G(x, s) f(s)\, ds\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{x^3}\,\frac{x^2 f(x)}{3x^2+1} - \frac{3}{x^4}\int_0^x \frac{s^2 f(s)}{3s^2+1}\, ds + \int_x^{+\infty} \frac{f(s)\, ds}{s^2(3s^2+1)} -\right.$$

$$\left.- \frac{x f(x)}{x^2(3x^2+1)}\right) = \frac{3}{x^4}\int_0^x \frac{s^2 f(s)}{3s^2+1}\, ds - \int_x^{+\infty} \frac{f(s)\, ds}{s^2(3s^2+1)}.$$

Звідси

$$-\int_x^{+\infty} \frac{f(s)\, ds}{s^2(3s^2+1)} \leqslant y'(x) \leqslant \frac{3}{x^4}\int_0^x \frac{s^2 f(s)}{3s^2+1}\, ds,$$

або з урахуванням оцінки $0 \leqslant f(x) \leqslant M$:

$$-M \int_x^{+\infty} \frac{ds}{s^2(3s^2+1)} \leqslant y'(x) \leqslant \frac{3M}{x^4} \int_0^x \frac{s^2 ds}{3s^2+1}.$$

Оскільки

$$\int_0^x \frac{s^2 ds}{3s^2+1} \leqslant \frac{x^3}{3}, \quad \int_x^{+\infty} \frac{ds}{s^2(3s^2+1)} \leqslant \frac{1}{x},$$

то остаточно дістанемо, що

$$-\frac{M}{x} \leqslant y'(x) \leqslant \frac{M}{x}.$$

3.41. Розв'язати крайову задачу $xy'' - y' = \frac{3}{x^2}$, $y(1) = y'(1)$, $3y(2) - 2y'(2) = 3$.

Розв'язання. На прикладі цієї задачі проілюструємо метод зведення крайових задач до задач Коші. Розв'язок даної задачі шукаємо у вигляді

$$y = y_0(x) + \mu u(x) + \nu v(x),$$

де $y_0(x)$, $u(x)$, $v(x)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$xy'' - y' = \frac{3}{x^2}, \quad y(1) = y'(1) = 0;$$

$$xy'' - y' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0;$$

$$xy'' - y' = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Розв'язавши кожну з цих задач, дістанемо

$$y_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x}, \quad u(x) = 1, \quad v(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Підберемо тепер у виразі

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + \mu + \frac{\nu}{2}(x^2 - 1)$$

коефіцієнти μ і ν так, щоб функція y задовольняла крайові умови. Підставивши y у крайові умови, дістанемо:

$$\mu = \nu, \quad 6\mu + \nu = 7,$$

звідки

$$\mu = \nu = 1.$$

Отже, шуканий розв'язок

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1) = x^2 + \frac{1}{x} - 1.$$

3.42. Знайти власні значення та власні функції задачі $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(l) = 0$, $l > 0$.

Р о з в' я з а н н я. Якщо $\lambda = 0$, то $y = C_1 x + C_2$ і крайовим умовам задовольняє лише тривіальний розв'язок $y \equiv 0$, тобто $\lambda = 0$ не є власним значенням.

Нехай $\lambda > 0$. Тоді $y = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$. Серед цих функцій крайовим умовам задовольняє лише $y \equiv 0$.

Якщо $\lambda < 0$, то розв'язки рівняння $y'' = \lambda y$ мають вигляд

$$y = C_1 \sin \sqrt{-\lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{-\lambda}\, x.$$

Підставивши цей вираз у крайові умови, дістанемо $C_2 = 0$, $C_1 \sin \sqrt{-\lambda} l) = 0$.

Отже, задача має ненульові розв'язки лише при $\sqrt{-\lambda}\, l = k\pi$, тобто

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ці значення λ є власними. Відповідні власні функції:

$$y_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

3.43. Знайти власні значення та власні функції задачі $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y(l) = 0$, $l > 0$.

Р о з в' я з а н н я. Як і в попередній задачі, можна показати, що значення $\lambda \in [0; +\infty)$ не є власними.

Нехай $\lambda < 0$ Тоді $y = C_1 \sin \sqrt{-\lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{-\lambda} x$. Підставивши в крайові умови, дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 \cos (\sqrt{-\lambda} l) = 0$, тобто $\sqrt{-\lambda} = \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi}{l}$. Отже, власними значеннями даної задачі є числа $\lambda = \lambda_k = -\left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Відповідні власні функції:

$$y_k(x) = \cos \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi x}{l}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

3.44. Знайти власні значення та власні функції задачі $y'' + \frac{1}{x} y' + \lambda^2 y = 0$, $y(1) = 0$, розв'язок $y(x)$ обмежений при $x \to 0$.

Р о з в' я з а н н я. Якщо $\lambda = 0$, то $y = C_1 + C_2 \ln |x|$. Серед цих функцій крайовим умовам задовольняє лише $y \equiv 0$, тобто $\lambda = 0$ не є власним значенням.

Нехай $\lambda \neq 0$. У рівнянні $y'' + \frac{1}{x} y' + \lambda^2 y = 0$ покладемо $\lambda x = t$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$$

і рівняння матиме вигляд $y'' + \frac{1}{t} y' + y = 0$. Це рівняння Бесселя ($\nu = 0$). Обмежені при $t \to 0$ розв'язки цього рівняння:

$$y = CJ_0(t),$$

де $J_0(t)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку, C — довільна стала.

Отже, власними функціями даної задачі є функції Бесселя $y_k(x) = J_0(\lambda_k x)$, де власні числа λ_k — корені рівняння $J_0(\lambda) = 0$.

3.45. Знайти власні значення та власні функції задачі $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $-\beta\lambda^2 y(1) + y'(1) = 0$, $\beta = \text{const}$.

Розв'язання. Зазначимо, що не лише коефіцієнти рівняння, а й крайові умови даної задачі залежать від параметра λ.

При $\lambda = 0$ $y = C_1 x + C_2$. Підставивши в крайові умови, дістанемо $C_1 = 0$, тобто $y = 1$ є власною функцією, яка відповідає власному значенню $\lambda = 0$. При $\lambda \neq 0$ маємо:

$$y = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Підставляємо в крайові умови:

$$C_2 \lambda = 0$$

і, отже, $y = C_1 \cos \lambda x$,

$$-\beta\lambda^2 C_1 \cos \lambda - C_1 \lambda \sin \lambda = 0,$$

звідки дістаємо рівняння для визначення власних значень:

$$\operatorname{tg} \lambda = -\beta\lambda$$

(характеристичне рівняння даної задачі).

Можна показати, наприклад графічно, що рівняння $\operatorname{tg} \lambda = -\beta\lambda$ має рівні за модулем та протилежні за знаком корені λ_k $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Отже, власними функціями даної задачі є функції $y_k = \cos \lambda_k x$, де $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ — зростаюча послідовність власних значень, які є абсцисами точок перетину графіків функцій $y = \operatorname{tg} \lambda$ і $y = -\beta\lambda$.

3.46. Довести, що коли функції $u, v \in C^1_{[a;b]}$ і справджують крайові умови задачі Штурма — Ліувілля, то $W(a) = W(b) = 0$, де W — вронскіан функцій u і v.

Розв'язання. Запишемо крайові умови (11) для функцій u і v:

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0,$$
$$\alpha v(a) + \beta v'(a) = 0, \quad \gamma v(b) + \delta v'(b) = 0.$$

Оскільки ці лінійні однорідні системи мають нетривіальні розв'язки (за умовою $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$), то головні визначники цих систем $\Delta_1 = W(a) = \Delta_2 = W(b) = 0$.

3.47. Позначимо $L(y) = (py')' - qy$. Довести, що коли $u, v \in C^2_{[a;b]}$, то виконуються:

тотожність Лагранжа

$$uL(v) - vL(u) = (pW)'$$

і *формула Гріна*

$$\int_a^b (uL(v) - vL(u))\,dx = p(b)W(b) - p(a)W(a).$$

Розв'язання. Маємо:

$$uL(v) = u((pv')' - qv), \quad vL(u) = v((pu')' - qu).$$

Віднявши ці рівності почленно, дістанемо

$$uL(v) - vL(u) = u(pv')' - v(pu')' = u(p'v' + pv'') - v(p'u' + pu'') =$$
$$= p'(uv' - vu') + p(uv'' - vu'') = (pW)'.$$

Проінтегрувавши тотожність Лагранжа по відрізку $[a; b]$, дістанемо формулу Гріна.

3.48. Нехай $u, v \in C^2_{[a;b]}$ і функції u і v справджують крайові умови задачі Штурма — Ліувілля. Довести, що

$$\int_a^b uL(v)\,dx = \int_a^b vL(u)\,dx. \qquad (12)$$

Розв'язання. Твердження задачі випливає з формули Гріна і результату задачі (3.46).

3.49. Нехай y_m і y_n — власні функції задачі Штурма — Ліувілля (10), (11), які відповідають різним власним значенням $\lambda_m \neq \lambda_n$. Довести, що функції y_m та y_n ортогональні на $[a; b]$ з ваговою функцією $\rho(x)$, тобто

$$\int_a^b y_m(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0.$$

Розв'язання. У формулі (12) покладемо $u = y_m$, $v = y_n$. Тоді

$$\int_a^b (y_m L(y_n) - y_n L(y_m))\,dx = 0, \quad \int_a^b (y_m(-\lambda_n y_n \rho) -$$
$$- y_n(-\lambda_m y_m \rho))\,dx = 0,$$
$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b y_m(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0,$$

звідки ($\lambda_m \neq \lambda_n$) випливає, що $\int_a^b y_m(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0$, $m \neq n$.

3.50. Довести, що власні функції y_m, y_n задачі Штурма — Ліувілля (10), (11), які відповідають різним власним значенням $\lambda_m \neq \lambda_n$, лінійно незалежні на $[a;\ b]$.

Р о з в' я з а н н я. Припустимо супротивне, що

$$\alpha y_m + \beta y_n \equiv 0, \quad \forall\, x \in [a;\ b].$$

Нехай наприклад, $\alpha \neq 0$. Помножимо цю рівність на $y_m \rho$ і проінтегруємо по відрізку $[a;\ b]$:

$$\alpha \int_a^b y_m^2 (x)\, \rho (x)\, dx + \beta \int_a^b y_m (x)\, y_n (x)\, \rho (x)\, dx = 0,$$

звідки, внаслідок ортогональності функцій y_m і y_n, $\alpha \int_a^b y_m^2 (x)\, \rho (x)\, dx = 0$, $\alpha = 0$, що неможливо.

3.51. Нехай y_m, y_n — власні функції, визначені в задачі 3.45, які відповідають різним власним значенням $\lambda_m \neq \lambda_n$. Довести, що y_m і y_n не є ортогональними на $[a;\ b]$ з ваговою функцією $\rho (x) \equiv 1$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо: $p (x) \equiv 1$, $q (x) \equiv 0$, $\rho (x) \equiv 1$, $L (y) \equiv y'$. Застосуємо формулу Гріна:

$$\int_0^1 (y_m y_n'' - y_n y_m'')\, dx = W (x) |_0^1, \quad (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^1 y_m y_n dx = W (x) |_0^1.$$

Ураховуючи крайові умови, дістаємо

$$W (0) = 0, \quad W_1 (1) = -\beta (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\, y_m (1)\, y_n (1).$$

Тому

$$\int_0^1 y_m y_n dx = -\beta y_m (1)\, y_n (1),$$

де $y_m = \cos \lambda_m x$, а власні числа визначаються з характеристичного рівняння

$$\operatorname{tg} \lambda = -\beta\lambda.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Лінійне неоднорідне рівняння $a (x)\, y'' + b (x)\, y' + c (x)\, y = d (x)$ звести до вигляду $(p (x)\, y')' + q (x)\, y = f (x)$.

2. Показати, що, виконуючи заміну $z = \dfrac{p (x)\, y'}{y}$, можна звести рівняння $(p (x)\, y')' + q (x)\, y = 0$ до рівняння Ріккаті:

$$z' + \frac{z^2}{p (x)} + q (x)\, z = 0.$$

3. Заміною шуканої функції звести рівняння $y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$ до рівняння Ріккаті $z' + z^2 + a(x) z + b(x) = 0$.

4. Підібрати функцію $\alpha(x)$ так, щоб заміною шуканої функції $y = \alpha(x) z$ рівняння $x^2 y'' + 2x^2 y' + (x^2 - 2) y = 0$ зводилось до рівняння, в якому коефіцієнт при z' дорівнює нулю.

5. Заміною незалежної змінної $t = \varphi(x)$ рівняння $y'' - y' + e^{4x} y = 0$ звести до рівняння, в якому коефіцієнт при $\frac{dy}{dt}$ дорівнює нулю.

За допомогою степеневих рядів проінтегрувати дані рівняння

6. $y'' - xy = 0$.
7. $y'' - xy' - 2y = 0$.
8. $y'' + 4xy' + 2(1 + 2x^2) y = 0$.
9. $xy'' - (x + 1) y' + y = 0$.
10. $xy'' - (2x^2 + 1) y' + x^3 y = 0$.
11. $x(x + 1) y'' - (x + 1) y' + y = 0$.
12. $x(x + 1) y'' + (3x + 2) y' + y = 0$.

13. Обчислити визначник Вронського, складений для двох лінійно незалежних розв'язків гіпергеометричного рівняння

$$x(x - 1) y'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1) x) y' + \alpha\beta y = 0.$$

14. Упевнившись в тому, що поліноми Лежандра $p_n(x)$ є коефіцієнтами розвинення $(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n$, довести, що

$$x \frac{dp_n(x)}{dx} - \frac{dp_{n-1}(x)}{dx} = np_n(x).$$

Розв'язати рівняння

15. $(x^2 - 1) y'' + 2axy' + a(a - 1) y = 0$.

16. $(x^2 - a^2) y'' + 8xy' + 12y = 0$.

17. Нехай $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гіпергеометрична функція. Довести, що:

а) $nxF(1 - n, 1, 2, x) = 1 - (1 - x)^n$;

б) $2F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = (1 + x)^n + (1 - x)^n$;

в) $2nxF\left(-\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{3}{2}, x^2\right) = (1 + x)^n - (1 - x)^n$;

г) $F\left(-n, n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = (-1)^n \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)} p_{2n}(x)$;

д) $xF\left(-n, n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = (-1)^n \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n + 1)} p_{2n+1}(x)$,

$n \in \mathbf{N}$.

18. Обчислити визначник Вронського, складений для двох лінійно незалежних розв'язків рівняння Лежандра.

19. Обчислити визначник Вронського, складений для двох функцій Бесселя $I_\nu(x)$ і $I_{-\nu}(x)$, $\nu \neq n$.

20. Довести, що для цілих $n \geqslant 0$

$$\sqrt{\pi x}\, J_{2\pi}(x) = (-1)^n (\cos x + \sin x) + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\sqrt{\pi p x}\, J_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} (\cos x - \sin x) + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$x \to \infty.$$

21. Довести, що функція

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k+1}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\,\Gamma\left(\nu+k+\frac{3}{2}\right)}$$

є розв'язком неоднорідного рівняння Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=\frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}.$$

Розв'язати крайові задачі:

22. $y''+y=1;\quad y(0)=0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

23. $y''-2y'-3y=0;$ а) $y(0)=1,\ \lim_{x\to\infty}y(x)=0;$ б) $y(0)=1,\ \lim_{x\to\infty}y'(x)=2.$

24. $x^2y''-2xy'+2y=0;\ y(x)=O(x),\quad x\to 0,\ y(1)=2.$

Побудувати функцію Гріна для крайових задач:

25. $y''=f(x);$ а) $y(0)=y(1)=0;$ б) $y(0)=0,\ y'(1)=0;$ в) $y(0)+y(1)=0,\ y'(0)+y'(1)=0.$

26. $y''+y=f(x),\ y(0)=y(1)=0.$

27. $y''-k^2y=f(x),\ k\neq 0,\ y(-1)=y(1),\ y'(-1)=y'(1).$

28. $y''+y=f(x);\ y(0)=y(\pi),\ y'(0)=y'(\pi).$

29. $xy''-y'=f(x),\ y'(1)=0,\ y(2)=0.$

30. $x^2y''+xy'-y=f(x),\ y(1)=0,\ y(x)$ обмежений при $x\to+\infty.$

Записати в інтегральній формі розв'язки задач

31. $y''=f(x);\ y(a)=y(b)=0.$

32. $xy''+y'=2x;\ y(1)=y'(1),\ y(x)=O(1),\ x\to 0.$

Знайти власні значення і власні функції задач

33. $y''=\lambda y;\ y'(0)=y'(l)=0.$

34. $y''=\lambda y;\ y(0)=y'(0)=0.$

35. $x^2y''+\frac{1}{4}y=\lambda y;\ y(1)=y(l)=0.$

36. $y''+\lambda^2y=0;\ y(0)+y'(0)=0,\ (1+2\lambda^2)\,y(1)-2y'(1)=0.$

37. $y''+\lambda^2y=0;\ y(0)=0,\ (1+2\lambda^2)\,y(1)-2y'(1)=0.$

Розділ 4

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Загальні питання теорії систем у нормальній і симетричній формах

Система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\tag{1}$$

називається *системою в нормальній формі* або системою, розв'язаною відносно похідних шуканих функцій $x_i = x_i(t)$.

Розв'язком системи рівнянь (1) *на проміжку* $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ називається сукупність неперервно диференційовних на I функцій $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, що

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

при $\forall\ t \in I$.

Рівність $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$, де ψ — неперервно диференційовна в області визначення системи (1) функція, C — довільна стала, називається *першим інтегралом* цієї системи, якщо має місце рівність

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Якщо відомо n незалежних перших інтегралів $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = C_2$, ..., $\psi_n = C_n$, то сукупність

$$\psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

де C_i — довільні сталі, визначає *загальний інтеграл системи* (1).

Із загального інтеграла, розв'язуючи рівності (2) відносно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можна знайти практично будь-який розв'язок системи (1).

Якщо відомий відмінний від сталої один перший інтеграл $\psi(t, x_1, \ldots, x_n) = C$, то, розв'язуючи це рівняння відносно однієї із змінних, наприклад, відносно x_n

$$x_n = \Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, C) \tag{3}$$

і підставляючи вираз (3) в перші $n - 1$ рівняння системи (1), дістанемо систему рівнянь, в якій число невідомих функцій на одиницю менше, ніж в системі (1).

Розглянемо два методи розв'язування систем диференціальних рівнянь у нормальній формі. Перший з них — *метод виключення* полягає у зведенні системи рівнянь до одного рівняння n-го порядку або до кількох рівнянь порядку, меншого ніж n.

Загальна схема методу виключення така. Диференціюючи, наприклад, перше з рівнянь (1) послідовно $n - 1$ разів підставляючи щоразу замість похідних $\frac{dx_i}{dt}$ їх значення $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з рівнянь системи, дістаємо

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Знайшовши $x_2, x_3, \ldots, x_n$ з перших $n - 1$ рівнянь системи (4) і підставивши в останнє рівняння системи, дістанемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = F\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right).$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо розв'язки системи (1).

Систему рівнянь (1) іноді можна розв'язати за допомогою *методу інтегровних комбінацій*. Суть його полягає в тому, що за допомогою арифметичних операцій з рівнянь даної системи утворюють так звані *інтегровні комбінації*, тобто рівняння відносно деякої нової функції $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$, які легко інтегруються.

Наведені методи розв'язання системи рівнянь (1) можна застосувати також до *системи диференціальних рівнянь у симетричній формі:*

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{5}$$

При розв'язанні систем виду (5) доцільно використовувати властивість рівних дробів:

якщо

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

і $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — довільні числа, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n}.$$

4.1. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = x\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = xe^{\cos t}.$$

Розв'язання. Перше рівняння не залежить від y. Тому, відокремлюючи змінні, маємо $x = C_1e^{-\cos t}$. Підставимо у друге рівняння: $\frac{dy}{dt} = C_1$. Звідси $y = C_1t + C_2$.

Отже,

$$x = C_1e^{-\cos t}, \quad y = C_1t + C_2.$$

4.2. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + ay.$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини першого рівняння, маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}. \tag{6}$$

З другого рівняння знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = -x + ay = -x + a\left(\frac{dx}{dt} - ax\right) = a\frac{dx}{dt} - (1 + a^2)x.$$

Підставивши цей вираз у (6), дістанемо рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (1 + a^2)x = 0.$$

Корені відповідного характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тому $x = e^{at}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. З першого рівняння даної системи знаходимо $y(t)$:

$$y = \frac{dx}{dt} - ax = ae^{at}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{at}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) -$$
$$- ae^{at}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{at}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

4.3. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}.$$

Розв'язання. Диференціюємо обидві частини першого рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\frac{dy}{dt}}{y^2}. \tag{7}$$

З даної системи знаходимо:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}, \quad \frac{1}{y^2} = \left(\frac{dx}{dt} - 1\right)^2.$$

Тому рівняння (7) має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - 1\right)^2}{x-t}. \tag{8}$$

Проінтегруємо рівняння (8):

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - 1\right)}{\frac{dx}{dt} - 1} = \frac{\frac{dx}{dt} - 1}{x-1},$$

$$\frac{d}{dt} \ln\left|\frac{dx}{dt} - 1\right| = \frac{d}{dt} \ln|x-t|.$$

Звідси

$$\frac{dx}{dt} - 1 = C_1(x-t), \quad c_1 \neq 0; \quad \frac{d}{dt}(x-t) = C_1(x-t).$$

Інтегруючи, дістаємо $x = t + C_2 e^{C_1 t}$, $C_2 \in \mathbf{R}$, $C_2 \neq 0$. З першого рівняння системи маємо: $y = \frac{1}{1 - \frac{dx}{dt}}$. Тому

$$y = \frac{1}{1 - \frac{dx}{dt}} = \frac{1}{C_1(t-x)} = \frac{1}{-C_1 C_2 e^{C_1 t}} = -\frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 t},$$

$$x = t + C_2 e^{C_1 t}, \quad y = -\frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 t}.$$

4.4. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = y^2 + \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2y}.$$

Р о з в' я з а н н я. Диференціюємо обидві частини першого з даних рівнянь:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y\frac{dy}{dt} + \cos t. \tag{9}$$

З другого рівняння знаходимо $2y\frac{dy}{dt} = x$, тому рівняння (9) можна записати у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = \cos t.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

З першого рівняння системи маємо:

$$y^2 = \frac{dx}{dt} - \sin t = C_1e^t - C_2e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

4.5. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dz}{dt} = x + y + z.$$

Р о з в' я з а н н я. З першого рівняння маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt},$$

або з урахуванням другого рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0.$$

Звідси

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \quad y = \frac{dx}{dt} = C_1e^t - C_2e^{-t}.$$

Підставивши $x(t)$ і $y(t)$ в третє рівняння системи, дістанемо лінійне рівняння першого порядку $\frac{dz}{dt} - z = 2C_1e^t$, звідки $z = C_3e^t + 2C_1te^t$.

4.6. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = z - y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = z - x.$$

Р о з в' я з а н н я. Диференціюючи обидві частини першого рівняння, маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dt} - \frac{dy}{dt} .$$

Звідси, з урахуванням другого й третього рівнянь, дістаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

З третього рівняння системи маємо:

$$\frac{dz}{dt} - z = -x \text{ або } \frac{dz}{dt} - z = -C_1 \cos t - C_2 \sin t.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$z = C_3 e^t.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$z = a \cos t + b \sin t.$$

Для невизначених коефіцієнтів a і b маємо систему

$$b - a = -C_1, \quad -b - a = -C_2,$$

звідки

$$a = \frac{C_1 + C_2}{2} , \quad b = \frac{C_1 - C_2}{2} .$$

Отже,

$$z = C_3 e^t + \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \cos t + \frac{1}{2} (C_1 - C_2) \sin t.$$

Тоді з першого рівняння системи знаходимо:

$$y = z - \frac{dx}{dt} = C_3 e^t + \frac{1}{2} (C_1 - C_2) \cos t + \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \sin t.$$

4.7. Перевірити, чи співвідношення

$$\text{а) } t^2 + 2xy = C; \quad \text{б) } x - ty^2 = C$$

є першими інтегралами системи

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - t}{x} .$$

Р о з в' я з а н н я. Ліві частини даних співвідношень позначимо буквою z. Маємо:

а) $\frac{dz}{dt} = 2t + 2x\frac{dy}{dt} + 2y\frac{dx}{dt} = 2t + 2x\frac{y^2 - t}{x} + 2y(-y) \equiv 0;$

б) $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} - y^2 - 2ty\frac{dy}{dt} = -y - y^2 - 2ty\frac{y^2 - t}{x} \not\equiv 0.$

Отже, першим інтегралом даної системи є співвідношення

$$t^2 + 2xy = C.$$

4.8. Довести, що співвідношення $\psi_1 \equiv tx = C_1$, $\psi_2 \equiv ty + x^2$ є незалежними першими інтегралами системи $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{2x^2 - ty}{t^2}$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = t\frac{dx}{dt} + x = -x + x \equiv 0;$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = t\frac{dy}{dt} + y + 2x\frac{dx}{dt} = \frac{2x^2}{t} - y + y - \frac{2x^2}{t} \equiv 0.$$

Отже, співвідношення $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = C_2$ є першими інтегралами даної системи.

Щоб довести незалежність цих інтегралів, складемо матрицю Якобі

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(t, x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{dt}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial x}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial x}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & t & 0 \\ y & 2x & t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $t \neq 0$, то ранг цієї матриці дорівнює 2 і, отже, дані інтеграли незалежні.

4.9. Знайти перший інтеграл системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 + \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = -y\cos x.$$

Р о з в' я з а н н я. Помножимо почленно перше рівняння на $\cos x$, а друге — на $-y^2 + \sin x$ і додамо:

$$y\cos x\frac{dx}{dt} + (-y^2 + \sin x)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Останнє рівняння запишемо так:

$$\frac{d}{dt}\left(y\sin x - \frac{y^3}{3}\right) = 0.$$

Звідси знаходимо перший інтеграл даної системи:

$$3y\sin x - y^3 = C.$$

4.10. Довести, що функція

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - 2\ln|xy - 1|$$

вздовж траєкторій будь-якого розв'язку системи

$$\frac{dx}{dt} = x + y - xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + x^2y$$

є сталою.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $(x(t), y(t))$ — розв'язок даної системи рівнянь. Вздовж траєкторії цього розв'язку функція

$$u((x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t) - \ln(x(t)y(t) - 1)^2$$

неперервно диференційовна. Обчислимо її похідну:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - \frac{2(xy-1)\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)}{(xy-1)^2} =$$

$$= 2\left(x - \frac{y}{xy-1}\right)\frac{dx}{dt} + 2\left(y - \frac{x}{xy-1}\right)\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{2}{xy-1}\left((-x - y + x^2y)\frac{dx}{dt} + (x - y + xy^2)\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= \frac{2}{xy-1}((-x - y + x^2y)(x + y - xy^2) + (-x - y + xy^2)\times$$

$$\times(-x - y + x^2y)) \equiv 0.$$

Отже, при всіх t в проміжку існування розв'язку даної системи

$$u(x(t), y(t)) = C.$$

4.11. Знайти перший інтеграл системи

$$(x^2 + y^2 - t^2)\frac{dx}{dt} = tx, \quad (x^2 + y^2 - t^2)\frac{dy}{dt} = ty.$$

Р о з в' я з а н н я. Помноживши почленно кожне з рівнянь системи відповідно на $2x$ і $2y$, дістанемо:

$$(x^2 + y^2 - t^2)\frac{dx^2}{dt} = 2tx^2, \quad (x^2 + y^2 - t^2)\frac{dy^2}{dt} = 2ty^2.$$

Додамо ці рівняння:

$$(z - t^2)\frac{dz}{dt} - 2tz = 0, \text{ де } z = x^2 + y^2.$$

Здобуте рівняння можна записати у вигляді

$$z\frac{dz}{dt}-\left(t^2\frac{dz}{dt}+2tz\right)=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{z^2}{2}-t^2z\right)=0.$$

Звідси $z^2-2t^2z=C$. Отже, перший інтеграл системи має вигляд

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2t^2)=C.$$

4.12. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{y}{t},\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{x}{t},\quad t>0.$$

Р о з в' я з а н н я. Додавши й віднявши почленно дані рівняння, дістанемо:

$$\frac{d}{dt}(x+y)=-\frac{1}{t}(x+y),\quad \frac{d}{dt}(x-y)=\frac{1}{t}(x-y).$$

Звідси

$$x+y=\frac{C_1}{t},\quad x-y=C_2t,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t}+C_2t\right),\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t}-C_2t\right).$$

4.13. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt}=x^2y,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{y}{t}-xy^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Помноживши обидві частини першого рівняння на y, а другого — на x і додавши їх почленно, дістанемо:

$$y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}=\frac{xy}{t},\quad \frac{d}{dt}(xy)=\frac{xy}{t}.$$

Звідси

$$xy=C_1t. \tag{10}$$

Замінивши в першому рівнянні даної системи xy на C_1t, дістанемо

$$\frac{dx}{dt}=C_1tx.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$x=C_2e^{\frac{1}{2}C_1t^2}.$$

З рівності (10) при $C_2\neq 0$ маємо

$$y=\frac{C_1t}{x}=\frac{C_1}{C_2}te^{-\frac{1}{2}C_1t^2}.$$

Крім того, якщо $x = 0$, то з другого рівняння $y = Ct$; якщо $y = 0$, то з першого рівняння $x = C$.

4.14. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y + (1 - x^2 - y^2)\,x, \quad \frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2 - y^2)\,y.$$

Зобразити траєкторії цієї системи і визначити напрямок руху по цих траекторіях.

Розв'язання. Очевидний розв'язок системи: $x = 0$, $y = 0$. Знайдемо інші розв'язки. Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = \rho\sin\varphi + (1 - \rho^2)\,\rho\cos\varphi, \\ &\frac{d\rho}{dt}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = -\rho\cos\varphi + (1 - \rho^2)\,\rho\sin\varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

Перше рівняння системи (11) помножимо на $\cos\varphi$, а друге — на $\sin\varphi$ і додамо. Тоді

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\,(1 - \rho^2).$$

Помноживши перше рівняння на $\sin\varphi$, а друге — на $\cos\varphi$ і віднявши від другого рівняння перше, дістанемо:

$$\rho\,\frac{d\varphi}{dt} = -\rho, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -1.$$

Отже, в полярних координатах дана система має вигляд

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\,(1 - \rho^2), \; \frac{d\varphi}{dt} = -1. \tag{12}$$

Перше рівняння запишемо у вигляді $\frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho^2\,(1 - \rho^2)$. Звідси

$$\rho = 1 \text{ або } \left(\frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{1}{\rho^2}\right) d\rho^2 = -2dt,$$

$$\ln|\rho^2 - 1| - \ln\rho^2 = -2t + \ln C, \quad \left|1 - \frac{1}{\rho^2}\right| = C_1 e^{-2t}, \quad C_1 > 0.$$

У крузі $0 < \rho \leqslant 1$ розв'язки рівняння (12) мають вигляд

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + C_1 e^{-2t}}}, \quad \varphi = C_2 - t, \quad C_1 \geqslant 0.$$

При $\rho > 1$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - C_1 e^{-2t}}}, \quad \varphi = C_2 - t, \quad 0 < C_1 < 1.$$

Зазначимо, що розв'язки, які почалися при $t = 0$ в області $\rho > 1$, існують не при всіх $t \in \mathbf{R}$. Кожний з них має свій проміжок існування: $t > \frac{1}{2} \ln C_1$, $0 < C_1 < 1$.

Запишемо розв'язки даної системи рівнянь

$$x = 0, \quad y = 0;$$

$$x = \frac{\cos(t - C_2)}{\sqrt{1 + C_1 e^{-2t}}}, \quad y = \frac{\sin(t - C_2)}{\sqrt{1 + C_2 e^{-2t}}}, \quad C_1 \geqslant 0;$$

якщо

$$x_0^2 + y_0^2 \leqslant 1;$$

$$x = \frac{\cos(t - C_2)}{\sqrt{1 - C_1 e^{-2t}}}, \quad y = \frac{\sin(t - C_2)}{\sqrt{1 - C_1 e^{-2t}}}, \quad 0 \leqslant C_1 < 1;$$

якщо

$$x_0^2 + y_0^2 > 1.$$

Траєкторія розв'язку $x = 0$, $y = 0$ — точка $(0, 0)$. Траєкторією розв'язків, які почались на колі $x^2 + y^2 = 1$ ($x = \cos(t - C_2)$, $y = \sin(t - C_2)$), є це саме коло.

Траєкторіями інших розв'язків є спіралі

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + C_1 e^{2(\varphi - C_2)}}}, \quad C_1 > 0,$$

якщо

$$0 < x_0^2 + y_0^2 < 1,$$

і спіралі

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - C_1 e^{2(\varphi - C_2)}}}, \quad 0 < C_1 < 1,$$

якщо

$$x_0^2 + y_0^2 > 1.$$

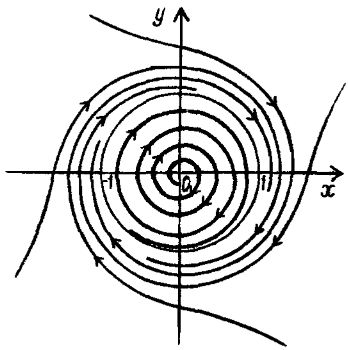


Рис. 41

Оскільки $\varphi = C_2 - t$, то при $t \to +\infty$ величина кута $\varphi \to -\infty$. Тому з часом фазова точка, яка рухається по спіралі, наближається до кола $x^2 + y^2 = 1$. Це коло називається *стійким граничним циклом* (рис. 41).

4.15. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + y + t, \quad \frac{dz}{dt} = x + z + t.$$

Р о з в' я з а н н я. Віднімаючи почленно від другого рівняння третє, дістанемо

$$\frac{d}{dt}(y - z) = y - z, \quad y - z = C_1 e^t.$$

Підставляючи це значення в перше рівняння, маємо $x = C_1 e^t + C_2$.

З урахуванням останньої рівності друге рівняння набирає вигляду

$$\frac{dy}{dt} = y + C_2 + C_1 e^t + t.$$

Розв'язуючи це лінійне рівняння, знаходимо

$$y = (C_1 t + C_3) e^t - t - 1 - C_2.$$

Тоді

$$z = y - C_1 e^t = (C_1 t + C_3 - C_1) e^t - 1 - C_2.$$

4.16. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 + y, \quad \frac{dz}{dt} = x^2 + z.$$

Р о з в' я з а н н я. З даних рівнянь дістаємо

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = y - z - x^2 - y + x^2 + z = 0,$$

тобто

$$\frac{d}{dt}(x - y + z) = 0, \quad x - y + z = C_1. \tag{13}$$

Беручи до уваги перший інтеграл (13), з першого рівняння дістаємо

$$\frac{dx}{dt} = x - C_1, \quad x = C_2 e^t + C_1.$$

Підставляючи це значення x у друге рівняння, маємо

$$\frac{dy}{dt} = y + C_2^2 e^{2t} + 2C_1 C_2 e^t + C_1^2.$$

Звідси

$$y = -C_1^2 + (2C_1 C_2 t + C_3) e^t + C_2^2 e^{2t}.$$

Використовуючи перший інтеграл (13), знаходимо

$$z = C_1 - x + y = -C_2 e^t + (2C_1 C_2 t + C_3) e^t + C_2^2 e^{2t} - C_1^2.$$

4.17. Розв'язати систему $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{zy} = \frac{dz}{xy}$.

Р о з в' я з а н н я. З рівняння $yzdx = xzdy$ знаходимо:

$$x = C_1 y. \tag{14}$$

Складемо інтегровну комбінацію:

$$\frac{ydx + xdy}{yxz + xyz} = \frac{dz}{xy}, \quad \frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{xy}.$$

Скорочуючи обидві частини цього рівняння на $\frac{1}{xy}$ та інтегруючи його, дістаємо

$$xy - z^2 = C_2. \tag{15}$$

Оскільки перші інтеграли (14) і (15) незалежні, то всі розв'язки даної системи визначаються із співвідношень $x = C_1 y$, $xy - z^2 = C_2$.

4.18. Розв'язати систему $\frac{dx}{2z-y} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

Розв'язання. З рівняння $zdy = ydz$ знаходимо один з інтегралів системи: $y = C_1 z$. Знайдемо ще один інтеграл, утворивши інтегровну комбінацію:

$$\frac{dx}{2z-y} = \frac{2dz - dy}{2z-y}, \quad d(x - 2z + y) = 0.$$

Маємо

$$x - 2z + y = C_2.$$

Очевидно, що знайдені перші інтеграли — незалежні.

4.19. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} = \frac{dz}{2yz}.$$

Розв'язання. Прирівнявши перше і третє співвідношення та скоротивши на y, дістанемо рівняння $zdx = xdz$. Звідси $\frac{x}{z} = C_1$, $x = C_1 z$. Помноживши чисельник і знаменник кожного із співвідношень відповідно на $2x$, $2y$, $2z$ і додавши їх, дістанемо

$$\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{2y(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{2yz} \left(= \frac{dx}{2xy}\right),$$

або

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z} \left(= \frac{dx}{x}\right).$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо $x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z \ (= C_3 x)$. Тому остаточно

$$x = C_1 z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z \ (= C_3 x).$$

4.20. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}.$$

Розв'язання. Користуючись властивістю рівних дробів, складемо інтегровну комбінацію:

$$\frac{dx-dy}{y+z-(x+z)}=\frac{dy-dz}{x+z-(x+y)},$$

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(y-z)}{y-z}, \quad x-y=C_1(y-z).$$

Другу інтегровну комбінацію складемо так:

$$\frac{dx+dy+dz}{y+z+x+z+x+y}=\frac{dx-dy}{y+z-(x+z)}, \quad \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{d(x-y)}{-(x-y)}.$$

Звідси знаходимо ще один інтеграл даної системи:

$$\frac{1}{2}\ln|x+y+z|+\ln|x-y|=\frac{1}{2}\ln C_2,$$

$$(x+y+z)(x-y)^2=C_2.$$

Неважко показати, що знайдені перші інтеграли незалежні. Тому всі розв'язки даної системи визначаються співвідношеннями

$$x-y=C_1(y-z), \quad (x+y+z)(x-y)^2=C_2.$$

4.21. Розв'язати систему $\dfrac{dx}{x(y-z)}=\dfrac{dy}{y(z-x)}=\dfrac{dz}{z(x-y)}$.

Розв'язання. Складемо інтегровну комбінацію:

$$\frac{dx+dy}{x(y-z)+y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}, \quad \frac{d(x+y)}{z(y-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}.$$

Звідси $x+y+z=C_1$. Можна скласти ще одну інтегровну комбінацію:

$$\frac{ydx+xdy}{xy(y-z)+xy(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)},$$

$$\frac{d(xy)}{xy(y-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}, \quad \frac{d(xy)}{xy}=\frac{dz}{-z}.$$

Тоді $zd(xy)+xydz=0$, $d(xyz)=0$, $xyz=C_2$.
Остаточно

$$x+y+z=C_1, \quad xyz=C_2.$$

4.22. Розв'язати систему $\dfrac{dx}{x+y-xy^2}=\dfrac{dy}{x^2y-x-y}=\dfrac{dz}{y^2-x^2}$.

Розв'язання. Використовуючи властивість рівних дробів, складаємо інтегровну комбінацію

$$\frac{2xdx+2ydy}{2x(x+y-xy^2)+2y(x^2y-x-y)}=\frac{dz}{y^2-x^2},$$

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2(x^2-y^2)} = \frac{dz}{-(x^2-y^2)},$$

$$d(x^2+y^2) = -2dz.$$

Звідси $x^2 + y^2 + 2z = C_1$. Ще одну інтегровну **комбінацію** складемо так:

$$\frac{ydx + xdy}{xy + y^2 - xy^3 + x^3y - x^2 - xy} = \frac{dz}{y^2 - x^2},$$

$$\frac{d(xy)}{(y^2 - x^2)(1 - xy)} = \frac{dz}{y^2 - x^2}, \quad \frac{d(xy)}{1 - xy} = dz.$$

Інтегруючи, знаходимо $\ln|1 - xy| + z = C_2$.

Неважко впевнитись, що знайдені перші інтеграли — **незалежні**:

$$x^2 + y^2 + 2z = C_1, \quad \ln|1 - xy| + z = C_2.$$

4.23. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \quad \frac{dy}{dt} = 2y - z, \quad \frac{dz}{dt} = z.$$

Р о з в' я з а н н я. Дані рівняння можна розв'язати **послідовно**. З третього рівняння маємо:

$$z = C_3e^t.$$

Тоді друге рівняння набирає вигляду

$$\frac{dy}{dt} = 2y - C_3e^t.$$

Його загальний розв'язок:

$$y = C_2e^{2t} + C_3e^t.$$

Перше рівняння системи запишемо так:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - C_2e^{2t}. \qquad (16)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (16), має вигляд $x = C_1e^{2t}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (16) шукаємо у вигляді

$$x = (at + b)e^{2t}.$$

Підставивши x у (16), знаходимо: $a = -C_2$, b — будь-яке **число**. Тому

$$x = C_1e^{2t} - C_2te^{2t} = (C_1 - C_2t)e^{2t}.$$

Отже, розв'язки даної системи мають вигляд:

$$x = (C_1 - C_2t)e^{2t}, \quad y = C_2e^{2t} + C_3e^t, \quad z = C_3e^t.$$

4.24. Розв'язати систему $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{t^2}$, $\frac{dy}{dt} = 3x + \frac{3}{t} y$.

Розв'язання. З першого рівняння маємо

$$y = t^2 \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = 2t \frac{dx}{dt} + t^2 \frac{d^2x}{dt^2},$$

а з другого

$$\frac{dy}{dt} = 3x + \frac{3}{t} y = 3x + 3t \frac{dx}{dt}.$$

Отже, дану систему можна звести до рівняння другого порядку

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} = 3x + 3t \frac{dx}{dt},$$

тобто до рівняння Ейлера

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} - 3x = 0. \qquad (17)$$

Розв'язки рівняння (17) шукаємо у вигляді $x = t^k$. Для визначення k дістаємо рівняння $k(k-1) - k - 3 = 0$, звідки $k = -1$, $k_2 = 3$. Загальний розв'язок рівняння (17):

$$x = \frac{C_1}{t} + C_2 t^3.$$

З першого рівняння даної системи знаходимо:

$$y = t^2 \frac{dx}{dt} = -C_1 + 3C_2 t^4.$$

4.2. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь

Лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь називається система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad t \in I, \qquad (1)$$

де $A(t)$ — квадратна матриця порядку n, елементи якої a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — неперервні на інтервалі I функції. Будь-який розв'язок системи (1) можна продовжити на весь інтервал I.

Множина $\mathfrak{X}$ всіх розв'язків системи (1), визначених на I, є лінійним простором. Лінійний простір $\mathfrak{X}$ всіх розв'язків лінійної однорідної системи ізоморфний фазовому простору R^n цієї системи.

Фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь називається базис лінійного простору розв'язків $\mathfrak{X}$, тобто n лінійно незалежних розв'язків цієї системи.

Матриця $X(t)$, стовпцями якої є розв'язки, що утворюють фундаментальну систему, називається *фундаментальною матрицею*.

Якщо $X(t_0) = E$, де E — одинична матриця, то фундаментальна матриця $X(t)$ називається *матрицантом системи* (1).

Якщо $X(t)$ — фундаментальна матриця, а C — стала неособлива матриця порядку n, то $X(t)C$ є також фундаментальною матрицею системи (1).

Будь-яка система виду (1) завжди має фундаментальну матрицю $X(t)$. Будь-який розв'язок $x(t)$ системи (1) можна записати у вигляді

$$x(t) = X(t)C, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — сталі, тобто $x(t)$ є лінійною комбінацією розв'язків фундаментальної системи.

Будь-які $n+1$ розв'язків системи (1) лінійно залежні.

Визначником Вронського системи вектор-функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ називається числова функція

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \ldots & \varphi_{n1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{1n}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}, \quad \varphi_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{k1}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{kn}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Розв'язки $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ системи утворюють фундаментальну систему тоді і *тільки тоді, коли їх визначник Вронського* $W(t)$ *відмінний від нуля при деякому* $t \in I$.

Якщо визначник Вронського розв'язків системи 1) дорівнює нулю в одній точці, то він тотожньо дорівнює нулю при всіх $t \in I$.

Для визначника Вронського розв'язків системи (1) справедлива формула *Ліувілля — Остроградського:*

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(r)dr},$$

де $a(t) = \operatorname{Sp} A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$.

4.25. Обчислити при $t = \pi$ значення визначника Вронського, складеного для розв'язків

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = 1, \quad y_1(0) = 1,$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_2(0) = -1, \quad y_2(0) = 1,$$

системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x\sin t + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y\sin t.$$

Р о з в' я з а н н я. Скористаємось формулою Ліувілля — Остроградського:

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau}.$$

У цьому випадку

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & 1\\ 1 & -\sin t\end{pmatrix},\quad \operatorname{Sp} A(t)=0.$$

Отже,

$$W(\pi)=W(0)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2.$$

4.26. Відомо, що $x_1=-\sin t$, $y_1=\cos t$ — розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt}=x\cos^2 t-(1-\sin t\cos t)\,y,\quad \frac{dy}{dt}=(1+\sin t\cos t)\,x+y\sin^2 t.$$

Знайти всі розв'язки цієї системи.

Розв'язання. Нехай $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ — розв'язок даної системи, для якого $\varphi(0)=1$, $\psi(0)=0$.

За формулою Ліувілля — Остроградського маємо

$$\begin{vmatrix}\varphi(t) & -\sin t\\ \psi(t) & \cos t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}e^{\int\limits_0^t(\sin^2\tau+\cos^2\tau)d\tau}=e^t,$$

або

$$\varphi(t)\cos t+\psi(t)\sin t=e^t. \tag{2}$$

Оскільки $(\varphi(t),\ \psi(t))$ — розв'язок даної системи, то, внаслідок (2), маємо

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\psi+\cos t\,(\varphi\cos t+\psi\sin t)=-\psi+e^t\cos t,$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\varphi+\sin t\,(\varphi\cos t+\psi\sin t)=\varphi+e^t\sin t,$$

або

$$\frac{d}{dt}(\varphi-e^t\cos t)=-(\psi-e^t\sin t),$$

$$\frac{d}{dt}(\psi-e^t\sin t)=\varphi-e^t\cos t.$$

Можна вибрати $\varphi=e^t\cos t$, $\psi=e^t\sin t$.

Загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t\cos t & -\sin t\\ e^t\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1e^t\cos t-C_2\sin t\\ C_1e^t\sin t+C_2\cos t\end{pmatrix}.$$

4.27. Відомо, що система рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=t(1-t)\,x+(t^3-t^2+t+1)\,y,\quad \frac{dy}{dt}=(1-t)\,x+(t^2-t+1)\,y$$

має розв'язок $x_1 = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, де $x_1(t)$, $y_1(t)$ — многочлени відповідно другого й третього степеня. Знайти всі розв'язки даної системи рівнянь.

Розв'язання. Нехай $x_1(t) = a + bt + ct^2$, $y_1(t) = d + ft$. Підставивши ці вирази в дану систему, для визначення невідомих коефіцієнтів дістанемо рівняння:

$$-c + f = 0, \quad c - b + d - f = 0, \quad b - a - d + f = 0,$$
$$a + f + d - 2c = 0, \quad b = d, \quad a + d - f = 0.$$

Ці рівняння виконуються, якщо $b = d = 0$, $a = f = c$. Поклавши $a = f = c = 1$, знаходимо один з розв'язків $x_1 = 1 + t^2$, $y_1 = t$. Щоб знайти ще один розв'язок, лінійно незалежний з розв'язком $(x_1; y_1)$, скористаємось формулою Ліувілля — Остроградського.

Нехай $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\varphi(0) = 0, \ \psi(0) = 1)$ — шуканий розв'язок. Тоді

$$\begin{vmatrix} 1 + t^2 & \varphi(t) \\ t & \psi(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{\int_0^t (\tau(1-\tau)+\tau^2-\tau+1)d\tau} = e^t$$

або $(1 + t^2)\psi - t\varphi = e^t$.

Ураховуючи цю рівність, з другого рівняння даної системи знаходимо

$$\frac{d\psi}{dt} = \varphi - t\varphi + (1 + t^2)\psi - t\psi = \varphi - t\psi + te^t.$$

При $t \neq 0$ маємо

$$t\frac{d\psi}{dt} = t\varphi - t^2\psi + te^t = (1 + t^2)\psi - e^t - t^2\psi + te^t,$$

$$t\frac{d\varphi}{dt} = \psi + (t - 1)e^t.$$

Звідси, беручи до уваги те, що $\psi(0) = 1$, дістаємо

$$\psi(t) = e^t, \quad t\varphi = (1 + t^2)\psi - e^t = t^2e^t,$$

тобто $\varphi(t) = te^t$, $\psi(t) = e^t$. Отже, побудована фундаментальна система розв'язків: $x_1 = 1 + t^2$, $y_1 = t$, $x_2 = te^t$, $y_2 = e^t$.

Отже,

$$x = C_1(1 + t^2) + C_2te^t, \quad y = C_1t + C_2e^t$$

— загальний розв'язок даної системи.

4.28. Відомо, що $x_1 = \cos t - \frac{\sin t}{t}$, $y_1 = \frac{\sin t}{t}$ — розв'язок системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} - ty, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t}.$$

Знайти всі розв'язки цієї системи.

Розв'язання. Диференціюючи почленно друге рівняння даної системи, зведемо її до одного рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{t}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{x}{t}\right)=\frac{1}{t}\left(-\frac{2x}{t}-ty\right)=\frac{1}{t}\left(-2\frac{dy}{dt}-ty\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{2}{t}\frac{dy}{dt}-y.$$

Частинний розв'язок цього рівняння $y_1=\frac{\sin t}{t}$. Виконаємо заміну невідомої функції

$$y=zy_1(t)=z\frac{\sin t}{t}. \qquad (3)$$

Маємо:

$$\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\sin t}{t}+2\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\frac{dz}{dt}+\frac{-t^2\sin t-2t\cos t+2\sin t}{t^3}z+$$

$$+\frac{2}{t}\left(\frac{\sin t}{t}\frac{dz}{dt}+\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}z\right)+\frac{\sin t}{t^3}z=0.$$

Після спрощень дістаємо рівняння

$$\sin t\frac{d^2z}{dt^2}+2\cos t\frac{dz}{dt}=0.$$

Запишемо це рівняння так:

$$\sin^2 t\frac{d^2z}{dt^2}+2\sin t\cos t\frac{dz}{dt}=0.$$

Звідси

$$\sin^2 t\frac{dz}{dt}=C. \qquad (4)$$

Покладемо в (4) $C=-1$ і знайдемо один з розв'язків; $z=\operatorname{ctg} t$. Згідно з (3),

$$y=\operatorname{ctg} t\frac{\sin t}{t}=\frac{\cos t}{t}.$$

Дістали два лінійно незалежні розв'язки y_1 і y_2. Підставивши в друге рівняння системи, знаходимо x_2:

$$x_2=t\frac{dy_2}{dt}=t\frac{-t\sin t-\cos t}{t^2}=-\sin t-\frac{\cos t}{t}.$$

Отже, маємо два розв'язки

$$x_1=\cos t-\frac{\sin t}{t},\quad y_1=\frac{\sin t}{t};$$

$$x_2=-\sin t-\frac{\cos t}{t},\quad y_2=\frac{\cos t}{t}.$$

Визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t - \dfrac{\sin t}{t} & -\sin t - \dfrac{\cos t}{t} \\ \dfrac{\sin t}{t} & \dfrac{\cos t}{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \neq 0.$$

Тому ці розв'язки лінійно незалежні. Загальний розв'язок системи:

$$x = C_1\left(\cos t - \frac{\sin t}{t}\right) - C_2\left(\sin t + \frac{\cos t}{t}\right),$$

$$y = \frac{1}{t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

4.29. З'ясувати, чи є матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-\cos t} & -e^{\sin t} \\ -e^{-\cos t} & 2e^{\sin t} \end{pmatrix}$$

фундаментальною матрицею системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2\sin t - \cos t)\, x + (\sin t - \cos t)\, y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2(\cos t - \sin t)\, x + (2\cos t - \sin t)\, y. \end{aligned} \qquad (5)$$

Знайти матрицант цієї системи та її розв'язок, який задовольняє умову $x(\pi) = -1$, $y(\pi) = 2$.

Р о з в' я з а н н я. Перевіримо, чи стовпці даної матриці є розв'язками системи (5). Маємо:

$$\frac{d}{dt} e^{-\cos t} = \sin t\, e^{-\cos t} \equiv (2\sin t - \cos t)\, e^{-\cos t} + (\sin t - \cos t) \times$$
$$\times (-e^{-\cos t}),$$

$$\frac{d}{dt}(-e^{-\cos t}) = -\sin t\, e^{-\cos t} \equiv (2\cos t - \sin t)\, e^{-\cos t} +$$
$$+ (2\cos t - \sin t)(-e^{-\cos t}),$$

$$\frac{d}{dt}(-e^{\sin t}) \cos t e^{\sin t} \equiv (2\sin t - \cos t)(-e^{\sin t}) + (\sin t - \cos t)\, 2e^{\sin t}$$

$$\frac{d}{dt}(2e^{\sin t}) = 2\cos t e^{\sin t} \equiv 2(\cos t - \sin t)(-e^{\sin t}) +$$
$$+ (2\cos t - \sin t)\, 2e^{\sin t}.$$

Крім того, визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} e^{-\cos t} & -e^{\sin t} \\ -e^{-\cos t} & 2e^{\sin t} \end{vmatrix} = e^{\sin t - \cos t} \neq 0.$$

Отже, дана матриця є фундаментальною. Матрицант даної системи шукаємо у вигляді $X(t, t_0) = X(t)\,C$, де сталу матрицю C знайдемо з умови $X(t_0)\,C = E$, звідки $C = X^{-1}(t_0)$.

Обчисливши обернену до $X(t_0)$ матрицю, дістанемо

$$X(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-\cos t} & -e^{\sin t} \\ -e^{-\cos t} & 2e^{\sin t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{\cos t_0} & e^{\cos t_0} \\ e^{-\sin t_0} & e^{-\sin t_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-(\cos t - \cos t_0)} - e^{\sin t - \sin t_0} & e^{-(\cos t - \cos t_0)} - e^{\sin t - \sin t_0} \\ 2e^{\sin t - \sin t_0} - 2e^{-(\cos t - \cos t_0)} & 2e^{\sin t - \sin t_0} - e^{-(\cos t - \cos t_0)} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи (5), який задовольняє умови $x(\pi) = -1$, $y(\pi) = 2$, запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t, \pi) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-\cos t - 1} - e^{\sin t} & e^{-1-\cos t} - e^{\sin t} \\ 2\left(e^{\sin t} - e^{-1-\cos t}\right) & 2e^{\sin t} - e^{-1-\cos t} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-\sin t} \\ 2e^{\sin t} \end{pmatrix},$$

тобто $x = -e^{-\sin t}$, $y = 2e^{\sin t}$.

4.30. Знайти розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2}x,$$

який задовольняє умову $x(-1) = 1$, $y(-1) = -2$.

Розв'язання. Диференціюючи перше рівняння, дану систему зводимо до рівняння Ейлера

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2}x, \quad t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2x - 0. \tag{6}$$

Розв'язки цього рівняння шукаємо у вигляді $x = t^k$. Для визначення k маємо рівняння $k(k-1) - 2 = 0$, звідки $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Отже,

$$x = C_1t^2 + \frac{C_2}{t}$$

— загальний розв'язок (6). З першого рівняння системи маємо

$$y = 2C_1t - \frac{C_2}{t^2}.$$

Ураховуючи початкові умови, C_1 і C_2 визначаємо із системи $1 = C_1 - C_2$, $-2 = -2C_1 - C_2$. Маємо $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Шуканий розв'язок: $x = t^2$, $y = 2t$.

4.31. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = 1, \quad \frac{dy}{dt} - \left(1 + \frac{2}{t}\right)x - y = -1.$$

Розв'язання. Перше рівняння можна розв'язати незалежно від другого як лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок цього рівняння $x = \frac{C_1}{t^2}$. Підставивши в друге рівняння, дістанемо

$$\frac{dy}{dt} - y = \frac{t}{3} + \frac{C_1}{t^2} + \frac{2C_1}{t^3} - \frac{1}{3}.$$

Це також лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y = C_2 e^t.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = \alpha + \beta t + \frac{\gamma}{t^2}$. Підставивши y в рівняння, дістанемо: $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{3}$, $\gamma = -C_1$. Тому $y = C_2 e^t - \frac{t}{3} - \frac{C_1}{t^2}$.

4.3. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

Систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими **коефіцієнтами**

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ — n-вимірний вектор, A — дійсна стала квадратна матриця порядку n, методом виключення можна звести до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно однієї невідомої функції. Проте існують й інші методи розв'язання таких систем.

Метод Ейлера. Розв'язки системи (1) шукають у вигляді

$$x = e^{\lambda t} h, \quad h = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

Функція (2) є розв'язком системи (1) тоді і тільки тоді, коли λ — власне значення матриці A, а h — власний вектор цієї матриці, який відповідає числу λ. Якщо власні значення $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матриці A попарно різні, а $h_1, h_2, ..., h_n$ — відповідні їм власні вектори, то загальний розв'язок системи (1) має вигляд

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} h_n,$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ — довільні числа.

Якщо власному значенню λ кратності k відповідає рівно k лінійно незалежних власних векторів $h_1, ..., h_k$, то система (1) має k лінійно незалежних розв'язків виду $e^{\lambda t} h_1, ..., e^{\lambda t} h_k$.

Якщо власному значенню λ кратності k відповідає m, $m < k$, лінійно незалежних власних векторів, то розв'язки, які відповідають λ, можна шукати у вигляді

$$x = (h_0 + h_1 t + \cdots + h_{k-m} t^{k-m})\, e^{\lambda t}, \tag{3}$$

де $h_0, h_1, ..., h_{k-m}$ — невідомі вектори.

Щоб знайти координати невідомих векторів h_0, h_1, ..., h_{k-m}, треба підставити вираз (3) в систему (1). Прирівнявши коефіцієнти подібних членів у лівій і правій частинах системи, дістанемо рівняння для визначення координат невідомих векторів.

Якщо серед власних значень матриці A є комплексно спряжені пари чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, то розглянутим способом можна побудувати відповідні їм комплексні розв'язки виду $W = u + iv$. Виділивши дійсну й уявну частини таких розв'язків, дістанемо дійсні розв'язки, які відповідають λ.

Матричний метод інтегрування системи (1). Цей метод грунтується на безпосередньому знаходженні фундаментальної матриці системи.

Експонентою e^A матриці A називається сума ряду

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j, \tag{4}$$

де E — одинична матриця.

Властивості матричної експоненти

1°. Якщо $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^{B+A}$.

2°. Якщо $A = T^{-1}JT$, то $e^A = T^{-1}e^J T$.

3°. Матриця $X(t) = e^{At}$ є розв'язком матричної задачі Коші: $X' = AX$, $X(0) = E$, тобто є фундаментальною матрицею системи (1).

З властивості 3° випливає, що розв'язок системи (1), який задовольняє умову $x(0) = x_0$, визначається формулою $x(t) = e^{At}x_0$.

Отже, задача інтегрування системи (1) еквівалентна задачі побудови матриці e^{At}.

Матричну експоненту e^{At} зручно будувати, використовуючи так звану *жорданову форму матриці A*. Як відомо, будь-яку матрицю A можна записати у вигляді

$$A = T^{-1}J(A)\,T,\ J(A) = \operatorname{diag}(J_{m_1}(\lambda_1),\ J_{m_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ J_{m_s}(\lambda_s)),$$

де

$$J_{m_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix},\quad \sum_{i=1}^{s} m_i = n,$$

причому власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ не обов'язково різні. Квазідіагональна матриця $J(A)$ називається *жордановою формою матриці A*, а матриця $J_{m_i}(\lambda)$ — жордановою клітиною (блоком) матриці A. Якщо $m_i = 1$, то жорданова клітина називається *простою*. Загальна кількість s жорданових клітин дорівнює кількості лінійно незалежних власних векторів матриці A. Власному значенню λ відповідає $r = n - \operatorname{rang}(A - \lambda E)$ жорданових клітин.

З властивості 2° випливає, що

$$e^{At} = T^{-1}e^{J(A)t}T,$$

де

$$e^{J(A)t} = \operatorname{diag}\left[e^{J_{m_1}(\lambda_1)t},\ \ldots,\ e^{J_{m_s}(\lambda_s)t}\right].$$

Записавши матрицю $J_{m_i}(\lambda_i)$ у вигляді $J_{m_i}(\lambda_i)=\lambda_i E+I$, де

$$I=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \dots 0\\ 0 & 0 & 1 \dots 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 \dots 0\end{pmatrix},$$

дістанемо, що $e^{J_{m_i}(\lambda_i)t}=e^{\lambda t}e^{It}$.

Матрицю e^{It} легко побудувати за допомогою ряду (4), оскільки $I^{m_i}=0$, де m_i — порядок клітини $J_{m_i}(\lambda_i)$.

4.32. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt}=5x+2y, \quad \frac{dy}{dt}=-4x-y.$$

Розв'язання. Застосовуємо метод Ейлера. Частинні розв'язки системи шукаємо у вигляді $x=\alpha e^{\lambda t}$, $y=\beta e^{\lambda t}$. Підставивши в систему, дістанемо рівняння для визначення α і β:

$$(5-\lambda)\alpha+2\beta=0, \quad -4\alpha+(-1-\lambda)\beta=0. \tag{5}$$

Це лінійна однорідна система. Вона має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

звідки $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$.

При $\lambda=1$ система рівнянь (5) еквівалентна рівнянню $4\alpha+2\beta=0$, одним з розв'язків якого є $\alpha=1$, $\beta=-2$. Тому $x=e^t$, $y_1=-2e^t$ є розв'язком даної системи рівнянь.

При $\lambda=3$ система (5) еквівалентна рівнянню $2\alpha+2\beta=0$, якому задовольняє, наприклад, $\alpha=1$, $\beta=-1$. Отже, побудовано ще один розв'язок даної системи $x_2=e^{3t}$, $y_2=-e^{3t}$.

Оскільки

$$\begin{vmatrix}e^t & e^{3t}\\ -2e^t & -e^{3t}\end{vmatrix}=e^{4t}\neq 0,$$

то побудовані розв'язки лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок системи виражається формулою

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & e^{3t}\\ -2e^t & -e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1e^t+C_2e^{3t}\\ -2C_1e^t-C_2e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$ — власні значення, $h_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$, $h_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ власні вектори матриці даної системи.

4.33. **Розв'язати задачу Коші**

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y, \quad x(0) = 1;$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y, \quad y(0) = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Застосовуємо метод Ейлера. Власні значення матриці даної системи знаходимо з характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Оскільки власні числа матриці рівні, то розв'язки даної системи шукаємо у вигляді

$$x = (\alpha + \gamma t)\, e^{2t}, \quad y = (\beta + \delta t)\, e^{2t}.$$

Підставляючи ці вирази в дану систему, дістанемо

$$\gamma + 2(\alpha + \gamma t) = 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t,$$

$$\delta + 2(\beta + \delta t) = -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t.$$

Ці рівності виконуються тотожно тоді й тільки тоді, коли $\alpha - \gamma + \beta = 0$, $\gamma + \delta = 0$. Звідси дістаємо два лінійно незалежні розв'язки, наприклад, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \delta = 0$ і $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = -1$. Отже, маємо два лінійно незалежні розв'язки системи:

$$x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = (1 + t)\, e^{2t};$$

$$y_1(t) = -e^{2t}, \quad y_2(t) = -te^{2t}.$$

Загальний розв'язок має вид:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 (1 + t)\, e^{2t}, \quad y = -C_1 e^{2t} - C_2 t e^{2t}.$$

Сталі C_1 і C_2 знайдемо з умов $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Маємо:

$$1 = C_1 + C_2, \quad 0 = -C_1.$$

Звідси

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

Отже,

$$x = (1 + t)\, e^{2t}, \quad y = -te^{2t}.$$

4.34. **Розв'язати систему**

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y.$$

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Знайдемо розв'язок $x = \alpha e^{\lambda_1 t}$, $y = \beta e^{\lambda_1 t}$ даної системи, який відповідає кореню $\lambda_1 = 2 - i$. Підставивши ці вирази в систему, дістанемо рівняння для α і β:

$$(1 + i)\alpha + 2\beta = 0, \quad -\alpha + (i - 1)\beta = 0.$$

Одним з розв'язків цього рівняння є $\alpha = 1 - i$, $\beta = -1$; тому

$$x = (1 - i) e^{(2-i)t}, \quad y = -e^{(2-i)t}$$

— комплексний розв'язок даної системи, який запишемо у вигляді

$$x = (1 - i) e^{2t} (\cos t - i \sin t) = e^{2t} (\cos t - \sin t - i (\cos t + \sin t)),$$

$$y = -e^{2t} (\cos t - i \sin t).$$

Оскільки коефіцієнтами даної системи є дійсні числа, то дійсна й уявна частини цього розв'язку окремо є також розв'язками системи. Отже, маємо два дійсні розв'язки:

$$x_1(t) = e^{2t} (\cos t - \sin t), \qquad x_2(t) = e^{2t} (\cos t + \sin t),$$

$$y_1(t) = -e^{2t} \cos t, \qquad y_2(t) = -e^{2t} \sin t.$$

Можна показати, що ці розв'язки лінійно незалежні, тому загальний розв'язок має вид

$$x = e^{2t} ((C_1 - C_2) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t), \quad y = -e^{2t} (C_1 \cos t - C_2 \sin t).$$

4.35. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

Р о з в' я з а н н я. Згідно з методом Ейлера, розв'язки шукаємо у вигляді $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$, $z = \gamma e^{\lambda t}$. Для визначення $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -\lambda\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ \alpha + (-\lambda)\beta + \gamma = 0; \\ \alpha + \beta - \lambda\gamma = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Це система має нетривіальний розв'язок, якщо

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Кореню $\lambda_1 = 2$ відповідає система з двох рівнянь (третє є наслідком двох перших):

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Один з розв'язків цієї системи: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. Тому $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = e^{2t}$, $z_1 = e^{2t}$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь. Ранг матриці системи алгебраїчних рівнянь (6) при $\lambda = -1$ дорівнює одиниці. Отже, система зводиться до одного рівняння $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Це рівняння має два лінійно незалежні розв'язки, наприклад $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$ і $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Кожному з них відповідає один розв'язок:

$$x_2 = e^{-t},\ y_2 = 0,\ z_2 = -e^{-t};$$

$$x_3 = 0,\quad y_3 = -e^{-t},\quad z_3 = e^{-t}.$$

Оскільки вронскіан

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

то розв'язки утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вид

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t},\quad y = C_1e^{2t} - C_3e^{-t},\quad z = C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + C_3e^{-t}.$$

4.36. Знайти e^{At}, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) За означенням маємо

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$$

Обчислимо матриці A^k, $k = 2, 3, \ldots$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$A^3 = A^2A = A,\quad A^4 = A^2A^2 = EE = E.$$

Отже, $A^k = A$, якщо $k = 2p + 1$ і $A^k = E$, якщо $k = 2p$. Тому

$$e^{At} = E + At + E\frac{t^2}{2!} + A\frac{t^3}{3!} + E\frac{t^4}{4!} + \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{t^3}{3!} + \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

б) Обчислимо матриці A^k:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$A^{2k} = (-1)^k E, \quad A^{2k+1} = (-1)^k A, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Тому

$$e^{At} = E + At - E\frac{t^2}{2!} - A\frac{t^3}{3!} + E\frac{t^4}{4!} + A\frac{t^5}{5!} - \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{t^3}{3!} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{t^4}{4!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{t^5}{5!} - \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

4.37. Знайти матрицю e^{At}, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; б) $= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) Власні значення даної матриці $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Тому жорданова форма матриці $J = J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Знайдемо таку невироджену матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, щоб $A = T^{-1}JT$, або $TA = JT$.

Маємо:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} 3a+4b & -2a-3b \\ 3c+4d & -2c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Звідси $a+2b=0$, $c+d=0$. Одним з розв'язків даних рівнянь є $a=2$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$. Тому матрицю T можна вибрати у вигляді

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неважко знайти обернену матрицю $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Отже,

$$e^{At} = T^{-1}e^{Jt}T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ 2e^t - 2e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

б) З рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

знаходимо власні значення даної матриці: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Оскільки ранг матриці

$$A = \lambda E = A - 2E = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

дорівнює 1, то жорданова форма матриці A має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таку, що $A = T^{-1}JT$, знайдемо з матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для визначення a, b, c, d дістаємо лінійну систему рівнянь

$$3a - b = 2a + c, \quad a + b = 2b + d, \quad 3c - d = 2c, \quad c + d = 2d,$$

яка еквівалентна системі

$$a - b - c = 0, \quad c - d = 0.$$

Одним з розв'язків є $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$.
Отже,

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)\,e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)\,e^{2t} \end{pmatrix}.$$

4.38. Знайти матрицю e^{At}, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Р о з в' я з а н н я. а) Запишемо матрицю A у вигляді $A = \alpha E + I$, де

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця αE комутує з матрицею βI, то

$$e^{At} = e^{\alpha E t} e^{\beta I t}.$$

Проте $e^{\alpha E t} = e^{\alpha t} E$. Тому $e^{At} = e^{\alpha t} e^{\beta I t}$.

Матриця e^{It} побудована в задачі 4.36:

$$e^{It} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$e^{\beta I t} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$e^{At} = e^{\alpha t} e^{\beta I t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

б) З рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

знаходимо власні значення даної матриці.

$$\lambda_1 = 1 - 2i, \quad \lambda_2 = 1 + 2i.$$

Дійсна жорданова форма матриці має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо невироджену дійсну матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таку, що $A = T^{-1}JT$, тобто

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} 5a-2b & 10a-3b \\ 5c-2d & 10c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix}.$$

Для визначення сталих a, b, c, d маємо систему

$$4a-2b-2c=0, \quad 10a-4b-2d=0;$$
$$4c-2d+2a=0, \quad 10c-4d+2b=0.$$

Один з розв'язків цієї системи $a=0$, $b=-1$, $c=1$, $d=2$. Отже, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

З розв'язання п. а) цієї задачі випливає, що

$$e^{Jt} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ -e^t\sin 2t & e^t\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ -e^t\sin 2t & e^t\cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^t(2\sin 2t+\cos 2t) & 5e^t\sin 2t \\ -e^t\sin 2t & e^t(\cos 2t-2\sin 2t) \end{pmatrix}.$$

4.39. Знайшовши матрицю e^{At}, розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Власними значеннями матриці A є $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Знайдемо таку матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, щоб

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Перемноживши матриці в лівій і правій частинах цієї рівності, дістанемо систему для визначення сталих a, b, c, d:

$$-a+2b=0, \quad -c+d=0.$$

Розв'язками цієї системи є, наприклад, числа

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 1.$$

Тому

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи, що $A = T^{-1}JA$, дістаємо

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -e^{2t} \\ -1 & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & -1 + 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Тому

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} 2 - e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & -1 + 2e^{2t} \end{pmatrix} x_0,$$

де x_0 — початкове (при $t = 0$) значення розв'язку $x(t)$.

4.40. За допомогою матриціанта e^{At} розв'язати задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Власні значення матриці A знайдемо з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) = 0.$$

Маємо: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Ранг матриці

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

дорівнює 2. Тому власному значенню $\lambda = 2$ відповідає $r = 3 - 2 = 1$ жорданова клітина розміру 2×2. Отже, жорданова форма матриці A має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $T = (a_{ij})$, для якої $A = T^{-1}JT$, знаходимо з матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Записавши еквівалентну цьому рівнянню систему алгебраїчних рівнянь відносно a_{ij}, неважко знайти один з її розв'язків $a_{11} = 3$, $a_{12} = a_{32} = 2$, $a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{33} = 1$.

Знаходимо матриці T і T^{-1}:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix},$$

то

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}(3+t) - 2e^{3t} & te^{2t} & e^{2t}(2+t) - 2e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -(3+t)e^{2t} + 3e^{3t} & -te^{2t} & -e^{2t}(2+t) + 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Шуканий розв'язок має вигляд

$$x(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}.$$

4.41. За допомогою матриціанта e^{At} розв'язати задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

дістаємо власні значення матриці A:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Ранг матриці

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3-(-1) & 4 \\ -1 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

дорівнює 1, тому власному значенню $\lambda = -1$ відповідає $r = 2 - 1 = 1$ жорданова клітина розміру 2×2.

Отже, жорданова форма матриці

$$J = J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для якої $A = T^{-1}JA$, знайдемо з рівняння

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

звідки

$$2a + b + c = 0, \quad 2c + d = 0, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = -2.$$

Тому

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то остаточно

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2e^{-t} & -e^{-t}(1+2t) \\ -e^{-t} & -e^{-t}(1+t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Шуканий розв'язок запишемо у вигляді

$$x(t) = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

4.42. Довести, що коли матриця $P(t)$ комутує зі своїм інтегралом, тобто

$$P(t)\int_0^t P(r)\,dr = \int_0^t P(r)\,dr\,P(t),$$

то розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x \tag{7}$$

виражаються формулою

$$x(t) = e^{\int_0^t P(r)dr}\,x_0.$$

Розв'язання. Покажемо, що матрицант системи (7) має вид

$$\Omega(t) = e^{\int_0^t P(r)dr}.$$

Справді,

$$\frac{d}{dt}\Omega(t) = e^{\int_0^t P(r)dr}\,P(t).$$

Оскільки матриці $\int_0^t P(r)\,dr$ і $P(t)$ за умовою комутують, то

$$e^{\int_0^t P(r)dr}\,P(t) = P(t)\,e^{\int_0^t P(r)dr}.$$

Тому

$$\frac{d}{dt}\Omega(t) = P(t)\,e^{\int_0^t P(r)dr} = P(t)\,\Omega(t).$$

Крім того, очевидно, що $\Omega(0) = E$. Тому $\Omega(t)$ — матрицант даної системи.

4.43. Показавши, що матриця системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x\cos t + y\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = x\sin t + y\cos t$$

комутує зі своїм інтегралом, знайти матрицант даної системи.

Р о з в' я з а н н я. Матриця системи має вигляд

$$P(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix},$$

а

$$\int_0^t P(r)\,dr=\begin{pmatrix}\sin t & 1-\cos t\\ 1-\cos t & \sin t\end{pmatrix}.$$

Знайдемо добутки:

$$P(t)\int_0^t P(r)\,dr=\begin{pmatrix}\sin t & \sin^2 t+\cos t(1-\cos t)\\ \sin^2 t+\cos t(1-\cos t) & \sin t\end{pmatrix},$$

$$\int_0^t P(r)\,dr P(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \sin^2 t+\cos t(1-\cos t)\\ \sin^2 t+\cos t(1-\cos t) & \sin t\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця $P(t)$ комутує зі своїм інтегралом, тому матрицант має вигляд

$$\Omega(t)=e^{\int_0^t P(r)dr}=e^{\begin{pmatrix}\sin t & 1-\cos t\\ 1-\cos t & \sin t\end{pmatrix}}=e^{\sin t}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(1-\cos t) & \operatorname{sh}(1-\cos t)\\ \operatorname{sh}(1-\cos t) & \operatorname{ch}(1-\cos t)\end{pmatrix}.$$

4.44. Обчислити матрицю e^{At}, якщо

а) $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 & 0\\ -\beta & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & -\beta & \alpha\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 1 & 0\\ -\beta & \alpha & 0 & 1\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & -\beta & \alpha\end{pmatrix}$.

Р о з в' я з а н н я. а) Покладемо $B=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$. Тоді

$$e^{Bt}=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}$$ (див. задачу 4.38).

Оскільки $A=\begin{pmatrix}B & O\\ O & B\end{pmatrix}$, то

$$e^{At}=\begin{pmatrix}e^{Bt} & O\\ O & e^{Bt}\end{pmatrix}=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t & 0 & 0\\ -\sin\beta t & \cos\beta t & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\beta t & \sin\beta t\\ 0 & 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}.$$

б) Запишемо матрицю A у вигляді $A = \Lambda + I$, де

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна показати, що $\Lambda I = I\Lambda$. Тому $e^{At} = e^{\Lambda t}e^{It}$.

Згідно з результатами задачі 4.38, маємо

$$e^{\Lambda t} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t & 0 & 0 \\ -\sin\beta t & \cos\beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & \sin\beta t \\ 0 & 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $I^2 = 0$, то

$$e^{It} = E + It = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$e^{At} = e^{\Lambda t}e^{It} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t & 0 & 0 \\ -\sin\beta t & \cos\beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & \sin\beta t \\ 0 & 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t & t\cos\beta t & t\sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t & -t\sin\beta t & t\cos\beta t \\ 0 & 0 & \cos\beta t & \sin\beta t \\ 0 & 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

4.45. Знайти матрицю e^{At}, якщо

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. а) Оскільки

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то $A^k = 0$ для всіх $k \geqslant 3$. Тому

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Запишемо матрицю A у вигляді

$$A = 2E + B, \quad \text{де } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці $2E$ і B комутують, то

$$e^{At} = e^{2Et + Bt} = e^{2tE} e^{Bt},$$

$$e^{2tE} = e^{2t}E, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.46. Знайти визначник матриці e^A, не обчислюючи саму матрицю e^A.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємось формулою Ліувілля — Остроградського:

$$\det e^{At} = e^{\int_0^t \operatorname{Sp} A d\tau}.$$

Маємо:

$$\det e^{A} = e^{\int_0^1 \operatorname{Sp} A d\tau}.$$

4.4. Лінійні неоднорідні системи

Лінійною неоднорідною системою називається система виду

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)\,x_1 + a_{i2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{in}(t)\,x_n + f_i(t),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

або в векторно-матричній формі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t), \tag{1}$$

де x — вектор з компонентами $x_1, \ldots, x_n$; $A(t)$ — матриця, елементами якої є функції $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $f(t)$ — вектор-функція з компонентами $f_i(t)$.

Якщо відома фундаментальна матриця $X(t)$ лінійної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \tag{2}$$

то систему (1) завжди можна розв'язати за допомогою *методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа)*.

Згідно з цим методом, загальний розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді $x = X(t)\,c(t)$. Компоненти $c_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вектора $c(t)$ визначаються із системи рівнянь

$$X(t)\,\frac{dc}{dt} = f(t),$$

яка має єдиний розв'язок відносно $\frac{dc}{dt}$ ($\det X(t) \neq 0$).

Систему (1) можна розв'язувати також за допомогою методів виключення та інтегровних комбінацій.

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (1) складається із загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи (2) і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи.

Якщо в системі (1) матриця $A(t) = A$ — стала, а функції $f_i(t)$ мають вигляд

$$f_i(t) = e^{\alpha t}\left(P_{m_i}(t)\cos\beta t + R_{k_i}(t)\sin\beta t\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де $P_{m_i}(t)$ і $R_{k_i}(t)$ — многочлени степенів m_i і k_i відповідно, то частинний розв'язок неоднорідної системи (1) може бути знайдений за методом *невизначених коефіцієнтів*.

Згідно з цим методом, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_i = e^{\alpha t}\left(Q^i_{m+s}(t)\cos\beta t + T^i_{m+s}\sin\beta t\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

де $Q^i_{m+s}(t)$, $T^{(i)}_{m+s}(t)$ — многочлени степеня $m+s$ з невизначеними коефіцієнтами, $m = \max\limits_i \{m_i, k_i\}$, $s = 0$, якщо контрольне число $\sigma = \alpha + i\beta$ не є власним значенням матриці A; якщо ж σ є власним значенням матриці A, то s можна вибрати таким, що дорівнює кратності цього числа (точніше s дорівнює порядку найбільшої клітини Жордана матриці A, яка відповідає власному значенню σ).

Невідомі коефіцієнти многочленів $Q^i_{m+s}(t)$, $T^i_{m+s}(t)$ знаходять за допомогою підстановки (3) в дану систему і прирівнювання коефіцієнтів подібних членів.

Метод невизначених коефіцієнтів побудови частинного розв'язку застосовний і тоді, коли компоненти $f_i(t)$ вектора $f(t)$ є лінійними комбінаціями функцій виду

(3). Для цього слід скористатися принципом суперпозиції розв'язків, який полягає в тому, що коли x^i є розв'язком лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$ є розв'язком лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f^i(t)$, де $\alpha_i = \mathrm{const}$.

4.47. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y.$$

Розв'язання. Одним з методів, які були розглянуті в попередніх задачах, неважко знайти загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \quad y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}.$$

Оскільки контрольне число $\sigma = \pm i$ ($\beta = 1$, $\alpha = 0$) не є власним значенням матриці однорідної системи, то частинний розв'язок неоднорідної системи знайдемо, поклавши

$$x = A_1 \sin t + B_1 \cos t, \quad y = A_2 \sin t + B_2 \cos t.$$

Підставивши ці вирази в дану систему, дістанемо:

$$A_1 - B_2 = -5, \quad B_1 + A_2 = 0, \quad A_2 - 2B_1 - B_2 = 0,$$
$$2A_1 + B_2 + A_2 = 0,$$

звідки

$$A_1 = -2, \quad B_1 = -1, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = 3.$$

Загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - 2\sin t - \cos t, \quad y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} + \\ + \sin t + 3\cos t.$$

4.48. Знайти той розв'язок системи $\frac{dx}{dt} = 2x + y - 7te^{-t} - 3$, $\frac{dy}{dt} = -x + 2y - 1$, який є обмеженим при $t \to +\infty$.

Розв'язання. Знайдемо всі розв'язки даної системи. Відповідна однорідна система має матрицант

$$e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

(див. задачу 4.39 п. 1). Тому

$$x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad y = e^{2t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$$

— загальний розв'язок однорідної системи. Контрольні числа $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$ не є власними значеннями матриці однорідної системи. Користуючись принципом суперпозиції, частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді

$$x = (A_1 + A_2 t) e^{-t} + A_3, \quad y = (B_1 + B_2 t) e^{-t} + B_3.$$

Підставивши ці вирази в дану систему, дістанемо

$$3A_1 - A_2 - B_1 = 0, \quad 2A_2 + B_2 = 7, \quad 3B_1 - A_1 - B_2 = 0,$$

$$2A_3 + B_3 = 3, \quad A_3 - 2B_3 = -1, \quad 3B_2 - A_2 = 0,$$

звідки

$$A_1 = \frac{5}{4}, \quad B_1 = \frac{3}{4}, \quad A_2 = 3, \quad B_2 = 1, \quad A_3 = 1, \quad B_3 = 1.$$

Тому частинний розв'язок має вигляд

$$x = \left(\frac{5}{4} + 3t\right) e^{-t} + 1, \quad y = \left(\frac{3}{4} + t\right) e^{-t} + 1.$$

Загальний розв'язок даної системи:

$$x = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \left(\frac{5}{4} + 3t\right) e^{-t} + 1,$$

$$y = e^{2t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + \left(\frac{3}{4} + t\right) e^{-t} + 1.$$

Серед цих розв'язків обмеженим при $t \to +\infty$ є лише один:

$$x = \left(\frac{5}{4} + 3t\right) e^{-t} + 1, \quad y = \left(\frac{3}{4} + t\right) e^{-t} + 1.$$

4.49. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідної однорідної системи є

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \quad y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$

($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ — власні значення матриці однорідної системи). Одне з контрольних чисел $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$ дорівнює власному значенню $\lambda_1 = 1$. Користуючись методом невизначених коефіцієнтів і принципом суперпозиції, частинний розв'язок даної системи шукаємо у вигляді

$$x = (A_1 + A_2 t) e^t + A_3 e^{4t}, \quad y = (B_1 + B_2 t) e^t + B_3 e^{4t}.$$

Підставивши ці вирази в систему, дістанемо

$$-A_1 + A_2 - B_1 = 2, \quad A_1 + B_1 - B_2 = 0, \quad A_2 + B_2 = 0,$$
$$2A_3 - B_3 = 0, \quad 2B_3 - A_3 = 3,$$

звідки

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = -1, \quad B_1 = -1, \quad B_2 = -1, \quad B_3 = -2.$$

Тому загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$x = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}, \quad y = -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}.$$

4.50. Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = x + \frac{y}{t} + t\operatorname{ch} t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t} + y + t\operatorname{sh} t. \tag{4}$$

Розв'язання. Застосуємо метод інтегровних комбінацій. Додавши почленно обидва рівняння, дістанемо лінійне рівняння відносно функції $x + y$:

$$\frac{d}{dt}(x+y) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)(x+y) + te^t.$$

Розв'язавши його, дістанемо

$$x + y = C_1te^t + t^2e^t. \tag{5}$$

Віднявши від першого рівняння даної системи друге рівняння, дістанемо лінійне рівняння відносно $x - y$:

$$\frac{d}{dt}(x-y) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)(x-y) + te^{-t}.$$

Звідси

$$x - y = C_2te^{-t} + t^2e^{-t}. \tag{6}$$

З рівнянь (5) і (6) маємо:

$$x = \frac{t}{2}(C_1e^t + C_2e^{-t}) + t^2\operatorname{ch} t, \quad y = \frac{t}{2}(C_1e^t - C_2e^{-t}) + t^2\operatorname{sh} t.$$

4.51. Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідної однорідної системи є

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \quad y = C_1e^t - C_2e^{-t}.$$

Загальний розв'язок даної системи шукаємо у вигляді

$$x = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}, \quad y = C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t}. \tag{7}$$

Функції $C_1(t)$ і $C_2(t)$ знаходимо із системи

$$C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} = 0, \quad C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t,$$

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right), \quad C_2'(t) = -\frac{1}{2}e^t\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right).$$

Звідси

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t} + \ln t\right) + C_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{2}e^t\left(\frac{1}{t} - \ln t\right) + C_2,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Підставивши в (7), дістанемо шуканий загальний розв'язок:

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} - \ln t, \quad y = C_1e^t - C_2e^{-t} - \frac{1}{t}.$$

4.52. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t.$$

Р о з в' я з а н н я. Загальний розв'язок однорідної системи:

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t, \quad y = -C_1\sin t + C_2\cos t.$$

Загальний розв'язок даної системи шукаємо у вигляді

$$x = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t, \quad y = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t.$$

Для визначення функцій $C_1(t)$ і $C_2(t)$ маємо систему

$$C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1, \quad -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \operatorname{tg} t,$$

звідки

$$C_1'(t) = -\cos t, \quad C_2'(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$C_1(t) = C_1 - \sin t, \quad C_2(t) = C_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

Тому

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + \operatorname{tg} t, \quad y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2.$$

4.53. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y + \sin\omega t, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Р о з в' я з а н н я. Власні числа матриці відповідної однорідної системи: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Загальний розв'язок однорідної системи:

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t, \quad y = -C_1\sin t + C_2\cos t.$$

Частинний розв'язок шукатимемо методом невизначених коефіцієнтів. Контрольне число $\sigma = \pm i\omega$.

Розглянемо такі випадки.

I. Нехай $\omega \neq 1$. Тоді σ не є власним значенням і частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді

$$x = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \tag{8}$$

Підставивши ці вирази в дану систему і прирівнявши коефіцієнти при $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$, дістанемо рівняння

$$\omega A_1 = B_2, \quad A_2 + \omega B_1 = -1, \quad \omega A_2 + B_1 = 0, \quad \omega B_2 = A_1.$$

Звідси

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{1}{\omega^2 - 1}, \quad B_1 = -\frac{\omega}{\omega^2 - 1}, \quad B_2 = 0.$$

Шуканий частинний розв'язок:

$$x = -\frac{\omega}{\omega^2 - 1} \cos \omega t, \quad y = \frac{1}{\omega^2 - 1} \sin \omega t.$$

II. Нехай $\omega = 1$. Тоді σ є власним значенням і частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = (A_1 + A_2 t) \sin t + (A_3 + A_4 t) \cos t, \quad y = (B_1 + B_2 t) \sin t + (B_3 + B_4 t) \cos t. \tag{9}$$

Підставивши ці вирази в дану систему і прирівнявши коефіцієнти при $\sin t$, $\cos t$, $t \sin t$, $t \cos t$, дістанемо рівняння:

$$A_1 + A_4 = B_3, \quad A_2 - A_3 = B_1 + 1, \quad B_2 + A_4 = 0,$$
$$A_2 - B_4 = 0, \quad B_1 + B_4 + A_3 = 0.$$

З цих рівнянь дістанемо

$$A_1 = A_3 = A_4 = B_2 = B_3 = 0, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = B_4 = \frac{1}{2}.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$x = \frac{t}{2} \sin t, \quad y = -\frac{1}{2} \sin t + \frac{t}{2} \cos t.$$

4.54. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y + 4z - 3t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -6x + 7y + 6z + 1 - 7t,$$

$$\frac{dz}{dt} = x - y + z + t.$$

Р о з в' я з а н н я Власні значення матриці відповідної однорідної системи: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Загальний розв'язок однорідної системи:

$$x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}, \quad y = C_1e^t + 3C_3e^{3t}, \quad z = C_2e^{2t} - C_3e^{3t}.$$

Контрольне число $\sigma = 0$. Тому частинний розв'язок даної системи шукаємо у вигляді

$$x = A_1 + B_1t, \quad y = A_2 + B_2t, \quad z = A_3 + B_3t.$$

Підставивши ці вирази в систему, дістанемо рівняння для визначення A_i, B_i, $i = 1, 2, 3$,

$$B_1 + 2A_1 - 3A_2 - 4A_3 = 0; \qquad -6B_1 + 7B_2 + 6B_3 = 7;$$
$$-2B_1 + 3B_2 + 4B_3 = 3; \qquad B_3 - A_1 + A_2 - A_3 = 0;$$
$$B_2 + 6A_1 - 7A_2 - 6A_3 = 1, \qquad B_1 - B_2 + B_3 = -1.$$

Звідси $B_2 = 1$, $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_3 = 0$.

Тому $x = 0$, $y = t$, $z = 0$ — шуканий частинний розв'язок.

Загальний розв'язок має вигляд

$$x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$
$$y = C_1e^t + 3C_3e^{3t} + t, \quad z = C_2e^{2t} - C_3e^{3t}.$$

4.55. Тіло кинуто під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Вважаючи, що опір повітря пропорційний до швидкості руху, знайти закон руху залежно від часу і траєкторію руху тіла.

Р о з в' я з а н н я. Нехай тіло рухається в площині xOy (рис. 42). Нехай початковою точкою є точка O, а маса тіла зосереджена в одній точці. На тіло діє дві сили: сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$, напрямлена вниз, і сила опору повітря $\vec{Q}$, напрямлена протилежно вектору швидкості: $\vec{Q} = -km\vec{v}$. Згідно з другим законом Ньютона,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mk\frac{dy}{dt},$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt}.$$

Інтегруючи ці рівняння, дістаємо

$$x = \frac{C_1}{k}e^{-kt} + C_2; \quad y = -\frac{g}{k}t - \frac{C_3}{k^2}e^{-kt} + C_4.$$

Позначивши проекції початкової швидкості v_0 на осі Ox і Oy відповідно через p і q ($p = v_0\cos\alpha$, $q = v_0\sin\alpha$), з початкових умов $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = p$, $y'(0) = q$ знаходимо сталі інтегрування:

$$C_1 = p, \quad C_2 = \frac{p}{k}, \quad C_3 = g + kq, \quad C_4 = \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + q\right).$$

Отже, координати тіла змінюються з часом за законом

$$x = \frac{p}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad y = \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + q\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{gt}{k}. \qquad (10)$$

З цих рівнянь маємо, що з часом абсциса x збільшується, асимптотично наближаючись до $\frac{p}{k}$, ордината $y \to -\infty$.

Похідна $\frac{dy}{dt}$ обертається в нуль при $t = \tau$, де τ — корінь рівняння

$$\left(\frac{g}{k} + q\right)e^{-k\tau} - \frac{g}{k} = 0, \quad \tau = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{qk}{g}\right).$$

У момент τ траєкторія досягає найбільшої висоти (в точці M, рис. 43), а потім спускається вниз, наближаючись до вертикальної

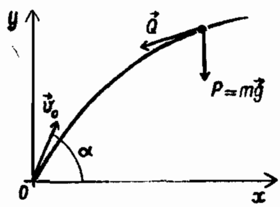


Рис. 42

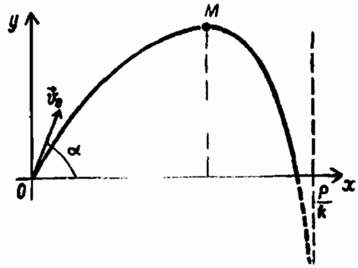


Рис. 43

асимптоти $x = \frac{p}{q}$. Виключивши з рівнянь (10) незалежну змінну t, знаходимо рівняння траєкторії руху тіла:

$$y = \left(\frac{g}{k} + q\right)\frac{x}{p} + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{p}\right).$$

4.56. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки відносно земної кулі під дією сили ваги мають вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} - g\cos\varphi, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g\sin\varphi,$$

де φ — широта точки, ω — кутова швидкість обертання земної кулі. Визначити залежність положення точки від часу, якщо при $t = 0$ точка перебувала в початку координат.

Р о з в' я з а н н я. Диференціюючи обидві частини першого рівняння і підставляючи замість $\frac{d^2y}{dt^2}$ його значення з другого рівняння, відносно $x(t)$ дістанемо лінійне диференціальне рівняння третього порядку:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 4\omega^2 \frac{dx}{dt} = 2\omega g \cos\varphi.$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$x = C_1 + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \sin 2\omega t.$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $x = at + b$. Дістаємо:

$$a = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}, \quad b = 0.$$

Отже,

$$x = C_1 + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \sin 2\omega t + \frac{g\cos\varphi}{2\omega} t. \tag{11}$$

З першого рівняння маємо

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\omega}\frac{d^2x}{dt^2} = 2C_2\omega\cos 2\omega t + 2C_3\omega \sin 2\omega t.$$

Звідси

$$y = C_2 \sin 2\omega t - C_3 \cos 2\omega t + C_4. \tag{12}$$

Нарешті, інтегруючи двічі третє рівняння даної системи, знаходимо:

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 \sin\varphi + C_5 t + C_6.$$

Позначивши

$$C_2 = A\cos 2\omega\theta, \quad C_3 = -A\sin 2\omega\theta,$$

рівності (11) і (12) запишемо у вигляді

$$x = C_1 + A\cos 2\omega(t+\theta) + \frac{g\cos\varphi}{2\omega} t, \quad y = C_4 + A\sin 2\omega(t+\theta).$$

З початкових умов $x = y = z = 0$ при $t = 0$ знаходимо:

$$C_1 = -A\cos 2\omega\theta, \quad C_4 = -A\sin\omega\theta; \quad C_6 = 0.$$

Остаточно

$$x = -A\cos 2\omega\theta + \cos 2\omega(t+\theta) + \frac{g\cos\varphi}{2\omega} t,$$

$$y = -A\sin 2\omega\theta + \sin 2\omega(t+\theta),$$

$$z = -\frac{1}{2}\sin\varphi g t^2 + Ct$$

(замість C_5 написано C).

4.57. Матеріальна точка M одиничної маси рухається на площині xOy, притягуючись точкою O (0; 0) з силою, пропорційною до відстані між точками M і O. Знайти залежність координат точки M від часу, якщо $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = v_0$, і траєкторію цього руху.

Розв'язання. Позначимо коефіцієнт пропорційності через k^2 Оскільки сила, яка діє на точку M, за напрямком збігається з вектором $\overrightarrow{MO}$, а її величина дорівнює $k^2 \mid OM \mid = k^2 \sqrt{x^2 + y^2}$, то проекції сили на координатні осі Ox і Oy відповідно дорівнюють k^2x і k^2y. Згідно з другим законом Ньютона,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \quad \frac{d^2y}{dy^2} = -k^2y.$$

Звідси

$$x = c_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt.$$

З початкових умов знаходимо сталі:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{v_0}{k}.$$

Остаточно

$$x = x_0 \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Виключивши з цих рівностей незалежну змінну t, знаходимо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1,$$

тобто траєкторією руху точки M є еліпс.

4.58. Знайти траєкторію руху електрона в однорідному електричному полі напруженості E, якщо в початковий момент відомі напрямок і швидкість електрона.

Розв'язання. Виберемо прямокутну систему координат на площині так, щоб напрямок осі Ox збігався з напрямком вектора напруженості поля. Нехай φ — кут між напрямком початкової швидкості і додатним напрямком осі Ox. Проекції вектора напруженості поля на осі координат $E_x = E$, $E_y = 0$.

На електрон з зарядом e в будь-якій точці поля діє сила, проекції якої на координатні осі є: $eE_x = eE$ і $eE_y = 0$.

Згідно із законом Ньютона, рівняння руху мають вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eE, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

де m — маса електрона. Звідси

$$\frac{dx}{dt} = e\frac{E}{m}t + C_1, \quad \frac{dy}{dt} = C_2.$$

Оскільки при $t = 0$

$$v_x^0 = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0 \cos\varphi, \quad v_y^0 = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = v_0 \sin\varphi,$$

то

$$C_1 = v_0 \cos\varphi, \quad C_2 = v_0 \sin\varphi.$$

Отже,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m} t + v_0 \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\varphi.$$

Інтегруючи ці рівняння, дістаємо

$$x = \frac{eE}{2m} t^2 + v_0 t \cos\varphi + C_1^*, \quad y = v_0 t \sin\varphi + C_2^*.$$

З початкових умов ($t = 0$; $x = y = 0$) знаходимо, що $C_1^* = C_2^* = 0$. Остаточно

$$x = \frac{eE}{2m} t^2 + v_0 t \cos\varphi, \quad y = v_0 t \sin\varphi.$$

Виключивши з цих рівностей t, дістаємо рівняння траєкторії руху електрона

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2 \sin^2\varphi} y^2 + y \operatorname{ctg}\varphi.$$

4.59. (Задача про гасіння коливань). На тіло масою m_2, яке підвішено на пружині (рис. 44), у вертикальному напрямку діє збурююча сила $f = u \sin \nu t$. Щоб зменшити амплітуду коливань цього тіла, до нього також на пружині прикріплено тіло масою m_1. Якими повинні бути маса m_1 і коефіцієнт пружності нижньої пружини, щоб тіло масою m_2 не здійснювало коливань з частотою ν збурюючої сили f?

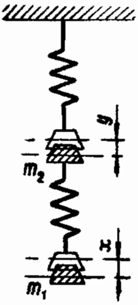


Рис. 44

Р о з в ' я з а н н я. Нехай початкове положення — це положення рівноваги двох даних тіл. Позначимо через x і y — вертикальні зміщення центрів ваги цих тіл під час коливань, а сили пружності, які діють на два тіла, позначимо, відповідно, через F_1 і F_2. Згідно із законом Гука, $F_1 = k_1 (x - y)$, $F_2 = k_2 y$, де k_1, k_2 — коефіцієнти пружності пружин (розтяг нижньої пружини дорівнює різниці $x - y$ розтягів її кінців).

На тіло масою m_1 діє сила $-F_1$, напрямлена (при $x > y$) вгору; на тіло масою m_2, крім збурюючої сили f, діє ще сила $-F_2$, напрямлена вгору (при $y > 0$), і сила F_1, напрямлена вниз (при $x > y$).

Згідно з другим законом Ньютона,

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -F_1, \quad m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = f(t) - F_2 + F_1,$$

або, враховуючи вирази для F_1, F_2 і f,

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_1y,$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -k_2y + k_1(x-y) + u\sin \nu t.$$

Якщо позначити $\frac{k_1}{m_1} = \alpha$, $-\frac{k_1}{m_1} = \beta$, $-\frac{k_2}{m_1} = \gamma$, $\frac{k_1+k_2}{m_2} = \delta$, $\frac{u}{m_2} = E$, то дістанемо систему рівнянь

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \beta y = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma x + \delta y = E\sin \nu t. \tag{13}$$

Диференціюючи двічі перше з цих рівнянь і виключаючи y, дістаємо лінійне диференціальне рівняння четвертого порядку відносно $x = x(t)$

$$\frac{d^4x}{dt^2} + (\alpha+\delta)\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha\delta - \beta\gamma)x = -E\beta\sin \nu t.$$

Складемо характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння

$$\lambda^4 + (\alpha+\delta)\lambda^2 + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-(\alpha+\delta) \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}.$$

Дискримінант

$$(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma) = (\alpha-\delta)^2 + 4\delta\gamma > 0,$$

тому λ_1^2 і λ_1^2 — дійсні.

Оскільки

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -(\alpha+\delta) < 0 \ \text{ і } \ \lambda_1^2\lambda_2^2 = \alpha\delta - \beta\gamma = \frac{k_1}{m_1}\frac{k_2}{m_2} > 0,$$

то $\lambda_1^2 < 0$ і $\lambda_2^2 < 0$. Позначивши $\lambda_1^2 = -\omega_1^2$, $\lambda_2^2 = -\omega_2^2$, дістанемо корені характеристичного рівняння: $\lambda = \omega_1 i, \lambda = -\omega_1 i, \lambda = \omega_2 i$, $\lambda = -\omega^2 i$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$x(t) = C_1\sin\omega_1 t + C_2\cos\omega_1 t + C_3\sin\omega_2 t + C_4\cos\omega_2 t,$$

або

$$x(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \theta_2).$$

Величини ω_1 і ω_2 називаються *частотами власних коливань* системи. Припускаючи, що частота ν збурюючої сили $f(t)$ відмінна від ω_1 і ω_2, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $x = a \sin \nu t$ (оскільки неоднорідне рівняння містить лише похідні парного порядку, а в правій частині відсутній член з $\cos \nu t$).

Для визначення сталої a дістаємо рівняння

$$(\nu^4 - (\alpha + \delta)\nu^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma))\, a = -\beta E.$$

Звідси

$$a = -\frac{\beta E}{\nu^4 - (\alpha + \delta)\nu^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)}.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$x = \frac{-\beta E \sin \nu t}{\nu^4 - (\alpha + \delta)\nu^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)} + A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2).$$

З першого рівняння системи (13) маємо

$$y = -\frac{1}{\beta}\left(\alpha x + \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Тому

$$y = \frac{(\alpha - \nu^2) E \sin \nu t}{\nu^4 - (\alpha + \delta)\nu^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)} + \frac{A_1(\omega_1^2 - \alpha)}{\beta} \sin(\omega_1 t + \theta_1) +$$

$$+ \frac{A_2(\omega_2^2 - \alpha)}{\beta} \sin(\omega_2 t + \theta_2).$$

Як бачимо, тіло масою m_2 не здійснюватиме коливань з частотою ν збурюючої сили, якщо $\nu^2 = \alpha$, тобто якщо $\nu = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$. Проте $\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ — це власна частота гасителя коливань (тіла масою m_1, підвішеного на пружині з коефіцієнтом пружності k_1). Отже, щоб максимально зменшити коливання тіла маси m_2, треба масу m_1 і коефіцієнт пружності підібрати так, щоб частота власних коливань гасителя збігалася з частотою ν збурюючої сили.

Задачі для самостійної роботи

Розв'язати системи

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{t}{x}$.
2. $\frac{dx}{dt} = x + y, \quad 2x\frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 + 1$.
3. $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{(x - y)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{(x - y)^2}$.
4. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$.
5. $\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{x + y + z} = \frac{dz}{x - y}$.
6. $\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{z^2 + xy} = \frac{dz}{z(x + z)}$.

Перевірити, чи є співвідношення $\varphi(t, x, y) = c$ першими інтегралами даних систем

7. $\dfrac{dx}{dt} = -y, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - t}{x}; \quad \varphi_1 = t^2 + 2xy, \quad \varphi_2 = y^2 - t^2x^2.$

8. $\dfrac{dx}{dt} = y^2 - \cos x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y \sin x; \quad \varphi_1 = 2\cos x - \ln y, \quad \varphi_2 = 3y \times$ $\times \cos x - y^3.$

Розв'язати системи

9. $\dfrac{dx}{dt} = 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x.$ 10. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = y - 4x.$

11. $\dfrac{dx}{dt} = -x + 4y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3y - x.$

12. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y.$

13. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y.$ 14. $\dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y.$

15. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 3y.$ 16. $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x + y.$

17. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - y.$ 18. $\dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -3x - y.$

19. Знайти матрицю e^A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язати системи

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y - 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + y + 2z. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$

24. $\dfrac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

25. $\dfrac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

26. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$

27. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

28. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

29. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

30. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

31. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

32. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

33. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

34. $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$ Знайти e^{At}.

35. Знайти $\det e^A$, не обчислюючи e^A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

36. Довести, що власними значеннями матриці e^A є числа e^{λ_i}, де λ_i — власні значення матриці A.

37. Нехай дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні. Довести, що $\lim\limits_{t \to +\infty} \det e^{At} = 0$.

38. Довести, що лінійна система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$$

інтегрується в квадратурах, і знайти матрицант цієї системи.

39. Довести, що матриця $X(t)=e^{\int A(\tau)d\tau}$ є матрицантом системи $\frac{dx}{dt}=A(t)x$ тоді й тільки тоді, коли матриця $A(t)$ комутує зі своїм інтегралом, тобто

$$A(t)\int_0^t A(\tau)\,d\tau=\int_0^t A(\tau)\,d\tau A(t).$$

40. Знайти матрицант системи рівнянь $\frac{dx}{dt}=A(t)x$, де

$$A(t)=\begin{pmatrix} a(t) & 1 & 0\ \dots & 0 & 0\\ 0 & a(t) & 1\ \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0\ \dots & a(t) & 1\\ 0 & 0 & 0\ \dots & 0 & a(t) \end{pmatrix}.$$

41. Довести, що всі розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{2y}{t}$$

обмежені при $t\geqslant 1$.

42. Скласти лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь, для якої

$$X(t)=\begin{pmatrix} e^t\cos t & e^t\sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

є фундаментальною матрицею.

43. Довести, що коли $x(t)$ і $y(t)$ — розв'язки відповідно систем рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\quad \frac{dy}{dt}=-A^{\mathrm{T}}(t)y,$$

де A^{T} — транспонована матриця, то скалярний добуток $\langle x(t), y(t)\rangle=\mathrm{const}$ для всіх t з проміжку неперервності матриці $A(t)$.

Розв'язати системи рівнянь

44. $\frac{dx}{dt}=y+\cos t;$

$\frac{dy}{dt}=1-x.$

45. $\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t;$

$\frac{dy}{dt}+3y-y=e^{2t}.$

46. $\frac{dx}{dt}=-y+\cos t;$

$\frac{dy}{dt}=-x+\sin t.$

47. $\frac{dx}{dt}=2x-y,$

$\frac{dy}{dt}=2y-x-5e^t\sin t.$

48. $\frac{dx}{dt}=2x-4y+4e^{-2t};$

$\frac{dy}{dt}=2x-2y.$

49. $\frac{dx}{dt}=2x+y-2z-t+2,$

$\frac{dy}{dt}=-x+1;$

$\frac{dz}{dt}=x+y-z-t+1.$

50. $\frac{dx}{dt}=3x+y+\frac{1}{t}-4\ln t,$

$\frac{dy}{dt}=-x+y+\frac{1}{t}.$

51. $\frac{dx}{dt}=3x+2y+3e^{2t},$

$\frac{dy}{dt}=x+2y+e^{2t}.$

52. Нехай дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, $f(t)$ — неперервна й обмежена при всіх $t \in \mathbf{R}$ вектор-функція. Знайти обмежений при всіх $t \in \mathbf{R}$ розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t).$$

Розділ 5

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Поняття стійкості розв'язку

Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

визначений при всіх $t \geqslant t_0$, називається *стійким (в розумінні Ляпунова)*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного розв'язку $x = x(t)$ цієї ж системи, початкове значення якого задовольняє нерівність

$$\| x(t_0) - \varphi(t_0) \| < \delta, \tag{2}$$

при всіх $t \geqslant t_0$ виконується нерівність

$$\| x(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon.$$

Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи (1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0 > 0$, що для довільного розв'язку $x = x(t)$ цієї ж системи, початкове значення якого задовольняє нерівність

$$\| x(t_0) - \varphi(t_0) \| < \delta_0,$$

виконується гранична рівність

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - \varphi(t) \| = 0.$$

Якщо розв'язок $x = \varphi(t)$ не є стійким, то він називається *нестійким*. Отже, для нестійкості розв'язку $x = \varphi(t)$ достатньо, щоб існувало додатне число ε_0 і при будь-якому як завгодно малому $\delta > 0$ існував хоча б один розв'язок $x = x(t)$, для якого при $t = t_0$ виконується нерівність (2), але $\| x(t_1) - \varphi(t_1) \| \geqslant \varepsilon_0$ при деякому $t_1 > t_0$.

Якщо в системі (1) виконати заміну $x = y + \varphi(t)$, то дослідження на стійкість розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (1) зводиться до дослідження на стійкість тривіального розв'язку $y \equiv 0$ системи

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi) \equiv F(t, y).$$

5.1. Дослідити на стійкість розв'язки даних рівнянь:

а) $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{t}x$, $x(1) = 0$; б) $\frac{dx}{dt} = 1 + t - x$, $x(0) = 0$;

в) $\frac{dx}{dt} = \sin^2 x$, $x(0) = 0$.

Розв'язання

а) Розв'язуючи дане рівняння, знаходимо, що будь-який його розв'язок $x(t)$ з початковою умовою $x(1) = x_0$ має вигляд $x(t) = t^a x_0$. Початковій умові $x(1) = 0$ задовольняє розв'язок $x_0(t) \equiv 0$. Тому $|x(t) - x_0(t)| = t^a |x_0|$. Звідси

$$|x(t) - x_0(t)| = |x_0|, \text{ якщо } a = 0;$$

$$|x(t) - x_0(t)| = t^a |x_0| \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \text{ якщо } a < 0;$$

$$|x(t) - x_0(t)| = t^a |x_0| \to +\infty \text{ при } t \to +\infty, \text{ якщо } a > 0$$

(при як завгодно малому $|x_0| \neq 0$).

Отже, розв'язок $x \equiv 0$ стійкий при $a \leqslant 0$, асимптотично стійкий при $a < 0$ і нестійкий — при $a > 0$.

б) Будь-який розв'язок $x(t)$ даного рівняння з початковою умовою $x(0) = x_0$ визначається формулою $x(t) = x_0 e^{-t} + t$. Тому

$$x(t) - y(t) = e^{-t}(x_0 - y_0),$$

де $y(t)$ — будь-який розв'язок з початковою умовою $y(0) = y_0$. Звідси

$$|x(t) - y(t)| = e^{-t}|x_0 - y_0| \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Отже, всі розв'язки даного рівняння є асимптотично стійкими.

в) Розв'язком даного рівняння з початковою умовою $x(0) = 0$ є $x(t) \equiv 0$. Розв'язавши дане рівняння, знаходимо, що його розв'язки з початковою умовою $x(0) = x_0$, $0 < x_0 < \pi$, визначаються формулою $x(t) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t)$. Отже, яким би малим не було $x_0 > 0$, знайдеться момент часу $t_1 > 0$, такий, що $x(t_1) > 1$, оскільки

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t) = \pi.$$

Тому розв'язок $x(t) \equiv 0$ даного рівняння є нестійким.

5.2. Дослідити на стійкість розв'язок $x = \frac{1}{t}$, $t \geqslant 1$, рівняння $\frac{dx}{dt} = -\left(x - \frac{2}{t}\right)^2$.

Розв'язання. Це рівняння Ріккаті. За допомогою заміни $x = y + \frac{1}{t}$ зведемо його до рівняння Бернуллі:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y - y^2. \tag{3}$$

Дослідження стійкості розв'язку $x = \frac{1}{t}$ даного рівняння зводиться до дослідження на стійкість тривіального розв'язку $y \equiv 0$ рівняння Бернуллі (3). Розв'язуючи рівняння (3), знаходимо

$$y = \frac{3t^2}{t^3 + 3c}, \quad y = 0. \tag{4}$$

Тому будь-який розв'язок рівняння (3) з початковою умовою $y(1) = y_0$ має вигляд

$$y = \frac{3y_0 t^2}{y_0(t^3 - 1) + 3}.$$

Звідси маємо, що яким би малим за абсолютною величиною не було $y_0 < 0$, розв'язок $y(t)$, $y(1) = y_0$ рівняння (3) не може бути продовжений до моментів $t = t^* \geqslant \left(1 - \frac{3}{y_0}\right)^{1/3}$ ($y(t) \to -\infty$ при $t \to t^* - 0$).

Отже, розв'язок $y \equiv 0$ рівняння (3) є нестійким.

5.3. Довести, що для стійкості розв'язків рівняння $\frac{dx}{dt} = a(t)x$, де $a(t)$ — неперервна при $t \geqslant 0$ функція, необхідно й достатньо, щоб $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau < +\infty$.

Р о з в' я з а н н я. *Необхідність.* Нехай розв'язки даного рівняння стійкі. Будь-який розв'язок цього рівняння з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ можна записати у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{\int\limits_0^t a(\tau)d\tau},$$

а різницю $x(t) - y(t)$ двох розв'язків — у вигляді

$$x(t) - y(t) = e^{\int\limits_0^t a(\tau)d\tau}(x_0 - y_0).$$

З умови стійкості розв'язків випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при $|x_0 - y_0| < \delta$ виконується нерівність $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \geqslant 0$, тобто

$$e^{\int\limits_0^t a(\tau)d\tau} |x_0 - y_0| < \varepsilon$$

для всіх $t \geqslant 0$. Остання нерівність виконується, очевидно, тоді, коли

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \int_0^t a(\tau)\, d\tau < +\infty. \quad (5)$$

Достатність. Нехай виконується (5). Тоді можна вказати таке додатне число K, що

$$e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} \leqslant K.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{K}$. Для розв'язків $x(t)$ і $y(t)$, початкові умови яких задовольняють нерівність $|x_0 - y_0| < \delta$, маємо

$$|x(t) - y(t)| = e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} |x_0 - y_0| \leqslant K |x_0 - y_0| < \varepsilon$$

для всіх $t \geqslant 0$. Це означає, що всі розв'язки даного рівняння є стійкими.

5.4. Дослідити на стійкість розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = xy.$$

Зобразити графічно траєкторії розв'язків і показати напрямок руху по траєкторіях.

Р о з в' я з а н н я. Розв'язками системи є функції $x = x_0$, $y = y_0 e^{x_0 t}$, де x_0, y_0 — довільні сталі.

Зафіксуємо довільний розв'язок $x = \varphi(t) \equiv x_0^*$, $y = \psi(t) \equiv y_0^* e^{x_0^* t}$ і дослідимо його на стійкість. Якщо $x_0^* < 0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, щоб з нерівності

$$|\varphi(0) - x(0)| + |\psi(0) - y(0)| \equiv |x_0^* - x_0| + |y_0^* - y_0| < \delta \quad (6)$$

випливала нерівність

$$|\varphi(t) - x(t)| + |\psi(t) - y(t)| = |x_0^* - x_0| + |e^{x_0^* t} y_0^* - e^{x_0 t} y_0| < \varepsilon \quad (7)$$

для всіх $t \geqslant 0$. Можливість вибору такого $\delta(\varepsilon)$ зумовлена тим, що

$$|x_0^* - x_0| + |e^{x_0^* t} y_0^* - e^{x_0 t} y_0| = |x_0^* - x_0| + |e^{x_0^* t}(y_0^* - y_0) +$$

$$+ (e^{x_0^* t} - e^{x_0 t}) y_0| \leqslant |x_0^* - x_0| + e^{x_0^* t} |y_0^* - y_0| + |e^{x_0^* t} - e^{x_0 t}| |y_0| \leqslant$$

$$\leqslant |x_0^* - x_0| + |y_0^* - y_0| + e^{\min(|x_0^*|, |x_0|)t} (1 - e^{-|x_0^* - x_0|\tau}) |y_0| \to 0$$

рівномірно по $t \geqslant 0$ при $x_0 \to x_0^*$, $y_0 \to y_0^*$ і $x_0^* < 0$.

Нерівності (6) і (7) означають, що будь-який розв'язок $x = x_0^* < 0$, $y = y_0^* e^{x_0^* t}$ стійкий. Якщо ж $x_0^* \geqslant 0$, то

$$|\psi(t) - y(t)| = |e^{x_0^* t} y_0^* - e^{x_0 t} y_0| \to +\infty.$$

У цьому випадку нерівність (7) для всіх $t \geqslant 0$ неможлива, навіть при дуже малому δ. Отже, будь-який розв'язок $x = x_0^* \geqslant 0$, $y = y_0^* e^{x_0^* t}$ даної системи є нестійким.

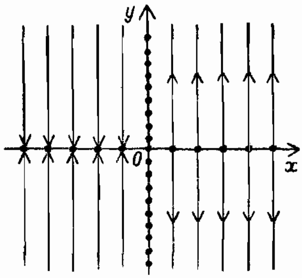


Рис. 45

Знайдемо траєкторії розв'язків. Праві частини даної системи одночасно обертаються в нуль при $xy = 0$, тобто на координатних осях. Тому координатні осі заповнені особливими точками. Кожна така точка є траєкторією розв'язку $x = 0$, $y = y_0$ або $x = x_0$, $y = 0$. Якщо ж $xy \neq 0$, то рівняння траєкторій має вигляд $\frac{dx}{dy} = 0$. Звідси $x = x_0 = \text{const}$, тобто траєкторіями є промені $x = x_0$, $y > 0$ і $x = x_0$, $y < 0$. З другого рівняння даної системи знаходимо $y = y_0 e^{x_0 t}$. Отже, якщо $x_0 < 0$, то рух по вказаних променях відбувається в напрямку до осі абсцис. Якщо ж $x_0 > 0$, то рух по вказаних променях відбувається в напрямку віддалення від осі абсцис (рис. 45).

5.2. Стійкість розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь

Стійкість або нестійкість розв'язків лінійної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x \qquad (1)$$

з неперервною обмеженою при $t \geqslant t_0$ матрицею $A(t)$ визначається поведінкою при $t \to +\infty$ матрицанта $X(t, t_0)$ цієї системи.

Теорема. *Для стійкості розв'язку $x = \varphi(t)$ лінійної системи* (1) *необхідно й достатньо, щоб матрицант $X(t, t_0)$ системи був обмежений при $t \geqslant t_0$; для асимптотичної стійкості — щоб матрицант задовольняв умові $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t, t_0) = 0$, а для нестійкості — щоб матрицант $X(t, t_0)$ був необмеженим.*

Оскільки матрицант $X(t, t_0)$ не залежить від початкового значення $x(t_0)$, то розв'язки лінійної системи або всі одночасно стійкі, або нестійкі. Тому лінійну систему (1) називають *стійкою, асимптотично стійкою* або *нестійкою* залежно від властивостей її розв'язків.

Якщо в системі (1) матриця $A(t) = A$ не залежить від t, тобто є сталою, то умови стійкості її розв'язків визначаються властивостями власних значень матриці A.

Т е о р е м а. *Розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь з сталою матрицею A тоді й тільки тоді є:*

1) *стійкими, коли дійсні частини власних значень матриці A недодатні, причому власним значенням з нульовою дійсною частиною відповідають одновимірні клітини Жордана в жордановій формі матриці (кожному такому власному значенню λ_j ($\operatorname{Re}\lambda_j = 0$) кратності p_j повинно відповідати рівно p_j лінійно незалежних власних векторів матриці A);*

2) *асимптотично стійкими, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні;*

3) *нестійкими, якщо хоча б одному власному значенню з нульовою дійсною частиною відповідає неодновимірна клітина Жордана (такому власному значенню λ кратності p відповідає $s < p$ лінійно незалежних власних векторів матриці A) або коли серед власних значень матриці є хоча б одне з додатною дійсною частиною.*

Умови, при виконанні яких дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, визначаються наступною теоремою.

Т е о р е м а Р а у с а — Г у р в і ц а. *Дійсні частини всіх коренів рівняння*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатні всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \ldots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \ldots 0 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_n \end{pmatrix},$$

тобто коли

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0.$$

5.5. Дослідити на стійкість розв'язки системи

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

Зобразити графічно траєкторії розв'язків цієї системи і показати напрямок руху по траєкторіях.

Р о з в' я з а н н я. Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Його розв'язки: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Дійсні частини коренів цього рівняння додатні, тому всі розв'язки даної системи є нестійкими. Щоб зобразити траєкторії розв'язків, перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тоді

$$\frac{d\rho}{dt} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 2 \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi,$$

$$\frac{d\rho}{dt} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \rho \cos \varphi + 2\rho \sin \varphi.$$

З цієї системи знаходимо $\frac{d\rho}{dt} = 2\rho$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$. Звідси $\rho = Ce^{2\varphi}$, $C \geqslant 0$ — рівняння траєкторій. Одна з траєкторій — точка $(0;\ 0)$, а інші — логарифмічні спіралі (рис. 46). Напрямок руху по цих спіралях показано стрілкою — точка $(x(t);\ y(t))$ з часом як завгодно далеко віддаляється по спіралі від початку координат.

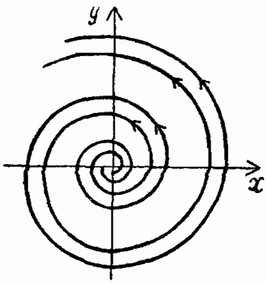


Рис. 46

5.6. Дослідити на стійкість розв'язки системи

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + 5y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y.$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо характеристичне рівняння матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 5 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - (2 + \alpha)\lambda + 2\alpha + 5 = 0.$$

Корені цього рівняння мають від'ємні дійсні частини, якщо одночасно $2 + \alpha < 0$ і $2\alpha + 5 > 0$; тобто якщо $-\frac{5}{2} < \alpha < -2$. При таких α розв'язки даної системи асимптотично стійкі. Якщо $2\alpha + 5 < < 0$, тобто $\alpha < -2{,}5$ або $\alpha > -2$, то при таких значеннях α характеристичне рівняння має один додатний корінь або пару комплексних спряжених коренів з додатною дійсною частиною. В цьому випадку розв'язки даних рівнянь є нестійкими.

При $\alpha = -2{,}5$ один з коренів характеристичного рівняння дорівнює 0, а другий — 0,5; отже, розв'язки системи при $\alpha = -2{,}5$ є стійкими. Стійкість буде й при $\alpha = -2$, оскільки в цьому випадку корені характеристичного рівняння чисто уявні.

5.7. Дослідити на стійкість розв'язки системи

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 4y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y.$$

Зобразити графічно траєкторії розв'язків і показати напрямок руху по цих траєкторіях.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо власні числа матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4.$$

Отже, розв'язки є стійкими. Траєкторії розв'язків визначаємо з рівняння

$$(x - 2y)\,dx + 2(x - 2y)\,dy = 0, \quad (x - 2y)\left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Як бачимо, траєкторіями розв'язків даної системи є множина точок прямої $x - 2y = 0$, а також промені, які можна дістати з прямих $y = -\frac{x}{2} + C$ за допомогою вилучення точок перетину цих прямих з прямою $x - 2y = 0$ (рис. 47).

5.8. Дослідити на стійкість розв'язки системи

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 6y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x + 5y.$$

Зобразити графічно траєкторії розв'язків і показати напрямок руху по цих траєкторіях.

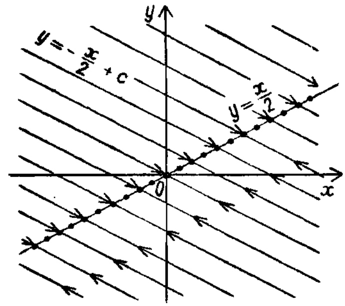


Рис. 47

Р о з в' я з а н н я. Власні значення матриці даної системи $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ знаходимо з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Власні значення матриці A дійсні і мають різні знаки. Отже, розв'язки даної системи — нестійкі, а початок координат є особливою точкою типу «сідло». «Вуса» сідла шукаємо у вигляді $y = kx$. Підставляючи $y = kx$ в рівняння траєкторій, дістаємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x + 5y}{-4x + 6y}, \quad k = \frac{-3 + 5k}{-4 + 6k},$$

тобто $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 1$. На променях прямої $y = \frac{x}{2}$, $x \neq 0$, дана система має вигляд $\frac{dx}{dt} = -x$, $\frac{dy}{dt} = -y$. Звідси $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, тобто рух по променях $y = \frac{x}{2}$, $x \neq 0$, напрямлений до точки (0; 0).

На променях прямої $y = x$, $x \neq 0$, дана система еквівалентна системі $\frac{dx}{dt} = 2x$, $\frac{dy}{dt} = 2y$. Звідси $x = x_0 e^{2t}$, $y = y_0 e^{2t}$, тобто $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to \pm\infty$ при $t \to +\infty$. Отже, на променях $y = x$, $x \neq 0$, рух напрямлений від початку координат.

У випадку особливої точки типу «сідло» траєкторіями рівняння $(ax + by)\,dx + (cx + dy)\,dy = 0$ є гіперболи. На рис. 48 зображено траєкторії даної системи і вказано напрямок руху по цих траєкторіях.

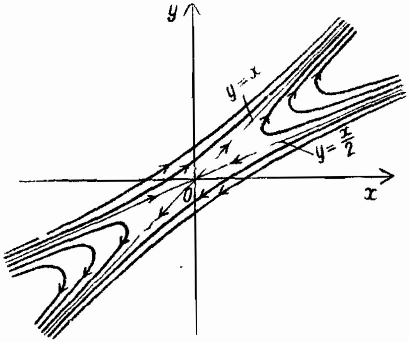


Рис. 48

5.9. Дослідити на стійкість розв'язки системи $\frac{dx}{dt} = x - 4y$, $\frac{dy}{dt} = x - y$. Зобразити графічно траєкторії розв'язків цієї системи і показати напрямок руху по траєкторіях.

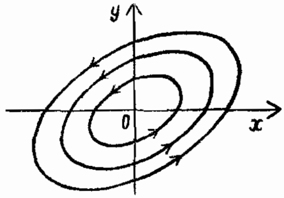


Рис. 49

Р о з в' я з а н н я. Власні значення матриці коефіцієнтів даної системи визначаємо з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 3 = 0.$$

Маємо $\lambda_1 = -i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = i\sqrt{3}$. Власні значення — чисто уявні, тому всі розв'язки системи — стійкі. Траєкторії розв'язків визначаються з рівняння $(x - y)\,dx - (x - 4y)\,dy = 0$. Це рівняння в повних диференціалах. Розв'язуючи його, дістаємо

$$u(x, y) = \int (x - y)\,dx = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y), \quad -x + \frac{d\varphi}{dy} = -x + 4y,$$

$$\varphi(y) = 2y^2, \quad u(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + 2y^2.$$

Отже, траєкторії розв'язків (рис. 49) даної системи рівнянь є еліпси $x^2 - 2xy + 4y^2 = C^2$, $(x - y)^2 + 3y^2 = C^2$. Рух по цих еліпсах є періодичним. Напрямок руху можна визначити, наприклад, так. Припустимо, що в даний момент точка $(x(t), y(t))$, яка рухається по одному з еліпсів, перетинає промінь $x = 0$, $y > 0$. Тоді в цей момент, згідно з другим рівнянням системи, $\frac{dy}{dt} = -y(t) < 0$, тобто ордината рухомої точки в даний момент часу спадає. Отже, рухи по еліпсах напрямлені проти руху стрілки годинника.

5.10. Визначити, при яких $a, b \in \mathbf{R}$ дійсні частини коренів многочлена $\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1 \equiv f(\lambda)$ від'ємні?

Р о з в' я з а н н я. Складемо матрицю Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ a & b & a & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Згідно з критерієм Рауса — Гурвіца маємо:

$$a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & b \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a & b & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ a & b & a & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

або $a > 0$, $a(b-1) > 0$, $a^2(b-2) > 0$. Звідси $a > 0$, $b > 2$. Отже, дійсні частини коренів многочлена $f(\lambda)$ від'ємні, якщо $a > 0$ і $b > 2$.

5.11. Знайти всі дійсні значення параметрів α і β, при яких розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -x + \alpha y + \beta z, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha x - y + \alpha z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta x - \alpha y - z$$

асимптотично стійкі.

Р о з в' я з а н н я. Власні значення матриці даної системи визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1-\lambda & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \beta^2 + 2\alpha^2) = $$
$$= 0.$$

При будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ дійсні частини коренів цього рівняння від'ємні. Тому дана система є асимптотично стійкою при будь-яких дійсних α і β.

5.12. При яких дійсних a, b і c розв'язки системи рівнянь $\frac{dx}{dt} = ax + by$, $\frac{dy}{dt} = -bx + cy$ є асимптотично стійкими?

Р о з в' я з а н н я. Власні значення матриці даної системи визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac + b^2 = 0.$$

Дійсні частини коренів цього рівняння від'ємні тоді й тільки тоді, коли

$$a + c < 0, \quad ac + b^2 > 0. \tag{2}$$

Отже, розв'язки даної системи є асимптотично стійкими, якщо виконуються нерівності (2).

5.13. При яких $a, b, c \in \mathbf{R}$ корені многочлена $f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ мають від'ємні дійсні частини?

Р о з в' я з а н н я. Застосуємо критерій Рауса — Гурвіца. Матриця Гурвіца має вигляд

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ c & b & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Дійсні частини всіх коренів многочлена $f(\lambda)$ будуть від'ємними тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & b \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & b & a \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} > 0,$$

тобто $a > 0$, $ab - c > 0$, $c(ab - c) > 0$, або $a > 0$, $0 < c < ab$.

5.14. Дослідити на стійкість розв'язки системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки матриця A даної лінійної системи стала, то стійкість розв'язків залежить від її власних значень. Власні значення матриці A знаходимо з рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 5 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 - 9\lambda + 8, \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 8) = 0.$$

Одним з коренів цього рівняння є $\lambda = 1$. Оскільки $\operatorname{Re}\lambda = 1 > 0$, то розв'язки системи — нестійкі.

5.15. Дослідити на стійкість розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -x - 4y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 5y. \tag{3}$$

Схематично зобразити траєкторії розв'язків і напрямки руху по цих траєкторіях.

Р о з в' я з а н н я. Власні значення матриці даної системи визначаємо з рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

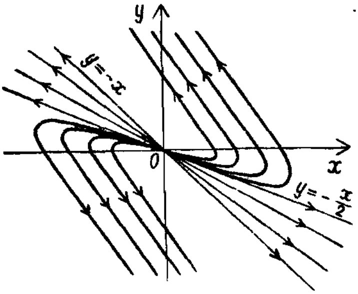


Рис. 50

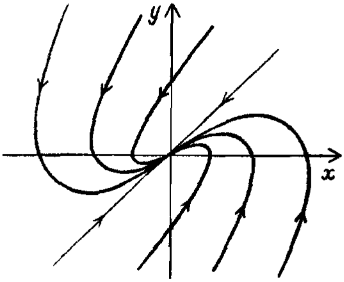


Рис. 51

Власні значення дійсні і додатні. Отже, розв'язки даної системи нестійкі, а початок координат — $O(0;\ 0)$ — особлива точка типу «вузол».

Траєкторії розв'язків визначаємо з рівняння $(2x + 5y)\,dx + (x + 4y)\,dy = 0$. Підставивши $y = kx$ в рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 5y}{x + 4y}, \tag{4}$$

знайдемо значення k, при яких промені $y = kx$, $x > 0$ і $x < 0$, є траєкторіями розв'язків вихідної системи:

$$k = -\frac{2 + 5k}{1 + 4k}, \quad 2k^2 + 3k + 1 = 0, \quad k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = -1.$$

З рівняння (4) випливає також, що траєкторії перетинають вісь абсцис під кутом, тангенс якого дорівнює —2, а вісь ординат — під кутом, тангенс якого дорівнює $-\frac{5}{4}$. Цієї інформації достатньо, щоб побудувати траєкторії (рис. 50).

5.16. Дослідити на стійкість розв'язки системи рівнянь: $\frac{dx}{dt} = -x - y$, $\frac{dy}{dt} = x - 3y$ і схематично зобразити траєкторії розв'язків і напрям руху по цих траєкторіях.

Р о з в' я з а н н я. Власні значення матриці даної системи визначаємо з рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -2.$$

Ці числа дійсні, від'ємні та рівні. Отже, всі розв'язки даної системи асимптотично стійкі. Траєкторії розв'язків визначаються з рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-3y}{-x-y} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-x-y}{x-3y}.$$

Точка (0; 0) є особливою точкою типу «вузол». Траєкторії (рис. 51) виду $y = kx$, $x > 0$ або $x < 0$, визначаються з рівняння

$$k = \frac{1-3k}{-k-1}, \quad k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k = 1,$$

тобто $y = x$.

5.17. Довести лему Гронуолла — Беллмана: якщо неперервна невід'ємна при $t \geqslant t_0$ функція $u(t)$ задовольняє нерівність

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \qquad (5)$$

де $C \geqslant 0$, $v(t)$ — додатна функція, то

$$u(t) \leqslant Ce^{\int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau}.$$

Р о з в' я з а н н я. З нерівності (5) дістаємо:

$$\frac{u(\sigma)\, v(\sigma)}{C + \int_{t_0}^{\sigma} u(\tau)\, v(\tau)\, d\tau} \leqslant v(\sigma).$$

Інтегруючи обидві частини цієї нерівності по σ в межах від t_0 до t, дістаємо

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma}{C + \int_{t_0}^{\sigma} u(\tau)\, v(\tau)\, d\tau} \leqslant \int_{t_0}^{t} v(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\ln\left(C + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau\right) - \ln C \leqslant \int_{t_0}^{t} v(\sigma)\, d\sigma,$$

або

$$C + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \leqslant Ce^{\int_{t_0}^{t} v(\sigma) d\sigma}.$$

Отже,

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \leqslant Ce^{\int_{t_0}^{t} v(\sigma) d\sigma}.$$

5.18. Довести, що коли розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{6}$$

стійкі, то стійкими будуть і розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(t))\, x \tag{7}$$

при умові, що

$$\int_{0}^{+\infty} \| B(t) \|\, dt < +\infty.$$

Р о з в' я з а н н я. Різницю будь-яких двох розв'язків $x(t)$, $x(0) = x_0$ і $y(t)$, $y(0) = y_0$ системи рівнянь (7) можна подати у вигляді

$$x(t) - y(t) = e^{At}(x_0 - y_0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)} B(\tau)\,(x(\tau) - y(\tau))\, d\tau. \tag{8}$$

За умовою фундаментальна матриця системи (6) обмежена при $t \geqslant 0$. Тому існує таке додатне число C, що $\sup\limits_{t \geqslant 0} \| e^{At} \| \leqslant C$. З рівності (8) маємо:

$$\| x(t) - y(t) \| \leqslant C \| x_0 - y_0 \| + \int_{0}^{t} C \| B(\tau) \| \| x(\tau) - y(\tau) \| d\tau.$$

Звідси, внаслідок леми Гронуолла — Беллмана (див. задачу 5.18), дістаємо

$$\| x(t) - y(t) \| \leqslant Ce^{C\int_{0}^{t} \| B(\tau) \| d\tau} \| x_0 - y_0 \| \leqslant K \| x_0 - y_0 \|, \tag{9}$$

де

$$K = Ce^{C\int_{0}^{+\infty} \| B(\tau) \| d\tau}.$$

З нерівності (9) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{k}$, що для будь-яких двох розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ системи (7) з умови $\| x_0 - y_0 \| < \delta$ випливає, що

$$\| x(t) - y(t) \| \leqslant K \| x_0 - y_0 \| < K\delta = \varepsilon$$

при всіх $t \geqslant 0$, тобто всі розв'язки системи (7) – стійкі.

5.19. Довести, що всі розв'язки рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(a - \frac{1}{1+t^2}\right)x = 0$, $a > 0$, обмежені разом зі своїми першими похідними при $t \in \mathbf{R}$.

Розв'язання. Неважко бачити, що рівняння не зміниться, якщо в ньому замінити t на $-t$. Тому достатньо розглянути випадок $t \geqslant 0$.

Перейдемо від даного рівняння до системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ax + \frac{x}{1+t^2}, \tag{10}$$

або

$$\frac{dz}{dt} = Az + B(t)z,$$

де

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{1+t^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці A чисто уявні: $\lambda_{1,2} = i \pm i\sqrt{a}$. Тому система $\frac{dz}{dt} = Az$ є стійкою. Крім того,

$$\int_0^t \| B(\tau) \| d\tau = \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \operatorname{arctg} t < \frac{\pi}{2}.$$

Згідно з результатом задачі 5.18, усі розв'язки системи (10) — стійкі, а отже, й обмежені (система (10) – лінійна). Компонента $y(t)$ розв'язку $z(t)$ системи (10) – це похідна розв'язку $x(t)$ даного рівняння. Отже, обмеженість розв'язків даного рівняння разом з похідними першого порядку доведено.

5.3. Критерій стійкості за першим наближенням

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \tag{1}$$

в якій A — стала матриця, $f(t, x)$ — неперервна по t і x ($t \geqslant t_0$, $\| x \| \leqslant h$) функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\| f(t, x) \|}{\| x \|} = 0 \tag{2}$$

рівномірно по $t \geqslant t_0$. Система рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

називається *системою першого наближення для системи* (1).

Теорема. *Нехай функція $f(t, x)$ задовольняє умову* (2).

Якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, то нульовий розв'язок системи (1) — *асимптотично стійкий.*

Якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то нульовий розв'язок системи (1) — *нестійкий.*

Якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне з нульовою дійсною частиною, а інші мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок системи рівнянь (1) *може бути як стійким (асимптотично стійким), так і нестійким, тобто в цьому випадку з факту стійкості або нестійкості розв'язків системи першого наближення не можна зробити висновок про стійкість нульового (тривіального) розв'язку повної системи рівнянь (1).*

Зазначимо, що коли вектор-функція $f(t, x)$ така, що $f(t, 0) = 0$ і $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) = 0$, то вона задовольняє умову (2).

5.20. Дослідити стійкість положень рівноваги математичного маятника з тертям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \sin x = 0, \quad k > 0.$$

Розв'язання. Від рівняння руху маятника перейдемо до системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - 2ky. \tag{3}$$

Положення рівноваги визначаються із системи рівнянь:

$$y = 0, \quad \sin x + 2ky = 0.$$

Звідси $x = n\pi$, $y = 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Внаслідок періодичності системи рівнянь (3) по x, достатньо дослідити стійкість двох її розв'язків: $x = 0$, $y = 0$ (нижнє положення рівноваги) і $x = \pi$, $y = 0$ (верхнє положення рівноваги маятника).

Лінеаризуємо систему рівнянь (3) в околі точки (0; 0). Для цього виділимо лінійну частину функції $\sin x$ в околі точки $x = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Система першого наближення в цьому випадку має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2ky.$$

Власні значення матриці коефіцієнтів цієї системи визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

Оскільки за умовою $k > 0$, то дійсні частини коренів цього рівняння від'ємні. Тому розв'язок $x = 0$, $y = 0$ системи (3) — асимптотично стійкий.

Дослідимо тепер стійкість верхнього положення рівноваги маятника, тобто стійкість розв'язку $x = \pi$, $y = 0$ системи (3). В околі точки $x = \pi$ маємо

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \cdots$$

Систему першого наближення для цього випадку можна записати так:

$$\frac{d(x-\pi)}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = (x-\pi) - 2ky.$$

Власні значення матриці коефіцієнтів системи визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0.$$

Корені цього рівняння дійсні і мають різні знаки. Тому верхне положення рівноваги маятника $x = \pi$, $y = 0$ є нестійким.

5.21. Довести, що коли $\alpha\beta > -1$, то нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -\sin(x + \alpha y), \quad \frac{dy}{dt} = \beta x + \ln(1-y)$$

є асимптотично стійким.

Розв'язання. Ураховуючи розвинення в ряд

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad \ln(1-y) = -y + \frac{y^2}{2} - \cdots,$$

запишемо систему першого наближення (в околі точки (0; 0)):

$$\frac{dx}{dt} = -x - \alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = \beta x - y.$$

Відповідне їй характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -\alpha \\ \beta & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \alpha\beta = 0.$$

Обидва корені цього рівняння мають від'ємну дійсну частину, якщо

$1+\alpha\beta>0$, тобто якщо $\alpha\beta>-1$. Отже, якщо $\alpha\beta>-1$, то нульовий розв'язок $x=0$, $y=0$ даної системи асимптотично стійкий.

5.22. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt}=2x-\ln(1+y)+\sin x;$$

$$\frac{dy}{dt}=e^x+\sin(x+y)-\cos^2 y.$$

Р о з в' я з а н н я. Складаємо рівняння першого наближення:

$$\frac{dx}{dt}=3x-y,\quad \frac{dy}{dt}=2x+y.$$

Відповідне їм характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2-4\lambda+5=0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_{1,2}=2\pm i$ комплексні, дійсні частини їх додатні. Отже, тривіальний (нульовий) розв'язок $x=y=0$ даної системи — нестійкий.

5.23. Дослідити на стійкість усі положення рівноваги системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=-2x+y+x^3,\quad \frac{dy}{dt}=-x-2y+3x^5.$$

Р о з в' я з а н н я. Положення рівноваги даної системи визначаємо з рівнянь

$$-2x+y+x^3=0,\quad -x-2y+3x^5=0.$$

Звідси знаходимо три положення рівноваги: $x=0$, $y=0$; $x=1$, $y=1$ і $x=-1$, $y=-1$. Дослідимо на стійкість кожне з них. Система першого наближення, яка відповідає положенню рівноваги $x=0$, $y=0$, має вигляд

$$\frac{dx}{dt}=-2x+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x-2y.$$

Характеристичне рівняння цієї системи

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2+4\lambda+5=0$$

має корені $\lambda_{1,2}=-2\pm i$. Отже, положення рівноваги $x=0$, $y=0$ асимптотично стійке.

Праві частини даної системи розвинемо в ряд Тейлора в околі положення рівноваги $x=1$, $y=1$:

$$-2x+y+x^3=(x-1)+(y-1)+\cdots,$$

$$-x-2y+3x^5=14(x-1)-2(y-1)+\cdots$$

Тут крапками позначено члени не нижче другого порядку мализни відносно $x-1$. Система першого наближення в околі точки (1; 1) має вигляд

$$\frac{du}{dt}=u+v,\quad \frac{dv}{dt}=14u-2v, \tag{4}$$

де $u=x-1$, $v=y-1$. Корені характеристичного рівняння цієї системи $\lambda^2+\lambda-16=0$ дійсні і мають різні знаки. Тому положення рівноваги $x=1$, $y=1$ — нестійке.

В околі точки $x=-1$, $y=-1$ розвинення правих частин даної системи в ряд Тейлора такі:

$$-2x+y+x^3=(x+1)+(y+1)+\cdots,$$
$$-x-2y+3x^5=14(x+1)-2(y+1)+\cdots$$

Тому система першого наближення в околі точки $x=-1$, $y=-1$ збігається з системою (4), якщо в ній покласти $u=x+1$, $v=y+1$. Отже, положення рівноваги $x=-1$, $y=-1$ — нестійке.

5.24. Дослідити на стійкість розв'язок $x=y=z=0$ системи

$$\frac{dx}{dt}=-\sin(x-z),\quad \frac{dy}{dt}=\sin^2 x-y-\sin z,\quad \frac{dz}{dt}=\operatorname{tg}(y-z).$$

Розв'язання. Запишемо рівняння першого наближення даної системи в околі точки (0; 0; 0):

$$\frac{dx}{dt}=-x+z,\quad \frac{dy}{dt}=-y-z,\quad \frac{dz}{dt}=y-z. \tag{5}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & -1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad (\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+2)=0,$$

має корені $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=-1\pm i$. Оскільки $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, $i=1, 2, 3$, то тривіальний розв'язок $x=y=z=0$ даної системи — асимптотично стійкий.

5.25. Довести, що коли $\alpha<0$ і $2\alpha<\beta<-\alpha$, то тривіальний розв'язок $x=y=z=0$ системи

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x-\cos y+e^{\beta z},\quad \frac{dy}{dt}=\beta\sin x+\ln(1+\alpha y)-xz^2,$$

$$\frac{dz}{dt}=x^2\cos z+\beta y+\sin\alpha z$$

— асимптотично стійкий.

Розв'язання. Лінеаризувавши в околі точки $x=y=z=0$ праві частини даної системи рівнянь, запишемо рівняння першого наближення:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta z, \quad \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y, \quad \frac{dz}{dt} = \beta y + \alpha z. \qquad (6)$$

Характеристичне рівняння системи (6) має вигляд

$$\lambda^3 - 3\alpha\lambda^2 + 3\alpha^2\lambda - \alpha^3 - \beta^3 = 0. \qquad (7)$$

Щоб визначити, при яких значеннях параметрів α і β дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від'ємні, скористаємося критерієм Гурвіца. Складемо матрицю Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} -3\alpha & 1 & 0 \\ -\alpha^3 - \beta^3 & 3\alpha^2 & -3\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^3 - \beta^3 \end{pmatrix}.$$

Умови від'ємності дійсних частин коренів рівняння (7) запишемо у вигляді нерівностей:

$$-3\alpha > 0, \quad -9\alpha^3 + \alpha^3 + \beta^3 > 0, \quad -\alpha^3 - \beta^3 > 0.$$

Звідси дістаємо: $\alpha < 0$, $\beta - 2\alpha > 0$, $\alpha + \beta < 0$, тобто $\alpha < 0$, $2\alpha < \beta < -\alpha$.

5.26. Знайти всі положення рівноваги системи

$$\frac{dx}{dt} = xy + 4, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 17.$$

Дослідити їх на стійкість і знайти типи особливих точок.

Р о з в' я з а н н я. Положення рівноваги (особливі точки) даної системи визначаються з рівнянь $xy + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 17 = 0$. Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо чотири положення рівноваги:

$$A(-1;\ 4), \quad B(-4;\ 1), \quad C(1;\ -4), \quad D(4;\ -1).$$

Розвинувши праві частини даної системи в ряд Тейлора в околі положення рівноваги $(x_0,\ y_0)$ і обмежившись в цих розвиненнях лише лінійними членами, дістанемо систему рівнянь першого наближення

$$\frac{dx}{dt} = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0), \quad \frac{dy}{dt} = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0).$$

Замінивши $x - x_0$ на x, а $y - y_0$ на y, дістанемо

$$\frac{dx}{dt} = y_0 x + x_0 y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x_0 x + 2y_0 y.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} y_0 - \lambda & x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3y_0\lambda + 2(y_0^2 - x_0^2) = 0.$$

Якщо $y_0^2 < x_0^2$, то корені характеристичного рівняння дійсні і мають різні знаки. Оскільки координати положення рівноваги B і D задовольняють цій умові, то вказані положення рівноваги — нестійкі. Особливі точки (—4; 1) і (4; —1) є особливими точками типу «сідло».

Характеристичні рівняння, які відповідають точкам A і C, мають вигляд $\lambda^2 - 12\lambda + 30 = 0$ і $\lambda^2 + 12\lambda + 30 = 0$. Обидва корені першого з них додатні, а другого — від'ємні. Тому положення рів-

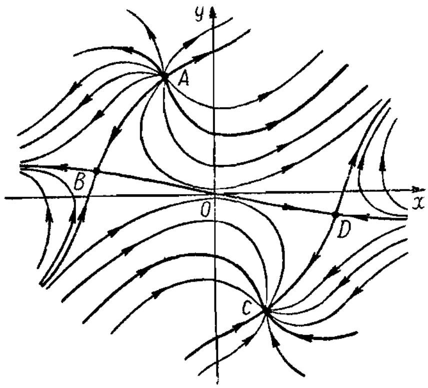


Рис. 52

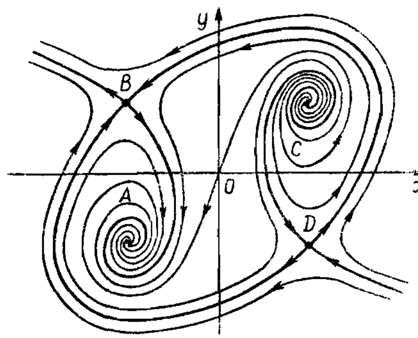


Рис. 53

новаги A (—1; 4) — нестійке, а положення C (1; —4) — асимптотично стійке.

Особлива точка A є нестійким вузлом, а точка C — стійким вузлом. Поведінку траєкторій в околах положень рівноваги зображено на рис. 52.

5.27. Знайти всі положення рівноваги (особливі точки) системи

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 - 5, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 13.$$

Дослідити їх на стійкість і визначити типи особливих точок.

Р о з в' я з а н н я. Особливі точки даної системи визначаємо з рівнянь $x^2 - y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 13 = 0$. Розв'язавши цю систему алгебраїчних рівнянь, знаходимо чотири особливі точки: A (—3; —2), B (—3; 2), C (3; 2), D (3; —2). Система першого наближення в околі особливої точки $(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = 2x_0 (x - x_0) - 2y_0 (y - y_0),$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x_0 (x - x_0) + 2y_0 (y - y_0),$$

звідки, замінюючи $x - x_0$ на x, $y - y_0$ — на y, дістанемо

$$\frac{dx}{dt} = 2x_0x - 2y_0y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x_0x + 2y_0y.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 2(x_0 + y_0)\lambda + 8x_0y_0 = 0. \tag{8}$$

Якщо $x_0y_0 < 0$, то рівняння (8) має дійсні корені різних знаків. Нерівність $x_0y_0 < 0$ виконується для особливих точок B і D. Отже, ці точки нестійкі і є особливими точками типу «сідло».

Можна показати, що для точок A і C корені рівняння (8) — комплексні. При цьому дійсні частини коренів рівняння (8) для точки A — від'ємні, а для точки C — додатні. Тому точка A асимптотично стійка (стійкий фокус), а точка C — нестійка (нестійкий фокус). Траєкторії розв'язків даної системи зображено на рис. 53.

5.28. Нехай всі розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{9}$$

обмежені при $t \geqslant 0$, а $f(t, x)$ — неперервна при $t \geqslant 0$, $\|x\| \leqslant h$, $h > 0$, вектор-функція така, що

$$\|f(t, x)\| \leqslant \gamma(t)\|x\|. \tag{10}$$

Довести, що коли

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\tau)\, d\tau < +\infty, \tag{11}$$

то нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x) \tag{12}$$

— стійкий за Ляпуновим.

Розв'язання. Нехай $x = x(t)$, $x(0) = x_0$ — розв'язок системи рівнянь (12), який починається (при $t = 0$) з досить малого околу точки $x = 0$. Для нього справедливе інтегральне зображення

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{13}$$

Оскільки розв'язки системи (9) обмежені, то $\|e^{At}\| \leqslant K$ для всіх $t \geqslant 0$ при деякій сталій $K > 0$. Тому з рівності (13) маємо:

$$\|x(t)\| \leqslant K\|x_0\| + \int_0^t K\gamma(\tau)\|x(\tau)\|\, d\tau.$$

Звідси, внаслідок леми Гронуолла — Беллмана (див. задачу 5.17), дістаємо

$$\|x(t)\| \leqslant Ke^{K\int\limits_0^t \gamma(\tau)d\tau} \|x_0\| \leqslant K_1 \|x_0\|,$$

де

$$K_1 = Ke^{K\int\limits_0^{+\infty} \gamma(\tau)d\tau}.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta = \frac{\varepsilon}{K_1}$, що коли $\|x\| < \delta$, то $\|x(t)\| \leqslant K_1 \|x_0\| < \varepsilon$ при всіх $t \geqslant 0$. Це означає, що розв'язок $x = 0$ — стійкий.

5.4. Дослідження на стійкість за методом функцій Ляпунова

Нехай $v(x) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — скалярна функція змінної $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначена й неперервно диференційовна в кулі

$$J_h = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h, \quad h > 0\},$$

і така, що $v(0) = 0$.

Функція $v(x)$ називається *додатно (від'ємно) визначеною* в кулі J_h, якщо для всіх $x \in J_h$, $x \neq 0$, виконується нерівність $v(x) > 0$ ($v(x) < 0$). В обох цих випадках функція $v(x)$ називається *знаковизначеною*.

Функція $v(x)$ називається *додатно-сталою (від'ємно-сталою)* в кулі J_h, якщо для всіх $x \in J_h$ виконується нерівність $v(x) \geqslant 0$ ($v(x) \leqslant 0$). В обох цих випадках функція $v(x)$ називається *знакосталою*.

Якщо функція $v(x)$ набуває в кулі J_h як додатних, так і від'ємних значень, то її називають *знакозмінною* в J_h.

Розглянемо тепер систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1}$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Припустимо, що функція f, визначена й неперервна в кулі J_h при деякому $h > 0$, задовольняє умову Ліпшіца в J_h і $f(0) = 0$. Рівність $f(0) = 0$ означає, що $x = 0$ є розв'язком системи (1).

Нехай $x = x(t)$ — деякий розв'язок системи (1). Уздовж цього розв'язку функція $v = v(x(t))$ як функція змінної t неперервно диференційовна і її похідна $\frac{dv}{dt}$ визначається за формулою

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) = \langle \operatorname{grad} v, f \rangle.$$

Похідною по t від функції $v(x)$ внаслідок системи (1) *(уздовж траєкторій системи* (1)) *називають вираз*

$$\frac{dv}{dt} = \langle \operatorname{grad} v(x), f(x) \rangle.$$

Теорема Ляпунова про стійкість. *Якщо для системи рівнянь* (1) *існує знаковизначена в кулі J_h функція $v(x)$, похідна якої по часу $\frac{dv}{dt}$ вздовж траєкторій сис-*

теми (1) *є знакосталою функцією зі знаком, протилежним знаку функції* $v(x)$, *або тотожно дорівнює нулю, то нульовий розв'язок* $x = 0$ *системи рівнянь* (1) *стійкий за Ляпуновим.*

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. *Якщо для системи рівнянь* (1) *існує знаковизначена в кулі* J_h *функція* $v(x)$, *похідна якої по часу* $\frac{dv}{dt}$ *вздовж траєкторій системи* (1) *є також знаковизначеною функцією зі знаком, протилежним знаку* $v(x)$, *то нульовий розв'язок системи рівнянь* (1) *— асимптотично стійкий.*

Теорема Ляпунова про нестійкість. *Якщо для системи рівнянь* (1) *існує функція* $v(x)$, *похідна якої по часу* $\frac{dv}{dt}$ *вздовж траєкторій системи* (1) *є знаковизначеною, а сама функція* $v(x)$ *в будь-якому околі точки* $x = 0$ *не є знакосталою, зі знаком, протилежним знаку* $\frac{dv}{dt}$, *то нульовий розв'язок системи рівнянь* (1) *— нестійкий.*

Припустимо, що функція $f(x)$ в системі (1) визначена в усьому просторі $\mathbf{R}^n$. Нульовий розв'язок системи рівнянь (1) називається *стійким в цілому*, якщо він стійкий за Ляпуновим і якщо для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ цієї системи

$$\lim_{t\to+\infty} \| x(t) \| = 0.$$

Функція $v(x)$, визначена для всіх $x \in \mathbf{R}^n$, називається *нескінченно великою*, якщо для будь-якого додатного числа a існує додатне число r таке, що $v(x) > a$ для всіх $x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\| > r$.

Теорема (Барбашина — Красовського). *Якщо існує додатно визначена нескінченно велика функція* $v(x)$, *похідна від якої по часу* $\frac{dv}{dt}$ *вздовж траєкторій системи* (1) *є від'ємно-сталою, причому рівність* $\frac{dv}{dt} = 0$ *можлива на множині, яка не містить цілих траєкторій, крім точки* $x = 0$, *то нульовий розв'язок системи рівнянь* (1) *— стійкий в цілому.*

5.29. Які з даних функцій двох змінних

а) $v(x, y) = x^2 + y^2 - 2y^3$; б) $v(x, y) = (x - y)^2$;
в) $v(x, y) = 1 - \cos x + y^4$; г) $v(x, y) = x^2y + xy^2$;
д) $v(x, y) = -x^2$; е) $v(x, y) = -\sin^2 x - (x - y)^2$

є знаковизначеними, знакосталими і знакозмінними?

Розв'язання

а) Запишемо функцію $v(x, y)$ у вигляді $v(x, y) = x^2 + y^2(1 - 2y)$.

Якщо $y < \frac{1}{2}$, то $v > 0$ для всіх $(x; y)$, крім точки $(0; 0)$. Тому, наприклад, у крузі $x^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ задана функція додатно визначена.

б) Функція $v = (x - y)^2$ — додатно-стала, оскільки вона перетворюється в нуль не лише в точці $(0; 0)$, а в усіх точках прямої $x - y = 0$.

в) У крузі $x^2 + y^2 < 4\pi^2$ функція додатно визначена.

г) Дана функція $v = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$ у будь-якому околі початку координат може набувати значень різних знаків. Тому дана функція є знакозмінною.

д) Функція від'ємно-стала, оскільки вона перетворюється в нуль на прямій $x = 0$.

е) У крузі $x^2 + y^2 < \pi^2$ дана функція від'ємно визначена.

5.30. Довести, що коли функція $v = v(x, y)$ додатно визначена, то можна знайти таке додатне число m, що всі криві $v(x, y) = c$, де $0 < c < m$, є замкненими і охоплюють початок координат.

Р о з в' я з а н н я. Припустимо, що функція v додатно визначена в крузі $x^2 + y^2 < r^2$. Оскільки функція v неперервна, то на компакті S_r — колі $x^2 + y^2 = r^2$ ця функція досягає найменшого значення, яке позначимо буквою m. Оскільки v — додатно визначена, то $m > 0$.

Нехай γ: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — довільна неперервна крива, яка сполучає початок координат з довільною точкою $(x_0;\ y_0)$ кола S_r. Оскільки $v(0;\ 0) = 0$, $v(x_0;\ y_0) \geqslant m$, де $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, а функція v вздовж неперервної кривої γ змінюється неперервно, то в деякій точці на кривій γ

$$v(x,\ y) = c < m.$$

Отже, доведено, що на будь-якій неперервній кривій, яка сполучає початок координат з точкою кола S_r, є принаймні одна точка, в якій $v(x, y) = c < m$. Тому криві $v(x, y) = c$ замкнуті й охоплюють початок координат.

5.31. Довести, що коли в системі рівнянь $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -f(y)$, функція f така, що $f(0) = 0$, $xf(x) > 0$, $x \neq 0$, то положення рівноваги $x = y = 0$ цієї системи — стійке.

Р о з в' я з а н н я. Дана система має перший інтеграл

$$\frac{y^2}{2} + \int_0^x f(t)\,dt = C,$$

причому з умови $xf(x) > 0$, $x \neq 0$, випливає, що $\int_0^x f(t)dt > 0$ при $x \neq 0$. Тому функція

$$v(x,\ y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(t)\,dt$$

є додатно визначеною. Знайдемо її похідну вздовж траєкторій даної системи рівнянь:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f(x)\,y - yf(x) \equiv 0.$$

Внаслідок першої теореми Ляпунова, положення рівноваги $x = y = 0$ — стійке.

5.32. Дослідити на стійкість положення рівноваги рівняння маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\sin x = 0, \quad k = \mathrm{const} > 0, \tag{2}$$

або

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k\sin x.$$

Р о з в' я з а н н я. Система (2) має такі положення рівноваги: $x = n\pi$, $y = 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Внаслідок періодичності правих частин системи (2) по x з періодом 2π, досить розглянути два положення рівноваги:

(0; 0) — відповідає нижньому положенню рівноваги маятника,

(π; 0) — відповідає верхньому положенню маятника.

Система рівнянь першого наближення в околі точки (x_0; 0) має вигляд

$$\frac{d(x - x_0)}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k\cos x_0 (x - x_0).$$

Власні значення матриці цієї системи визначаються з рівняння

$$\lambda^2 + k\cos x_0 = 0. \tag{3}$$

Якщо $x_0 = \pi$, то рівняння (3) має дійсні корені різних знаків, отже, положення рівноваги — нестійке. Якщо $x_0 = 0$, то корені рівняння (3) чисто уявні ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$) і критерій стійкості за першим наближенням не дає відповіді на питання про стійкість або нестійкість положення рівноваги (0; 0) системи (2).

Використаємо розв'язання попередньої задачі і розглянемо додатно визначену в околі точки (0; 0) функцію

$$v(x, y) = \frac{y^2}{2} + k(1 - \cos x).$$

Її похідна вздовж траєкторій системи (2) дорівнює

$$\frac{dv}{dt} = k\sin x \cdot y - ky\sin x \equiv 0.$$

Тому положення рівноваги $x = 0$, $y = 0$ — стійке.

5.33. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння $\frac{dx}{dt} = ax^m + g(x)$, в якому $m \in \mathbf{N}$, $a \neq 0$, $g(0) = 0$, а розвинення $g(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ починається з членів степеня $k \geqslant m + 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо додатно визначену функцію $v(x) = x^2$. Її похідна вздовж траєкторій даного рівняння

$$\frac{dv}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2ax^{m+1} + 2xg(x).$$

Якщо m — непарне число, $m = 2p + 1$, то функція $\frac{dv}{dt}$ є знаковизначеною в достатньо малому околі точки $x = 0$.

Справді, в цьому випадку знаковизначеною є функція $2ax^{m+1}$, а розвинення функції $xg(x)$ у ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ починається з членів, степінь яких більше або дорівнює $m + 2$. Отже, якщо $a < 0$, то виконуються умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість, а при $a > 0$ виконуються умови теореми Ляпунова про нестійкість.

Нехай тепер m — парне ($m = 2p$). Розглянемо функцію $v(x) = x$ і обчислимо її похідну по t вздовж траєкторій даного рівняння:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = ax^{2p} + g(x).$$

Очевидно, що в досить малому околі точки $x = 0$ похідна $\frac{dv}{dt}$ є знаковизначеною функцією. Функція $v(x)$ не є знакосталою зі знаком, протилежним знаку $\frac{dv}{dt}$, оскільки $v(x) = x$ — знакозмінна функція. Тому за теоремою Ляпунова про нестійкість нульовий розв'язок даного рівняння — нестійкий.

Отже, якщо $a < 0$ і m — непарне число, то розв'язок $x = 0$ — асимптотично стійкий, якщо $a > 0$ і m — непарне число або якщо m — непарне число, то розв'язок $x = 0$ — нестійкий.

5.34. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = ax^3 + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy^5.$$

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося критерієм стійкості за першим наближенням. Система рівнянь першого наближення має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = by, \quad \frac{dy}{dt} = cx.$$

Відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - bc = 0.$$

Якщо $bc > 0$, то корені характеристичного рівняння дійсні і мають різні знаки. Тому при $bc > 0$ нульовий розв'язок — нестійкий.

Якщо $bc < 0$, то корені характеристичного рівняння чисто уявні ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$). У цьому випадку критерій стійкості за першим наближенням не дає відповіді на питання про стійкість або нестійкість нульового розв'язку.

При $bc < 0$ застосуємо метод функцій Ляпунова.

Оскільки права частина кожного з даних рівнянь складається з двох доданків, один з яких залежить лише від x, а другий — від y, то функцію Ляпунова $v(x, y)$ шукатимемо у вигляді $v(x, y) = A(x) + B(y)$, де $A(x)$, $B(y)$ — неперервно диференційовні в околі початку координат функції такі, що $A(0) = B(0) = 0$. Похідна функції v уздовж траєкторій даної системи:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dA}{dx}(ax^3 + by) + \frac{dB}{dy}(cx + dy^5).$$

Функції $A(x)$, $B(y)$ підберемо так, щоб похідна $\frac{dv}{dt}$ мала ту саму структуру, що й функція v. Для цього повинна виконуватись рівність

$$\frac{dA}{dx} by + \frac{dB}{dy} cx = 0,$$

або

$$\frac{by}{\frac{dB}{dy}} = -\frac{cx}{\frac{dA}{dx}}.$$

Остання рівність можлива, якщо вирази $\frac{by}{\frac{dB}{dy}}$ і $-\frac{cx}{\frac{dA}{dx}}$ сталі, наприклад, дорівнюють $\frac{1}{2}$.

З рівностей $\frac{dB}{dy} = 2by$ і $\frac{dA}{dx} = -2cx$ маємо: $B(y) = by^2$, $A(x) = -cx^2$, тобто $v(x, y) = by^2 - cx^2$. Функція $v(x, y)$ при $bc < 0$ є знаковизначеною, її похідна $\frac{dv}{dt} = -2acx^4 + 2bdy^6$. Якщо $a \leqslant 0$, $d \leqslant 0$ і $bc < 0$, то виконуються умови теореми Ляпунова про стійкість і, отже, нульовий розв'язок даної системи стійкий.

Якщо $a < 0$, $d < 0$ і $bc < 0$, то виконуються умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість і, отже, нульовий розв'язок даної системи — асимптотично стійкий.

Якщо $a > 0$, $d > 0$ і $bc < 0$, то виконуються умови теореми Ляпунова про нестійкість, і, отже, нульовий розв'язок даної системи — нестійкий.

Розглянутий метод функції $v(x, y)$ називається *методом відокремлення змінних.*

5.35. Чи є нескінченно великими функції

а) $v(x, y) = \frac{x^2}{1 + x^2} + y^2$; б) $v(x, y) = x^2 + \alpha^2 y^2$?

Накреслити лінії рівня функції $v(x, y)$, тобто множини точок $\{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : v(x, y) = \text{const}\}$.

Розв'язання.

а) Дана функція є додатно визначеною на всій площині xOy. Ця функція не є нескінченно великою, хоч і може набувати як завгодно великих значень. Уздовж прямої $y = 0$ функція $v(x, y)$ є обмеженою. Так, для числа $a = 1$ не можна знайти такого r, щоб при $x^2 + y^2 > r^2$ виконувалась нерівність $v(x, y) > 1$, $\forall x, y$. Для точок виду $(x, 0)$ завжди $v(x, 0) < 1$. Щоб зобразити графічно лінії рівня, розглянемо рівняння $\frac{x^2}{1 + x^2} + y^2 = C$, $C \geqslant 0$. Якщо $C = 0$, то лінія вироджується в точку $(0; 0)$. Нехай $C > 0$. Очевидно, що множина точок $v(x, y) = C$ симетрична як відносно осі абсцис, так і відносно осі ординат. Тому досить побудувати графік функції

$$y = \sqrt{C - \frac{x^2}{1 + x^2}}. \tag{4}$$

Знаходимо область визначення:

$$C - \frac{x^2}{1 + x^2} \geqslant 0, \quad C + (C - 1)x^2 \geqslant 0.$$

Звідси, якщо $0 < C < 1$, то

$$-\sqrt{\frac{C}{1 - C}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{C}{1 - C}}.$$

Якщо $C \geqslant 1$, то функція (4) визначена при всіх x, $-\infty < x < +\infty$. В області визначення функція неперервно диференційовна і її похідна

$$y'(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^2 \sqrt{C - \frac{x^2}{1 + x^2}}}$$

додатна при $x > 0$ і від'ємна — при $x < 0$. Точка $x = 0$ — єдина точка максимуму функції.

Зазначимо, що при $0 < C < 1$

$$y\left(-\sqrt{\frac{C}{1 - C}}\right) = y\left(\sqrt{\frac{C}{1 - C}}\right) = 0,$$

а при $C \geqslant 1$

$$\lim_{|x| \to +\infty} y(x) = \lim_{x^2 \to +\infty} \sqrt{C - \frac{x^2}{1 + x^2}} = \sqrt{C - 1}.$$

Цієї інформації досить, щоб побудувати лінії рівня даної функції (рис. 54).

При $0 < C < 1$ лінії рівня $v(x, y) = C$ є замкненими (див. задачу 5.30).

б) Якщо $\alpha = 0$, то функція $v(x, y)$ не є нескінчено великою ($v(0, y) = 0$).

Якщо $\alpha \neq 0$, то функція $v(x, y)$ є нескінчено великою, оскільки при $x^2 + y^2 > 1$

$$v(x, y) = x^2 + \alpha^2 y^2 \geqslant \alpha^2 (x^2 + y^2)$$

при $0 < \alpha^2 \leqslant 1$, і

$$v(x, y) = x^2 + \alpha^2 y^2 \geqslant (x^2 + y^2)$$

при $\alpha^2 > 1$. Лінії рівня функції $v(x, y)$ — еліпси $x^2 + \alpha^2 y^2 = C$, $C > 0$, і точка (0; 0), якщо $C = 0$.

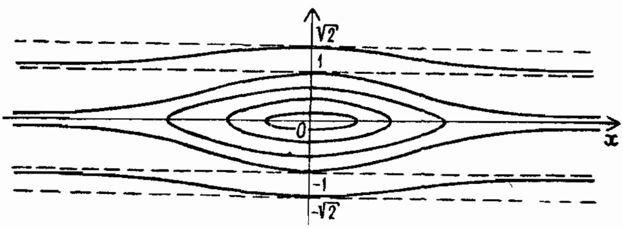


Рис. 54

Зазначимо, що в цьому випадку кожна з ліній рівня $v(x, y) = C$, $C > 0$, замкнена і лежить в обмеженій частині площини xOy.

5.36. Визначити, чи є стійким в цілому нульовий розв'язок системи рівнянь $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -f(x) - ay$, де $a > 0$, функція $f(x)$ неперервна і задовольняє умовам $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$ і $\int\limits_0^{\pm\infty} f(t)\,dt = +\infty$.

Р о з в' я з а н н я. Функцію $v(x, y)$ шукаємо у вигляді $v(x, y) = A(x) + B(y)$. Її похідна вздовж траєкторій даної системи

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dA}{dx} y + \frac{dB}{dy} (-f(x) - ay).$$

З умови

$$\frac{dA}{dx} y - \frac{dB}{dy} f(x) = 0 \text{ маємо } \frac{y}{\frac{dB}{dy}} = \frac{f(x)}{\frac{dA}{dx}}.$$

Прирівнявши обидві частини останньої рівності, наприклад до 1, дістанемо $B(y) = \frac{y^2}{2}$, $A(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

Отже,

$$v(x, y) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + \frac{y^2}{2}, \quad \frac{dv}{dt} = -ay^2.$$

Внаслідок умов $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$ і $\int\limits_0^{\pm\infty} f(t)\,dt = +\infty$, функція $v(x, y)$ є нескінченно великою, а її похідна вздовж траєкторій системи — від'ємно-сталою. Похідна перетворюється в нуль на прямій $y = 0$. З'ясуємо, чи є на такій прямій цілі траєкторії, відмінні від точки (0; 0). Якщо така траєкторія існує, то відповідний їй розв'язок $x = \varphi(t)$, $y = 0$.

Підставивши цей розв'язок у друге рівняння даної системи, дістанемо $f(\varphi(t)) = 0$. Звідси $\varphi(t) \equiv 0$. Тому множина точок, на якій $\frac{dv}{dt} = 0$, не містить цілих траєкторій, відмінних від точки (0; 0). Отже, внаслідок теореми Барбашина — Красовського, нульовий розв'язок даної системи стійкий в цілому.

5.5. Фазова площина

Систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — неперервно диференційовні в деякій області (або в усій площині) функції, часто називають *динамічною системою*, а координатну площину xOy — її *фазовою площиною*.

У системі (1) можливі три типи фазових кривих (траєкторій): точка, замкнена крива і незамкнена крива. Розв'язок, траєкторією якої є точка $(x_0; y_0)$ (положення рівноваги) є сталим: $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ для всіх $t \in \mathbf{R}$. Замкнена крива відповідає періодичному розв'язку, а незамкнена — неперіодичному.

Напрям, в якому рухається фазова точка $(x(t), y(t))$ по траєкторії L при зростанні t, називається *напрямком на траєкторії* L.

Основна задача якісного дослідження динамічної системи (1) полягає в тому, щоб дістати якісну картину розбиття фазової площини на траєкторії, тобто встановити топологічну структуру цього розбиття.

Під *топологічною структурою* розуміють усі ті властивості, які залишаються інваріантними (незмінюваними) при топологічному, тобто взаємно однозначному і взаємно неперервному перетворенні площини в себе.

Щоб з'ясувати якісну картину розбиття фазової площини для системи (1), треба знати поведінку не всіх фазових кривих, а лише деяких з них, які називаються *особливими:* положення рівноваги, граничні цикли й незамкнені криві, в яких хоча б одна півтраєкторія є сепаратрисою якого-небудь положення рівноваги.

Граничним циклом системи (1) називається така замкнена фазова крива, деякий окіл якої цілком заповнений траєкторіями, по яких фазова точка необмежено наближається до цієї замкненої кривої при $t \to +\infty$ або при $t \to -\infty$.

Розглянемо випадок, коли система (1) є лінійною і однорідною:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Якщо $\det A = ad - bc \neq 0$, то система (2) має єдине положення рівноваги: $x = y = 0$. Якісна поведінка фазових кривих (тип положення рівноваги) визначається власними значеннями матриці A коефіцієнтів цієї системи, тобто коренями рівняння

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb = 0. \tag{3}$$

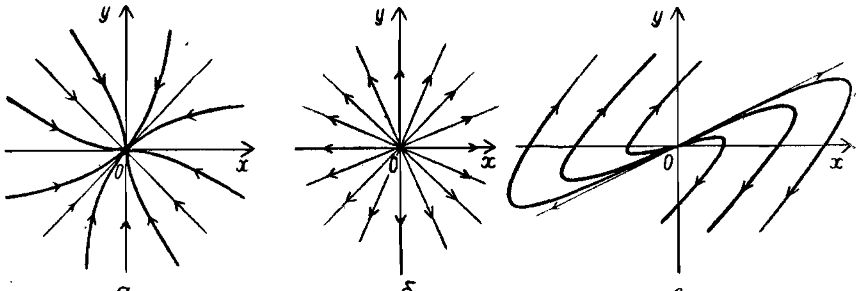


Рис. 55

Якщо корені λ_1 і λ_2 рівняння (3) — дійсні числа одного знака ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$), то положення рівноваги — *стійкий вузол* при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (рис. 55, *а*) і *нестійкий вузол* при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Якщо система (2) має вигляд $\dfrac{dx}{dt} = ax$, $\dfrac{dy}{dt} = ay$, то вузол називається *дикритичним* (рис. 55, *б*).

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2$ і ранг матриці $\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix}$ дорівнює 1, то вузол називається *виродженим* (рис. 55, *в*).

Якщо корені рівняння (3) дійсні і $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то положення рівноваги — *сідло* (рис. 56).

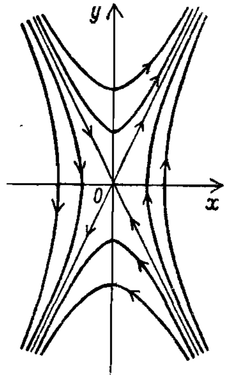


Рис. 56

Якщо корені рівняння (3) комплексно-спряжені, тобто $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то положення рівноваги — *фокус* при $\alpha \neq 0$ і *центр* — при $\alpha = 0$ (рис. 57).

Щоб побудувати фазові криві системи (2) на площині xOy у випадку вузла, сідла і виродженого вузла, треба спочатку знайти ті фазові криві, які лежать на прямих, що проходять через початок координат. Ці прямі завжди напрямлені вздовж власних векторів матриці A. У випадку вузла фазові криві дотикаються до тієї прямої, яка напрямлена вздовж власного вектора, який відповідає меншому за абсолютною величиною значенню λ.

Щоб дослідити положення рівноваги $(x_0;\ y_0)$ більш загальної системи (1), треба початок координат перенести в точку $(x_0;\ y_0)$ і розкласти функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ в околі цієї точки за формулою Тейлора, обмежившись членами першого степеня. Тоді система (1) матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \varphi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y). \tag{4}$$

Якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння (3) відмінні від нуля, то положення рівноваги системи (1) матиме той самий тип, що й положення рівноваги лінійної системи (2) (системи першого наближення для (4)).

Якщо для системи (2) точка $x = 0$, $y = 0$ є центром, то для системи (4) вона може бути фокусом або центром. Для існування центра достатньо, наприклад, щоб фазові криві мали вісь симетрії, яка проходить через дане положення рівноваги. Якщо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{5}$$

не змінюється при заміні x на $-x$ (або y на $-y$), то така вісь симетрії, очевидно, існує. Для існування фокуса необхідно й достатньо, щоб положення рівноваги було асимптотично стійким при $t \to +\infty$ або при $t \to -\infty$. Дослідження на стійкість можна виконати за допомогою теорем Ляпунова.

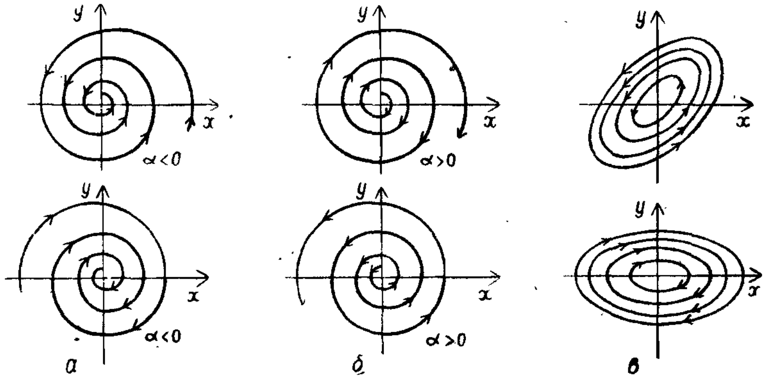


Рис. 57

Дослідження околів положень рівноваги системи (1) — це локальна задача якісної теорії диференціальних рівнянь. Іноді, дослідивши поведінку фазових кривих в околі кожного положення рівноваги, можна розв'язати глобальну задачу якісної теорії — дослідити поведінку фазових кривих системи (1) на всій фазовій площині. Проте в загальному випадку ця задача є досить складною. Більш простим є випадок, коли рівняння

$$Q(x, y)\,dx - P(x, y)\,dy = 0 \tag{6}$$

є рівнянням у повних диференціалах. Тоді фазові траєкторії системи (1) розміщені на інтегральних кривих рівняння (6), тобто на лініях $u(x, y) = C$, де $\frac{\partial u}{\partial x} = Q(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -P(x, y)$. Прикладом систем такого типу є механічна система з одним степенем вільності (без тертя), яка описується диференціальним рівнянням Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \tag{7}$$

де $f(x)$ — диференційовна на деякому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$ функція.

Запишемо рівняння (7) у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x) \tag{8}$$

і введемо позначення:

$$\Pi(x) = -\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ — потенціальна енергія;}$$

$$T(y) = \frac{y^2}{2} \text{ — кінетична енергія;}$$

$$E(x,\ y) = \Pi(x) + T(y) \text{ — повна механічна енергія.}$$

Повна енергія $E(x, y) = C$ є першим інтегралом системи (8) і тому кожна фазова крива цієї системи цілком лежить на деякій множині (лінії) рівня енергії, тобто на множині $\{(x;\ y) \mid \Pi(x) + T(y) = C\}$ при деякому значенні C.

Щоб побудувати лінії рівня енергії, уявімо кульку, яка перебуває в «потенціальній ямі» Π (рис. 58) [1, § 12]. Зафіксуємо значення повної енергії E. Оскільки кінетична енергія невід'ємна, то потенціальна енергія не більша від повної енергії. Отже, лінія рівня енергії E проектується на вісь Ox у множину $\{x \in I : \Pi(x) \leqslant E\}$ (кулька не може піднятися вище рівня E в потенціальній ямі). Далі, швидкість є тим більшою (за абсолютною величиною), чим менша потенціальна енергія:

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = |y| = \sqrt{2(E - \Pi(x))}$$

(скочуючись в яму, кулька набуває більшої швидкості, а піднімаючись — втрачає її). У «точках повороту», де $\Pi(x) = E$, швидкість дорівнює нулю. З парності енергії відносно y випливає, що лінія рівня енергії симетрична відносно осі Ox (кулька проходить кожну точку в прямому і зворотному напрямку з однаковою швидкістю).

Цих міркувань досить для того, щоб побудувати лінії рівня енергії систем з різними потенціалами $\Pi(x)$. Розглянемо найпростіший випадок (нескінченно глибока потенціальна яма з одним притягувальним центром x_0), тоді $f(x)$ монотонно спадає, $f(x_0) = 0$, $I = \mathbb{R}$ (рис. 58).

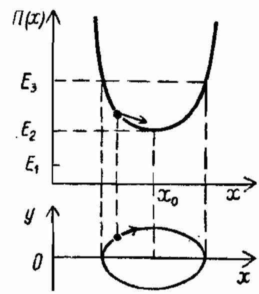


Рис. 58

Якщо значення повної енергії E_1 менше від мінімуму потенціальної енергії E_2, то множина рівня $E(x;\ y) = E_1$ — порожня (рух кульки фізично неможливий). Множина рівня $E(x;\ y) = E_2$ складається з однієї точки $(x_0;\ 0)$ (кулька перебуває в спокої на дні ями).

Якщо значення E_3 повної енергії більше від критичного $E_2 = \Pi(x_0)$, то множина рівня $E(x, y) = E_3$ — гладка замкнена симетрична крива, яка охоплює положення рівноваги $(x_0;\ 0)$ на фазовій площині (кулька рухається в ямі вперед і назад, піднімається до висоти E_3, в цей момент її швидкість перетворюється в нуль і вона скочується назад в яму, проходить точку x_0, в цей момент її швидкість максимальна, піднімається з другого боку і т. д).

Досліджуючи більш складні випадки, треба аналогічно попередньому послідовно збільшувати значення повної енергії E, відмічаючи значення E, що дорівнюють критичним значенням потенціальної енергії (де $\Pi'(x) = 0$), і розглядати криві, які відповідають околам критичних значень E.

Якщо консервативна система має положення рівноваги типу «центр», то малі збурення цієї системи можуть зумовити появу стійкого граничного цикла. В цьому випадку для досить широкого діапазону початкових умов в системі виникають періодичні коливання певної амплітуди. Такий усталений режим називається *режимом автоколивань*.

Наприклад, у системі, близькій до системи малих коливань маятника $\frac{dx}{dt} = y + \varepsilon f_1(x;\ y)$, $\frac{dy}{dt} = -x + \varepsilon f_2(x;\ y)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, достатньою умовою існування граничного цикла є існування додатних розв'язків $a = a_0 > 0$ рівняння

$F(a) = 0$, де

$$F(a) = -a\int_0^{2\pi} f_1(a\cos\varphi, -a\sin\varphi)\cos\varphi - f_2(a\cos\varphi, -a\sin\varphi)\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Цей цикл є асимптотично стійким, якщо $F'(a_0) < 0$, і нестійким, якщо $F'(a_0) > 0$.

На практиці часто використовується така достатня умова існування граничного циклу системи (1) — *принцип кільця*: якщо на фазовій площині можна знайти таке кільце

$$r_1^2 \leqslant (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r_2^2,$$

що всі траєкторії системи (1), які починаються на межі цього кільця, входять всередину кільця або одночасно всі виходять з кільця, то всередині кільця є граничний цикл системи (1).

5.37. Дослідити поведінку фазових кривих систем:

а) $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y;$

б) $\dfrac{dx}{dt} = 0, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + y.$

Розв'язання.

а) Праві частини кожного з рівнянь перетворюються в нуль у точках прямої $y = 2x$. Тому всі точки цієї прямої є положеннями рівноваги. Фазові криві, відмінні від положень рівноваги, є інтегральними кривими рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x + 2y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, \quad y \neq 2x.$$

Звідси маємо півпрямі $y = -\frac{1}{2}(x + c), y \neq 2x$.

Рух по фазових кривих відбувається в напрямку до положення рівноваги. Це зумовлено тим, що коли фазова точка $(x(t), y(t))$ у момент t знаходиться в області $2x - y < 0$ (над прямою $y = 2x$), то $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y > 0$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x - y < 0$, тобто $x(t)$ зростає, а $y(t)$ — спадає. Навпаки, якщо в момент t фазова точка знаходиться в області $2x - y > 0$, то $\dfrac{dx}{dt} < 0$, $\dfrac{dy}{dt} > 0$, тобто $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає (рис. 59, *а*).

б) Положеннями рівноваги даної системи є точки прямої $x + y = 0$. У точках $(x; y)$, для яких $x + y \neq 0$, маємо $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{0}{x + y} = 0$, тобто фазові криві системи лежать на прямих $x = c$. Отже, кожна пряма $x = c$ складається з трьох фазових кривих: точки $(c; -c)$ і півпрямих $x = c, y > -c$ та $x = c, y < -c$. Оскільки $\dfrac{dy}{dt} = x + y > 0$ при $y > -x$ і $\dfrac{dy}{dt} < 0$ при $y < -x$, то фазова точка $(x(t); y(t))$

при $t \to +\infty$ рухається в нескінченно віддалену точку площини (рис. 59, *б*), тобто положення рівноваги є нестійкими.

5.38. Визначити тип положення рівноваги і характер поведінки фазових кривих системи рівнянь $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = x + 2y$. Зробити рисунок.

Р о з в' я з а н н я. Система має єдине положення рівноваги $x = y = 0$. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)(2-\lambda) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

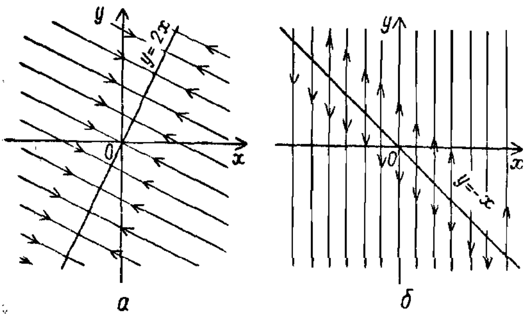


Рис. 59

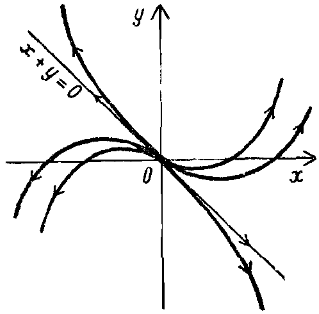


Рис. 60

Корені λ_1 і λ_2 — дійсні, різні і мають однакові знаки. Тому положення рівноваги (0; 0) — вузол, причому нестійкий, оскільки $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$. Власному значенню $\lambda_1 = 1$ відповідає власний вектор $\{1; -1\}$, а $\lambda_2 = 2$ — власний вектор $\{0; 1\}$.

На площині xOy будуємо прямі $x + y = 0$ і $x = 0$, напрямлені вздовж зазначених векторів. Кожна з цих прямих містить три фазових кривих: положення рівноваги і дві півпрямі, на які пряма ділиться точкою O (0; 0).

Інші фазові криві дотикаються в точці O (0; 0) до прямої $x + y = 0$, оскільки $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Поведінку фазових кривих подано на рис. 60.

5.39. Зобразити поведінку фазових кривих системи рівнянь $\frac{dx}{dt} = -3x + 2y$, $\frac{dy}{dt} = x - 4y$. Зробити рисунок

Р о з в' я з а н н я. Складемо характерне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

Корені його $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$ — дійсні, різні й від'ємні. Отже, положення рівноваги — стійкий вузол.

Прямі, які містять фазові криві системи, шукаємо у вигляді $y = kx$. Підставивши $y = kx$ в рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 4y}{-3x + 2y},$$

дістанемо рівняння для визначення k:

$$k = \frac{1 - 4k}{-3 + 2k}, \quad 2k^2 + k - 1 = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Отже, $y = -x$ і $y = \frac{x}{2}$ — шукані прямі. Інші фазові криві — частини парабол, які в початку координат дотикаються до прямої $y =$

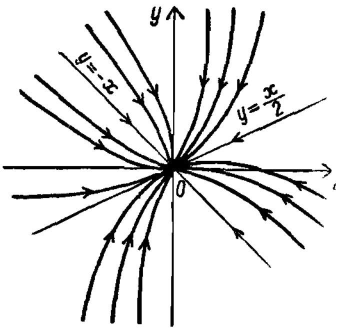


Рис. 61

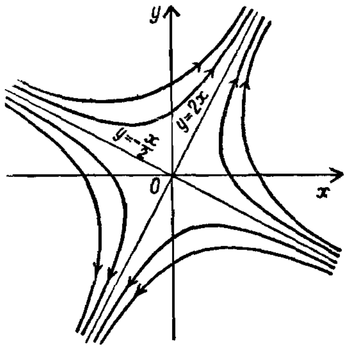


Рис. 62

$= \frac{x}{2}$, оскільки меншому за абсолютною величиною кореню $\lambda_1 = -2$ відповідає власний вектор $\{2;\ 1\}$, паралельний прямій $y = \frac{x}{2}$. Параболи будуємо методом ізоклін (рис. 61).

5.40. Визначити тип положення рівноваги системи

$$\frac{dx}{dt} = 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$$

і дослідити поведінку фазових кривих.

Розв'язання. Складемо характерне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Корені його $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ — дійсні і мають різні знаки. Тому положення рівноваги O (0; 0) — сідло. Знайдемо сепаратриси сідла — прямі, які поділяють фазові криві різних типів. Рівняння сепаратрис запишемо у вигляді $y = kx$. Для визначення k маємо рівняння $k = \frac{2 + 3k}{2k}$, звідки $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = 2$. Отже, $y = -\frac{x}{2}$ і $y = 2x$ — шукані прямі. Кожна з них складається з трьох фазових кривих. На прямій $y = -\frac{x}{2}$ дана система має вигляд $\dot{x} = -x, \dot{y} = -y$. Отже, вздовж прямої $y = -\frac{x}{2}$ фазова точка $(x(t);\ y(t))$ рухається за законом $x(t) = x_0 e^{-t}$, $y(t) = y_0 e^{-t}$, тобто при $t \to +\infty$ точка рухається в напрямку початку координат. Аналогічно знаходимо, що вздовж прямої $y = 2x$ фазова точка рухається за законом $x(t) = x_0 e^{4t}$, $y(t) = y_0 e^{4t}$. По цій прямій точка віддаляється від початку координат. На рис. 62 схематично

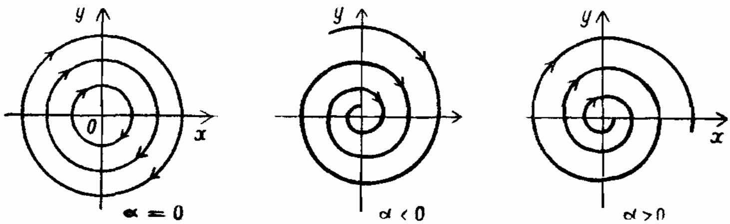


Рис. 63

зображено фазові криві системи та вказано напрямки руху по цих кривих.

5.41. Дослідити поведінку фазових кривих системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \alpha y.$$

Р о з в' я з а н н я. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ -1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1 = 0$$

має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$.

Якщо $\alpha = 0$, то положення рівноваги — центр. У цьому випадку система має вигляд $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$. Звідси $x^2 + y^2 = c^2$, тобто фазовими кривими є кола радіуса $|c| > 0$ з центром в точці $O(0;\ 0)$ і сама точка $O(0;\ 0)$.

Якщо $\alpha \neq 0$, то положення рівноваги є фокус — стійкий при $\alpha < 0$ і нестійкий при $\alpha > 0$. Фазовими кривими є спіралі, які накручуються на точку $O(0;\ 0)$. При $\alpha < 0$ фазова точка рухається по спіралях у напрямку положення рівноваги, а при $\alpha > 0$ — від нього (рис. 63).

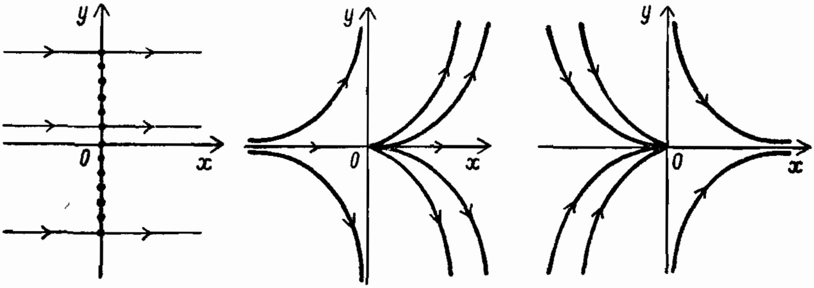
5.42. Побудувати фазові криві системи рівнянь:

а) $\frac{dx}{dt} = x^2$, $\frac{dy}{dt} = ay$; б) $\frac{dx}{dt} = ay$, $\frac{dy}{dt} = x^2$.

Р о з в' я з а н н я.

а) Якщо $a = 0$, то кожна пряма $y = y_0$ містить три фазові криві: півпряму $y = y_0$, $x < 0$; точку $(0;\ y_0)$ і півпряму $y = y_0$, $x > 0$. Рух фазової точки по цих півпрямих відбувається зліва направо, в бік зростання x (рис. 64).

Якщо $a \neq 0$, то з рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x^2}$ знаходимо, що фазові криві лежать на лініях $y = Ce^{-a/x}$. Вісь ординат, крім положення рівноваги $(0;\ 0)$, містить дві фазові криві: півпрямі $x = 0$, $y > 0$ і $x = 0$, $y < 0$.



$a = 0$ $a > 0$ $a < 0$

Рис. 64

б) Рівняння фазових кривих $x^2dx - aydy = 0$ легко інтегрується:

$$\frac{2}{3}x^3 - ay^2 = C.$$

Фазові криві даної системи зображені на рис. 65.

54.3. Дослідити поведінку фазових кривих системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3x^2$$

в околі положень рівноваги, а також у всій фазовій площині.

Р о з в' я з а н н я. Дана система має два положення рівноваги: $O\ (0;\ 0)$ і $O_1\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$. Характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги $(x_0;\ y_0)$, має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 - 6x_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 - 6x_0 = 0.$$

Для точки $O\ (0;\ 0)$ маємо $\lambda^2 + 1 = 0$, звідки $\lambda_{1,2} = \pm i$. Отже, положення рівноваги $O\ (0;\ 0)$ може бути або центром, або фокусом. Помітивши, що рівняння фазових кривих $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3x^2}{-y}$ не змінюється при заміні y на $-y$, робимо висновок, що фазові криві симетричні відносно осі абсцис, тому точка O — центр.

Характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги O_1, має вигляд $\lambda^2 - 1 = 0$, звідки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Отже, положення рівноваги O_1 — сідло.

Визначимо напрямки, по яких сепаратриси підходять до цього сідла, тобто знайдемо рівняння дотичних до сепаратрис у точці O_1. Лінеаризуючи систему в околі точки O_1, дістаємо

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = -\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

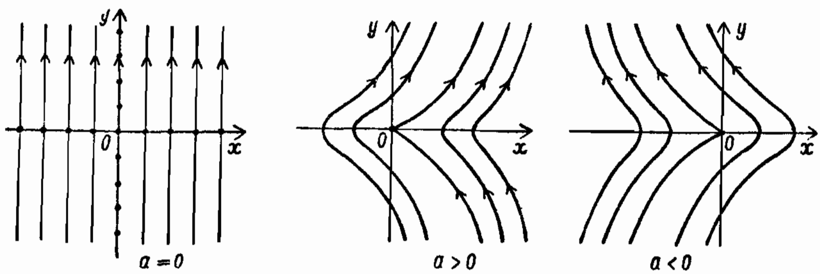


Рис. 65

Рівняння дотичних шукаємо у вигляді $y = k\left(x - \frac{1}{3}\right)$. Підставивши цей вираз у рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{x - \frac{1}{3}}{y}$, дістанемо $k = \pm 1$.

Отже, дотичні до сепаратрис:

$$y = x - \frac{1}{3} \text{ і } y = -\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Таким чином виконано дослідження поведінки фазових кривих даної системи в околі її положень рівноваги. В загальному випадку цієї інформації недостатньо для побудови фазових кривих на всій площині. Проте в даному випадку це можна зробити, бо рівняння фазових кривих легко інтегрується:

$$y^2 + x^2 - 2x^3 = C.$$

Побудувавши допоміжну сім'ю кривих $z = -x^2 + 2x^3 + C$, неважко побудувати й фазові криві даної системи (рис. 66).

З умови $z\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ знаходимо, що рівняння сепаратрис має вигляд $y^2 + x^2 - 2x^3 = \frac{1}{27}$.

Напрямок руху по фазових кривих легко встановити, якщо врахувати, що, згідно з першим рівнянням системи, в півплощині $y > 0$ абсциса фазової точки спадає, а в півплощині $y < 0$ — зростає.

5.44. Дослідити і зобразити графічно фазові криві системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 4x^3.$$

Р о з в' я з а н н я. Прирівнюючи до нуля праві частини системи, знаходимо положення рівноваги: O_1 (—1; 0), O (0; 0), O_2 (1; 0).

Система має перший інтеграл $y^2 - 2x^2 + x^4 = C$. Розглянемо допоміжні функції $z = C + 2x^2 - x^4$. Побудувавши графіки цих

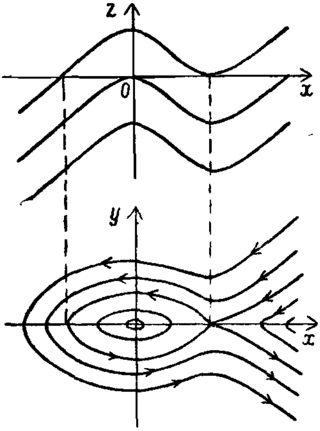


Рис. 66

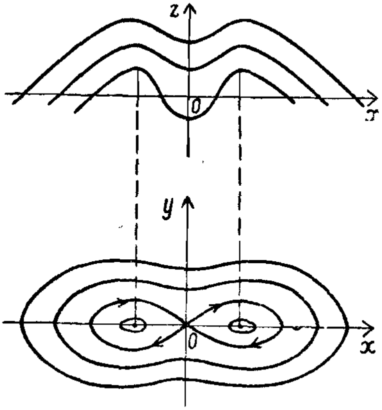


Рис. 67

функцій при різних C, легко побудувати траєкторії даної системи (рис. 67).

Крива $y^2 - 2x^2 + x^4 = 0$ містить три траєкторії — дві петлі й точку O (0; 0). При $C > 0$ крива $y^2 - 2x^2 + x^4 = C$ визначає одну траєкторію. При $C < 0$ — дві траєкторії (два овали). При $C = -1$ дістаємо дві ізольовані точки: O_1 (—1; 0) і O_2 (1; 0). Напрямок руху по траєкторіях можна встановити, якщо помітити, що, внаслідок першого рівняння системи, абсциса фазової точки з часом зростає в області $y > 0$.

5.45. Довести, що множина рівня енергії $\{(x;\ y) : \Pi(x) + \frac{y^2}{2} = E\}$ є гладкою в околі кожної своєї точки, крім положення рівноваги, тобто точки $(x;\ y)$ такої, що $f(x) = 0$, $y = 0$ (див. (8)).

Д о в е д е н н я. Скористаємось теоремою про неявну функцію. Маємо:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{d\Pi}{dx} = -f(x), \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{dT}{dy} = y.$$

Якщо одна з частинних похідних відмінна від нуля, то в околі розглядуваної точки множина рівня E є графіком диференційовної функції виду $x = x(y)$ або $y = y(x)$.

Зазначимо, що виключені точки $(x;\ y)$ такі, що $f(x) = 0$, $y = 0$ — положення рівноваги системи Ньютона (8). Ці точки є критичними точками повної енергії $E(x, y)$. Нарешті, точки x такі, що $f(x) = 0$ є критичними точками потенціальної енергії $\pi(x)$.

5.46. Зобразити графічно лінії рівня енергії, якщо потенціальна енергія $\Pi(x) = kx^2/2$.

Р о з в' я з а н н я. Лінії рівня енергії в цьому випадку — криві другого порядку $kx^2 + y^2 = C$. Якщо $k > 0$ (критична точка $x = 0$ — мінімум потенціальної енергії), то лінії рівня енергії — гомотетичні *еліпси з центром* у точці $O\,(0;\ 0)$.

Якщо $k < 0$ (критична точка $x = 0$ — максимум потенціальної енергії), то лінії рівня енергії — гомотетичні гіперболи з центром у точці $O\,(0;\ 0)$ і парою їхніх асимптот є $y = \pm\sqrt{-k}x$ (рис. 68).

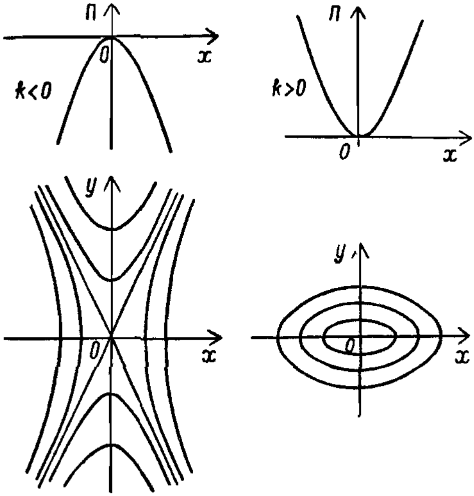


Рис. 68

5.47. Зобразити графічно лінії рівня енергії рівняння Ньютона для даних потенціалів (рис. 69, *а*—*в*).

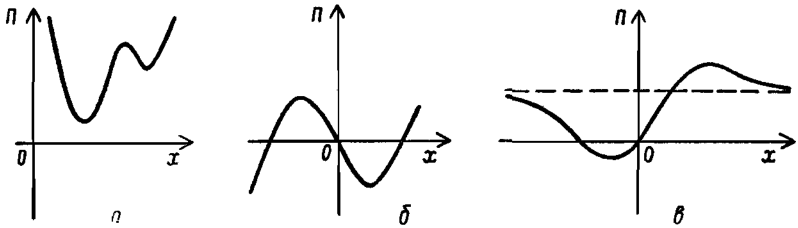


Рис. 69

Р о з в' я з а н н я. Користуючись методикою побудови ліній рівня енергії, а також ураховуючи, що в околі локального мінімуму потенціальної енергії лінії рівня є замкненими кривими, гомеоморфними еліпсам, а в колі локального максимуму потенціальної енергії ці криві гомеоморфні гіперболам, будуємо їх (рис. 70, *а*—*в*).

5.48. Рівняння Ньютона з потенціалом $\Pi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$, $c > 0$, $x > 0$ описує зміну відстані планет і комет від Сонця (задача Кеплера). Зобразити графічно лінії рівня енергії для задачі Кеплера.

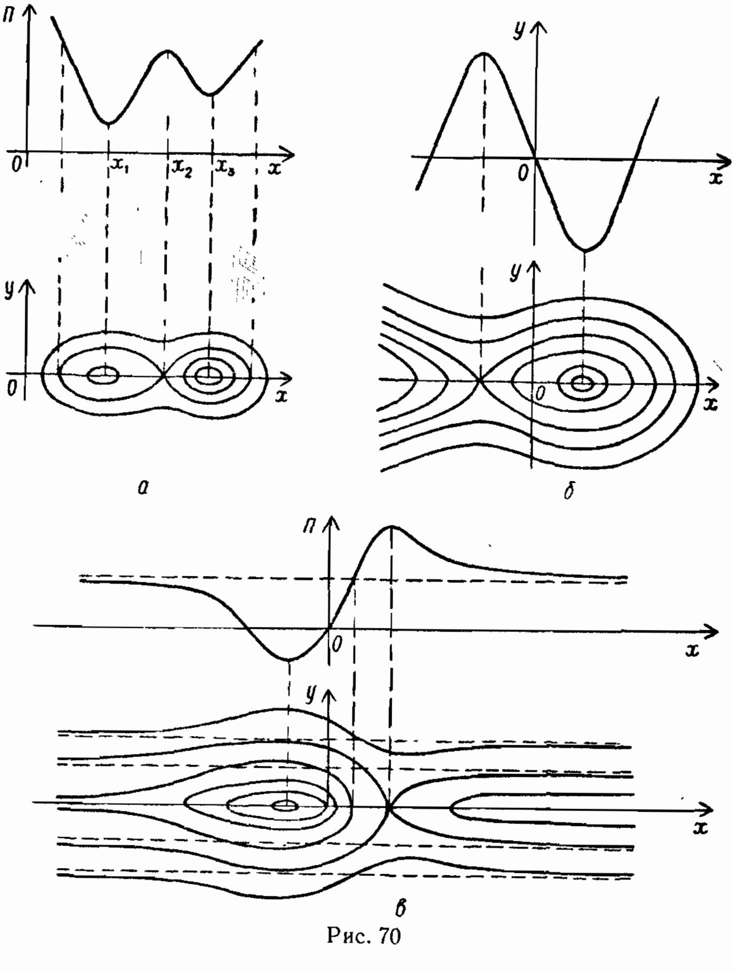


Рис. 70

Р о з в' я з а н н я. Побудувавши графік функції $\Pi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$ (рис. 71), будуємо криві $-\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{y^2}{2} = E$. В околі точки ($x_0$; 0) ці криві замкнені, оскільки x_0 — точка мінімуму потенціальної енергії. Якщо значення E збільшується від E_0 до нуля, то ці криві залишаються замкненими, але «витягуються» вправо. При $E = 0$

лінії рівня розмикаються, причому при $x \to +\infty$, $y \to 0$, тобто вісь абсцис є для неї асимптотою. При $E > 0$ всі лінії рівня незамкнені і кожна з них має дві асимптоти при $x \to +\infty$:

$$y = \pm\sqrt{2E}.$$

5.49. Дослідити фазові криві системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - x^4.$$

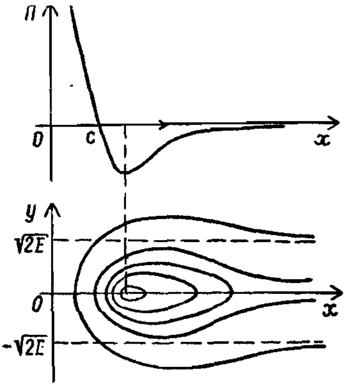


Рис. 71

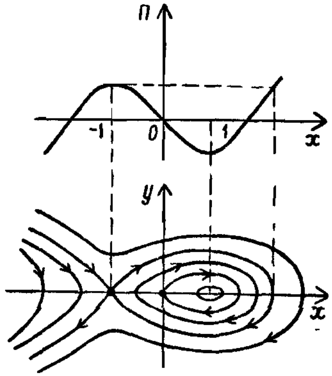


Рис. 72

Р о з в' я з а н н я. Ця система є системою Ньютона. Її потенціальна енергія $\Pi(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$. Критичні точки потенціальної енергії:

$$x = 0, \quad x = \pm 1.$$

У точці $x = 1$ потенціальна енергія має локальний мінімум, а в точці $x = -1$ — локальний максимум. Точка $x = 0$ — вироджена критична точка потенціальної енергії.

Отже, положення рівноваги $O_1(-1;\ 0)$ даної системи є сідлом, а положення рівноваги $O_2(1;\ 0)$ є центром. Фазові криві системи лежать на лініях рівня енергії

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Будуємо ці лінії, побудувавши раніше графік функції $\Pi(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$ (рис. 72). Напрям руху фазової точки по фазових кривих можна визначити з того, що, згідно з першим рівнянням системи $\dot{x}(t) = y(t)$, абсциса фазової точки з часом зростає, якщо фазова точка рухається в півплощині $y > 0$, і спадає, якщо рух відбувається у фазовій півплощині $y < 0$.

5.50. У фазовій площині $(x, \dot{x})$ дослідити фазові криві рівняння маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$.

Р о з в'я з а н н я. Запишемо рівняння маятника у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x.$$

Положеннями рівноваги системи є точки осі Ox з абсцисами $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$ Потенціальна енергія $\Pi(x) = -\cos x$ (рис. 73). Оскільки праві частини системи періодичні по x з періодом 2π, то достатньо дослідити фазові криві у вертикальній полосі фазової площини шириною 2π, наприклад, в полосі: $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y < +\infty$.

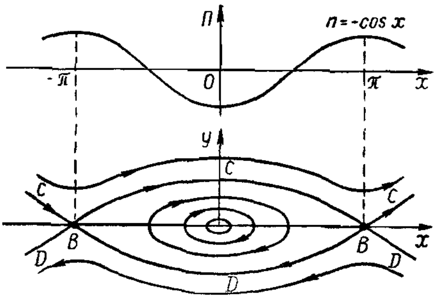


Рис. 73

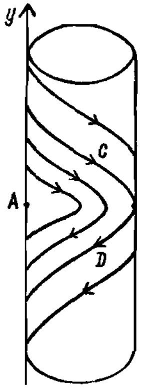


Рис. 74

Фазові криві в околі початку координат подібні еліпсам. Цим фазовим кривим відповідають малі коливання маятника. Період цих коливань у незначній мірі залежить від амплітуди, поки вона ще мала. При великих значеннях повної енергії дістаємо великі замкнуті криві доти, поки енергія не набуває критичного значення, що дорівнює потенціальній енергії перевернутого маятника. Період коливань при цьому зростає. Великим значенням енергії відповідають незамкнені криві, на яких y не змінює знака, тобто маятник не коливається, а обертається. Його швидкість досягає найбільшого значення в нижньому, а найменшого — у верхньому положенні рівноваги.

Зауважимо, що значенням x, які відрізняються на $2k\pi$, відповідають однакові положення маятника. Тому фазовим простором маятника природно вважати не площину, а циліндр (рис. 74).

Накручуючи на циліндр плоску картину, дістаємо фазові криві маятники на поверхні циліндра. Всі вони є замкненими гладкими кривими, крім двох положень рівноваги: A, B (нижнє і верхнє) і сепаратриси C, D.

5.51. Дослідити тип кожного з положень рівноваги системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x(x + y - 2), \quad \frac{dy}{dt} = y(1 - x).$$

Р о з в' я з а н н я. Положення рівноваги даної системи визначаємо з рівнянь: $x(x + y - 2) = 0$, $y(1 - x) = 0$. Звідси знаходимо три положення рівноваги O (0; 0), O_1 (1; 1), O_2 (2; 0). Характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги $(x_0; y_0)$, має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2x_0 + y_0 - 2 - \lambda & x_0 \\ -y_0 & 1 - x_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - (x_0 + y_0 - 1)\lambda + 4x_0 - 2x_0^2 + y_0 - 2 = 0.$$

Коренями цього рівняння при $x_0 = y_0 = 0$ є : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Отже, положення рівноваги O — сідло. Якщо $x_0 = y_0 = 1$, то характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ має комплексно-спряжені корені, причому $\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{2} > 0$. Таким чином, положення рівноваги O_1 (1; 1) — нестійкий фокус. Нарешті, при $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ маємо рівняння $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Корені цього рівняння — дійсні і мають різні знаки. Отже, положення рівноваги O_2 (2; 0) — сідло.

Координатні осі складаються з фазових кривих. Вісь ординат складається з трьох фазових кривих: $x = 0$, $y < 0$; $x = 0$, $y = 0$; $x = 0$, $y > 0$, а вісь абсцис — з п'яти: $y = 0$, $x < 0$; $x = 0, y = 0$; $y = 0$, $0 < x < 2$; $y = 0$, $x = 2$; $y = 0$, $x > 2$.

На прямій $x = 0$ дана система еквівалентна рівнянню $\dot{y} = y$ і тому рух фазової точки по осі ординат відбувається в напрямку «від положення рівноваги» O (0; 0) за законом $y(t) = y_0 e^t$.

Рух фазової точки по осі абсцис відбувається так:

якщо рух починається з точки $(x_0; 0)$, де $x_0 < 2$, то фазова точка з часом наближається до початку координат;

якщо рух починається з точки $(x_0; 0)$, де $x_0 > 2$, то фазова точка з часом йде в нескінченно віддалену точку. Фазові криві даної системи рівнянь зображені на рис. 75.

5.52. Дослідити тип положення рівноваги системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 2xy, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + y - x^2 + y^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Із системи алгебраїчних рівнянь $2xy = 0$, $1 + y - x^2 + y^2 = 0$ знаходимо положення рівноваги: O_1 (—1; 0) і O_2 (1; 0). Оскільки система диференціальних рівнянь не змінюється при заміні x на $-x$, то її фазові криві розміщені симетрично відносно осі ординат. Тому достатньо дослідити тип одного з положень рівноваги, наприклад, O_2 (1; 0).

Складаємо характеристичне рівняння, яке відповідає цьому положенню рівноваги:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \lambda + 4 = 0.$$

Корені цього рівняння комплексно-спряжені, причому $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Отже, обидва положення рівноваги є нестійкими фокусами. Зазначимо, що вісь ординат є фазовою кривою і на цій осі система еквівалентна рівнянню $\dot{y} = 1 + y + y^2$. Фазова точка, з якого б положення

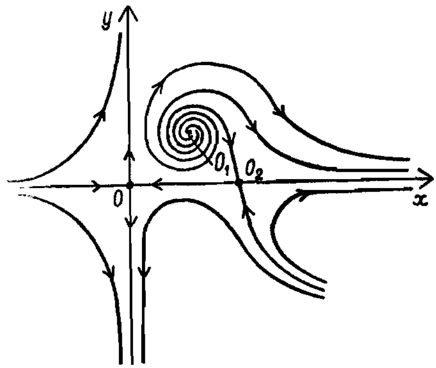


Рис. 75

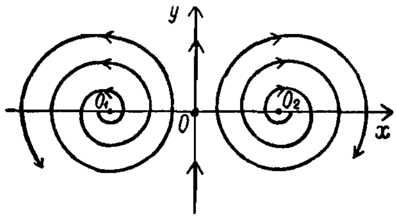


Рис. 76

на осі Oy вона не починала б свій рух, з часом прямує в нескінченно віддалену точку площини (рис. 76).

5.53. Дослідити тип всіх положень рівноваги системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -2xy, \quad \frac{dy}{dy} = x^2 + y^2 - 1.$$

Розв'язання. Із системи $-2xy = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ знаходимо всі положення рівноваги: O_1 (—1; 0), O_2 (1; 0), O_3 (0; 1), O_4 (0; —1). Складаємо характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги $(x_0; y_0)$:

$$\begin{vmatrix} -2y_0 - \lambda & -2x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4(x_0^2 - y_0^2) = 0.$$

Корені цього рівняння при $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 1$ — дійсні і мають різні знаки: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$. Отже, положення рівноваги O_3 і O_4 є сідлами. Неважко бачити також, що вісь ординат складається з фазових кривих, три з яких є сепаратрисами сідел: $x = 0$, $y < -1$; $x = 0$, $-1 < y < 1$; $x = 0$, $y > 1$. При цьому сепаратриса $x = 0$, $-1 < y < 1$ є спільною для обох сідел — вона виходить із сідла O_3 і входить в сідло O_4. Корені характеристичного рівняння при $x_0 = \pm 1$, $y_0 = 0$ є чисто уявними: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Тому положення рівноваги O_1 і O_2 даної системи можуть бути або центрами, або фокусами. Оскільки рівняння фазових кривих $(x^2 + y^2 - 1)\,dx + 2xydy = 0$ не змінюється при заміні y на $-y$, то фазові криві симетричні відносно осі абсцис. Звідси випливає, що положення рівноваги O_1 і O_2 є центрами. Напрямок руху по замкнених фазових кривих в околі цих центрів можна визначити так. Згідно з другим рівнянням системи, фазова точка перетинає вісь абсцис так, що $\dot{y}(t) = x^2(t) - 1$. Отже, її ордината в цей момент зростає, якщо $|x| > 1$, і спадає, якщо $|x| < 1$. Фазові криві зображені на рис. 77.

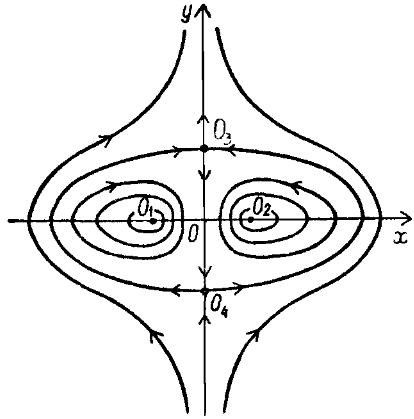


Рис. 77

5.54. Дослідити положення рівноваги системи рівнянь

а) $\dfrac{dx}{dt} = \sin x, \quad \dfrac{dy}{dt} = \sin y;$

б) $\dfrac{dx}{dt} = \sin y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -\sin x.$

Побудувати фазові криві.

Р о з в' я з а н н я. а) Праві частини даної системи рівнянь періодичні по x і по y з періодом 2π, тому досить дослідити систему в квадраті $K = \{(x; y) \mid 0 \leqslant x < 2\pi,\ 0 \leqslant y < 2\pi\}$. Цей квадрат містить чотири положення рівноваги системи: $O\,(0; 0)$, $O_1\,(0; \pi)$, $O_2\,(\pi; 0)$, $O_3\,(\pi; \pi)$. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги $(x_0; y_0)$:

$$\begin{vmatrix} \cos x_0 - \lambda & 0 \\ 0 & \cos y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = \cos x_0, \quad \lambda_2 = \cos y_0.$$

Звідси випливає, що положення рівноваги O і O_3 — вузли, причому O — нестійкий вузол, а O_3 — стійкий вузол. Корені характеристичних рівнянь, які відповідають точкам O_1 і O_2,— дійсні і мають різні знаки. Тому O_1 і O_2 — сідла. Поведінку фазових кривих зображено на рис. 78.

б) Зазначимо, що, як і в попередній задачі, достатньо дослідити фазові криві в квадраті

$$K = \{(x;\ y) \mid -\pi \leqslant x < \pi, \quad -\pi \leqslant y < \pi\}.$$

Цей квадрат містить чотири положення рівноваги: $O\,(0; 0)$, $O_1\,(-\pi; 0)$, $O_2\,(-\pi; \pi)$ і $O_3\,(0; -\pi)$. Складаємо характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги $(x_0;\ y_0)$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \cos y_0 \\ -\cos x_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \cos x_0 \cos y_0 = 0.$$

Для точок O_1 і O_3 це рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

звідки

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1.$$

Отже, точки O_1 і O_3 — сідла. Для точок O і O_2 маємо $\lambda^2 + 1 = 0$, звідки $\lambda_{1,2} = \pm i$. Якщо врахувати, що рівняння фазових кривих

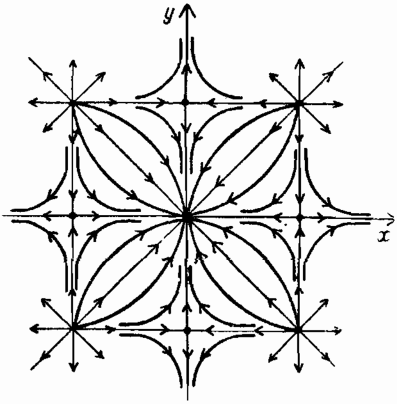


Рис. 78

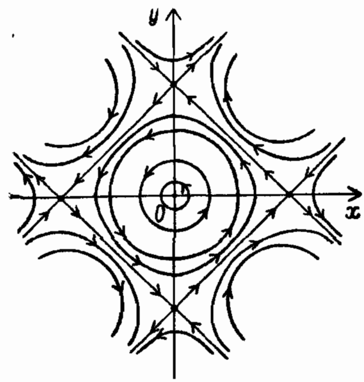


Рис. 79

$\sin x dx + \sin y dy = 0$ не змінюється при заміні x на $-x$, x — на $x + \pi$, y — на $y + \pi$, то можна стверджувати, що O і O_2 — центри. Фазові криві системи зображено на рис. 79.

5.55. Дослідити фазові криві системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -x - y + x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x - y + y(x^2 + y^2).$$

Р о з в' я з а н н я. Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Маємо:

$$\frac{d\rho}{dt} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi + \rho^3 \cos \varphi,$$

$$\frac{d\rho}{dt} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi + \rho^3 \sin \varphi.$$

Розв'язавши ці рівняння відносно $\frac{d\rho}{dt}$ і $\frac{d\varphi}{dt}$, дістанемо:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho(1 - \rho^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Рівняння фазових кривих в полярній системі координат має вигляд

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho(1-\rho^2).$$

Як бачимо, є одна замкнена фазова крива $\rho = 1$. Для інших фазових кривих значення ρ як функції від φ зростає в області $\rho > 1$ і спадає при $0 < \rho < 1$.

Отже, дана система рівнянь, крім положення рівноваги O (0; 0), яке є стійким фокусом, має нестійкий граничний цикл — коло одиничного радіуса з центром в початку координат.

5.56. На фазовій площині $(x;\ \dot{x})$ дослідити поведінку траєкторій рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt},$$

де ε — малий додатний параметр.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо дане рівняння у вигляді системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \varepsilon(1-x^2)y. \tag{9}$$

При $\varepsilon = 0$ дістаємо рівняння малих коливань маятника в околі його нижнього положення рівноваги, тобто маємо консервативну систему, фазові криві якої $x^2 + y^2 = c^2$.

При $\varepsilon \neq 0$ система (9) має єдине положення рівноваги (0; 0). Відповідне цьому положенню рівноваги характеристичне рівняння має корені $\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$, тобто при малих ε точка (0; 0) — нестійкий фокус.

З'ясуємо, чи має система (9) граничний цикл. Для цього знайдемо функцію

$$F(a) = -a\int_0^{2\pi} (f_1(a\cos\varphi,\ -a\sin\varphi)\cos\varphi - f_2(a\cos\varphi,\ -a\sin\varphi)\times$$
$$\times \sin\varphi)\,d\varphi.$$

У даному випадку $f_1(x,\ y) = 0$, $f_2(x,\ y) = y(1-x^2)$, тому

$$F(a) = a\int_0^{2\pi}(1-a^2\cos^2\varphi)\,a\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi - \frac{a^2}{4}\sin^2 2\varphi\right)d\varphi = \pi a^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right).$$

Функція $F(a)$ має простий додатний корінь $a_0 = 2$, причому при переході через a_0 вона змінює свій знак з «+» на «—» ($F'(a_0) < 0$). Тому система рівнянь (9), а отже, і рівняння Ван-дер-Поля мають при малих ε стійкий граничний цикл, близький до кола $x^2 + \dot{x}^2 = 4$ на фазовій площині $(x; \dot{x})$.

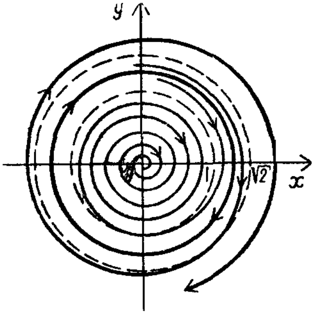


Рис. 80

5.57. З'ясувати, чи має граничний цикл система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y + y^3.$$

Схематично зобразити поведінку фазових кривих.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $(x(t), y(t))$ — розв'язок даної системи рівнянь. Тоді

$$\frac{d}{dt}\left(x^2(t) + y^2(t)\right) = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(y - x + x^3) + 2y(-x - y + y^3) = -2(x^2 + y^2) + 2(x^4 + y^4).$$

Якщо фазова точка $(x(t); y(t))$ знаходиться на колі радіуса r,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

то

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = -2r^2 + 2r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = -2r^2(1 - r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)).$$

Оскільки $\frac{1}{2} \leqslant \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \leqslant 1$, то

при $r < 1$

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = -2r^2(1 - r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)) < -2r^2(1 - r^2) < 0,$$

при $r > \sqrt{2}$

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) > 0.$$

Звідси, згідно з принципом кільця, в кільці $1 < x^2 + y^2 < 2$ є граничний цикл, оскільки через кола $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 2$ розв'язки даної системи виходять з цього кільця.

Дослідимо положення рівноваги даної системи. Побудувавши графіки функцій $y = x - x^3$ і $x = -y + y^3$, бачимо, що дана система має лише одне положення рівноваги: O (0; 0).

Складемо характеристичне рівняння для цього положення рівноваги:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Корені цього рівняння — комплексно-спряжені, причому $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -1$. Тому положення рівноваги — стійкий фокус. Фазові криві зображено на рис. 80.

Задачі для самостійної роботи

Користуючись означенням стійкості за Ляпуновим, з'ясувати, чи є стійкими розв'язки рівнянь із заданими початковими умовами

1. $\dfrac{dx}{dt} = t(x-1)$, якщо а) $x(1) = 2$; б) $x(1) = 0$.

2. $\dfrac{dx}{dt} = (2 - t^3)x$, якщо а) $x(0) = 0$; б) $x(0) = 1$.

3. $\dfrac{dx}{dt} = x(x^2 - 1)$, якщо а) $x(0) = 0$; б) $x(0) = -1$.

4. Довести, що коли який-небудь один розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь нестійкий, то нестійкі всі розв'язки цієї системи.

5. Довести, що коли кожний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь залишається обмеженим при $t \to +\infty$, то всі розв'язки цієї системи стійкі за Ляпуновим.

6. Нехай $X(t)$ — матрицант лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь. Відомо, що $\lim\limits_{t\to+\infty} \det X(t) = 0$. Чи випливає звідси, що

а) всі розв'язки даної системи асимптотично стійкі?
б) система має хоча б один стійкий розв'язок?
в) система має обмежені при $t \to +\infty$ нетривіальні розв'язки?

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем рівнянь

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 7y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 1 - \cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin^2 x + 1 - e^y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4\sin x + \ln(1 + y), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + x^2 y. \end{cases}$

13. При яких значеннях параметра a нульовий розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \quad \frac{dy}{dt} = \ln(1 + 9x + ay)$$

є асимптотично стійким?

14. Дослідити на стійкість розв'язок $x = \sin t$, $y = -2\cos t$ системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = \ln(-x + 1 + \sin t) - \frac{y}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = (1 - x^2)\cos t + 2x\cos^2 t + 2\sin^3 t - \cos^3 t.$$

Дослідити на стійкість всі положення рівноваги систем рівнянь

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - x - y + xy; \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - 1; \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln(x^2 - y). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x}; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x. \end{cases}$

19. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} - t^2 x y^2; \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t}, \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

20. При яких значеннях параметрів a і b система рівнянь $\dfrac{dx}{dt} = -x + ay$, $\dfrac{dy}{dt} = bx - y + az$, $\dfrac{dz}{dt} = by - z$ є асимптотично стійкою?

21. Довести, що коли розв'язки лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ стійкі, то стійкими будуть і розв'язки системи рівнянь $\dfrac{dx}{dt} = Ax + B(t)x$, в якій неперервна при

$t \geqslant t_0$ матриця $B(t)$ задовольняє умову

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \|B(t)\| \, dt < +\infty.$$

22. Нехай розв'язки лінійної системи $\frac{dx}{dt} = Ax$ — стійкі. Довести, що коли неперервна при $t \geqslant t_0$, $\|x\| \leqslant h$ вектор-функція $f(t, x)$ задовольняє умову

$$\|f(t, x)\| \leqslant k(t) \|x\|, \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} k(t) \, dt < +\infty,$$

то нульовий розв'язок системи рівнянь $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x)$ — стійкий.

23. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь:

а) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^5; \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^5, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy - x^3 + y^3; \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^3. \end{cases}$

24. Чи є стійким в цілому нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay^3, \quad a < 0?$$

25. Нехай в системі рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x)$$

функція $f(x)$, $f(0) = 0$ задовольняє умови: $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$ і $\int\limits_0^x f(t) \, dt \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$. Довести, що нульовий розв'язок цієї системи — стійкий в цілому.

Дослідити поведінку фазових кривих систем рівнянь:

26. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y; \\ \frac{dy}{dt} = 2(y - x). \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y; \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x; \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y; \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 5y. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

Дослідити типи положень рівноваги систем рівнянь

34. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x^2 - y^2; \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2xy - 8. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(1 - y + y^2); \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2(x - y)y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 + x - y^2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - 1)(3x + y - 5); \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 5. \end{cases}$

Побудувати лінії рівня енергії і фазові таких консервативних систем рівнянь Ньютона

38. $\dfrac{dx}{dt} = y,\ \dfrac{dy}{dt} = x - x^2.$ 39. $\dfrac{dx}{dt} = y,\ \dfrac{dy}{dt} = \sin 2x.$

40. Зобразити графічно фазові криві консервативних систем із заданою потенціальною енергією:

а) $\Pi(x) = \pm \dfrac{2x}{1 + x^2}$; б) $\Pi(x) = \pm x \sin x$.

41. Довести, що коли потенціальна енергія $\Pi(x)$ обмежена знизу, то кожний розв'язок рівняння $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{p\Pi(x)}{dx}$ можна продовжити необмежено.

42. При яких умовах система $\dfrac{d\rho}{dt} = f(\rho)$, $\dfrac{d\varphi}{dt} = 1$, де $f(\rho)$ — неперервна функція, має граничний цикл? При яких умовах цей цикл є стійким, нестійким?

43. Чи мають граничний цикл на фазовій площині $(x, \dot{x})$ такі рівняння:

а) $\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x}$; б) $\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x}$?

44. Довести, що рівняння $\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = 0$, де $f(y)$ — неперервна функція, $f(0) = 0$ і $yf(y) > 0$ при $y \neq 0$ не може мати періодичних розв'язків, відмінних від $x = 0$.

45. Довести, що кожна система рівнянь

а) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right); \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right); \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

має цикли. Скільки їх? Дослідити стійкість циклів.

Додаток 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Лінійним однорідним рівнянням першого порядку з частинними похідними називається рівняння

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (1)$$

де $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ — функції, визначені в деякій області $D \subset \mathbf{R}^n$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — шукана функція.

Система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = a(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \quad (2)$$

називається *системою рівнянь характеристик для рівняння* (1), а фазові криві системи (2) називаються *характеристиками рівняння* (1).

Теорема. *Функція $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння* (1) *тоді й тільки тоді, коли вона є першим інтегралом системи рівнянь характеристик* (2).

Задачею Коші для рівняння (1) називається задача про знаходження розв'язку $u = u(x)$ цього рівняння, який задовольняє умову $u(x)|_{x \in \gamma} = \varphi(x)$, де γ — деяка гладка гіперповерхня в D, а $\varphi(x)$ — задана гладка функція на цій гіперповерхні. Гіперповерхня γ називається *початковою гіперповерхнею,* а функція $\varphi(x)$ — початковою умовою. Точка $x_0 \in \gamma$ називається *нехарактеристичною,* якщо характеристика, що проходить через цю точку, *трансверсальна* (не дотична) до початкової гіперповерхні.

Теорема. *Нехай x — нехарактеристична точка на початковій гіперповерхні γ. Тоді існує такий окіл точки x, що задача Коші для рівняння* (1) *в цьому околі має єдиний розв'язок.*

Якщо відомо $n - 1$ незалежні в області D перші інтеграли системи (2)

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad (3)$$

то всі розв'язки рівняння (1) можна дістати з формули

$$u = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \quad (4)$$

де Φ — довільна диференційовна функція.

Лінійним неоднорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку називається рівняння

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n). \quad (5)$$

Задача Коші для рівняння (5) ставиться так само, як і для однорідного рівняння (1).

Теорема. *Задача Коші для рівняння* (5) *в досить малому околі будь-якої нехарактеристичної точки x початкової поверхні γ має единий розв'язок. Цей розв'язок можна записати у вигляді*

$$u(g(x, t)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(x, \tau))\, d\tau, \tag{6}$$

де $g(x, t)$ — значення розв'язку системи рівнянь характеристик (з початковою умовою $g(x, 0) = x$ на початковій поверхні) в момент часу t.

Квазілінійним рівнянням першого порядку називається рівняння

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \\ + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{7}$$

де $a_i(x, u)$, $b(x, u)$ — функції, визначені в деякій області змінних (x, u). Це рівняння відрізняється від лінійного тим, що коефіцієнти a_i і b можуть залежати від шуканої функції u.

Рівняння характеристик для квазілінійного рівняння (7) мають вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots,$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{8}$$

$$\frac{du}{dt} = b(x_1, \ldots, x_n, u).$$

Задача Коші для квазілінійного рівняння (7) полягає в тому, щоб знайти розв'язок $u = u(x)$, який на заданій гіперповерхні γ вимірності $n - 1$ перетворюється в задану функцію $\varphi(x)$. Початкова умова $(\gamma, \varphi(x))$ називається *нехарактеристичною* для квазілінійного рівняння (7) в точці $x_0 \in \gamma$, якщо вектор $a(x_0, u_0) = (a_1, \ldots, a_n)$, $u_0 = \varphi(x_0)$ в цій точці не дотикається до поверхні γ.

Теорема. *Розв'язок квазілінійного рівняння* (7) *з нехарактеристичною в точці x_0 початковою умовою в околі цієї точки існує і единий.*

Якщо відомо n перших незалежних інтегралів системи рівнянь характеристик (8)

$$\psi_i(x, u) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

то всі розв'язки рівняння (7) визначаються з рівності

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0,$$

де Φ — довільна диференційовна функція.

Щоб знайти розв'язок $u = u(x)$ рівняння (7), яке задовольняє початкову умову $u|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$, де гіперповерхня γ задана, наприклад, рівнянням

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

треба із системи рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i; \\ u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

виключити $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ і дістати співвідношення виду $F(C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$. Підставивши сюди замість $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ліві частини співвідношень (9), дістанемо

$$F(\psi_1(x, u), \psi_2(x, u), \ldots, \psi_n(x, u)) = 0.$$

Один з розв'язків $u = u(x)$ цього рівняння і буде шуканим.

Розглянемо тепер *нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку* (випадок двох незалежних змінних).

Це рівняння виду

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{10}$$

де $z = z(x, y)$ — шукана функція, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Співвідношення

$$v(x, y, z, a, b) = 0, \tag{11}$$

яке неявно визначає розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння (10) та містить дві довільні сталі a і b, називається *повним інтегралом Лагранжа рівняння* (10), якщо з нього та з рівнянь

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{12}$$

виключенням сталих a і b можна дістати рівняння (10).

Задачу інтегрування рівняння (10) вважають формально завершеною, якщо відомий його повний інтеграл, оскільки інші розв'язки дістають з нього диференціюванням та виключенням.

Розглянемо *метод Лагранжа — Шарпі* відшукання повного інтеграла рівняння (10).

Ідея методу полягає у складанні допоміжного рівняння виду $\Phi(x, y, z, p, q) = a$, де a — довільна стала, такого, щоб система

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0; \\ \Phi(x, y, z, p, q) = a \end{cases} \tag{13}$$

однозначно розв'язувалась відносно p і q:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y, z, a); \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(x, y, z, a). \tag{14}$$

Необхідною й достатньою умовою сумісності системи (14) є рівність

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right). \tag{15}$$

Якщо виразити частинні похідні, які входять в (15), через функції F і Φ із системи (13), то дістанемо лінійне однорідне рівняння

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (pP + qQ)\frac{\partial \Phi}{\partial z} -$$

$$-(X + pZ)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \tag{16}$$

де $P = F'_p$, $Q = F'_q$, $X = F'_x$, $Y = F'_y$, $Z = F'_z$.

Система рівнянь характеристик для (16) має вигляд

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{dp}{-X - pZ} = \frac{dq}{-Y - qZ}. \tag{17}$$

С х е м а   м е т о д у

1. За рівнянням (10) складаємо систему рівнянь характеристик (17).

2. Знаходимо який-небудь інтеграл системи (17) виду $\Phi = a$ (a — довільна стала) такий, щоб систему (13) можна було однозначно розв'язати відносно p і q.

3. Інтегруємо систему (14) (умова її сумісності (15) автоматично виконується) і дістаємо повний інтеграл (11).

Зазначимо, що задача інтегрування системи (14) еквівалентна задачі інтегрування рівняння

$$dz = \varphi(x, y, z, a)\,dx + \psi(x, y, z, a)\,dy. \tag{18}$$

Рівність (15) є умовою *повної інтегровності* рівняння (18). Рівняння (18) є окремим випадком *рівняння Пфаффа:*

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0. \tag{19}$$

Умовою повної інтегровності рівняння (19) є рівність

$$\Delta(P, Q, R) = P\left(\frac{\partial Q}{pz} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{dz}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{20}$$

1. Перевірити, чи будуть функції $u = u(x, y, z)$

а) $u = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2}$, б) $u = xyz$, в) $u = \dfrac{y}{x} e^{\frac{xz}{y^2}}$

розв'язками рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{dz} = 0$$

в області $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Р о з в' я з а н н я. а) Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3} + \frac{2y}{z^2}, \quad \frac{\partial u}{dz} = -\frac{2y^2}{z^3}.$$

Згідно з цими рівностями, дістаємо

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2x^2}{y^2} - \frac{2x^2}{y^2} + \frac{2y^2}{z^2} - \frac{2y^2}{z^2} = 0,$$

тобто функція $u = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2}$ є розв'язком даного рівняння.

б) Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy.$$

Підставивши ці вирази в рівняння, дістанемо:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3xyz \neq 0.$$

Тому в області $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ функція $u = xyz$ не є розв'язком даного рівняння.

в) Знайдемо частинні похідні функції u:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{z}{xy}\right)e^{\frac{xz}{y^2}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}-\frac{2z}{y^2}\right)e^{\frac{xz}{y^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}e^{\frac{xz}{y^2}}.$$

Звідси

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=$$

$$=e^{\frac{xz}{y^2}}\left(-\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-\frac{2z}{y}+\frac{z}{y}\right)\equiv 0.$$

Отже, функція $u=\frac{y}{x}e^{\frac{xz}{y^2}}$ є розв'язком даного рівняння.

2. Довести, що $u(x, y)=x+y+f(xy)$, де $f(xy)$ — довільна неперервно диференційовна функція, є розв'язком диференціального рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=x-y.$$

Р о з в' я з а н н я. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1+yf'(xy),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1+xf'(xy).$$

Помноживши ці рівності відповідно на x і y і підставивши в дане рівняння, дістанемо

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=x+xyf'(xy)-y-xyf'(xy)=x-y.$$

Тому дана функція є розв'язком заданого рівняння.

3. Довести, що функція

$$u=\sqrt{x^2+y^2}f\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

де $f(z)$ — неперервно диференційовна функція, є розв'язком рівняння

$$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial u}{\partial y}=u.$$

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)+$$

$$+\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)+$$

$$+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Помножимо першу з рівностей на $x+y$, а другу — на $x-y$ і замінимо $f\left(\operatorname{arcctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ на $\frac{u}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Тоді

$$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{xu(x+y)}{x^2+y^2}+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$(x-y)\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{yu(x-y)}{x^2+y^2}+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Віднявши почленно ці рівності, дістанемо дане диференціальне рівняння. Тому функція u є шуканим розв'язком.

4. Знайти розв'язки рівняння $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$. З множини розв'язків виділити той, який задовольняє умову $u(0,y)=py^2$.

Р о з в' я з а н н я. З рівняння $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$ знаходимо характеристики $x^2+y^2=C$. Усі розв'язки даного рівняння мають вигляд $u=\Phi(x^2+y^2)$, де $\Phi(z)$ — довільна неперервно диференційовна функція. Зазначимо, що рівняння $u=\Phi(x^2+y^2)$ визначає поверхні обертання навколо осі Ou.

Знайдемо ту з цих поверхонь, яка проходить через параболу $u=py^2$ у площині $x=0$. Виключимо x і y з рівнянь $x=0$, $u=py^2$, $x^2+y^2=C$. Маємо: $u=pC$. Підставивши в цю рівність $C=x^2+y^2$, дістанемо шуканий розв'язок:

$$u=p(x^2+y^2).$$

Це рівняння параболоїда обертання навколо осі Ou.

5. Знайти той розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1,$$

який задовольняє умову $u(x,1)=x$.

Р о з в' я з а н н я. Складаємо рівняння характеристик:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=x,\quad \frac{dy}{dt}=y.$$

Загальним розв'язком цієї системи є вектор (C_1e^t, C_2e^t). Поклавши $C_1=x$, $C_2=1$, дістанемо розв'язок $(g_1(x,y,t); g_2(x,y,t))$, де $g_1=xe^t$, $g_2=e^t$. Значення розв'язку при $t=0$ лежать на початковій поверхні $x=x$, $y=1$.

Згідно з формулою (6), шуканий розв'язок $u=u(x,y)$ задовольняє рівність

$$u(xe^t,e^t)=x+\int_0^t 1d\tau=x+t.$$

Поклавши $e^t=y$, дістанемо

$$u(xy,y)=x+\ln y$$

або остаточно

$$u(x,y)=\frac{x}{y}+\ln y.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2,\quad u(0;y)=\frac{1}{y^2}.$$

Р о з в ' я з а н н я. З рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$$

знаходимо загальний розв'язок $(C_1 \sin t + C_2 \cos t,\ C_1 \cos t - C_2 \sin t)$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Поклавши $C_1 = y$, $C_2 = 0$, дістанемо розв'язок $(g_1(x, y, t);\ g_2(x, y, t))$, де $g_1 = y \sin t$, $g_2 = y \cos t$, значення розв'язку при $t = 0$ лежать на початковій поверхні $x = 0$, $y = y$.

Згідно з (6), шуканий розв'язок задовольняє співвідношення

$$u(y \sin t, y \cos t) = \frac{1}{y^2} + \int_0^t y^2 (\cos^2 \tau - \sin^2 \tau)\, d\tau.$$

Звідси

$$u(y \sin t,\ y \cos t) = \frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{2} \sin 2t.$$

Замінивши $y \sin t$ на x і $y \cos t$ на y, дістанемо

$$u(x,\ y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + xy.$$

7. Знайти розв'язок рівняння

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

який задовольняє таким початковим умовам:

а) $u(1,\ y, z) = y^2 + z^2$; б) $u(x,\ y,\ z)|_{y^2+z^2=?} = \frac{2}{x^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Складаємо рівняння характеристик:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dz}{dt} = z.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо загальний розв'язок $(C_1 e^t,\ C_2 e^t,\ C_3 e)$, де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. Поклавши $C_1 = 1$, $C_2 = y$, $C_3 = z$, дістанемо розв'язок $(g_1(x, y, z, t);\ g_2(x, y, z, t);\ g_3(x, y, z, t))$, де $g_1 = e^t$, $g_2 = ye^t$, $g_3 = ze^t$. Значення розв'язку при $t = 0$ лежать на початковій поверхні $x = 1$, $y = y$, $z = z$.

Згідно з формулою (6), маємо

$$u(e^t, ye^t, ze^t) = y^2 + z^2 + \int_0^t 0\, d\tau = y^2 + z^2.$$

Замінюючи e^t на x, y — на $\frac{y}{x}$, z — на $\frac{z}{x}$, дістаємо

$$u(x;\ y;\ z) = \frac{y^2 + z^2}{x^2}.$$

б) Цю задачу розв'яжемо інакше. Запишемо рівняння характеристик у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Знаходимо два незалежні перші інтеграли:

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2.$$

Із системи рівностей

$$u = \frac{2}{x^2}, \quad y^2 + z^2 = 2, \quad \frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2$$

виключаємо змінні x, y і z. З трьох останніх рівностей маємо

$$(C_1^2 + C_2^2)\, x^2 = 2, \quad \frac{2}{x^2} = C_1^2 + C_2^2.$$

Звідси $u = C_1^2 + C_2^2$. Підставивши $\frac{y}{x}$ замість C_1, а $\frac{z}{x}$ замість C_2, дістанемо шуканий розв'язок:

$$u(x, y, z) = \frac{u^2 + z^2}{x^2}.$$

8. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz, \quad u(0, y, z) = y - z.$$

Р о з в' я з а н н я. Складаємо і розв'язуємо рівняння характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 1;$$

$$x = t + C_1, \quad y = t + C_2, \quad z = t + C_3.$$

Характеристиками є сім'ї прямих

$$\begin{cases} y - x = C_1^*, \\ z - x = C_2^*. \end{cases}$$

Усі ці прямі перетинають площину $x = 0$ трансверсально, тому можна застосувати формулу (6).

Розв'язки рівняння характеристик, значення яких при $t = 0$ лежать на площині $x = 0$, $y = y$, $z = z$, мають вигляд

$$g_1(x, y, z, t) = t, \quad g_2(x, y, z, t) = t + y, \quad g_3(x, y, z, t) = t + z.$$

Використовуючи формулу (6), знаходимо:

$$u(t, t + y, t + z) = y - z + \int_0^t \tau(\tau + y)(\tau + z)\, d\tau = y - z + \frac{t^4}{4} +$$

$$+ (y + z)\frac{t^3}{3} + yz\frac{t^2}{2}.$$

Підставивши в цю рівність замість t, y, z відповідно x, $y - x$ і $z - x$, дістанемо шуканий розв'язок задачі Коші:

$$u(x, y, z) = y - z + \frac{z^4}{4} + \frac{x^3}{3}(y + z - 2x) + (y - x)(z - x)\frac{x^2}{2}.$$

9. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\quad u(x,\ x)=x^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Складемо і розв'яжемо рівняння характеристик:

$$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=y;\quad x=C_1e^t,\quad y=C_2e^t.$$

Отже, характеристиками є промені прямих $y=\frac{C_2}{C_1}x$. У цьому випадку всі точки початкової поверхні (пряма $y=x$) є характеристичними, тому формулу (6) застосувати не можна.

Знайдемо розв'язок, виходячи із загального розв'язку даного неоднорідного рівняння. Рівняння характеристик для неоднорідного рівняння запишемо в симетричній формі

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{2xy}$$

і знайдемо незалежні інтеграли:

$$\frac{y}{x}=C_1,\ xy-u=C_2.$$

Усі розв'язки даного рівняння визначаються із співвідношення

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\quad xy-u\right)=0,$$

де Φ — довільна неперервно диференційовна функція. Якщо виразити звідси другий аргумент, то дістанемо

$$u=xy+f\left(\frac{y}{x}\right),$$

де $f(z)$ — довільна диференційовна функція. Використовуючи початкову умову

$$u(x,\ y)\,|_{x=y}=x^2,\quad u(x,\ x)=x^2+f(1)=x^2,$$

дістаємо, що розв'язками даної задачі Коші є функції

$$u(x,\ y)=xy+f\left(\frac{y}{x}\right),$$

де $f(z)$ — довільна неперервно диференційовна функція така, що $f(1)=0$.

10. Знайти поверхню, яка перетинає під прямим кутом сім'ю сфер $x^2+y^2+z^2=C^2$ і проходить через криву $x=1,\ y^2+z^2=x$.

Р о з в' я з а н н я. Поверхня $u(x,y,z)=C_1$ перетинає сім'ю поверхонь $F(x,y,z)=C$ під прямим кутом тоді й тільки тоді, коли

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

У цьому випадку функція u визначається з рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Рівняння характеристик запишемо в симетричній формі

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Два незалежних інтеграли цих рівнянь $\frac{y}{x} = C_1$, $\frac{z}{x} = C_2$ визначають рівняння поверхонь, ортогональних до заданої в задачі сім'ї сфер:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

де Φ — довільна диференційовна функція.

Знайдемо поверхню, яка проходить через задану лінію. Виключаючи з рівнянь

$$x = 1, \quad y^2 + z^2 = 1, \quad \frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2$$

змінні x, y і z, дістаємо:

$$C_1^2 + C_2^2 = 1.$$

Замінюючи тут рівності C_1 і C_2 відповідно на $\frac{y}{x}$ і $\frac{z}{x}$, остаточно знаходимо:

$$y^2 + z^2 = x^2.$$

Це і є шукана поверхня — прямий круговий конус, віссю якого є вісь x, твірними — прямі, що проходять через початок координат, а напрямною — коло $y^2 + z^2 = 1$ у площині $x = 1$.

11. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї площин, які проходять через пряму $x = y = z$. (Крива називається *ортогональною траєкторією* сім'ї поверхонь $F(x, y, z) = C$, якщо дотична до цієї кривої в кожній точці є нормаллю до відповідної поверхні даної сім'ї).

Р о з в' я з а н н я. Рівняння даної прямої можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y - x = 0; \\ z - x = 0. \end{cases}$$

Тоді рівняння сім'ї площин, які проходять через цю пряму, має вигляд:

$$y - x + C(z - x) = 0, \quad F(x, y, z) \equiv \frac{y - x}{x - z} = C,$$

де C — довільна стала. Диференціюючи, маємо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{z - y}{(z - x)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{z - x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{y - x}{(z - x)^2}.$$

Ортогональні траєкторії вказаної сім'ї площин — це характеристики рівняння

$$\frac{z - y}{(z - y)^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{z - x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{y - x}{(z - x)^2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Запишемо рівняння характеристик:

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

Розв'язуючи їх, дістаємо два незалежні інтеграли:

$$x + y + z = C_1 \text{ і } x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Лінії

$$\begin{cases} x+y+z=C_1, \\ x^2+y^2+z^2=C_2 \end{cases}$$

є шуканими. Це кола, які лежать в площинах, перпендикулярних до прямої $x=y=$ $=z$, з центрами на цій самій прямій.

12. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u\operatorname{ctg} y.$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик і знаходимо їх незалежні інтеграли:

$$\cos x dx = dy = \operatorname{tg} y\frac{du}{u}, \quad y-\sin x = C_1, \quad \frac{u}{\sin y}=C_2.$$

Усі розв'язки даного рівняння можна задати неявно співвідношенням:

$$\Phi\left(y-\sin x, \frac{u}{\sin y}\right)=0.$$

Звідси $u=\sin y f(y-\sin x)$, де $f(z)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

13. Розв'язати рівняння

$$x^2\frac{xu}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=u.$$

Розв'язання. Систему рівнянь характеристик запишемо в симетричному вигляді:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z^2}=\frac{du}{u}.$$

Знаходимо незалежні інтеграли цієї системи:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=C_1, \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{z}=C_2, \quad ue^{\frac{1}{x}}=C_3.$$

Співвідношенням

$$\Phi\left(ue^{\frac{1}{x}}, \frac{1}{x}-\frac{1}{y}, \frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)=0$$

задані неявно всі розв'язки даного рівняння. Звідси

$$u(x, y, z)=e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}, \frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right),$$

де f — неперервно диференційовна функція своїх змінних.

14. Розв'язати задачу Коші

$$xu\frac{\partial u}{\partial x}+yu\frac{\partial u}{\partial y}+xy=0, \quad u|_{xy=1}=1.$$

Розв'язання. Записуємо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{xu}=\frac{dy}{yu}=\frac{du}{-xy}$$

і знаходимо два перші інтеграли:

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad y^2 + \frac{yu^2}{x} = C_2.$$

Виключивши x, y, u з рівнянь

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad y^2 + \frac{yu^2}{x} = C_2, \quad xy = 1, \quad u = 1.$$

дістанемо:

$$2C_1 = C_2.$$

Після заміни C_1 і C_2 відповідно виразами $\frac{y}{x}$ і $y^2 + \frac{yu^2}{x}$, знайдемо

$$\frac{2y}{x} = y^2 + \frac{yu^2}{x}, \quad u^2 = 2 - xy.$$

Останнє співвідношення в області $xy < 2$ визначає два гладких розв'язки даного рівняння:

$$u = \sqrt{2 - xy} \text{ і } u = -\sqrt{2 - xy}.$$

Один з цих розв'язків, а саме, $u = \sqrt{2 - xy}$, $xy < 2$, є шуканим розв'язком задачі Коші.

15. *Знайти поверхню $u = u(x, y)$, яка задана рівнянням*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$$

і проходить через параболу $u = x - x^2$, $y = -2$.

Р о з в' я з а н н я. Записуємо рівняння характеристик у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - x^2 - y^2}.$$

Знаходимо перші інтеграли їх:

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{x^2 + y^2 + u}{y} = C_2.$$

Співвідношенням

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x^2 + y^2 + u}{y}\right) = 0$$

задані всі розв'язки даного рівняння. Звідси

$$u = yf\left(\frac{x}{y}\right) - x^2 - y^2,$$

де $f(z)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

Залишається функцію $f(z)$ підібрати так, щоб виконувалась початкова умова:

$$u(x, -2) = x - x^2,$$

тобто, щоб

$$x - x^2 = -2f\left(\frac{x}{-2}\right) - x^2 - 4, \text{ або } f\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{x}{2} - 2.$$

Звідси $f(z) = z - 2$. Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$u(x, y) = y\left(\frac{x}{y} - 2\right) - x^2 - y^2.$$

Шукана поверхня $u = x - 2y - x^2 - y^2$ — параболоїд обертання.

16. Показати, що функції

а) $z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{a} + b$;

б) $z = a(x^2 + y^2) + b$;

в) $z = ax + by - ab$ є повними інтегралами рівнянь; 1) $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$; 2) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 3) $z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Розв'язання

а) Виключаючи із співвідношень

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{a} + b,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ax, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{a}$$

сталі a і b, дістанемо $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, тобто дане рівняння.

б) Сталі a і b виключаємо із співвідношень

$$z = a(x^2 + y^2) + b, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2ax, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ay.$$

Звідси

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 2axy - 2ayx = 0.$$

в) Маємо:

$$z = ax + by - ab, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

Звідси

$$z = \frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

17. Знайти повний інтеграл рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad p = \varphi(q).$$

Розв'язання. Поклавши $q = a$, дістанемо $p = \varphi(a)$, $dz = \varphi(a)\,dx + a\,dy$, звідки, інтегруючи рівняння Пфаффа,

$$z = \varphi(a)\,x + ay + b.$$

18. Знайти повний інтеграл рівняння

$$\varphi_1\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \varphi_2\left(y, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \varphi_1(x, p) = \varphi_2(y, q).$$

Р о з в' я з а н н я. Покладемо $\varphi_1(x, p) = \varphi_1(y, q) = a$. Звідси $p = \psi_1(x, a)$, $q = \psi_2(y, a)$. Рівняння Пфаффа має вигляд

$$dz = pdx + qdy = \psi_1(x, a)\,dx + \psi_2(y, a)\,dy.$$

Інтегруючи це рівняння, дістаємо повний інтеграл

$$z = \int \psi_1(x, a)\,dx + \int \psi_2(y, a)\,dy + b.$$

19. Застосовуючи метод Лагранжа — Шарпі, знайти повні інтеграли рівнянь:

а) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} - z = 0, \quad xp + yq + pq - z = 0;$

б) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 yz - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad p^2yz - q = 0;$

в) $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + y^2 = 0, \quad 2xp + q^2 + y^2 = 0.$

Р о з в' я з а н н я

а) Маємо:

$$F = xp + yq + pq - z,$$
$$P = x + q, \quad X = p, \quad Z = -1, \quad Q = y + p, \quad Y = q,$$
$$pP + qQ = px + qy + 2pq, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

Система (17) має вигляд

$$\frac{dx}{x+q} = \frac{dy}{y+p} = \frac{dz}{px + qy + 2pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Візьмемо $dp = 0$. Тоді $p = a$. Із системи

$$p = a, \quad px + qy + pq - z = 0$$

маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{z - ax}{y + a}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = a.$$

Звідси

$$z = ax + c(y), \quad c'(y) = \frac{c(y)}{y + a}, \quad c(y) = b(y + a).$$

Тому $z = ax + b(y + a) = ax + by + ab$ є повним інтегралом.

б) Маємо:

$$F = p^2yz - q,$$
$$P = 2pyz, \quad X = 0, \quad Z = yp^2, \quad Q = -1, \quad Y = zp^2,$$
$$pP + qQ = 2p^2yz - q = p^2yz,$$
$$X + pZ = 0 + yp^3, \quad Y + qZ = zp^2 + yqp^2.$$

Запишемо систему (17):

$$\frac{dx}{2pyz} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{p^2yz} = -\frac{dp}{yp^3} = -\frac{dq}{zp^2 + yqp^2}.$$

Розглянемо рівняння $\frac{dz}{p^2yz} = -\frac{dp}{yp^3}$. Звідси

$$\ln z = \ln \frac{1}{p} + \ln a, \text{ або } pz = a.$$

Маємо:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{z}; \\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = yz\frac{a^2}{z^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{z}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}a^2, \end{cases} \quad \begin{cases} z\frac{\partial z}{\partial x} = a; \\ z\frac{\partial z}{\partial y} = ya^2. \end{cases}$$

Звідси $\frac{1}{2}z^2 = ax + c(y)$. Підставивши в друге рівняння, дістанемо $c'(y) = ya^2$, $c(y) = \frac{1}{2}y^2a^2 + b$. Тому повний інтеграл запишеться у вигляді

$$z^2 = 2ax + a^2y^2 + b.$$

в) Маємо:

$$F = 2px + q^2 + y^2,$$

$$P = 2x, \quad X = 2p, \quad Z = 0, \quad Q = 2q, \quad Y = 2y,$$

$$pP + qQ = 2px + 2q^2, \quad X + pZ = 2p, \quad Y + qZ = 2y.$$

Система (17) має вигляд

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2px + 2q^2} = -\frac{dp}{2p} = -\frac{dq}{2y}.$$

З інтегрової комбінації

$$\frac{dy}{2q} = -\frac{dq}{2y}$$

маємо

$y^2 = a^2 - q^2$, $q = \sqrt{a^2 - y^2}$. Підставивши ці значення в рівняння $2xp + q^2 + y^2 = 0$, дістанемо $p = -\frac{a^2}{2x}$. Рівняння Пфаффа має вигляд

$$dz = -\frac{a^2}{2x}dx + \sqrt{a^2 - y^2}\,dy.$$

Інтегруючи це рівняння, дістаємо повний інтеграл:

$$z = -\frac{a^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}y\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a} + b.$$

20. Довести необхідність умови (20) для повної інтегровності рівняння Пфаффа (19)

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0,$$

де P, Q, R — неперервно диференційовні функції.

Розв'язання. Припустивши, що $R \neq 0$, рівняння Пфаффа запишемо так:

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy.$$

Це рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{P}{R} \equiv \varphi(x, y, z); \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{Q}{R} \equiv \psi(x, y, z). \end{cases} \tag{21}$$

Припустимо, що система (21) має розв'язок $z = z(x, y)$, який є неперервно диференційовним. Диференціюючи перше рівняння по y, а друге — по x, дістаємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Оскільки функції φ і ψ — неперервно диференційовні, то мішані похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ — неперервні, а тому виконується рівність (15)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Ураховуючи систему (21), маємо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{P}{R}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{P}{R}\right)\left(-\frac{Q}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Q}{R}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{Q}{R}\right)\left(-\frac{P}{R}\right).$$

Звідси після спрощень дістаємо умову (20):

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

21. Розв'язати рівняння Пфаффа:
а) $(x - y)\,dx + z\,dy - x\,dz = 0$;
б) $3yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0$.
Розв'язання
а) У цьому випадку $P = x - y$, $Q = z$, $R = -x$.
Перевіримо умову (20):

$$\Delta(P, Q, R) = P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) =$$
$$= (x - y)(1 - 0) + z(-1 - 0) + (-x)(-1 - 0) =$$
$$= x - y - z + x = 2x - y - z \neq 0.$$

Отже, дане рівняння розв'язків не має.
б) Маємо:

$$P = 3yz, \quad Q = 2xz, \quad R = xy.$$

Перевіряємо умову (20):

$$\Delta(P, Q, R) = 3yz(2x - x) + 2xz(y - 3y) + xy(3z - 2z) =$$
$$= 3xyz - 4xyz + xyz = 0.$$

Отже, умова повної інтегровності виконується. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$dz = -\frac{3z}{x}dx - \frac{2z}{y}dy.$$

Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3z}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2z}{y}.$$

Інтегруємо перше рівняння, вважаючи y параметром:

$$\ln z = \ln (x^{-3} c(y)), \quad z = c(y) x^{-3}.$$

Підставивши в друге рівняння, дістанемо

$$c'(y) = -\frac{2c(y)}{y}, \quad c(y) = \frac{c}{y^2}.$$

Тому

$$z = \frac{c}{x^3 y^2}.$$

22. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - z, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

Розв'язання. Перевіримо умову (15) ($\varphi = y - z$, $\psi = xz$). Маємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + (-1)\, xz = 1 - xz,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = z + x(y - z) = z + xy - xz.$$

Як бачимо, умова (15) не виконується. Отже, дана система не має розв'язків

Задачі для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

1. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$
2. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
3. $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2.$
4. $xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = x^2.$
5. $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$
6. $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}.$
7. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2u)\frac{\partial u}{\partial y} = yu.$

Знайти розв'язки рівнянь, які задовольняють даним початковим умовам

8. $(x - 2e^y)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 0) = x.$
9. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(x, 1, z) = xz.$
10. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = y, \quad u(x, 0) = x^2.$

11. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y, \quad u(1, y) = y + e^y.$

12. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = x^2, \quad u(x, x) = 1 + \frac{x}{3}.$

13. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2, \quad u|_{xy=1} = \frac{y^2}{1 + y^4}.$

14. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy, \quad u(x, 2) = 1 + x^2.$

15. $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 3z\frac{\partial u}{\partial z} = 4u, \quad u(x, x, z) = z.$

16. Знайти поверхню, яка проходить через пряму $x = y$, $z = 1$ і ортогональна до поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = Cy$.

17. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї площин $y = Cx$.

18. Скласти рівняння з частинними похідними, якому задовольняють усі конічні поверхні з вершиною в даній точці $(x_0; y_0; z_0)$, і розв'язати його.

19. Знайти повні інтеграли рівнянь:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$;

в) $z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$;

г) $\frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

20. Методом Лагранжа — Шарпі знайти повні інтеграли рівнянь:

а) $z^2 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; б) $z^2 + 1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

в) $z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; г) $\frac{1}{y}\sqrt{\frac{\partial z}{\partial x}} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

21. Довести, що умова (20) є достатньою для повної інтегровності рівняння Пфаффа.

22. Розв'язати рівняння Пфаффа:

а) $(z + xy)\,dx - (z + y^2)\,dy + y\,dz = 0$;
б) $(2yz + 3x)\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$;
в) $dz = \frac{z}{x}\,dx + \frac{2z}{y}\,dy$;
г) $dz = (2yz - z^2)\,dx + xz\,dy$.

Додаток 2

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Перетворення Лапласа та його основні властивості. Однозначна функція $f(t)$ (взагалі кажучи, комплексна: $f(t) = u(t) + iv(t)$) дійсної змінної t, $t \in \mathbf{R}$, називається *оригіналом,* якщо виконуються умови:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \geqslant 0$ функція $f(t)$ на будь-якому скінченному проміжку має не більше ніж скінченне число точок розриву першого роду;

3) існують такі додатні сталі M і α, що $|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$, $t \geqslant 0$.

Якщо функція $f(t)$ задовольняє умови 2), 3), але не задовольняє умову 1), то для функції $q(t) = f(t)\chi(t)$, де $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ — *функція Хевісайда,* умова 1) виконується, і, отже, функція $q(t)$, збігаючись із $f(t)$ при $t \geqslant 0$, є оригіналом. Далі множник $\chi(t)$ записувати не будемо, вважаючи, що відповідні функції дорівнюють нулю при $t < 0$.

Зображенням (перетворенням Лапласа) функції-оригінала $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається *інтегралом Лапласа:*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Функція $F(p)$, визначена в області $\operatorname{Re} p > \alpha$, і є в ній однозначною аналітичною функцією. Запис $f(t) \to F(p)$ означає, що $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$.

Основні властивості зображень

1°. Якщо $f_i(t) \to F_i(p)$, $\operatorname{Re} p > a_i$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \to \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p) = F(p), \quad \operatorname{Re} p > \max_i a_i,$$

де C_i — сталі (дійсні або комплексні).

2°. Якщо $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} p > a.$$

3°. Нехай $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$ і

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \quad \tau > 0; \\ f(t - \tau) & \text{при } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Тоді $f_\tau(t) \to e^{-p\tau} F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Ця властивість називається **теоремою запізнення.**

4°. Якщо $f'(t)$, $f(t)$ — оригінали і $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то $f'(t) \to pF(p) - f(0)$, $\operatorname{Re} p > a$.

5°. Нехай $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тоді

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a.$$

6°. Якщо $f_1(t) \to F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $f_2(t) \to F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$, то

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\,d\tau \to F_1(p) F_2(p),$$

$$\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2).$$

Функція $f_1 * f_2$ називається *згорткою оригіналів* f_1 і f_2.

7°. Нехай $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тоді

$$-tf(t) \to F'(p), \quad \operatorname{Re} p > a.$$

8°. Якщо функції $f(t)$, $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналами і $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^\infty F(q)\,dq, \quad \operatorname{Re} p > a.$$

9°. Якщо $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то для будь-якого комплексного числа λ:

$$e^{-\lambda t} f(t) \to F(p+\lambda), \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda.$$

Ця властивість називається *теоремою зміщення.*

Таблиця зображень деяких функцій

$$1 \to \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0; \quad t^\nu \to \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0;$$

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad n \in \mathbb{N}; \quad e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha;$$

$$\sin\omega t \to \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|; \quad \cos\omega t \to \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|;$$

$$\operatorname{sh}\lambda t \to \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\lambda|; \quad \operatorname{ch}\lambda t \to \frac{p}{p^2-\lambda^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\lambda|;$$

$$t^n e^{\alpha t} \to \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda; \quad t\sin\omega t \to \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|;$$

$$t\cos\omega t \to \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|;$$

$$e^{\lambda t}\sin\omega t \to \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\omega|);$$

$$e^{\lambda t}\cos\omega t \to \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\omega|);$$

$$\frac{\sin\omega t}{t} \to \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|.$$

1. Знайти зображення функції $f(t) = a^t$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $f(t) = e^{t\ln a}$. Оскільки $e^{\lambda t} \to \frac{1}{p-\lambda}$, то $a^t = e^{t\ln a} \to \frac{1}{p-\ln a}$.

2. Знайти зображення функції $f(t) = e^t \sin^2 t$.

Розв'язання. Оскільки $f(t) = e^t \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$, то $f(t) \to \frac{1}{2} \times$ $\times \left(\frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{(p-1)^2+4}\right) = \frac{2}{(p-1)((p-1)^2+4)}$.

3. Знайти зображення функції $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$, то

$$\frac{\sin t}{t} \to \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

4. Знайти зображення функцій:

а) $\sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t$; б) $\cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо:

$$\sin(\alpha + i\beta)\, t \to \frac{\alpha + i\beta}{p^2 + (\alpha + i\beta)^2} = \frac{(\alpha + i\beta)(p^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\beta)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2},$$

або

$$\sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t + i \cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t \to \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2) + i\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

Внаслідок властивості лінійності

$$\sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t \to \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2},$$

$$\cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t \to \frac{\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

5. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant a; \\ 2a - t \text{ при } a < t < 2a; \\ 0 \text{ при } t < 0, \quad t \geqslant 2a. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Дану кусково-лінійну функцію запишемо за допомогою функції Хевісайда у вигляді

$$f(t) = t\chi(t) - 2(t - a)\chi(t - a) + (t - 2a)\chi(t - 2a).$$

Звідси, користуючись теоремою запізнення, дістаємо

$$f(t) \to \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} e^{-ap} + \frac{1}{p^2} e^{-2ap} = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-ap})^2.$$

6. Довести, що коли $f(t)$ — періодичний оригінал з періодом T, то

$$f(t) \to F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Р о з в' я з а н н я. Маємо:

$$f(t) \to F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt +$$

$$+\int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt + e^{-pT} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt + e^{-pT}(p).$$

Звідси

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt.$$

7. Знайти зображення функції $f(t) = \dfrac{\sin t}{|\sin t|}$.

Р о з в' я з а н н я. Дана функція є періодичною з періодом 2π. Використовуючи результат попередньої задачі, дістанемо

$$\frac{\sin t}{|\sin t|} \to F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|}\,dt =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\int_0^{\pi} e^{-pt} dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt} dt \right) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\frac{1}{p} (1 - e^{-\pi p}) - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\pi p}}{p} (1 - e^{-\pi p}) \right) = \frac{(1 - e^{-\pi p})^2}{p(1 - e^{-2\pi p})} = \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-\pi p}}{1 + e^{-\pi p}}.$$

Знаходження оригінала за даним зображенням. Щоб знайти оригінал за відомим зображенням в найпростіших випадках, можна користуватися табличними зображеннями і основними властивостями зображень.

У загальному випадку виконується *формула обернення (формула Рімана — Мелліна):*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\sigma \to +\infty} \int_{s-i\sigma}^{s+i\sigma} e^{pt} F(p)\,dp,$$

де s — довільне число: $s > \alpha$.

Якщо аналітична функція $F(p)$ задовольняє умову $|F(p)| \leqslant K|p|^{-k}$ при $|p| > r_0$, де K, k, r_0 — додатні сталі, то

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp = \int_{\gamma} e^{pt} F(p)\,dp,$$

де γ — коло з центром у початку координат, яке охоплює всі полюси $p_1, p_2, \ldots, p_m$ функції $e^{pt}F(p)$. У цьому випадку

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} F(p)\,dp = \sum_{j=1}^{m} r_j,$$

де $r_j = \operatorname{Res}\,(e^{pt}F(p))|_{p=p_j}$ — лишок функції $e^{pt}F(p)$ в полюсі p_j.

Якщо зображення $F(p)$ можна розвинути в ряд за степенями $\frac{1}{p}$,

$$F(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \cdots,$$

який збігається при $|p| > r$, де $r = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, то оригінал $f(t)$ можна знайти у вигляді

$$f(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!} + \cdots,$$

причому цей ряд збігається при всіх t.

8. Знайти оригінал зображення $F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+10}$.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо зображення у вигляді

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+10} = \frac{p+1}{(p+1)^2+9} + \frac{1}{(p+1)^2+9}.$$

Оскільки

$$e^{-t}\cos 3t \to \frac{p+1}{(p+1)^2+9}, \qquad e^{-t}\sin 3t \to \frac{3}{(p+1)^2+9},$$

то шуканий оригінал

$$f(t) = e^{-t}\left(\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

9. Знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{(p-1)(p^2+1)+p}{(p^2-1)(p^2-2p+2)}.$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо $F(p)$ у вигляді

$$F(p) = \frac{p}{p^2-1} + \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Звідси

$$f(t) = \operatorname{ch} t + e^t \sin t.$$

10. Знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо $F(p)$ у вигляді суми елементарних дробів $F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} + \frac{D}{p-3}$.

Після підрахунків знаходимо, що $A = -\frac{1}{6}$, $B = 1$, $C = -\frac{3}{2}$, $D = \frac{2}{3}$. Отже,

$$f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}.$$

11. Знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^4}.$$

Розв'язання. Знаходимо залишок функції $\frac{e^{pt}}{(p+1)^4}$ в полюсі $p = -1$ четвертого порядку:

$$r = \frac{1}{3!} \lim_{p \to -1} \left((p+1)^4 \frac{e^{pt}}{(p+1)^4} \right)^{(3)} = \frac{1}{3!} \lim_{p \to -1} \frac{d^3}{dp^3} (e^{pt}) =$$

$$= \frac{1}{3!} \lim_{p \to -1} (t^3 e^{pt}) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}.$$

Отже,

$$f(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}.$$

12. Знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Розв'язання. Точки $p = 1$, $p = 2$ і $p = 3$ є простими полюсами функції $F(p)$. Знаходимо залишки цієї функції:

$$r_1 = \lim_{p \to 1} (p-1) F(p) e^{pt} = \lim_{p \to 1} \frac{p+1}{(p-2)(p-3)} e^{pt} = e^t,$$

$$r_2 = \lim_{p \to 2} (p-2) F(p) e^{pt} = \lim_{p \to 2} \frac{p+1}{(p-1)(p-3)} e^{pt} = -3e^{2t},$$

$$r_3 = \lim_{p \to 3} (p-3) F(p) e^{pt} = \lim_{p \to 3} \frac{p+1}{(p-1)(p-2)} e^{pt} = 2e^{3t}.$$

Отже, $f(t) = e^t - 3e^{2t} + 2e^{3t}$.

13. Знайти оригінал зображення

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 2}{(p^2+4)(p^2+1)}.$$

Розв'язання. Функція $F(p)$ має прості полюси: $p = \pm 2i$ і $p = \pm i$. Знаходимо лишки в цих полюсах:

$$r_1 = \lim_{p \to 2i} (p - 2i) \frac{p^2 - p + 2}{(p^2+4)(p^2+1)} e^{pt} = -\frac{i-1}{6} e^{2it},$$

$$r_2 = \lim_{p \to -2i} (p + 2i) \frac{p^2 - p + 2}{(p^2+4)(p^2+1)} e^{pt} = \frac{i+1}{6} e^{-2it},$$

$$r_3 = \lim_{p \to i} (p - i) \frac{p^2 - p + 2}{(p^2+4)(p^2+1)} e^{pt} = -\frac{i+1}{6} e^{it},$$

$$r_4 = \lim_{p \to -i} (p + i) \frac{p^2 - p + 2}{(p^2+4)(p^2+1)} e^{pt} = \frac{i-1}{6} e^{-it}.$$

Отже,

$$f(t) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{1}{6}\left((i+1)e^{-2it} - (i-1)e^{2it}\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left((i-1)e^{-it} - (i+1)e^{it}\right) = \frac{1}{3}(\cos 2t + \sin 2t - \cos t + \sin t).$$

Застосування перетворення Лапласа до розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. Якщо в лінійному диференціальному рівнянні зі сталими коефіцієнтами

$$L(x) \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t)$$

функція $f(t)$ є оригіналом, то його розв'язок з початковими умовами $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$, ..., $x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$ також є оригіналом. Позначимо через $X(p)$ зображення вказаного розв'язку, а через $F(p)$ — зображення функції $f(t)$. Оскільки $x^{(k)} \to p^k X(p) - p^{k-1}x_0 - \ldots - px_0^{(k-2)} - x_0^{(k-1)}$, то в просторі зображень дістаємо лінійне (алгебраїчне) рівняння відносно невідомого зображення $X(p)$:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n)\, X(p) = F(p) + p^{n-1}x_0 + \cdots + x_0^{(n-1)} +$$

$$+ a_1(p^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}x_0.$$

Знайшовши з цього рівняння зображення $X(p)$, знаходимо відповідний йому оригінал — шуканий розв'язок даного диференціального рівняння.

Той самий метод дає змогу знайти розв'язки інтегральних рівнянь виду

$$\int_0^t K(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = f(t) \quad \text{або} \quad x(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

в яких функції $K(t)$ і $f(t)$ є оригіналами, а також деяких класів диференціально-різницевих і рівнянь в частинних похідних.

Розв'язок задачі Коші для рівняння $L(x) = f(t)$ з нульовими початковими умовами можна дістати за формулою

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

(інтеграл накладання), де $g(t) \to G(p) = \frac{1}{D(p)}$, $D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$ — характеристичний многочлен. В електро- і радіотехнічній літературі функції $g(t)$ і $G(p)$ називаються *імпульсною характеристикою* і *передаточною функцією* відповідно. Метод інтеграла накладання застосовують, як правило, тоді, коли зображення $f(t)$ знайти важко, коли $f(t)$ є кусково-неперервною функцією, а також тоді, коли задачу Коші треба розв'язувати багато разів для різних функцій $f(t)$.

14. Знайти зображення лінійного диференціального виразу

$$L(x) = x'''(t) - 2x''(t) + 3x'(t) - x(t),$$

якщо $x'(0) = x(0) = 0$, $x''(0) = 1$, $x(t) \to X(p)$.

Р о з в' я з а н н я. За властивістю 4° зображень маємо:

$$x'(t) \to p\,X(p) - x(0), \quad x''(t) \to p^2 X(p) - x(0)\,p - x'(0),$$

$$x'''(t) \to p^3 X(p) - x(0)\,p^2 - x'(0)\,p - x''(0).$$

Тому зображенням даного виразу є

$$L(x) \to p^3X(p) - 1 - 2p^2X(p) + 3p\,X(p) - X(p) =$$
$$= (p^3 - 2p^2 + 3p - 1)\,X(p) - 1.$$

15. Знайти зображення лінійного інтегро-диференціального виразу

$$L(x) = x'(t) + 2x(t) - \int_0^t x(t-\tau)\sin\tau\, d\tau,$$

якщо відомо, що $x(0) = 1$ і $x(t) \to X(p)$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $x'(t) \to pX(p) - 1$, а

$$\int_0^t x(t-\tau)\sin\tau d\tau \to X(p)\,\frac{1}{p^2+1},$$

то

$$L(x) \to pX(p) - 1 + 2X(p) - X(p)\,\frac{1}{p^2+1} =$$
$$= \left(p + 2 - \frac{1}{p^2+1}\right)X(p) - 1.$$

16. Розв'язати задачу Коші

$$x'' + x' - 2x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Р о з в' я з а н н я. Нехай $x(t) \to X(p)$. Для $X(p)$ в класі зображень дістаємо рівняння

$$(p^2X(p) - px(0) - x'(0)) + (pX(p) - x(0)) - 2X(p) = \frac{1}{p+1},$$

або

$$(p^2 + p - 2)\,X(p) = \frac{1}{p+1} + 1.$$

Звідси

$$X(p) = \frac{1}{p^2-1}.$$

Отже,

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \operatorname{sh} t.$$

17. Розв'язати задачу Коші

$$x'' + x = t\cos 2t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Нехай $x(t) \to X(p)$. Для $X(p)$ в класі зображень дістаємо рівняння

$$(p^2+1)\,X(p) = \frac{1}{p^2+4} - \frac{8}{(p^2+4)^2},$$

з якого знаходимо

$$X(p) = -\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p^2+1} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p^2+4} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Тому

$$x(t) = -\frac{5}{9}\sin t + \frac{5}{18}\sin 2t + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\cos 2t\right).$$

18. Розв'язати задачу Коші

$$x'' + 4x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

де $f(t)$ — періодична з періодом 2π функція

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leqslant t < \pi; \\ 2\pi - t & \text{при } \pi \leqslant t < 2\pi. \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Розв'язання. Оскільки $f(t)$ є 2π-періодична функція, то

$$f(t) \to F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\int_0^{\pi} t e^{-pt} dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t)\, e^{-pt} dt \right) = \frac{1 - e^{-\pi p}}{p^2 (1 + e^{-\pi p})},$$

або

$$f(t) \to \frac{1}{p^2} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2}.$$

Нехай $x(t) \to X(p)$. Рівняння в класі зображень має вигляд:

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{1}{p^2} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2}.$$

Звідси $X(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+4)} \operatorname{th} \dfrac{\pi p}{2} = \dfrac{1}{p(p^2+4)} \cdot \dfrac{1}{p} \operatorname{th} \dfrac{\pi p}{2}$.

Зазначимо, що функція $f(t)$ — кусково-диференційовна, а її похідна при $t \geqslant 0$ є 2π-періодичною функцією, яка на періоді визначається рівністю

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \pi; \\ -1 & \text{при } \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Похідній $f'(t)$ відповідає зображення

$$f'(t) \to p \cdot \frac{1}{p^2} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2} - f(0) = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2}.$$

Тому оригінал для $X(p)$ знайдемо за теоремою про згортку (властивість 6°). Оскільки

$$\frac{1}{p(p^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) \leftarrow \frac{1}{4}(1 - \cos 2t), \qquad \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2} \leftarrow f'(t),$$

то

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+4)} \cdot \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2} \leftarrow \int_0^t \frac{1}{4}(1 - \cos 2(t - \tau))\, f'(\tau)\, d\tau.$$

Запишемо $x(t)$ на різних інтервалах. Якщо $0 < t < \pi$, то

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - \tau))\, d\tau = \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right);$$

при $\pi < t < 2\pi$ маємо

$$x(t) = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - \tau))\, d\tau - \int_{\pi}^{t} \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - \tau))\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\pi - t + \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

і т. д. Неважко довести, що при $2k\pi < t < \pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, і при $\pi + 2k\pi < t < 2\pi + 2k\pi$ відповідно

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{3} - 2k\pi\right), \quad x(t) = \frac{1}{4}\left(2\pi - t + \frac{\sin 2t}{2} + 2k\pi\right).$$

Тому $x(t)$ є 2π-періодична функція, яка на періоді визначається рівністю

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) & \text{при } 0 \leqslant t < \pi; \\ \frac{1}{4}\left(2\pi - t + \frac{\sin 2t}{2}\right) & \text{при } \pi \leqslant t < 2\pi. \end{cases}$$

19. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x + 4y.$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$. Відповідна система в класі зображень є лінійною алгебраїчною відносно $X(p)$ і $Y(p)$:

$$\begin{cases} (p - 2) X(p) - Y(p) = x_0; \\ -3X(p) + (p - 4) Y(p) = y_0. \end{cases}$$

Звідси

$$X(p) = \frac{x_0(p - 4) + y_0}{p^2 - 6p + 5} = \frac{3x_0 - y_0}{4} \frac{1}{p - 1} + \frac{x_0 + y_0}{4} \frac{1}{p - 5},$$

$$Y(p) = \frac{3x_0 + (p - 2) y_0}{p^2 - 6p + 5} = \frac{y_0 - 3x_0}{4} \frac{1}{p - 1} + \frac{3}{4}(x_0 + y_0) \frac{1}{p - 5}.$$

Переходимо до оригіналів:

$$x(t) = \frac{3x_0 - y_0}{4} e^t + \frac{x_0 + y_0}{4} e^{5t},$$

$$y(t) = -\frac{3x_0 - y_0}{4} e^t + \frac{3(x_0 + y_0)}{4} e^{5t}.$$

Позначивши $\frac{3x_0 - y_0}{4} = C_1$, $\frac{x_0 + y_0}{4} = C_2$, остаточно дістанемо

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

20. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t; \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$. Відповідна **система в** класі зображень має вигляд:

$$\begin{cases} 4(pX(p) - 1) - pY(p) + 2 + 3X(p) = \dfrac{1}{p^2+1}; \\ pX(p) - 1 + Y(p) = \dfrac{p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Звідси

$$X(p) = \frac{1}{p+1}, \quad Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1}.$$

Тому

$$x(t) = e^{-t}, \quad y(t) = e^{-t} + \cos t.$$

21. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} - y = e^t; \\ \dfrac{dx}{dt} + 2x - \dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \end{cases}$$

який задовольняє початкові умови: $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$. Перейдемо **до системи в** класі зображень

$$\begin{cases} p^2X(p) - 1 + pX(p) + p^2Y(p) - Y(p) = \dfrac{1}{p-1}; \\ pX(p) + 2X(p) - pY(p) + Y(p) = \dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$X(p) = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{1}{(p+1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p+1} \leftarrow e^{-t}, \qquad \frac{1}{p^2-1} \leftarrow \operatorname{sh} t,$$

$$\frac{1}{(p+1)^2} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+1}\right) \leftarrow te^{-t},$$

$$\frac{2p}{(p^2-1)^2} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2-1}\right) \leftarrow t \operatorname{sh} t.$$

Отже,

$$x(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sh} t + \frac{3}{4} te^{-t}, \quad y(t) = \frac{3}{4} t \operatorname{sh} t.$$

22. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x'' = y; & x(0) = 1; \quad y(0) = 1; \\ y'' = x, & x'(0) = 2; \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Нехай $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$ і запишемо відповідну систему в класі зображень:

$$p^2X(p) - p - 2 = Y(p), \quad p^2Y(p) - p = X(p).$$

Звідси

$$p^2(p^2X(p) - p - 2) - p = X(p),$$

$$X(p) = \frac{p(p+1)^2}{p^4-1} = \frac{p^2+p}{(p^2+1)(p-1)} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2+1},$$

$$Y(p) = \frac{p^2(p^2+p)}{(p^2+1)(p-1)} - (p+2) = \frac{p^2-p+2}{(p^2+1)(p-1)} =$$

$$= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Переходячи до оригіналів, дістаємо

$$x = e^t + \sin t, \quad y = e^t - \sin t.$$

23. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_0^t x(\tau) \cos(t-\tau)\, d\tau = \sin t.$$

Р о з в' я з а н н я. Нехай $x(t) \to X(p)$. Ліва частина цього рівняння є згорткою функцій $x(t)$ і $\cos t$. Тому в класі зображень дане рівняння матиме вигляд:

$$X(p)\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Звідси

$$X(p) = \frac{1}{p} \text{ і } x(t) = 1.$$

24. Розв'язати рівняння

$$\int_0^t e^{\tau} x(t-\tau)\, d\tau = x(t) + te^t - 2.$$

Р о з в' я з а н н я. Ліва частина даного рівняння є згорткою функцій e^t і $x(t)$. Нехай $x(t) \to X(p)$. Тоді в класі зображень маємо

$$\frac{1}{p-1} X(p) = X(p) \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{p}.$$

Звідси

$$X(p) = \frac{2(p-1)^2 - p}{p(p-1)(p-2)} = \frac{2p-1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p}.$$

Отже,

$$x(t) = e^t + 1.$$

25. Розв'язати рівняння

$$x(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2 x(t-\tau)\, d\tau.$$

Р о з в' я з а н н я. Нехай $x(t) \to X(p)$. Тоді

$$\sin t \to \frac{1}{p^2+1},$$

$$\int_0^t \tau^2 x(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau)\, d\tau \to \frac{2}{p^3} X(p).$$

У класі зображень маємо:

$$X(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^3} X(p).$$

Звідси

$$X(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}.$$

Раціональний дріб $X(p)$ розкладемо на елементарні дроби:

$$X(p) = \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p+1}{2(p^2+1)} - \frac{2p+1}{3(p^2+p+1)}.$$

Тому

$$x(t) = \frac{1}{6} e^t + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) - \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

26. В електричний контур, який складається з послідовно з'єднаних індуктивності L, ємності C і опору R (рис. 81), включається ЕРС E. Струм у контурі і заряд q_0 конденсатора дорівнюють нулю. Знайти залежність струму в контурі від часу.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $i = i(t)$ — струм у контурі, який проходить після включення ЕРС. Тоді напруга на затискачах котушки дорівнює $L\frac{di}{dt}$, напруга на конденсаторі — $\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau$, напруга на опорі — iR. За законом Кірхгофа маємо

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau = E.$$

Нехай $i(t) \to I(p)$. Для $I(p)$ маємо рівняння

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right) I(p) = \frac{E}{p}.$$

Звідси $I(p) = \dfrac{E}{L\left(p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC}\right)}$.

Позначимо через p_1 і p_2 корені рівняння $p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC} = 0$.

Очевидно, що $p_1 = -\alpha + \beta$, $p_2 = -\alpha - \beta$, де $\alpha = \dfrac{R}{2L}$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \dfrac{1}{LC}}$. Тоді

$$I(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{1}{L(p_1 - p_2)}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right) =$$

$$= \frac{E}{2L\beta}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right).$$

Переходимо до оригіналів:

$$i(t) = \frac{E}{2\beta L} e^{-\alpha t}\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t. \qquad (1)$$

Якщо $\alpha^2 < \dfrac{1}{LC}$, тобто $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, то β є уявною величиною. Позначимо $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \alpha^2}$, тоді $\beta = i\omega$. Враховуючи, що $\operatorname{sh}(i\omega t) = \sin \omega t$, дістаємо

$$i(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

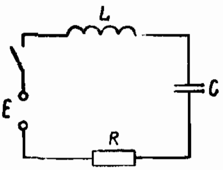


Рис. 81

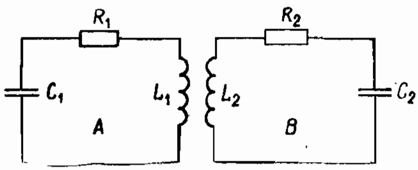


Рис. 82

У цьому випадку в контурі відбувається згасаючий коливальний процес з частотою ω. У критичному випадку $\beta = 0$, вираз для $i(t)$ можна дістати з (1) за допомогою граничного переходу при $\beta \to 0$. Розкриваючи невизначеність, знаходимо:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t}.$$

27. Два коливальні контури A і B (рис. 82) магнітно зв'язані між собою (m — коефіцієнт взаємної індукції). Коефіцієнт самоіндукції, опір і ємність контура відповідно дорівнюють L_1, R_1 і C_1, а для контура B ці самі величини дорівнюють L_2,

R_2, C_2. Знайти залежність сили струму в контурі A від часу, вважаючи, що опори R_1 і R_2 малі, а коефіцієнти індукції і ємності задовольняють умові $C_1L_1 = C_2L_2$ (якщо виконується така рівність, то кажуть, що контури A і B *настроєні в унісон*). У початковий момент струм у контурі A дорівнює нулю.

Розв'язання. Нехай $i_1(t)$ — у контурі A, а $i_2(t)$ — в контурі B у момент часу t. В контурі A виникає ЕРС індукції, яка дорівнює $m\frac{di_2}{dt}$, ЕРС самоіндукції, яка дорівнює $L_1\frac{di_1}{dt}$ і напруга на конденсаторі $\frac{1}{C_1}\int i_1(t)\,dt$. Складаємо рівняння

$$m\frac{di_2}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)\,dt + R_1i_1 = 0.$$

Аналогічно для контура B

$$m\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt + R_2i_2 = 0.$$

Дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases} m\dfrac{di_2}{dt} + L_1\dfrac{di_1}{dt} + R_1i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1(t)\,dt = 0; \\ m\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt} + R_2i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2(t)\,dt = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Нехай $i_1(t) \rightarrow I_1(p)$, $i_2(t) \rightarrow I_2(p)$. Відповідна система в класі зображень має вигляд

$$\begin{cases} m(pI_2(p) - i_{20}) + L_1pI_1(p) + R_1I_1(p) + \dfrac{1}{C_1p}I_1(p) = 0; \\ mpI_1(p) + L_2(pI_2(p) - i_{20}) + R_2I_2(p) + \dfrac{1}{C_2p}I_2(p) = 0. \end{cases}$$

Виключивши $I_2(p)$, дістанемо

$$m\left(p\,\frac{L_2i_{20} - mpI_1(p)}{L_2p + R_2 + \dfrac{1}{C_2p}} - i_{20}\right) + L_1pI_1(p) + R_1I_1(p) +$$

$$+ \frac{1}{C_1p}I_1(p) = 0,$$

або

$$\frac{(L_1C_1p^2 + R_1C_1p + 1)(L_2C_2p^2 + R_2C_2p + 1) - m^2C_1C_2p^4}{C_1p\,(L_2C_2p^2 + R_2C_2p + 1)}I_1(p) =$$

$$= \frac{C_2R_2i_{20}p + i_{20}}{L_2C_2p^2 + R_2C_2 + 1}.$$

Оскільки опори R_1 і R_2 малі, то, нехтуючи ними і враховуючи, що $C_1L_1 = C_2L_2$, іcля нескладних перетворень знаходимо

$$_1(p) = \frac{C_1 p i_{20}}{L_1^2C_1^2p^4 + 2L_1C_1p^2 + 1 - m^2C_1C_2p^4} = \frac{\frac{C_1 i_{20}}{L_1^2C_1^2} p}{\left(p^2 + \frac{1}{LC}\right)^2 - \frac{m^2C_1C_2}{L_1C_1} p^4}.$$

Позначивши $\frac{m^2}{L_1L_2} = a^2$, $\frac{1}{C_1L_1} = b^2$, дістанемо

$$I_1(p) = \frac{C_1 i_{20}}{b^2} \frac{p}{(1 - a^2)p^4 + 2b^2p^2 + b^4}. \tag{3}$$

Через те що $m < L_1$ і $m < L_2$, то $0 < a^2 < 1$ і знаменник (3) можна записати вигляді

$$(1 - a^2)p^4 + 2b^2p^2 + b^4 = (1 - a^2)\left(p^2 + \frac{b^2}{1 + a}\right)\left(p^2 + \frac{b^2}{1 - a}\right).$$

Звідси

$$I_1(p) = \frac{C_1 i_{20}}{b^2(1 - a^2)} \frac{p}{\left(p^2 + \frac{b^2}{1 + a}\right)\left(p^2 + \frac{b^2}{1 - a}\right)} =$$

$$= \frac{2aC_1 i_{20}}{(1 - a^2)^2}\left(\frac{p}{p^2 + \frac{b^2}{1 - a}} - \frac{p}{p^2 + \frac{b^2}{1 + a}}\right).$$

Перейшовши до оригіналів, знайдемо

$$i_1(t) = \frac{2aC_1 i_{20}}{(1 - a^2)^2}\left(\cos\frac{bt}{\sqrt{1 - a}} - \cos\frac{bt}{\sqrt{1 + a}}\right).$$

28. Довести формулу інтеграла накладання.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки початкові умови задачі Коші є нульовими, то рівняння в класі зображень має вигляд

$$D(p)X(p) = F(p), \text{ звідки } X(p) = G(p)F(p),$$

де $f(t) \to F(p)$, $G(p) = \frac{1}{D(p)}$. Використовуючи теорему про згортку (властивість 6° зображень), дістаємо

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad \text{де } g(t) \to G(p).$$

29. Розв'язати задачу Коші

$$x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1 + e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Застосуємо метод інтеграла накладання. Маємо:

$$D(p) = p^2 - p, \quad G(p) = \frac{1}{p^2 - p} = \frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p}.$$

Тому $G(p) \leftarrow g(t) = e^t - 1$. Розв'язок даної задачі Коші:

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{(1+e^\tau)^2}(e^{t-\tau} - 1)\,d\tau = e^t \int_0^t \frac{e^\tau d\tau}{(1+e^\tau)^2} -$$

$$-\int_0^t \frac{e^{2\tau} d\tau}{(1+e^\tau)^2} = e^t \int_0^t \frac{d(1+e^\tau)}{(1+e^\tau)^2} - \int_0^t \frac{(1+e^\tau-1)\,de^\tau}{(1+e^\tau)^2} =$$

$$= e^t\left(-\frac{1}{1+e^\tau}\right)\Bigg|_0^t - \ln(1+e^\tau)\Big|_0^t - \frac{1}{1+e^\tau}\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}(e^t - 1) - \ln(1+e^t) + \ln 2.$$

30. Застосовуючи метод інтеграла накладання, розв'язати задачу Коші $x'' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$,
де

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ -1 & \text{при } 1 < t \leqslant 2; \\ 0 & \text{при } t < 0,\ t > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:

$$D(p) = p^2 + 1, \quad G(p) = \frac{1}{p^2+1} \leftarrow g(t) = \sin t.$$

Тому

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau.$$

Запишемо $x(t)$ на різних інтервалах.

Якщо $0 < t \leqslant 1$, то

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\,d\tau = \cos(t-\tau)\Big|_0^t = 1 - \cos t;$$

якщо $1 < t \leqslant 2$, то

$$x(t) = \int_0^1 f(t)\sin(t-\tau)\,d\tau + \int_1^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \cos(t-\tau)\Big|_0^1 - \cos(t-\tau)\Big|_1^t = 2\cos(t-1) - \cos t - 1;$$

якщо $t > 2$, то

$$x(t) = \int_0^1 f(t)\sin(t-\tau)\,d\tau + \int_1^2 f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau + \int_2^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \cos(t-\tau)\Big|_0^1 - \cos(t-\tau)\Big|_1^2 = 2\cos(t-1) - \cos(t-2) - \cos t.$$

Остаточно

$$x(t)=\begin{cases}1-\cos t & \text{при } 0<t\leqslant 1;\\ 2\cos(t-1)-\cos t-1 & \text{при } 1<t\leqslant 2;\\ 2\cos(t-1)-\cos(t-2)-\cos t & \text{при } t>2.\end{cases}$$

31. Застосовуючи метод інтеграла накладання, розв'язати задачу Коші

$$x''-x=t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=0.$$

Розв'язання. За допомогою заміни $x=y+\alpha_1 t+\alpha_2$, де y — нова невідома функція, зведемо дану задачу до задачі з нульовими початковими умовами. Маємо:

$$1=y(0)+\alpha_1\cdot 0+\alpha_2,\quad 0=y'(0)+\alpha_1,$$

звідки $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$. Тому $x=y+1$ і для функції y маємо задачу

$$y''-y=t+1,\ y(0)=y'(0)=0.$$

Знаходимо:

$$G(p)=\frac{1}{p^2-1}\leftarrow g(t)=\operatorname{sh} t,$$

$$y(t)=\int_0^t(\tau+1)\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau=-(\tau+1)\operatorname{ch}(t-\tau)\Big|_0^t+$$

$$+\int_0^t\operatorname{ch}(t-\tau)\,d\tau=\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t-t-1.$$

Тому

$$x=\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t-t.$$

Задачі для самостійної роботи

Знайти зображення функцій

1. $f(t)=t^n e^{\alpha t}$. **2.** $f(t)=\dfrac{\sin\omega t}{t}$.

3. $f(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 2kT\leqslant t<(2k+1)T;\\ -1 & \text{при } (2k+1)T\leqslant t<(2k+2)T,\ k=0,1,2,\ldots\end{cases}$

4. $f(t)=|\sin\omega t|$. **5.** $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}$.

Знайти оригінали зображень

6. $F(p)=\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. **7.** $F(p)=\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$.

8. $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$. **9.** $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$, $\alpha>0$.

10. $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$. **11.** $F(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$.

12. Нехай $x(t) \to X(p)$. Знайти зображення виразу

$$\frac{dx}{dt} + x + \int_0^t x(\tau)\, d\tau,$$

якщо $x(0) = 1$.

13. Знайти зображення лінійного диференціального виразу

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 2x,$$

якщо $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 2$ і $x(t) \to X(p)$.

За допомогою перетворення Лапласа знайти розв'язки задач Коші

14. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
15. $x'' + x = 4e^t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = -3$.
16. $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
17. $x''' - x' = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 1$.
18. $x^{IV} + x'' = 2\cos t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.
19. $\dfrac{dx}{dt} = 1 + y$, $\dfrac{dy}{dt} = x - e^t$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.
20. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x + y + 1$, $x(0) = 0$, $y(0) = 5$.
21. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} + x - y + e^{3t}$,

$$\frac{dy}{dt} = x - y, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

22. Знайти розв'язок рівняння $x'' + 4x = e^{-t}$, який задовольняє умовам

$$x(0) - 2x\left(\frac{\pi}{2}\right) - x'(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = x(0).$$

23. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_0^t x(\tau)\cos(t - \tau)\, d\tau = 1 - \cos t.$$

24. Знайти розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$x'' + x = \cos t + \int_0^t \sin(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

який задовольняє умовам: $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$.

25. Знайти обмежений при $t \to +\infty$ розв'язок рівняння

$$tx'' + x' + tx = 0.$$

Методом інтеграла накладання знайти розв'язки задач Коші

26. $x'' = \operatorname{arctg} t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
27. $x'' - x' = \dfrac{1}{1 + e^t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

28. $x'' + x = \dfrac{1}{4 + \operatorname{tg}^2 t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

29. $x''' + x' = \dfrac{1}{2 + \sin t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

30. $x'' - x = \operatorname{th} t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

31. $x'' + x = \dfrac{1}{1 + \sin^2 t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

32. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t < 3; \\ 2 \text{ при } 3 \leqslant t < +\infty; \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$

33. $x'' + 2x' + 5x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t < 1; \\ 0 \text{ при } t < 0, \quad t \geqslant 1. \end{cases}$

34. $x'' + 4x' + 4x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. $f(t) = \begin{cases} 2e^{-t} \text{ при } 0 \leqslant t < 1; \\ 0, \ t < 0 \text{ при } t \geqslant 1. \end{cases}$

Додаток 3

ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ТА ПОНЯТТЯ, ЯКІ ВИКОРИСТАНО В ПОСІБНИКУ

Знаходження функції за її диференціалом. Нехай **функція** $f(x)$ **неперервна** на проміжку $I = (a, b)$. Тоді диференціальний вираз $f(x)\,dx$ **є диференціалом** функції $u(x)$, $du = f(x)\,dx$, $x \in I$, яка визначається за формулою

$$u = u(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau \quad x_0, \ x \in I, \ u(x_0) = 0,$$

і називається *первісною для* $f(x)$ *на* I.

Якщо відома яка-небудь первісна $u(x)$ для $f(x)$ на I, то сукупність усіх первісних для $f(x)$ на I визначається формулою

$$\int f(x)\,dx = u(x) + C, \quad x \in I, \quad C \text{ — довільна стала},$$

і називається *невизначеним інтегралом* *.

Нехай функції $M = M(x, y)$ і $N = N(x, y)$ неперервно диференційовні в *однозв'язній* ** області $D \subset \mathbb{R}^2$. Тоді диференціальний вираз $Mdx + Ndy$ є *повним диференціалом функції* $u = u(x, y)$, $du = Mdx + Ndy$, $(x; y) \in D$, тоді й тільки тоді, коли $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\forall (x; y) \in D$. Функція $u = u(x, y)$ визначається за формулою

$$u = u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy + C,$$

$$(x_0; y_0), \ (x; y) \in D, \ u(x_0, y_0) = C; \quad C = \text{const}.$$

---

* У теорії диференціальних рівнянь символом $f(x)\,dx$, як правило, позначають яку-небудь первісну (квадратуру). Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків даного диференціального рівняння можна звести до обчислення скінченного числа квадратур від деяких відомих функцій і алгебраїчних операцій, то говорять, що дане рівняння *інтегрується в квадратурах*.

** Область $D \subset \mathbb{R}^2$ називається *однозв'язною*, якщо будь-яка кусково-гладка замкнена крива (без точок самоперетину), розміщена в D, обмежує область, усі точки якої також належать D.

Якщо ламана, що сполучає точки $(x_0;\ y_0)$, $(x;\ y_0)$, $(x;\ y)$ лежить в D (рис. 83), то функцію $u = u\,(x,\ y)$ можна знайти за формулою

$$u = u\,(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M\,(\tau,\ y_0)\,d\tau + \int_{y_0}^{y} N\,(x,\ \tau)\,d\tau + C.$$

Нехай функції $P = P\,(x,\ y,\ z)$, $Q = Q\,(x,\ y,\ z)$, $R = R\,(x,\ y,\ z)$ неперервно диференційовні в *поверхнево однозв'язній* * області $D \subset \mathbf{R}^3$. Тоді диференціальний ви-

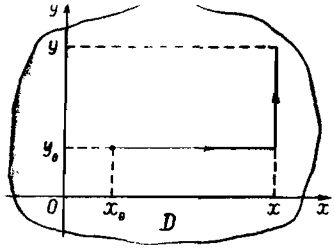


Рис. 83

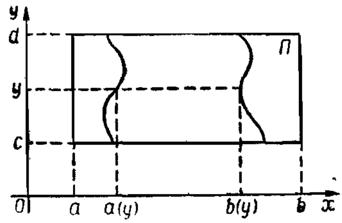


Рис. 84

раз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом функції $u = u\,(x,\ y,\ z)$, $du = Pdx + Qdy + Rdz$, $(x;\ y;\ z) \in D$, тоді й тільки тоді, коли

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\quad \forall\ (x;\ y;\ z) \in D,$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}\quad \forall\ (x;\ y;\ z) \in D,\quad \vec{F} = \{F,\ Q,\ R\}.$$

Функція $u = u\,(x,\ y,\ z)$ визначається за формулою

$$u = u\,(x,\ y,\ z) = \int_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} P\,(x,\ y,\ z)\,dx + Q\,(x,\ y,\ z)\,dy + R\,(x,\ y,\ z)\,dz + C,$$

$$(x_0;\ y_0;\ z_0),\ (x;\ y;\ z) \in D,\quad u\,(x_0,\ y_0,\ z_0) = C,\quad C = \text{const}.$$

Якщо ламана, яка сполучає точки $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $(x;\ y_0;\ z_0)$, $(x;\ y;\ z_0)$, $(x;\ y;\ z)$, лежить в D, то функцію $u = u\,(x,\ y,\ z)$ можна знайти за формулою

$$u = u\,(x,\ y,\ z) = \int_{x_0}^{x} P\,(\tau,\ y_0,\ z_0)\,d\tau + \int_{y_0}^{y} Q\,(x,\ \tau,\ z_0)\,d\tau + \int_{z_0}^{z} R\,(x,\ y,\ \tau)\,d\tau + C.$$

Формула диференціювання інтеграла, залежного від параметра. Якщо функції $f\,(x;\ y)$ і її похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервна в прямокутнику П (рис. 84), а функції $a\,(y)$, $b\,(y)$ диференційовні на відрізку $[c,\ d]$, то

$$\left(\int_{a(y)}^{b(y)} f\,(x,\ y)\,dx\right)'_y = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + b'\,(y)\,f\,(b\,(y),\ y) - a'\,(y)\,f\,(a\,(y),\ y).$$

---

* Область $D \subset \mathbf{R}^3$ називається *поверхнево однозв'язною*, якщо на будь-яку кусково-гладку криву (без точок самоперетину), яка лежить в D, можна натягнути поверхню, яка цілком лежить в D.

Таблиця основних невизначених інтегралів α, a, $C = \text{const}$

1	$\int 0dx = C;\quad \int 1dx = x + C;$ $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1;\quad \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert Cx\rvert,\ \ Cx \neq 0.$
2	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0,\ a \neq 1;\quad \int e^x dx = e^x + C.$
3	$\int \sin x dx = -\cos x + C;\quad \int \cos x dx = \sin x + C;$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ \ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ \ n \in \mathbf{Z};$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ \ x \neq \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z};$ $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert C\cos x\rvert,\ \ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ \ n \in \mathbf{Z},\ C \neq 0;$ $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert C\sin x\rvert,\ \ x \neq \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z},\ C \neq 0;$ $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert C \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert,\ \ x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z},\ C \neq 0;$ $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert C \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert,\ \ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ \ n \in \mathbf{Z},\ C \neq 0.$
4	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;\quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$ $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;\quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,\ x \neq 0.$
5	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \ a \neq 0;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \ a > 0,\ x \in (-a,\ a).$
6	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a}C\right\rvert,\ \ a > 0,\ x \neq \pm a,\ C \neq 0;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\lvert (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})C\rvert,\ \ C \neq 0$

Приклад. Знайти другу похідну функції $y = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t \sin \omega (t - \tau) f(\tau) \, d\tau$, $\omega = \mathrm{const} \neq 0$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо

$$y' = \frac{1}{\omega} \left(\int\limits_0^t \omega \cos \omega (t - \tau) f(\tau) \, d\tau + 1 \cdot \sin \omega (t - t) f(t) - \right.$$

$$\left. - 0 \cdot \sin \omega (t - 0) f(0) \right) = \int\limits_0^t \cos \omega (t - \tau) f(\tau) \, d\tau,$$

$$y'' = \int\limits_0^t (-\omega \sin \omega (t - \tau)) f(\tau) \, d\tau + \cos \omega (t - t) f(t) =$$

$$= -\omega \int\limits_0^t \sin \omega (t - \tau) f(\tau) \, d\tau + f(t) = -\omega^2 y + f(t).$$

Нормальна жорданова форма матриці. *Власним вектором* квадратної матриці A порядку n, який відповідає *власному значенню* λ, називається вектор $h \neq 0$, який задовольняє умову

$$Ah = \lambda h \text{ або } (A - \lambda E_n) h = 0. \tag{1}$$

Лінійна однорідна система (1) має нетривіальний ($h \neq 0$) розв'язок тоді й тільки тоді, коли

$$\Delta(\lambda) = \det (A - \lambda E_n) = 0. \tag{2}$$

Рівняння (2) називається *характеристичним рівнянням* матриці A, а корені цього рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ називаються *власними значеннями* матриці A.

Власні вектори, які відповідають різним власним значенням,— лінійно незалежні.

Квадратні матриці A і B називаються *подібними* ($A \backsim B$), якщо $A = T^{-1}BT$, де T — *невироджена* матриця ($\det T \neq 0$).

Якщо власні вектори матриці A утворюють базис n-вимірного лінійного векторного простору, то A називається матрицею *простої структури*.

У такому базисі (з власних векторів) лінійний оператор $\mathcal{A}$, який відповідає матриці A, має діагональну матрицю. Тому матриця простої структури A подібна до діагональної матриці $J(A)$:

$$A = T^{-1} J(A) T,$$

де

$$J(A) = \mathrm{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Для того щоб матриця A була матрицею простої структури, необхідно й достатньо, щоб кожному власному значенню λ кратності p відповідало рівно p лінійно незалежних власних векторів (зокрема, A є матрицею простої структури, якщо всі власні значення матриці A різні).

У загальному випадку, коли матриця A має $s \leqslant n$ лінійно незалежних власних векторів, вона подібна до квазідіагональної матриці $J(A)$:

$$A = T^{-1} J(A) T,$$

де

$$J(A) = \mathrm{diag}\,[J_{m_1}(\lambda_1),\ J_{m_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ J_{m_s}(\lambda_s)],$$

$$J_{m_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{s} m_i = n,$$

причому власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ не обов'язково різні.

Матриця $J(A)$ називається *нормальною жордановою* формою матриці A, а матриця $J_{m_i}(\lambda_i)$ — *жордановою клітиною (блоком)* матриці A порядку m_i. Якщо $m_i = 1$, то $J_1(\lambda_i) = \lambda_i$ і жорданова клітина називається *простою*.

Загальна кількість s жорданових клітин дорівнює кількості лінійно незалежних власних векторів матриці A; кожній жордановій клітині відповідає один і тільки один власний вектор матриці A, причому різним клітинам відповідають лінійно незалежні власні вектори.

Власному значенню λ кратності p відповідає $r = n - \mathrm{rang}\,(A - \lambda E_n) \leqslant p$ жорданових клітин порядків $m_1, m_2, \ldots, m_r$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = p$. Якщо $r = p$, то $m_1 = m_2 = \ldots = m_r = 1$ і всі жорданові клітини, які відповідають власному значенню λ, є простими. Зокрема, всі жорданові клітини матриці простої структури є простими.

Порядки m_i жорданових клітин, які відповідають кожному власному значенню λ, визначаються кількістю власних та так званих *приєднаних* векторів $h, f_1, f_2, \ldots, f_{m_i-1}$. Ці вектори є розв'язками лінійних систем рівнянь

$$Ah = \lambda h, \quad Af_1 = \lambda f_1 + h,$$
$$Af_2 = \lambda f_2 + f_1,\ \ldots,\ Af_{m_i-1} = \lambda f_{m_i-1} + f_{m_i-2}.$$

У базисі, утвореному з власних та приєднаних векторів (жорданів базис), матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$, який відповідає матриці A, має нормальну жорданову форму.

За допомогою перетворення подібності ($A = T^{-1}J(A)\,T$) матрицю A з точністю до розміщення клітин можна привести до єдиної жорданової форми.

Якщо A — дійсна квадратна матриця порядку n, $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots$, — її комплексні власні значення, γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — її дійсні власні значення, то

$$A = T^{-1}D(A)\,T,$$

де T — дійсна невироджена матриця,
$D(A) = \mathrm{diag}\,[K_{n_1}(\lambda_1), \ldots, K_{n_p}(\lambda_p);\ J_{m_1}(\gamma_1), \ldots, J_{m_l}(\gamma_l)]$ — *дійсна жорданова форма* матриці A,

$$K_{n_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} S_j & E_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & S_j & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & S_j & E_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & S_j \end{pmatrix},$$

$$S_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$j = 1, \ldots, p.$$

Приклади

1.

$$J(A)=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}.$$

Порядок матриці $n=5$. Власні значення матриці $\lambda_1=2$ (кратність $p_1=4$) і $\lambda_2=3$ (кратність $p_2=1$). Жорданові клітини:

$$J_3(2)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\quad J_1(2)=2,\quad J_1(3)=3.$$

Матриця має три лінійно незалежні власні вектори

$$h_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad h_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

які відповідають власному значенню $\lambda_1=2$, та $h_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, який відповідає власному значенню $\lambda_2=3$. Власному значенню $\lambda_1=2$ відповідає 2 приєднаних вектори $f_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ і $f_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

2.

$$A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці A

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\4&-3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

має корені (власні значення) $\lambda_1=1\neq\lambda_2=-1$. Тому A є матрицею простої структури і $J(A)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

3.

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

має кратні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Оскільки $r = 2 - \operatorname{rang}(A - 2E_2) = 2 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$, то матриця A має лише один власний вектор і тому $J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } (\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

має корені $\lambda_1 = -1$ (кратність $p_1 = 2$) і $\lambda_2 = 1$ (кратність $p_2 = 2$). Оскільки $r_1 = 4 - \operatorname{rang}(A + E_4) = 4 - 3 = 1$, $r_2 = 4 - \operatorname{rang}(A - E_4) = 4 - 3 = 1$, то кожному власному значенню відповідає лише один власний вектор. Тому нормальна жорданова форма матриці має дві жорданові клітини порядку 2:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Власним значенням матриці є число $\lambda = 2$ (кратність $p = 3$). Координати власного вектора $h = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ знаходимо із системи $(A - 2E_3)\ h = 0$, звідки $h = (c_1, c_2, 0)^{\mathrm{T}}$, де $c_1^2 + c_2^2 > 0$. Координати приєднаного вектора $f_1 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ знаходимо із системи $(A - 2E_3) f_1 = h$, звідки $x_3 = c_1$, $x_3 = c_2$, x_1, x_2 — будь-які. Виберемо $f_1 = (0, 0, c)$, де $c = c_1 = c_2 \neq 0$. Приєднаного вектора f_2 не існує, оскільки із системи $(A - 2E_3) f_2 = f_1$, зокрема, випливає, що $c = 0$. Тому жорданів базис утворюють, наприклад, вектори

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{власний} \\ \text{вектор:} \\ c_1 = c_2 = c = 1 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{приєднаний} \\ \text{вектор: } c = 1 \end{pmatrix},$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\text{власний вектор: } c_1 = 1,\ c_2 = 0).$$

Жорданова форма матриці має вигляд

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&1&0\\0&2&1&0&1\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Єдиним власним значенням даної матриці є число $\lambda=2$, яке має кратність $p=5$.

Координати власного вектора $h=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}$ знаходимо із системи

$$(A-2E_5)\,h=0,\ \text{тобто}\ \begin{cases}x_2+x_4=0;\\ x_3+x_5=0;\\ 0=0;\\ x_5=0;\\ 0=0.\end{cases}$$

Звідси

$$h=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\\-c_2\\0\end{pmatrix},$$

де $c_1^2+c_2^2>0$. Координати приєднаного вектора f_1 знаходимо із системи $(A-2E_5)\,f_1=h$,

$$\text{тобто}\ \begin{cases}x_2+x_4=c_1;\\ x_3+x_5=c_2;\\ 0=0;\\ x_5=-c_2;\\ 0=0.\end{cases}\quad \text{Звідси}\ f_1=\begin{pmatrix}0\\0\\2c_2\\c_1\\-c_2\end{pmatrix}.$$

Координати приєднаного вектора f_2 знаходимо із системи $(A-2E_5)\,f_2=f_1$, тобто

$$\begin{cases}x_2+x_4=0;\\ x_3+x_5=0;\\ 0=2c_2;\\ x_5=c_1;\\ 0=-c_2.\end{cases}$$

Звідси

$$c_2=0\ \text{і}\ f_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-c_1\\0\\c_1\end{pmatrix},\quad c_1\neq 0.$$

Приєднаного вектора f_3 не існує, бо з системи $(A - 2E_3) f_3 = f_2$ випливає, зокрема, що $c_1 = 0$, що неможливо. Жорданів базис утворюють вектори

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{власний} \\ \text{вектор:} \\ c_1 = 1,\ c_2 = 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(\text{приєднані вектори: } c_1 = 1,\ c_2 = 0)},$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{власний} \\ \text{вектор:} \\ c_1 = 0,\ c_2 = 1 \end{pmatrix}, \quad f_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\text{приєднаний вектор: } \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{matrix}\right).$$

Отже,

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ -10 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0$ даної матриці має комплексні корені $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Оскільки ці корені різні, то матриця A є матрицею простої структури і

$$J(A) = \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix}.$$

Зведемо дану матрицю до дійсної жорданової форми $D(A)$. Маємо $D(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для якої $A = T^{-1} D(A) T$, визначимо з матричного рівняня

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

яке еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} 7a - 10b = c; \\ 5a - 7b = d. \end{cases}$$

Одним з розв'язків цієї системи є $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$.

Тому $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $(\det T = 1)$ і

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійної роботи

Знайти похідні даних функцій:

1. $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\tau}{\tau}\, d\tau$. 2. $f(x) = \int\limits_0^{x} \frac{\ln(1 + x\tau)}{1 + \tau^2}\, d\tau$.

3. $f(x) = \int\limits_1^{2} \frac{e^{x\tau}}{\tau}\, d\tau$. 4. $f(x) = \int\limits_0^{x} f(\tau + x, \tau - x)\, d\tau$.

Знайти жорданові форми даних матриць:

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. 12. $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Знайти власні значення та власні вектори даних матриць

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 14. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

З'ясувати, які з даних матриць є матрицями простої структури

17. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

19. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. 20. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1

1. $y = \ln(1 + x^2) + C$. 2. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$. 3. $y = e^x(\cos x + \sin x) + C$. 4. $y = -e^{-x^2}$. 5. $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$. 6. $y = 1 + Ce^x$. 7. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = Ce^x$, $y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 8. $\ln y = Ce^x$. 9. $\ln|x + y + 2| = x + C$. 10. $y = x + \frac{1}{4}(x + C)^2$, $x \geqslant -C$; $y = x$. 11. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$. 12. $y = \ln x$. 13. $y = e^x$. 14. $x^2 - \sqrt{1 - y^2} = C$, $y = \pm 1$. 15. $x = 1 + C(x + 1)$, $x \neq -1$. 16. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C - \ln\left|\frac{y}{x}\right|$. 23. $(y - 2x)^2(y'^2 + 1) = (2y'^2 + 1)^2$. 24. $xy'^2 = y(2y' - 1)$. 25. $30\ln 100/\ln 2 \approx 199$ (днів). 26. Через 40 хв. 27. У 729 разів. 28. Вітка гіперболи $xy = 6$. 29. $k(x - 1)y - y + 1 = 0$. 30. $x = \ln(y + 3)$. 31. $y = Cx^n$. 32. $y = \alpha x^2 + C$. 33. $\rho^2 = 2(\varphi + c)$. 34. $v = \frac{32}{25}$ км/год. 35. $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C$. 36. $T = \frac{\operatorname{arctg}(31{,}62\sqrt{k})}{3{,}162\sqrt{k}}$. 37. $T = \frac{k}{\ln\frac{v_0}{v_1}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right)$. 38. 2,5 кг. 39. $T = \frac{\ln 2}{\ln 10 - \ln 9} \approx 6$ діб 14 год. 40. $v \approx 0{,}93$ м/с. 41. Кількість води, що залишилася, $m(t) = m_0 - V(q_1 - q_0)\left(1 - e^{-\frac{k}{V}t}\right)$, k — коефіцієнт пропорційності 42. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$. 43. $e^{\frac{y}{x}} = \frac{Cx}{1 - Cx}$. 44. $\ln|y| = \frac{x^2}{8y^2} + C$. 45. $\ln Cx = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$, $y = xe^{2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$. 46. $(y - x - 1)^2(y + x - 1)^5 = C$. 47. $2x + y - 3\ln|x + y + 1| = C$. 48. $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$. 49. $y = -2\cos^2 x + C\cos x$. 50. $y = e^{-\frac{1}{x}}(e^x + C)$. 51. $y = \operatorname{ctg} x - \sin x$. 52. $y^2(Ce^{2x^2} - 2x^2 - 1) = 1$. 53. $y = \frac{2x}{C + x^2}$, $y = 0$. 54. $y = \frac{1}{1 + \ln x + Cx}$. 55. $y = \frac{2x^2 + C}{x + C}$, $y = 1$. 56. $y^2 + 4x^2 = Ce^{-2x^2}$. 57. $x^2y^2 - 2x^3y - x^4 = C$. 58. $6x^2y^2 + 8x^3y + 3x^4 = C$. 59. $x^2y^2 - 2(x + y) = C$. 60. $xy - \ln xy^3 = C$. 61. $\frac{1}{(xy)^2} + \frac{4}{xy} + 2\ln x = C$. 62. $2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{xy} = C$, $y = 0$. 63. а) $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \frac{x^2}{2}$, $y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$; б) $y_1(x) = \pi + x$, $y_2(x) = 2\pi + x + x\cos x - \sin x$. 64. При $0 < a < 1$ в точках осі

абсцис. **65.** На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. **68.** $y = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{x+C}{2}}$; $y = 0$, $y = 1$.

69. $y = e^{\sin(x+C)}$, $y = e$, $y = \frac{1}{e}$. **70.** $x = -\frac{1}{2} - p + \frac{C}{(p-1)^2}$, $y = -\frac{p^2}{2} + \frac{Cp^2}{(p-1)^2}$; $y = 0$; $y = x + 1$. **71.** $y = Cx + \frac{1}{C^2}$, $4y^3 = 27x^2$. **72.** $x = Cp^2e^p$, $y = C(p+1)e^p$; $y = 0$. **73.** $3Cy = 3C^2x + (C-3)^2$; $y^2 + 4y = 12x$. **74.** $2Cy + x^2 = C^2$. **75.** $xy = C^2x + C$; $4x^2y = -1$. **76.** $y^2 = 2Cx - C^2$, $y = \pm x$. **77.** $y = Cx + \frac{1}{2}\ln C$, $2y + 1 + \ln(-2x) = 0$. **78.** $x = p + \sin p$, $y = \frac{p^2}{2} + p\sin p + \cos p + C$. **79.** $y = p^2 \sin p$, $x = p\sin p - \cos p + C$.

80. а) $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$; б) $y = 1$.

Розділ 2

15. $y = x^3 + x^2$. **16.** $y = x + 1$, $y = x^2 - x + 2$. **17.** $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$. **17.** $y = \frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{2}{3}$; $y = \frac{x^3}{3}$, $y = 0$. **18.** $y = e^{\operatorname{sh} x}$. **19.** $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$. **21.** $y = C_2 x^{\frac{x^2}{2}} e^{C_1x^2 - \frac{x^2}{4}}$. **22.** $x = \ln t + e^tC_1$, $y = t + te^t + C_2$. **23.** $y = \frac{C_1}{x^2} + \frac{x^4}{6} + C_2x$. **24.** $y = \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x + C_2)$, $k = 1$; $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$, $k = -1$; $2C_1y = (\pm C_1x + C_2)^2 + 1$, $k = 2$; $x = C_1(t - \sin t) + C_2$, $y = C_1(1 - \cos t)$, $k = -2$. **25.** $y = \frac{1}{k}\operatorname{ch} k(x + C_2) + C_1$, $k = \frac{s}{H}$ (H — горизонтальний натяг, s — вага одиниці довжини каната). **26.** $3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0$. **27.** $y^{IV} - y = 0$. **28.** $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$. **29.** $y = C_1\cos x + C_2e^x$. **30.** $y = C_1x^2 + C_2\ln x$. **31.** $y = C_1x^2 + C_2\ln x$. **32.** $y = C_1x + C_2\frac{1}{x} + C_3(x\ln|x| + 1)$. **33.** $y = C_1x + C_2x^2 + C_3e^x$. **34.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x}$. **35.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$. **36.** $y = C_1 + C_2e^{2x}$. **37.** $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **38.** $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$. **39.** $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. **40.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. **41.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$. **42.** $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_1\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$. **43.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x)$. **44.** $y = C_1e^{3x} + e^{2x}(C_2 + C_3x)$. **45.** $y = e^x(C_1 + C_2x) + e^{-x}(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x)$. **46.** $y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3\cos x + C_4\sin x$. **47.** $y = e^{-\frac{x}{2}}\left((C_1 + C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

48. $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$. 49. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + 2\cos x - \sin x$. 50. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$. 51. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x$. 52. $y = C_1 e^{3x} + C_2 + \frac{x}{3} e^{3x} + 3x^2 + 2x$. 53. $y = e^x (C_1 + C_2 x) + 2x^2 e^x$. 54. $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)$. 55. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x$. 56. $y = (C_1 + x)\cos x + (C_2 + x^2)\sin x$. 57. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{37} e^{3x}(6\sin x - \cos x)$. 58. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - e^x \sin x$. 59. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^{-x}(C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \times \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{48} e^{2x}(x^2 - 2x)$. 61. $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \times \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + x^2 - x + 1$. 63. $y = x(Ax + B) + Ce^{-3x} + (Dx + E)\cos 3x + (Fx + G)\sin 3x$. 64. $y = Ax + Bxe^{2x} + e^{2x}(C\cos x + D\sin 2x)$. 65. $y = x(Ax^2 + Bx + C) + x(Dx + E)e^{-4x} + x(Fx^2 + Gx + I)e^{-x} + K\cos 2x + L\sin 2x$. 66. $y = xe^{-3x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x) + x(Ex + F)$. 67. $y = A\cos 2x + B\sin 2x + xe^{3x}(Cx^2 + Dx + E) + e^{-2x}(F\cos 3x + G\sin 3x)$. 68. $y = (Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Cx^2 + Dx + E)\sin 2x + e^x((Fx + G)\cos 2x + (Ix + K) \times \sin 2x) + xe^{2x}(L\cos x + N\sin x)$. 69. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \times \ln|\cos 2x| + \frac{1}{2} x \sin 2x$. 70. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \times \ln|\cos x| + \sin x(x - \operatorname{tg} x)$. 71. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$. 72. $y = e^x(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{x}$. 73. $y = e^x$. 74. $y = \frac{3}{2} x^2 e^{-2x}$. 75. $y = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8} \times \sin 2x$. 76. $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \ln x \cos(\ln x)$. 77. $y = x(C_1 + C_2 \ln x) + x \ln^3 x$. 78. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. 79. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{8}{15}\sqrt{x^7} + \frac{10}{3}\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^3} + (2x^3 - 4x^2 + 2x)\ln(\sqrt{x} + 1)$. 80. $y = x(C_1 + C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x)$. 81. $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^2$. 82. $y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2}$. 83. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. 84. $y = C_1(2x + 1) + C_2 \sqrt[4]{2x + 1}$. 85. $y = C_1(x + 2)^2 + C_2(x + 2)^3$. 86. $y = C_1 x^3 + C_2 \cos \ln x + C_3 \sin \ln x - \frac{x^3}{5}$. 87. $y = C_1 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{\ln^2 x}{12} - \frac{5\ln x}{36}$. 88. $y = \frac{C_1}{x + 2} + \frac{C_2}{(x + 2)^2} + \frac{C_3}{(x + 2)^3} + \frac{1}{6}\ln(x + 2) - \frac{11}{36}$. 89. $y = C_1 \cos(\sqrt{2} \arccos x) + C_2 \times \sin(\sqrt{2}\arccos x)$. 90. $y = C_1 \cos(3 \arccos x) + C_2 \sin(3\arccos x)$. 91. $y = C_1 \times \operatorname{ch}(4 \operatorname{arch} x) + C_2 \operatorname{sh}(4 \operatorname{arch} x)$. 92. $y = C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{2}\operatorname{arch} x) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{2}\operatorname{arch} x)$. 93. $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$. 94. $y = C_1 \cos(2\arccos x) + C_2 \sin(2\arccos x)$.

95. $y = C_1 \cos(3 \ln x) + C_2 \sin(3 \ln x)$. 96. $y = -\frac{1}{4x} + C_1 e^{\frac{2}{x}} + C_2 e^{-\frac{2}{x}}$.

97. $y = x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. 98. $y = x^2 (C_1 e^x + C_2 e^{-x})$. 99. $y = \frac{C_1 x + C_2}{1 + x^2}$.

100. $y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} + C_2 e^{-x^2/2}$. 101. $y = C_1 \cos \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) + C_2 \sin \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$. 102. а) $\frac{E}{R}$; б) $\frac{E \sin(\nu t + \varphi - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \nu^2 L^2}}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\nu L}{R}$.

103. $-\frac{E\nu \sin(\nu t + \alpha)}{2R\sqrt{\nu^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{2L\nu}$. 104. $\frac{ER_1R_2 \sin(\nu t + \varphi - \alpha)}{\sqrt{R_1^2R_2^2 + (R_1 + R_2)^2 \nu^2 L^2}}$,

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{(R_1 + R_2)\nu L}{R_1 R_2}$. 105. а) $z_1 = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{p}{2}(x - x_0)} \left(\omega \cos \frac{\omega}{2}(x - x_0) + p \sin \frac{\omega}{2}(x - x_0)\right)$, $z_2 = \frac{2}{\omega} e^{-\frac{p}{2}(x - x_0)} \sin \frac{\omega}{2}(x - x_0)$, $\omega = \sqrt{4q - p^2}$, якщо $\Delta = p^2 - 4q < 0$; б) $z_1 = e^{-\frac{p}{2}(x - x_0)} \left(1 + \frac{p}{2}(x - x_0)\right)$, $z_2 = e^{-\frac{p}{2}(x - x_0)}(x - x_0)$, якщо $\Delta = p^2 - 4q = 0$; в) $z_1 = \frac{1}{2\omega}\left((p + \omega) e^{-\frac{1}{2}(p - \omega)(x - x_0)} - (p - \omega) \times e^{-\frac{1}{2}(p + \omega)(x - x_0)}\right)$, $z_2 = \frac{1}{\omega}\left(e^{-\frac{1}{2}(p - \omega)(x - x_0)} - e^{-\frac{1}{2}(p + \omega)(x - x_0)}\right)$, $\omega = \sqrt{p^2 - 4q}$, якщо $\Delta = p^2 - 4q > 0$.

Розділ 3

4. $x^2 z'' - 2z = 0$. 5. $\frac{d^2 y}{dt^2} + t^2 y = 0$. 6. $y = C_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3k - 1) 3k}\right) + C_2 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3k(3k + 1)}\right)$.

7. $y = C_1 x e^{\frac{x^2}{2}} + C_2 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{15} + \cdots\right)$. 8. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x^2}$.

9. $y = C_1(1 + x) + C_2 e^x$. 10. $y = e^{\frac{x^2}{2}} (C_1 + C_2 x^2)$. 11. $y = C_1(x - 1) + C_2 \times ((x - 1) \ln |x| - 4x)$. 12. $y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 \ln |x + 1|)$. 13. $W(x) = C|x|^{-\gamma} \times |1 - x|^{\gamma - \alpha - \beta - 1}$. 15. $y = C_1 |x + 1|^{1-a} + C_2 |x - 1|^{1-a}$. 16. $y = C_1 |x + a|^{-3} + C_2 |x - a|^{-3}$. 18. $W(x) = \frac{C}{1 - x^2}$, $C \neq 0$. 19. $W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi x}$. 22. $y = 1 - \sin x - \cos x$. 23. а) $y = e^{-3x}$; б) задача не має

розв'язків. **24.** $y=2x^2$. **25.** а) $G(x,s)=\begin{cases}-(1-s)\,x, & 0\leqslant x\leqslant s;\\ -s\,(1-x), & s\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$ б) $G(x,s)=$
$=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant s;\\ -s, & s\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$ в) $G(x,s)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x-s)-\dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x\leqslant s,\\[2mm] -\dfrac{1}{2}(s-x)-\dfrac{1}{4}, & s\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

26. $G(x,s)=\begin{cases}-\dfrac{\sin x\sin(1-s)}{\sin 1}, & 0\leqslant x\leqslant s;\\[2mm] -\dfrac{\sin s\sin(1-x)}{\sin 1}, & s\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$ **27.** $G(x,s)=$
$=\begin{cases}-\dfrac{\operatorname{ch}k\,(x-s+1)}{2k\operatorname{sh}k}, & -1\leqslant x\leqslant s;\\[2mm] -\dfrac{\operatorname{ch}k\,(s-x+1)}{2k\operatorname{sh}k}, & s\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$ **28.** $G(x,s)=\dfrac{1}{2}\sin|x-s|$.

29. $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{s^2-4}{2s^2}, & 1\leqslant x\leqslant s;\\[2mm] \dfrac{x^2-4}{2s^2}, & s\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ **30.** $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{2s^2\,x}, & 1\leqslant x\leqslant s,\\[2mm] \dfrac{1-s^2}{2s^2\,x}, & s\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

31. $y=\dfrac{1}{a-b}\left((b-x)\displaystyle\int_a^x (s-a)\,f(s)\,ds+(x-a)\int_x^b (b-s)\,f(s)\,ds\right)$.

32. $G(x,s)=\begin{cases}1+\ln s, & 0<x\leqslant s;\\ 1+\ln x, & s\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1)$. **33.** $\lambda_k=-\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$, $y_k=\cos\dfrac{k\pi x}{l}$, $k=0,1,2,\ldots$ **34.** $\lambda_k=-\left(\dfrac{1}{2}-k\right)^2\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2$, $y_k=$ $=\sin\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{l}$, $k=1,2,\ldots$ **35.** $\lambda_k=-(k\pi)^2$, $y_k=\sqrt{x}\sin(k\pi\ln x)$, $k=1,2,\ldots$ **36.** $y_k=-\lambda_k(\cos\lambda_k x+\sin\lambda_k x)$, $\operatorname{tg}\lambda=2\lambda^3+3\lambda$. **37.** $y_k=$ $=\sin\lambda_k x$, $\operatorname{tg}\lambda=\dfrac{2\lambda}{1+2\lambda^2}$.

Розділ 4

1. $x=C_2e^{C_1t^2}$, $y=\dfrac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1t^2}$. **2.** $x=\dfrac{C_1}{C_2}te^{-C_1t^2}$, $y=2C_2l^{C_1t^2}$. **3.** x^2- $-y^2=C_1$, $2x+(x-y)^2=C_2$. **4.** $\dfrac{x}{y}=C_1$, $xy+z^2=C_2$. **5.** $x+y=C_1$, $(x+y+z)(y-3x-z)=C_2$. **6.** $x-y+z=C_1$, $\ln|x|+\dfrac{y}{z}=C_2$. **7.** Так; ні. **8.** Ні, так. **9.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$, $y=C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}$. **10.** $x=C_1e^{-t}+$ $+C_2e^{3t}$, $y=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}$. **11.** $x=(2C_1-C_2+2C_2t)\,e^t$, $y=(C_1+C_2t)\,e^t$. **12.** $x=e^{3t}\,((2C_1+C_2)\sin 2t+(C_1-2C_2)\cos 2t)$, $y=e^{3t}\,(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$.

13. $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$, $y = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}$. 14. $x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t$, $y = C_1 (\cos 3t + 3 \sin 3t) + C_2 (\sin 3t - 3 \cos 3t)$. 15. $x = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$, $y = -(C_1 + C_2 (1 + t)) e^{2t}$. 16. $x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, $y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$. 17. $x = (C_1 + C_2 t) e^t$, $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t) e^t$. 18. $x = (C_1 + 3C_2 t) e^{2t}$, $y = (C_2 - C_1 - 3C_2 t) e^{2t}$. 19. а) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}$, б) $e^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $e\begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \times \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \\ t-1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t+2t^2 \\ 2-2t+t^2 \end{pmatrix}$. 22. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 24. $x = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$. 25. $x = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 26. $x = C_1 e^{at} \times \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{at} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$. 27. $x = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$. 28. $x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2-2t+2 \\ 2t^2-2t \end{pmatrix}$. 29. $x = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}$. 30. $x = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \\ t-1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2-2t \\ t^2-2t+2 \end{pmatrix}$.

31. $x = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$. 32. $x = C_1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \\ -t \end{pmatrix}$. 33. $x = e^{-t} \begin{pmatrix} 5\sin t \\ \cos t - 7\sin t \end{pmatrix}$.

34. $x = \begin{pmatrix} 2 - e^{-t} & 0 & 2(1 - e^{-t}) \\ -4 + 2(e^t + e^{-t}) & e^t & -4(1 - e^{-t}) \\ -1 + e^{-t} & 0 & 2e^{-t} - 1 \end{pmatrix} x_0$. 35. e^2. 40. $e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \times$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$ **42.** $\frac{dx}{dt} = x\cos^2 t - (1 - \cos t \sin t)\, y,\ \frac{dy}{dt} = (1 + \sin t \cos t)\, x + y \sin^2 t$. **44.** $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2}\cos t + 1$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$. **45.** $x = e^{-4t}(C_1 + C_2 t) + \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t}$, $y = -e^{-4t}(C_1 + C_2 + C_2 t) + \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t}$. **46.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \sin t$, $y = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. **47.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$, $y = C_1 e^t - C_2 e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$. **48.** $x = C_1(\cos 2t - \sin 2t) + C_2(\cos 2t + \sin 2t)$, $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}$. **49.** $x = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t$, $y = -C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t + t$, $z = C_2 \sin t + C_3 \cos t + 1$. **50.** $x = (C_1 + C_2 \times (1 + t))\, e^{3t} + \ln t$, $y = -(C_1 + C_2 t)\, e^{2t} + \ln t$. **51.** $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} - e^{2t}$, $y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} - e^{2t}$. **52.** $x = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$.

Розділ 5

1. а) Нестійкий; б) нестійкий. **2.** а) Асимптотично стійкий; б) асимптотично стійкий. **3.** а) Асимптотично стійкий; б) нестійкий. **6.** а) Не випливає; б) не випливає; в) випливає. **7.** Нестійкий. **8.** Стійкий. **9.** Асимптотично стійкий. **10.** Нестійкий. **11.** Асимптотично стійкий. **12.** Нестійкий. **13.** $0 < a < 2$. **14.** Нестійкий. **15.** $(2k\pi;\ 0)$ — стійкі; $(\pi + 2k\pi;\ 0)$ — нестійкі. **16.** $(1;\ 2)$ і $(2;\ 1)$ — нестійкі. **17.** $(2;\ 3)$ — нестійке, $(-1;\ 0)$ — стійке. **18.** $(2k\pi;\ -1)$ — стійкі, $(\pi + 2k\pi;\ -1)$ — нестійкі. **19.** Нестійкий. **20.** $2ab < 1$. **23.** а) Асимптотично стійкий; б) нестійкий. **24.** Так. **25.** Вказівка. Показати, що функція $v(x;\ y) = 2\int\limits_0^x f(\tau)\, d\tau + y^2$ задовольняє умови теореми Барбашина — Красовського. **26.** Точки прямої $x - y = 0$ — нестійкі положення рівноваги. **27.** Точки прямої $x - 2y = 0$ — стійкі положення рівноваги. **28.** Нестійкий вузол. **29.** Стійкий вузол. **30.** Сідло. **31.** Центр. **32.** Стійкий вузол. **33.** Нестійкий фокус. **34.** $(2;\ 4)$ — вузол, $(-1;\ -2)$ — фокус. **35.** $(3;\ 0)$ — фокус; $(1;\ 1)$ — вузол, $(-1;\ 1)$ і $(-3;\ 0)$ — сідла. **36.** $(2;\ 2)$ — вузол, $(-2;\ 0)$ — сідло, $(-1;\ -1)$ — фокус. **37.** $(1;\ 2)$ — вузол, $(2;\ -1)$ — фокус, $(2;\ 1)$ і $(-2;\ 1)$ — сідла. **41.** Вказівка. Див. доведення в [2, § 12]. **42.** Якщо $f(\rho_0) = 0$; при зростанні ρ функція $f(\rho)$ змінює свій знак з плюса на мінус; змінює знак з мінуса на плюс. **43.** а) Має; б) має.

Додаток 1

1. $u = f(x^2 + y^2)$. **2.** $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. **3.** $u = xy + f(x^2 - y^2)$. **4.** $u = \frac{x^2}{3y} +$

$+\frac{1}{xy} f(x;\ y)$. **5.** $u=\frac{x^4}{6}-\frac{x^3}{6}(2z+y)+\frac{x^2yz}{2}+f(y-2x,\ z-x)$. **6.** $u=yf(x^2-y^2)$. **7.** $u=xf(2x-y^2-4u)$. **8.** $u=xe^y-e^{2y}+1$. **9.** $u=(1+x-y)(2-2y+z)$. **10.** $u=x^2-y^2-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)$. **11.** $u=x+y-1+e^{xy}$. **12.** $u=1+\frac{y^2}{3x}$. **13.** $u=xy-1+\frac{1}{x^2+y^2}$. **14.** $u=\frac{(2x+y)^2}{2y}-xy$. **15.** $u=x^4 f\left(\frac{x^2}{y},\ \frac{x^3}{z}\right)$, $u=\frac{yz}{x}$. **16.** $2x^2+z^2=z(x^2+y^2+z^2)$. **17.** Кола, які лежать в площинах, паралельних площині $z=0$, з центрами на осі Oz. **18.** $(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0$; $\frac{z-z_0}{x-x_0}=f\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$. **19.** а) $z=3a^3+ay+b$; б) $z=\sin a\cdot x+ay+b$; в) $z=ax+by+\varphi(a,b)$; г) $z=2\sqrt{xa}-\frac{a}{y}+b$. **20.** а) $-\frac{1}{z}=-\frac{ax+y}{a+1}+b$; б) $\operatorname{arctg} z=-\frac{ax+y}{a+1}+b$; в) $\frac{1}{2a}(az+1)^2=ax+y+b$; г) $z=-\frac{a^2}{3x^3}+a\ln y+b$. **22.** а) $z=y^2-xy$; б) $x^2yz+x^3=C$, $x=0$; в) $z=Cxy^2$; г) $z=0$.

Додаток 2

1. $F(p)=\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$. **2.** $F(p)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}$. **3.** $F(p)=\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{pT}{2}$. **4.** $F(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\omega}$. **5.** $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$. **6.** $f(t)=t\cos\omega t$. **7.** $f(t)=e^{\alpha t}\cos\omega t$. **8.** $f(t)=J_0(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$. **9.** $f(t)=1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$, $\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\tau^2}d\tau$. **10.** $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^k$. **11.** $f(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t-\cos t)$. **12.** $\frac{p^2+p+1}{p}X(p)-1$. **13.** $(p-1)(p^2+2)X(p)-p-1$. **14.** $x=\frac{1}{3}te^t-\frac{7}{9}e^t-\frac{2}{9}e^{-2t}$. **15.** $x=2e^t+2\cos t-5\sin t$. **16.** $x=e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)$. **17.** $x=2+e^{-t}$. **18.** $x=t(1-\sin t)-2\cos t$. **19.** $x=\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^t(3-2t)$. **20.** $x=\frac{8}{3}e^{3t}-2e^{-t}-\frac{2}{3}$, $y=\frac{8}{3}e^{3t}+2e^{-t}+\frac{1}{3}$. **21.** $x=\frac{1}{12}+\frac{4}{15}e^{3t}-\frac{9}{8}e^{2t}+\frac{31}{40}e^{-2t}$, $y=\frac{1}{12}+\frac{1}{15}e^{3t}-\frac{3}{8}e^{2t}-\frac{31}{40}e^{-2t}$. **22.** $x=\frac{1}{5}\left(e^{-3t}-\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)-(3-2e^{-\frac{\pi}{2}})(\cos 2t-\sin 2t)$. **23.** $x=t$.

24. $x = \frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}\,t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}\,t$. 25. $x = CJ_0(t) = C\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(k!)^2}\times$ $\times\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$. 26. $x = \frac{1}{2}(t^2-1)\operatorname{arctg} t - \frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{t}{2}$. 27. $x = e^t - 1 -$ $-(t+\ln 2)(e^t+1) + (e^t+1)\ln(e^t+1)$. 28. $x = \frac{1}{3} - \frac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t +$ $+\frac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t - 2}{\sqrt{3}\sin t + 2}\right| - \frac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t)$. 29. $x = \ln 2\cos t -$ $-\cos t\ln(2+\sin t) - t\sin t + \frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t + 1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$. 30. $x = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + 2\operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4}\right)$. 31. $x = \sin t\operatorname{arctg}\sin t + \cos t\times$ $\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{(\sqrt{2}-\cos t)(3+2\sqrt{2})}\right|$. 32. $x = \chi(t) + (1-\cos(t-3))\,\chi(t-3)$. 33. $x = 0{,}4e^{-t}(2\cos 2t + \sin 2t) + 0{,}2 + 0{,}04\,((2\cos 2(t-1) - 1{,}5\sin 2(t-$ $-1)\,e^{-(t-1)} + 5(t-1) - 2)\,\chi(t-1)$. 34. $x = e^{-2t} + 2e^{-t} - 2\chi(t-1)(e^{-t} -$ $-te^{-2t-1})$.

Додаток 3

1. $f'(x) = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}$. 2. $f'(x) = \int\limits_0^x \frac{\tau d\tau}{(1+x\tau)(1+\tau^2)} + \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$.

3. $f'(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{-x}$. 4. $f'(x) = f(x,-x) + 2\int\limits_0^x f'_u(\tau+x, \tau-x)\,d\tau,\ u = \tau + x$.

5. $J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ & 3 \end{pmatrix}$. 6. $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

7. $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 8. $J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 10. $J(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 12. $J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2,\ h_1 = (5, -3, 2)^{\mathrm{T}},\ h_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}},\ h_3 = (2, 0, -1)$.

14. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $h_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2$ $(\lambda = 1)$, де $e_1 = (2,\ 1,\ 0)^{\text{т}}$, $e_2 = (1,\ 0,\ -1)^{\text{т}}$ $(c_1^2 + c_2^2 > 0)$, $h_2 = (3,\ 5,\ 6)^{\text{т}}$ $(\lambda = -1)$. **15.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $h_1 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^{\text{т}}$ $(\lambda = 1)$, $h_2 = c_1 e_1 + c_2 e_2$ $(\lambda = 0)$, де $e_1 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)^{\text{т}}$, $e_2 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)^{\text{т}}$ $(c_1^2 + c_2^2 > 0)$. **16.** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $h_1 = (1,\ 2,\ 2)^{\text{т}}$ $(\lambda = 3)$, $h_2 = (1,\ 2,\ 1)^{\text{т}}$ $(\lambda = -1)$. **17.** $J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

18. Дана матриця не є матрицею простої структури.

19. $J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **20.** Дана матриця не є матрицею простої структури.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1971.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.
3. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости.— М. : Наука, 1971.
4. *Гудыменко Ф. Я., Павлюк И. А., Волкова В. А.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1972.
5. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.— М. : Высш. шк., 1986.— Ч. 2.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.
7. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск : Наука и техника, 1970.
8. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1974.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1971.
10. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.— М. : Наука, 1980.
11. *Киселев А. И., Краснов М. А., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Высш. шк., 1965.
12. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа.— М. : Наука, 1981.
13. *Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г.* Диференціальні рівняння.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1981.
14. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— Минск : Вышэйш. шк., 1970.
15. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— Минск : Вышэйш. шк., 1974.
16. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1970.
17. *Пономарев К. К.* Составление дифференциальных уравнений.— Минск : Вышэйш. шк., 1973.
18. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1974.
19. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1984.

20. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи.— М. : Высш. шк., 1989.

21. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : ГИТТЛ, 1952.

22. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1980.

23. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1979.

24. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.

25. *Эльсгольд Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— М.: Наука, 1969.

ЗМІСТ