С.А.Кривошея, М.О.Перестюк, В.М.Бурим

# Диференціальні та інтегральні рівняння

ПІДРУЧНИК

С.А. Кривошея, М.О. Перестюк, В.М. Бурим

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*

Підручник
для студентів природничих спеціальностей
вищих навчальних закладів



Київ
"Либідь"
2004

ББК 22.161.6я73
К82



Р е ц е н з е н т и: доктори фізико-математичних наук, професори *О. А. Бойчук* (Інститут математики НАНУ), *Р. І. Петришин* (Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича)

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*
(лист № 1/11—4812 від 18.11.2003 р.)

Редакція літератури з природничих і технічних наук

Редактор *А. С. Мнишенко*



**Кривошея С. А. та ін.**
К82 Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К.: Либідь, 2004. — 408 с.
ISBN 966-06-0348-7.
Викладено основний матеріал із курсу диференціальних та інтегральних рівнянь, який традиційно читається студентам-нематематикам (майбутнім прикладникам). Головну увагу приділено висвітленню ідейного та алгоритмічного аспектів розглядуваних понять, методів і тверджень.
Для студентів природничих спеціальностей вищих навчальних закладів.

**ББК 22.161.6я73**

ISBN 966-06-0348-7



# ВІД АВТОРІВ

***Д**иференціальні та інтегральні рівняння, методи їх дослідження широко використовуються в різноманітних галузях сучасної науки і техніки. Тому теорія диференціальних та інтегральних рівнянь як навчальна дисципліна посідає чільне місце в системі підготовки спеціалістів із механіки, фізики, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, економіки, машинобудування.*

*Пропонований підручник написано на основі курсів лекцій, які автори впродовж багатьох років читали на фізичному, радіофізичному й механіко-математичному факультетах Київського національного університету імені Тараса Шевченка, і є третьою, завершальною книгою навчального комплексу «Диференціальні та інтегральні рівняння». Першими книгами, виданими у видавництві «Либідь» у 2003 р., є підручник «Диференціальні рівняння» (автори: А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк) та навчальний посібник «Диференціальні рівняння в задачах» (автори: А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк).*

*Мета книги – ознайомити студентів з основними поняттями, фактами й методами сучасної теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, допомогти їм засвоїти математичний апарат, необхідний для дослідження диференціальних та інтегральних рівнянь, підготувати їх до самостійної роботи з науковою літературою. Цим зумовлений стиль викладу* *навчального матеріалу в підручнику. Головну увагу приділено висвітленню ідейного та алгоритмічного аспектів розглядуваних понять, методів і тверджень, доведенню основних теорем курсу, а також розбору численних прикладів, які ілюструють теорію.*

*Матеріал, який можна пропустити під час першого читання, набрано дрібним шрифтом.*

*Ми глибоко вдячні рецензентам — професорам О. А. Бойчуку і Р. І. Петришину за корисні критичні зауваження й поради, а також І. Б. Кіфоренко за велику допомогу в оформленні рукопису.*

# ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

| | | |
|---|---|---|
| $\forall$ | — | для кожного, для всіх (квантор загальності) |
| $\exists$ | — | існує (квантор існування) |
| $\Rightarrow$ | — | випливає (символ імплікації) |
| $\Leftrightarrow$ | — | тоді й лише тоді (символ еквівалентності) |
| $\overset{\text{def}}{=}$ | — | дорівнює за означенням |
| $\mathbb{R}$ | — | множина (поле) дійсних чисел, дійсна пряма (вісь) |
| $\mathbb{C}$ | — | множина (поле) комплексних чисел, комплексна площина |
| $\mathbb{Z}$ | — | множина цілих чисел |
| $\mathbb{N}$ | — | множина натуральних чисел |
| $\mathbb{R}^n$ | — | дійсний $n$-вимірний векторний простір |
| $\\|a\\|$ | — | евклідова норма вектора $a$ з $\mathbb{R}^n$ |
| $\\|A\\|$ | — | евклідова норма матриці $A$, додатний корінь із суми квадратів модулів елементів матриці $A$ |
| $\\|a-b\\| = \rho(a, b)$ | — | евклідова метрика в $\mathbb{R}^n$ |
| $\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}$ | — | рівномірна збіжність на відрізку $[a, b]$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\underset{[a,\, b]}{\Rightarrow}$ | — | збіжність у середньому квадратичному на відрізку $[a, b]$ |
| $C_D$ ($C_{[a,\, b]}$) | — | клас усіх дійсних, неперервних на множині $D$ (на відрізку $[a, b]$) функцій |
| $C_{n\,[a,\, b]}$ | — | клас усіх дійсних, неперервних на $[a, b]$ $n$-вимірних вектор-функцій |
| $C_D^r$ | — | клас $r$ разів неперервно диференційовних дійсних функцій на множині $D$ |
| $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ | — | слід матриці $A$ — сума елементів головної діагоналі |
| $\operatorname{rank} A$ | — | ранг матриці $A$ |
| $A^T$ | — | матриця, транспонована щодо матриці $A$ |

Глава 1

# ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 1.1

## Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

***Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку*** називають співвідношення типу

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

де $x \in \mathbb{R}$ — незалежна змінна (аргумент), $y = y(x)$ — невідома скалярна функція аргументу $x$, $F$ — задана скалярна функція змінних $x$, $y$, $y' = \frac{dy}{dx}$, визначена в області* $G \subseteq \mathbb{R}^3$ і залежна від $y'$.

Рівняння (1.1) називають ***скалярним диференціальним рівнянням, не розв'язаним відносно похідної***, або ***неявним диференціальним рівнянням першого порядку.***

Рівняння типу

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

де $f$ — задана скалярна функція, визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^2$, називають ***скалярним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної***, або ***явним диференціальним рівнянням першого порядку.***

* Під *областю* надалі розумітимемо відкриту зв'язну множину у відповідному метричному просторі.

Диференціальне рівняння першого порядку в *симетричній формі* має вигляд

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{1.3}$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — задані скалярні функції.

*Розв'язком диференціального рівняння на інтервалі** $I = (a, b)$ називають диференційовну на $I$ функцію $\varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння на тотожність:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \quad (\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))), \quad x \in I.$$

Рівність $\Phi(x, y) = 0$, де $\Phi$ — неперервно диференційовна функція, називають *інтегралом диференціального рівняння*, якщо вона неявно задає розв'язок $\varphi(x)$ $(x \in I)$ даного рівняння, тобто якщо $\dfrac{d\Phi}{dx} \equiv 0$ $(x \in I)$, де $\dfrac{d\Phi}{dx}$ — повна похідна функції $\Phi$ унаслідок даного диференціального рівняння.

*Зінтегрувати (розв'язати) диференціальне рівняння* — означає знайти всі його розв'язки.

Множину точок $\Gamma_\varphi = \{(x, y) \mid y = \varphi(x),\ x \in I\}$, тобто графік розв'язку $\varphi(x)$, називають *інтегральною кривою диференціального рівняння*. Проекцію інтегральної кривої на вісь ординат (*фазовий простір* рівняння) називають *фазовою траєкторією*, або *кривою*, диференціального рівняння.

Далі розглядатимемо явне диференціальне рівняння (1.2). Задачу відшукання розв'язку $\varphi(x)$ рівняння (1.2), який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, де $x_0$, $y_0$ — задані числа, називають *початковою задачею*, або *задачею Коші, для рівняння (1.2)*. Коротко задачу Коші записують так:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Точку $(x_0, y_0) \in D$ називають *початковою точкою задачі Коші (1.4)*.

* Можна розглядати розв'язок диференціального рівняння на відрізку $I = [a, b]$ або на півінтервалі.





Якщо через кожну точку $(x, y) \in D$ провести пряму, тангенс кута нахилу якої до осі $Ox$ дорівнює $f(x, y)$, то дістанемо деяку сім'ю прямих, котру називають *полем напрямів рівняння (1.2)*. Напрям поля в кожній точці $(x, y) \in D$ зручно зображати за допомогою малого відрізка (лінійного елемента) прямої, яка відповідає цій точці. Центр кожного відрізка вибирається в точці $(x, y)$ (рис. 1.1). Зауважимо, що поле напрямів повністю визначене правою частиною рівняння (1.2) — функцією $f(x, y)$.

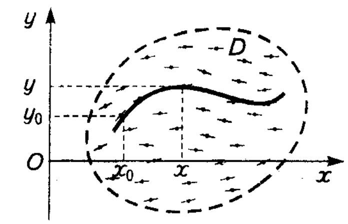


**Рис. 1.1**

Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів, і навпаки, крива, яка в кожній своїй точці дотикається до напряму поля в цій точці, є інтегральною кривою.

З геометричного погляду задача Коші для рівняння (1.2) полягає у відшуканні інтегральної кривої, яка проходить через задану початкову точку $(x_0, y_0) \in D$. Така крива у випадку неперервності функції $f$ завжди існує (див. п. 2.4).

Інтегральну криву можна будувати наближено, використовуючи поле напрямів, за допомогою ***методу ізоклін***. *Ізокліною* називають криву, в кожній точці якої напрям поля однаковий. Усі інтегральні криві, що перетинають дану ізокліну, в точках перетину нахилені до осі $Ox$ під одним кутом. Рівняння ізоклін має вигляд $f(x, y) = k$, де $k$ — дійсний параметр. Побудувавши достатню кількість ізоклін для різних значень параметра $k$, можна дістати досить точне уявлення про форму й поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння.

Розглянемо приклади.

**❑ Приклад 1.1**

*Перевіримо, чи є співвідношення* $y(x + \ln x + 1) - 1 = 0$ *інтегралом диференціального рівняння* $xy' + y = y^2 \ln x$.

Здиференціювавши дане співвідношення, дістанемо

$$(x + \ln x + 1)y' + y\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

З диференціального рівняння маємо

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 \ln x - y).$$

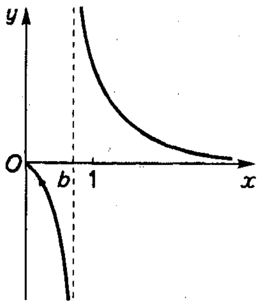


Рис. 1.2

Тому

$$(x+\ln x+1)y'+y\left(1+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}(y^2\ln x-y)(x+\ln x+1)+y\left(1+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=y\frac{\ln x}{x}((x+\ln x+1)y-1)\equiv 0.$$

Даний інтеграл визначає дві неперервно диференційовні функції $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, кожна з яких виражається формулою $y=\dfrac{1}{x+\ln x+1}$ і є розв'язком диференціального рівняння на проміжках $(0,\ b)$ і $(b,\ +\infty)$ відповідно, де $b$ — корінь рівняння $x+\ln x+1=0$. Побудувавши відповідні інтегральні криві (рис. 1.2), бачимо, що фазовою траєкторією розв'язку $\varphi_1(x)$ є півпряма $x=0$, $y<0$, а фазовою траєкторією розв'язку $\varphi_2(x)$ — півпряма $x=0$, $y>0$.

### ❑ Приклад 1.2

*Побудуємо інтегральні криві таких рівнянь:*

$$\text{а) } y'=\frac{|xy|}{xy};\qquad \text{б) } y'=-\frac{x+|x|}{y+|y|}.$$

а) Дане рівняння визначене на всій площині $xOy$, крім точок на прямих $x=0$, $y=0$. В області визначення це рівняння можна записати так:

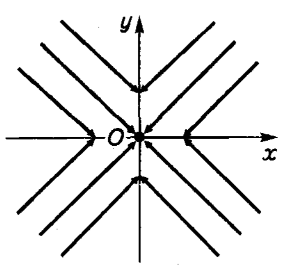


Рис. 1.3

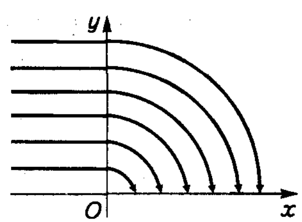


Рис. 1.4





$$y'=\begin{cases}1, & \text{якщо } xy>0,\\ -1, & \text{якщо } xy<0.\end{cases}$$

Тому в I і III квадрантах координатної площини інтегральними кривими є графіки функцій $y=x+c$, а в II і IV квадрантах — графіки функцій $y=-x+c$ (рис. 1.3).

б) Рівняння визначене у верхній півплощині $y>0$ координатної площини. В цій області рівняння запишемо так:

$$y'=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ -\dfrac{x}{y}, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

Тому у II квадранті $y=c$. У I квадранті маємо $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$, $x\,dx+y\,dy=0$, або $\dfrac{1}{2}d(x^2+y^2)=0$, звідки $x^2+y^2=c^2$. Інтегральні криві цього рівняння зображено на рис. 1.4.

### ❑ Приклад 1.3

*За допомогою методу ізоклін наближено побудуємо інтегральні криві рівняння $y'=2x(1-y)$.*

Сім'я ізоклін даного рівняння визначена рівнянням $2x(1-y)=k$, де $k\in\mathbb{R}$. При $k=0$ це рівняння задає дві прямі $x=0$ і $y=1$, а при $k\ne 0$ — сім'ю гіпербол $y=1-\dfrac{k}{2x}$.

Пряма $y=1$ є інтегральною кривою, оскільки функція $y=1$ є розв'язком даного диференціального рівняння. Ізокліну $x=0$ (вісь ординат) інтегральні криві перетинають під прямим кутом (дотичні до них у точках осі ординат паралельні осі абсцис). Це означає, що точки ізокліни $x=0$ є точками екстремуму розв'язків.

Щоб з'ясувати характер екстремальних точок, обчислимо другу похідну функції $y=y(x)$:

$$y''=2(1-y)-2x(-y')=2(1-y)-2x\cdot 2x(1-y)=2(1-y)(1-2x^2).$$

Отже, точки осі ординат, для яких $y>1$, є точками максимуму ($y''<0$), а точки осі ординат, для яких $y<1$, — точками мінімуму розв'язків ($y''>0$). Точки перегину інтегральних кривих належать прямим

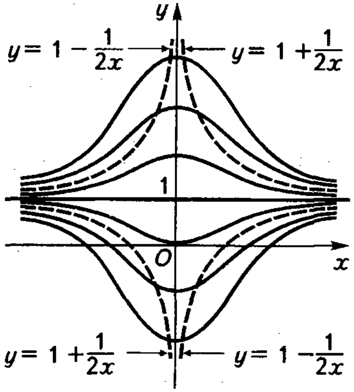


Рис. 1.5

$x=\pm 1/\sqrt{2}$. Прямі $x=0$ і $y=1$ (ізокліни при $k=0$) поділяють координатну площину на чотири частини, в кожній з яких похідна $y'$ зберігає знак. Отже, перетинаючи пряму $x=0$, інтегральні криві переходять з області зростання розв'язку $y=y(x)$ в область спадання, якщо $y>1$, і з області спадання розв'язку в область зростання, якщо $y<1$.

Розглянемо ще дві ізокліни: $y=1-\dfrac{1}{2x}$ (при $k=1$) і $y=1+\dfrac{1}{2x}$ (при $k=-1$). Дотичні, проведені до інтегральних кривих у точках перетину з цими ізоклінами, утворюють з віссю абсцис кути 45 і 135° відповідно. Цієї інформації достатньо для наближеної побудови інтегральних кривих даного диференціального рівняння (рис. 1.5).

*Загальним розв'язком рівняння (1.2) в області* $D_0 \subseteq D$ називають однопараметричну сім'ю функцій

$$y=\varphi(x,c), \tag{1.5}$$

залежну від одного довільного параметра (довільної сталої) $c$ за умови, що кожна функція цієї сім'ї є розв'язком рівняння (1.2) на деякому інтервалі $I$ і для будь-якої початкової точки $(x_0, y_0) \in D_0$ однопараметрична сім'я (1.5) містить єдиний розв'язок $\varphi(x_0, c_0)$, який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0, c_0)=y_0$.

Якщо загальний розв'язок (1.5) заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x,y,c)=0, \tag{1.6}$$

де $\Phi$ — диференційовна функція своїх змінних, то співвідношення (1.6) називають *загальним інтегралом рівняння (1.2) в області* $D_0$. Розв'язок, який можна дістати із загального розв'язку при конкретному числовому значенні сталої $c$, називають *частинним розв'язком рівняння (1.2)*.





**❑ Приклад 1.4**

*Покажемо, що загальним розв'язком рівняння* $yy'=\sqrt{1+y^2}$ *в області* $y>0$ *є функція* $y=\sqrt{(x+c)^2-1}$ $(x\in I=(1-c,+\infty))$.

Підставивши дану функцію в рівняння, дістанемо рівність $x+c=\sqrt{(x+c)^2}$, яка перетворюється на тотожність при $x+c\ge 0$ і, отже, справджується для всіх $x\in I$. Крім того, для будь-якої початкової точки $(x_0, y_0)$ $(y_0>0)$ рівняння $y_0=\sqrt{(x_0+c)^2-1}$ має єдиний розв'язок $c_0=\sqrt{1+y_0^2}-x_0$. Аналогічно можна показати, що функція $y=-\sqrt{(x+c)^2-1}$ $(x\in I)$ є загальним розв'язком даного рівняння в області $y<0$. Інтегральні криві даного рівняння зображено на рис. 1.6.

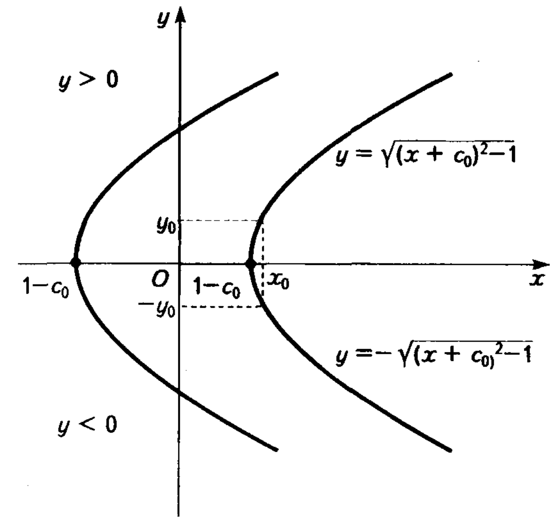


Рис. 1.6

Початкову точку $(x_0, y_0)\in D$ називають *точкою єдиності розв'язку задачі Коші (1.4)*, якщо через неї проходить лише одна інтегральна крива рівняння (1.2). Якщо через точку $(x_0, y_0)$ проходить більше ніж одна інтегральна крива, то таку точку називають *точкою неєдиності розв'язку задачі Коші*. Множину всіх точок неєдиності розв'язку задачі Коші називають *особливою множиною*. Якщо особлива множина містить інтегральну криву, то цю криву називають *особливою інтегральною кривою*, а розв'язок $\xi(x)$ $(x\in I)$, який відповідає особливій інтегральній кривій, — *особливим розв'язком диференціального рівняння (1.2).* Для особливого розв'язку $\xi(x)$ ($x \in I$) задача Коші з початковою умовою $y(x_0) = \xi(x_0)$ $\forall x_0 \in I$ має більше ніж один розв'язок.

**❑ Приклад 1.5**

Легко перевірити, що загальним розв'язком рівняння $y' = 3y^{2/3}$ в області $D = \mathbb{R}^2$ є сім'я функцій $y = (x - c)^3$ ($x \in \mathbb{R}$). Крім того, дане рівняння має очевидний розв'язок $y = \xi(x) \equiv 0$ ($x \in \mathbb{R}$), який не міститься в загальному розв'язку. Оскільки задача Коші для даного рівняння з початковою умовою $y(x_0) = \xi(x_0) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) має, наприклад, розв'язки

$$y = (x - x_0)^3 \ \ (x \in \mathbb{R}), \ \ y = \xi(x) \equiv 0 \ \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$y = \left[\begin{array}{ll} 0 & \text{при } -\infty < x \le c_0, \\ (x - c_0)^3 & \text{при } x > c_0 \ge x_0, \end{array}\right. \qquad y = \left[\begin{array}{ll} (x - c_0)^3 & \text{при } -\infty < x \le c_0 \le x_0, \\ 0 & \text{при } x > c_0, \end{array}\right.$$

то розв'язок $\xi(x) \equiv 0$ є особливим (рис. 1.7).

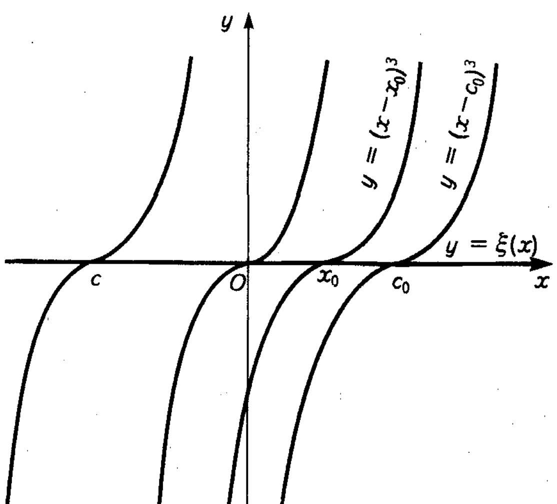


Рис. 1.7





## 1.2

## Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

*Звичайним диференціальним рівнянням m-го порядку* називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0, \tag{1.7}$$

де $x \in \mathbb{R}$ — незалежна змінна, $y = y(x)$ — невідома функція, $F$ — задана скалярна функція, визначена в області $G \subseteq \mathbb{R}^{m+2}$ ($m \ge 1$) і залежна від $y^{(m)}$.

Рівняння (1.7) називають *скалярним диференціальним рівнянням m-го порядку, не розв'язаним відносно старшої похідної*, або *неявним скалярним диференціальним рівнянням m-го порядку.*

Рівняння вигляду

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \tag{1.8}$$

де $f$ — задана скалярна функція, визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ ($m \ge 1$), називають *скалярним диференціальним рівнянням m-го порядку, розв'язаним відносно старшої похідної*, або *явним скалярним диференціальним рівнянням m-го порядку.*

*Розв'язком диференціальних рівнянь (1.7), (1.8) на інтервалі I* називають $m$ разів диференційовну на $I$ функцію $\varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння на тотожність:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)) \equiv 0$$
$$(\varphi^{(m)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(m-1)}(x))), \ \ x \in I.$$

Далі розглядатимемо рівняння (1.8).

Задачу відшукання розв'язку $\varphi(x)$ рівняння (1.8), який задовольняє початкові умови $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ..., $\varphi^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}$, де $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)}$ — задані числа, називають *початковою задачею*, або *задачею Коші, для рівняння (1.8)*. Коротко її записують так:

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Точку $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(m-1)}) \in D$ називають *початковою точкою задачі Коші (1.9)*.

*Загальним розв'язком рівняння (1.8) в області* $D_0 \subseteq D$ називають $m$-параметричну сім'ю функцій

$$y = \varphi(x, c_1, ..., c_m), \tag{1.10}$$

залежну від $m$ довільних параметрів (довільних сталих) $c_1, ..., c_m$, за умови, що кожна функція цієї сім'ї є розв'язком рівняння (1.8) на деякому інтервалі $I$ і для будь-якої початкової точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(m-1)}) \in D_0$ $m$-параметрична сім'я (1.10) містить єдиний розв'язок $\varphi(x, c_{10}, ..., c_{m0})$, котрий задовольняє початкові умови задачі Коші (1.9).

Якщо загальний розв'язок (1.10) заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x, y, c_1, ..., c_m) = 0, \tag{1.11}$$

то співвідношення (1.11) називають *загальним інтегралом рівняння (1.8) в області* $D_0$. Розв'язок, який можна дістати із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих $c_1, ..., c_m$, називають *частинним розв'язком рівняння (1.8)*.

Співвідношення вигляду

$$\Psi(x, y, y', ..., y^{(m-k)}, c_1, ..., c_k) = 0, \tag{1.12}$$

де $y = y(x)$ — розв'язок рівняння (1.8), добуте внаслідок інтегрування цього рівняння, називають *проміжним інтегралом k-го порядку рівняння (1.8)*. Проміжний інтеграл

$$\Psi(x, y, y', ..., y^{(m-1)}, c_1) = 0 \tag{1.13}$$

називають *першим інтегралом рівняння (1.8)*.

❑ **Приклад 1.6**

*Покажемо, що функція* $y = \varphi(x, c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2x + c_1)^{3/2} + c_2$ *є загальним розв'язком рівняння* $y'y'' = 1$ *в області* $D_0 = \{(x, y, y') \mid y' > 0\}$.





Знайшовши $y' = (2x + c_1)^{1/2}$ і $y'' = (2x + c_1)^{-1/2}$, переконуємося в тому, що $y'y'' = 1 \ \forall x \in I = \left(-\frac{c_1}{2}, +\infty\right)$ і будь-яких $c_1, c_2$. Для довільної початкової точки $(x_0, y_0, y_0') \in D_0$ $(x_0 \in I)$ складаємо систему рівнянь

$$\varphi(x_0, c_1, c_2) \equiv \frac{1}{3}(2x_0 + c_1)^{3/2} + c_2 = y_0,$$
$$\varphi'(x_0, c_1, c_2) \equiv (2x_0 + c_1)^{1/2} = y_0',$$

з якої сталі $c_1$ і $c_2$ визначаються однозначно: $c_1 = y_0'^2 - 2x_0$, $c_2 = y_0 - \frac{1}{3}y_0'^3$.

❑ **Приклад 1.7**

*Покажемо, що функція* $y = \varphi(x, c_1, c_2) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ *є загальним розв'язком рівняння* $y'' + \omega^2 y = 0$ $(\omega = \text{const} \neq 0)$ *в області* $D = \mathbb{R}^3$.

Знайшовши

$$y' = \omega(c_2 \cos \omega x - c_1 \sin \omega x), \quad y'' = -\omega^2(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x),$$

переконуємося в тому, що $y'' = -\omega^2 y \ \forall x \in \mathbb{R}$ і будь-яких $c_1, c_2$. Для довільної початкової точки $(x_0, y_0, y_0') \in D$ складаємо систему рівнянь

$$\varphi(x_0, c_1, c_2) \equiv c_1 \cos \omega x_0 + c_2 \sin \omega x_0 = y_0,$$
$$\varphi'(x_0, c_1, c_2) \equiv -c_1\omega \sin \omega x_0 + \omega c_2 \cos \omega x_0 = y_0'.$$

Оскільки головний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \omega x_0 & \sin \omega x_0 \\ -\omega \sin \omega x_0 & \omega \cos \omega x_0 \end{vmatrix} = \omega \neq 0,$$

то система має єдиний розв'язок і, отже, функція $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ є загальним розв'язком даного рівняння в області $D = \mathbb{R}^3$.

## 1.3

# Системи звичайних диференціальних рівнянь

*Системою звичайних диференціальних рівнянь m-го порядку* називають систему вигляду

$$F(x, y, y', ..., y^{(m)}) = 0, \tag{1.14}$$

де $x \in \mathbb{R}$ — незалежна змінна, $y = y(x)$ — невідома векторна функція: $y = (y_1, ..., y_n)^T$, $y^{(i)} = \left(\frac{d^i y_1}{dx^i}, ..., \frac{d^i y_n}{dx^i}\right)^T$ $(i = 1, ..., m)$; $F = (F_1, ..., F_n)^T$ — задана векторна функція, визначена в області $G \subseteq \mathbb{R}^{(m+1)n+1}$ $(m \geq 1)$ і залежна від $y^{(m)}$. Число $n$ називають *вимірністю системи*, а число $m$ — її *порядком*.

Систему (1.14) можна розглядати як *неявне векторне диференціальне рівняння m-го порядку вимірності n*.

*Явне векторне диференціальне рівняння m-го порядку вимірності n* має вигляд

$$y^{(m)} = g(x, y, y', ..., y^{(m-1)}), \tag{1.15}$$

де $g = (g_1, ..., g_n)^T$ — задана векторна функція, визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^{mn+1}$ $(m \geq 1)$.

Розв'язок $\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))^T$ систем (1.14), (1.15) на інтервалі $I$ визначається аналогічно розв'язку рівнянь (1.7), (1.8), які є окремими випадками систем (1.14), (1.15) при $n = 1$.

Якщо ввести до розгляду *фазовий вектор* системи (1.15) $z = (z_1, z_2, ..., z_m)^T = (y, y', ..., y^{(m-1)})^T \in \mathbb{R}^{mn}$ $(z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., m)$, то системі (1.15) можна поставити у відповідність еквівалентну їй систему $mn$ рівнянь першого порядку (явне векторне диференціальне рівняння першого порядку вимірності $mn$):





$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= z_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ z_{m-1}' &= z_m, \\ z_m' &= g(x, z). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Еквівалентність систем (1.15), (1.16) слід розуміти так: якщо $y = \varphi(x)$ — розв'язок системи (1.15), то векторна функція $z = (\varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(m-1)}(x))^T$ є розв'язком системи (1.16). Навпаки, якщо $z = (z_1, ..., z_m)^T$ — розв'язок системи (1.16), то функція $y = z_1(x)$ — розв'язок системи (1.15).

Ураховуючи ці міркування, далі розглядатимемо явне векторне диференціальне рівняння першого порядку вимірності $n$ — систему звичайних диференціальних рівнянь, записану в *нормальній формі Коші (нормальну систему)*, яка має вигляд

$$y' = f(x, y), \tag{1.17}$$

де $x \in \mathbb{R}$ — незалежна змінна, $f$ — задана векторна функція $f = (f_1, ..., f_n)^T$, визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $y = (y_1, ..., y_n)^T$ — шукана векторна функція, $y' = (y_1', ..., y_n')^T$.

*Інтегральною кривою системи (1.17)* називають множину $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тобто графік розв'язку $\varphi(x)$ $(x \in I)$ цієї системи. Проекцію інтегральної кривої на фазовий простір $\mathbb{R}^n$ системи (1.17) називають *фазовою траєкторією системи (1.17)*.

Задачу відшукання розв'язку $\varphi(x)$ системи (1.17), який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, де $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, називають *початковою задачею*, або *задачею Коші, для системи (1.17)*. Точку $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ називають *початковою точкою задачі Коші*. Як і в скалярному випадку, геометричний зміст задачі Коші полягає у відшуканні тієї інтегральної кривої, яка проходить через задану початкову точку $(x_0, y_0) \in D$.

*Загальним розв'язком системи (1.17) в області* $D_0 \subseteq D$ називають $n$-параметричну сім'ю векторних функцій

$$y = \varphi(x, c), \tag{1.18}$$

залежну від $n$ довільних параметрів (вектора довільних сталих $c = (c_1, ..., c_n)^T \in \mathbb{R}^n$), за умови, що кожна функція цієї сім'ї є розв'язком системи (1.17) на деякому інтервалі $I$ і що для будь-якої початкової точки $(x_0, y_0) \in D_0$ $n$-параметрична сім'я (1.18) містить єдиний розв'язок $\varphi(x, c_0)$, котрий задовольняє початкову умову $\varphi(x_0, c_0) = y_0$.

Рівність вигляду $\Phi(x, y) \equiv \Phi(x, y_1, \ldots, y_n) = c = \text{const}$, де $\Phi$ — неперервно диференційовна функція в області $D_0$, повна похідна якої внаслідок системи (1.17) тотожно дорівнює нулю:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial y_k} f_k(x, y) \equiv 0 \quad ((x, y) \in D_0),$$

називають *першим інтегралом системи (1.17) в області* $D_0$. Саму функцію $\Phi$ називають *інтегралом* системи (1.17)*.

Сукупність $n$ перших інтегралів

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = c_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.19}$$

[у векторній формі $\bar{\Phi}(x, y) = c$, де $\bar{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)^T$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$] системи (1.17) називають *загальним інтегралом системи (1.17) в області* $D_0$, якщо інтеграли $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ є функціонально незалежними в області $D_0$, тобто якщо виконується умова

$$\det\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} \neq 0 \quad ((x, y) \in D_0), \tag{1.20}$$

де $\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\Phi_n}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial\Phi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$ — матриця Остроградського—Якобі системи функцій $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. У цьому випадку кажуть, що (1.19) є *системою $n$ незалежних перших інтегралів*.

* З означення випливає, що інтеграл системи (1.17) — це функція, яка не є тотожно сталою, але набуває сталих значень уздовж інтегральних кривих системи.





Покажемо, що в разі виконання умови (1.20) система рівнянь (1.19) неявно задає загальний розв'язок системи (1.17) в області $D_0$. Нехай, наприклад, $\det\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} \neq 0$ $((x, y) \in D_0)$. Тоді з теореми про неявну функцію випливає, що система (1.19) в околі кожної точки $(x_0, y_0, c_0)$ $((x_0, y_0) \in D_0,\ c_0 = \bar{\Phi}(x_0, y_0))$ визначає диференційовну (в деякому околі $I$ точки $x_0$) функцію $y = \varphi(x, c)$, для якої $\varphi(x_0, c_0) = y_0$ і $\varphi' = -\left(\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\right)^{-1}\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}$ $(x \in I)$. Тепер, використовуючи означення першого інтеграла, з (1.19) маємо: $\dfrac{d\bar{\Phi}}{dx} = \dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} + \dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} f(x, \varphi) \equiv 0$ $(x \in I)$, звідки $f(x, \varphi) = -\left(\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\right)^{-1}\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}$. Отже, $\varphi'(x, c) = f(x, \varphi(x, c))$ і функція $y = \varphi(x, c)$ є загальним розв'язком системи (1.17) в області $D_0$.

Розглянемо приклади.

**❑ Приклад 1.8**

*Перевіримо, чи є функції* $\Phi \equiv x^2 + 2y_1y_2$, $\Psi = y_1 - xy_2^2$ *інтегралами системи диференціальних рівнянь* $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1^{-1}(y_2^2 - x)$ *в області* $D_0$: $y_1 \neq 0$.

Знаходимо повні похідні функцій $\Phi$ і $\Psi$ унаслідок системи:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2x + 2y_2(-y_2) + 2y_1y_1^{-1}(y_2^2 - x) \equiv 0,$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = -y_2^2 + (-y_2) - 2xy_2y_1^{-1}(y_2^2 - x) \neq 0.$$

Отже, інтегралом даної системи є функція $\Phi$.

**❑ Приклад 1.9**

*Перевіримо, чи утворюють рівності* $\Phi_1 \equiv y_1^2 - y_2^2 = c_1$, $\Phi_2 \equiv (y_1 - y_2)^2 + 2x = c_2$ *загальний інтеграл системи* $y_1' = \dfrac{y_2}{(y_1 - y_2)^2}$, $y_2' = \dfrac{y_1}{(y_1 - y_2)^2}$ *в області* $D_0$: $y_1 \neq y_2$.

Знаходимо повні похідні функцій $\Phi_1$ і $\Phi_2$ унаслідок даної системи:

$$\frac{d\Phi_1}{dx} = \frac{2y_1y_2}{(y_1-y_2)^2} - \frac{2y_2y_1}{(y_1-y_2)^2} \equiv 0,$$
$$(y_1 \neq y_2)$$
$$\frac{d\Phi_2}{dx} = 2 + \frac{2(y_1-y_2)(y_2-y_1)}{(y_1-y_2)^2} \equiv 0.$$

Щоб довести незалежність інтегралів $\Phi_1$ і $\Phi_2$, складемо матрицю Остроградського—Якобі:

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} 2y_1 & -2y_2 \\ 2(y_1-y_2) & -2(y_1-y_2) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\operatorname{rank}\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = 2$, то рівності $\Phi_1 = c_1$, $\Phi_2 = c_2$ утворюють загальний інтеграл даної системи в області $D_0$. Знайдемо загальний розв'язок цієї системи. Розв'язуючи систему рівнянь $y_1^2 - y_2^2 = c_1$, $(y_1-y_2)^2 = c_2 - 2x$ відносно $y_1$, $y_2$, дістанемо $\left(x \in I = \left(-\infty, \frac{c_2}{2}\right)\right)$

$$y_1 = \frac{-c_1 - c_2 + 2x}{2\sqrt{c_2-2x}}, \quad y_2 = \frac{c_2 - c_1 - 2x}{2\sqrt{c_2-2x}}$$

в області $D_1$: $y_1 < y_2$,

$$y_1 = \frac{c_1 + c_2 - 2x}{2\sqrt{c_2-2x}}, \quad y_2 = \frac{c_1 - c_2 + 2x}{2\sqrt{c_2-2x}}$$

в області $D_2$: $y_1 > y_2$.

У наступній главі розглянемо типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах або допускають зниження порядку. Символом $\int f(x)\,dx$ у теорії диференціальних рівнянь зазвичай позначають якунебудь первісну (квадратуру) функції $f(x)$. Якщо задачу відшукання всіх розв'язків диференціального рівняння можна звести до обчислення скінченного числа квадратур і скінченного числа алгебричних операцій, то кажуть, що дане *рівняння інтегрується в квадратурах*. Так, наприклад, рівняння $y'' = 2xe^{x^2}$ допускає зниження порядку: $u' = 2xe^{x^2}$ і інтегрується в квадратурах, оскільки $u = y' = e^{x^2} + c_1$, $y = \int e^{x^2}dx + c_1x + c_2$, де $c_1$, $c_2$ — довільні сталі.

# Глава 2

# МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ОКРЕМИХ ТИПІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 2.1

## Рівняння з відокремлюваними змінними та однорідні рівняння першого порядку

Рівняння типу

$$y' = f(x)g(y), \tag{2.1}$$

де $f(x)$, $g(y)$ — неперервні фукнції ($x \in (a, b)$, $y \in (\alpha, \beta)$), називають *рівнянням із відокремлюваними змінними*.

Якщо $g(c_0) = 0$, то стала функція $y = c_0$ є розв'язком рівняння (2.1). Нехай $g(y) \neq 0$ ($y \in (c, d)$). Відокремлюючи змінні в рівнянні (2.1), маємо

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx,$$

$$\Phi(x, y) \equiv \int\frac{dy}{g(y)} - \int f(x)\,dx = c. \tag{2.2}$$

Покажемо, що рівність (2.2) є загальним інтегралом рівняння (2.1) в області $D_0 = \{(x, y) \mid x \in (a, b), y \in (c, d)\}$. Справді, знайшовши повну похідну від (2.2) внаслідок рівняння (2.1), дістанемо тотожність

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} - f(x) = \frac{1}{g(y)} f(x)g(y) - f(x) \equiv 0.$$

Оскільки $\Phi'_y = \dfrac{1}{g(y)} \neq 0$, то за теоремою про неявну функцію рівняння (2.2) в околі точки $(x_0, y_0, c_0)$ $(x_0 \in (a, b), y_0 \in (c, d), c_0 = \Phi(x_0, y_0))$ визначає єдину функцію $y = \varphi(x, c_0)$, яка задовольняє початкову умову $\varphi(x_0, c_0) = y_0$ і для якої $y' = -\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y} = -\dfrac{-f(x)}{1/g(y)} = f(x)g(y)$.

Рівність $\displaystyle\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = 0$ визначає розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2.1) з початковою умовою $\varphi(x_0) = y_0$ $(y_0 \in (c, d))$.

❑ **Приклад 2.1**

Рівняння з відокремлюваними змінними $y' = 2\sqrt[3]{xy}$ має очевидний розв'язок $y = 0$. Відокремлюючи змінні при $y \neq 0$, дістанемо

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = 2\sqrt[3]{x}\,dx, \quad y^{2/3} - x^{4/3} = c.$$

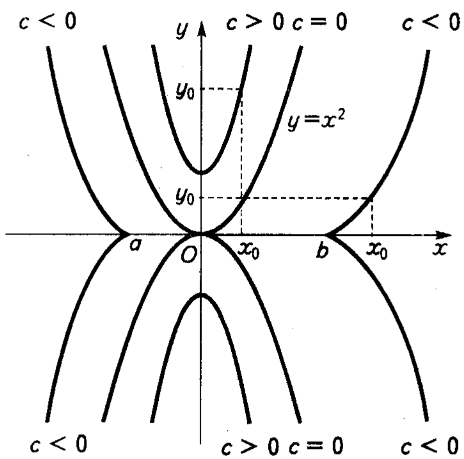


Рис. 2.1

Звідси знаходимо загальні розв'язки даного рівняння:

$$y = (x^{4/3} + c)^{3/2}$$

в області $y > 0$;

$$y = -(x^{4/3} + c)^{3/2}$$

в області $y < 0$.

Інтегральні криві даного рівняння зображено на рис. 2.1.

Зауважимо, що дане рівняння має розв'язки, які не є частинними, наприклад: $y = 0$;





$$y = \begin{cases} (x^{4/3} - a^{4/3})^{3/2} & \text{при } x < a, \\ 0 & \text{при } x \geq a; \end{cases} \quad y = \begin{cases} 0 & \text{при } x < b, \\ (x^{4/3} - b^{4/3}) & \text{при } x \geq b; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \pm(x^{4/3} - a^{4/3}) & \text{при } x < a, \\ 0 & \text{при } a \leq x \leq b, \\ \mp(x^{4/3} - b^{4/3}) & \text{при } x > b. \end{cases}$$

❑ **Приклад 2.2**

Відокремлюючи змінні в рівнянні $y' = xy(y+2)$ при $y \neq 0$, $y \neq -2$, матимемо

$$\frac{dy}{y(y+2)} - x\,dx = 0, \quad \ln|y| - \ln|y+2| - x^2 = \ln c_1,$$

$$\frac{y}{y+2} = ce^{x^2}, \quad y = \frac{2ce^{x^2}}{1 - ce^{x^2}}.$$

Розв'язок $y = 0$ можна дістати при $c = 0$, а розв'язок $y = -2$ — за допомогою граничного переходу при $c \to \infty$.

❑ **Приклад 2.3**

*Розв'яжемо задачу Коші для рівняння $y' = y(y-1)$ з такими початковими умовами:*

а) $y(0) = -1$; б) $y(0) = \dfrac{1}{2}$; в) $y(0) = 2$.

Відокремлюючи змінні при $y \neq 0$, $y \neq 1$ ($y = 0$, $y = 1$ — очевидні розв'язки), маємо:

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right)dy = dx, \quad \frac{y-1}{y} = ce^x,$$

$$y = \frac{1}{1 - ce^x}.$$

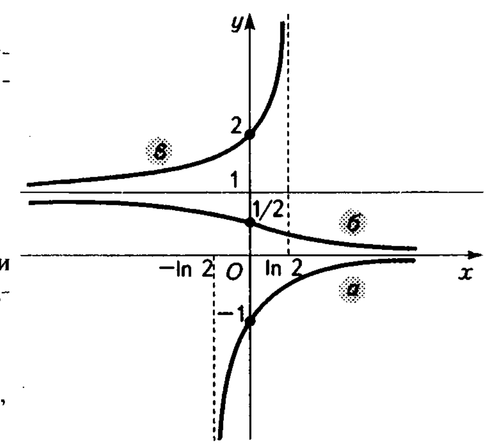


Рис. 2.2

Розв'язок $y = 1$ можна дістати при $c = 0$, а розв'язок $y = 0$ — граничним переходом при $c \to \infty$.

Ураховуючи початкові умови, матимемо:

$$\text{а) } c = 2,\ y = \frac{1}{1-2e^x};\quad \text{б) } c = 1,\ y = \frac{1}{1+e^x};$$

$$\text{в) } c = \frac{1}{2},\ y = \frac{2}{2-e^x}.$$

Відповідні інтегральні криві зображено на рис. 2.2.

◆ **Зауваження 2.1**

Рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$ ($a$, $b$, $c$ = const) заміною невідомої функції $z = ax + by + c$ зводиться до рівняння $z' = a + bf(z)$ із відокремлюваними змінними.

◆ **Зауваження 2.2**

Рівняння з відокремлюваними змінними в симетричній формі має вигляд

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0,$$

де $M_1$, $M_2$, $N_1$, $N_2$ — неперервні функції.

Рівняння типу

$$y' = f(y/x) \tag{2.3}$$

називають *однорідним рівнянням першого порядку*. Однорідне рівняння в симетричній формі записується так:

$$A(x,\ y)\,dx + B(x,\ y)\,dy = 0, \tag{2.4}$$

де $A(x, y)$, $B(x, y)$ — однорідні функції одного степеня.

Функцію $F(x, y)$ називають *однорідною степеня k*, якщо для всіх $\lambda > 0$ виконується рівність $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y)$. Так, наприклад, функція $F(x, y) = f(y/x)$ у рівнянні (2.3) є однорідною степеня 0, а функція $F(x, y) = x^2 - 3xy$ — однорідною степеня 2. Очевидно, частка двох однорідних функцій одного степеня є однорідною функцією степеня 0.





Заміною невідомої функції $y = zx$ рівняння (2.3) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними $z'x = f(z) - z$.

❑ **Приклад 2.4**

*Розв'яжемо рівняння* $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0.$

Функції $A(x, y) = x - y\cos\dfrac{y}{x}$, $B(x, y) = x\cos\dfrac{y}{x}$ є однорідними степеня 1. Виконавши заміну $y = zx$, дістанемо:

$$(x - zx\cos z)\,dx + x\cos z(x\,dz + z\,dx) = 0,$$

$$dx + x\cos z\,dz = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \cos z\,dz = 0,\ \ \ln|x| + \sin\frac{y}{x} = c.$$

Рівняння типу

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2.5}$$

можна звести до однорідного за допомогою заміни $x = x_0 + t$, $y = y_0 + z$, де $x_0$, $y_0$ — координати точки перетину прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Якщо ж ці прямі паралельні, то $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ і рівняння (2.5) можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $a_1x + b_1y + c_1 = z$.

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають *квазіоднорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є квазіоднорідною степеня $\sigma - 1$ із вагою $\sigma$ відносно $y$, тобто якщо виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda^\sigma y) = \lambda^{\sigma-1} f(x,\ y)\ \ (\sigma \in \mathbb{R},\ \lambda > 0).$$

Заміною $y = x^\sigma u$ при $x > 0$ ($y = (-x)^\sigma u$ при $x < 0$) квазіоднорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, маємо ($x > 0$): $x^\sigma u' + \sigma x^{\sigma-1}u = f(x, x^\sigma u)$. Врахувавши, що $f(x, x^\sigma u) = f(x \cdot 1, x^\sigma u) = x^{\sigma-1}f(1, u)$, дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$xu' + \sigma u = f(1,\ u).$$

❑ **Приклад 2.5**

*Розглянемо рівняння* $y' = -\dfrac{2}{x^2} + y^2$.

Маємо $f(\lambda x, \lambda^\sigma y) = -\lambda^{-2}\dfrac{2}{x^2} + \lambda^{2\sigma}y^2$. Функція $f$ є квазіоднорідною степеня $-2$ з вагою $\sigma = -1$ відносно $y$. Заміна $y = x^{-1}u$ зводить дане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{1}{x}u' - \frac{u}{x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{u}{x^2}, \quad x\frac{du}{dx} = u^2 + u - 2,$$

очевидними розв'язками якого є $u = 1$, $u = -2$. Відокремлюючи змінні при $u \neq 1$, $u \neq -2$, дістанемо

$$\frac{du}{(u-1)(u+2)} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{u-1}{u+2} = cx.$$

Виразивши $u$ через $x$ і $y$, матимемо $y = \dfrac{1+2cx}{x(1-cx)}$. Розв'язки $y = \dfrac{1}{x}$ $(u = 1)$ і $y = -\dfrac{2}{x}$ можна дістати при $c = 0$ і $c \to \infty$ відповідно.

## 2.2 Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння типу

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{2.6}$$

де $a(x)$, $b(x)$ — неперервні функції ($x \in (a, b)$), називають *лінійним рівнянням першого порядку*. При $b(x) \equiv 0$ рівняння (2.6) називають *лінійним однорідним*, а при $b(x) \neq 0$ — *лінійним неоднорідним*.

Загальну теорію лінійних рівнянь розглянуто в гл. 4. Тут укажемо на три методи інтегрування лінійних рівнянь першого порядку.

***Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).*** Лінійне однорідне рівняння $y' + a(x)y = 0$ є рівнянням із відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок має вигляд $y = ce^{-\int a(x)\,dx}$. Розв'язок





неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = c(x)e^{-\int a(x)\,dx}$, де $c(x)$ — невідома функція. Підставлення в рівняння (2.6) дає

$$c'(x)e^{-\int a(x)\,dx} + c(x)e^{-\int a(x)\,dx}(-a(x)) + a(x)c(x)e^{-\int a(x)\,dx} b(x),$$

звідки

$$c'(x) = b(x)e^{\int a(x)\,dx}, \quad c(x) = c + \int b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}\,dx,$$

$$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left(c + \int b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}\,dx\right). \tag{2.7}$$

Запишемо вираз (2.7), використовуючи інтеграл зі змінною верхньою межею:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left(c + \int_{x_0}^{x} b(\tau)\,e^{\int_{x_0}^{\tau} a(t)\,dt}\,d\tau\right). \tag{2.8}$$

Формула (2.8) визначає загальний розв'язок рівняння (2.6) в області $D_0\{(x, y) \mid x \in (a, b), y \in \mathbb{R}\}$. Справді, функція (2.8) при довільному значенні сталої $c$ є розв'язком рівняння (2.6) на інтервалі $I = (a, b)$. Крім того, для будь-якої початкової точки $(x_0, y_0) \in D$ однопараметрична сім'я (2.8) містить єдиний розв'язок

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} b(\tau)e^{\int_{x}^{\tau} a(t)\,dt}\,d\tau, \tag{2.9}$$

який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Як випливає з (2.7), (2.8), загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння першого порядку має таку структуру: $y = y_0 + \tilde{y}$, де $y_0 = ce^{-\int a(x)\,dx}$, $\tilde{y} = e^{-\int a(x)\,dx}\int b(x)e^{\int a(x)\,dx}dx$ — відповідно загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння та частинний розв'язок ($c = 0$) лінійного неоднорідного рівняння.

***Метод Бернуллі.*** Згідно з цим методом розв'язок рівняння (2.6) шукаємо у вигляді $y = uv$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ — невідомі функції. Підставлення в рівняння (2.6) дає

$$u'v + uv' + a(x)uv = b(x), \quad uv' + (u' + a(x)u)v = b(x).$$

Вибравши функцію $u$ з умови $u' + a(x)u = 0$, наприклад, у вигляді $u = e^{-\int a(x)\,dx}$, для функції $v$ дістанемо рівняння

$$e^{\int a(x)\,dx}v' = b(x), \quad v' = b(x)e^{\int a(x)\,dx},$$

звідки

$$v = c + \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}.$$

Перемноживши $u(x)$ і $v(x)$, матимемо (2.7).

***Метод інтегрувального множника (метод Ейлера).*** Неважко бачити, що після множення обох частин рівняння (2.6) на $e^{\int a(x)\,dx}$ його можна записати у вигляді

$$\left(ye^{\int a(x)\,dx}\right)' = b(x)e^{\int a(x)\,dx}.$$

Звідси випливає (2.7).

Розглянемо деякі рівняння, що зводяться до лінійних за допомогою певних замін.

**1. Рівняння Бернуллі**

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{2.10}$$

заміною невідомою функції $z = y^{1-n}$ зводиться до лінійного. На практиці для розв'язування рівняння (2.10) найчастіше використовують метод Бернуллі.





**2. Рівняння**

$$f'(y)y' + f(y)a(x) = b(x) \tag{2.11}$$

зводиться до лінійного за допомогою заміни $z = f(y)$.

**3. Рівняння**

$$y' = \frac{A(y)}{B(y)x + C(y)} \tag{2.12}$$

є лінійним відносно функції $x = x(y)$. Справді, його можна записати у вигляді

$$x'(y) + a(y)x(y) = b(y),$$

де $a(y) = -\dfrac{B(y)}{A(y)}$, $b(y) = \dfrac{C(y)}{A(y)}$.

**4. Рівняння Міндінга—Дарбу**

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy + R(x, y)(x\,dy - y\,dx) = 0, \tag{2.13}$$

де $M(x, y)$, $N(x, y)$ — однорідні функції степеня $m$, а $R(x, y)$ — однорідна функція степеня $n$, заміною $y = ux$ $(x = x(u))$ зводиться до рівняння Бернуллі (при $n = m - 2$ або $n = m - 1$ — до лінійного рівняння):

$$x' + \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}x = -\frac{R(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}x^{n-m+2}.$$

**5. Рівняння Ріккаті**

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \tag{2.14}$$

у загальному випадку не інтегрується в квадратурах. Проте, якщо відомий розв'язок $y_1$ цього рівняння, то заміною невідомої функції його можна звести до рівняння Бернуллі. Справді, виконуючи заміну $y = z + y_1$, дістанемо

$$z' + y_1' + a(x)(z + y_1) + b(x)(z^2 + 2y_1 z + y_1^2) = c(x),$$
$$z' + (a_1(x) + 2y_1 b(x))z = -b(x)z^2.$$

Це рівняння Бернуллі відносно функції $z$.

**❑ Приклад 2.6**

*Розв'яжемо рівняння Ріккаті* $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$ $(a(x) = 0,\ b(x) = 1)$.

Очевидним розв'язком цього рівняння є функція $y_1 = -\frac{1}{x}$. Заміна $y = z - \frac{1}{x}$ дає рівняння Бернуллі $z' - \frac{2}{x}z = -z^2$. Застосуємо метод Бернуллі: $z = uv$, $uv' + \left(u' - \frac{2}{x}u\right)v = -u^2v^2$. Вибравши функцію $u = x^2$ з умови $u' - \frac{2}{x}u = 0$, дістанемо

$$x^2v' = -x^4v^2,\quad \frac{dv}{v^2} = -x^2dx,\quad v = \frac{3}{x^3 - c},$$
$$z = uv = \frac{3x^2}{x^3 - c},\quad y = z - \frac{1}{x} = \frac{2x^3 + c}{x(x^3 - c)}.$$

**❑ Приклад 2.7**

У рівнянні Міндінга—Дарбу

$$x^3(dx + dy) + (x - y)(x\,dy - y\,dx) = 0$$

виконаємо заміну $y = ux$ $(x = x(u),\ dy = u\,dx + x\,du,\ x\,dy - y\,dx = x^2du)$:

$$x^3(dx + u\,dx + x\,du) + (x - ux)x^2du = 0,\quad \frac{dx}{du} + \frac{1}{u+1}x = \frac{u-1}{u+1}\quad (u \neq -1).$$

Розв'язуючи лінійне відносно $x$ рівняння за формулою (2.7), дістанемо

$$x = \frac{c}{u+1} + \frac{(u-1)^2}{2(u+1)},\quad y = \frac{cy}{y+x} + \frac{y(y-x)^2}{2x^2(y+x)}\quad (y \neq -x,\ x \neq 0),$$
$$y + x - \frac{(y-x)^2}{2x^2} = c.$$

Безпосередньою перевіркою можна встановити, що дане рівняння має також розв'язки $y = -x$, $x = 0$.





**❑ Приклад 2.8**

*Розглянемо лінійне рівняння* $r' + r = r_1$, *де* $r = r(\varphi)$, $r_1 = \text{const} > 0$, $(\varphi, r)$ — *полярні координати на площині.*

Користуючись формулою (2.9), розв'язок задачі Коші $r(\varphi_0) = r_0$ для цього рівняння запишемо у вигляді $r = (r_0 - r_1)e^{-(\varphi - \varphi_0)} + r_1$. Звідси випливає, що при $r_0 = r_1$ інтегральною кривою є коло $r = r_1$ (рис. 2.3). При $r_0 > r_1$ інтегральною кривою є спіраль, яка намотується на коло $r = r_1$ ззовні, а при $r_0 < r_1$ — спіраль, що намотується на коло $r = r_1$ зсередини.

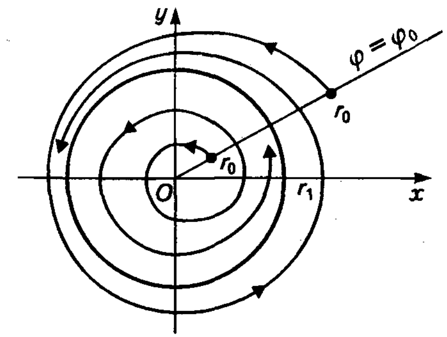


**Рис. 2.3**

## 2.3

## Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник

Рівняння першого порядку в симетричній формі

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2.15}$$

де $P$, $Q$ — неперервні функції ($P$, $Q \in C(D)$), називають *рівнянням у повних диференціалах,* якщо існує функція $u = u(x, y)$ $(u \in C^1(D))$ така, що

$$du = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\quad ((x, y) \in D). \tag{2.16}$$

Припустимо, що $P^2 + Q^2 \neq 0$ $((x, y) \in D)$. Тоді з (2.15), (2.16) випливає, що загальним інтегралом рівняння (2.15) в області $D$ є рівність

$$u(x, y) = c. \tag{2.17}$$

Справді, при довільному значенні сталої $c$ повна похідна (2.17) унаслідок рівняння (2.15) тотожно дорівнює нулю:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = P(x, y) + Q(x, y)\left(-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right) \equiv 0 \quad (Q \neq 0).$$

Аналогічно $\frac{du}{dy} \equiv 0$ (при $P \neq 0$).

Крім того, внаслідок умови $P^2 + Q^2 \neq 0$, рівняння (2.17) в околі будь-якої точки $(x_0, y_0, c_0)$ $((x_0, y_0) \in D,\ c_0 = u(x_0, y_0))$ неявно задає єдиний розв'язок рівняння (2.15) вигляду $y = \varphi(x, c_0)$ або $x = \varphi(y, c_0)$, для якого $\varphi(x_0, c_0) = y_0$ або $\varphi(y_0, c_0) = x_0$ відповідно.

Зрозуміло, що процес інтегрування рівняння в повних диференціалах можна вважати завершеним, якщо відома функція $u = u(x, y)$. Наступна теорема дає критерій розпізнавання рівняння в повних диференціалах і містить один із методів відшукання функції $u$.

**Теорема 2.1**

Нехай частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ неперервні в області $D$. Рівняння (2.15) є рівнянням у повних диференціалах тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (x, y) \in D. \tag{2.18}$$

### Доведення

***Необхідність умови (2.18).*** Якщо (2.15) — рівняння в повних диференціалах, то, внаслідок (2.16), $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Звідси $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Оскільки частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ неперервні, то мішані похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ рівні. Тому $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

***Достатність умови (2.18).*** (Метод відшукання функції $u$.) Нехай умова (2.18) виконується. Покажемо, що функцію $u = u(x, y)$ можна знайти так, щоб

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{2.19}$$





Інтегруючи (по $x$) першу з рівностей (2.19), дістанемо

$$u(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y), \tag{2.20}$$

де $\varphi(y)$ — довільна диференційовна функція. Доберемо тепер функцію $\varphi(y)$ так, щоб визначена формулою (2.20) функція $u(x, y)$ задовольняла й другу з рівностей (2.19):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)\,dx\right) + \varphi'(y) = Q(x, y),$$

звідки

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)\,dx\right). \tag{2.21}$$

Оскільки, внаслідок умови (2.18),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)\,dx\right)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)\,dx\right) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

то права частина рівняння (2.21) не залежить від $x$ і вибір функції $\varphi(y)$ завжди можливий.

◆ **Зауваження 2.3**

Як відомо з курсу математичного аналізу, у випадку, коли $D$ — однозв'язна область*, функцію $u(x, y)$ можна подати у вигляді криволінійного інтеграла (який не залежить від форми шляху інтегрування):

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{2.22}$$

де $(x_0, y_0)$ — фіксована, а $(x, y)$ — довільна точки області $D$.

* Область $D$ називають *однозв'язною*, якщо будь-яка кусково-гладка замкнена крива (без точок самоперетину), розташована в $D$, обмежує область, усі точки якої належать $D$.

Якщо ламана $\begin{cases} x = t \in [x_0, x], \\ y = y_0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = x, \\ y = t \in [y_0, y], \end{cases}$ яка сполучає точки $(x_0, y_0)$ і $(x, y)$, належить області $D$, то функцію $u$ можна знайти за формулою

$$u = u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt. \qquad (2.23)$$

**❑ Приклад 2.9**

Для диференціальних рівнянь

а) $y\,dx + x\,dy = 0$;

б) $x\,dx + y\,dy = 0$;

в) $\sin y\,dx + x\cos y\,dy = 0$;

г) $3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 0$;

д) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0$

функцію $u$ легко знайти безпосередньо, тому вони є рівняннями в повних диференціалах і їхні загальні інтеграли мають такий вигляд:

а) $xy = c$;

б) $x^2 + y^2 = c$;

в) $x\sin y = c$;

г) $x^3y^2 = c$;

д) $\dfrac{x}{y} = c$.

**❑ Приклад 2.10**

Для рівняння $(2xy + 3y^2)\,dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)\,dx = 0$ маємо

$$P(x, y) = 2xy + 3y^2, \quad Q(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 6y$$

і умова $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ виконується в області $D = \mathbb{R}^2$. Тому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$





Із першої з рівностей маємо

$$u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y).$$

Підставивши в другу рівність, дістанемо рівняння для $\varphi(y)$:

$$x^2 + 6xy + \varphi'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \varphi'(y) = -3y^2, \quad \varphi(y) = -y^3 + c_1.$$

Тому

$$u(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + c_1$$

і загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$x^2y + 3xy^2 - y^3 = c.$$

Знайдемо тепер функцію $u$, використовуючи формулу (2.23). Вибравши, наприклад, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, дістанемо

$$u = \int_1^x (2t + 3)\,dt + \int_1^y (x^2 + 6xt - 3t^2)\,dt = (t^2 + 3t)\Big|_1^x +$$

$$+ (x^2t + 3xt^2 - t^3)\Big|_1^y = x^2y + 3xy^2 - y^3 - 3 \quad (c_1 = -3).$$

У випадку, коли диференціальний вираз $P\,dx + Q\,dy$ не є повним диференціалом $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$, виникає запитання: чи не можна знайти таку функцію $\mu = \mu(x, y)$, щоб вираз $\mu P\,dx + \mu Q\,dy$ став повним диференціалом? Якщо така функція $\mu = \mu(x, y)$ існує, то її називають *інтегрувальним множником рівняння* $P\,dx + Q\,dy = 0$. Рівняння $y\,dx - x\,dy = 0$, наприклад, не є рівнянням у повних диференціалах, оскільки $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1 \neq$ $\neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Легко перевірити, проте, що функції $\mu_1 = \dfrac{1}{xy}$, $\mu_2 = \dfrac{1}{y^2}$, $\mu_3 = \dfrac{1}{x^2}$ є інтегрувальними множниками цього рівняння.

**Теорема 2.2**

Для будь-якого рівняння першого порядку

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2.24}$$

що має загальний інтеграл $u(x, y) = c$, існує інтегрувальний множник.

**Доведення**

Здиференціювавши загальний інтеграл, дістанемо $u'_x\,dx + u'_y\,dy = 0$. Враховуючи, що водночас $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, матимемо $u'_x = \mu(x, y)P(x, y)$, $u'_y = \mu(x, y)Q(x, y)$. Тому $\mu P\,dx + \mu Q\,dy = u'_x\,dx + u'_y\,dy = du$ і функція $\mu = \mu(x, y)$ є інтегрувальним множником даного рівняння.

**Теорема 2.3**

Якщо $u(x, y) = c$ — загальний інтеграл рівняння (2.24), а $\mu_0 = \mu_0(x, y)$ — його інтегрувальний множник, то існує безліч інтегрувальних множників цього рівняння й усі вони виражаються формулою

$$\mu(x, y) = \mu_0(x, y)F(u), \tag{2.25}$$

де $F$ — довільна диференційовна функція.

**Доведення**

Перевіримо виконання умови (2.18) для рівняння

$$\mu_0 FP\,dx + \mu_0 FQ\,dy = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial(\mu_0 QF)}{\partial x} = F\frac{\partial(\mu_0 Q)}{\partial x} + \mu_0 QF'(u)u'_x,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mu_0 PF)}{\partial y} = F\frac{\partial(\mu_0 P)}{\partial y} + \mu_0 PF'(u)u'_y.$$

Оскільки $\mu_0(x, y)$ — інтегрувальний множник, то





$$\frac{\partial(\mu_0 Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu_0 P)}{\partial y},\quad u'_x = \mu_0 P,\quad u'_y = \mu_0 Q,\quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial y}$$

і функція $\mu = \mu(x, y)$ є інтегрувальним множником даного рівняння для довільної диференційовної функції $F$.

Нехай тепер $\mu_1 = \mu_1(x, y)$ — довільний інтегрувальний множник рівняння (2.24). Тоді $du = \mu_0(P\,dx + Q\,dy)$, $dv = \mu_1(P\,dx + Q\,dy)$ — відповідні повні диференціали, $u'_x = \mu_0 P$, $u'_y = \mu_0 Q$, $v'_x = \mu_1 P$, $v'_y = \mu_1 Q$ і визначник Остроградського $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \equiv 0$. Тому між функціями $u$ і $v$ існує залежність типу $v = \Phi(u)$. Отже, $\mu_1(P\,dx + Q\,dy) \equiv dv = \Phi'(u)\,du = \Phi'(u)(\mu_0 P\,dx + \mu_0 Q\,dy)$, звідки $\mu_1 = \Phi'(u)\mu_0$, або $\mu_1 = \mu_0 F(u)$ $(F(u) = \Phi'(u))$.

◆ **Зауваження 2.4**

З теореми 2.3 випливає, що коли $\mu_0$ і $\mu_1$ — два різних інтегрувальних множники ($\mu_1/\mu_0 \not\equiv \text{const}$), то $\mu_1/\mu_2 = F(u) = c$ — загальний інтеграл рівняння (2.24).

**Рівняння інтегрувального множника.** З рівності $\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}$ дістаємо рівняння інтегрувального множника

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{2.26}$$

Це *диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними*. Задача відшукання розв'язків такого рівняння не є, взагалі кажучи, простішою, ніж задача інтегрування самого рівняння (2.24). Проте в деяких випадках рівняння (2.26) спрощується і його частинний розв'язок (а саме він і потрібний) легко знайти. Так, наприклад, якщо $\mu = \mu(\omega(x, y))$, де $\omega$ — відома функція, то рівняння (2.26) має вигляд

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial\omega}{\partial y} - Q\dfrac{\partial\omega}{\partial x}}. \tag{2.27}$$

При $\omega \equiv x$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{-Q} \quad (\equiv f(x)), \tag{2.28}$$

при $\omega \equiv y$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} \quad (\equiv g(y)). \tag{2.29}$$

На практиці для відшукання інтегрувального множника часто використовують теорему 2.3. Дане диференціальне рівняння розбивають на кілька груп (частин) так, щоб для кожної з них інтегрувальний множник знаходився легко або був очевидний. Потім записують загальний вираз інтегрувальних множників для кожної частини й добирають довільні функції, які входять у ці множники, так, щоб усі інтегрувальні множники були рівними. Якщо це вдається, то інтегрувальний множник для рівняння (2.24) знайдено.

**❑ Приклад 2.11**

*Перевіримо, чи має рівняння* $(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y\,dy = 0$, *для якого* $P(x, y) = x^2 - \sin^2 y$, $Q(x, y) = x\sin 2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\sin 2y$, *інтегрувальний множник, залежний від x.*

Відповідно до (2.28)

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{-Q} = \frac{2\sin 2y}{-x\sin 2y} = -\frac{2}{x} = f(x).$$

Отже,

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = -\frac{2}{x}, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{x^2}.$$

Помноживши дане рівняння на $\dfrac{1}{x^2}$, дістанемо рівняння в повних диференціалах





$$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{\sin 2y}{x}\,dy = 0, \quad d\left(x + \frac{\sin^2 y}{x}\right) = 0,$$

звідки

$$x + \frac{\sin^2 y}{x} = c.$$

**❑ Приклад 2.12**

Диференціальне рівняння

$$(x^3 - xy^2 - y)\,dx + (x^2 y - y^3 + x)\,dy = 0 \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

запишемо у вигляді

$$x\,dy - y\,dx + (x^2 - y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0.$$

Інтегрувальним множником рівняння $x\,dy + y\,dx = 0$ є, наприклад, функція $\mu_0^1 = \dfrac{1}{xy}$. Загальний інтеграл цього рівняння $\dfrac{y}{x} = c$. Отже, всі інтегрувальні множники цього рівняння виражаються формулою

$$\mu_1(x, y) = \frac{1}{xy}F_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Інтегрувальним множником рівняння $(x^2 - y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$ є функція $\mu_0^2 = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$, а загальний інтеграл має вигляд $x^2 + y^2 = c$. Отже,

$$\mu_2(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}F_2(x^2 + y^2).$$

Функції $F_1$ і $F_2$ доберемо так, щоб виконувалася рівність $\mu_1(x, y) = \mu_2(x, y)$. Візьмемо $F_2(z) = 1$, $F_1(z) = \dfrac{z}{1 - z^2}$. Тоді

$$\mu_2(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}, \quad \mu_1(x, y) = \frac{1}{xy}\frac{y/x}{1 - (y/x)^2} = \frac{1}{x^2 - y^2}.$$

Отже, дане рівняння має інтегрувальний множник $\mu = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

## 2.4

## Неявні скалярні рівняння першого порядку. Відшукання особливого розв'язку за відомим загальним

Розглянемо диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.30}$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y'$, то матимемо одне або кілька явних рівнянь типу $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, ..., m)$. Такі рівняння розглянуто в пп.2.1–2.3.

❑ **Приклад 2.13**

Рівняння $y'^3 - 2xy'^2 + y' - 2x = 0$ легко розв'язати відносно $y'$, оскільки $y'^3 - 2xy'^2 + y' - 2x = (y' - 2x)(y'^2 + 1)$. Тому $y' - 2x = 0$ і $y = x^2 + c$.

❑ **Приклад 2.14**

Квадратне відносно $y'$ рівняння

$$y'^2 - (2x + 3x^2)y' + 6x^3 = 0$$

має розв'язки $y' = 2x$, $y' = 3x^2$. Звідси $y = x^2 + c_1$, $y = x^3 + c_2$. Обидві сім'ї розв'язків задовольняють дане рівняння. Інтегральними кривими рівняння будуть також криві, складені з дуг кривих першої та другої сімей, оскільки в спільних точках $M_0(0, c)$ $(y = x^2 + c,\ y = x^3 + c)$ та $M_1\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9} + c\right)$ $\left(y = x^2 + c,\ y = x^3 + \frac{4}{27} + c\right)$ ці дуги мають одну дотичну $y = c$ (у точці $M_0$)

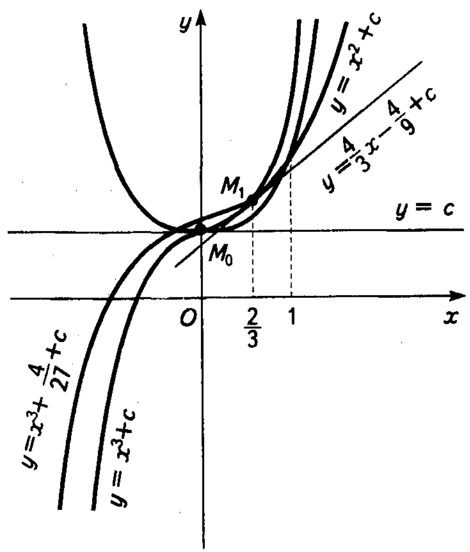


**Рис. 2.4**





та $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{9} + c$ (у точці $M_1$) (рис. 2.4). Тому розв'язками даного рівняння є, наприклад, функції

$$y = x^2 + c_1, \quad y = x^3 + c_2, \qquad y = \begin{cases} x^3 + c & \text{при } x \le 0, \\ x^2 + c & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + c & \text{при } x \le 0, \\ x^3 + c & \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^3 + \frac{4}{27} + c & \text{при } x \le \frac{2}{3}, \\ x^2 + c & \text{при } x > \frac{2}{3}, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^3 + c & \text{при } x \le 0, \\ x^2 + c & \text{при } 0 < x \le \frac{2}{3}, \\ x^3 + \frac{4}{27} + c & \text{при } x > \frac{2}{3}, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + c & \text{при } x \le \frac{2}{3}, \\ x^3 + \frac{4}{27} + c & \text{при } x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Зрозуміло, що рівняння (2.30) не завжди можна розв'язати відносно $y'$, і навіть якщо це вдається зробити, то добуті рівняння далеко не завжди легко інтегруються. Розглянемо деякі окремі випадки рівняння (2.30), які розв'язуються за допомогою введення параметра.

Нехай $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ — параметричне представлення рівняння

$$F(x, y') = 0. \tag{2.31}$$

Оскільки $dy = y'dx$, то $dy = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$. Отже, розв'язок рівняння (2.31) можна записати в параметричній формі:

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c.$$

Нехай $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ — параметричне представлення рівняння

$$F(y, y') = 0. \tag{2.32}$$

Із рівності $dx = \dfrac{dy}{y'}$ $(\psi(t) \neq 0)$ дістаємо $dx = \dfrac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$. Розв'язок (2.32) у параметричній формі має вигляд

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c, \quad y = \varphi(t).$$

❑ **Приклад 2.15**

Рівняння $y'^3 + y'^2 - x = 0$ легко розв'язується відносно $x$. Поклавши $y' = t$, дістанемо $x = t^3 + t^2$, $dy = t(3t^2 + 2t)\,dt$. Отже,

$$x = t^3 + t^2, \quad y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + c$$

— параметричне представлення розв'язку.

❑ **Приклад 2.16**

Параметричне представлення рівняння $y = y'^2 e^{y'}$ має вигляд $y' = t$, $y = t^2 e^t$. При $t \neq 0$ дістаємо

$$dx = \frac{t(2+t)e^t\,dt}{t}, \quad x = \int (2+t)e^t dt + c = e^t(t+1) + c.$$

Отже,

$$x = e^t(t+1) + c, \quad y = t^2 e^t.$$

При $t = 0$ маємо розв'язок $y = 0$.

У загальному випадку для розв'язання рівняння (2.30) використовують ***метод параметризації***, за допомогою якого неявне рівняння (2.30) можна звести до деякого явного диференціального рівняння першого порядку.

Припустимо, що трійкою неперервно диференційовних в області $D \subseteq \mathbb{R}^2$ функцій

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad y' = p(u, v) \tag{2.33}$$





задано параметризацію рівняння (2.30) так, що $F(x(u, v), y(u, v), p(u, v)) = 0$, $\operatorname{rank} \dfrac{\partial(x, y, p)}{\partial(u, v)} = 2 \; ((u, v) \in D)$.

Ураховуючи співвідношення $dy = y'\,dx$, дістанемо

$$y'_u\,du + y'_v\,dv = p(u, v)(x'_u\,du + x'_v\,dv).$$

Останнє рівняння можна подати в симетричній формі:

$$(y'_u - p(u, v)x'_u)\,du + (y'_v - p(u, v)x'_v)\,dv = 0 \tag{2.34}$$

або у формі явного рівняння (розв'язавши, наприклад, відносно $\dfrac{dv}{du}$):

$$\frac{dv}{du} = \frac{p(u, v)x'_u - y'_u}{y'_v - p(u, v)x'_v} \equiv f(u, v) \quad (y'_v - px'_v \neq 0, \; du \neq 0). \tag{2.35}$$

Якщо відомий розв'язок рівняння (2.34), то за допомогою співвідношень $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ можна дістати розв'язок рівняння (2.30) у параметричній формі.

Як приклад застосування методу параметризації розглянемо **рівняння Лагранжа**

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{2.36}$$

в якому хоча б одна з функцій ($\varphi$ або $\psi$) є нелінійною. Поклавши $x = x$, $y' = p$, дістанемо параметричне представлення рівняння Лагранжа у вигляді

$$x = x, \quad y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad y' = p$$

(у ролі параметрів $u$ і $v$ виступають $x$ і $p$ відповідно).

Рівняння (2.34) у цьому випадку має вигляд

$$(\varphi(p) - p)\,dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))\,dp = 0. \tag{2.37}$$

При $\varphi(p) - p \neq 0$, $dp \neq 0$ це рівняння зводиться до лінійного відносно $x = x(p)$:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=-\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}. \tag{2.38}$$

Якщо $x=\Phi(p, c)$ — загальний розв'язок рівняння (2.38), то, приєднавши до нього залежність $y=\Phi(p, c)\varphi(p)+\psi(p)$, дістанемо загальний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі. За умови, що рівняння $\varphi(p)-p=0$ має дійсні корені $p=p_i$, до загального розв'язку слід приєднати ще розв'язки вигляду $y=x\varphi(p_i)+\psi(p_i)$, оскільки в цьому разі рівняння (2.37) має розв'язки $p=p_i$. Розв'язки $y=x\varphi(p_i)+\psi(p_i)$ можуть виявитись особливими.

Якщо $\varphi(p)-p\equiv 0$, то $\varphi(y')\equiv y'$. У цьому випадку маємо **рівняння Клеро**

$$y=xy'+\psi(y'), \tag{2.39}$$

в якому $\psi''\not\equiv 0$. З (2.37) випливає, що $(x+\psi'(p))\,dp=0$, звідки $dp=0$ і $p=c$, або $x=-\psi'(p)$. Отже, рівняння Клеро має однопараметричну сім'ю розв'язків

$$y=cx+\psi(c) \tag{2.40}$$

та параметрично заданий розв'язок

$$x=-\psi'(p),\ \ y=xp+\psi(p). \tag{2.41}$$

Покажемо, що розв'язок, визначений формулами (2.41), є особливим розв'язком рівняння Клеро. Достатньо довести, що крива (2.41) є особливою інтегральною кривою, тобто що через кожну точку цієї кривої проходить іще одна інтегральна крива сім'ї (2.40), причому в спільній точці ці криві дотикаються. Справді, координати кожної точки $(-\psi'(c), -\psi'(c)c+\psi(c))$ кривої (2.41), визначеної значенням параметра $p=c$, задовольняють, очевидно, рівняння (2.40). Оскільки в кожній точці кутовий коефіцієнт кривої (2.41)

$$k=\left.\frac{y'_p}{x'_p}\right|_{p=c}=\left.\frac{-\psi''p-\psi'+\psi'}{-\psi''}\right|_{p=c}=c,$$





то крива (2.41) дотикається до відповідної кривої сім'ї (2.40) у спільній точці.

У диференціальній геометрії криву (2.41) називають обвідною однопараметричної сім'ї (2.40). Пригадаємо її означення. *Обвідною однопараметричної сім'ї плоских кривих*

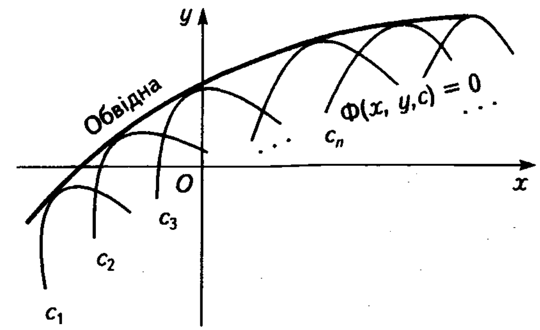


**Рис. 2.5**

$$\Phi(x, y, c)=0 \tag{2.42}$$

називають таку криву, яка в кожній своїй точці дотикається до відповідної кривої сім'ї (2.42), що проходить через цю точку (рис. 2.5). Якщо (2.42) – сім'я інтегральних кривих і обвідна існує, то вона є особливою інтегральною кривою, оскільки в кожній своїй точці дотикається до одного з напрямів, визначених у цій точці рівнянням (2.30).

Знайдемо умови існування обвідної. Припустимо, що функція $\Phi$ неперервно диференційовна, а обвідна сім'ї (2.42) існує й задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in(\alpha, \beta)$. Оскільки обвідна в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих сім'ї (2.42), то $\Phi(x(t), y(t), c(t))\equiv 0$, $t\in(\alpha, \beta)$. Зауважимо, що $c=c(t)$, оскільки для кожної точки дотику, визначеної параметром $t$, стала $c$ має певне значення, причому $c'(t)\neq 0$ ($t\in(\alpha, \beta)$) (інакше обвідна в кожній своїй точці дотикалася б тієї самої кривої сім'ї (2.42), тобто збігалася з нею). Звідси $\Phi'_x x'_t+\Phi'_y y'_t+\Phi'_c c'_t=0$. З умов рівностей кутових коефіцієнтів обвідної та кривої сім'ї (2.42) маємо $\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$ $(\Phi'_y\neq 0)$, звідки $\Phi'_x x'_t+\Phi'_y y'_t=0$. Тому $\Phi'_c\cdot c'(t)=0$ і $\Phi'_c=0$. Отже, якщо обвідна сім'ї (2.42) існує, то координати її точок задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}&\Phi(x, y, c)=0,\\ &\Phi'_c(x, y, c)=0.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Умови (2.43) є необхідними для існування обвідної сім'ї кривих (2.42). Криву, визначену рівняннями (2.43), називають *c-дискримінант-*

*ною кривою* сім'ї (2.42). З диференціальної геометрії відомо, що коли вздовж дискримінантної кривої виконуються умови

$$|\Phi'_x| + |\Phi'_y| \neq 0, \quad \Phi''_{cc} \neq 0, \tag{2.44}$$

то дискримінантна крива є обвідною.

**❑ Приклад 2.17**

*Знайдемо особливий розв'язок рівняння Клеро, використовуючи рівняння (2.43).*
Маємо

$$y = cx + \psi(c), \quad 0 = x + \psi'(c).$$

Оскільки $\Phi'_y = 1 \neq 0$, $\Phi''_{cc} = -\psi''(c) \neq 0$, то розв'язок

$$x = -\psi'(c), \quad y = cx + \psi(c)$$

є особливим.

Отже, щоб узнати обвідну сім'ї інтегральних кривих (2.42), треба знайти дискримінантні криві цієї сім'ї і вибрати ті з них, для яких виконується умова (2.44). Зауважимо, проте, що (2.44) є лише достатньою умовою існування обвідної. Так, наприклад, для сім'ї інтегральних кривих $\Phi(x, y, c) \equiv y - (x-c)^3 = 0$ рівняння $y' = 3y^{2/3}$ (див. приклад 1.5) маємо $\Phi'_c = 3(x-c)^2 = 0$, звідки $c = x$ і $y = 0$. Пряма $y = 0$ є обвідною сім'ї інтегральних кривих, хоча $\Phi''_{cc} = -6(x-c)\big|_{c=x} = 0$.

**❑ Приклад 2.18**

Рівняння $y'^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ параметризуємо, поклавши $y' = \sin t$, $y = 2\cos t$. Із рівності $dy = y'\,dx$ маємо $-2\sin t\,dt = \sin t\,dx$, звідки $\sin t = 0$, або $dx = -2dt$. Виключивши параметр $t$ із систем

$$\begin{cases} \sin t = 0, \\ y = 2\cos t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2t + c, \\ y = 2\cos t, \end{cases}$$

дістанемо розв'язки рівняння:

$$y = \pm 2 \ \text{ і } \ y = 2\cos\frac{x-c}{2}.$$





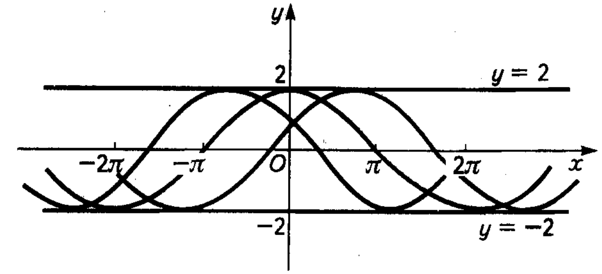


Рис. 2.6

З рівнянь

$$\Phi(x, y, c) \equiv y - 2\cos\frac{x-c}{2} = 0, \quad \Phi'_c(x, y, c) = -\sin\frac{x-c}{2} = 0,$$

виключивши $c$, дістанемо $y = \pm 2$. Оскільки

$$\Phi'_y = 1, \quad \Phi''_{cc} = \frac{1}{2}\cos\frac{x-c}{2}\bigg|_{x-c=2k\pi} \neq 0 \ \ (k \in \mathbb{Z}),$$

то розв'язки $y = -2$, $y = +2$ є особливими (рис. 2.6).

**❑ Приклад 2.19**

Для однопараметричної сім'ї кривих $(x-c)^2 - y^3 = 0$ дискримінантна крива визначається із системи рівнянь

$$(x-c)^2 - y^3 = 0, \quad -2(x-c) = 0,$$

звідки $c = x$ і $y = 0$. У точках дискримінантної кривої $\Phi'_x = 2(x-c) = 0$, $\Phi'_y = -3y^2 = 0$. Дискримінантна крива (пряма) $y = 0$ є множиною особливих точок даної сім'ї (рис. 2.7).

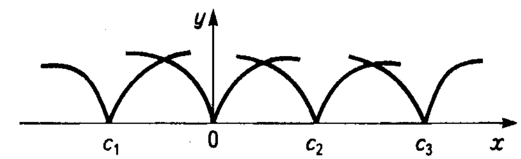


Рис. 2.7

Розглянемо *задачу про диференціальне рівняння сім'ї кривих.* Якщо потрібно скласти диференціальне рівняння однопараметричної сім'ї кривих (2.42), то тотожність $\Phi(x, y(x, c), c) \equiv 0$ диференціюємо по $x$: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$. Якщо це співвідношення не містить сталої $c$, то шукане диференціальне рівняння вже одержано. В противному разі сталу $c$ виключаємо із системи рівнянь $\Phi(x, y, c) = 0$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$.

❑ **Приклад 2.20**

Диференціальне рівняння сім'ї кривих $y = 2\cos\dfrac{x-c}{2}$ знайдемо, виключивши сталу $c$ із системи рівнянь

$$y = 2\cos\frac{x-c}{2},\ \ y' = -\sin\frac{x-c}{2}.$$

Звідси

$$\frac{1}{4}y^2 = \cos^2\frac{x-c}{2},\ \ y'^2 = \sin^2\frac{x-c}{2}\ \text{ і }\ y'^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1.$$

❑ **Приклад 2.21**

Диференціальне рівняння сім'ї кіл $x^2 + y^2 - cx = 0$ знаходимо, виключивши сталу $c$ із системи

$$x^2 + y^2 - cx = 0,\ \ 2x + 2yy' - c = 0,$$

звідки маємо

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

## 2.5

## Окремі типи скалярних рівнянь вищих порядків

### Рівняння, інтегровні в квадратурах

$$\textbf{1. } F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{2.45}$$

Окремим випадком рівняння (2.45) є рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$ ($f \in C_I$, $I = (a, b)$). Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд





$y = \underbrace{\int\ldots\int}_{n} f(x)\underbrace{dx\ \ldots\ dx}_{n} + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_n$. У багатьох випадках рівняння (2.45) можна параметризувати: $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, де $\varphi(t)$ — диференційовна функція. З рівності $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$ маємо $dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$, звідки $y^{(n-1)} = \int\psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1 \equiv \psi_1(t, c_1)$. Аналогічно знаходимо $y^{(n-2)}, \ldots, y = \psi_n(t, c_1, \ldots, c_n)$. Система $x = \varphi(t)$, $y = \psi_n(t, c_1, \ldots, c_n)$ визначає загальний інтеграл рівняння (2.45) у параметричній формі.

$$\textbf{2. } F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{2.46}$$

Припустимо, що рівняння (2.46) задано в параметричній формі: $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-1)} = \psi(t)$, де $\psi(t)$ — диференційовна функція. Тоді з рівності $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$ при $\varphi(t) \neq 0$ маємо $dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \dfrac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}$, звідки $x = \displaystyle\int\frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + c_1 \equiv \xi(t, c_1)$. Далі $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \dfrac{\psi(t)\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}$, $y^{(n-2)} = \displaystyle\int\frac{\psi(t)\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + c_2$, $dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}\,dx, \ldots, dy = y'\,dx$, $y = \displaystyle\int y'\,dx + c_n \equiv \eta(t, c_2, \ldots, c_n)$. Система $x = \xi(t, c_1)$, $y = \eta(t, c_2, \ldots, c_n)$ визначає загальний інтеграл рівняння (2.46) у параметричній формі.

$$\textbf{3. } F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \tag{2.47}$$

За допомогою заміни $y^{(n-2)} = u$ рівняння (2.47) зводиться до рівняння другого порядку $F(u, u'') = 0$. Припустимо, що це рівняння можна параметризувати у вигляді $u'' = \varphi(t)$, $u = \psi(t)$. Тоді з рівностей $du' = u''\,dx$, $du = u'\,dx$ при $u' \neq 0$ дістаємо $u'\,du' = u''u'\,dx$, $\dfrac{1}{2}d(u'^2) = u''du$, $u'^2 = 2\displaystyle\int\varphi(t)\psi'(t)\,dt + c_1$, $u' = \pm\sqrt{2\displaystyle\int\varphi(t)\psi'(t)\,dt + c_1} \equiv \xi(t, c_1)$.

Отже, маємо параметричне зображення вигляду $y^{(n)} = \varphi(t)$, $y^{(n-1)} = \xi(t, c_1)$, яке вже траплялося під час інтегрування рівняння (2.46).

Якщо рівняння $F(u, u'') = 0$ можна розв'язати відносно $u''$ : $u'' = f(u)$, то, помноживши на $2u' \neq 0$, дістанемо $2u'u'' = 2f(u)u'$, $d(u'^2) = 2f(u)\,du$,

$u'^2 = 2\int f(u)\,du + c_1$, звідки $\dfrac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)\,du + c_1}} = dx$ і $\displaystyle\int\frac{du}{\pm\sqrt{2\int f(u)\,du + c_1}} = x + c_2$ $\left(2\int f(u)\,du + c_1 \neq 0\right)$. Врахувавши заміну $u = y^{(n-2)}$, дістанемо проміжний інтеграл рівняння (2.47) вигляду $\Psi(x, y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0$ — диференціальне рівняння типу (2.45).

**❑ Приклад 2.22**

Рівняння типу (2.45) $y'' = \sqrt{1-x^2}$ допускає параметризацію $x = \sin t$, $y'' = \cos t$ $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Із рівності $dy' = y''\,dx$ маємо

$$dy' = \cos^2 t\,dt,\quad y' = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t + c_1\right),\quad dy = y'dx,$$

$$dy = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t + c_1\right)\cos t\,dt.$$

Тому

$$y = \frac{1}{2}\left(t\sin t + \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t + c_1\sin t + c_2\right).$$

Приєднавши залежність $x = \sin t$, дістанемо загальний інтеграл рівняння в параметричній формі.

**❑ Приклад 2.23**

Рівняння типу (2.46) $y'' = \sqrt{1+y'^2}$ допускає параметризацію $y' = t$, $y'' = \sqrt{1+t^2}$. Із рівності $dy' = y''\,dx$ маємо

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},\quad x + c_1 = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right),\quad \left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = e^{x+c_1}.$$

Розв'язавши відносно $t$, дістанемо

$$t = \frac{1}{2}\left(e^{x+c_1} - e^{-(x+c_1)}\right) = \operatorname{sh}(x + c_1).$$

Звідси

$$y' = \operatorname{sh}(x + c_1),\quad y = \operatorname{ch}(x + c_1) + c_2.$$





**❑ Приклад 2.24**

*Для рівняння типу (2.47) $4y''\sqrt{y} = 1$ знайдемо розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.*

Враховуючи, що $y > 0$, маємо $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$. Помноживши на $2y' \neq 0$, дістанемо

$$(y'^2)' = \frac{y'}{2\sqrt{y}},\quad y'^2 = \sqrt{y} + c_1.$$

Сталу $c_1$ знайдемо з початкових умов. Підставивши $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, дістанемо $c_1 = 0$. Оскільки $y'(0) < 0$, то $y' = -\sqrt[4]{y}$. Звідси

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = -dx,\quad \int\frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = -x + c_2,\quad \frac{4}{3}y^{\frac{3}{4}} = -x + c_2.$$

Підставивши $x = 0$, $y(0) = 1$, матимемо $c_2 = \dfrac{4}{3}$. Тому $y = \left(1 - \dfrac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}}$ — розв'язок даної задачі Коші.

### Рівняння, що допускають зниження порядку

**1. Рівняння, що не містять шуканої функції і кількох послідовних похідних:**

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.48}$$

$$(1 \leq k < n).$$

Заміною $y^{(k)} = u$ рівняння (2.48) зводиться до рівняння $(n-k)$-го порядку відносно функції $u$:

$$F(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0.$$

Якщо це рівняння інтегрується в квадратурах, то повернувшися до функції $y$, дістанемо проміжний інтеграл рівняння (2.48) у вигляді $y^{(k)} = \varphi(x, c_1, \ldots, c_{n-k})$ або $\Phi(x, y^{(k)}, c_1, \ldots, c_{n-k}) = 0$ — диференціальне рівняння типу (2.45).

**2. Рівняння, що явно не містять незалежної змінної:**

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{2.49}$$

За допомогою заміни $y' = p$ [$p = p(y)$ — нова шукана функція] порядок рівняння (2.49) можна знизити на одиницю. Справді,

$$y' = p,\ y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p,$$

$$y''' = \frac{d(p'p)}{dy}\frac{dy}{dx} = (p''p + p'^2)p, ...,\ y^{(n)} = g(p, p', ..., p^{(n-1)}),$$

де $p^{(i)} = \dfrac{d^i p}{dy^i}$ $(i = 1, ..., n-1)$. Підставивши в рівняння (2.49), дістанемо рівняння $(n-1)$-го порядку вигляду $F_1(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0$. Якщо $\Phi_1(y, p, c_1, ..., c_{n-1}) = 0$ — загальний інтеграл цього рівняння, то співвідношення $\Phi_1(y, y', c_1, ..., c_{n-1}) = 0$ є проміжним інтегралом $(n-1)$-го порядку рівняння (2.49) – диференціальним рівнянням першого порядку інтегровного типу.

**3. Рівняння, однорідні відносно $y, y', ..., y^{(n)}$.** Розглянемо рівняння

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.50}$$

в якому функція $F$ є однорідною степеня $m$ відносно $y, y', ..., y^{(n)}$, тобто

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad (t > 0).$$

За допомогою заміни $y' = yu$ [$u = u(x)$ — нова невідома функція] порядок рівняння (2.50) можна знизити на одиницю. Справді, тоді

$$y'' = y'u + yu' = y(u^2 + u'),$$

$$y''' = y(u^3 + 3uu' + u''), ...,\ y^{(n)} = yg(u, u', ..., u^{(n-1)}).$$

Підставивши в рівняння (2.50) і врахувавши однорідність функції $F$, дістанемо $y^m F(x, 1, u, u^2 + u', ..., g(u, u', ..., u^{(n-1)})) = 0$. Скоротивши на $y^m \neq 0$, матимемо рівняння $(n-1)$-го порядку відносно функції $u$.





Якщо $u = \varphi(x, c_1, ..., c_{n-1})$ — загальний розв'язок цього рівняння, то загальний розв'язок рівняння (2.50) матиме вигляд $y = c_n e^{\int \varphi(x, c_1, ..., c_{n-1})\,dx}$.

**4. Узагальнено-однорідні рівняння.** Рівняння (2.50) називають *узагальнено-однорідним*, якщо

$$F(tx, t^k y, t^{k-1}y', ..., t^{k-n}y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad (t > 0)$$

для деяких $k$ і $m$.

За допомогою заміни $x = e^t$, $y = ue^{kt}$ [$x = -e^t$ при $x < 0$; $u = u(t)$] узагальнено-однорідне рівняння можна звести до рівняння, що явно не містить незалежної змінної $t$. Справді, за цієї заміни похідні $y^{(i)} = \dfrac{d^i y}{dx^i}$ $(i = 1, ..., n)$ перетворюються за такими формулами:

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (u'e^{kt} + kue^{kt})e^{-t} = e^{(k-1)t}(u' + ku),$$

$$y'' = e^{(k-2)t}(u'' + (2k-1)u' + k(k-1)u), ...,$$

$$y^{(n)} = e^{(k-n)t} g(u, u', ..., u^{(n)}),$$

де $u^{(i)} = \dfrac{d^i u}{dt^i}$ $(i = 1, ..., n)$. Підставивши в рівняння (2.50), дістанемо рівняння вигляду $e^{mt}F_1(u, u', ..., u^{(n)}) = 0$, яке після скорочення на $e^{mt}$ явно не містить незалежної змінної $t$.

**5. Рівняння з точними похідними.** Рівняння (2.50) називають *рівнянням із точними похідними*, якщо ліва частина цього рівняння є точною похідною деякої функції $\Phi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Співвідношення $\Phi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = c_1$ є першим інтегралом рівняння з точними похідними – диференціальним рівнянням $(n-1)$-го порядку.

Якщо рівняння (2.50) не є рівнянням із точними похідними, то іноді можна добрати таку функцію $\mu = \mu(x, y, y', ..., y^{(n)})$ *(інтегру-*

*вальний множник)*, після множення на яку рівняння (2.50) стає рівнянням із точними похідними. В разі множення на інтегрувальний множник можуть з'явитися зайві розв'язки (розв'язки рівняння $\mu = 0$), а також можлива втрата деяких розв'язків.

**❑ Приклад 2.25**

У рівнянні типу (2.48) $y'' + 2y' = e^x y'^2$ покладемо $y' = u$. Відносно $u$ дістанемо рівняння Бернуллі (див. п. 2.2) $u' + 2u = e^x u^2$. Поділимо рівняння на $u^2 \neq 0$: $u^{-2}u' + 2u^{-1} = e^x$. Відносно функції $z = u^{-1}$ це рівняння лінійне: $z' - 2z = -e^x$. Його загальний розв'язок має вигляд $z = e^{2x}(c_1 + e^{-x})$. Урахувавши заміну $y' = u$, дістанемо

$$y = \int \frac{dx}{e^x + c_1 e^{2x}} + c_2 = \int \left( \frac{1}{e^{2x}} - \frac{c_1}{e^x} + \frac{c_1^2}{1 + c_1 e^x} \right) de^x + c_2 =$$

$$= -e^{-x} - c_1 x + c_1 \ln \left| 1 + c_1 e^x \right| + c_2.$$

Розв'язком рівняння є також функція $y = c$ $(u = 0)$.

**❑ Приклад 2.26**

*Знайдемо розв'язок задачі Коші*

$$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Дане рівняння явно не містить незалежної змінної [тип (2.49)]. Нехай $y' = p$, де $p = p(y)$ — нова невідома функція. Тоді $y'' = p'p$ і відносно $p$ дістанемо рівняння $2ypp' + p^2 + p^4 = 0$. Для шуканого розв'язку $p \neq 0$, $y \neq 0$. Відокремлюємо змінні: $-\dfrac{d(p^2)}{p^2 + p^4} = c_1 y$. Сталу $c_1$ знайдемо, використовуючи початкові умови: $y(0) = 1$, $y'(0) = p(1) = 2$. Маємо

$$c_1 = \frac{5}{4}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y - 1}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y - 1}}, \quad \int \sqrt{\frac{5}{4}y - 1}\; dy = x + c_2,$$

$$\frac{8}{15}\left( \frac{5}{4}y - 1 \right)^{3/2} = x + c_2.$$

Поклавши $x = 0$, $y(0) = 1$, знайдемо $c_2 = \dfrac{1}{15}$, $y = \dfrac{1}{5}(15x + 1)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{4}{5}$.





**❑ Приклад 2.27**

*Зінтегруємо рівняння* $x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

Ліва частина даного рівняння — однорідна функція степеня 2 відносно $y$, $y'$, $y''$. Поклавши $y' = yu$, дістанемо $y'' = y(u^2 + u')$, $y^2(x^2(u^2 + u') - (1 - xu)^2) = 0$. Функція $y \equiv 0$ є розв'язком даного рівняння. При $y \neq 0$ маємо лінійне рівняння відносно $u$: $u' + \dfrac{2}{x}u = \dfrac{1}{x^2}$, загальним розв'язком якого є функція $u = \dfrac{c_1}{x_2} + \dfrac{1}{x}$. Враховуємо заміну:

$$y' = yu, \quad \frac{dy}{y} = \left( \frac{c_1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx, \quad y = c_2 e^{\int \left( \frac{c_1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx} = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}.$$

Розв'язок $y \equiv 0$ маємо при $c_2 = 0$.

**❑ Приклад 2.28**

*Зінтегруємо рівняння* $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0$. ***Перевіримо, чи є дане рівняння узагальнено-однорідним.***

Знаходимо

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', t^{k-2} y'') = t^4 x^4 t^{k-2} y'' + (txt^{k-1} y' - t^k y)^3 =$$

$$= t^{k+2} x^4 y'' + t^{3k}(xy' - y)^3 = t^3 F(x, y, y', y'') \quad (k = 1).$$

Отже, $k = 1$, $m = 3$. Виконаємо заміну $x = e^t$, $y = ue^t$ $(u = u(t))$. Тоді

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(ue^t)}{dt}\frac{dt}{dx} = (u'e^t + ue^t)e^{-t} = u' + u,$$

$$y'' = \frac{d(u' + u)}{dt}\frac{dt}{dx} = (u'' + u)e^{-t}.$$

Підставивши в дане рівняння, дістанемо $e^{4t}(u'' + u')e^{-t} + e^{3t}(u' + u - u)^3 = 0$, звідки маємо рівняння $u'' + u' + u'^3 = 0$, що не містить незалежної змінної $t$. Знизивши порядок цього рівняння за допомогою заміни $u' = p(u)$, можна знайти $u = c_1 + \arcsin c_2 e^{-t}$. Урахувавши заміну $y = ux$, $x = e^t$, дістанемо

$$y = x\left( c_1 + \arcsin \frac{c_2}{x} \right).$$

**❑ Приклад 2.29**

Для рівняння $y'' + \sin y = 0$ інтегрувальним множником може слугувати функція $\mu = 2y'$. Справді, помноживши рівняння на $2y'$, дістанемо

$$2y'y'' + 2\sin y \cdot y' = 0, \quad (y'^2 - 2\cos y)' = 0,$$

звідки

$$y'^2 - 2\cos y = c_1, \quad y' = \pm\sqrt{2\cos y + c_1}.$$

Відокремлюємо змінні при $2\cos y + c_1 \neq 0$:

$$\frac{dy}{\sqrt{2\cos y + c_1}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{2\cos y + c_1}} = \pm x + c_2.$$

Сталий розв'язок даного рівняння ($y' = 0$) визначається з умов $\cos y = -\frac{c_1}{2}$, $\sin y = 0$, звідки $c_1 = \pm 2$, $y = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

## 2.6

## Лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

*Лінійними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами* називають рівняння типу

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$
$$(a_1, a_2 = \text{const} \in \mathbb{R}, \ f(x) \in C_I, \ I = (a, b)). \tag{2.51}$$

Покажемо, що коли відомий нетривіальний (ненульовий) розв'язок $y_0 = y_0(x)$ *лінійного однорідного рівняння*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{2.52}$$

то інтегрування рівняння (2.51) зводиться до квадратур. У рівнянні (2.51) виконаємо заміну $y = y_0 v$, де $v = \int u\,dx + c_1$, $u = u(x)$ — нова шукана





функція. Враховуючи, що $v' = u$, $v'' = u'$, дістанемо $y' = y_0'v + y_0 u$, $y'' = y_0''v + 2y_0'u + y_0 u'$. Підставлення в рівняння (2.51) дає

$$v(y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0) + y_0 u' + 2y_0' u + a_1 y_0 u = f(x),$$

звідки, враховуючи, що $y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0 = 0$, маємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно функції $u$:

$$u' + \left(2\frac{y_0'}{y_0} + a_1\right)u = \frac{1}{y_0} f(x). \tag{2.53}$$

Загальний розв'язок рівняння (2.53) має вигляд (див. п. 2.2)

$$u = e^{-\int\left(2\frac{y_0'}{y_0} + a_1\right)dx}\left(c_2 + \int \frac{f(x)}{y_0} e^{\int\left(2\frac{y_0'}{y_0} + a_1\right)dx} dx\right) =$$
$$= c_2 \frac{e^{-a_1 x}}{y_0^2} + \frac{e^{-a_1 x}}{y_0^2} \int y_0 e^{a_1 x} f(x)\,dx.$$

Урахувавши заміну $y = y_0\left(\int u\,dx + c_1\right)$, дістанемо

$$y = c_1 y_0 + c_2 y_0 \int \frac{e^{-a_1 x}}{y_0^2} dx + y_0 \int \frac{e^{-a_1 x}}{y_0^2} \int y_0 e^{a_1 x} f(x)\,dx\,dx \quad (x \in I). \tag{2.54}$$

З (2.54) випливає, що лінійне однорідне рівняння (2.52) ($f(x) \equiv 0$) має розв'язок

$$\bar{y} = c_1 y_0 + c_2 y_0 \int \frac{e^{-a_1 x}}{y_0^2} dx, \tag{2.55}$$

а розв'язок *лінійного неоднорідного рівняння* (2.51) ($f(x) \not\equiv 0$) можна записати у вигляді

$$y = \bar{y} + \tilde{y}, \tag{2.56}$$

де $\tilde{y} = y_0 \int \frac{e^{-a_1 x}}{y_0^2} \int y_0 e^{a_1 x} f(x)\,dx\,dx$ — частинний розв'язок ($c_1 = c_2 = 0$) лінійного неоднорідного рівняння (2.51).

Формулою (2.56) визначений загальний розв'язок рівняння (2.51) в області $D_0 = \{(x, y, z) \mid x \in I,\ y, z \in \mathbb{R}\}$. Справді, для будь-якої початкової точки $(x_0, y_0, y_0') \in D_0$ лінійна алгебрична система

$$\begin{cases} c_1 y_0(x_0) + c_2 y_0(x_0) h(x_0) = y_0 - \tilde{y}(x_0), \\ c_1 y_0'(x_0) + c_2 (y_0'(x_0) h(x_0) + y_0(x_0) h'(x_0)) = y_0' - \tilde{y}'(x_0) \end{cases}$$

$$\left( h(x) = \int \frac{e^{-a_1 x}}{y_0^2} dx \right)$$

відносно сталих $c_1$, $c_2$ має єдиний розв'язок, оскільки головний визначник $\Delta$ цієї системи не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_0(x_0) & y_0(x_0) h(x_0) \\ y_0'(x_0) & y_0'(x_0) h(x_0) + \dfrac{e^{-a_1 x_0}}{y_0} \end{vmatrix} = e^{-a_1 x_0} \neq 0.$$

Ураховуючи структуру лінійного однорідного рівняння (2.52), спробуємо знайти його нетривіальний розв'язок у вигляді $y_0 = e^{\lambda x}$, де $\lambda$ — деякий параметр. Підставлення в рівняння (2.52) дає $e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$, звідки

$$D(\lambda) \equiv \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \tag{2.57}$$

Отже, функція $y_0 = e^{\lambda x}$ є розв'язком рівняння (2.52) тоді й лише тоді, коли число $\lambda$ є коренем рівняння (2.57). Рівняння (2.57) називають *характеристичним рівнянням*, а тричлен $D(\lambda)$ — *характеристичним многочленом* рівняння (2.52).

Можливі такі в и п а д к и.

**1. Рівняння (2.57) має два різних корені** $\lambda_1, \lambda_2$ $(D(\lambda_k) = 0,\ D'(\lambda_k) = 2\lambda_k + a_1 \neq 0,\ k = 1, 2;\ \lambda_1 + \lambda_2 = -a_1)$.





Підставивши $y_0 = e^{\lambda_1 x}$ у формулу (2.55), дістанемо

$$\bar{y} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{-(a_1 + 2\lambda_1)x} dx = c_1 e^{\lambda_1 x} + \frac{c_2}{-(a_1 + 2\lambda_1)} e^{-(a_1 + \lambda_1)x} =$$
$$= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2' e^{\lambda_2 x}.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (2.52) має вигляд

$$\bar{y} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{2.58}$$

де $c_1$, $c_2$ — довільні сталі.

Частинний розв'язок $\tilde{y}$ лінійного неоднорідного рівняння (2.51) у цьому випадку такий:

$$\tilde{y} = e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} f(x)\,dx\,dx \quad (x \in I). \tag{2.59}$$

**2. Рівняння (2.57) має двократний корінь** $\lambda_0$ $(D(\lambda_0) = 0,\ D'(\lambda_0) = 2\lambda_0 + a_1 = 0)$.

Підставивши $y_0 = e^{\lambda_0 x}$ у формулу (2.55), дістанемо

$$\bar{y} = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 e^{\lambda_0 x} \int e^{-(a_1 + 2\lambda_0)x} dx.$$

Отже,

$$\bar{y} = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x}. \tag{2.60}$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}$ лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = e^{\lambda_0 x} \iint e^{-\lambda_0 x} f(x)\,dx\,dx \quad (x \in I). \tag{2.61}$$

◆ **Зауваження 2.5**

Якщо корені $\lambda_1$, $\lambda_2$ характеристичного рівняння (2.57) комплексно-спряжені: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ $(\omega \neq 0)$, то, враховуючи, що $e^{(\alpha \pm i\omega)x} = e^{\alpha x}(\cos \omega x \pm i \sin \omega x)$, формулу (2.58) можна записати так:

$$\bar{y} = c_1 e^{\alpha x}(\cos \omega x + i \sin \omega x) + c_2 e^{\alpha x}(\cos \omega x - i \sin \omega x) =$$

$$= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos \omega x + i(c_1 - c_2)\sin \omega x].$$

**Перепозначивши довільні сталі, робимо висновок, що загальний розв'язок $\bar{y}$ в цьому випадку можна записати так:**

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x). \tag{2.62}$$

❑ **Приклад 2.30**

Для рівняння $y'' - 3y' + 2y = He^{\sigma x}$ ($H$ = const) характеристичний многочлен має вигляд $D(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Його корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Отже,

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}$ знаходимо за формулою (2.59): при $\sigma \neq 2, \sigma \neq 1$

$$\tilde{y} = He^x \int e^x \int e^{-(2-\sigma)x} dx\, dx = He^x \int e^x \frac{e^{(\sigma-2)x}}{\sigma - 2} dx =$$

$$= He^x \frac{1}{\sigma - 2} \int e^{(\sigma-1)x} dx = \frac{He^{\sigma x}}{(\sigma-2)(\sigma-1)} = \frac{He^{\sigma x}}{D(\sigma)};$$

при $\sigma = 2$

$$\tilde{y} = He^x \int e^x \int dx\, dx = He^x \int xe^x dx = He^{2x}(x-1);$$

при $\sigma = 1$

$$\tilde{y} = He^x \int e^x \int e^{-x} dx\, dx = -He^x \int dx = -Hxe^x.$$

❑ **Приклад 2.31**

Характеристичний многочлен $D(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ рівняння $y'' - 2y' + y = He^{\sigma x}$ має двократний корінь $\lambda_0 = 1$. За формулою (2.60) знаходимо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$





**Частинний розв'язок $\tilde{y}$ неоднорідного рівняння дістаємо за формулою (2.61): при $\sigma \neq 1$**

$$\tilde{y} = He^x \iint e^{-x} e^{\sigma x} dx\, dx = He^x \iint e^{(\sigma-1)x} dx\, dx =$$

$$= \frac{H}{\sigma - 1} e^x \int e^{(\sigma-1)x} dx = \frac{He^{\sigma x}}{(\sigma-1)^2} = \frac{He^{\sigma x}}{D(\sigma)};$$

при $\sigma = 1$

$$\tilde{y} = He^x \iint dx\, dx = He^x \int x\, dx = He^x \frac{x^2}{2}.$$

❑ **Приклад 2.32**

Характеристичний многочлен $D(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ рівняння $y'' + \omega^2 y = H \sin \nu t$ ($\omega > 0, \nu > 0$) має комплексно-спряжені корені $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Тому [формула (2.62)] загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$ має вигляд

$$\bar{y} = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

**Частинний розв'язок $\tilde{y}$ знайдемо за формулою (2.59): при $\nu \neq \omega$**

$$\tilde{y} = He^{i\omega t} \int e^{-2i\omega t} \int e^{i\omega t} \frac{1}{2i}(e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}) dt\, dt =$$

$$= \frac{H}{2i} e^{i\omega t} \int e^{-2i\omega t} \left( \frac{e^{i(\omega+\nu)t}}{i(\omega+\nu)} - \frac{e^{i(\omega-\nu)t}}{i(\omega-\nu)} \right) dt =$$

$$= \frac{H}{2i} e^{i\omega t} \left( \frac{e^{i(\nu-\omega)t}}{\omega^2 - \nu^2} - \frac{e^{-i(\omega+\nu)t}}{\omega^2 - \nu^2} \right) = \frac{H \sin \nu t}{\omega^2 - \nu^2} = \frac{H \sin \nu t}{D(i\nu)};$$

при $\nu = \omega$

$$\tilde{y} = \frac{H}{2i} e^{i\nu t} \int e^{-2i\nu t} \int (e^{2i\nu t} - 1) dt\, dt =$$

$$= \frac{H}{2i} e^{i\nu t} \int \left( \frac{1}{2i\nu} - te^{-2i\nu t} \right) dt = \frac{H}{2i} e^{i\nu t} \left( \frac{t}{2i\nu} - \int te^{-2i\nu t} dt \right) =$$

$$= -\frac{H}{4\nu} t(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}) - \frac{H}{8i\nu^2} e^{-i\nu t} = -\frac{Ht}{2\nu} \cos \nu t - \frac{H}{8i\nu^2} e^{-i\nu t}.$$

Оскільки функція $-\frac{H}{8i\nu^2}e^{-i\nu t}$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то частинний розв'язок $\tilde{y}$ можна вибрати у вигляді $\tilde{y} = -\frac{Ht}{2\nu}\cos \nu t$.

◆ **Зауваження 2.6**

Якщо відомий нетривіальний розв'язок $y_0 = y_0(x)$ *лінійного однорідного рівняння*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{2.63}$$

*зі змінними коефіцієнтами* $a_1(x)$, $a_2(x) \in C_I$, то, аналогічно попередньому, за допомогою заміни $y = y_0 v$ $(v = \int u\,dx + c_1)$ можна побудувати загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ у вигляді $y = \bar{y} + \tilde{y}$, де

$$\begin{aligned} \bar{y} &= c_1 y_0 + c_2 y_0 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_0^2}dx, \\ \tilde{y} &= y_0 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_0^2} \int y_0 e^{\int a_1(x)dx} f(x)\,dx\,dx \quad (x \in I). \end{aligned} \tag{2.64}$$

❑ **Приклад 2.33**

*Розглянемо рівняння* $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \ln x$.

Розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$ легко добрати у вигляді $y_0 = x^2$. За формулами (2.64) маємо

$$\bar{y} = c_1x^2 + c_2x^2 \int \frac{e^{\int \frac{4}{x}dx}}{x^4}dx = c_1x^2 + c_2x^3,$$

$$\tilde{y} = x^2 \int \frac{e^{\int \frac{4}{x}dx}}{x^4} \int x^2 e^{-\int \frac{4}{x}dx} \ln x\,dx\,dx = x^2 \iint x^{-2} \ln x\,dx\,dx =$$

$$= x^2 \int (-x^{-1}\ln x - x^{-1})dx = -x^2\left(\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x\right).$$

Отже,

$$y = c_1x^2 + c_2x^3 - x^2\left(\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x\right).$$





## 2.7

## Методи виключення та інтегровних комбінацій для систем диференціальних рівнянь

Розглядувані тут методи ґрунтуються на ідеї зведення системи диференціальних рівнянь до одного або кількох скалярних диференціальних рівнянь.

***Метод виключення.*** Нехай задано систему рівнянь

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.65}$$

Розглянемо *схему виключення невідомих* $y_2, \ldots, y_n$. Перше рівняння $y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$ диференціюємо внаслідок рівнянь системи (2.65) послідовно $n - 1$ разів. У результаті дістанемо систему співвідношень

$$y_1^{(m)} = F_m(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (m = 1, \ldots, n), \tag{2.66}$$

де $F_1 \equiv f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$, $F_m = \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_i} f_i$ $(m = 2, \ldots, n)$.

Якщо в розглядуваній області матриця Остроградського—Якобі $Q = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_{n-1})}{\partial(y_2, \ldots, y_n)}$ невироджена, то перші $n - 1$ рівнянь системи (2.66) можна однозначно розв'язати відносно $y_2, \ldots, y_n$:

$$y_k = g_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \quad (k = 2, \ldots, n). \tag{2.67}$$

Підставивши (2.67) в останнє рівняння системи (2.66), дістанемо скалярне диференціальне рівняння $n$-го порядку відносно $y_1$:

$$y_1^{(n)} = F(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \tag{2.68}$$

де $F \equiv F_n(x, y_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Якщо функції $f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ $n - 1$ разів неперервно диференційовні й матриця $Q$ невироджена, то, як випливає із самого способу утворення рівняння (2.68), компонента $y_1$ розв'язку системи (2.65) є розв'язком рівняння (2.68). Покажемо, що й, навпаки, система функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, де $y_1 = \varphi_1(x)$ — довільний розв'язок рівняння (2.68), а $y_k = \varphi_k(x)$ $(k = 2, \ldots, n)$ — функції, визначені рівностями (2.67), є розв'язком системи (2.65).

Справді, при $m = 1$ з (2.66) маємо $\varphi_1'(x) \equiv f_1(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Здиференціюємо тотожність

$$\varphi_1^{(k-1)}(x) \equiv F_{k-1}(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \quad (k = 2, \ldots, n)$$

із формули (2.66):

$$\varphi_1^{(k)}(x) \equiv \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{k-1}}{\partial y_i} \varphi_i'(x).$$

При $m = k$ з (2.66) маємо

$$\varphi_1^{(k)}(x) \equiv F_k \equiv \frac{\partial F_{k-1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{k-1}}{\partial y_i} f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Порівнюючи останні тотожності й враховуючи, що $\varphi_1'(x) \equiv f_1$, дістанемо

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_{k-1}}{\partial y_i}(\varphi_i' - f_i) = 0 \quad (k = 2, \ldots, n). \tag{2.69}$$

Оскільки визначник системи (2.69) $\det Q \neq 0$ (матриця $Q$ невироджена за умовою), то

$$\varphi_i'(x) \equiv f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Таким чином, згідно з наведеною схемою виключення задача інтегрування системи (2.65) зводиться до задачі інтегрування скалярного





рівняння (2.68). Останнє, як відомо, не завжди інтегрується в квадратурах. Зауважимо також, що у випадку, коли матриця $Q$ вироджена, система (2.65) може звестися до рівняння нижчого ніж $n$ порядку або кількох таких рівнянь.

**❑ Приклад 2.34**

Виключимо невідому функцію $y_2$ із системи рівнянь $y_1' = 5y_1 + 2y_2$, $y_2' = -4y_1 - y_2$.

Диференціюємо перше з рівнянь унаслідок рівнянь системи:

$$y_1'' = 5y_1' + 2y_2' = 5(5y_1 + 2y_2) + 2(-4y_1 - y_2), \quad y_1'' = 17y_1 + 8y_2.$$

Із першого з рівнянь знаходимо $y_2 = \frac{1}{2}(-5y_1 + y_1')$. Отже,

$$y_1'' = 17y_1 + 8\frac{1}{2}(-5y_1 + y'), \quad y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0.$$

Дістали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (див. п. 2.6). Оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ має різні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, то

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{3x}, \quad y_2 = \frac{1}{2}(-5c_1e^x - 5c_2e^{3x} + c_1e^x + 3c_2e^{3x}) = -2c_1e^x - c_2e^{3x}.$$

**❑ Приклад 2.35**

Із системи рівнянь $y_1' = \frac{1}{y_2 - x}$, $y_2' = 1 - \frac{1}{y_1}$ виключимо функцію $y_1$.

Диференціюємо друге з рівнянь:

$$y_2'' = \frac{y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{(y_2 - x)y_1^2}.$$

Із другого з рівнянь дістаємо $\frac{1}{y_1^2} = (y_2' - 1)^2$. Отже,

$$y_2'' = \frac{(y_2' - 1)^2}{y_2 - x}.$$

Останнє рівняння є рівнянням із точними похідними (див. п. 2.5): $\frac{d}{dx}\ln|y_2' - 1| = \frac{d}{dx}\ln|y_2 - x|$. Звідси

$$y_2' - 1 = c_1(y_2 - x) \ (c_1 \neq 0), \ \frac{d}{dx}(y_2 - x) = c_1(y_2 - x),$$
$$y_2 = x + c_2 e^{c_1 x} \ (c_2 \neq 0).$$

Невідому функцію $y_1$ знаходимо з рівняння $y_2' = 1 - \frac{1}{y_1}$:

$$y_1 = \frac{1}{1 - y_2'} = -\frac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}.$$

**❑ Приклад 2.36**

Виключимо функції $y_2$, $y_3$ із системи рівнянь $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1$, $y_3' = y_1 + y_2 + y_3$.

Перше з рівнянь диференціюємо двічі внаслідок рівнянь системи: $y_1'' = y_2' = y_1$, $y_1''' = y_1' = y_2$. Як бачимо, матриця $Q$ у цьому випадку вироджена: $Q = \frac{\partial(y_2, y_1)}{\partial(y_2, y_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. З рівнянь $y_1'' = y_2'$, $y_2' = y_1$ маємо лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $y_1$: $y_1'' - y_1 = 0$, загальним розв'язком якого є функція

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ — корені відповідного характеристичного рівняння). Звідси

$$y_2 = y_1' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}.$$

Підставивши $y_1$ і $y_2$ в третє з рівнянь системи, дістанемо лінійне рівняння першого порядку відносно функції $y_3$: $y_3' - y_3 = 2c_1 e^x$, звідки

$$y_3 = c_3 e^x + 2c_1 x e^x.$$

***Метод інтегровних комбінацій*** полягає в тому, що за допомогою арифметичних операцій і тотожних перетворень із рівнянь системи (2.65) утворюють (якщо це можливо) так звані ***інтегровні комбінації***, тобто допоміжні рівняння відносно функцій вигляду $u(x, y_1, \ldots, y_n)$, які легко інтегруються. В разі застосування методу до системи в симетричній формі





$$\frac{dy_1}{Y_1(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{Y_2(y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n(y_1, \ldots, y_n)} \qquad (2.70)$$

часто зручно використовувати ***властивість рівних дробів***: якщо $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n}$, де $k_1, \ldots, k_n$ — довільні числа.

**❑ Приклад 2.37**

*Розв'яжемо систему рівнянь* $y_1' = y_1^2 y_2$, $y_2' = \frac{y_2}{x} - y_1 y_2^2$.

Помноживши перше з рівнянь на $y_2$, а друге — на $y_1$ і додавши, дістанемо інтегровну комбінацію

$$y_2 y_1' + y_1 y_2' = \frac{y_1 y_2}{x}, \ d(y_1 y_2) = \frac{y_1 y_2}{x} dx,$$

звідки $y_1 y_2 = c_1 x$. Замінивши в першому з рівнянь $y_1 y_2$ на $c_1 x$, дістанемо другу інтегровну комбінацію $y_1' = c_1 x y_1$, звідки $y_1 = c_2 e^{\frac{1}{2} c_1 x^2}$. При $y_1 \neq 0$ ($c_2 \neq 0$) маємо $y_2 = \frac{c_1 x}{y_1} = \frac{c_1}{c_2} x e^{-\frac{1}{2} c_1 x^2}$. Якщо $y_1 = 0$, то з другого рівняння системи дістаємо $y_2 = cx$. Якщо $y_2 = 0$, то $y_1 = c$.

**❑ Приклад 2.38**

Додавши й віднявши почленно рівняння системи $y_1' = -\frac{y_2}{x}$, $y_2' = -\frac{y_1}{x}$, дістанемо дві інтегровні комбінації

$$(y_1 + y_2)' = -\frac{1}{x}(y_1 + y_2), \ (y_1 - y_2)' = \frac{1}{x}(y_1 - y_2),$$

звідки маємо загальний інтеграл системи

$$y_1 + y_2 = \frac{c_1}{x}, \ y_1 - y_2 = c_2 x.$$

❑ **Приклад 2.39**

*Зінтегруємо систему в симетричній формі*:

$$\frac{dx}{2y_2 - y_1} = \frac{dy_2}{y_2} = \frac{dy_1}{y_1}.$$

Інтегровна комбінація $\frac{dy_2}{y_2} = \frac{dy_1}{y_1}$ дає перший інтеграл системи $y_1 = c_1 y_2$. Ще один інтеграл знайдемо, використавши властивість рівних дробів: $\frac{dx}{2y_2 - y_1} = \frac{2dy_2 - dy_1}{2y_2 - y_1}$. Звідси

$$d(x - 2y_2 + y_1) = 0, \quad x - 2y_2 + y_1 = c_2.$$

Очевидно, що знайдені перші інтеграли незалежні.

❑ **Приклад 2.40**

Систему рівнянь прикладу 2.34 запишемо в симетричній формі:

$$\frac{dy_1}{5y_1 + 2y_2} = \frac{dy_2}{-4y_1 - y_2} = \frac{dx}{1}.$$

Використовуючи властивість рівних дробів, маємо

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{y_1 + y_2} = \frac{dx}{1}, \quad \frac{d(2y_1 + y_2)}{3(2y_1 + y_2)} = \frac{dx}{1},$$

звідки дістанемо два незалежних перших інтеграли системи:

$$y_1 + y_2 = c_1 e^x, \quad 2y_1 + y_2 = c_2 e^{3x}.$$

Глава 3

# ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 3.1

## Метричні й лінійні нормовані простори

*Метричним простором* називають множину $Y$ елементів будь-якої природи, якщо на ній за деяким законом введено *відстань (метрику)*, тобто однозначну невід'ємну функцію $\rho(x, y)$ ($\forall\ x, y \in Y$), яка задовольняє такі *аксіоми*:

① $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*аксіома віддільності*);

② $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксіома симетрії*);

③ $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ($\forall\ x, y, z \in Y$) (*аксіома трикутника*).

Послідовність елементів $y_k$ метричного простору $Y$ називають *фундаментальною*, якщо $\lim\limits_{m,\,k \to \infty} \rho(y_m, y_k) = 0$. Метричний простір $Y$ називають *повним*, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність $y_k$ збігається до елемента простору $Y$. Важливими прикладами повних просторів є простір $\mathbb{R}^n$ векторів $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ($y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$) з *евклідовою метрикою* $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$, а також простір $C_{n[a,\,b]}$ усіх дійсних, неперервних на відрізку $[a, b]$ векторних функцій $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$. Метрику в цьому просторі визначимо формулою $\rho_C(x(t), y(t)) = \max\limits_{a \le t \le b} \rho(x(t), y(t))$, де $\rho(x(t), y(t))$ — евклідова метрика.

Нехай $Y$ — метричний простір. Відображення $A : Y \mapsto Y$ називають *стискуючим відображенням (оператором)*, якщо існує таке число $q$ *(коефіцієнт стискання)*: $0 \le q < 1$, що для будь-яких точок $x, y \in Y$ виконується умова

$$\rho(Ax, Ay) \le q\rho(x, y). \qquad (3.1)$$

Точку $\varphi \in Y$ називають *нерухомою точкою оператора* $A$, якщо $A\varphi = \varphi$. Інакше кажучи, нерухомі точки — це розв'язки рівняння $Ay = y$.

Багато питань, пов'язаних з існуванням та єдиністю розв'язків рівнянь різних типів, можна звести до питання існування нерухомої точки деякого відображення $A$ метричного простору в себе. До найпростіших і водночас найважливіших умов існування нерухомої точки належить *принцип стискуючих відображень*, сформульований польським математиком С. Банахом. Цей принцип є теоретичною основою ***методу послідовних наближень (ітерацій)***, який широко застосовується для наближеного розв'язування алгебричних, диференціальних, інтегральних та інших типів рівнянь [16, 21].

**Теорема 3.1**
**(принцип стискуючих відображень)**

Будь-яке стискуюче відображення $A : Y \mapsto Y$ повного метричного простору $Y$ в себе має єдину нерухому точку $\varphi$. Її можна знайти за допомогою ітераційного процесу:

$$\varphi = \lim_{k\to\infty} y_k \quad (y_k = Ay_{k-1},\ y_0 \in Y,\ k = 1, 2, \ldots). \qquad (3.2)$$

### Доведення

Нехай $y_0$ — довільна точка простору $Y$. Тоді $y_1 = Ay_0 \in Y$, $y_2 = Ay_1 = A(Ay_0) \overset{\text{def}}{=} A^2 y_0 \in Y$ і взагалі $y_k = A^k y_0 \in Y$ $(k \in \mathbb{N})$. Покажемо, що послідовність $y_k$ фундаментальна. При $m > k$ маємо

$$\rho(y_k, y_m) = \rho(A^k y_0, A^m y_0) \le q^k \rho(y_0, y_{m-k}) \le$$
$$\le q^k(\rho(y_0, y_1) + \rho(y_1, y_2) + \ldots + \rho(y_{m-k-1}, y_{m-k})) \le$$
$$\le q^k(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-k-1})\rho(y_0, y_1) \le \frac{q^k}{1-q}\rho(y_0, y_1).$$

Звідси





$$\rho(y_k, y_m) \le \frac{q^k}{1-q}\rho(y_0, y_1). \qquad (3.3)$$

Оскільки $0 \le q < 1$, то з (3.3) випливає, що $\rho(y_k, y_m) < \varepsilon\ \forall\, k > k_0$, тобто $y_k$ — фундаментальна послідовність. $Y$ — повний простір, тому існує $\varphi = \lim\limits_{k\to\infty} y_k \in Y$. З нерівностей

$$\rho(A\varphi, \varphi) \le \rho(A\varphi, y_k) + \rho(y_k, \varphi) =$$
$$= \rho(A\varphi, Ay_{k-1}) + \rho(y_k, \varphi) \le q\rho(\varphi, y_{k-1}) + \rho(y_k, \varphi)$$

випливає, що $\rho(A\varphi, \varphi) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тобто $\rho(A\varphi, \varphi) = 0$, $A\varphi = \varphi$ і $\varphi$ є нерухомою точкою відображення $A$.

Якщо $\psi \in Y$ — ще одна нерухома точка оператора $A$, то

$$A\psi = \psi,\ \rho(\varphi, \psi) = \rho(A\varphi, A\psi) \le q\rho(\varphi, \psi),\ \rho(\varphi, \psi)(1-q) \le 0,$$

звідки $\rho(\varphi, \psi) = 0$ і $\psi = \varphi$. Отже, точка $\varphi$, визначена формулою (3.2), — єдина нерухома точка відображення $A$.

◆ **Зауваження 3.1**

Елементи $y_1, \ldots, y_k, \ldots$ у формулі (3.2) називають *послідовними наближеннями (ітераціями) нерухомої точки* $\varphi$.

◆ **Зауваження 3.2**

Перейшовши у (3.3) до границі при $m \to +\infty$, дістанемо нерівність

$$\rho(y_k, \varphi) \le \frac{q^k}{1-q}\rho(y_0, y_1), \qquad (3.4)$$

яка є оцінкою похибки наближеної рівності $\varphi \approx y_k$ ($y_k$ — *k-те наближення*).

◆ **Зауваження 3.3**

Вибір *початкового наближення* $y_0 \in Y$ є довільним і впливає лише на швидкість збіжності послідовності $y_k$ до своєї границі $\varphi$.

Лінійний векторний простір $Y$ називають *нормованим*, якщо в ньому за деяким законом введено *довжину (норму)* кожного елемента $y$, тобто однозначну невід'ємну функцію $\|y\|$ $(\forall\, y \in Y)$, яка задовольняє такі *аксіоми*:

① $\| y \| = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (0 — нуль-елемент $Y$);
② $\| \alpha y \| = |\alpha| \| y \|$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
③ $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$ $(\forall\, x, y \in Y)$.

З аксіоми ③ випливає, зокрема, нерівність $\| x - y \| \ge | \| x \| - \| y \| |$.

У лінійному нормованому просторі метрику можна ввести за формулою $\rho(x, y) = \| x - y \|$ (пропонуємо самостійно перевірити виконання аксіом метрики). Повний лінійний нормований простір називають *банаховим* (на честь С. Банаха). Простори $\mathbb{R}^n$ $\left( \| y \| = \left( \sum_{k=1}^{n} | y_k |^2 \right)^{1/2} \right.$ — евклідова норма) та $C_{n[a,b]} \left( \| y \|_C = \max\limits_{a \le t \le b} \| y(t) \| \right)$ є банаховими [21, 36].

Евклідова норма $(n \times n)$-вимірної матриці $A = (a_{ij})$ вводиться за формулою $\| A \| = \left( \sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij}^2 | \right)^{1/2}$. Якщо $a_{ij} = a_{ij}(t) \in C_{[a,b]}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, то $\| A(t) \|_C = \max\limits_{a \le t \le b} \| A(t) \|$. Неважко показати (пропонуємо це зробити самостійно), що

$$\| Ay \| \le \| A \| \| y \|, \quad \| A(t) y(t) \|_C \le \| A(t) \|_C \| y \|_C, \quad | a_{ij} | \le \| A \|,$$
$$\| AB \| \le \| A \| \| B \|, \quad \| A(t) B(t) \|_C \le \| A(t) \|_C \| B(t) \|_C.$$

## 3.2
## Умова Ліпшиця

***Векторна функція*** $f = f(x, y) = (f_1(x, y), \ldots, f_n(x, y))^T$ $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^n)$ ***в області*** $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ***задовольняє умову Ліпшиця щодо*** $y$ ***зі сталою*** $L$, ***якщо існує*** $L = \text{const} > 0$ ***така, що***

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \le L \| y_1 - y_2 \| \quad (\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D). \tag{3.5}$$





Область $D$ називають *опуклою по* $y$, якщо вона, разом із будь-якими своїми точками $(x, y_1)$, $(x, y_2)$, містить і відрізок $[y_1, y_2] : x = x$, $y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1)$ $(t \in [0, 1])$, котрий їх сполучає. Прикладами опуклих областей є круг і прямокутник у $\mathbb{R}^2$, паралелепіпед, куля та еліпсоїд у $\mathbb{R}^3$. У випадку $n = 1$ в опуклій по $y$ області $D$ умова Ліпшиця завжди виконується, якщо функція $f$ диференційовна по $y$ і $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \le L_0 = \text{const}$ $(\forall (x, y) \in D)$.

Справді, використовуючи формулу Лагранжа, маємо

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | =$$
$$= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \zeta) \right| | y_1 - y_2 | \le L_0 | y_1 - y_2 | \quad ((x, \zeta) \in [y_1, y_2]).$$

Розглянемо аналог формули Лагранжа для векторного випадку.

**Лема 3.1 (Адамара)**

Нехай векторна функція $f(x, y)$ диференційовна по $y$ в опуклій по $y$ області $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Тоді

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \Phi(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)(y_1 - y_2), \tag{3.6}$$

де $\Phi(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — $(n \times n)$-вимірна матриця з елементами $\varphi_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \zeta_i)$, $(x, \zeta_i) \in [y_1, y_2]$, $i, j = 1, \ldots, n$; $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.

### Доведення

Вздовж відрізка $[y_1, y_2]$ $i$-та координата функції $f(x, y)$ залежить лише від $t$: $f_i(x, y(t)) = \psi_i(t)$, $\psi_i(0) = f_i(x, y_1)$, $\psi_i(1) = f_i(x, y_2)$. Використовуючи формулу Лагранжа для функції $\psi_i(t)$ на відрізку $[0, 1]$, маємо

$$f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2) = \psi_i(1) - \psi_i(0) = \psi'(t_i) \cdot 1 =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\bigg|_{t=t_i} \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \zeta_i)(y_{1j} - y_{2j}), \tag{3.7}$$

де $t_i \in [0, 1]$, $\zeta_i = y(t_i)$, $y_{1j}$, $y_{2j}$ — $j$-ті координати точок $y_1$ і $y_2$ відповідно, $i = 1, ..., n$. Вираз (3.7) є координатною формою запису формули (3.6).

**Лема 3.2**

Нехай виконуються умови леми 3.1 і $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le L_0 = \text{const}$ $(\forall (x, y) \in D,\ i, j = 1, ..., n)$. Тоді функція $f(x, y)$ задовольняє в області $D$ умову Ліпшіца зі сталою $L = nL_0$.

Лема 3.2 є наслідком леми 3.1. Пропонуємо довести її самостійно.

## 3.3
## Інтегральні нерівності

Надалі застосовуватимуться леми про інтегральні нерівності.

**Лема 3.3**

Нехай $g(x) = (g_1(x), ..., g_n(x))^T$ — дійсна, неперервна на $[a, b]$ векторна функція. Тоді справджується нерівність

$$\left\| \int_a^b g(x)\,dx \right\| \le \left| \int_a^b \| g(x) \| dx \right|.$$

Пропонуємо довести цю лему самостійно, використавши означення інтеграла як границі інтегральних сум, факт неперервності $g(x)$ і властивості евклідової норми.





**Лема 3.4 (Гронуола—Беллмана)**

Нехай $u(x) \ge 0$, $a(x) \ge 0$ при $x \ge x_0$; $u(x)$, $a(x)$, $v(x) \in C_{[x_0, +\infty)}$ і при $x \ge x_0$ виконується нерівність

$$u(x) \le v(x) + \int_{x_0}^{x} a(\tau)u(\tau)\,d\tau. \tag{3.8}$$

Тоді при $x \ge x_0$

$$u(x) \le v(x) + e^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)\,d\tau} \int_{x_0}^{x} a(\tau)v(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}\,d\tau. \tag{3.9}$$

Якщо $v(x)$ — неперервно диференційовна функція, то при $x \ge x_0$

$$u(x) \le e^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)\,d\tau}\left[ v(x_0) + \int_{x_0}^{x} v'(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}\,d\tau \right]. \tag{3.10}$$

### Доведення

Позначимо $r(x) = \int_{x_0}^{x} a(\tau)u(\tau)\,d\tau$ $(r'(x) = a(x)u(x),\ r(x_0) = 0)$ і помножимо (3.8) на $a(x)$:

$$r'(x) \le a(x)v(x) + a(x)r(x). \tag{3.11}$$

Нерівність (3.11) помножимо на $e^{-\int_{x_0}^{x} a(\tau)\,d\tau}$ і зінтегруємо в межах від $x_0$ до $x$:

$$\int_{x_0}^{x} r'(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}\,d\tau \le \int_{x_0}^{x} a(\tau)v(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}\,d\tau +$$
$$+\int_{x_0}^{x} a(\tau)r(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}\,d\tau. \tag{3.12}$$

Інтеграл зліва обчислюємо частинами:

$$\int_{x_0}^{x} r'(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}d\tau = \left(r(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} r(\tau)a(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}d\tau =$$

$$= r(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(\tau)\,d\tau} + \int_{x_0}^{x} r(\tau)a(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}d\tau.$$

Тоді з (3.12) маємо

$$r(x) \le e^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)\,d\tau}\int_{x_0}^{x} a(\tau)v(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}d\tau. \tag{3.13}$$

Підставивши (3.13) у (3.8), дістанемо оцінку (3.9).

Якщо $v(x)$ — неперервно диференційовна функція, то оцінку (3.10) можна дістати, виконавши в (3.9) інтегрування частинами (пропонуємо зробити це самостійно).

**Наслідок**

*Якщо* $v(x) = c = \text{const} > 0$, *то з (3.10) маємо*

$$u(x) \le ce^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)\,d\tau}, \quad x \ge x_0. \tag{3.14}$$

## 3.4

## Існування розв'язку задачі Коші

Розглянемо задачу Коші для нормальної системи рівнянь (1.17):

$$y' = f(x, y), \tag{3.15}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.16}$$

Припустимо, що функція $f$ визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ і $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ \|y - y_0\| \le b\} \subset D$.





**Теорема 3.2**
**(Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші)**

Нехай виконуються такі *умови*:

① $f \in C_\Pi \left(M = \max\limits_{\Pi} \| f \|\right)$;

② функція $f$ задовольняє умову Ліпшиця щодо $y$ на множині $\Pi$ зі сталою $L$.

Тоді на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$ $\left(h < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}\right)$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші (3.15), (3.16).

**Доведення**

Задача Коші (3.15), (3.16) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))\,d\tau. \tag{3.17}$$

Справді, якщо $y(x)$ — розв'язок даної задачі Коші, то $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$. Звідси $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))\,d\tau$ $(x \in [x_0 - h, x_0 + h])$.

Навпаки, якщо неперервна функція $y(x)$ $(x \in [x_0 - h, x_0 + h])$ є розв'язком інтегрального рівняння (3.17), то з нього випливає, що $y(x)$ неперервно диференційовна. Здиференціювавши (3.17), дістанемо (3.15), а поклавши у (3.17) $x = x_0$, матимемо початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Інтегральне рівняння (3.17) запишемо у вигляді $Ay = y$, де

$$Ay \overset{\text{def}}{=} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))\,d\tau. \tag{3.18}$$

Таким чином, розв'язок задачі Коші (3.15), (3.16) є нерухомою точкою оператора $A$. Оператор $A$ вважаємо визначеним у підпросторі $Y$ простору всіх дійсних, неперервних на $[x_0 - h, x_0 + h]$ векторних функцій $y = y(x)$, таких, що $\| y(x) - b \|_C \le b$. Простір $Y$ є повним простором [21, 35] як замкнений підпростір банахового простору $C_{n|x_0 - h,\, x_0 + h|}$. Покажемо, що для оператора $A$ виконуються всі умови теореми 3.1.

Нехай $y \in Y$. Використовуючи лему 3.3, маємо

$$\| Ay - y_0 \|_C = \max_{[x_0-h,\, x_0+h]} \left\| \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \right\| \le$$

$$\le \max_{[x_0-h,\, x_0+h]} \left| \int_{x_0}^{x} \| f(\tau, y(\tau)) \| d\tau \right| \le Mh \le b.$$

Оскільки $Ay$ – неперервна на $[x_0 - h, x_0 + h]$ функція, то звідси випливає, що оператор $A$ відображує $Y$ у себе. Покажемо, що оператор $A$ стискуючий. Використовуємо лему 3.3 і умову Ліпшіца:

$$\| Ay_1 - Ay_2 \|_C = \max_{[x_0-h,\, x_0+h]} \left\| \int_{x_0}^{x} [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\| \le$$

$$\le \max_{[x_0-h,\, x_0+h]} \left| \int_{x_0}^{x} \| f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau)) \| \, d\tau \right| \le Lh \, \| y_1 - y_2 \|_C$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y.$$

Отже, $A$ – стискуючий оператор із коефіцієнтом стискання $q = Lh < 1$.

Згідно з принципом стискуючих відображень (теорема 3.1) оператор $A$ у просторі $Y$ має єдину нерухому точку $y = \varphi(x)$, тобто задача Коші (3.15), (3.16) має єдиний розв'язок на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$.

### ◆ Зауваження 3.4

Як випливає з леми 3.2, для виконання умови ② теореми 3.2 (Пікара) достатньо, щоб функція $f$ на множині П мала обмежені частинні похідні по $y$:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \le L_0 = \text{const} \ (\forall (x, y) \in \Pi; \ i, j = 1, \ldots, n).$$

### ◆ Зауваження 3.5

Із теорем 3.1 і 3.2 випливає, що розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші (3.15), (3.16) можна знайти за допомогою ітераційного процесу:

$$\varphi(x) = \lim_{k \to \infty} y_k(x),$$

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{k-1}(\tau))\, d\tau, \ y_0(x) = y_0, \tag{3.19}$$

$$\| \varphi(x) - y_k(x) \|_C \le \frac{(Lh)^k}{1 - Lh} Mh \ \ (k = 1, 2, \ldots; \ x \in [x_0 - h, x_0 + h]).$$





### ◆ Зауваження 3.6

Методом послідовних наближень Пікара [34] можна показати, що в разі виконання умов ①, ② теореми 3.2 розв'язок задачі Коші (3.15), (3.16) існує й єдиний на так званому *відрізку Пеано* $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$, де $h_0 = \min\{a, b/M\}$. Згідно з цим методом розв'язок $y = \varphi(x)$ одразу шукається у вигляді функціональної послідовності $y_k(x)$, визначеної рекурентною формулою (3.19). На відрізку Пеано послідовність $y_k(x)$ рівномірно збігається до $\varphi(x)$, причому справджується оцінка

$$\| \varphi(x) - y_k(x) \| \le \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!} e^{Lh} \ \ (k = 1, 2, \ldots).$$

### ◆ Зауваження 3.7

Якщо умови теореми Пікара виконуються в області $D$, то через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ (в околі цієї точки) проходить лише одна інтегральна крива системи (3.15). Область $D$ у цьому випадку називають *одластю єдиності системи (3.15)*. Якщо справджується лише умова ① теореми 3.2, то теорема існування Пеано [34, 37] гарантує існування принаймні одного розв'язку задачі Коші (3.15), (3.16) на відрізку $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$.

### ◆ Зауваження 3.8

Окремим випадком теореми 3.2 є теорема існування й єдиності розв'язку задачі Коші

$$\begin{gathered} z^{(n)} = \Phi(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}), \\ z(x_0) = z_0^{(0)}, \ z'(x_0) = z_0^{(1)}, \ldots, \ z^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)} \end{gathered} \tag{3.20}$$

для явного скалярного рівняння $n$-го порядку. Справді, еквівалентна цій задачі задача Коші для системи рівнянь має вигляд (3.15), (3.16), де

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = (z, z', \ldots, z^{(n-1)})^T,$$

$$f(x, y) = (y_2, y_3, \ldots, y_n, \Phi(x, y))^T, \ \ y_0 = (z_0^{(0)}, z_0^{(1)}, \ldots, z_0^{(n-1)})^T.$$

Припустимо, що функція $\Phi \in C_\Pi$ $\left( M_1 = \max\limits_{\Pi} |\Phi| \right)$ і задовольняє умову Ліпшіца щодо $y$ зі сталою $N$ на множині П. Неважко показати (пропонуємо зробити це самостійно), що функція $f$ також неперервна на множині П:

$$\left(M = \max_{\Pi} \| f \| = \max_{\Pi}\left(\sum_{k=2}^{n} y_k^2 + |\Phi|^2\right)^{1/2} \le\right.$$

$$\le \left(\left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} | y_0^{(k)} |^2\right)^{1/2} + b\right)^2 + M_1^2\right)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} M_0\Bigg)$$

і задовольняє на П умову Ліпшіца щодо $y$ зі сталою $L = (1+N^2)^{1/2}$. Тоді гарантується існування й єдиність розв'язку задачі Коші (3.20) принаймні на відрізку $[x_0 - h_0', x_0 + h_0']$, де $h_0' = \min\{a, b/M_0\}$.

◆ **Зауваження 3.9**

Використовуючи теорему (3.2) і теорему про неявну функцію [16,34], можна дістати достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для неявного векторного рівняння першого порядку вимірності $n$ (див. п. 1.3):

$$\begin{gathered} F(x, y, y') = 0 \quad ((x, y, y') \in G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}), \\ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0'. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Якщо функція $F$ неперервно диференційовна в замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0') \in G$, $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, $\operatorname{rank}\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y_0') = n$ [у скалярному випадку ця умова еквівалентна умові $F_{y'}'(x_0, y_0, y_0') \ne 0$], то на деякому відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$ існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.21).

Справедливість цього твердження випливає з того, що, за теоремою про неявну функцію, в деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0)$ існує єдина неперервно диференційовна функція $f(x, y)$ $(F(x, y, f(x, y)) = 0)$ така, що задача Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ і задача Коші (3.21) еквівалентні.

◆ **Зауваження 3.10**

Нехай виконуються умови теореми Пікара й права частина системи (3.15) – функція $f$ — неперервно диференційовна $m$ разів на множині $D$. Тоді розв'язок задачі Коші (3.15), (3.16) $y = \varphi(x)$ *неперервно диференційовний* $m+1$ *разів*. Справді, оскільки функція $f(x, \varphi(x))$ неперервно диференційовна, то із системи (3.15) випливає, що $y'' = \varphi''(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} f \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x, y)$. За умовою матриці $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервно диференційовні. Тому $y''' = \varphi'''(x) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} f \stackrel{\text{def}}{=} f_2(x, y)$ — неперервно диференційовна функція. Повторюючи аналогічні міркування $m$ разів, дістанемо, що $y^{(m+1)} = \varphi^{(m+1)}(x) = f_m(x, y)$ — неперервна функція.





❑ **Приклад 3.1**

*Розглянемо задачу Коші* $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$ *для рівняння Ріккаті в квадраті* $\Pi: |x| \le 1, \ |y| \le 1$.

Оскільки $M = \max\limits_{\Pi} |x - y^2| = 2$, $L = \max\limits_{\Pi} |f_y'| = \max\limits_{\Pi} |-2y| = 2$, $a = 1$, $b = 1$, то $h_0 = \min\{1, 1/2\} = 1/2$. Тому послідовні наближення Пікара

$$y_k(x) = \int_0^x (\tau - y_{k-1}^2(\tau))\,d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots;\ y_0(x) \equiv 0)$$

рівномірно збігаються до розв'язку $\varphi(x)$ даної задачі Коші принаймні на відрізку $[-1/2, 1/2]$. Знайдемо кілька перших наближень:

$$y_1(x) = \int_0^x (\tau - 0^2)\,d\tau = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \int_0^x \left(\tau - \frac{\tau^4}{4}\right) d\tau = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$$

$$y_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Похибка рівності $\varphi(x) \approx y_3(x)$ оцінюється так:

$$|\varphi(x) - y_3(x)| \le \frac{M}{L}\frac{(Lh)^4}{4!} e^{Lh} = \frac{e}{4!} < \frac{1}{8} \quad \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right).$$

❑ **Приклад 3.2**

Рівняння Ріккаті $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ $(a(x), b(x), c(x) \in C_R)$ не має особливих розв'язків (див. п. 1.1), оскільки функція $f(x, y) = c(x) - b(x)y^2 - a(x)y$ має обмежену похідну $f_y' = -2b(x)y - a(x)$ у будь-якому прямокутнику $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : | x - x_0 | \le a, \ | y - y_0 | \le b\}$ (внаслідок леми 3.2 функція $f$ задовольняє умову Ліпшіца щодо $y$).

❑ **Приклад 3.3**

*Розглянемо рівняння* $y' = 3y^{2/3}$.

Оскільки частинна похідна $f'_y = 2y^{-1/3}$ необмежена при $y = 0$, то функція $f(x, y) = 3y^{2/3}$ може не задовольняти умову Ліпшиця. Справді, з припущення $|3y_1^{2/3} - 3y_2^{2/3}| \le L|y_1 - y_2|$ при $y_2 = 0, y_1 \ne 0$ випливало б, що $\frac{1}{3}L|y_1|^{1/3} \ge 1$, а це неможливо при достатньо малих $|y_1|$. Як показано в п. 1.1, $y = 0$ є особливим розв'язком даного рівняння. Частинна похідна $f'_y$ обмежена в будь-якій області, яка не містить точки $y = 0$. Тому за теоремою Пікара задача Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0 \ne 0$ має єдиний розв'язок. Цим розв'язком є функція $y = (x - x_0 + \sqrt[3]{y_0})^3$ $(x \in \mathbb{R})$.

❑ **Приклад 3.4**

*Розглянемо рівняння* $y' = y^2$.

Частинна похідна $f'_y = 2y$ обмежена в будь-якому прямокутнику П. Тому рівняння не має особливих розв'язків. Розв'язки задач Коші для даного рівняння мають вигляд (рис. 3.1)

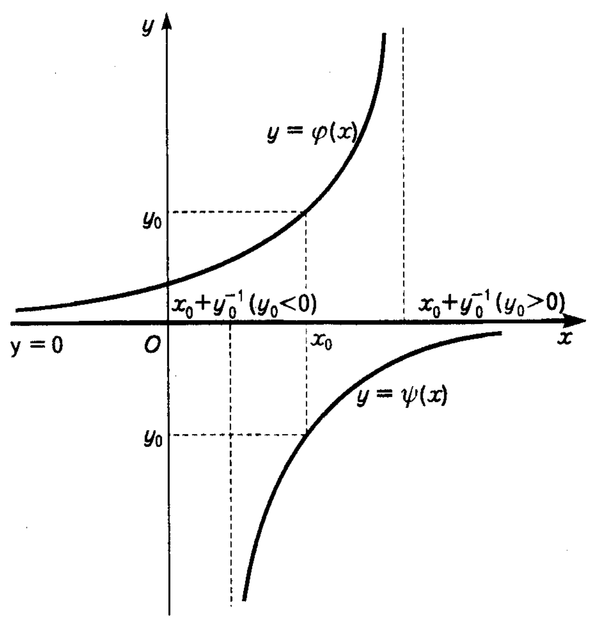


**Рис. 3.1**





$$y \equiv 0 \quad (y(x_0) = 0;\ x \in \mathbb{R}).$$

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{x_0 + y_0^{-1} - x} \quad (y(x_0) = y_0 > 0;\ x \in (-\infty, x_0 + y_0^{-1})),$$

$$y = \psi(x) = \frac{1}{x_0 + y_0^{-1} - x} \quad (y(x_0) = y_0 < 0;\ x \in (x_0 + y_0^{-1}, +\infty)).$$

## 3.5

## Продовження розв'язку задачі Коші

Нехай $D$ — область єдиності системи (3.15). Розв'язок $y = \varphi(x)$ $(x \in [x_0, \beta))$ системи називають *продовжуваним вправо* (за точку $\beta$), якщо існує розв'язок $y = \tilde{\varphi}(x)$ $(x \in [x_0, \beta_1)$ $(\beta < \beta_1))$ такий, що $\varphi(x) \equiv \tilde{\varphi}(x)$ $(x \in [x_0, \beta))$. Розв'язок $\tilde{\varphi}(x)$ називають *продовженням розв'язку* $\varphi(x)$ *вправо*. Аналогічно означається *продовження розв'язку вліво*. Якщо існує скінченна $\lim\limits_{x \to \beta - 0} \varphi(x) = y_1$ і точка $(\beta, y_1) \in D$, то розв'язок $y = \varphi(x)$ може бути продовжений вправо. Справді, нехай $\varphi_1(x)$ — розв'язок задачі Коші для системи (3.15) із початковою умовою $y(\beta) = y_1$ [цей розв'язок існує за теоремою Пікара на деякому проміжку $[\beta, \beta_1)$]. Тоді, як легко переконатися, функція $\tilde{\varphi}(x)$, визначена на проміжку $[x_0, \beta_1)$ рівністю $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in [x_0, \beta) \\ \varphi_1(x) & \text{при } x \in [\beta, \beta_1) \end{cases}$, є продовженням розв'язку $\varphi(x)$ вправо.

Відомо [34, 37], що будь-який розв'язок системи (3.15) може бути продовжений вправо (вліво) або необмежено, або до межі області $D$, і це продовження єдине.

Розв'язок $y = \varphi(x)$ $(x \in I = (\alpha_0, \beta_0))$ системи (3.15) називають *повним*, а інтервал $I$ — *максимальним інтервалом існування розв'язку*, якщо він не може бути продовжений ні вправо, ні вліво за межі $I$. Так, розв'язки $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ (див. приклад 3.4) є повними, оскільки $\varphi(x)$ не може бути продовжений вправо за точку $x_0 + y_0^{-1}$ $(y_0 > 0)$, а $\psi(x)$ — вліво за точку $x_0 + y_0^{-1}$ $(y_0 < 0)$.

Розглянемо кілька достатніх умов продовжуваності розв'язків задачі Коші для системи (3.15).

**Теорема 3.3**

Нехай функція $f$ задовольняє умови теореми Пікара на множині $П_\infty = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ \|y - y_0\| < +\infty\}$ і $\|f\| \le M = \text{const}$ $(\forall (x, y) \in П_\infty)$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.15), (3.16), визначений на відрізку $[x_0 - a, x_0 + a]$.

**Доведення**

Теорема Пікара гарантує існування й єдиність розв'язку на відрізку Пеано $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$, де $h_0 = \min\{a, b/M\}$. Оскільки $b > 0$ — будь-яке і $M$ не залежить від $b$, то $a < b/M$ і $h_0 = a$.

Наступна теорема дає достатню умову існування розв'язку $y = \varphi(x)$ задачі Коші (3.15), (3.16) на півосі.

**Теорема 3.4 (Вінтнера)**

Нехай функція $f$ неперервна при $x \geq x_0$ і всіх $y$ й існує неперервна функція $W(r) > 0$ $(r \geq 0)$ така, що $\|f(x, y)\| \leq W(r)$ при всіх $x \geq x_0$, $y$ і $\int_0^{+\infty} \frac{dr}{W(r)} = +\infty$. Тоді розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші існує на півосі $[x_0, +\infty)$.

**Доведення**

Від супротивного припустимо, що розв'язок $y = \varphi(x)$ існує лише на проміжку $[x_0, \beta)$ $(x_0 < \beta < +\infty)$. Тоді $\|y\| \underset{x \to \beta - 0}{\to} +\infty$. Із нерівності $\left\| \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \right\| \geq \geq \left| \frac{\|y(x + \Delta x)\| - \|y(x)\|}{\Delta x} \right|$ випливає, що $\left\| \frac{dy}{dx} \right\| \geq \left| \frac{d\|y\|}{dx} \right|$. Якщо $y$ — розв'язок системи (3.15), то з останньої нерівності маємо $\frac{|dr|}{|dx|} \leq \|f\|$, $|dx| \geq \frac{|dr|}{\|f\|} \geq \frac{|dr|}{W(r)}$ $(r = \|y\|)$. Інтегруючи цю нерівність (від $x_0$ до $\beta$ по $x$ і від $r_0 = \|y_0\|$ до $+\infty$ по $r$), дістанемо $\int_{x_0}^{\beta} dx = \beta - x_0 \geq \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{W(r)} = +\infty$, що неможливо.

Для випадку $x \leq x_0$ теорема формулюється й доводиться аналогічно.

❑ **Приклад 3.5**

Функція $f(x, y) = 3y^{2/3}$ (див. приклад 3.3) задовольняє нерівність $|f(x, y)| = 3|y|^{2/3} \leq 3r^{2/3} + 1 = W(r)$ $(r = |y|)$ і $\int_0^{+\infty} \frac{dr}{W(r)} = +\infty$. Тому за теоремою Вінтнера кожний розв'язок рівняння $y' = 3y^{2/3}$ може бути продовжений на всю числову вісь. Функція $f(x, y) = y^2$ (див. приклад 3.4) задовольняє нерівність $|f(x, y)| = |y|^2 \leq r^2 + 1$ $(r = |y|)$, $\int_0^{+\infty} \frac{dr}{W(r)} = \frac{\pi}{4}$, і умови теореми Вінтнера не виконуються.

Розглянемо *задачу Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь*

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{3.22}$$





яка є окремим випадком задачі Коші (3.15), (3.16): $f(x, y) = A(x)y + b(x)$. Важливою особливістю лінійних систем є те, що розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші (3.22) існує і він єдиний на всьому інтервалі $I = (\alpha_0, \beta_0)$ $(\alpha_0 \geq -\infty, \beta_0 \leq +\infty)$ неперервності ($n \times n$)-вимірної матриці $A(x)$ та $n$-вимірної векторної функції $b(x)$. Нехай $[a, b] \subset I$, $P = \{(x, y) : x \in [a, b], \|y - y_0\| < +\infty\}$. Функція $f$, як лінійна по $y$, є неперервною на множині $P$. Оскільки $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| = \|A(x)(y_1 - y_2)\| \leq \|A(x)\|_C \|y_1 - y_2\|$, то функція $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшіца зі сталою $L = \|A(x)\|_C$. Тому за теоремою Пікара розв'язок задачі Коші (3.22) $y = \varphi(x)$ $(x_0 \in [a, b])$ існує й єдиний у деякому околі точки $x_0$. Припустимо, що цей розв'язок існує, наприклад, лише на проміжку $[x_0, \beta)$ $(x_0 < \beta \leq b < \beta_0)$ і не може бути продовжений вправо. Тоді $\|y\| \underset{x \to \beta - 0}{\to} +\infty$. Використавши оцінку

$$\|f\| = \|A(x)y + b(x)\| \leq L\|y\| + B \leq Lr + B + 1 = W(r),$$

де $L = \|A(x)\|_C$, $B = \|b(x)\|_C$, $\|y\| = r$, аналогічно доведенню теореми Вінтнера дістанемо $\int_{x_0}^{\beta} dx = \beta - x_0 \geq \int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{Lr + B + 1} = +\infty$, що неможливо. Отже, розв'язок $y = \varphi(x)$ можна продовжити вправо до точки $\beta_0$. Аналогічно доводиться продовжуваність роз'язку вліво до точки $\alpha_0$.

Розв'язок задачі Коші (3.22) для лінійної системи можна побудувати методом послідовних наближень:

$$\begin{gathered} \varphi(x) = \lim_{k \to \infty} y_k(x), \\ y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(\tau)y_{k-1}(\tau) + b(\tau))d\tau, \quad y_0(x) = y_0, \end{gathered} \tag{3.23}$$

причому функціональна послідовність (3.23) рівномірно збіжна на будь-якому відрізку $[a, b]$, що належить інтервалу неперервності $I$.

## 3.6 Коректність задачі Коші

У реальних задачах, що моделюються й розв'язуються за допомогою нормальної системи диференціальних рівнянь (3.15), початкові умови, а також права частина – функція $f$, як правило, відомі з деяким наближенням. Крім того, функція $f$ може залежати від одного або кількох параметрів (маси, температури, заряду тощо), які характеризують природу задачі й теж можуть задаватися наближено. Тому важливими є питання про те, чи існує розв'язок початкової задачі й чи він єдиний, як змінюється цей розв'язок на скінченному проміжку за малих змін (збурень) початкових значень, параметрів і самої функції $f$. Вимоги існування та єдиності розв'язку, його неперервна залежність від початкових умов, параметрів і функції $f$ на скінченному проміжку й становлять зміст поняття *коректності задачі Коші*.

Припустимо, що функція $f$ у системі (3.15) задовольняє умови теореми Пікара. Поряд із незбуреною задачею (3.15), (3.16) розглянемо *збурену задачу*

$$\hat{y}' = \hat{f}(x, \hat{y}), \qquad \hat{y}(\hat{x}_0) = \hat{y}_0, \tag{3.24}$$

де $\hat{f}(x, \hat{y}) = f(x, \hat{y}) + \delta f(x, \hat{y})$, $\hat{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, $\hat{y}_0 = y_0 + \delta y_0$, $\delta f = \delta f(x, y) \in C_\Pi$; $\| \delta f \| \le \max_\Pi \| \delta f \| = \delta_f$.

Нехай розв'язки задач (3.15), (3.16) і (3.24) існують на спільному відрізку $[\alpha, \beta]$ ($x_0, \hat{x}_0 \in [\alpha, \beta]$). Розглянемо еквівалентні цим задачам інтегральні рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \quad (\alpha \le x_0 \le x \le \beta), \tag{3.25}$$

$$\hat{y}(x) = \hat{y}_0 + \int_{\hat{x}_0}^{x} [f(\tau, \hat{y}(\tau)) + \delta f(\tau, \hat{y}(\tau))]\, d\tau. \tag{3.26}$$

Віднімаючи (3.25) від (3.26), дістанемо

$$\hat{y}(x) - y(x) = \delta y_0 + \int_{x_0}^{x} [f(\tau, \hat{y}(\tau)) - f(\tau, y(\tau))]\, d\tau +$$
$$\int_{x_0}^{x} \delta f(\tau, \hat{y}(\tau))\, d\tau + \int_{\hat{x}_0}^{x_0} [f(\tau, \hat{y}(\tau)) + \delta f(\tau, \hat{y}(\tau))]\, d\tau.$$

Переходимо до оцінки за нормою:

$$\| \hat{y}(x) - y(x) \| \le \| \delta y_0 \| + (M + \delta_f) \,|\, \delta x_0 \,| + \delta_f (x - x_0) +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} L \| \hat{y}(\tau) - y(\tau) \|\, d\tau, \tag{3.27}$$

де $M = \max_\Pi \| f(x, y) \|$, $L$ — стала Ліпшиця.





Використовуючи оцінку (3.10) леми Гронуола—Беллмана, дістанемо

$$\| \hat{y}(x) - y(x) \| \le$$
$$\le (\| \delta y_0 \| + (M + \delta_f) \,|\, \delta x_0 \,|) e^{L(\beta - x_0)} + L^{-1} \delta_f (e^{L(\beta - x_0)} - 1). \tag{3.28}$$

Із (3.28) випливає, що малим збуренням початкових умов $\delta x_0$, $\delta y_0$ та правої частини $\delta f$ відповідають малі збурення $\delta y = \hat{y} - y$ розв'язку, тобто *на скінченному відрізку розв'язок неперервно залежить від початкових умов та функції $f$.*

Окремо розглянемо випадок залежності системи (3.15) від вектора параметрів $\mu \in \mathbb{R}^m$:

$$y' = f(x, y, \mu), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.29}$$

Припустимо, що функція $f$ неперервна на множині $\Pi' = \{(x, y, \mu) : (x, y) \in \Pi, \| \mu - \mu_0 \| \le C\}$ і задовольняє на $\Pi'$ умову Ліпшіца щодо $y$ зі сталою $L$, яка не залежить від $\mu$. Тоді збурену задачу можна записати у вигляді

$$\hat{y}' = f(x, \hat{y}, \mu) + \delta_\mu f(x, \hat{y}, \mu), \quad \hat{y}(x_0) = y_0, \tag{3.30}$$

де

$$\delta_\mu f(x, \hat{y}, \mu) = f(x, \hat{y}, \mu + \Delta\mu) - f(x, \hat{y}, \mu).$$

Позначимо $\delta_f(\Delta\mu) = \max_{\Pi'} \| \delta_\mu f(x, y, \mu) \| \underset{\|\Delta\mu\| \to 0}{\longrightarrow} 0$. Оскільки $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, то з (3.28) маємо

$$\| \hat{y}(x) - y(x) \| \le L^{-1} \delta_f(\Delta\mu)(e^{L(\beta - x_0)} - 1), \tag{3.31}$$

звідки випливає, що *на скінченному відрізку розв'язок задачі Коші (3.29) неперервно залежить від параметра* $\mu$.

◆ **Зауваження 3.11**

Справедлива така *теорема про диференційовність розв'язку по параметру*: якщо на множині $\Pi'$ векторна функція $f$ має неперервні частинні похідні по змінних $x$, $y$, $\mu$ до порядку $p \geq 1$ включно, то розв'язок $y(x, \mu)$ задачі Коші $y' = f(x, y, \mu)$, $y(x_0, \mu) = y_0$ має неперервні частинні похідні по параметру $\mu$ до порядку $p$ включно.

◆ **Зауваження 3.12**

Якщо в задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ виконати заміну $x - x_0 = t$, $y - y_0 = u$, то дістанемо задачу Коші $\frac{du}{dt} = \hat{f}(t, u)$, $u(0) = 0$, де $\hat{f}(t, u) = f(t + x_0, u + y_0)$. Отже, функція $\hat{f}(t, u)$ залежить від початкових умов як від параметрів. Із зауваження 3.11 випливає таке *твердження: якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні по $x$, $y$ до порядку $p \geq 1$ включно, то розв'язок задачі Коші $y(x, x_0, y_0)$ має неперервні частинні похідні по змінних $x$, $x_0$, $y_0$ до порядку $p$ включно.*

◆ **Зауваження 3.13**

Запис загального розв'язку системи (3.15) в області єдиності $D$ у вигляді $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ називають *формою Коші загального розв'язку в області $D$*. Так, наприклад, функції

$$y = \frac{1}{x_0 + y_0^{-1} - x} \quad (y_0 > 0, \ \ x \in (-\infty, x_0 + y_0^{-1})),$$

$$y = \frac{1}{x_0 + y_0^{-1} - x} \quad (y_0 < 0, \ \ x \in (x_0 + y_0^{-1}, +\infty))$$

є загальними розв'язками у формі Коші рівняння $y' = y^2$ (див. приклад 3.4) в областях $D_1 = \{(x, y) : y > 0\}$ і $D_2 = \{(x, y) : y < 0\}$ відповідно, а функція

$$y = y_0 \cos \mu(x - x_0) + \frac{y_0'}{\mu} \sin(x - x_0)$$

є загальним розв'язком у формі Коші рівняння $y'' + \mu^2 y = 0$ ($\mu > 0$ — параметр) в $\mathbb{R}^3$.

Глава 4

# ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ Й СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 4.1

## Загальні властивості розв'язків лінійних рівнянь. Структура множини розв'язків лінійного однорідного рівняння

Розглянемо нормальну систему лінійних диференціальних рівнянь

$$Lx \equiv \dot{x} - A(t)x = f(t) \tag{4.1}$$

і скалярне лінійне диференціальне рівняння

$$L_1 y \equiv y^{(n)} + h_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + h_n(t)y = g(t), \tag{4.2}$$

де $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ — невідома векторна функція, $y = y(t)$ — невідома скалярна функція, $A(t) = (a_{ij}(t))$ — $(n \times n)$-вимірна матриця, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$ — векторна функція, $a_{ij}(t)$, $h_i(t)$, $f_i(t)$, $g(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — скалярні неперервні на інтервалі* $I = (\alpha_0, \beta_0)$ $(\alpha_0 \geq -\infty$, $\beta_0 \leq +\infty)$ функції, $L$, $L_1$ — лінійні диференціальні оператори.

Як відомо (див. п. 3.1), скалярне рівняння (4.2) еквівалентне системі типу (4.1), в якій $x = (y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))^T$, $f(t) = (0, 0, \ldots, g(t))^T$, а матриця $A(t)$ має вигляд

* Замість інтервалу $I$ може розглядатися півінтервал або відрізок.

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -h_n(t) & -h_{n-1}(t) & -h_{n-2}(t) & \dots & -h_1(t) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Залежність між розв'язками системи (4.3) [з матрицею $A(t)$ типу (4.3)] і рівняння (4.2) можна записати у вигляді

$$y = e_1 x, \quad (4.4)$$

$$x = Py, \quad (4.5)$$

де $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ — $(1 \times n)$-вимірна матриця, а $P$ — лінійний диференціальний оператор, який діє на $n - 1$ разів неперервно диференційовну скалярну функцію $y$ за таким законом:

$$Py = (y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)})^T.$$

Ураховуючи еквівалентність рівняння (4.2) і системи (4.1), основні положення загальної теорії лінійних рівнянь розглянемо для систем вигляду (4.1). Систему (4.1) ($f(t) \not\equiv 0$) називають *лінійною неоднорідною.* Систему $Lx = 0$ ($f(t) \equiv 0$) називають *лінійною однорідною системою, яка відповідає системі (4.1).* Термінологія аналогічна й для скалярних рівнянь. Так, рівняння (4.2) ($g(t) \not\equiv 0$) називають *лінійним неоднорідним,* а рівняння $L_1 y = 0$ ($g(t) \equiv 0$) — *лінійним однорідним, яке відповідає рівнянню (4.2).*

**Теорема 4.1**

Розв'язок задачі Коші для системи (4.1) з будь-якою початковою умовою $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in I$) існує й єдиний на всьому інтервалі $I$. (Твердження випливає з п. 3.5.)

**Теорема 4.2**

Лінійна однорідна система $Lx = 0$ завжди має тривіальний розв'язок $x \equiv 0$. Це єдиний розв'язок лінійної однорідної системи, який задовольняє нульову початкову умову $x(t_0) = 0$. (Твердження випливає з факту лінійності оператора $L$ і теореми 4.1.)





**Теорема 4.3**

Множина розв'язків лінійної однорідної системи $Lx = 0$ утворює лінійний векторний простір. (Твердження випливає з факту лінійності оператора $L$.)

Нехай $x^1 = x^1(t), ..., x^n = x^n(t)$ — $n$ розв'язків системи $Lx = 0$. Матрицю $X(t) = [x^1(t), ..., x^n(t)]$ ($x^i(t)$ — $i$-й стовпець матриці $X(t)$) називають *матрицею Вронського*, а визначник $W(t) = \det X(t)$ — *вронскіаном системи розв'язків* $x^1(t), ..., x^n(t)$. Матрицю Вронського $X(t)$ називають *фундаментальною матрицею лінійної однорідної системи*, якщо її стовпці лінійно незалежні на інтервалі $I$. Лінійно незалежні розв'язки $x^1(t), ..., x^n(t)$ системи $Lx = 0$ називають *фундаментальною системою розв'язків (ФСР) лінійної однорідної системи.*

Нагадаємо означення лінійної незалежності: векторні функції $x^1(t), ..., x^n(t)$ називають *лінійно незалежними на інтервалі $I$*, якщо тотожність $\alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_n x^n(t) \equiv 0$ ($t \in I$) можлива лише за умови $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Наступна теорема є критерієм лінійної незалежності $n$ розв'язків системи $Lx = 0$.

**Теорема 4.4**

Аби $n$ розв'язків $x^1(t), ..., x^n(t)$ лінійної однорідної системи $Lx = 0$ були лінійно незалежними на інтервалі $I$, необхідно й достатньо, щоб при деякому $t_0 \in I$ виконувалась умова $W(t_0) \neq 0$.

**Доведення**

1. Нехай $W(t_0) \neq 0$, але розглядувані *розв'язки лінійно залежні на інтервалі $I$*:

$$\alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_n x^n(t) \equiv 0 \quad \left(t \in I, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0\right).$$

Звідси випливає, що один із розв'язків [а отже, й один із стовпів вронскіана $W(t)$] є лінійною комбінацією інших. Тоді $W(t) \equiv 0$, що неможливо.

2. Нехай розглядувані *розв'язки лінійно незалежні на інтервалі $I$*, але $W(t) \equiv 0$ ($t \in I$). Зафіксуємо точку $t_0 \in I$ і розглянемо лінійну алгебричну систему рівнянь відносно $\alpha_1, ..., \alpha_n$:

$$\alpha_1 x^1(t_0) + \ldots + \alpha_n x^n(t_0) = 0$$

або у векторно-матричній формі:

$$X(t_0)\alpha = 0 \ (\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T).$$

Оскільки головний визначник цієї системи $\Delta = \det X(t_0) = W(t_0) = 0$, то система має нетривіальний розв'язок $\alpha_0 = (\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0})^T$ $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0}^2 > 0\right)$. Функція $x(t) = \alpha_{10}x^1(t) + \ldots + \alpha_{n0}x^n(t)$ за теоремою 4.3 є розв'язком лінійної однорідної системи і, згідно з вибором $\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}$, задовольняє нульову початкову умову $x(t_0) = 0$. Тому за теоремою 4.2 $x(t) \equiv 0$, тобто

$$\alpha_{10}x^1(t) + \ldots + \alpha_{n0}x^n(t) \equiv 0 \quad \left(t \in I, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0}^2 > 0\right),$$

що неможливо внаслідок лінійної незалежності розв'язків $x^1(t), \ldots, \ldots, x^n(t)$.

У випадку довільної системи $n$ неперервних векторних функцій $u^1(t), \ldots, u^n(t)$ умова $W(t_0) \neq 0$ $(t_0 \in I)$ є лише *достатньою умовою лінійної незалежності* цих функцій на інтервалі $I$. Так, наприклад, векторні функції $u^1(t) = (0, t)^T$, $u^2(t) = (0, t^3)^T$ $(n = 2)$ лінійно незалежні на $I = \mathbb{R}$, хоча $W(t) \equiv 0$ $(t \in \mathbb{R})$.

Із теореми 4.4 випливає, що для $n$ розв'язків $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ лінійної однорідної системи $Lx = 0$ виконується *альтернатива: або* $W(t) \equiv 0$ $(t \in I)$ і розв'язки лінійно залежні на $I$, *або* $W(t) \neq 0$ $(t \in I)$ і розв'язки лінійно незалежні на $I$. Аналогічний факт справджується й для системи $n$ розв'язків $y_1, \ldots, y_n$ лінійного однорідного скалярного рівняння $L_1 y = 0$: *або*

$$W(t) = \det[Py_1, \ldots, Py_n] = \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (t \in I)$$





і розв'язки лінійно залежні на $I$, *або* $W(t) \neq 0$ $(t \in I)$ і розв'язки лінійно незалежні на $I$ (утворюють ФСР лінійного однорідного скалярного рівняння $L_1 y = 0$ ).

**Теорема 4.5**

Фундаментальна матриця $X(t)$ лінійної однорідної системи $Lx = 0$ завжди існує й є розв'язком лінійного матричного диференціального рівняння

$$\dot{X} = A(t)X. \tag{4.6}$$

Справедливе й обернене твердження: будь-який розв'язок матричного рівняння (4.6), такий, що $W(t_0) = \det X(t_0) \neq 0$ $(t_0 \in I)$, є фундаментальною матрицею лінійної однорідної системи $Lx = 0$.

**Доведення**

Розглянемо $n$ задач Коші для системи $Lx = 0$ з початковими умовами $x^1(t_0) = x_0^1, \ldots, x^n(t_0) = x_0^n$, де на вектори $x_0^1, \ldots, x_0^n$ накладається єдина умова: $W(t_0) = \det[x_0^1, \ldots, x_0^n] \neq 0$. З теореми 4.4 випливає, що розв'язки $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ цих задач Коші лінійно незалежні на $I$. Тому матриця $X(t) = [x^1(t), \ldots, x^n(t)]$ є фундаментальною. Оскільки кожний стовпець фундаментальної матриці $X(t)$ є розв'язком лінійної однорідної системи $\dot{x} = A(t)x$, то фундаментальна матриця $X(t)$ задовольняє матричне рівняння (4.6). Обернене твердження випливає з означення фундаментальної матриці й теореми 4.4.

**Теорема 4.6**

Нехай $X(t) = [x^1(t), \ldots, x^n(t)]$ — фундаментальна матриця лінійної однорідної системи $Lx = 0$. Тоді загальний розв'язок лінійної однорідної системи в області $D = I \times \mathbb{R}^n$ має вигляд

$$x = x(t) = c_1 x^1(t) + \ldots + c_n x^n(t) = X(t)c \quad (t \in I), \tag{4.7}$$

де $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ — вектор-стовпець довільних сталих.

**Доведення**

Оскільки за теоремою (4.3) функція $x(t)$, визначена формулою (4.7), є розв'язком лінійної однорідної системи при довільних значеннях $c_1, \dots, c_n$, то достатньо довести, що для будь-якої початкової точки $(t_0, x_0) \in D$ $n$-параметрична сім'я розв'язків (4.7) містить єдиний розв'язок $\varphi(t)$, який задовольняє початкову умову $\varphi(t_0) = x_0$. Останнє твердження випливає з того, що лінійна алгебрична система $X(t_0)c = x_0$ унаслідок умови $\det X(t_0) = W(t_0) \neq 0$ має єдиний розв'язок $c = X^{-1}(t_0)x_0$.

**Теорема 4.7**

Нехай $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — фундаментальна система розв'язків (ФСР) лінійного однорідного рівняння $L_1 y = 0$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння в області $D = I \times \mathbb{R}^n$ має вигляд

$$y = y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = Y(t)c, \tag{4.8}$$

де $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ — $(1 \times n)$-вимірна матриця, $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ — вектор-стовпець довільних сталих.

Доведення

Твердження теореми випливає з теореми 4.6 і формул (4.4), (4.5), зв'язку між розв'язками рівняння (4.2) і системи (4.1), що відповідає йому:

$$y = e_1 x = e_1 X(t)c = e_1 [Py_1, \dots, Py_n]c = Y(t)c.$$

Сформулюємо кілька наслідків теорем 4.5—4.7, які пропонуємо довести самостійно.

**Наслідок 4.1**

*Вимірність лінійного векторного простору розв'язків лінійної системи $Lx = 0$ (лінійного рівняння $L_1 y = 0$) дорівнює $n$. Базисом цього простору є будь-яка ФСР.*

**Наслідок 4.2**

*Лінійна однорідна система $Lx = 0$ має безліч фундаментальних матриць (безліч ФСР). Якщо $X(t)$ — деяка фундаментальна матриця, то сукупність усіх фундаментальних матриць описується формулою $X(t)C$, де $C$ — довільна стала невироджена $(n \times n)$-вимірна матриця.*





Якщо фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ задовольняє умову $X(t, t_0) = E_n$ ($E_n$ — одинична матриця), то $X(t, t_0)$ називають ***нормальною*** (при $t = t_0$) ***фундаментальною матрицею***, або ***матрицантом, системи*** $Lx = 0$.

**Наслідок 4.3**

*Якщо $X(t)$ — фундаментальна матриця лінійної однорідної системи, то $X(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ є єдиним матрицантом (при $t = t_0$) цієї системи.*

**Наслідок 4.4**

*Лінійне однорідне скалярне рівняння $L_1 y = 0$ має безліч ФСР. Якщо $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ — деяка ФСР, то сукупність усіх ФСР описується формулою $Y(t)C$, де $C$ — довільна стала невироджена $(n \times n)$-вимірна матриця.*

**Наслідок 4.5**

*Фундаментальною матрицею $X(t)$ лінійна однорідна система $Lx = 0$ визначена однозначно: $Lx \equiv \dot{x} - \dot{X}(t)X^{-1}(t)x$.*

**Наслідок 4.6**

*Фундаментальною системою розв'язків $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ лінійне однорідне скалярне рівняння $L_1 y = 0$ визначене однозначно:*

$$L_1 y \equiv \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix},$$

*де $W(t) = \det [Py_1, \dots, Py_n]$ — вронскіан ФСР.*

**Теорема 4.8**

Для вронскіана $W(t)$ розв'язків $x^1(t), \dots, x^n(t)$ лінійної однорідної системи $Lx = 0$ справедлива формула Остроградського—Ліувілля (Ліувілля—Якобі).

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau} \quad (t_0,\ t \in I), \tag{4.9}$$

де $\operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ — *слід* матриці $A(t)$.

**Доведення**

Достатньо довести, що $W(t)$ є розв'язком рівняння $\dot W = (\operatorname{tr} A(t))W$. Нехай $x^j(t) = (x_1^j, \ldots, x_n^j)^T$ $(j = 1, \ldots, n)$. Визначник $W(t)$ розкладемо за елементами $i$-го рядка: $W(t) = \sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_i^j$, де $W_{ij}$ — алгебричне доповнення елемента $x_i^j$. Звідси $\frac{\partial W}{\partial x_i^j} = W_{ij}$. Розглядаючи $W(t)$ як функцію своїх елементів, маємо

$$\dot W(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i^j}\dot x_i^j = \sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}\dot x_i^j.$$

Оскільки $x^j$ — розв'язок лінійної однорідної системи, то $\dot x^j = A(t)x^j$, або в координатній формі: $\dot x_i^j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k^j$. Тому

$$\dot W(t) = \sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k^j = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t)\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_k^j = (\operatorname{tr} A(t))W(t),$$

оскільки за властивістю визначників

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_k^j = \begin{cases} 0 & \text{при } k \ne i, \\ W(t) & \text{при } k = i. \end{cases}$$

Для матриці $A(t)$ типу (4.3) $\operatorname{tr} A(t) = -h_1(t)$. Тому формула Остроградського—Ліувілля для вронскіана $n$ розв'язків лінійного однорідного скалярного рівняння $L_1 y = 0$ має вигляд





$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\,d\tau} \quad (t_0,\ t \in I). \tag{4.10}$$

У випадку, коли відомий нетривіальний розв'язок $y_1(t)$ лінійного однорідного скалярного рівняння $(n = 2)$ $y'' + h_1(t)y' + h_2(t)y = 0$, за допомогою формули (4.10) можна побудувати розв'язок $y_2(t)$ цього рівняння, лінійно незалежний з $y_1(t)$. Нехай $y_1(t_0) \ne 0$. Початкові умови для $y_2(t)$ виберемо у вигляді $y_2(t_0) = 0$, $\dot y_2(t_0) = \frac{1}{y_1(t_0)}$. Тоді $W(t_0) = 1$ і з формули (4.10) маємо

$$y_1(t)\dot y_2(t) - y_2(t)\dot y_1(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\,d\tau}.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $y_1^2(t)$, дістанемо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right) = \frac{e^{-\int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\,d\tau}}{y_1^2(t)}. \tag{4.11}$$

Звідси

$$y_2(t) = y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{\tau} h_1(s)\,ds}}{y_1^2(\tau)}\,d\tau. \tag{4.12}$$

Оскільки розв'язок $y_2(t)$ з початковими умовами $y_2(t_0) = 0$, $\dot y_2(t_0) = \frac{1}{y_1(t_0)}$ існує й єдиний на всьому інтервалі $I$, то функцію в правій частині формули (4.12) можна коректно довизначити й у тих точках, де $y_1(t) = 0$. Лінійна незалежність розв'язків $y_1(t)$ і $y_2(t)$ очевидна, оскільки $\frac{y_2(t)}{y_1(t)} \ne \text{const}$ $(t \in I)$. Співвідношення (4.12) називають *формулою Абеля*.

Формулу Абеля можна узагальнити на випадок лінійного однорідного скалярного рівняння

$$L_1 y \equiv y^{(n)} + h_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + h_n(t)y = 0 \tag{4.13}$$

порядку $n \ge 2$.

Нехай $y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (4.13) і

$$W_0(t) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \ldots & \dot{y}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} \not\equiv 0 \quad (t \in I).$$

**Теорема 4.9**

Нехай $y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (4.13). Тоді розв'язок $y_n(t)$ цього рівняння, такий, що $y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t), y_n(t)$ утворюють ФСР рівняння (4.13), можна знайти за формулою

$$y_n(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{K_{n-1}(t,\tau)}{W_0^2(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{\tau} h_1(s)\,ds} d\tau \quad (t_0, t \in I), \tag{4.14}$$

де $K_1(t,\tau) = y_1(t)$,

$$K_{n-1}(t,\tau) = \begin{vmatrix} y_1(\tau) & y_2(\tau) & \ldots & y_{n-1}(\tau) \\ \dot{y}_1(\tau) & \dot{y}_2(\tau) & \ldots & \dot{y}_{n-1}(\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-3)}(\tau) & y_2^{(n-3)}(\tau) & \ldots & y_{n-1}^{(n-3)}(\tau) \\ y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_{n-1}(t) \end{vmatrix} \quad (n \ge 3). \tag{4.15}$$

**Доведення**

Розклавши визначник (4.15) за елементами останнього рядка, дістаємо, що функція $K_{n-1}(t,\tau)$ при кожному фіксованому $\tau \in I$ є розв'язком рівняння (4.13): $L_1(K_{n-1}(t,\tau)) = 0$. Користуючися правилом Лейбніца диференціювання інтегралів, залежних від параметра, знайдемо похідні функції $y_n(t)$:

$$\dot{y}_n(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{K}_{n-1}(t,\tau)}{W_0^2(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{\tau} h_1(s)\,ds} d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^{(n-2)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{K_{n-1}^{(n-2)}(t,\tau)}{W_0^2(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{\tau} h_1(s)\,ds} d\tau, \tag{4.16}$$

$$y_n^{(n-1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{K_{n-1}^{(n-1)}(t,\tau)}{W_0^2(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{\tau} h_1(s)\,ds} d\tau + \frac{1}{W_0(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} h_1(s)\,ds},$$

$$y_n^{(n)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{K_{n-1}^{(n)}(t,\tau)}{W_0^2(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{\tau} h_1(s)\,ds} d\tau - \frac{h_1(t)}{W_0(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} h_1(s)\,ds}.$$





У формулах (4.16) використано співвідношення

$$K_{n-1}(t,t) = \dot{K}_{n-1}(t,t) = \ldots = K_{n-1}^{(n-3)}(t,t) = 0,$$
$$K_{n-1}^{(n-2)}(t,t) = W_0(t), \quad K_{n-1}^{(n-1)}(t,t) = \dot{W}_0(t).$$

Підставивши (4.16) у рівняння (4.13), дістанемо

$$L_1(y_n) = \int_{t_0}^{t} \frac{L_1(K_{n-1}(t,\tau))}{W_0^2(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{\tau} h_1(s)\,ds} d\tau - \frac{h_1(t)}{W_0(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} h_1(s)\,ds} + \frac{h_1(t)}{W_0(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} h_1(s)\,ds} = 0.$$

Отже, функція $y_n(t)$, визначена формулою (4.14), є розв'язком рівняння (4.13). Із (4.14) і (4.16) випливає, що $y_n(t)$ задовольняє початкові умови $y_n(t_0) = \dot{y}_n(t_0) = \ldots = y_n^{(n-2)}(t_0) = 0$, $y_n^{(n-1)}(t_0) = W_0^{-1}(t_0)$. Обчислимо вронскіан системи розв'язків $y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t), y_n(t)$ при $t = t_0$:

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \ldots & y_{n-1}(t_0) & 0 \\ \dot{y}_1(t_0) & \dot{y}_2(t_0) & \ldots & \dot{y}_{n-1}(t_0) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(t_0) & y_2^{(n-2)}(t_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(t_0) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & y_2^{(n-1)}(t_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(t_0) & W_0^{-1}(t_0) \end{vmatrix} = 1.$$

Звідси випливає лінійна незалежність розв'язків $y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t), y_n(t)$. Оскільки розв'язок $y_n(t)$ існує й він єдиний на всьому інтервалі $I$, то функцію в правій частині формули (4.14) можна коректно довизначити в тих точках, де $W_0(t) = 0$. Формула Абеля (4.12) випливає з (4.14) при $n = 2$.

**Теорема 4.10**

Якщо матриця $A(t)$ дійсна, а лінійна однорідна система (4.1) ($f(t) \equiv 0$) має комплексний розв'язок $z(t) = u(t) + iv(t)$, то вона має також комплексно-спряжений розв'язок $\bar{z}(t) = u(t) - iv(t)$ і дійсні розв'язки $u(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$, $v(t) = \mathrm{Im}\, z(t)$ [аналогічне твердження справедливе для скалярного однорідного рівняння (4.2) ($g(t) \equiv 0$)].

**Доведення**

З рівності $Lz = 0$ випливає $Lz = Lu + iLv = 0$, звідки $Lu = 0$, $Lv = 0$. Тому $L\bar{z} = Lu - iLv = 0$.

**Теорема 4.11**

Нехай функції $z_1(t)$, $\bar{z}_1(t)$, $z_3(t)$, ..., $z_n(t)$ утворюють ФСР лінійної однорідної системи (4.1) ($f(t) \equiv 0$) із дійсною матрицею $A(t)$. Тоді функції $u_1(t) = \operatorname{Re} z_1(t)$, $v_1(t) = \operatorname{Im} z_1(t)$, $z_3(t)$, ..., $z_n(t)$ також утворюють ФСР цієї системи [аналогічне твердження справедливе для скалярного однорідного рівняння (4.2) ($g(t) \equiv 0$)].

**Доведення**

Оскільки за теоремою 4.10 функції $u_1(t)$, $v_1(t)$ є розв'язками лінійної однорідної системи, то достатньо довести лінійну незалежність функцій $u_1$, $v_1$, $z_3$, ..., $z_n$ на інтервалі $I$. Складемо тотожність

$$\alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 + \alpha_3 z_3 + \ldots + \alpha_n z_n = 0 \quad (t \in I).$$

Враховуючи, що $u_1 = \frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1)$, $v_1 = \frac{1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1)$, дістанемо

$$\frac{\alpha_1}{2}(z_1 + \bar{z}_1) + \frac{\beta_1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1) + \alpha_3 z_3 + \ldots + \alpha_n z_n = 0$$

або

$$\frac{1}{2}(\alpha_1 - i\beta_1) z_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + i\beta_1)\bar{z}_1 + \alpha_3 z_3 + \ldots + \alpha_n z_n = 0 \quad (t \in I),$$

звідки, внаслідок лінійної незалежності функцій $z_1$, $\bar{z}_1$, $z_3$, ..., $z_n$, маємо

$$\frac{1}{2}(\alpha_1 - i\beta_1) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + i\beta_1) = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0,$$
$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Твердження теорем 4.10, 4.11 використовуватимуться для побудови дійсних ФСР лінійних рівнянь.





## 4.2

## Метод варіації довільних сталих. Структура множини розв'язків лінійного неоднорідного рівняння

Узагальнюючи методи Лагранжа (варіації довільної сталої) й Бернуллі (див. п. 2.2) на випадок лінійних систем, розв'язок неоднорідної системи (4.1) шукатимемо у вигляді

$$x(t) = X(t)c(t) \quad (t \in I), \tag{4.17}$$

де $X(t)$ — фундаментальна матриця відповідної однорідної системи $Lx = 0$, $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))^T$ — невідома функція.

Підставляння (4.17) у (4.1) дає рівняння

$$\dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) - A(t)X(t)c(t) = f(t).$$

Оскільки (внаслідок теореми 4.5) $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, то з останнього співвідношення дістаємо ***систему методу Лагранжа***

$$X(t)\dot{c}(t) = f(t). \tag{4.18}$$

Ураховуючи, що $X(t)$ — невироджена матриця ($t \in I$), з (4.18) маємо

$$c(t) = c + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{4.19}$$

де $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ — вектор-стовпець довільних сталих.

Підставивши (4.19) у (4.17), дістанемо розв'язок системи (4.1):

$$x(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau \quad (t_0, t \in I). \tag{4.20}$$

Сім'я розв'язків (4.20) залежить від $n$ параметрів і містить (при $c = X^{-1}(t_0)x_0$) розв'язок задачі Коші для системи (4.1) з будь-якою початковою умовою $x(t_0) = x_0$. Цей розв'язок можна записати так:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \quad (t_0, t \in I), \tag{4.21}$$

де $X(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$, $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ — матриціанти (при $t = t_0$ і $t = \tau$ відповідно) лінійної однорідної системи. Тому функція, визначена формулою (4.20), є *загальним розв'язком лінійної неоднорідної системи (4.1) в області $D = I \times \mathbb{R}^n$*, а (4.21) є формою Коші загального розв'язку.

Аналізуючи формулу (4.20), можна зробити висновок, що загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (4.1) є *сумою загального розв'язку відповідної однорідної системи та якогось частинного розв'язку неоднорідної системи.*

Урахувавши зв'язок [формули (4.4), (4.5)] між розв'язком $y = y(t)$ рівняння (4.2) та розв'язком $x = x(t)$ еквівалентної лінійної системи, дістанемо, що розв'язок $y = y(t)$, згідно з методом Лагранжа, треба шукати у вигляді

$$y(t) = e_1 x(t) = e_1 X(t)c(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t), \tag{4.22}$$

де $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ — ФСР відповідного лінійного однорідного рівняння $L_1 y = 0$.

Використовуючи (4.18), дістанемо, що *система методу Лагранжа для скалярного рівняння (4.2)* має вигляд

$$X(t)\dot{c}(t) = f(t), \tag{4.23}$$

де $X(t) = [Py_1, \dots, Py_n]$, $f(t) = (0, \dots, 0, g(t))^T$.

З (4.20) дістаємо

$$y(t) = e_1 X(t)c + \int_{t_0}^{t} e_1 X(t) X^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{4.24}$$

Ураховуючи структуру матриць $e_1$, $X(t)$, $X^{-1}(\tau)$, $f(t)$, формулу (4.24) можна записати у вигляді

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau) g(\tau)\, d\tau \quad (t_0, t \in I), \tag{4.25}$$

де





$$K(t, \tau) = \frac{1}{W(\tau)} \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ \dot{y}_1(\tau) & \dots & \dot{y}_n(\tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-2)}(\tau) & \dots & y_n^{(n-2)}(\tau) \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix} \quad (n \ge 2) \tag{4.26}$$

— *функція Коші* лінійного однорідного рівняння $L_1 y = 0$, $c_1, \dots, c_n$ — довільні сталі. З (4.26) випливає, що функція Коші $K(t, \tau)$ при кожному фіксованому $\tau \in I$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння $L_1 y = 0$ і при $t = \tau$ задовольняє такі умови:

$$K(\tau, \tau) = \dot{K}(\tau, \tau) = \dots = K^{(n-2)}(\tau, \tau) = 0, \quad K^{(n-1)}(\tau, \tau) = 1. \tag{4.27}$$

Цими умовами функція Коші визначена однозначно.

Як випливає з (4.21), (4.25), (4.27), функції

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{4.28}$$

$$\tilde{y}(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, \tau) g(\tau)\, d\tau \tag{4.29}$$

є розв'язками лінійних неоднорідних рівнянь (4.1) та (4.2) відповідно і задовольняють нульові початкові умови. У зв'язку з цим матрицант $X(t, \tau)$ називають також *функцією (матрицею) Коші лінійної однорідної системи $Lx = 0$.*

Із лінійності операторів $L$, $L_1$, а також із формул (4.28), (4.29) випливає **принцип суперпозиції розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь**: *якщо $x^j(t)$ $(y_j(t))$ — розв'язок системи $Lx = f^j(t)$ [рівняння $L_1 y = g_j(t)$, $j = 1, \dots, m$], то $x(t) = \sum_{j=1}^{m} x^j(t)$ $\left( y(t) = \sum_{j=1}^{m} y_j(t) \right)$ — розв'язок системи $Lx = \sum_{j=1}^{m} f^j(t)$ [рівняння $L_1 y = \sum_{j=1}^{m} g_j(t)$].*

Якщо $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ — ФСР лінійного однорідного рівняння $L_1 y = 0$, $W(t)$ — вронскіан цієї системи, то функції

$$z_1(t) = \frac{1}{W(t_0)} \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot y_1(t_0) & \dots & \dot y_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(t_0) & \dots & y_n^{(n-2)}(t_0) \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}, \dots,$$

$$z_n(t) = \frac{1}{W(t_0)} \begin{vmatrix} y_1(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ \dot y_1(t_0) & \dots & \dot y_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(t_0) & \dots & y_n^{(n-2)}(t_0) \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix} \tag{4.30}$$

[ $z_k(t) = \dfrac{1}{W(t_0)} W_k(t)$, $k = 1, \dots, n$; визначник $W_k(t)$ утворюється з вронскіана $W(t_0)$ заміною $k$-го рядка на рядок $y_1(t), \dots, y_n(t)$] задовольняють початкові умови

$$z_k^{(i-1)}(t_0) = 0 \ \ (i \neq k), \ \ z_k^{(k-1)}(t_0) = 1 \ \ (k, i = 1, \dots, n)$$

і утворюють *нормальну (при $t_0 = t_0$) фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння* $L_1 y = 0$.

За допомогою нормальної фундаментальної системи (4.30) можна записати загальний розв'язок рівняння (4.2) у формі Коші:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_0^{(i-1)} z_i(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau) g(\tau) d\tau, \tag{4.31}$$

де $y_0^{(i-1)} = y^{(i-1)}(t_0)$ $(i = 1, \dots, n)$ — довільні початкові умови.

❑ **Приклад 4.1**

*Розглянемо лінійну неоднорідну систему*

$$\dot x_1 = x_2 + f_1(t),$$
$$\dot x_2 = \omega^2 x_1 + f_2(t) \ \ (\omega = \text{const} > 0).$$





У даному випадку $A(t) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ — стала матриця, $n = 2$. Безпосередньо перевіркою легко встановити, що векторні функції $x^1(t) = (e^{\omega t}, \omega e^{\omega t})^T$, $x^2(t) = (e^{-\omega t}, -\omega e^{-\omega t})^T$ є розв'язками відповідної лінійної однорідної системи. Оскільки

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\omega t} & e^{-\omega t} \\ \omega e^{\omega t} & -\omega e^{-\omega t} \end{vmatrix} = -2\omega \neq 0,$$

то матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\omega t} & e^{-\omega t} \\ \omega e^{\omega t} & -\omega e^{-\omega t} \end{pmatrix}$$

є фундаментальною.

Врахувавши, що $X^{-1}(t) = \dfrac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \omega e^{-\omega t} & e^{-\omega t} \\ \omega e^{\omega t} & -e^{\omega t} \end{pmatrix}$, знаходимо матрицант (матрицю Коші)

$$X(t, \tau) = X(t) X^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \omega(t-\tau) & \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(t-\tau) \\ \omega \operatorname{sh} \omega(t-\tau) & \operatorname{ch} \omega(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

За допомогою формули (4.21) записуємо загальний розв'язок даної системи у формі Коші:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \omega(t-t_0) & \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(t-t_0) \\ \omega \operatorname{sh} \omega(t-t_0) & \operatorname{ch} \omega(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \omega(t-\tau) & \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(t-\tau) \\ \omega \operatorname{sh} \omega(t-\tau) & \operatorname{ch} \omega(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

$$(x_0 = (x_{01}, x_{02})^T = x(t_0)).$$

❑ **Приклад 4.2**

*Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку*

$$L_1 y \equiv \ddot{y} + \omega^2 y = g(t) \quad (\omega = \text{const} > 0).$$

Оскільки $L_1(e^{i\omega t}) = -\omega^2 e^{i\omega t} + \omega^2 e^{i\omega t} = 0$ $(t \in \mathbb{R})$, то комплексна функція $y = e^{i\omega t}$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$. За теоремою 4.11 дійсні функції $y_1 = \operatorname{Re} e^{i\omega t} = \cos\omega t$, $y_2 = \operatorname{Im} e^{i\omega t} = \sin\omega t$ — також розв'язки цього рівняння. Оскільки

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix} = \omega \neq 0,$$

то функції $y_1 = \cos\omega t$, $y_2 = \sin\omega t$ утворюють ФСР лінійного однорідного рівняння. За формулою (4.26) будуємо функцію Коші

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \cos\omega\tau & \sin\omega\tau \\ \cos\omega t & \sin\omega t \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-\tau),$$

а за формулами (4.30) — нормальну фундаментальну систему розв'язків

$$z_1(t) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t_0 & \omega\cos\omega t_0 \end{vmatrix} = \cos\omega(t-t_0),$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \cos\omega t_0 & \sin\omega t_0 \\ \cos\omega t & \sin\omega t \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t_0).$$

Використовуючи (4.31), записуємо загальний розв'язок даного рівняння у формі Коші:

$$y(t) = y_0\cos\omega(t-t_0) + \frac{y_0'}{\omega}\sin\omega(t-t_0) + \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$$(y_0 = y(t_0),\ y_0' = y'(t_0)).$$

# Глава 5

# ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ Й СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

## 5.1

## Матричний метод інтегрування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами

Як відомо (див. п. 4.2), лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (систему рівнянь) завжди можна зінтегрувати, якщо відома ФСР відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння. Проте далеко не для кожного лінійного рівняння, а тим більше системи рівнянь, удається відшукати ФСР у явному вигляді. Так, наприклад, розв'язки «простого» (на перший погляд) рівняння $\ddot{x} + tx = 0$ принципово не можуть бути виражені через елементарні функції та інтеграли від них. Лінійні рівняння й системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами утворюють такий клас рівнянь, для яких відшукання ФСР по суті зводиться до алгебричних операцій.

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = Ax, \tag{5.1}$$

де $A = (a_{ij})$ — стала $(n \times n)$-вимірна матриця, $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ — шукана векторна функція.

Матричний метод інтегрування системи (5.1) є наслідком методу послідовних наближень (див. пп. 3.3, 3.4) і полягає у відшуканні фундаментальної матриці системи (5.1) безпосередньо за матрицею $A$. Згідно з методом послідовних наближень для розв'язку $x = x(t)$ $(x(0) = x_0)$ системи (5.1) маємо

$$x(t) = \lim_{k \to +\infty} x^k(t), \tag{5.2}$$

$$x^k(t) = x_0 + \int_0^t Ax^{k-1}(\tau)\,d\tau, \quad x^0(t) = x_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.3}$$

Знайдемо послідовні наближення:

$$\begin{aligned} x^1(t) &= x_0 + Atx_0 = (E_n + At)x_0, \\ x^2(t) &= x_0 + Atx_0 + \frac{1}{2!}A^2t^2x_0 = \left(E_n + At + \frac{1}{2!}(At)^2\right)x_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^k(t) &= \left(E_n + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(At)^k\right)x_0, \ldots, \end{aligned} \tag{5.4}$$

де $E_n$ — одинична матриця порядку $n$.

Із (5.2) і (5.4) випливає, що розв'язок $x(t)$ можна записати у вигляді

$$x(t) = \left(E_n + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(At)^k + \ldots\right)x_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} x_0. \tag{5.5}$$

Ураховуючи аналогію між скалярним розвиненням $e^{at} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(at)^k}{k!}$ $(a = \text{const} \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R})$ і матричним рядом у (5.5), введемо позначення

$$\exp At = e^{At} \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}. \tag{5.6}$$

Матричний ряд (5.6) називають *збіжним (абсолютно збіжним, рівномірно збіжним)*, якщо всі $n^2$ скалярних рядів, складених з елементів матриць $B_k(t) = \frac{1}{k!}(At)^k = (b_{kij}(t))$, збіжні (абсолютно збіжні, рівномірно збіжні).





Враховуючи, що $|b_{kij}(t)| \le \| B_k(t) \|$, до функціональних рядів $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{kij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ застосуємо мажорантну ознаку Вейєрштрасса на відрізку $[-r, r]$. Маємо:

$$\| B_k(t) \| = \frac{1}{k!} \| A^k \| |t|^k \le \frac{(\| A \| r)^k}{k!}.$$

Оскільки числовий ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\| A \| r)^k}{k!}$ збіжний (це легко перевірити, наприклад, за ознакою Д'Аламбера), то функціональні ряди $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{kij}(t)$, а отже, й матричний ряд (5.6) збігаються абсолютно й рівномірно на будь-якому відрізку $[-r, r] \subset \mathbb{R}$.

Матрицю $e^{At}$, визначену формулою (5.6), називають ***матричною експонентою* (експоненціалом) матриці** $At$. Із (5.5) тепер випливає, що

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (e^{A0} = E_n). \tag{5.7}$$

Аналогічно (5.7) можна дістати, що розв'язок $x(t)$ системи (5.1) із початковою умовою $x(t_0) = x_0$ має вигляд $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$.

Таким чином, матриці $X(t, 0) = e^{At}$ і $X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ є матрицантами (при $t = 0$ і $t = t_0$ відповідно) системи (5.1). Отже, задача інтегрування системи (5.1) еквівалентна задачі побудови матриці $e^{At}$.

### Основні властивості матричної експоненти

1. $\frac{d}{dt}(e^{At}) = e^{At}A = Ae^{At}$.
2. *Якщо* $AB = BA$, *то* $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$.
3. $e^{A(t-t_0)} = e^{At}e^{-At_0}$, $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.
4. $\det e^{At} = e^{\operatorname{tr} At}$.
5. *Якщо* $A = T^{-1}JT$, то $e^{At} = T^{-1}e^{Jt}T$.
6. *Якщо матриця $A$ має блоково-діагональну форму:* $A = \operatorname{diag}[A_1, \ldots, A_s]$, *то* $e^{At} = \operatorname{diag}[e^{A_1t}, \ldots, e^{A_st}]$.

* Детальніше про функції від матриць див. у [12].

Властивість 1 випливає з того, що матриця $e^{At}$ є фундаментальною матрицею системи (5.1).

Доведемо властивість 2. Оскільки $AB = BA$, то $e^{At}B = Be^{At}$ [матриця $B$ комутує з матрицями $(At)^k$]. Тоді $\frac{d}{dt}(e^{At}e^{Bt}) = e^{At}Ae^{Bt} + e^{At}e^{Bt}B = e^{At}Ae^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt}$ і $e^{At}e^{Bt} = X(t, 0)$ — матрицант (при $t = 0$) системи $\dot{x} = (A+B)x$. Отже, $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$.

Властивість 3 є наслідком властивості 2, оскільки матриці $At$, $-At_0$ і $-At$ очевидно комутують і $e^{At}e^{-At} = e^{A0} = E_n$.

Властивість 4 є еквівалентною формою запису формули Остроградського—Ліувілля (4.8).

Властивості 5, 6 випливають з означення (5.6) матричної експоненти й того факту, що $(At)^k = T^{-1}(Jt)^kT$ і відповідно $(At)^k = \operatorname{diag}[(A_1t)^k, ..., (A_st)^k]$ $(k = 0, 1, ...)$.

Матричну експоненту зручно будувати, використовуючи так звану *нормальну жорданову форму матриці*. Наведемо необхідні відомості з теорії матриць [12]. *Власним вектором квадратної матриці $A$ порядку $n$, який відповідає власному значенню (числу)* $\lambda$, називають вектор $h \neq 0$, що задовольняє умову $Ah = \lambda h$ або $(A - \lambda E_n)h = 0$. Остання лінійна однорідна система має нетривіальний розв'язок $h \neq 0$ тоді й лише тоді, коли $\Delta(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E_n) = 0$. Рівняння $\Delta(\lambda) = 0$ називають *характеристичним рівнянням*, а многочлен $n$-го степеня $\Delta(\lambda)$ — *характеристичним многочленом матриці $A$*. Корені характеристичного рівняння є власними числами матриці $A$. Власні вектори, які відповідають різним власним числам, лінійно незалежні. Квадратні матриці $A$ і $B$ називають *подібними*, якщо $A = T^{-1}BT$. Подібні матриці мають ті самі характеристичні многочлени: $\det(A - \lambda E_n) = \det(B - \lambda E_n)$. Якщо власні вектори $h_1, ..., h_n$ матриці $A$ утворюють базис $n$-вимірного лінійного векторного простору, то її називають *матрицею простої структури*. Зокрема, $A$ є матрицею простої структури тоді, коли всі її власні числа попарно різні. Матриця простої структури подібна *діагональній матриці* $J(A)$ : $A = T^{-1}J(A)T$, де

$$J(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n], \; T^{-1} = [h_1, ..., h_n]$$





(стовпцями матриці $T^{-1}$ є стовпці координат власних векторів у канонічному базисі $e_1 = (1, 0, ..., 0)^T, ..., e_n = (0, 0, ..., 1)^T$. Аби матриця $A$ була матрицею простої структури, необхідно й достатньо, щоб кожному власному числу $\lambda$ матриці $A$ кратності $p$ відповідало рівно $p$ лінійно незалежних власних векторів.

У загальному випадку, коли матриця $A$ має $s < n$ лінійно незалежних власних векторів, вона подібна *квазідіагональній матриці* $J(A)$ : $A = T^{-1}J(A)T$, де $J(A) = \operatorname{diag}[J_{m_1}(\lambda_1), ..., J_{m_s}(\lambda_s)]$,

$$J_{m_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

— $(m_i \times m_i)$-вимірна матриця, причому власні числа $\lambda_1, ..., \lambda_s$ не обов'язково різні. Матрицю $J(A)$ називають *нормальною жордановою формою матриці $A$*, а матрицю $J_{m_i}(\lambda_i)$ — *жордановою клітиною (блоком) матриці $A$* порядку $m_i$. Якщо $m_i = 1$, то $J_1(\lambda_i) = \lambda_i$ і жорданову клітину називають *простою*.

Кількість $s$ жорданових клітин дорівнює кількості лінійно незалежних власних векторів матриці $A$. Власному числу $\lambda$ кратності $p$ відповідає $r = n - \operatorname{rank}(A - \lambda E_n) \leq p$ жорданових клітин порядків $m_1, ..., m_r$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = p$. Якщо $r = p$, то $m_1 = m_2 = ... = m_r = 1$ і всі жорданові клітини, які відповідають власному числу $\lambda$, є простими. Зокрема, всі жорданові клітини матриці простої структури є простими.

Порядки $m_i$ жорданових клітин, які відповідають власному числу $\lambda_i$, визначаються кількістю власних і так званих *приєднаних векторів* $h_i, f_1^i, ..., f_{m_i-1}^i$. Ці вектори є розв'язками лінійних систем

$$Ah_i = \lambda_i h_i, \; Af_1^i = \lambda_i f_1^i + h_i, \; Af_2^i = \lambda_i f_2^i + f_1^i, ...,$$
$$Af_{m_i-1}^i = \lambda_i f_{m_i-1}^i + f_{m_i-2}^i \quad (i = 1, ..., s).$$

Сукупність усіх власних і приєднаних векторів матриці $A$ утворює базис $n$-вимірного лінійного векторного простору. Якщо побудувати матрицю із стовпців координат векторів цього базису:

$T^{-1} = [h_1, f_1^1, \ldots, f_{m_i-1}^1, \ldots, h_s, f_1^s, \ldots, f_{m_s-1}^s]$, то за допомогою перетворення подібності $A = T^{-1}I(A)T$ матрицю $A$ з точністю до розташування клітин можна звести до єдиної нормальної жорданової форми.

Якщо $A$ — дійсна $(n \times n)$-вимірна матриця, $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ ($\beta_j \neq 0, j = 1, \ldots, p$) — пари комплексно-спряжених власних чисел, $\gamma_k$ ($k = 1, \ldots, l$) — дійсні власні числа, то за допомогою перетворення подібності $A = T^{-1}D(A)T$ ($T$ — дійсна невироджена матриця) її можна звести до ***дійсної нормальної жорданової форми***

$$D(A) = \mathrm{diag}\,[K_{2n_1}(\lambda_1), \ldots, K_{2n_p}(\lambda_p), J_{m_1}(\gamma_1), \ldots, J_{m_l}(\gamma_l)],$$

де

$$K_2(\lambda_j) = S_j, \quad K_{2n_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} S_j & E_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & S_j & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & S_j & E_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & S_j \end{pmatrix} \quad (n_j > 1),$$

$$S_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, \ldots, p),$$

$$2(n_1 + \ldots + n_p) + m_1 + \ldots + m_l = n.$$

## Побудова матричної експоненти $e^{At}$

Нехай $A = T^{-1}J(A)T$, де $J(A)$ — нормальна жорданова форма матриці $A$. Використовуючи властивості 5 і 6 матричної експоненти, маємо

$$e^{At} = T^{-1}e^{J(A)t}T, \quad e^{J(A)t} = \mathrm{diag}\,[e^{J_{m_1}(\lambda_1)t}, \ldots, e^{J_{m_s}(\lambda_s)t}]. \tag{5.8}$$

Жорданову клітину $J_{m_i}(\lambda_i)$ запишемо у вигляді $J_{m_i} = \lambda_i E_{m_i} + I_{m_i}$, де $E_{m_i}$ — одинична матриця, а $I_{m_i}$ — матриця вигляду

$$I_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$





(матриці $E_{m_i}$ і $I_{m_i}$ очевидно комутують). Застосувавши властивість 2 матричної експоненти, дістанемо $e^{J_{m_i}(\lambda_i)t} = e^{\lambda_i E_{m_i} t + I_{m_i} t} = e^{\lambda_i E_{m_i} t} e^{I_{m_i} t} = e^{\lambda_i t} e^{I_{m_i} t}$. Матрицю $e^{I_{m_i} t}$ зручно будувати, використовуючи матричний ряд (5.6), оскільки $I_{m_i}^{m_i} = 0$ (таку матрицю називають *нільпотентною*) і в разі піднесення матриці $I_{m_i}$ до степеня $k (k < m_i)$ побічна діагональ з одиниць зсувається на $k-1$ позицію в напрямі правого верхнього кута матриці. Отже,

$$e^{J_{m_i}(\lambda_i)t} = e^{\lambda_i t}\left(E_{m_i} + I_{m_i}t + \frac{1}{2!}I_{m_i}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{(m_i-1)!}I_{m_i}^{m_i-1}t^{m_i-1}\right) = e^{\lambda_i t}T_{m_i}(t), \tag{5.9}$$

де

$$T_{m_i}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \ldots & \frac{1}{(m_i-1)!}t^{m_i-1} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{1}{(m_i-2)!}t^{m_i-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Таким чином, матрична експонента — матрицант $X(t, 0) = e^{At}$ лінійної системи (5.1), визначений формулами (5.8)—(5.10). Зокрема, якщо $A$ — матриця простої структури, то $e^{At} = T^{-1}\mathrm{diag}\,[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]T$.

Нехай тепер $A = T^{-1}D(A)T$, де $D(A)$ — дійсна жорданова форма матриці $A$. Для побудови матричної експоненти $e^{At}$ у цьому випадку, очевидно, достатньо знайти матриці $e^{K_{2n_j}(\lambda_j)t}$. Побудуємо спочатку матричні експоненти вигляду $e^{S_j t}$. Маємо: $S_j = \alpha_j E_2 + \beta_j I$, де $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{S_j t} = e^{\alpha_j E_2 t} e^{\beta_j I t} = e^{\alpha_j t} e^{\beta_j I t}$. Матрицю $e^{\beta_j I t}$ знайдемо за формулою (5.6), використовуючи співвідношення $I^{2k} = (-1)^k E_2$, $I^{2k+1} = (-1)^k I$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ (пропонуємо перевірити їх самостійно):

$$e^{\beta_j I t} = E_2 + I\beta_j t - E_2\frac{(\beta_j t)^2}{2!} - I\frac{(\beta_j t)^3}{3!} + E_2\frac{(\beta_j t)^4}{4!} + I\frac{(\beta_j t)^5}{5!} - \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\beta_j t)^2}{2!} + \frac{(\beta_j t)^4}{4!} - \ldots & \beta_j t - \frac{(\beta_j t)^3}{3!} + \frac{(\beta_j t)^5}{5!} - \ldots \\ -\beta_j t + \frac{(\beta_j t)^3}{3!} - \frac{(\beta_j t)^5}{5!} + \ldots & 1 - \frac{(\beta_j t)^2}{2!} + \frac{(\beta_j t)^4}{4!} - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_j t & \sin\beta_j t \\ -\sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$e^{S_j t} = e^{\alpha_j t}\begin{pmatrix} \cos\beta_j t & \sin\beta_j t \\ -\sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Матрицю $K_{2n_j}(\lambda_j)$ представимо у вигляді

$$K_{2n_j}(\lambda_j) = \Lambda_{2n_j} + \tilde{E}_{2n_j},$$

де $\Lambda_{2n_j} = \begin{pmatrix} S_j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & S_j & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & S_j \end{pmatrix} = \operatorname{diag}[S_j, \ldots, S_j]$, $\tilde{E}_{2n_j} = \begin{pmatrix} 0 & E_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Неважко перевірити, що блокові матриці $\Lambda_{2n_j}$ і $\tilde{E}_{2n_j}$ комутують. Тому, використовуючи властивості 2 і 6 матричної експоненти, дістанемо

$$e^{K_{2n_j}(\lambda_j)t} = e^{\Lambda_{2n_j}t}e^{\tilde{E}_{2n_j}t} = \operatorname{diag}[e^{S_j t}, \ldots, e^{S_j t}]e^{\tilde{E}_{2n_j}t}. \tag{5.12}$$

Матрицю $e^{\tilde{E}_{2n_j}t}$ будуємо, використовуючи матричний ряд (5.6). Оскільки $\tilde{E}_{2n_j}^{n_j} = 0$ і при піднесенні матриці $\tilde{E}_{2n_j}$ до степеня $k$ $(k < n_j)$ побічна блокова діагональ з одиничних матриць $E_2$ зсувається на $k - 1$ позицію в напрямі правого верхнього кута матриці, то





$$e^{\tilde{E}_{2n_j}t} = E_{2n_j} + \tilde{E}_{2n_j}t + \frac{1}{2!}\tilde{E}_{2n_j}t^2 + \ldots + \frac{1}{(n_j-1)!}\tilde{E}_{2n_j}^{n_j-1}t^{n_j-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_2 & tE_2 & \frac{1}{2!}t^2E_2 & \ldots & \frac{1}{(n_j-1)!}t^{n_j-1}E_2 \\ 0 & E_2 & tE_2 & \ldots & \frac{1}{(n_j-2)!}t^{n_j-2}E_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ E_2 & tE_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Урахувавши (5.12) і (5.13), дістанемо

$$e^{K_{2n_j}(\lambda_j)t} = \begin{pmatrix} e^{S_j t} & te^{S_j t} & \frac{1}{2!}t^2e^{S_j t} & \ldots & \frac{1}{(n_j-1)!}t^{n_j-1}e^{S_j t} \\ 0 & e^{S_j t} & te^{S_j t} & \ldots & \frac{1}{(n_j-2)!}t^{n_j-2}e^{S_j t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ e^{S_j t} & te^{S_j t} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 & e^{S_j t} \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

де матриця $e^{S_j t}$ визначена формулою (5.11), $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

❑ **Приклад 5.1**

*Користуючись формулами (5.8)—(5.10), знайдемо матричні експоненти нормальних жорданових форм матриць другого й третього порядків.*

а) $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ($n = 2$; матриця $A$ має дві прості жорданові клітини: $m_1 = m_2 = 1$ і є матрицею простої структури). Отже,

$$e^{J(A)t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}].$$

б) $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ($n = 2$; матриця $A$ має одну жорданову клітину порядку $m_1 = 2$ ). Отже,

$$e^{J(A)t} = e^{\lambda t}T_2(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ($n = 3$; матриця $A$ має три прості жорданові клітини: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ і є матрицею простої структури). Отже,

$$e^{J(A)t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}].$$

г) $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ($n = 3$; матриця $A$ має дві жорданові клітини: $m_1 = 2$, $m_2 = 1$). Отже,

$$e^{J(A)t} = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}T_2(t), e^{\lambda_2 t}] = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

д) $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ($n = 3$; матриця $A$ має дві жорданові клітини: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$).

$$e^{J(A)t} = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}T_2(t)] = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$





е) $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ($n = 3$; матриця $A$ має одну жорданову клітину порядку $m_1 = 3$). Отже,

$$e^{J(A)t} = e^{\lambda t}T_3(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❑ **Приклад 5.2**

*Матричним методом зінтегруємо систему*

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці $A$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

має корінь $\lambda = 2$ кратності $p = 2$. Оскільки $\operatorname{rank}(A - 2E_2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$, то матриця $A$ має $r = 2 - 1 = 1$ жорданову клітину:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таку, що $A = T^{-1}J(A)T$, знайдемо з матричного рівняння $TA = J(A)T$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для визначення $a$, $b$, $c$, $d$ дістаємо лінійну систему рівнянь

$$3a - b = 2a + c, \quad a + b = 2b + d, \quad 3c - d = 2c, \quad c + d = 2d,$$

яка еквівалентна системі

$$a - b - c = 0, \quad c - d = 0.$$

Одним із розв'язків цієї системи є $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$. Отже,

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x = e^{At}c,$$

де $c = (c_1, c_2)^T$ — вектор довільних сталих.

Зауважимо, що вектори $h = (1, -1)^T$ і $f = (-2, 3)^T$ є відповідно власним і приєднаним векторами матриці $A$.

**❑ Приклад 5.3**

*За допомогою матриціанта $e^{At}$ розв'яжемо задачу Коші*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці $A$ знайдемо з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0.$$

Маємо: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.





Оскільки $\operatorname{rank}(A - 2E_3) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$, то власному числу $\lambda = 2$ відповідає $r = 3 - 2 = 1$ жорданова клітина порядку $m_1 = 2$. Власному числу $\lambda = 3$ відповідає проста жорданова клітина ($m_2 = 1$). Отже,

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $T = (a_{ij})$, для якої $A = T^{-1}J(A)T$, аналогічно прикладу 5.2 знаходимо з матричного рівняння $TA = J(A)T$, звідки (пропонуємо виконати обчислення самостійно) $a_{11} = 3$, $a_{12} = a_{32} = 0$, $a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{33} = 1$, $a_{13} = 2$,

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вектори $h_1 = (1, 0, -1)^T$, $f_1 = (0, 1, 0)^T$ є відповідно власним і приєднаним векторами, що відповідають власному числу $\lambda = 2$, а вектор $h_2 = (-2, -1, 2)^T$ — власним вектором, який відповідає власному числу $\lambda = 3$.

Знаходимо:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}(3+t) - 2e^{3t} & te^{2t} & e^{2t}(2+t) - 2e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -e^{2t}(3+t) + 3e^{3t} & -te^{2t} & -e^{2t}(2+t) + 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд

$$x(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}.$$

❑ **Приклад 5.4**

*Знайдемо матричні експоненти $e^{At}$ для матриць*

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A_1 = \operatorname{diag}[S, S]$, де $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, то, використовуючи формулу (5.11), маємо

$$e^{A_1 t} = \operatorname{diag}\,[e^{St}, e^{St}] = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t & 0 & 0 \\ -\sin\beta t & \cos\beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & \sin\beta t \\ 0 & 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Матрицю $e^{A_2 t}$ знаходимо, використовуючи формулу (5.14) ($n_j = 2$):

$$e^{A_2 t} = \begin{pmatrix} e^{St} & te^{St} \\ 0 & e^{St} \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t & t\cos\beta t & t\sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t & -t\sin\beta t & t\cos\beta t \\ 0 & 0 & \cos\beta t & \sin\beta t \\ 0 & 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

## 5.2

## Метод Ейлера інтегрування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами

Згідно з методом Ейлера спочатку знайдемо розв'язки лінійної однорідної системи $\dot{x} = Ax$ [система (5.1)], які мають вигляд

$$x = x(t) = he^{\lambda t} \quad (\lambda = \text{const} \in \mathbb{C}, \ \ h \neq 0 \ \text{— сталий вектор}). \qquad (5.15)$$





Якщо підставити (5.15) у (5.1) і поділити обидві частини добутої рівності на $e^{\lambda t}$, дістанемо

$$Ah = \lambda h, \ \ (A - \lambda E_n)h = 0. \qquad (5.16)$$

Система (5.16) має нетривіальний розв'язок ($h \neq 0$) тоді й лише тоді, коли $\lambda$ є коренем характеристичного рівняння матриці $A$:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E_n) = 0. \qquad (5.17)$$

Із (5.15)—(5.17) випливає, що функція $he^{\lambda t}$ є нетривіальним розв'язком системи (5.1) тоді й лише тоді, коли $\lambda$ — власне число, а $h$ — власний вектор матриці $A$, який відповідає власному числу $\lambda$.

Нехай матриця $A$ є матрицею простої структури, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — її власні числа, $h_1, \ldots, h_n$ — відповідні їм лінійно незалежні власні вектори (нагадаємо, що матриця $A$ є матрицею простої структури зокрема тоді, коли всі її власні числа попарно різні). В цьому випадку відразу дістаємо ФСР системи (5.1): $h_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, h_n e^{\lambda_n t}$ та її загальний розв'язок

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k h_k e^{\lambda_k t}, \qquad (5.18)$$

де $c_1, \ldots, c_n$ — довільні сталі.

Нехай тепер матриця $A$ не є матрицею простої структури. Аналізуючи будову фундаментальної матриці (матрицанта) $e^{At}$ системи (5.1) [формули (5.8)—(5.10)] у цьому випадку, можна зробити висновок про те, що загальний розв'язок $x(t) = e^{At}c$ системи (5.1) має вигляд

$$x(t) = \sum_{j=1}^{s} (p_0^j + p_1^j t + \ldots + p_{m_j-1}^j t^{m_j-1})e^{\lambda_j t}, \qquad (5.19)$$

де $P_j(t) = p_0^j + p_1^j t + \ldots + p_{m_j-1}^j t^{m_j-1}$ — векторний многочлен степеня $m_j - 1$, $m_j$ — порядок відповідної жорданової клітини, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — власні (не обов'язково різні) числа матриці $A$.

На практиці порядки жорданових клітин, як правило, невідомі. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — всі різні власні числа матриці $A$, $p_1, \ldots, p_k$ — їхні кратності. Об'єднуючи в (5.19) доданки з однаковою експонентою і враховуючи, що $m_j \le p_j$ ($j = 1, ..., s$), дістанемо

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} z_j(t), \tag{5.20}$$

де $z_j(t) = Q_j(t)e^{\lambda_j t}$ — частина загального розв'язку, котра відповідає власному числу $\lambda_j$, а $Q_j(t)$ — векторна функція, компоненти якої є многочленами степеня, не вищого за $p_j - 1$.

Підсумовуючи, робимо висновок, що ***метод Ейлера інтегрування лінійної однорідної системи (5.1)*** передбачає такі е т а п и:

1) знаходження коренів характеристичного рівняння матриці $A$ (5.17) — власних чисел матриці $A$;
2) знаходження власних векторів матриці $A$ і запис загального розв'язку (5.18) у випадку, коли матриця $A$ є матрицею простої структури;
3) відшукання частини загального розв'язку, яка відповідає власному числу $\lambda_j$, у вигляді

$$z_j(t) = Q_j(t)e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, ..., k), \tag{5.21}$$

де $Q_j(t)$ — векторна функція, компоненти якої є многочленами степеня, не вищого за $p_j - 1$, з невизначеними коефіцієнтами. (Зауважимо, що у випадку, коли $\lambda_j$ — просте ($p_j = 1$) власне число, то $Q_j(t) \equiv h_j$ — власний вектор матриці $A$, який відповідає власному числу $\lambda_j$ );
4) запис загального розв'язку системи (5.1) у вигляді (5.20).

### ◆ Зауваження 5.1

За допомогою методу Ейлера можна побудувати загальний розв'язок, а отже, і (взагалі кажучи, комплексну) ФСР. Якщо матриця $A$ дійсна й усі її власні числа дійсні, то власні вектори й коефіцієнти многочленів $Q_j(t)$ у (5.21) можна вибрати дійсними. Тоді матимемо дійсну ФСР. Якщо дійсна матриця $A$, крім дійсних власних чисел, має ще й комплексні (як відомо, вони можуть входити лише комплексно-спряженими парами): $\lambda_j, \overline{\lambda}_j$ ($j = 1, ..., p$), то цим власним числам у комплексній ФСР відповідають комплексно-спряжені розв'язки $z_j(t), \overline{z}_j(t)$ ($j = 1, ..., p$). Замінюючи кожну пару комплексно-спряжених розв'язків парою дійсних





розв'язків типу $\operatorname{Re} z_j(t)$, $\operatorname{Im} z_j(t)$ [або $\operatorname{Re} \bar{z}_j(t)$, $\operatorname{Im} \bar{z}_j(t)$] на основі тверджень теорем 4.10, 4.11, дістанемо дійсну ФСР.

### ◆ Зауваження 5.2

Якщо за допомогою методу Ейлера побудовано якусь фундаментальну матрицю $X(t)$ системи (5.1), то тим самим побудовано й матричну експоненту $e^{At}$, оскільки, внаслідок єдиності матриціанта (при $t = 0$) маємо $X(t)X^{-1}(0) = X(t, 0) = e^{At}$.

### ❑ П р и к л а д 5.5

Характеристичне рівняння матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}: \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

має різні корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Власні вектори, які відповідають цим власним числам, знаходимо із систем

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

відповідно. Звідси

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(нагадаємо, що власні вектори визначені з точністю до числового множника) і загальний розв'язок системи $\dot{x} = Ax$ має вигляд

$$x(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{3t}.$$

### ❑ П р и к л а д 5.6

Характеристичне рівняння матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}: \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda = 2$, знаходимо із системи

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ -\gamma_1 \end{pmatrix} = \gamma_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $\gamma_1$, $\gamma_2$ — довільні сталі. Отже, власному числу $\lambda = 2$ відповідають два лінійно незалежних власних вектори $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Власний вектор, який відповідає власному числу $\lambda = 3$, знаходимо із системи

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$h = \begin{pmatrix} 2\gamma \\ \gamma \\ -3\gamma \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

де $\gamma$ — довільна стала. Отже, власному числу $\lambda = 3$ відповідає власний вектор $h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Матриця $A$ є матрицею простої структури, оскільки власні вектори $h_1$, $h_2$, $h_3$ лінійно незалежні.





Загальний розв'язок системи $\dot{x} = Ax$ має вигляд

$$x(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 2e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & 0 & -3e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

де $c_1$, $c_2$, $c_3$ — довільні сталі.

**❑ Приклад 5.7**

Корені характеристичного рівняння матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}: \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

комплексно-спряжені: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ $(\lambda_2 = \overline{\lambda}_1)$.

Власний вектор $h_1$, який відповідає власному числу $\lambda_1 = 2 - i$, знаходимо із системи

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$h_{21} = -\frac{1}{2}(1+i)h_{11},\quad h = \begin{pmatrix} -2\gamma \\ (1+i)\gamma \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix},\quad h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця $A$ дійсна, то власному числу $\lambda_2 = 2 + i$ відповідає власний вектор $h_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Матриця $A$ має просту структуру (оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Тому комплексна ФСР системи $\dot{x} = Ax$ записується у вигляді

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix}e^{(2-i)t},\quad \overline{z}_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \end{pmatrix}e^{(2+i)t}.$$

Щоб дістати дійсну ФСР, достатньо виділити (див. теорему 4.11) дійсну й уявну частини розв'язку $z_1(t)$ або $\overline{z}_1(t)$:

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t - i\sin t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos t + i2\sin t \\ \cos t + \sin t + i(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}.$$

Звідси дістаємо дійсну ФСР:

$$u = \operatorname{Re} z_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -2\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad v = \operatorname{Im} z_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

❑ **Приклад 5.8**

Характеристичне рівняння матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}: \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

має корінь $\lambda = 2$ кратності $p = 2$. Відповідно до (5.20), (5.21) загальний розв'язок системи $\dot{x} = Ax$ шукаємо у вигляді $x(t) = (p_0 + p_1 t)e^{2t}$, де $p_0 = (\alpha, \beta)^T$, $p_1 = (\gamma, \delta)^T$ — невідомі вектори. Підставлення $x(t)$ у систему дає тотожності

$$p_1 e^{2t} + 2(p_0 + p_1 t)e^{2t} = (Ap_0 + Ap_1 t)e^{2t},$$

$$(A - 2E_2)p_1 t + (A - 2E_2)p_0 - p_1 = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $t$ у лівій і правій частинах останньої рівності, маємо $(A - 2E_2)p_1 = 0$, $(A - 2E_2)p_0 = p_1$ або в координатній формі: $\begin{matrix} \gamma + \delta = 0, \\ -\gamma - \delta = 0. \end{matrix}$ Звідси $\begin{matrix} \gamma = c_2, & \alpha + \beta = c_2, \\ \delta = -c_2, & -\alpha - \beta = -c_2, \end{matrix}$ звідки

$\begin{matrix} \alpha = c_1 + c_2 \\ \beta = -c_1. \end{matrix}$ Отже, загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \left(\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} t\right) e^{2t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2(1+t)e^{2t} \\ -c_1 e^{2t} - c_2 t e^{2t} \end{pmatrix},$$

де $c_1$, $c_2$ — довільні сталі.





# 5.3

## Метод Ейлера інтегрування лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$L_1 y \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{5.22}$$

де коефіцієнти $a_j$ ($j = 1, \ldots, n$) — сталі числа.

Оскільки скалярне рівняння (5.22) еквівалентне лінійній однорідній системі $\dot{x} = Ax$, в якій $x = x(t) = (y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))^T$, а стала матриця $A$ має вигляд [див. (4.3)]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

то до інтегрування рівняння (5.22) можна застосувати метод Ейлера для лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами, викладений у п. 5.2. Щоб урахувати специфіку саме скалярних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, розглянемо основні положення методу Ейлера для рівняння (5.22).

Нетривіальні розв'язки рівняння (5.22) шукатимемо у вигляді $y = e^{\lambda t}$ ($\lambda = \text{const}$). Оскільки $L_1(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}D(\lambda)$, де

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{5.24}$$

то з (5.22) випливає, що функція $e^{\lambda t}$ є розв'язком тоді й лише тоді, коли число $\lambda$ є коренем рівняння

$$D(\lambda) = 0. \tag{5.25}$$

Многочлен $n$-го степеня $D(\lambda)$ називають *характеристичним многочленом*, а рівняння $D(\lambda) = 0$ — *характеристичним рівнянням лінійного диференціального оператора* $L_1$, визначеного формулою (5.22). Неважко показати (пропонуємо зробити це самостійно), що $D(\lambda) = (-1)^n\Delta(\lambda)$, де $\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ — характеристичний многочлен матриці $A$ (5.23).

Нехай характеристичне рівняння (5.25) має $n$ різних (простих) коренів $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Тоді є $n$ розв'язків рівняння (5.22) вигляду

$$e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}. \tag{5.26}$$

Неважко переконатися в тому, що (5.26) — ФСР рівняння (5.22). Для цього достатньо обчислити вронскіан системи (5.26) при $t = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < k \le n} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0$$

(використано формулу визначника Вандермонда).

Якщо серед коренів характеристичного рівняння (5.25) є кратні, то розв'язків вигляду $e^{\lambda_j t}$ буде менше, ніж $n$, і їх не вистачить для побудови ФСР. Нехай $\lambda_0$ — корінь характеристичного рівняння (5.25) кратності $p_0$. Тоді $D(\lambda_0) = D'(\lambda_0) = ... = D^{(p_0-1)}(\lambda_0) = 0$, $D^{(p_0)}(\lambda_0) \neq 0$. Покажемо, що в цьому випадку розв'язками рівняння (5.22) є функції вигляду $t^{j-1}e^{\lambda_0 t}$ $(j = 1, ..., p_0)$. Для цього тотожність $L_1(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}D(\lambda)$ здиференціюємо $j - 1$ разів по параметру $\lambda$ і покладемо $\lambda = \lambda_0$:

$$L_1(t^{j-1}e^{\lambda_0 t}) = \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^i t^{j-1-i} e^{\lambda_0 t} D^{(i)}(\lambda_0) = 0 \ \ (j = 1, ..., p_0).$$

Нехай тепер $\lambda_1, ..., \lambda_k$ — усі різні корені характеристичного рівняння (5.25), $p_1, ..., p_k$ — їхні кратності $(p_1 + ... + p_k = n)$. Виписавши для кожного $\lambda_s$ розв'язки вигляду $t^{j-1}e^{\lambda_s t}$ $(j = 1, ..., p_s)$, дістанемо $n$ розв'язків рівняння (5.22):

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, ..., t^{p_1-1}e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, ..., t^{p_k-1}e^{\lambda_k t}. \tag{5.27}$$





Доведемо, що система розв'язків (5.27) лінійно незалежна на будь-якому інтервалі $I = (\alpha_0, \beta_0)$. Із припущення про їхню лінійну залежність випливає, що на $I$ виконується тотожність

$$e^{\lambda_1 t}Q_1(t) + e^{\lambda_2 t}Q_2(t) + ... + e^{\lambda_k t}Q_k(t) = 0, \tag{5.28}$$

де $Q_j(t)$ $(j = 1, ..., k)$ — многочлени степеня, не вищого за $p_j - 1$, причому серед них є принаймні один [нехай це $Q_k(t)$], який не є тотожним нулем. Поділимо (5.28) на $e^{\lambda_1 t}$ і здиференціюємо добуту тотожність $p_1$ разів. Тоді дістанемо тотожність вигляду

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}A_2(t) + ... + e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}A_k(t) = 0. \tag{5.29}$$

Степені многочленів $A_j(t)$ $(j = 2, ..., k)$ збігаються зі степенями многочленів $Q_j(t)$, оскільки при $l$-кратному диференціюванні виразу $e^{\gamma t}Q_j(t)$ дістаємо вираз вигляду $e^{\gamma t}A_j(t)$, де $A_j(t)$ — многочлен, коефіцієнт при старшому степені якого відрізняється від коефіцієнта при старшому степені многочлена $Q_j(t)$ множником $\gamma^l$. Тому, зокрема, $A_k(t)$ не є тотожним нулем. Рівність (5.29) поділимо на $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ і добуту тотожність здиференціюємо $p_2$ разів і т. д. На $(k - 1)$-му кроці дістанемо тотожність вигляду $D_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{k-1})t} = 0$, звідки $D_k(t) \equiv 0$, що неможливо, оскільки степінь многочлена $D_k(t)$ дорівнює степені многочлена $Q_k(t)$, який за припущенням не є тотожним нулем.

Таким чином, (5.27) є фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння (5.22).

Підсумовуючи, робимо висновок, що ***метод Ейлера інтегрування лінійного однорідного рівняння (5.22)*** передбачає такі етапи:

1) знаходження коренів характеристичного рівняння (5.25);
2) запис ФСР у вигляді (5.26), якщо корені характеристичного рівняння $\lambda_1, ..., \lambda_n$ різні й відшукання загального розв'язку

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}$$

($c_j$ — довільні сталі);

3) запис ФСР у вигляді (5.27), якщо корені характеристичного рівняння $\lambda_1, ..., \lambda_k$ $(k \le n)$ мають кратності $p_1, ..., p_k$, і знаходження загального розв'язку

$$y = \sum_{j=1}^{k} (c_1^j + c_2^j t + \dots + c_{p_j}^j t^{p_j - 1}) e^{\lambda_j t}$$

($c_1^j, \dots, c_{p_j}^j$ — довільні сталі).

◆ **Зауваження 5.3**

Фундаментальні системи розв'язків (5.26) і (5.27) у загальному випадку є комплексними (розв'язки, які відповідають комплексним $\lambda_j$ комплексні). Нехай коефіцієнти $a_1, \dots, a_n$ — дійсні числа, а характеристичне рівняння (5.25), крім дійсних коренів, має ще й комплексні (які входять комплексно-спряженими парами однієї кратності): $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ ($j = 1, \dots, p$). Тоді цим кореням відповідають комплексно-спряжені розв'язки $y_j(t), \bar{y}_j(t)$ ($j = 1, \dots, p$). Замінюючи в комплексній ФСР кожну таку пару комплексно-спряжених розв'язків парою дійсних розв'язків типу $\operatorname{Re} y_j(t)$, $\operatorname{Im} y_j(t)$ [або $\operatorname{Re} \bar{y}_j(t)$, $\operatorname{Im} \bar{y}_j(t)$] на основі тверджень теорем 4.10, 4.11, дістанемо дійсну ФСР рівняння (5.22).

Розглянемо деякі диференціальні рівняння, які зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

**Рівняння Ейлера.** Це рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

де $y^{(j)} = \dfrac{d^j y}{dx^j}$, $a_j = \text{const}$ ($j = 1, \dots, n$).

Заміною незалежної змінної $x = e^t$ ($x = -e^t$ при $x < 0$) рівняння Ейлера можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами. Справді,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t} =$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}, \dots$$





Аналогічно показуємо, що $x^k \dfrac{d^k y}{dx^k}$ ($k = 3, \dots, n$) є лінійною комбінацією похідних від $y$ по $t$ зі сталими коефіцієнтами.

На практиці зручніше шукати розв'язок рівняння Ейлера відразу у вигляді $y = e^{\lambda t} = x^{\lambda}$. Підставивши в рівняння й поділивши обидві частини на $x^{\lambda}$, дістанемо так зване *визначальне (характеристичне) рівняння:*

$$\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_1\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Якщо корені $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ визначального рівняння різні, то загальний розв'язок рівняння Ейлера має вигляд

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^{n} c_j x^{\lambda_j}$$

($c_j$ — довільні сталі).

Якщо визначальне рівняння має корені $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($k \le n$) кратностей $p_1, \dots, p_k$ відповідно, то загальний розв'язок рівняння Ейлера набирає вигляду

$$y = \sum_{j=1}^{k} (c_1^j + c_2^j t + \dots + c_{p_j}^j t^{p_j - 1}) e^{\lambda_j t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (c_1^j + c_2^j \ln x + \dots + c_{p_j}^j (\ln x)^{p_j - 1}) x^{\lambda_j}$$

($c_1^j, \dots, c_{p_j}^j$ — довільні сталі).

◆ **Зауваження 5.4**

Будуючи дійсну ФСР рівняння Ейлера, слід ураховувати, що у випадку комплексного кореня $\lambda = \alpha + i\beta$ визначального рівняння за означенням маємо

$$x^{\lambda} = e^{\lambda \ln x} = e^{\alpha \ln x + i\beta \ln x} = x^{\alpha} e^{i\beta \ln x} = x^{\alpha}(\cos \beta \ln x + i \sin \beta \ln x).$$

◆ **Зауваження 5.5**

**Неважко перевірити, що коли функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння Ейлера при $x > 0$, то функція $y = \varphi(-x)$ є його розв'язком при $x < 0$. Тому формулою $y = \varphi(|x|)$ охоплюються обидва випадки.**

**Рівняння Лагранжа.** Це рівняння вигляду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0,$$

де $y^{(j)} = \dfrac{d^j y}{dx^j}$, $a \neq 0$, $b, a_j = \text{const}$ $(j = 1, \ldots n)$.

Заміною $ax + b = \tau$ ($\tau$ — нова незалежна змінна) рівняння Лагранжа зводиться до рівняння Ейлера.

**Рівняння Чебишова.** Це лінійне рівняння другого порядку

$$(1-x^2)y'' - xy' \pm \omega^2 y = 0 \quad (\omega = \text{const} \in \mathbb{R}).$$

Заміною $x = \cos t$ при $|x| < 1$ рівняння Чебишова зводиться до рівняння вигляду $\dfrac{d^2y}{dt^2} \pm \omega^2 y = 0$. Справді,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt}\sin^{-1} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{dy}{dt}(\sin t)^{-1}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}\sin^{-2} t - \frac{dy}{dt}\cos t \sin^{-3} t.$$

Підставивши в рівняння, дістаємо:

$$\sin^2 t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\sin^{-2} t - \frac{dy}{dt}\cos t\sin^{-3} t\right) + \frac{dy}{dt}\cos t\ \sin^{-1} t \pm \omega^2 y = 0,$$

або

$$\frac{d^2y}{dt^2} \pm \omega^2 y = 0.$$





При $|x| > 1$ рівняння Чебишова зводиться до рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} \mp \omega^2 y = 0$$

за допомогою заміни $x = \operatorname{ch} t$ ($x = -\operatorname{ch} t$ при $x < -1$).

❑ **Приклад 5.9**

***Використовуючи метод Ейлера, знайдемо ФСР таких рівнянь:***

а) $y'' - \omega^2 y = 0$ $(\omega = \text{const} > 0)$;
б) $y'' + 3y' + 2y = 0$;
в) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;
г) $y^{IV} - 3y''' + 2y'' = 0$.

Складаємо характеристичні рівняння:
а) $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ ($\lambda_{1,2} = \pm\omega$ — прості корені);
б) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ($\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ — прості корені);
в) $(\lambda - 1)^3 = 0$ ($\lambda = 1$ — корінь кратності 3);
г) $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$ ($\lambda_1 = 0$ — корінь кратності 2; $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ — прості корені).

ФСР даних рівнянь мають такий вигляд:

а) $e^{\omega t}$, $e^{-\omega t}$; б) $e^{-2t}$, $e^{-t}$; в) $e^t$, $te^t$, $t^2e^t$; г) $1$, $t$, $e^t$, $e^{2t}$.

❑ **Приклад 5.10**

***Використовуючи метод Ейлера, знайдемо комплексні та дійсні ФСР таких рівнянь:***

а) $y'' + \omega^2 y = 0$ $(\omega = \text{const} > 0)$;
б) $y'' + 2y' + 2y = 0$;
в) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$;
г) $y''' - 8y = 0$.

Складаємо характеристичні рівняння:
а) $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ ($\lambda_{1,2} = \pm\omega$ — прості корені);
б) $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ ($\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ — прості корені);
в) $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ ($\lambda_{1,2} = \pm i$ — пара комплексно-спряжених коренів кратності 2);
г) $\lambda^3 - 8 = 0$ ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$ — прості корені).

Комплексні ФСР даних рівнянь мають такий вигляд:

а) $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$;　　в) $e^{it}$, $te^{it}$, $e^{-it}$, $te^{-it}$;

б) $e^{(-1+i)t}$, $e^{(-1-i)t}$;　　г) $e^{2t}$, $e^{(-1+i\sqrt{3})t}$, $e^{(-1-i\sqrt{3})t}$.

Виділяючи дійсні та уявні частини комплексних розв'язків, будуємо дійсні ФСР:

а) $\cos\omega t$, $\sin\omega t$;　　в) $\cos t$, $t\cos t$, $\sin t$, $t\sin t$;

б) $e^{-t}\cos t$, $e^{-t}\sin t$;　　г) $e^{2t}$, $e^{-t}\cos\sqrt{3}t$, $e^{-t}\sin\sqrt{3}t$.

**❑ Приклад 5.11**

*Зінтегруємо рівняння Ейлера* ($\omega\in\mathbb{R}$, $x>0$):

а) $x^2y''+xy'+\omega^2y=0$;　　г) $x^2y''+5xy'+4y=0$;

б) $x^2y''+xy'-\omega^2y=0$;　　д) $x^2y''+3xy'+2y=0$.

в) $x^2y''+6xy'+4y=0$;

Визначальні рівняння мають такий вигляд:

а) $\lambda(\lambda-1)+\lambda+\omega^2=0$ ($\lambda=\pm i\omega$ — прості корені при $\omega\neq 0$, $\lambda=0$ — корінь кратності 2 при $\omega=0$);

б) $\lambda(\lambda-1)+\lambda-\omega^2=0$ ($\lambda=\pm\omega$ — прості корені при $\omega\neq 0$);

в) $\lambda(\lambda-1)+6\lambda+4=0$ ($\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-4$ — прості корені);

г) $\lambda(\lambda-1)+5\lambda+4=0$ ($\lambda_{1,2}=-2$ — корінь кратності 2);

д) $\lambda(\lambda-1)+3\lambda+2=0$ ($\lambda_{1,2}=-1\pm i$ — прості корені).

Запишемо загальні розв'язки даних рівнянь у дійсній формі:

а) $y=c_1+c_2\ln x$ ($\omega=0$), $y=c_1\cos(\omega\ln x)+c_2\sin(\omega\ln x)$ ($\omega\neq 0$);

б) $y=c_1x^{\omega}+c_2x^{-\omega}$ ($\omega\neq 0$);　　г) $y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln x$;

в) $y=c_1x^{-4}+c_2x^{-1}$;　　д) $y=c_1x^{-1}\cos(\ln x)+c_2x^{-1}\sin(\ln x)$.

Для побудови дійсних ФСР даних рівнянь були використані співвідношення

$$x^{i\omega}=e^{i\omega\ln x}=\cos(\omega\ln x)+i\sin(\omega\ln x),$$

$$x^{-1+i}=e^{(-1+i)\ln x}=x^{-1}(\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)).$$





**❑ Приклад 5.12**

*Зінтегруємо рівняння Чебишова:*

а) $(1-x^2)y''-xy'+\omega^2y=0$ ($|x|<1$);

б) $(1-x^2)y''-xy'+\omega^2y=0$ ($|x|>1$).

Заміна $x=\cos t$ ($t\in(0,\pi)$) у випадку а) приводить до рівняння $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$, загальними розв'язками якого є функції

$$y=c_1+c_2t=c_1+c_2\arccos x \text{ (при } \omega=0\text{)};$$

$$y=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t=c_1\cos(\omega\arccos x)+c_2\sin(\omega\arccos x)$$
$$\text{(при } \omega\neq 0\text{)}.$$

У випадку б) виконаємо заміну $x=\operatorname{ch} t$ (при $x>1$, $t\geq 0$). Тоді

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\operatorname{sh}^{-1}t,\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{\operatorname{sh}t}\right)\frac{dt}{dx}=$$
$$=\frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sh}^{-2}t-\frac{dy}{dt}\operatorname{ch}t\operatorname{sh}^{-3}t,\quad 1-x^2=1-\operatorname{ch}^2t=-\operatorname{sh}^2t.$$

Підставивши в рівняння, дістанемо

$$-\operatorname{sh}^2t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sh}^{-2}t-\frac{dy}{dt}\operatorname{ch}t\operatorname{sh}^{-3}t\right)-\operatorname{ch}t\frac{dy}{dt}\operatorname{sh}^{-1}t+\omega^2y=0,$$

або

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\omega^2y=0.$$

Тому

$$y=c_1+c_2t=c_1+c_2\operatorname{Arch}x \text{ (при } \omega=0\text{)},$$

$$y=c_1\operatorname{ch}\omega t+c_2\operatorname{sh}\omega t=c_1\operatorname{ch}(\omega\operatorname{Arch}x)+c_2\operatorname{sh}(\omega\operatorname{Arch}x) \text{ (при } \omega\neq 0\text{)}.$$

## 5.4

# Методи інтегрування лінійних неоднорідних рівнянь і систем зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему рівнянь

$$Lx \equiv \dot{x} - Ax = f(t) \tag{5.30}$$

і скалярне лінійне рівняння $n$-го порядку

$$L_1 y \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = g(t) \tag{5.31}$$

зі сталими коефіцієнтами ($a_j = \text{const}$, $A = (a_{ij})$ — стала $(n \times n)$-вимірна матриця, $i, j = 1, \ldots, n$).

Оскільки фундаментальні системи розв'язків лінійних однорідних рівнянь $Lx = 0$, $L_1 y = 0$ у цьому випадку завжди можуть бути побудовані методами, які викладено в пп. 5.2, 5.3, то загальні розв'язки рівнянь (5.30), (5.31) завжди можна побудувати за допомогою методу Лагранжа або функції Коші (див. п. 4.2).

❑ **Приклад 5.13**

Для лінійної неоднорідної системи $\dot{x} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$ фундаментальну матрицю можна знайти, використовуючи формулу (5.11) ($\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$): $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Тому система (4.18) методу Лагранжа має вигляд

$$\dot{c}_1(t)\cos t + \dot{c}_2(t)\sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1, \quad -\dot{c}_1(t)\sin t + \dot{c}_2(t)\cos t = \operatorname{tg} t.$$

Звідси

$$\dot{c}_1(t) = -\cos t, \quad \dot{c}_2(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t},$$

$$c_1(t) = C_1 - \sin t, \quad c_2(t) = C_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$





Отже, загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

❑ **Приклад 5.14**

*Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння* $\ddot{y} - \omega^2 y = g(t)$ ($\omega = \text{const} > 0$).

Аналогічно прикладу 4.2 побудуємо загальний розв'язок цього рівняння у формі Коші. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ має прості корені $\lambda_{1,2} = \pm\omega$. Фундаментальну систему розв'язків виберемо у формі

$$y_1 = \operatorname{ch}\omega t, \quad y_2 = \operatorname{sh}\omega t \quad \left( W(t) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\omega t & \operatorname{sh}\omega t \\ \omega\operatorname{sh}\omega t & \omega\operatorname{ch}\omega t \end{vmatrix} = \omega \neq 0 \right).$$

За формулою (4.26) будуємо функцію Коші

$$K(t,\tau) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \operatorname{ch}\omega\tau & \operatorname{sh}\omega\tau \\ \operatorname{ch}\omega t & \operatorname{sh}\omega t \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(t-\tau),$$

а за формулами (4.30) — нормальну фундаментальну систему розв'язків

$$z_1(t) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \operatorname{ch}\omega t & \operatorname{sh}\omega t \\ \omega\operatorname{sh}\omega t_0 & \omega\operatorname{ch}\omega t_0 \end{vmatrix} = \operatorname{ch}\omega(t-t_0),$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \operatorname{ch}\omega t_0 & \operatorname{sh}\omega t_0 \\ \operatorname{ch}\omega t & \operatorname{sh}\omega t \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(t-t_0).$$

Використовуючи (4.31), записуємо загальний розв'язок у формі Коші:

$$y(t) = y_0\operatorname{ch}\omega(t-t_0) + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sh}\omega(t-t_0) + \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\operatorname{sh}\omega(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{5.32}$$

$$(y_0 = y(t_0), \quad y_0' = y'(t_0)).$$

У випадку, коли функція $f(t)$ у системі (5.30) є *векторним квазіполіномом*, тобто має вигляд $f(t) = e^{\sigma t}B_m(t)$, де $\sigma = \text{const}$ (*контрольне число квазіполінома*), $B_m(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m$ — векторний многочлен степеня $m$ ($b_0, \ldots, b_m$ — $n$-вимірні вектори), частинний розв'язок цієї системи $\tilde{x}(t)$ можна побудувати, використовуючи ***метод невизначених коефіцієнтів***.

**Нерезонансний випадок:** $\det(A - \sigma E_n) \neq 0$ *(контрольне число σ не є власним значенням матриці A).* В цьому разі частинний розв'язок $\tilde{x}(t)$ можна знайти у вигляді векторного квазіполінома

$$\tilde{x}(t) = e^{\sigma t}(q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \ldots + q_m) = e^{\sigma t} Q_m(t), \qquad (5.33)$$

де $q_0, \ldots, q_m$ — невідомі (невизначені) коефіцієнти — $n$-вимірні вектори.

Справді, підставлення (5.33) у (5.31) дає співвідношення типу $(A-\sigma E_n)Q_m(t) = \dot{Q}_m(t) - B_m(t)$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $t$, дістанемо системи рівнянь

$$(A - \sigma E_n)q_0 = -b_0,\ (A - \sigma E_n)q_1 = mq_0 - b_1, \ldots,$$
$$(A - \sigma E_n)q_m = q_{m-1} - b_m.$$

Оскільки в нерезонансному випадку існує обернена матриця $(A - \sigma E_n)^{-1}$, то з цих систем можна однозначно послідовно знайти вектори $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

**Резонансний випадок:** $\det(A - \sigma E_n) = 0$ *(контрольне число σ є власним значенням матриці A).* В цьому разі частинний розв'язок $\tilde{x}(t)$ також можна знайти у вигляді квазіполінома [34]:

$$\tilde{x}(t) = e^{\sigma t}(q_0 t^{m+s} + q_1 t^{m+s-1} + \ldots + q_{m+s}) = Q_{m+s}(t), \qquad (5.34)$$

де $q_0, \ldots, q_{m+s}$ — невизначені векторні коефіцієнти, $s$ — порядок найбільшої клітини Жордана матриці $A$, яка відповідає власному значенню σ. Якщо жорданова нормальна форма матриці $A$ невідома, то число $s$ у формулі (5.34) можна вважати таким, що дорівнює кратності власного значення σ.

### ❑ Приклад 5.15

*Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо частинний розв'язок системи*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$





Матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ даної системи має власні числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Функція $f(t)$ є сумою двох квазіполіномів із контрольними числами $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$. Контрольне число $\sigma_1 = \lambda_1$ є власним значенням матриці $A$ кратності 1, контрольне число $\sigma_2$ не є власним значенням матриці $A$. Користуючися методом невизначених коефіцієнтів і принципом суперпозиції (див. п. 4.2), частинний розв'язок даної системи шукатимемо у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^t(q_0 t + q_1) + e^{4t} r,\ q_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix},\ q_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix},\ r = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Підставивши $\tilde{x}(t)$ у систему, дістанемо

$$-A_1 + A_0 - B_1 = 2,\ A_1 + B_1 - B_0 = 0,\ A_0 + B_0 = 0,$$
$$2A_2 - B_2 = 0,\ 2B_2 - A_2 = -3.$$

Звідси

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = -1,\ B_0 = -1,\ B_1 = -1,\ B_2 = -2$$

і

$$\tilde{x}(t) = e^t \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

### ❑ Приклад 5.16

*Методом невизначених коефіцієнтів побудуємо частинний розв'язок системи*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left( A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma = 2,\ m = 0,\ b_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Із прикладу 5.8 випливає, що контрольне число $\sigma = 2$ є власним значенням матриці $A$ кратності 2. Тому частинний розв'язок $\tilde{x}(t)$ шукаємо у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^{2t} Q_2(t) = e^{2t}(q_0 t^2 + q_1 t + q_2),$$

де $q_i = (A_i, B_i)^T$ $(i = 0, 1, 2)$ — невизначені коефіцієнти. Підставлення $\tilde{x}(t)$ у систему дає рівність

$$(A - 2E_2)Q_2(t) = \dot{Q}_2(t) - b_0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістанемо послідовність систем:

$$① \ (A-2E_2)q_0=0,\ ② \ (A-2E_2)q_1=2q_0,\ ③ \ (A-2E_2)q_2=q_1-b_0.$$

Оскільки $\operatorname{rank}(A-2E_2)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=1$, то система ① має однопараметричну сім'ю розв'язків $q_0=(A_0,-A_0)^T$. Система ② $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}q_1=\begin{pmatrix}2A_0\\-2A_0\end{pmatrix}$ має розв'язки $q_1=(A_1,2A_0-A_1)^T$. Система ③ $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}q_2=\begin{pmatrix}A_1-3\\2A_0-A_1-1\end{pmatrix}$ розв'язна тоді й лише тоді, коли $2A_0-A_1-1=-(A_1-3)$, звідки $A_0=2$, $A_2+B_2=A_1-3$, $B_2=A_1-A_2-3$, $q_2=(A_2,A_1-A_2-3)$. Вибравши, наприклад, $A_1=A_2=0$, дістанемо

$$q_0=(2,-2)^T,\ q_1=(0,4)^T,\ q_2=(0,-3)^T,$$

$$\tilde{x}(t)=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\right].$$

Якщо в системі (5.30) матриця $A$ дійсна, а функція $f(t)$ має вигляд

$$f(t)=e^{\alpha t}[A_{m_1}(t)\cos\beta t+B_{m_2}(t)\sin\beta t],$$

де $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $A_{m_1}(t)$, $B_{m_2}(t)$ — векторні многочлени степенів $m_1$ і $m_2$ з дійсними коефіцієнтами (таку функцію називають *векторним квазіполіномом із контрольним числом* $\sigma=\alpha\pm\beta$), то частинний розв'язок $\tilde{x}(t)$ системи (5.30) можна знайти у вигляді

$$\tilde{x}(t)=e^{\alpha t}[Q_{m+s}(t)\cos\beta t+R_{m+s}(t)\sin\beta t],\tag{5.35}$$

де $Q_{m+s}(t)$, $R_{m+s}(t)$ — векторні многочлени степеня $m+s$ із невизначеними коефіцієнтами, $m=\max(m_1,m_2)$, $s$ — кратність контрольного числа $\sigma$ як власного значення матриці $A$ ($s=0$, якщо $\sigma$ не є власним значенням матриці $A$). Випадки $s=0$, $s>0$ також називають відповідно нерезонансним та резонансним.





**❑ Приклад 5.17**

Для системи $\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}\cos t$ маємо:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}\ (\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2),\ \alpha=0,\ \beta=1,\ A_0(t)=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}=a_0,$$

$$B_0(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ m_1=m_2=0,\ \sigma=\pm i.$$

Оскільки $\sigma$ не є власним значенням матриці $A$, то відповідно до (5.35) ($s=0$, $m=0$) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{x}(t)=q_1\cos t+q_2\sin t\quad (q_1=(A_1,B_1)^T,\ q_2=(A_2,B_2)^T).$$

Підставлення в систему дає рівність

$$(Aq_1-q_2+a_0)\cos t+(Aq_2+q_1)\sin t=0,$$

звідки, внаслідок лінійної незалежності функцій $\cos t$, $\sin t$, маємо:

$$Aq_1-q_2+a_0=0,\ Aq_2+q_1=0,$$

або

$$A_2-B_1=-5,\ A_1+B_2=0,\ B_2-2A_1-B_1=0,\ 2A_2+B_1+B_2=0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо

$$A_1=-1,\ B_1=3,\ A_2=-2,\ B_2=1,\ \tilde{x}(t)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\sin t.$$

**❑ Приклад 5.18**

*Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо частинний розв'язок системи*

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin\omega t\quad \left(A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \lambda_{1,2}=\pm i,\ \alpha=0,\ \beta=\omega,\right.$$

$$\left.A_0(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ B_0(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=b_0,\ m_1=m_2=0,\ \sigma=\pm i\omega\right).$$

Розглянемо можливі випадки.

1. $\omega \neq 1$ (**нерезонансний випадок**). Тоді $s = 0$ і частинний розв'язок $\tilde{x}(t)$ шукаємо у вигляді

$$\tilde{x}(t) = q_1 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t \quad (q_1 = (A_1,\ B_1)^T,\ \ q_2 = (A_2,\ B_2)^T).$$

Підставивши $\tilde{x}(t)$ у систему й прирівнявши коефіцієнти при $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, дістанемо

$$\omega A_2 = B_1,\ B_2 + \omega A_1 = -1,\ \omega B_2 + A_1 = 0,\ \omega B_1 = A_2.$$

Звідси

$$A_2 = 0,\ B_1 = 0,\ B_2 = \frac{1}{\omega^2 - 1},\ A_1 = -\frac{\omega}{\omega^2 - 1}$$

і

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\omega}{\omega^2 - 1} \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega t + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\omega^2 - 1} \end{pmatrix} \sin \omega t.$$

2. $\omega = 1$ (**резонансний випадок**). Тоді $\sigma = \pm i$ є власним значенням матриці $A$ кратності $s = 1$. Відповідно до (5.35) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{x}(t) = (q_1 t + q_2)\cos t + (q_3 t + q_4)\sin t \quad (q_i = (A_i,\ B_i)^T,\ i = 1, \ldots, 4).$$

Підставивши $\tilde{x}(t)$ у систему й прирівнявши коефіцієнти при лінійно незалежних функціях $\cos t$, $\sin t$, $t\cos t$, $t\sin t$, дістанемо

$$q_1 = \left(0,\ \frac{1}{2}\right)^T,\ \ q_2 = (0,\ 0)^T,$$

$$q_3 = \left(\frac{1}{2},\ 0\right)^T,\ \ q_4 = \left(0,\ -\frac{1}{2}\right)^T,$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} t\cos t + \left(\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \sin t.$$





Розглянемо метод невизначених коефіцієнтів для рівняння (5.31) у випадку, коли функція $g(t)$ є скалярним квазіполіномом: $g(t) = e^{\sigma t}P_m(t)$ ($\sigma = \text{const}$ — контрольне число, $P_m(t) = p_0 t^m + p_1 t^{m-1} + \ldots + p_m$ — скалярний многочлен степеня $m$). Ураховуючи, що рівняння (5.31) можна звести до еквівалентної лінійної системи типу (5.30) (див. п. 5.3), частинний розв'язок $\tilde{y}(t)$ шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}(t) = e^{\sigma t}Q_l(t) = e^{\sigma t}\sum_{k=0}^{l} q_k t^k,$$

де $Q_l(t)$ — многочлен із невизначеними коефіцієнтами, $l \geq m$. Спочатку знайдемо $L_1(\tilde{y}(t))$. Маємо $L_1(\tilde{y}(t)) = \sum\limits_{k=0}^{l} q_k L_1(e^{\sigma t}t^k)$. Щоб знайти $L_1(e^{\sigma t}t^k)$, тотожність $L_1(e^{\sigma t}) = e^{\sigma t}D(\lambda)$ [$D(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора $L_1$ (формула (5.24)] здиференціюємо $k$ разів по параметру $\sigma$. Використовуючи формулу Лейбніца, маємо

$$L_1(e^{\sigma t}t^k) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i e^{\sigma t} t^{k-i} D^{(i)}(\sigma).$$

Тому

$$L_1(\tilde{y}(t)) = \sum_{k=0}^{l} q_k \sum_{i=0}^{k} C_k^i e^{\sigma t} t^{k-i} D^{(i)}(\sigma) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} D^{(k)}(\sigma) Q_l^{(k)}(t).$$

[Рекомендуємо перевірити цю формулу для окремого випадку $L_1 y = y'' + a_1 y' + a_2 y$ за допомогою безпосереднього підставлення $\tilde{y} = e^{\sigma t}Q_l(t)$]. Підставивши в рівняння (5.31) і скоротивши на $e^{\sigma t}$, дістанемо тотожність, з якої потрібно знайти коефіцієнти многочлена $Q_l(t)$:

$$D(\sigma)Q_l(t) + D'(\sigma)\dot{Q}_l(t) + \\ + \frac{1}{2!}D''(\sigma)\ddot{Q}_l(t) + \ldots + \frac{1}{l!}D^{(l)}(\sigma)Q_l^{(l)}(t) = P_m(t). \tag{5.36}$$

Розглянемо можливі випадки.

**Нерезонансний випадок:** $D(\sigma) \neq 0$ [*контрольне число* $\sigma$ *не є коренем характеристичного многочлена* $D(\lambda)$]. У цьому разі з (5.36) випливає, що можна вибрати $l = m$ і частинний розв'язок рівняння (5.31) має вигляд

$$\tilde{y}(t) = e^{\sigma t} Q_m(t). \tag{5.37}$$

**Резонансний випадок:** $D(\sigma) = D'(\sigma) = \ldots = D^{(s-1)}(\sigma) = 0$, $D^{(s)}_{(\sigma)} \neq 0$ (*контрольне число* $\sigma$ *є коренем характеристичного рівняння кратності* $s \le n$). У цьому разі тотожність (5.36) записується так:

$$\frac{1}{s!} D^{(s)}(\sigma) Q_l^{(s)}(t) + \ldots + \frac{1}{l!} D^{(l)}(\sigma) Q_l^{(l)}(t) = P_m(t). \tag{5.38}$$

Із (5.38) випливає, що достатньо вибрати $l = m + s$, $Q_{m+s}(t) = t^s Q_m(t)$. Отже, в резонансному випадку частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$\tilde{y}(t) = t^s e^{\sigma t} Q_m(t). \tag{5.39}$$

Якщо коефіцієнти $a_j$ ($j = 1, \ldots, n$) у рівнянні (5.31) є дійсними сталими, а

$$g(t) = e^{\alpha t}[A_{m_1}(t)\cos\beta t + B_{m_2}(t)\sin\beta t],$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A_{m_1}(t)$, $B_{m_2}(t)$ — скалярні многочлени степенів $m_1$ і $m_2$ з дійсними коефіцієнтами (*скалярний квазіполіном із контрольним числом* $\sigma = \alpha \pm \beta i$), то частинний розв'язок $\tilde{y}(t)$ рівняння (5.31) можна знайти у вигляді

$$\tilde{y}(t) = t^s e^{\sigma t}[Q_m(t)\cos\beta t + R_m(t)\sin\beta t], \tag{5.40}$$

де $Q_m(t)$, $R_m(t)$ — скалярні многочлени степеня $m$ із невизначеними коефіцієнтами, $m = \max(m_1, m_2)$, $s$ — кратність контрольного числа $\sigma$ як кореня характеристичного рівняння $D(\lambda) = 0$ ($s = 0$ — нерезонансний випадок, $s > 0$ — резонансний випадок).

❑ **Приклад 5.19**

*Знайдемо загальний розв'язок рівняння* $y''' - y'' = g(t)$ *для таких випадків:*

а) $g(t) = 2e^{-3t}$; б) $g(t) = 2te^t$; в) $g(t) = 3t^2 - 2t + 5$; г) $5\cos 2t$.





Характеристичне рівняння $D(\lambda) \equiv \lambda^3 - \lambda^2 = 0$ має корені $\lambda_1 = 0$ (кратності 2) і $\lambda_2 = 1$ (кратності 1). Загальний розв'язок даного рівняння записується у вигляді

$$y = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + \tilde{y}(t).$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}(t)$ знайдемо для кожного випадку окремо.

а) $\sigma = -3$ не є коренем характеристичного рівняння ($s = 0$). У нерезонансному випадку $\tilde{y}(t) = ae^{-3t}$. Підставлення в рівняння дає тотожність $-27ae^{-3t} - 9ae^{-3t} = 2e^{-3t}$, звідки $a = -\frac{1}{18}$.

б) $\sigma = 1$ ($s = 1$). У резонансному випадку $\tilde{y}(t) = te^t(at + b) = e^t(at^2 + bt)$. Підставивши в рівняння й скоротивши на $e^t$, дістанемо тотожність $(2a - 2)t + 4a + b = 0$, звідки $a = 1$, $b = -4$.

в) $\sigma = 0$ ($s = 2$). У резонансному випадку $\tilde{y}(t) = t^2(at^2 + bt + c) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Підставлення в рівняння дає тотожність $(3 + 12a)t^2 + (6b - 24a - 2)t + (5 + 2c - 6b) = 0$, звідки $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -\frac{9}{2}$.

г) $\sigma = \pm i$ ($s = 0$). У нерезонансному випадку $\tilde{y}(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$. Підставивши в рівняння, дістанемо тотожність $(8a + 4b - 3)\sin 2t + (4a - 8b)\cos 2t = 0$, звідки $8a + 4b - 3 = 0$, $4a - 8b = 0$, $a = \frac{3}{10}$, $b = \frac{3}{20}$.

❑ **Приклад 5.20**

*Знайдемо загальні розв'язки рівнянь*

$$y'' + \omega^2 y = H\cos\nu t,\ \ y'' + \omega^2 = H\sin\nu t \ \ (\omega, \nu = \text{const} > 0,\ \ H \in \mathbb{R}).$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + \omega^2 = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$ можна записати у вигляді

$$y_0 = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t.$$

Розглянемо допоміжне комплексне рівняння

$$y'' + \omega^2 y = He^{i\nu t} \ \ (i^2 = -1).$$

Тоді частинні розв'язки даних рівнянь матимуть відповідно такий вигляд: $\tilde{y}_1 = \operatorname{Re}\tilde{y}$, $\tilde{y}_2 = \operatorname{Im}\tilde{y}$ (теорема 4.10).

Розглянемо можливі випадки.

1. $\nu \neq \omega$ (**нерезонансний випадок**). Тоді $\tilde{y} = ce^{i\nu t}$. Підставлення в рівняння дає тотожність

$$-c\nu^2 e^{i\nu t} + \omega^2 c e^{i\nu t} = He^{i\nu t},$$

звідки

$$c = \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}, \quad \tilde{y} = \frac{He^{i\nu t}}{\omega^2 - \nu^2},$$

$$\tilde{y}_1 = \operatorname{Re}\tilde{y} = \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}\cos \nu t, \quad \tilde{y}_2 = \operatorname{Im}\tilde{y} = \frac{H}{\omega^2 - \nu^2}\sin \nu t.$$

2. $\nu = \omega$ (**резонансний випадок**). Тоді $\tilde{y} = cte^{i\nu t}$. Підставлення в рівняння дає тотожність

$$-\omega^2 tce^{i\omega t} + 2ci\omega e^{i\omega t} + \omega^2 tce^{i\omega t} = He^{i\omega t},$$

звідки

$$c = \frac{H}{2i\omega} = -\frac{Hi}{2\omega}, \quad \tilde{y} = -\frac{Hi}{2\omega}te^{i\omega t},$$

$$\tilde{y}_1 = \operatorname{Re}\tilde{y} = \frac{tH}{2\omega}\sin \omega t, \quad \tilde{y}_2 = \operatorname{Im}\tilde{y} = \frac{-tH}{2\omega}\cos \omega t.$$

Зазначимо, що метод відшукання розв'язків $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$, який ґрунтується на побудові комплексного розв'язку $\tilde{y}$ допоміжного рівняння $y'' + \omega^2 y = He^{i\nu t}$ і використанні твердження теореми 4.10, називають *методом комплексних амплітуд*.

## 5.5

## Застосування операційного числення до інтегрування лінійних рівнянь і систем зі сталими коефіцієнтами

Операційне числення — один із найуживаніших в інженерній практиці методів інтегрування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Основою операційного числення є перетво-





рення Лапласа так званої функції-оригіналу $f(t)$, яке визначається формулою

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{5.41}$$

Функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = \sigma \pm i\omega$ називають *перетворенням Лапласа* (*зображенням за Лапласом*) функції-оригіналу $f(t)$, а інтеграл (5.41) — *інтегралом Лапласа*.

Ідеї операційного числення було розвинуто в роботах Лейбніца, Ейлера, Лагранжа, Лапласа, Коші [26].

Коротко розглянемо основні положення операційного методу.

***Функцією-оригіналом*** називають функцію $f(t)$ (взагалі кажучи, комплексну) дійсної змінної $t$, яка задовольняє такі *умови*: ① $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$; ② $f$ — кусково-неперервна на будь-якому скінченному інтервалі; ③ існують числа $M > 0$ і $\alpha > 0$ такі, що $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ $\forall t > 0$. Клас усіх функцій-оригіналів позначатимемо символом O. Якщо $f(t) \in O$, то число $\alpha_0 = \inf\{\alpha\}$ (точна межа береться за всіма $\alpha > 0$, для яких виконується нерівність $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ $\forall t > 0$) називають ***показником зростання функції*** $f(t)$: $f(t) \in O[\alpha_0]$. Якщо функція $f(t)$ задовольняє умови ② і ③, але не задовольняє умову ①, то функція $f(t)h(t)$, де $h(t) = 1$ при $t \ge 0$, $h(t) = 0$ при $t < 0$ — одинична ***функція Хевісайда***, цю умову задовольняє і, збігаючись з $f(t)$ при $t \ge 0$, є оригіналом. Далі вважатимемо, що умова ① завжди виконується.

❑ **Приклад 5.21**

а) $\sin \omega t$, $\cos \omega t \in O[0]$ ($\omega = \text{const} \in \mathbb{R}$);

б) $t^k \in O[0]$ ($k = \text{const} \ge 0$), оскільки $|t^k| \le Me^{\alpha t}$ $\forall t$, $\forall \alpha > 0$;

в) $e^{\sigma_0 t}$ ($\sigma_0 = \text{const} \in \mathbb{R}$) $\in O[\sigma_0]$ при $\sigma_0 \ge 0$, $e^{\sigma_0 t} \in O[0]$ при $\sigma_0 < 0$;

г) $e^{p_0 t}$($p_0 = \sigma_0 \pm i\omega_0$) $\in O[\sigma_0]$ при $\sigma_0 \ge 0$, $e^{p_0 t} \in O[0]$ при $\sigma_0 < 0$;

д) $e^{t^2} \notin O$, $t^{-k}(k > 0) \notin O$.

✍ Пропонуємо самостійно довести таке твердження. Нехай $f(t) \in O[\alpha_0]$, $g(t) \in O[\beta_0]$, $c_1$, $c_2 = \text{const}$. Тоді: 1) $c_1 f(t) + c_2 g(t) \in O[\max(\alpha_0, \beta_0)]$; 2) $f(t)g(t) \in O[\alpha_0\beta_0]$; 3) $\int_0^t f(\tau)d\tau \in O[\alpha_0]$. Чи можна стверджувати, що похідна диференційовного оригіналу завжди є оригіналом?

Покажемо, що інтеграл Лапласа (5.41) збігається абсолютно й рівномірно за параметром $p$ в області $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0 > \alpha_0$. Для цього оцінимо модуль підінтегральної функції:

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)||e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\sigma t}|e^{-i\omega t}| =$$
$$= |f(t)|e^{-\sigma t} \leq Me^{-(\sigma-\alpha)t} \leq Me^{-(\sigma_0-\alpha)t} \quad (\sigma \geq \sigma_0 > \alpha > 0).$$

Оскільки інтеграл $\int_0^{+\infty} Me^{-(\sigma_0-\alpha)t}dt$ збігається й не залежить від $p$, то за ознакою Вейєрштрасса інтеграл Лапласа збігається абсолютно й рівномірно в області $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0 > \alpha_0$. Можна показати (пропонуємо зробити це самостійно), що $F(p)$ — нескінченно диференційовна функція параметра $p$ в області $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ і, крім того, $F(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(\operatorname{Re} p > \alpha_0)$.

❑ **Приклад 5.22**

*Знайдемо зображення таких функцій:*

ⓐ $f(t) = h(t)$; ⓑ $f(t) = e^{\alpha t}h(t)$; ⓒ $f(t) = t^n h(t)$ $(n \in \mathbb{N})$

[далі множник $h(t)$ опускаємо]. Маємо:

$$\text{ⓐ}\ h(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p > 0);$$

$$\text{ⓑ}\ e^{\alpha t} \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt = \frac{1}{p-\alpha} \quad (\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0);$$

$$\text{ⓒ}\ t^n \risingdotseq \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^n d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p}\left(t^n e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt\right) =$$
$$= \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt = \frac{n(n-1)}{p^2}\int_0^{+\infty} t^{n-2}e^{-pt}dt = \ldots = \frac{n!}{p^n}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$$
$$(\operatorname{Re} p > 0).$$

Зауважимо, що часто на функцію-оригінал $f(t)$ накладають менш жорсткі умови. Так, наприклад, замість умови ② (в означенні оригіналу) від функції $f(t)$ вимагають таких властивостей, які забезпечують абсолютну збіжність інтеграла Лапласа.





Розглянемо, наприклад, функцію $f(t) = t^\alpha$ $(\alpha < 0)$. Очевидно, $t^\alpha \notin O$ $(t^\alpha \to +\infty$ при $t \to +0)$. Проте можна довести, що при $\alpha < -1$ інтеграл Лапласа цієї функції абсолютно збігається й

$$t^\alpha \risingdotseq \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} \tau^\alpha e^{-\tau}d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \quad (\operatorname{Re} p > 0,\ \alpha > -1),$$

де $\Gamma(\alpha+1)$ — гамма-функція Ейлера.

*Обернене перетворення Лапласа* здійснюється за формулою Рімана—Мелліна [26]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp. \tag{5.42}$$

У формулі (5.42) інтегрування ведеться в комплексній площині вздовж прямої $\operatorname{Re} p = s > \alpha_0$, $f(t)$ — кусково-гладка функція (або задовольняє умови Діріхле) на будь-якому скінченному проміжку, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ збігається абсолютно вздовж прямої $\operatorname{Re} p = s > \alpha_0$. Якщо $t^*$ — точка розриву $f(t)$, то інтеграл у правій частині (5.42) збігається до $\frac{1}{2}[f(t^*-0) + f(t^*+0)]$.

Із (5.42) випливає ***т е о р е м а  є д и н о с т і  о р и г і н а л у:*** ***якщо функції-оригінали $f_1(t)$, $f_2(t)$ мають те саме зображення $F(p)$, то вони рівні в точках їхньої неперервності: $f_1(t) \equiv f_2(t)$.***

У разі практичного застосування операційного числення для відшукання оригіналів і зображень використовують готові таблиці оригіналів і зображень, а також основних теорем операційного числення (див. дод. 1). Розглянемо кілька таких теорем, необхідних для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

**Теорема 5.1**
**(лінійності перетворення Лапласа)**

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, $\alpha, \beta = \text{const}$, то

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Доведення випливає з лінійності інтеграла Лапласа (5.41) у випадку його збіжності.

**Теорема 5.2**
**(диференціювання оригіналу)**

Якщо $f(t), f'(t) \in O[\alpha_0]$ і $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0) \quad (\operatorname{Re} p > \alpha_0). \qquad (5.43)$$

Справді, з (5.41) маємо:

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}df(t) =$$

$$= (f(t)e^{-pt})\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0).$$

**Наслідок**

*Нехай* $f(t), f'(t), ..., f^{(n)}(t) \in O[\alpha_0]$ *і* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тоді за методом математичної індукції можна довести, що*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(+0) \quad (n \in \mathbb{N}). \qquad (5.44)$$

Із (5.43) випливає, що коли $f(+0) = f'(+0) = ... = f^{(n-1)}(+0) = 0$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p). \qquad (5.45)$$

Із формул (5.43)—(5.45) бачимо, що операції диференціювання в класі оригіналів відповідає алгебрична операція множення на параметр $p$ у класі зображень. Таким чином, теорема 5.2 дає змогу зводити розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами до розв'язання лінійних алгебричних рівнянь.

**Теорема 5.3**
**(інтегрування оригіналу)**

Якщо $f(t) \in O[\alpha_0]$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p} \quad (\operatorname{Re} p > \alpha_0). \qquad (5.46)$$





**Теорема 5.4**
**(запізнення)**

Якщо $f(t) \in O[\alpha_0]$, $\tau = \text{const} > 0$, $f_\tau(t) = f(t-\tau)h(t-\tau)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f_\tau(t) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p) \quad (\operatorname{Re} p > \alpha_0). \qquad (5.47)$$

**Теорема 5.5**
**(зміщення зображення)**

Якщо $f(t) \in O[\alpha_0]$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\lambda = \text{const} \in \mathbb{C}$, то

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda) \quad (\operatorname{Re}(p-\lambda) > \alpha_0). \qquad (5.48)$$

Теореми 5.3—5.5 пропонуємо довести самостійно.

**Теорема 5.6**
**(про зображення згортки двох оригіналів)**

Нехай $f(t) \in O[\alpha]$, $g(t) \in O[\beta]$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тоді згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$ — функція $f * g = \varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ — має такі в л а с т и в о с т і:

1) $\varphi(t) \in O[\gamma]$ $(\gamma = \max\{\alpha, \beta\})$;

2) $f * g = g * f$

і

$$f * g \risingdotseq F(p)G(p). \qquad (5.49)$$

Доведемо лише формулу (5.49) [властивості 1) і 2) згортки пропонуємо довести самостійно]. Знайдемо зображення згортки. Маємо

$$\varphi(t) = f * g \risingdotseq \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt}d\tau.$$

Цей інтеграл збігається абсолютно (при $\operatorname{Re} p > \gamma$) в області $D$: $0 \le t < +\infty$, $0 \le \tau \le t$. Змінюючи порядок інтегрування ($0 \le \tau < +\infty$, $\tau \le t < +\infty$), дістанемо

$$\varphi(t) \div \int_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \int_\tau^{+\infty} g(t-\tau)e^{-pt}dt = [t-\tau = u,\ dt = du] =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int_0^{+\infty} g(u)e^{-pu}du = F(p)G(p).$$

❑ **Приклад 5.23**

***Використовуючи теореми 5.1—5.6, знайдемо зображення таких функцій-оригіналів:***

а) $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\operatorname{sh}\omega t$, $\operatorname{ch}\omega t$ $(\omega \in \mathbb{R})$;

б) $e^{\alpha t}\sin\omega t$, $e^{\alpha t}\cos\omega t$, $e^{\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$, $e^{\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

в) $t\sin\omega t$, $t\cos\omega t$, $t\operatorname{sh}\omega t$, $t\operatorname{ch}\omega t$, $e^{\alpha t}t^n$ $(n \in \mathbb{N})$;

г) $f(t) = 0$ при $t < 0$, $t > \tau$, $f(t) = 1$ при $0 < \tau < t$; $g(t) = [t]$ (ціла частина $t$).

Маємо:

а) $$\sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2},$$

$$\operatorname{ch}\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

(використано теорему 5.1 і приклад 5.22).

б) Використовуємо теорему 5.5:

$$e^{\alpha t}\sin\omega t \div \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2},\quad e^{\alpha t}\cos\omega t \div \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2},$$

$$e^{\alpha t}\operatorname{sh}\omega t \div \frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2},\quad e^{\alpha t}\operatorname{ch}\omega t \div \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}.$$

в) Використовуємо теорему 5.5 і приклад 5.22:

$$t\sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t}t - e^{-i\omega t}t) \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(p-i\omega)^2} - \frac{1}{(p+i\omega)^2}\right) = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2};$$

аналогічно:





$$t\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t}t + e^{-i\omega t}t) \div \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$t\operatorname{sh}\omega t \div \frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)},\quad t\operatorname{ch}\omega t \div \frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2},\quad e^{\alpha t}t^n \div \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

г) $$f(t) = h(t) - h(t-\tau) \div \frac{1}{p} - e^{-p\tau}\frac{1}{p} = \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau});$$

$$g(t) = [t] = h(t-1) + h(t-2) + \ldots + h(t-n) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} h(t-n) \div \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn}\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}\quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

(використано теорему 5.4 запізнення оригіналу та приклад 5.22).

❑ **Приклад 5.24**

*Розв'яжемо задачу Коші:*

$$y' + ay = H,\ y(+0) = y_0\ (a,\ H = \text{const} \in \mathbb{R}).$$

Переходимо до зображень:

$$y(t) \div Y(p),\ y'(t) \div pY(p) - y_0,\ H = Hh(t) \div H/p.$$

У класі зображень даній задачі Коші відповідає лінійне алгебричне рівняння $pY(p) - y_0 + aY = H/p$, розв'язуючи яке, маємо

$$(p+a)Y(p) = y_0 + \frac{H}{p},\quad Y(p) = \frac{y_0}{p+a} + \frac{H}{p(p+a)} = \frac{y_0}{p+a} + \frac{H}{2a}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}\right).$$

Перейшовши до оригіналів, дістанемо:

$$y(t) = y_0e^{-at} + \frac{H}{2a} - \frac{H}{2a}e^{-at} = \left(y_0 - \frac{H}{2a}\right)e^{-at} + \frac{H}{2a}.$$

❑ **Приклад 5.25**

*Розв'яжемо задачу Коші:*

$$y'' + \omega^2 y = H\sin\nu t,\ y(0) = y'(0) = 0\ (\omega,\ \nu,\ H = \text{const} \in \mathbb{R}).$$

Переходимо до зображень:

$$y(t) \div Y(p),\quad y'(t) \div pY(p),\quad y''(t) \div p^2Y(p),\quad H\sin\nu t \div \frac{H\nu}{p^2+\nu^2}.$$

Задачі Коші відповідає таке лінійне алгебричне рівняння: $p^2Y(p)+\omega^2Y(p)=\dfrac{H\nu}{p^2+\omega^2}$, розв'язуючи яке, дістаємо

$$Y(p)=\frac{H\nu}{(p^2+\omega^2)(p^2+\nu^2)}.$$

Щоб знайти оригінал $y(t)$, розглянемо можливі випадки.
1. $\nu\neq\omega$ **(нерезонансний випадок)**. Тоді

$$Y(p)=\frac{H\nu}{\nu^2-\omega^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^2+\nu^2}\right)\div\frac{H\nu}{\nu^2-\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-\frac{1}{\nu}\sin\nu t\right)=y(t).$$

2. $\nu=\omega$ **(резонансний випадок)**. Тоді

$$Y(p)=\frac{H\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Оригінал знайдемо, використовуючи теорему 5.6:

$$Y(p)=\frac{H}{\omega}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\div\frac{H}{\omega}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{H}{2\omega}\int_0^t(\cos(2\omega\tau-\omega t)-\cos\omega t)\,d\tau=\frac{H}{2\omega^2}\sin\omega t-\frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t=y(t).$$

Загальну схему застосування операційного числення до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами розглянемо на прикладі задачі Коші для рівняння другого порядку

$$L_1y\equiv y''+a_1y'+a_2y=f(t),\quad y(+0)=y_0,\quad y'(+0)=y'_0.\qquad(5.50)$$

Шукаємо розв'язок у класі функцій-оригіналів:

$$y(t)\div Y(p),\quad f(t)\div F(p),\quad y'(t)\div pY(p)-y_0,$$
$$y''(t)\div p^2Y(p)-py_0-y'_0.$$





У класі зображень маємо лінійне алгебричне рівняння відносно $Y(p)$:

$$D(p)Y(p)-(py_0+y'_0+a_1y_0)=F(p)$$

($D(p)=p^2+a_1p+a_2$ — характеристичний многочлен оператора $L_1$). Звідси

$$Y(p)=Y_0(p)+Y_f(p),\qquad(5.51)$$

де

$$Y_0(p)=\frac{py_0+y'_0+a_1y_0}{D(p)},\quad Y_f(p)=\frac{F(p)}{D(p)}.$$

Перейшовши у (5.51) до оригіналів, дістанемо розв'язок задачі Коші (5.50). Якщо $f(t)\equiv 0$, то $F(p)\equiv 0$ і $Y(p)=Y_0(p)\div y_0(t)$. Отже, перший доданок у (5.51) є зображенням розв'язку $y_0(t)$ задачі Коші з початковими умовами $y_0$, $y'_0$ *для лінійного однорідного рівняння* $L_1y=0$. Нехай тепер $y_0=y'_0=0$. Тоді $Y_0(p)=0$ і $Y(p)=\dfrac{F(p)}{D(p)}\div y_f(t)$. Отже, $Y_f(p)$ є зображенням розв'язку задачі Коші (5.50) з нульовими початковими умовами *для лінійного неоднорідного* ($f(t)\not\equiv 0$) *рівняння*. Знайдемо $y_f(t)$, використовуючи теорему 5.6 про зображення згортки. Нехай $G(p)=\dfrac{1}{D(p)}$ і $G(p)\div g(t)$. Тоді $y_f(t)\div G(p)F(p)$ і за теоремою 5.6 маємо

$$y_f(t)=\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.\qquad(5.52)$$

Вираз (5.52) називають *формулою інтеграла накладання*. В електро- й радіотехнічній літературі функції $g(t-\tau)$ і $G(p)$ називають *імпульсною характеристикою* та *передаточною функцією* відповідно. Метод інтеграла накладання застосовують, як правило, тоді, коли знайти зображення $F(p)$ в явному вигляді складно, а також тоді, коли потрібно мати явну залежність розв'язку задачі Коші від функції $f(t)$, яка має зміст вхідного сигналу лінійної фізичної системи.

Із формули (5.52) випливає (див. також п. 4.2), що функцію Коші лінійного однорідного диференціального рівняння $L_1y\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+$ $+\ldots+a_ny=0$ зі сталими коефіцієнтами можна знайти за формулами

$$K(t, \tau) = g(t - \tau), \quad g(t) \risingdotseq G(p) = \frac{1}{D(p)}, \tag{5.53}$$

де $D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ — характеристичний многочлен лінійного оператора $L_1$.

**❑ Приклад 5.26**

*Використовуючи формулу (5.53), знайдемо функції Коші таких рівнянь:*

а) $y' = 0$; б) $y^{(n)} = 0$; в) $y' + a_1 y = 0$;
г) $y'' + \omega^2 y = 0$; д) $y'' - \omega^2 y = 0$ $(\omega > 0)$

*і запишемо розв'язки* $y_f(t)$.

Маємо:

а) $D(p) = p, \quad G(p) = \dfrac{1}{p} \risingdotseq h(t), \quad y_f(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, d\tau;$

б) $D(p) = p^n, \quad G(p) = \dfrac{1}{p^n} \risingdotseq \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad y_f(t) = \int_0^t \dfrac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau;$

в) $D(p) = p + a_1, \quad G(p) = \dfrac{1}{p + a_1} \risingdotseq e^{-a_1 t}, \quad y_f(t) = \int_0^t e^{-a_1(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau;$

г) $D(p) = p^2 + \omega^2, \quad G(p) = \dfrac{1}{p^2 + \omega^2} \risingdotseq \dfrac{1}{\omega} \sin \omega t,$
$y_f(t) = \dfrac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) f(\tau)\, d\tau;$

д) $D(p) = p^2 - \omega^2, \quad G(p) = \dfrac{1}{p^2 - \omega^2} \risingdotseq \dfrac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega t,$
$y_f(t) = \dfrac{1}{\omega} \int_0^t \operatorname{sh} \omega(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$

Схема застосування операційного числення до розв'язання системи (5.30) лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами така сама, як і в скалярному випадку. Справді, нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x_0$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тоді зображення задачі Коші $Lx = f(t)$, $x(+0) = x_0$ має вигляд





$$(pE_n - A)X(p) = x_0 + F(p), \tag{5.54}$$

де $E_n$ — одинична матриця. Якщо $\operatorname{Re} p > \max(\operatorname{Re} p_1, \ldots, \operatorname{Re} p_n)$, де $p_1, \ldots, p_n$ — корені характеристичного многочлена $D(p) = \det(A - pE_n)$ матриці $A$ — власні числа матриці $A$, то з (5.54) маємо зображення розв'язку

$$X(p) = X_0(p) + X_f(p),$$

де $X_0(p) = (pE_n - A)^{-1} x_0$, $X_f(p) = (pE_n - A)^{-1} F(p)$ — зображення розв'язку $x_0(t)$ *лінійної однорідної системи* з початковою умовою $x(+0) = x_0$ і *лінійної неоднорідної системи* з нульовою початковою умовою відповідно. Якщо позначити $G(p) = (pE_n - A)^{-1}$, то аналогічно (5.53) можна дістати вираз для матриці Коші (матриціанта) лінійної однорідної системи $Lx = 0$ зі сталими коефіцієнтами:

$$X(t, \tau) = g(t - \tau), \quad g(t) \risingdotseq G(p) = (pE_n - A)^{-1}.$$

Розв'язуючи конкретну лінійну алгебричну систему (5.54), на практиці зручніше не шукати матрицю $(pE_n - A)^{-1}$, а застосувати метод підстановки або виключення.

**❑ Приклад 5.27**

*Операційним методом розв'яжемо задачу Коші*

$$\dot{x} - Ax = 0, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left( A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right).$$

Маємо:

$$F(p) = 0, \quad pE_2 - A = \begin{pmatrix} p-2 & -1 \\ -3 & p-4 \end{pmatrix}, \quad X(p) = \begin{pmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \end{pmatrix}.$$

Складаємо систему (5.54):

$$\begin{pmatrix} p-2 & -1 \\ -3 & p-4 \end{pmatrix} X(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(p-2)X_1(p) - X_2(p) = 1,$$

$$-3X_1(p) + (p-4)X_2(p) = 0.$$

Розв'язавши цю систему методом підстановки ($X_2(p) = (p-2)X_1(p) - 1$), дістанемо

$$X_1(p) = \frac{3}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{p-5} \doteqdot \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} = x_1(t),$$

$$X_2(p) = -\frac{3}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{p-5} \doteqdot -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} = x_2(t).$$

◆ **Зауваження 5.6**

Якщо початкові умови задачі Коші поставлено при $t = t_0 \neq 0$, то для застосування операційного методу потрібно виконати заміну незалежної змінної $\tau = t - t_0$.

◆ **Зауваження 5.7**

За допомогою розкладання правильного раціонального дробу $F(p)$ на елементарні дроби можна показати, що він є зображенням лінійної комбінації функцій вигляду $t^n e^{\alpha t}\cos\omega t$, $t^n e^{\alpha t}\sin\omega t$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

◆ **Зауваження 5.8**

Коефіцієнти розкладу правильного раціонального дробу на елементарні дроби не обов'язково шукати за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Формули для цих коефіцієнтів дає теорема [26]: якщо $F(p) = \dfrac{K(p)}{N(p)}$ — правильний раціональний (нескоротний) дріб, знаменник якого $N(p)$ має корені $p_1, \ldots, p_l$ кратностей $m_1, \ldots, m_l$ відповідно, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left\{\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left[(p-p_k)^{m_k}e^{pt}\frac{K(p)}{N(p)}\right]\right\}. \qquad (5.55)$$

У випадку, коли всі корені $p_1, \ldots, p_l$ прості, формула (5.55) спрощується:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{K(p_k)}{N'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (5.56)$$

❑ **Приклад 5.28**

*Використовуючи формулу (5.55), знайдемо оригінал зображення*

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$





Знаменник дробу $N(p) = (p^2+1)^2$ має корені $p_1 = i\,(m_1 = 2)$, $p_2 = -i\,(m_2 = 2)$. Знайдемо доданок у (5.55), який відповідає кореню $p_1$. Маємо

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to i}\left\{\frac{d}{dp}\left[(p-i)^2 e^{pt}\frac{p}{(p-i)^2(p+i)^2}\right]\right\} = \lim_{p\to i}\left\{\frac{d}{dp}\left(\frac{pe^{pt}}{(p+i)^2}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{p\to i}\frac{(1+pt)(p+i)-2p}{(p+i)^3}e^{pt} = \frac{t}{4i}e^{it}.$$

Доданок у (5.55), який відповідає кореню $p_2 = -i$, комплексно-спряжений: $\overline{\dfrac{t}{4i}e^{it}} = -\dfrac{t}{4i}e^{-it}$. Тому

$$f(t) = \frac{t}{4i}e^{it} - \frac{t}{4i}e^{-it} = \frac{t}{2}\sin t.$$

❑ **Приклад 5.29**

*Використовуючи формулу (5.56), знайдемо оригінал зображення*

$$F(p) = \frac{p-2}{p(p+1)(p^2+1)}.$$

Маємо: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = i$, $p_4 = -i$ — прості корені знаменника $N(p) = p(p+1)(p^2+1)$, $K(p) = p - 2$. Знаходимо:

$$N'(p) = (p+1)(p^2+1) + p(p^2+1) + p(p+1)2p,$$

$$\frac{K(0)}{N'(0)} = -2,\quad \frac{K(-1)}{N'(-1)} = \frac{3}{2},\quad \frac{K(i)}{N'(i)} = \frac{1-3i}{4},\quad \frac{K(-i)}{N'(-i)} = \frac{1+3i}{4}.$$

За формулою (5.56) дістаємо

$$f(t) = -2 + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}(e^{it}+e^{-it}) - \frac{3i}{4}(e^{it}-e^{-it}) =$$

$$= 2 + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t.$$

Розглянемо рівняння, в які невідома функція $y(t)$ входить під знак інтеграла:

$$\int_0^t k(t-\tau)y(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{5.57}$$

$$y(t) = \int_0^t k(t-\tau)y(\tau)\,d\tau + f(t). \tag{5.58}$$

Рівняння (5.57) і (5.58) називають *лінійними інтегральними* рівняннями Вольтерра типу згортки першого та другого роду* відповідно. Функцію $k(t-\tau)$ називають *ядром* інтегрального рівняння.

Припустимо, що функції $k(t)$ і $f(t)$ є оригіналами. Розв'язки інтегральних рівнянь (5.57), (5.58) шукаємо в класі функцій-оригіналів. Ураховуючи, що ці рівняння за допомогою символа згортки можна записати у вигляді

$$y(t) * k(t) = f(t) \text{ і } y(t) = y(t) * k(t) + f(t),$$

дістанемо відповідно:

$$Y(p)K(p) = F(p) \text{ і } Y(p) = Y(p)K(p) + F(p).$$

Звідси

$$Y(p) = \frac{F(p)}{K(p)}, \tag{5.59}$$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)}. \tag{5.60}$$

Перейшовши (якщо це можливо) в (5.59) і (5.60) до оригіналів, дістанемо розв'язки інтегральних рівнянь.

Детальніше розглянемо інтегральне рівняння другого роду (5.58). З (5.60) випливає, що $Y(p)$ має вигляд

$$Y(p) = F(p)G(p) + F(p), \tag{5.61}$$

де $G(p) = \dfrac{K(p)}{1-K(p)}$.

* Основи теорії інтегральних рівнянь викладено в гл. 10, 11.





Доведемо, що функція $G(p)$ — зображення деякого оригіналу $g(t)$ у випадку, коли $K(p)$ є правильним раціональним дробом: $K(p) = S_l(p)/S_n(p)$ [$S_l(p)$, $S_n(p)$ — многочлени степенів $l$ і $n$ відповідно, причому $l < n$]. Справді, тоді функція $G(p) = S_l(p)/(S_n(p) - S_l(p))$ є, очевидно, правильним раціональним дробом і, отже, зображенням деякого оригіналу $g(t)$. З (5.61) дістанемо інтегральне представлення розв'язку інтегрального рівняння (5.58):

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + f(t) \quad (g(t) \div G(p)). \tag{5.62}$$

Інтегральне рівняння (5.57) не завжди має розв'язки в класі функцій-оригіналів. Справді, оскільки $K(p) \to 0$, $p \to \infty$, то для $Y(p) = \dfrac{F(p)}{K(p)}$ з (5.59) може не виконуватися необхідна умова зображення оригіналу: $Y(p) \to 0$, $p \to \infty$. Так, наприклад, для інтегрального рівняння першого роду $\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau = \sin t$ маємо $Y(p) = 1$ і $y(t) = \delta(t)$, де $\delta(t)$ — дельта-функція Дірака*.

**❑ Приклад 5.30**

*Розв'яжемо інтегральне рівняння другого роду*

$$y(t) = \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau + 2 - te^t.$$

Застосуємо інтегральну формулу (5.62). Маємо:

$$G(p) = \frac{K(p)}{1-K(p)} = \frac{1}{p-2} \div g(t) = e^{2t}.$$

Тому

$$y(t) = \int_0^t (2-\tau e^\tau)e^{2(t-\tau)}\,d\tau + 2 - te^{2t} = e^t + 1.$$

* Основні правила дій над дельта-функціями викладено в дод. 4.

**❑ Приклад 5.31**

Для рівняння

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t y(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau + \sin t$$

у класі функцій-зображень маємо

$$Y(p) = Y(p)\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2+1},$$

$$Y(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)} = \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p+1}{2(p^2+1)} - \frac{2p+1}{3(p^2+p+1)}.$$

Перейшовши до оригіналів, дістанемо

$$y(t) = \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

**❑ Приклад 5.32**

Для інтегрального рівняння другого роду

$$\int_0^t y(\tau)e^{2(t-\tau)}\,d\tau = t^2e^t$$

маємо

$$Y(p)\frac{1}{p-2} = \frac{2}{(p-1)^3},$$

$$Y(p) = \frac{2(p-2)}{(p-1)^3} = \frac{2}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3} \risingdotseq y(t) = 2te^t - t^2e^t.$$

✍ Пропонуємо самостійно операційним методом знайти розв'язки даних лінійних інтегральних рівнянь типу згортки.

① $y(t) = 1 + t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau.$

(Відповідь: $y(t) = 2 + t - e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$).





② $y(t) = e^{-t} + \frac{1}{2}\int_0^t y(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau.$

(Відповідь: $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$).

③ $y(t) = \sin t + 2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau.$

(Відповідь: $y(t) = te^t$).

④ $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = t.$

(Відповідь: $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$).

⑤ $\int_0^t y(\tau)\operatorname{ch}(t-\tau)\,d\tau = t.$

(Відповідь: $y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$).

⑥ $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = t + t^2.$

(Відповідь: $y(t) = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$).

⑦ $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = \sin t.$

(Відповідь: $y(t) = 1$).

Глава 6

# ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

## 6.1 Постановка лінійних крайових задач

Розглянемо лінійну систему

$$Lx \equiv \dot{x} - A(t)x = f(t) \quad (t \in [a, b]) \tag{6.1}$$

і *лінійні крайові умови*

$$lx = \alpha. \tag{6.2}$$

Тут $A(t)$ — $(n \times n)$-вимірна, неперервна на $[a, b]$ матриця, $f(t)$ — векторна, неперервна на $[a, b]$ функція, $l = (l_1, ..., l_p)^T$ — лінійний обмежений* векторний функціонал, визначений у просторі $C_{n[a,b]}$ дійсних $n$-вимірних, неперервних на $[a, b]$ функцій $x = x(t)(l : C_{n[a,b]} \mapsto \mathbb{R}^p)$, $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

*Лінійна крайова задача* (6.1), (6.2) полягає у відшуканні такого неперервно диференційовного на $[a, b]$ розв'язку $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T$ системи (6.1), який задовольняє крайові умови (6.2).

Залежно від конкретного виду функціонала $l$ можна дістати різні типи крайових задач, які ставляться для системи (6.1). Розглянемо кілька таких задач.

* Лінійний функціонал $l$ називають *обмеженим*, якщо існує число $M \geq 0$ таке, що $\forall x(t) \in C_{n[a,b]}$ $\| lx \|_{\mathbb{R}^p} \leq M \| x \|_C$. Найменше з цих чисел позначають $\| l \|$ і називають ***нормою функціонала.***





**1. Задача Коші (початкова задача):**

$$lx \equiv x(t_0) \quad (t_0 \in [a, b]), \quad \alpha = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad p = n.$$

**2. Періодична крайова задача:**

$$lx \equiv x(a) - x(b), \quad \alpha = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad p = n.$$

**3. Многоточкова крайова задача:**

$$lx \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i x(t_i), \quad \alpha \in \mathbb{R}^p$$

$(a \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq b$, $M_i$ — $(p \times n)$-вимірні матриці). Окремим випадком многоточкової задачі є періодична крайова задача ($k = 2$, $M_1 = -M_2 = E_n$, $\alpha = 0 \in \mathbb{R}^n$, $t_1 = a$, $t_2 = b$).

**4. Крайова задача з додатковими умовами інтегрального типу:**

$$lx \equiv \int_a^b M(t)x(t)\,dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p$$

($M(t)$ — $(p \times n)$-вимірна неперервна матриця).

Відомо (див. п. 4.2), що загальний розв'язок системи (6.1) можна записати у вигляді

$$x(t) = X(t)c + x^*(t), \tag{6.3}$$

де $X(t)$ — фундаментальна матриця лінійної однорідної системи $Lx = 0$, $x^*(t)$ — якийсь частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи (6.1), $c \in \mathbb{R}^n$ — довільний сталий вектор.

Щоб задовольнити крайові умови (належним чином добрати вектор $c$), розв'язок (6.3) підставимо у (6.2). Тоді для невідомого вектора $c$ дістанемо лінійну алгебричну систему

$$Qc = \alpha - lx^* \tag{6.4}$$

із прямокутною [$(p \times n)$-вимірною] матрицею $Q = lX$ [матриця $Q$ утворена дією функціонала $l$ на стовпці матриці $X = X(t)$]. Отже, питання про розв'язність і представлення розв'язку крайової задачі (6.1), (6.2) еквівалентне питанню про розв'язність і представлення розв'язку лінійної алгебричної системи (6.4).

Оскільки скалярне рівняння (4.2) еквівалентне системі типу (6.1), матриця якої має вигляд (4.3), то крайові задачі для скалярного рівняння $L_1 y = g(t)$ ставляться аналогічно крайовим задачам для лінійних систем диференціальних рівнянь [зрозуміло, що в цьому випадку крайові умови можуть містити похідні функції $y = y(t)$]. Розглянемо кілька прикладів таких задач для рівняння $y'' + y = g(t)$ $(t \in [0, \pi]$, $g(t) \in C_{[0, \pi]})$.

❑ **Приклад 6.1**

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = y(\pi).$$

Увівши вектори $x = (y, y')^T, f(t) = (0, g(t))^T$, запишемо еквівалентну векторну двоточкову крайову задачу:

$$\dot{x} - Ax = f(t) \quad (t \in [0, \pi]), \quad lx = 0.$$

Тут $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $lx \equiv M_1 x(0) + M_2 x(\pi)$, де $M_1 = (1, 0)$, $M_2 = (-1, 0)$, $p = 1$, $n = 2$.

❑ **Приклад 6.2**

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Звівши цю крайову задачу до еквівалентної векторної, дістанемо

$$\dot{x} - Ax = f(t), \quad lx = \alpha,$$

де матриця $A$ і функція $f(t)$ такі самі, як і в прикладі 6.1, а $lx \equiv M_1 x(0) +$ $+ M_2 x(\pi)$, де $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 0 \in \mathbb{R}^2$, $p = 2$, $n = 2$.





# 6.2

## Розв'язність і представлення розв'язків лінійних алгебричних систем із прямокутною матрицею

Розглянемо лінійну алгебричну систему

$$Qz = b \tag{6.5}$$

із $(p \times n)$-вимірною матрицею $Q$ $(z \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^p)$. Як відомо, у випадку $p = n$, $\det Q \neq 0$ розв'язок системи існує і єдиний при будь-якому $b \in \mathbb{R}^p$ (система завжди розв'язна) і може бути записаний у вигляді $z = Q^{-1} b$ ($Q^{-1}$ — обернена до $Q$ матриця).

Якщо $\det Q = 0$ або $p \neq n$, то система (6.5) розв'язна не при всіх $b \in \mathbb{R}^p$. Критерій розв'язності системи (6.5) дає *теорема Кронекера — Капеллі* [12]: *необхідною й достатньою умовою розв'язності системи (6.5) є умова* $\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} Q|b = r$, де $Q|b$ — так звана ***розширена матриця*** системи. Якщо ця умова виконується, то система (6.5) має $(k = n - r)$-параметричну сім'ю розв'язків вигляду $z = y + z^*$, де $y$ — загальний розв'язок лінійної однорідної системи $Qz = 0$, а $z^*$ — частинний розв'язок неоднорідної $(b \neq 0)$ системи.

Розглянемо критерій розв'язності системи (6.5), який грунтується на використанні понять «матриця-ортопроектор» та «псевдообернена матриця» [4] і дає конструктивні умови розв'язності й представлення розв'язку системи.

Нагадаємо деякі означення й факти. Множини

$$\operatorname{Ker} Q = \{z \in \mathbb{R}^n | Qz = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{і} \quad \operatorname{Im} Q = \{b \in \mathbb{R}^p | \exists z \in \mathbb{R}^n | Qz = b\} \subseteq \mathbb{R}^p \tag{6.6}$$

називають відповідно *ядром* і *образом матриці (лінійного оператора)* $Q$. Множини $\operatorname{Ker} Q$ і $\operatorname{Im} Q$ є лінійними векторними просторами. Вимірності ядра й образу матриці $Q$ відповідно становлять: $\dim \operatorname{Ker} Q = n - r$ $(\dim \operatorname{Ker} Q^T = p - r)$, $\dim \operatorname{Im} Q = r$, де $r = \operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} Q^T$ — ранг матриці $Q$. Ядро й образ позначають також символами $\operatorname{Ker} Q = N(Q)$, $\operatorname{Im} Q = R(Q)$.

**Теорема 6.1**

Має місце ортогональний розклад простору $\mathbb{R}^p$ на підпростори:

$$\mathbb{R}^p = \operatorname{Ker} Q^T \oplus \operatorname{Im} Q. \tag{6.7}$$

**Доведення**

Оскільки

$$p = \dim \mathbb{R}^p = p - r + r = \dim \operatorname{Ker} Q^T + \dim \operatorname{Im} Q,$$

то достатньо довести, що будь-який елемент $y \in \operatorname{Ker} Q^T$ ортогональний до будь-якого елемента $x \in \operatorname{Im} Q$. Використовуючи скалярні добутки $(\,,)_{\mathbb{R}^p}$, $(\,,)_{\mathbb{R}^n}$ у дійсних евклідових просторах $\mathbb{R}^p$ і $\mathbb{R}^n$, маємо:

$$(y, x)_{\mathbb{R}^p} = (y, Qz)_{\mathbb{R}^p} = (Q^T y, z)_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

оскільки $Q^T y = 0$ ($y \in \operatorname{Ker} Q^T$).

Із теореми 6.1 випливає, що будь-який елемент $b \in \mathbb{R}^p$ можна однозначно представити у вигляді $b = y + x$, де $y \in \operatorname{Ker} Q^T$, $x \in \operatorname{Im} Q$, причому $y \perp x$ $((y, x)_{\mathbb{R}^p} = 0)$. Лінійний оператор $P \overset{\text{def}}{=} P_{N(Q^T)} \overset{\text{def}}{=} P_{Q^T} : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$, визначений для всіх $b \in \mathbb{R}^p$ рівністю $Pb = y$, називають *оператором ортогонального проектування* (*ортопроектором*) на підпростір $N(Q^T)$. Елемент $y$ називають *ортогональною проекцією елемента* $b$ на підпростір $N(Q^T) = \operatorname{Ker} Q^T$. Очевидно, $Q^T P_{Q^T} b = 0 \ \forall b \in \mathbb{R}^p$.

Ортопроектори $P_Q$, $P_{Q^T}$ можна побудувати за формулами [4]

$$\begin{aligned} P_Q z &= \sum_{i,\,j=1}^{k} \alpha_{ij}(z, \varphi_j)\varphi_i = \sum_{i,\,j=1}^{k} \alpha_{ij}\varphi_i\varphi_j^T z \quad (z \in \mathbb{R}^n), \\ P_{Q^T} b &= \sum_{i,\,j=1}^{m} \beta_{ij}(b, \psi_j)\psi_i = \sum_{i,\,j=1}^{m} \beta_{ij}\psi_i\psi_j^T b \quad (b \in \mathbb{R}^p), \end{aligned} \tag{6.8}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ ($k = n - r$) — базис $\operatorname{Ker} Q$, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ ($m = p - r$) — базис $\operatorname{Ker} Q^T$, $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ — елементи матриць $\Gamma_Q^{-1}$ і $\Gamma_{Q^T}^{-1}$, обернених до симетричних матриць Грама $\Gamma_Q = (a_{ij})$ $(a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j))_{\mathbb{R}^n}$, $\Gamma_{Q^T} = (b_{ij})$ $(b_{ij} = (\psi_i, \psi_j)_{\mathbb{R}^p})$ відповідно.

Доведемо, наприклад, другу з формул (6.8). Нехай

$$y = \sum_{k=1}^{m} y_k \psi_k, \quad b = y + x.$$

Маємо

$$P_{Q^T} b = \sum_{i,\,j=1}^{m} \alpha_{ij}(y + x, \psi_j)\psi_i = \sum_{i,\,j=1}^{m} \alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\psi_k, \psi_j\right)\psi_i = \sum_{i,\,j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ij}a_{jk}y_k\psi_i =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \delta_{ik}y_k\psi_i = \sum_{i=1}^{m} y_i\psi_i = y \quad (\delta_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k,\ \delta_{ii} = 1).$$

Із (6.8) випливає, що коли базиси $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ ортонормовані, то

$$P_Q = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i\varphi_i^T, \quad P_{Q^T} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i\psi_i^T.$$





Матрицю $Q^+$ вимірності $(n \times p)$ називають *псевдооберненою* до $(p \times n)$-вимірної матриці $Q$, якщо виконуються умови

$$Q^+Q = E_n - P_Q, \quad QQ^+ = E_p - P_{Q^T}. \tag{6.9}$$

Псевдообернену матрицю $Q^+$ можна побудувати за формулами*

$$Q^+ = (Q^TQ + P_Q)^{-1}Q^T, \quad Q^+ = Q^T(QQ^T + P_{Q^T})^{-1}, \tag{6.10}$$

де $P_Q = P_{N(Q)}$, $P_{Q^T} = P_{N(Q^T)}$.

Якщо $p = n$ і $\operatorname{rank} Q = n$, то $\operatorname{Ker} Q = 0$, $\operatorname{Ker} Q^T = 0$, $P_Q = 0$, $P_{Q^T} = 0$ і з формул (6.10) маємо $Q^+ = Q^{-1}$.

Із теореми (6.1) випливає критерій розв'язності лінійної алгебричної системи з прямокутною матрицею.

**Теорема 6.2**

Система (6.5) розв'язна тоді й лише тоді, коли виконується умова розв'язності

$$P_{Q^T} b = 0. \tag{6.11}$$

Якщо умова (6.11) справджується, то система (6.5) має $k$-параметричну ($k = n - r$, $r = \operatorname{rank} Q$) сім'ю розв'язків вигляду

$$z = P_Q z_0 + Q^+ b, \tag{6.12}$$

де $P_Q z_0 = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i \in \operatorname{Ker} Q$ — загальний розв'язок лінійної однорідної системи, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ — довільний вектор.

**Доведення**

Система (6.5) розв'язна тоді й лише тоді, коли $b \in \operatorname{Im} Q$. Згідно з (6.7) ця умова виконується тоді й лише тоді, коли $P_{Q^T} b = 0$. Покажемо тепер, що формулою (6.12) визначений розв'язок системи (6.5). Маємо

$$Qz = Q(P_Q z_0 + Q^+ b) = QP_Q z_0 + QQ^+ b = (E_p - P_{Q^T})b = b - P_{Q^T} b = b.$$

* У [12] псевдообернена матриця $Q^+$ будується за допомогою так званого скелетного розкладу матриці $Q$.

**❑ Приклад 6.3**

*Знайдемо умову розв'язності системи* $Qz = b$, *де* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $z = (z_1, z_2)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$.

Оскільки $r = \operatorname{rank} Q = 2$, то $k = n - r = 2 - 2 = 0$, $P_Q = 0$ і при виконанні умови розв'язності система має єдиний розв'язок $z = Q^+b$. Із умови $Q^Ty = 0$ знаходимо базис ядра $\operatorname{Ker} Q^T$: $\varphi_1 = (1, -1, -2)^T$. Матрицю-ортопроектор $P_{Q^T}$ будуємо за формулою (6.8):

$$\Gamma_{Q^T} = ((\varphi_1, \varphi_2)) = (6), \quad \Gamma_{Q^T}^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right),$$

$$P_{Q^T} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}(1 - 1 - 2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умова розв'язності системи має вигляд $P_{Q^T}b = 0$, звідки $b_1 - b_2 - 2b_3 = 0$. За першою з формул (6.10) дістаємо

$$Q^+ = (Q^TQ)^{-1}Q^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, в разі виконання умови $b_1 - b_2 - 2b_3 = 0$ система має єдиний розв'язок

$$z = Q^+b = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} b_1 + 5b_2 - 2b_3 \\ 2b_1 - 2b_2 + 2b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

## 6.3

## Розв'язність та інтегральне представлення розв'язків лінійних крайових задач. Функція Гріна крайової задачі

Продовжимо дослідження крайової задачі (6.1), (6.2), а також крайових задач для скалярного рівняння $L_1y = g(t)$. Як частинні розв'язки $x^*(t)$ і $y^*(t)$ неоднорідних рівнянь $Lx = f(t)$ і $L_1y = g(t)$ виберемо відповідно функції





$$\bar{x}(t) = \int_a^b \bar{X}(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad \bar{y}(t) = \int_a^b \bar{K}(t, \tau)g(\tau)d\tau,$$

де $\bar{X}(t, \tau) = \frac{1}{2}X(t, \tau)\operatorname{sign}(t - \tau)$, $\bar{K}(t, \tau) = \frac{1}{2}K(t, \tau)\operatorname{sign}(t - \tau)$ [$X(t, \tau)$ — матрицант системи $Lx = 0$, $K(t, \tau)$ — функція Коші рівняння $L_1y = 0$].

Покажемо, наприклад, що $\bar{x} = \bar{x}(t)$ є розв'язком системи (6.1). Маємо:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{1}{2}\int_a^t \dot{X}(t, \tau)f(\tau)d\tau + \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_t^b \dot{X}(t, \tau)f(\tau)d\tau + \frac{1}{2}f(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \dot{X}(t, \tau)\operatorname{sign}(t - \tau)f(\tau)d\tau + f(t) = \frac{1}{2}\int_a^b A(t)X(t, \tau)\times$$

$$\times\operatorname{sign}(t - \tau)f(\tau)d\tau + f(t),$$

$$L\bar{x} = \dot{\bar{x}}(t) - A(t)\bar{x}(t) = f(t).$$

У випадку сталої матриці $A$ розв'язок $\bar{x}(t)$ має вигляд

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2}\int_a^b e^{A(t-\tau)}\operatorname{sign}(t - \tau)f(\tau)d\tau,$$

а, наприклад, для рівняння $y'' + \nu^2 y = g(t)$ $(\nu > 0)$ розв'язок $\bar{y}(t)$ можна записати так (див. приклад 4.2):

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{2\nu}\int_a^b \sin\nu(t - \tau)\operatorname{sign}(t - \tau)g(\tau)d\tau = \frac{1}{2\nu}\int_a^b \sin\nu\,|t - \tau|\,g(\tau)d\tau$$

✍ Пропонуємо самостійно довести, що функція $\bar{y}(t)$ є розв'язком рівняння $L_1y = g(t)$ і що зв'язок між розв'язками $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ і розв'язками $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ [формули (4.28), (4.29)] виражається рівностями

$$\bar{x}(t) = \tilde{x}(t) + \frac{1}{2}\left[\int_a^{t_0} X(t, \tau)f(\tau)d\tau - \int_{t_0}^b X(t, \tau)f(\tau)d\tau\right],$$

$$\bar{y}(t) = \tilde{y}(t) + \frac{1}{2}\left[\int_a^{t_0} K(t, \tau)g(\tau)d\tau - \int_{t_0}^b K(t, \tau)g(\tau)d\tau\right]. \qquad (a \le t_0 \le b)$$

### I. Випадок $p = n$, $\det Q \neq 0$*

**Теорема 6.3**

Якщо $p = n$, $\det Q \neq 0$, то крайова задача (6.1), (6.2) завжди розв'язна й має єдиний розв'язок

$$x(t) = G(f(t)) + X(t)Q^{-1}\alpha \tag{6.13}$$

для будь-якої неперервної векторної функції $f(t)$ і будь-якого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^p$, де $G$ — *оператор Гріна*, який діє на довільну функцію $f(t)$ за законом

$$G(f(t)) = \int_a^b \bar{X}(t, \tau)f(\tau)d\tau - X(t)Q^{-1}l\int_a^b \bar{X}(t, \tau)f(\tau)d\tau. \tag{6.14}$$

Для доведення цієї теореми достатньо єдиний розв'язок системи (6.4) $c = Q^{-1}(\alpha - l\bar{x})$ підставити у формулу (6.3) і відповідним чином згрупувати доданки.

Якщо в (6.14) $l\int_a^b \bar{X}(t, \tau)f(\tau)d\tau = \int_a^b l\bar{X}(t, \tau)f(\tau)d\tau$, то оператор Гріна можна записати у вигляді $G(f(t)) = \int_a^b G(t, \tau)f(\tau)d\tau$, де $G(t, \tau)$ — $(n \times n)$-вимірна *матриця (функція) Гріна*** *крайової задачі (6.1), (6.2):*

$$G(t, \tau) = \bar{X}(t, \tau) - X(t)Q^{-1}l\bar{X}(\cdot, \tau) \tag{6.15}$$

(запис $l\bar{X}(\cdot, \tau)$ означає, що функціонал $l$ діє по змінній $t$).

Із формули (6.15) випливає, що матриця Гріна $G(t, \tau)$ має такі властивості:

1) *при* $t \neq \tau$ *матриця* $G(t, \tau)$ *є розв'язком матричного рівняння* $\dfrac{dG}{dt} = A(t)G$;
2) $G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E_n$;
3) $lG(\cdot, \tau) = 0$.

* Цей випадок називають *фредгольмовим некритичним випадком*.

** Матрицю Гріна називають також *матрицею (функцією) впливу* крайової задачі. За допомогою функцій впливу можна вивчати властивості розв'язків лінійних крайових задач залежно від зміни функції $f(t)$ (тобто досліджувати вплив $f(t)$ на ці властивості). Метод побудови розв'язків крайових задач за допомогою функцій впливу називають *методом функцій впливу*.





Властивості 1) і 3) пропонуємо довести самостійно. Доведемо властивість 2). Маємо:

$$G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = \frac{1}{2}X(\tau, \tau) - X(\tau)Q^{-1}l\bar{X}(\cdot, \tau) - \left(-\frac{1}{2}X(\tau, \tau) - X(\tau)Q^{-1}l\bar{X}(\cdot, \tau)\right) = X(\tau, \tau) = E_n.$$

Умовами 1)—3) матриця Гріна визначена однозначно.

Через матрицю Гріна єдиний розв'язок задачі виражається формулою

$$x(t) = X(t)Q^{-1}\alpha + \int_a^b G(t, \tau)f(\tau)d\tau. \tag{6.16}$$

Розглянемо приклади, які ілюструють випадок $p = n$, $\det Q \neq 0$.

**1. Задача Коші.** В цьому випадку $p = n$, $Q = lX = X(t_0)$. Оскільки $X(t)$ — фундаментальна матриця ($\det Q = \det X(t_0) \neq 0$), то з (6.15) дістаємо вираз для матриці Гріна задачі Коші

$$G(t, \tau) = \bar{X}(t, \tau) - X(t)X^{-1}(t_0)\bar{X}(t_0, \tau) = \frac{1}{2}X(t, \tau)[\operatorname{sign}(t - \tau) - \operatorname{sign}(t_0 - \tau)],$$

звідки $G(t, \tau) = X(t, \tau)$ при $\tau \in (t_0, t)$, $G(t, \tau) = 0$ при $\tau \notin [t_0, t]$. Задача має єдиний розв'язок

$$x(t) = X(t, t_0)\alpha + \int_a^b G(t, \tau)f(\tau)d\tau = X(t, t_0)\alpha + \int_{t_0}^t X(t, \tau)f(\tau)d\tau = X(t, t_0)\alpha + \tilde{x}(t).$$

**2. Періодична крайова задача.** В цьому випадку $p = n$, $Q = lX = X(a) - X(b)$, $\alpha = 0 \in \mathbb{R}^n$. Нехай $a = 0$, $b = \omega$. Припустимо, що матриця $A(t)$ і функція $f(t)$ у системі (6.1) $\omega$-періодичні. Нехай $X(t)$ — нормальна (при $t = 0$) фундаментальна матриця: $X(0) = E_n$. Тоді $Q = E_n - X(\omega)$ і умова $\det Q \neq 0$ є необхідною й достатньою для існування єдиного

$\omega$-періодичного розв'язку системи (6.1). У теорії Флоке—Ляпунова [14] лінійних систем із періодичними коефіцієнтами матрицю $X(\omega)$ називають *матрицею монодромії*, а її власні числа – *мультиплікаторами* системи. Таким чином, система (6.1) ($f(t) \not\equiv 0$) має єдиний $\omega$-періодичний розв'язок тоді й лише тоді, коли серед мультиплікаторів даної системи немає таких, що дорівнюють одиниці. Якщо $A(t) = A$ — стала матриця, то $X(\omega) = e^{A\omega}$ і, отже, необхідною й достатньою умовою існування єдиного $\omega$-періодичного розв'язку є відсутність у матриці $A$ власних чисел вигляду $\dfrac{2\pi ik}{\omega}$ $(k \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1)$.

За формулою (6.15) знайдемо матрицю Гріна періодичної задачі. Маємо:

$$l\bar{X}(\cdot,\tau) = \frac{1}{2}[X(0,\tau)\operatorname{sign}(-\tau) - X(\omega,\tau)\operatorname{sign}(\omega-\tau)] =$$

$$= -\frac{1}{2}[E_n + X(\omega)]X^{-1}(\tau),$$

$$G(t,\tau) = \frac{1}{2}X(t)X^{-1}(\tau)\operatorname{sign}(t-\tau) +$$

$$+X(t)(E_n - X(\omega))^{-1}\frac{1}{2}(E_n + X(\omega))X^{-1}(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}X(t)[E_n\operatorname{sign}(t-\tau) + E_n + 2(E_n - X(\omega))^{-1}X(\omega)]X^{-1}(\tau) =$$

$$= \begin{cases} X(t)(E_n - X(\omega))^{-1}X(\omega)X^{-1}(\tau) & \text{при} \quad 0 \le t < \tau, \\ X(t)[E_n + (E_n - X(\omega))^{-1}X(\omega)]X^{-1}(\tau) & \text{при} \quad \tau < t \le \omega. \end{cases} \tag{6.17}$$

Єдиний $\omega$-періодичний розв'язок заданий формулою

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{6.18}$$

**3. Функція Гріна лінійної крайової задачі для скалярного диференціального рівняння другого порядку з однорідними розщепленими крайовими умовами.** Побудуємо інтегральне представлення розв'язку й функцію Гріна задачі

$$L_1 y \equiv y'' + h_1(t)y' + h_2(t)y = g(t) \quad (t \in [a,b]), \tag{6.19}$$





$$\begin{aligned} l_1(y) &\equiv b_{11}y(a) + b_{12}y'(a) = 0, \\ l_2(y) &\equiv b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \end{aligned} \qquad (|b_{i1}| + |b_{i2}| > 0,\ i = 1, 2) \tag{6.20}$$

$$(h_1(t),\ h_2(t),\ g(t) \in C_{[a,b]})$$

у припущенні, що однорідна ($g(t) \equiv 0$) крайова задача має лише тривіальний ($y \equiv 0$) розв'язок.

Розв'язки $y_1(t)$, $y_2(t)$ фундаментальної системи розв'язків рівняння $L_1 y = 0$ виберемо так, щоб $l_1(y_1) = 0$, $l_2(y_2) = 0$. Такий вибір можливий, оскільки за $y_1(t)$ можна взяти розв'язок задачі Коші $L_1 y = 0$, $y(a) = -b_{12}$, $y_1'(a) = b_{11}$, а за $y_2(t)$ — розв'язок задачі $L_1 y = 0$, $y(b) = -b_{22}$, $y'(b) = b_{21}$. Ці розв'язки лінійно незалежні, бо інакше $y_2 = cy_1$ ($c = \text{const}$) і $y_2 \neq 0$ — нетривіальний розв'язок лінійної однорідної задачі, що неможливо.

Загальний розв'язок рівняння (6.19) запишемо у вигляді

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \bar{y}(t), \tag{6.21}$$

де $\bar{y}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b K(t,\tau)\operatorname{sign}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$, а $K(t,\tau)$ — функція Коші рівняння $L_1 y = 0$,

$$K(t,\tau) = \frac{1}{W(\tau)}\begin{vmatrix} y_1(\tau) & y_2(\tau) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{W(\tau)}(y_2(t)y_1(\tau) - y_1(t)y_2(\tau)),$$

знайдена за формулою (4.26) ($W(\tau)$ — вронскіан системи розв'язків $y_1$, $y_2$).

Загальний розв'язок (6.21) підставимо в крайові умови (6.20). Нехай $l_1(y_2) = \alpha$, $l_2(y_1) = \beta$. Тоді

$$l_1(\bar{y}) = \frac{1}{2}\int_a^b l_1(K(t,\tau)\operatorname{sign}(t-\tau))g(\tau)\,d\tau = -\frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{y_1(\tau)}{W(\tau)}g(\tau)\,d\tau,$$

$$l_2(\bar{y}) = \frac{1}{2}\int_a^b l_2(K(t,\tau)\operatorname{sign}(t-\tau))g(\tau)\,d\tau = -\frac{\beta}{2}\int_a^b \frac{y_2(\tau)}{W(\tau)}g(\tau)\,d\tau,$$

$$c_1 \cdot 0 + c_2\alpha = \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{y_1(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau,$$

$$c_2 \cdot 0 + c_1\beta = \frac{\beta}{2}\int_a^b \frac{y_2(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau.$$

Оскільки $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ (однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок), то розв'язок останньої системи єдиний:

$$c_2 = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{y_1(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau, \quad c_1 = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{y_2(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau.$$

Підставивши в (6.21), дістанемо

$$y = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{y_1(t)y_2(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{y_2(t)y_1(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{y_2(t)y_1(\tau)}{W(\tau)} - \frac{y_1(t)y_2(\tau)}{W(\tau)}\right)\operatorname{sign}(t-\tau) g(\tau)\,d\tau =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \frac{y_1(t)y_2(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau & (a \le t < \tau), \\ \displaystyle\int_a^b \frac{y_2(t)y_1(\tau)}{W(\tau)} g(\tau)\,d\tau & (\tau < t \le b). \end{cases}$$

Таким чином, задача має єдиний розв'язок

$$y(t) = \int_a^b G_1(t, \tau) g(\tau)\,d\tau,$$

де

$$G_1(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(\tau)}{W(\tau)} & \text{при} \quad a \le t < \tau, \\ \dfrac{y_2(t)y_1(\tau)}{W(\tau)} & \text{при} \quad \tau < t \le b \end{cases} \tag{6.22}$$

— *функція Гріна крайової задачі (6.19), (6.20).*





✍ Пропонуємо самостійно довести такі твердження:

1) $L_1(G_1(t, \tau)) = 0$ ($t \neq \tau$, $\tau$ — параметр);
2) $G_1(\tau+0, \tau) = G_1(\tau-0, \tau)$, $G'_{1t}(\tau+0, \tau) - G'_{1t}(\tau-0, \tau) = 1$;
3) $l_1(G_1(t, \tau)) = 0$, $l_2(G_1(t, \tau)) = 0$ ($\tau$ — параметр);
4) умовами 1)—3) функція Гріна визначена однозначно.

**4. Побудова функції Гріна скалярної періодичної задачі**

$$L_1 y \equiv y'' + y = g(t), \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi).$$

Еквівалентна векторна задача має вигляд

$$Lx \equiv \dot{x} - Ax = f(t), \quad lx = 0 \quad (t \in [0, \pi]),$$

де $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = (0, g(t))^T$, $x = (y, y')^T$, $lx \equiv x(0) - x(\pi)$, $p = n = 2$.

Фундаментальна матриця $X(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Знайдемо матрицю $Q = lX = E_2 - X(\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Очевидно, $\det Q \neq 0$. Матрицю Гріна періодичної векторної задачі будуємо за формулою (6.17). Маємо:

$$Q^{-1} = \frac{1}{2}E_2, \quad X(t)Q^{-1}X(\pi)X^{-1}(\tau) = -\frac{1}{2}e^{A(t-\tau)},$$

$$X(t)[E_2 + Q^{-1}X(\pi)]X^{-1}(\tau) = e^{At}\left[E_2 - \frac{1}{2}E_2\right]e^{-A\tau} = \frac{1}{2}e^{A(t-\tau)}.$$

Отже,

$$G(t, \tau) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}e^{A(t-\tau)} & \text{при} \quad 0 \le t < \tau, \\ \dfrac{1}{2}e^{A(t-\tau)} & \text{при} \quad \tau < t \le \pi. \end{cases}$$

Виділяючи першу компоненту розв'язку $x(t) = \int_0^\pi G(t, \tau) f(\tau) d\tau$ векторної задачі, дістанемо інтегральне представлення єдиного розв'язку скалярної періодичної задачі:

$$y(t) = \int_0^\pi G_1(t, \tau) g(\tau) d\tau,$$

де $G_1(t, \tau) = \frac{1}{2} \sin (t - \tau) \operatorname{sign} (t - \tau) = \frac{1}{2} \sin |t - \tau|$ — функція Гріна скалярної періодичної задачі.

Цю саму задачу розв'яжемо, не розглядаючи еквівалентної векторної задачі. Використовуючи функцію Коші $K(t, \tau) = \sin (t - \tau)$ (див. приклад 4.2), загальний розв'язок рівняння $L_1 y = g(t)$ запишемо у вигляді

$$y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \bar{y}(t),$$

де $\bar{y}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin |t - \tau| \, g(\tau) d\tau$. Ураховуючи, що $y' = c_1 \cos t - c_2 \sin t + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos |t - \tau| \operatorname{sign} (t - \tau) g(\tau) d\tau$, загальний розв'язок підставимо в крайові умови:

$$c_2 + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \tau \, g(\tau) d\tau = -c_2 + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \tau \, g(\tau) d\tau,$$

$$c_1 - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \tau \, g(\tau) d\tau = -c_1 - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \tau \, g(\tau) d\tau.$$

Звідси $c_1 = c_2 = 0$ і $y = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin |t - \tau| \, g(\tau) d\tau = \bar{y}(t)$.

✍ Пропонуємо самостійно перевірити, що функція Гріна $G_1(t, \tau) = \frac{1}{2} \sin |t - \tau|$ має такі властивості:

1) $L_1(G_1(t, \tau)) = 0$ ($\tau$ — параметр, $t \neq \tau$);

2) $G_1(\tau + 0, \tau) = G_1(\tau - 0, \tau)$, $G'_{1t}(\tau + 0, \tau) - G'_{1t}(\tau - 0, \tau) = 1$;

3) $G_1(0, \tau) = G_1(\pi, \tau)$, $G'_{1t}(0, \tau) = G'_{1t}(\pi, \tau)$.





Пропонуємо також самостійно довести, що функція

$$G_1(t, \tau) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\nu \det Q} |\sin \nu(t - \tau) - \sin(\nu(t - \tau) + \nu\omega)| & (0 \le t < \tau), \\ \dfrac{1}{\nu} \sin \nu(t - \tau) - \dfrac{1}{\nu \det Q} |\sin \nu(t - \tau) - \sin(\nu(t - \tau) + \nu\omega)| & (\tau < t \le \omega) \end{cases}$$

є функцією Гріна задачі $y'' + \nu^2 y = g(t)$, $y(0) = y(\omega)$, $y'(0) = y'(\omega)$ ($\nu > 0$, $\omega > 0$, $\nu\omega \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

**5. Побудова функції Гріна лінійних крайових задач з однорідними крайовими умовами.** Розглянемо метод побудови функції Гріна у випадку $\alpha = 0$ для системи диференціальних рівнянь (скалярного рівняння), який ґрунтується на використанні фундаментальної матриці (фундаментальної системи розв'язків) і властивостях функції Гріна, встановлених у цьому параграфі. Як і раніше, розглянемо випадок $p = n$, $\det Q \neq 0$, тобто випадок, коли *відповідна лінійна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок*. У цьому разі функція Гріна існує й єдина.

*Матрицю Гріна* $G(t, \tau)$ крайової задачі $Lx \equiv \dot{x} - A(t)x = f(t)$, $lx = 0$ ($t \in [a, b]$) шукаємо у вигляді

$$G(t, \tau) = \begin{cases} X(t) C_1(\tau) & \text{при} \quad a \le t < \tau < b, \\ X(t) C_2(\tau) & \text{при} \quad a < \tau < t \le b, \end{cases}$$

де $X(t)$ — фундаментальна матриця, а $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, які визначаються з таких *умов*:

1) $LG = 0$ ($t \neq \tau$, $\tau$ — параметр);

2) $G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E_n$;

3) $lG(\cdot, \tau) = 0$.

Із вигляду матриці Гріна випливає, що умова 1) виконується. З умови 2) маємо $X(\tau)(C_2(\tau) - C_1(\tau)) = E_n$, звідки $C_2(\tau) = X^{-1}(\tau) + C_1(\tau)$ і

$$G(t,\tau)=\begin{cases} X(t)C_1(\tau) & \text{при} \quad a\le t<\tau<b,\\ X(t)X^{-1}(\tau)+X(t)C_1(t) & \text{при} \quad a<\tau<t\le b.\end{cases}$$

Матриця $C_1(\tau)$ вибирається з умови 3).

Як приклад побудуємо матрицю Гріна періодичної крайової задачі (див. п. 4) $\dot{x}-Ax=f(t)$, $x(0)=x(\pi)$ $(t\in[0,\pi])$, де $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. У цьому випадку

$$X(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix},\quad X^{-1}(\tau)=\begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau\\ \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix},$$

$$G(t,\tau)=\begin{cases} X(t)C_1(\tau) & \text{при} \quad 0\le t<\tau<\pi,\\ X(t)X^{-1}(\tau)+X(t)C_1(\tau) & \text{при} \quad 0<\tau<t\le \pi.\end{cases}$$

Ураховуючи, що $X(0)=E_2$, $X(\pi)=-E_2$, з крайових умов маємо $X(0)C_1(\tau)=$ $=X(\pi)X^{-1}(\tau)+X(\pi)C_1(\tau)$, звідки $C_1(\tau)=-\frac{1}{2}X^{-1}(\tau)$. Тому

$$G(t,\tau)=\begin{cases} -\frac{1}{2}X(t)X^{-1}(\tau) & \text{при} \quad 0\le t<\tau<\pi,\\ \frac{1}{2}X(t)X^{-1}(\tau) & \text{при} \quad 0<\tau<t\le \pi.\end{cases}$$

Розглянемо лінійну крайову задачу

$$L_1y\equiv y^{(n)}+h_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+h_n(t)y=g(t),$$
$$l(y,y',\ldots,y^{(n-1)})=0\quad (t\in[a,b])$$

для скалярного рівняння. Звівши цю задачу до еквівалентної векторної відносно функції $x=(y,y',\ldots,y^{(n-1)})^T$, дістанемо розв'язок векторної задачі у вигляді $x(t)=\int_a^b G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$, де $f(t)=(0,0,\ldots,g(t))^T$, а матриця Гріна $G(t,\tau)$ має таку структуру:





$$G(t,\tau)=\begin{pmatrix} g_{11}(t,\tau) & \ldots & g_{1n}(t,\tau)\\ g'_{11}(t,\tau) & \ldots & g'_{1n}(t,\tau)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ g_{11}^{(n-1)}(t,\tau) & \ldots & g_{1n}^{(n-1)}(t,\tau)\end{pmatrix}$$

($\tau$ — параметр). Тому $y(t)=\int_a^b g_{1n}(t,\tau)g(\tau)\,d\tau$, і функція Гріна скалярної задачі $G_1(t,\tau)=g_{1n}(t,\tau)$ має такі властивості:

1) $L_1(G_1)=0$ ($t\ne\tau$, $\tau$ — параметр);

2) $G_1^{(i)}(\tau+0,\tau)-G_1^{(i)}(\tau-0,\tau)=0$ $(i=0,\ldots,n-2)$,
$G_1^{(n-1)}(\tau+0,\tau)-G_1^{(n-1)}(\tau-0,\tau)=1$;

3) $l(G_1(\cdot,\tau),G_1'(\cdot,\tau),\ldots,G_1^{(n-1)}(\cdot,\tau))=0$.

Отже, функцію Гріна скалярної задачі слід шукати у вигляді

$$G_1(t,\tau)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}c_{1k}(\tau)y_k(t) & \text{при} \quad a\le t<\tau<b,\\ \sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}(\tau)y_k(t) & \text{при} \quad a<\tau<t\le b,\end{cases}$$

де $y_1(t),\ldots,y_n(t)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння $L_1y=0$, а коефіцієнти $c_{1k}(\tau)$, $c_{2k}(\tau)$ $(k=1,\ldots,n)$ добираються так, щоб виконувались умови 1)—3).

Як приклад побудуємо матрицю Гріна скалярної періодичної задачі (див. п. 4) $L_1y\equiv y''+y=g(t)$, $y(0)=y(\pi)$, $y'(0)=y'(\pi)$ $(t\in[0,\pi])$. Фундаментальну систему розв'язків виберемо у вигляді $y_1(t)=\cos t$, $y_2(t)=\sin t$. Тоді

$$G_1(t,\tau)=\begin{cases} c_{11}(\tau)\cos t+c_{12}(\tau)\sin t & \text{при} \quad 0\le t\le\tau<\pi,\\ c_{21}(\tau)\cos t+c_{22}(\tau)\sin t & \text{при} \quad 0<\tau<t\le \pi.\end{cases}$$

Умова 1) очевидно виконується. Умови 2) і 3) у випадку $n=2$ мають відповідно такий вигляд:

$$G_1(\tau+0,\tau)-G_1(\tau-0,\tau)=0,\quad G_1'(\tau+0,\tau)-G_1'(\tau-0,\tau)=1,$$
$$G_1(0,\tau)=G_1(\pi,\tau),\ G_1'(0,\tau)=G_1'(\pi,\tau).$$

Ураховуючи ці умови, дістанемо таку систему рівнянь відносно $c_{1k}=c_{1k}(\tau)$, $c_{2k}=c_{2k}(\tau)$ $(k=1,2)$:

$$(c_{21}-c_{11})\cos\tau+(c_{22}-c_{12})\sin\tau=0,\quad c_{11}=-c_{21},$$
$$-(c_{21}-c_{11})\sin\tau+(c_{22}-c_{12})\cos\tau=0,\quad c_{12}=-c_{22}.$$

Звідси $c_{11}=\frac{1}{2}\sin\tau$, $c_{12}=-\frac{1}{2}\cos\tau$, $c_{21}=-\frac{1}{2}\sin\tau$, $c_{22}=\frac{1}{2}\cos\tau$. Тому

$$G_1(t,\tau)=$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\tau\cos t-\frac{1}{2}\cos\tau\sin t=\frac{1}{2}\sin(\tau-t) & \text{при } 0\le t<\tau<\pi,\\ -\frac{1}{2}\sin\tau\cos t+\frac{1}{2}\cos\tau\sin t=-\frac{1}{2}\sin(\tau-t) & \text{при } 0<\tau<t\le\pi,\end{cases}$$

або $G_1(t,\tau)=\frac{1}{2}\sin|t-\tau|$ $(0\le t\le\pi,\ 0<\tau<\pi)$.

Насамкінець зазначимо, що лінійну крайову задачу $Lx\equiv\dot{x}-A(t)x=f(t)$ з неоднорідними крайовими умовами $lx=\alpha$ $(\alpha\ne0)$ можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами за допомогою заміни $x=z+\varphi$, де $z$ — нова шукана функція, а $\varphi$ — деяка диференційовна функція, яка вибирається з умови $l\varphi=\alpha$. Тоді відносно $z$ дістанемо крайову задачу $\dot{z}-A(t)z=f_1(t)$, $lz=0$, де $f_1(t)=f(t)-\dot{\varphi}+A(t)\varphi$.

## II. Загальний випадок

**Теорема 6.4**

Крайова задача (6.1), (6.2) розв'язна тоді й лише тоді, коли векторна функція $f(t)$ і вектор $\alpha\in\mathbb{R}^p$ задовольняють умову розв'язності

$$P_{Q^r}\left(\alpha-l\int_a^b\overline{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau\right)=0. \qquad (6.23)$$





Якщо умова (6.23) виконується, то задача (6.1), (6.2) має $k$-параметричну ($k=n-r$, $r=\operatorname{rank}Q$) сім'ю розв'язків вигляду

$$x(t)=X(t)P_Qc_0+G(f(t))+X(t)Q^+\alpha, \qquad (6.24)$$

де $G$ — *узагальнений оператор Гріна*, який діє на довільну неперервну функцію $f(t)$ за законом

$$G(f(t))=\int_a^b\overline{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau-X(t)Q^+l\int_a^b\overline{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (6.25)$$

Для доведення цієї теореми достатньо множину розв'язків системи (6.4) $c=P_Qc_0+Q^+(\alpha-l\bar{x})$ підставити у формулу (6.3) $(x^*(t)=\bar{x}(t))$.

Якщо в (6.25) $l\int_a^b\overline{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau=\int_a^b l\overline{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau$, то узагальнений оператор Гріна має вигляд

$$G(f(t))=\int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

де $G(t,\tau)$ — *$(n\times n)$-вимірна узагальнена матриця (функція) Гріна крайової задачі (6.1), (6.2)*:

$$G(t,\tau)=\overline{X}(t,\tau)-X(t)Q^+l\overline{X}(\cdot,\tau). \qquad (6.26)$$

Із (6.26) випливає, що матриця $G(t,\tau)$ має такі властивості:

1) *при $t\ne\tau$ матриця $G(t,\tau)$ є розв'язком матричного рівняння* $\frac{dG}{dt}=A(t)G$;
2) $G(\tau+0,\tau)-G(\tau-0,\tau)=E_n$;
3) $lG(\cdot,\tau)=P_{Q^r}l\overline{X}(\cdot,\tau)$.

Доведемо властивість 3). Маємо:

$$lG(\cdot,\tau)=l\overline{X}(\cdot,\tau)-lXQ^+l\overline{X}(\cdot,\tau)=l\overline{X}(\cdot,\tau)-QQ^+l\overline{X}(\cdot,\tau)=$$
$$=l\overline{X}(\cdot,\tau)-(E_p-P_{Q^r})l\overline{X}(\cdot,\tau)=P_{Q^r}l\overline{X}(\cdot,\tau).$$

Властивості 1), 2) пропонуємо довести самостійно.

Якщо $p=n$, $\det Q\ne0$, то $Q^+=Q^{-1}$ і узагальнена матриця Гріна є матрицею Гріна (6.15) крайової задачі (6.1), (6.2).

**◆ Зауваження 6.1**

Якщо $r=\operatorname{rank}Q=n$, то крайову задачу (6.1), (6.2) називають *некритичною*: $k=0$, $P_Q=0$ ($\operatorname{Ker}Q=0$). У випадку розв'язності некритична задача має єдиний розв'язок $x(t)=G(f(t))+X(t)Q^+\alpha$. Некритичною, зокрема, є задача (6.1), (6.2) при $p=n$, $\det Q\ne0$ (ця задача завжди розв'язна).

◆ **Зауваження 6.2**

Якщо $r = \operatorname{rank} Q < n$, то задачу (6.1), (6.2) називають *критичною*. У випадку розв'язності критична крайова задача має $(k = n - r)$-параметричну сім'ю розв'язків вигляду (6.24).

Розглянемо приклади, які ілюструють загальний випадок.

**1.** $y'' + y = g(t)$, $y(0) = y(\pi)$ (див. приклад 6.1). Фундаментальна матриця еквівалентної системи має вигляд $X(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Знаходимо матрицю $Q = lX = M_1X(0) + M_2X(\pi) = (2\ 0)$. Оскільки $p = 1$, $\operatorname{rank} Q = 1 < n = 2$, то крайова задача є критичною, $P_{Q^T} = 0$ ($\dim \operatorname{Ker} Q^T = p - r = 0$). Тому умова розв'язності (6.23) завжди виконується й задача має однопараметричну ($k - n - r = 1$) сім'ю розв'язків.

Матриці $P_Q$ і $Q^+$ знаходимо за формулами (6.8) і (6.10): $P_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

За допомогою формули (6.26) дістаємо узагальнену матрицю Гріна:

$$G(t,\tau) = \bar{X}(t,\tau) - X(t)Q^+l\bar{X}(\cdot,\tau) = \bar{X}(t,\tau) = \frac{1}{2}X(t)X^{-1}(\tau)\operatorname{sign}(t-\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix}\operatorname{sign}(t-\tau), \tag{6.27}$$

оскільки $l\bar{X}(\cdot,\tau) = M_1\bar{X}(0,\tau) + M_2\bar{X}(\pi,\tau) = (0\quad 0)$.

Розв'язок $x(t)$ еквівалентної векторної задачі запишемо у вигляді

$$x(t) = c(\sin t,\ \cos t)^T + \int_0^\pi G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

($c \in \mathbb{R}$ — довільний параметр).

Виділивши першу компоненту розв'язку, дістанемо розв'язок $y(t)$ скалярної задачі:

$$y(t) = c\sin t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(t-\tau)\operatorname{sign}(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Отже, узагальненою функцією Гріна скалярної задачі є

$$G_1(t,\tau) = \frac{1}{2}\sin(t-\tau)\operatorname{sign}(t-\tau) = \frac{1}{2}\sin|t-\tau|.$$

**2.** $y'' + y = g(t)$, $y(0) = y(\pi) = 0$ (приклад 6.2). Розв'яжемо цю задачу, не використовуючи еквівалентної векторної. Загальний розв'язок рівняння $y = c_1\sin t + c_2\cos t + \bar{y}(t)$, де $\bar{y}(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin|t-\tau|\,g(\tau)d\tau$, підставимо в крайові умови:





$$c_2 + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\tau\, g(\tau)d\tau = 0,\quad -c_2 + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\tau\, g(\tau)d\tau = 0.$$

Звідси дістаємо умову розв'язності задачі: $\int_0^\pi g(\tau)\sin\tau\, d\tau = 0$ і значення $c_2 = 0$. Таким чином, якщо умова розв'язності виконується, то задача має однопараметричну сім'ю розв'язків (критичний випадок) вигляду

$$y = c\sin t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin|t-\tau|\,g(\tau)d\tau$$

($c \in \mathbb{R}$ — довільний параметр) і узагальнену функцію Гріна

$$G_1(t,\tau) = \frac{1}{2}\sin|t-\tau|.$$

✍ Пропонуємо перевірити, що для функції $g(t) = \cos t$ (яка, очевидно, задовольняє умову розв'язності) остання формула дає розв'язок $y = c\sin t + \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sin t$.

Пропонуємо самостійно показати, що

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ P_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_{Q^T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

виписати умову розв'язності (6.23) і знайти узагальнену матрицю Гріна (6.26) еквівалентної векторної задачі.

**3.** $y'' + y = g(t)$, $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$. Фундаментальна матриця еквівалентної системи має вигляд $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Оскільки $Q = lX = X(0) - X(2\pi) = 0$, то задача є критичною. Далі використовуватимемо загальний розв'язок рівняння $y'' + y = g(t)$ у формі

$$y = c_1\sin t + c_2\cos t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin|t-\tau|\,g(\tau)d\tau.$$

Ураховуючи, що

$$y' = c_1\cos t - c_2\sin t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos|t-\tau|\operatorname{sign}(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

загальний розв'язок підставимо в крайові умови:

$$c_2 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\tau\, g(\tau)\,d\tau = c_2 - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\tau\, g(\tau)\,d\tau,$$

$$c_1 - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\tau\, g(\tau)\,d\tau = c_1 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\tau\, g(\tau)\,d\tau.$$

Звідси дістаємо умови розв'язності критичної періодичної задачі:

$$\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin\tau\,d\tau = 0,\quad \int_0^{2\pi} g(\tau)\cos\tau\,d\tau = 0.$$

Якщо умови розв'язності виконуються, то задача має двопараметричну сім'ю розв'язків

$$y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin|t-\tau|\,g(\tau)\,d\tau$$

($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — довільні параметри) й узагальнену функцію Гріна $G_1(t,\tau) = \frac{1}{2}\sin|t-\tau|$.

✍ Пропонуємо самостійно знайти матриці $P_Q$, $P_{Q^T}$, $Q^+$, виписати умову розв'язності (6.23) і побудувати узагальнену матрицю Гріна (6.26) еквівалентної векторної задачі.

4. $\dot{x} - Ax = f(t),\ x(0) - x(1) = 0$

$$\left( x = (x_1(t), x_2(t))^T,\ f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ t \in [0,1] \right).$$

✍ Пропонуємо самостійно довести, що рівність $\int_0^1 f_2(\tau)\,d\tau = 0$ є умовою розв'язності даної задачі й у разі виконання цієї умови задача має однопараметричну сім'ю розв'язків

$$x(t) = c(1,0)^T + \int_0^1 G(t,\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

де $c \in \mathbb{R}$ — довільний параметр,

$$G(t,\tau) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\operatorname{sign}(t-\tau) - \begin{pmatrix} 2t & t(1-2\tau) \\ 2 & 1-2\tau \end{pmatrix}\right]$$

— узагальнена матриця Гріна.





# 6.4

## Спектральні крайові задачі. Задача Штурма—Ліувілля

Розглянемо лінійну однорідну крайову задачу

$$Lx \equiv \dot{x} - A(t)x = \lambda B(t)x \quad (t \in [a,b]), \tag{6.28}$$

$$lx = 0, \tag{6.29}$$

де $B(t)$ — $(n \times n)$-вимірна, неперервна на $[a,b]$ матриця, $\lambda \in \mathbb{C}$ — параметр, а інші позначення такі самі, як і в (6.1), (6.2).

Задачу відшукання нетривіальних розв'язків (6.28), (6.29) і тих значень параметра $\lambda$, при яких вони існують, називають ***задачею на власні значення***, або ***спектральною задачею.***

Значення $\lambda$, для яких задача (6.28), (6.29) має нетривіальні розв'язки, називають ***власними значеннями (числами)***, а відповідні їм нетривіальні розв'язки – ***власними функціями спектральної задачі.*** Множину $\Lambda = \{\lambda\}$ усіх власних чисел спектральної задачі називають ***спектром задачі.***

На практиці часто виникають спектральні задачі, в яких умова неперервності матриць $A(t)$ і $B(t)$ не виконується. Такі задачі називають ***сингулярними спектральними задачами***, на відміну від задачі (6.28), (6.29), яку називають ***регулярною.*** В сингулярних спектральних задачах, як правило, потрібно знаходити обмежені власні функції та відповідні їм власні числа.

Важливим прикладом спектральної задачі є *задача Штурма—Ліувілля:*

$$L_1 y + \lambda\rho(t)y = 0 \quad (t \in [a,b]), \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned} l_1(y) &\equiv b_{11}y(a) + b_{12}y'(a) = 0, \\ l_2(y) &\equiv b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0, \end{aligned} \tag{6.31}$$

де

$$L_1 y \equiv (p(t)y')' - q(t)y,$$

$p(t), p'(t), q(t), \rho(t)$ — дійсні, неперервні на $[a, b]$ функції, $p(t) > 0$, $\rho(t) \ge 0$ $(t \in [a, b])$, $|b_{i1}| + |b_{i2}| > 0$ $(b_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = 1, 2)$.

Власні функції задачі Штурма—Ліувілля мають властивості, завдяки яким вони широко використовуються для розв'язання задач математичної фізики [3, 11, 24, 15] та інших математичних проблем. Задачу (6.30), (6.31) при $b_{12} = b_{22} = 0$ називають ***першою крайовою задачею,*** при $b_{11} = b_{21} = 0$ — ***другою крайовою задачею,*** при $b_{ij} \ne 0\ \forall\ i, j = 1, 2$ — ***третьою крайовою задачею,*** в інших випадках – ***мішаною задачею*** Штурма—Ліувілля.

Крім крайових умов (6.31), у задачі Штурма—Ліувілля використовуються також періодичні крайові умови

$$y(a) - y(b) = 0,\ \ y'(a) - y'(b) = 0\ \ (p(a) = p(b)) \tag{6.32}$$

та інші крайові умови. Функцію $\rho(t)$ у рівнянні (6.30) називають *ваговою функцією задачі Штурма—Ліувілля.* Якщо умова неперервності на $[a, b]$ функцій $p(t)$, $q(t)$, $\rho(t)$ не виконується або $p(t)$ перетворюється в нуль у точках відрізка $[a, b]$ (найчастіше це буває в межових точках $t = a$, $t = b$), то задача (6.30), (6.31) є сингулярною. Як зазначалося вище, в таких задачах, як правило, шукають обмежені на $[a, b]$ власні функції.

Зауважимо, що будь-яке лінійне рівняння $p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y + \lambda\theta y = 0$ $[p_0 = p_0(t),\ p_1 = p_1(t),\ p_2 = p_2(t),\ \theta = \theta(t)$ — неперервні функції, $p_0 > 0$, $\theta \ge 0$ $(t \in [a, b])]$ можна записати у вигляді (6.30) за допомогою множення на функцію $\mu = \mu(t) = \dfrac{1}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt}$. Справді, помноживши рівняння на $\mu(t)$, дістанемо

$$e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt} y'' + \frac{p_1}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt} y' + \frac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt} y + \lambda \frac{\theta}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt} y = 0,$$

або

$$(p(t)y')' - q(t)y + \lambda\rho(t)y = 0,$$

де $p(t) = e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt}$, $q(t) = -\dfrac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt}$, $\rho(t) = \dfrac{\theta}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dt}$.





Запис лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку у вигляді (6.30) називають ***самоспряженою формою*** цього рівняння.

Розглянемо, наприклад, сингулярну задачу

$$t^2 y'' + ty' + (\lambda t^2 - \nu^2)y = 0,\ \ y \in C_{[0,\,b]},\ \ y(b) = 0\ \ (\nu \in \mathbb{R}).$$

Тут $p_0(t) = t^2$, $p_1(t) = t$, $\mu(t) = \dfrac{1}{t}$. Помноживши рівняння на $\mu(t)$, дістанемо $(ty')' - \dfrac{\nu^2}{t} y + \lambda t y = 0$. Отже, ваговою функцією цієї задачі є $\rho(t) = t$. Зазначимо, що заміною незалежної змінної $x = \sqrt{\lambda} t$ (при $\lambda \ge 0$) дане рівняння зводиться до рівняння Бесселя $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (див. п. 7.4).

Наведемо схему розв'язування регулярної задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31). Нехай $y = c_1 y_1(t, \lambda) + c_2 y_2(t, \lambda)$ — загальний розв'язок рівняння (6.30). Підставивши його в крайові умови (6.31), дістанемо лінійну однорідну алгебричну систему відносно $c_1$, $c_2$:

$$c_1 l_1(y_1(t, \lambda)) + c_2 l_1(y_2(t, \lambda)) = 0,$$
$$c_1 l_2(y_1(t, \lambda)) + c_2 l_2(y_2(t, \lambda)) = 0.$$

Ця система має нетривіальні розв'язки тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} l_1(y_1(t, \lambda)) & l_1(y_2(t, \lambda)) \\ l_2(y_1(t, \lambda)) & l_2(y_2(t, \lambda)) \end{vmatrix} = 0. \tag{6.33}$$

Рівняння (6.33) називають *характеристичним рівнянням задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31).*

Якщо $\lambda = \lambda_k$ — корені характеристичного рівняння (6.33), то їм відповідають нетривіальні розв'язки $c_1 = c_1(\lambda_k)$, $c_2 = c_2(\lambda_k)$ і, згідно з означенням власних функцій, функції $y_k = y_k(t) = c_1(\lambda_k)y_1(t, \lambda_k) + c_2(\lambda_k)y_2(t, \lambda_k) \not\equiv 0$ є власними функціями, а $\lambda_k$ — власними числами задачі (6.30), (6.31). Очевидно, власні функції визначені з точністю до сталого множника.

**❑ Приклад 6.4**

$$y'' + \lambda y = 0, \ y(0) = y(\pi) = 0 \quad (t \in [0, \pi]).$$

Якщо $\lambda = 0$, то $y = c_1 t + c_2$ і крайові умови задовольняє лише функція $y \equiv 0$, тобто $\lambda = 0 \notin \Lambda$.

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді $y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$. Підставивши в крайові умови, дістанемо систему

$$c_1 + c_2 = 0, \ c_1 e^{\pi\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} = 0,$$

звідки

$$c_2 = -c_1 \neq 0, \ e^{\pi\sqrt{-\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} = 0, \ e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} = 1,$$

$$2\pi\sqrt{-\lambda} = 2k\pi i \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \lambda = \lambda_k = k^2 \ (k \in \mathbb{N}).$$

Власні функції задачі мають вигляд $c_1(e^{ikt} - e^{-ikt}) = 2ic_1 \sin kt$. Отже, $\Lambda = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ — спектр, а $y_k = \sin kt$ — власні функції даної задачі.

**❑ Приклад 6.5**

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \ y(0) = y(2\pi), \ y'(0) = y'(2\pi)$$

(задача Штурма—Ліувілля з періодичними крайовими умовами).

Якщо $\lambda = 0$, то $y = c_1 t + c_2$. Підставлення в крайові умови дає $c_1 = 0$, $c_2 = c$ — довільний параметр. Отже, $\lambda = 0 \in \Lambda$. Відповідна власна функція $y_0 \equiv 1$.

Нехай $\lambda < 0$. Підставлення загального розв'язку $y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$ у крайові умови дає систему для визначення коефіцієнтів $c_1$, $c_2$:

$$c_1(1 - e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}) + c_2(1 - e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}) = 0, \ c_1(1 - e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}) - c_2(1 - e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}) = 0.$$

Оскільки головний визначник цієї системи

$$\Delta(\lambda) = (1 - e^{2\pi\sqrt{-\lambda}})(-1 + e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}} - 1 + e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}) =$$

$$= -2(1 - e^{2\pi\sqrt{-\lambda}})(1 - e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}) \neq 0,$$

то $c_1 = c_2 = 0$ і $\lambda \notin \Lambda$ при $\lambda < 0$.





Нехай $\lambda > 0$. Підставивши загальний розв'язок $y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}t + c_2 \cos\sqrt{\lambda}t$ у крайові умови, дістанемо систему

$$c_1 \sin 2\pi\sqrt{\lambda} - c_2(1 - \cos 2\pi\sqrt{\lambda}) = 0, \ c_1(1 - \cos 2\pi\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin 2\pi\sqrt{\lambda} = 0$$

і характеристичне рівняння

$$\Delta(\lambda) \equiv \sin^2 2\pi\sqrt{\lambda} + (1 - \cos 2\pi\sqrt{\lambda})^2 = 0, \ \cos 2\pi\sqrt{\lambda} = 1.$$

Звідси $2\pi\sqrt{\lambda} = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ і $\Lambda = \{k^2 \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$. Кожному власному числу $\lambda_k = k^2 \neq 0$ відповідають дві лінійно незалежні власні функції $y_{1k} = y_{1k}(t) = \sin kt$, $y_{2k} = y_{2k}(t) = \cos kt$.

**❑ Приклад 6.6**

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \ (\lambda \in \mathbb{R}), \ y'(0) = 0, \ \beta\lambda^2 y(1) - y'(1) = 0 \ \ (\beta = \text{const} \in \mathbb{R}).$$

Зазначимо, що при $\beta \neq 0$ крайові умови задачі залежать від параметра $\lambda$. Пропонуємо самостійно перевірити, що при $\beta = 0$ задача має власні функції $y_k = y_k(t) = \cos k\pi t$ і відповідні їм власні числа $\lambda_k = k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Нехай $\beta \neq 0$.

При $\lambda = 0$ маємо $y = c_1 t + c_2$. Підставивши у крайові умови, дістанемо $c_1 = 0$, тобто $y_0 \equiv 1$ є власною функцією, яка відповідає власному числу $\lambda = 0$.

При $\lambda \neq 0$ маємо загальний розв'язок $y = c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t$. Підставляємо у крайові умови: $c_1\lambda = 0$ і, отже, $y = c_2 \cos \lambda t$ $(c_2 \neq 0)$, $\beta\lambda^2 c_2 \cos\lambda + c_2 \lambda \sin \lambda = 0$. Звідси дістанемо характеристичне рівняння $\operatorname{tg}\lambda = -\beta\lambda$. Графічно можна показати, що це рівняння має рівні за модулем і протилежні за знаком корені $\lambda_k$.

Отже, власними функціями даної задачі (при $\beta \neq 0$) є функції $y_k = y_k(t) = \cos \lambda_k t$, де $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ — зростаюча послідовність власних чисел, які є абсцисами точок перетину графіків функцій $y = \operatorname{tg}\lambda$ і $y = -\beta\lambda$.

Перейдемо до розгляду основних властивостей власних чисел і власних функцій регулярної задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31). Доведемо спочатку деякі допоміжні твердження. Нехай $u = u(t)$, $v = v(t)$ — двічі неперервно диференційовні на $[a, b]$ функції, $W(t)$ — вронскіан системи цих функцій. Тоді справджуються *тотожність Лагранжа*

$$uL_1 v - vL_1 u = (pW)' \tag{6.34}$$

і *формула Гріна*

$$\int_a^b [uL_1 v - vL_1 u]\,dt = p(b)W(b) - p(a)W(a). \qquad (6.35)$$

Якщо функції $u$ і $v$ задовольняють крайові умови (6.31), то*

$$\int_a^b uL_1 v\,dt = \int_a^b vL_1 u\,dt. \qquad (6.36)$$

Тотожність Лагранжа випливає з означення оператора $L_1$:

$$uL_1 v - vL_1 u = u((pv')' - qv) - v((pu')' - qu) =$$

$$= u(p'v' + pv'') - v(p'u' + pu'') = p'(uv' - vu') + p(uv'' - vu'') = (pW)'.$$

Зінтегрувавши (6.34) по $t$ від $a$ до $b$, дістанемо формулу Гріна (6.35).

Нехай тепер функції $u$ і $v$ задовольняють крайові умови (6.31). Тоді, наприклад, у точці $t = a$ маємо: $b_{11}u(a) + b_{12}u'(a)$, $b_{11}v(a) + b_{12}v'(a) = 0$ ($|b_{11}| + |b_{12}| > 0$). Оскільки остання система має нетривіальний розв'язок $b_{11}$, $b_{12}$, то визначник системи $\Delta = W(a) = 0$. Аналогічно $W(b) = 0$. Із формули Гріна (6.35) випливає тепер рівність (6.36). Отже, задача (6.30), (6.31) є самоспряженою. Неважко перевірити, що й задача Штурма—Ліувілля з періодичними крайовими умовами (6.30), (6.32) також самоспряжена. Справді, в цьому випадку $W(a) = W(b)$ і з формули Гріна маємо

$$\int_a^b uL_1 v\,dt - \int_a^b vL_1 u\,dt = p(b)W(b) - p(a)W(a) = 0.$$

## Основні властивості власних чисел і власних функцій

1. ***Власні числа задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31), [(6.30), (6.32)] існують**, дійсні й утворюють нескінченну послідовність*** $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ ($\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$).

* Якщо для будь-яких двічі неперервно диференційовних на $[a, b]$ функцій $u$ і $v$, які задовольняють крайові умови (6.31), виконується рівність (6.36), то задачу Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31) називають *самоспряженою*. Як легко перевірити, задача Штурма—Ліувілля з прикладу 6.6 не є самоспряженою при $\beta \neq 0$.

** Доведення цього факту ґрунтується на теорії лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма із симетричним ядром [8, 22, 28] (див. також п. 11.7).





Таким чином, на будь-якому скінченному проміжку осі параметра $\lambda$ є лише скінченне число власних значень задачі Штурма—Ліувілля.

2. *Власні значення задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31) прості [кожному власному значенню відповідає (з точністю до сталого множника) тільки одна власна функція].*

Припустимо від супротивного, що власному числу $\lambda$ відповідають дві лінійно незалежні власні функції $u = u(t)$ і $v = v(t)$. Тоді ці функції є розв'язками одного рівняння (6.30) і, крім того [див. доведення рівності (6.36)], $W(a) = 0$. Тому функції $u$ і $v$ лінійно залежні: $u = cv$, що неможливо.

Зауважимо, що у випадку крайових умов, відмінних від (6.31), власні значення можуть бути непростими. Так, наприклад, власні значення $\lambda_k = k^2$ ($k = 1, 2, \ldots$) задачі Штурма—Ліувілля з періодичними крайовими умовами (див. приклад 6.5) є непростими. Кожному з них відповідають дві лінійно незалежні власні функції $y_{1k} = \sin kt$, $y_{2k} = \cos kt$ ($k \in \mathbb{N}$).

3. ***Власні функції задачі Штурма—Ліувілля (6.30, (6.31) [(6.30), (6.32)], які відповідають різним власним числам, ортогональні на відрізку*** $[a, b]$ ***з ваговою функцією*** $\rho(t)$:

$$\int_a^b y_k(t)y_m(t)\rho(t)\,dt = 0 \quad (k \neq m). \qquad (6.37)$$

Нехай $y_k(t)$, $y_m(t)$ — власні функції, які відповідають власним числам $\lambda_k$ і $\lambda_m$ відповідно ($\lambda_k \neq \lambda_m$, $k \neq m$). Тоді з формули (6.36) маємо:

$$0 = \int_a^b (y_k L_1 y_m - y_m L_1 y_k)\,dt = \int_a^b [y_k(-\lambda_m)\rho(t)y_m - y_m(-\lambda_k)\rho(t)y_k]\,dt =$$

$$= (\lambda_k - \lambda_m)\int_a^b y_k(t)y_m(t)\rho(t)\,dt,$$

звідки випливає (6.37).

Зазначимо, що у випадку крайових умов, відмінних від (6.31), (6.32), властивість ортогональності власних функцій може не виконуватися. Так, у прикладі 6.6 ($L_1 y \equiv y''$, $p(t) = \rho(t) \equiv 1$) для власних функцій

$$y_k(t) = \cos \lambda_k t, \quad y_m(t) = \cos \lambda_m t \quad (\lambda_k \neq \lambda_m),$$

використовуючи формулу Гріна (6.35), маємо

$$\int_0^1 (y_k y_m'' - y_m y_k'')\,dt = (\lambda_k^2 - \lambda_m^2)\int_0^1 y_k(t) y_m(t)\,dt = W(1) - W(0).$$

Ураховуючи крайові умови задачі, дістанемо

$$W(0) = 0,\ W(1) = -\beta(\lambda_k^2 - \lambda_m^2)\cos\lambda_k \cos\lambda_m.$$

Тому $\int_0^1 y_k(t) y_m(t)\,dt = -\beta\cos\lambda_k\cos\lambda_m \neq 0$ при $\beta \neq 0$. Цей факт є наслідком того, що задача Штурма—Ліувілля з прикладу 6.6 не самоспряжена.

4. *Власні функції задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31) дійсні.*

Припустимо від супротивного, що (дійсному) власному числу $\lambda$ відповідає комплексна власна функція $y = u + iv$ ($v \neq 0$). Із рівняння (6.30) дістаємо

$$L_1(u + iv) + \lambda\rho(t)(u + iv) = 0,\ L_1 u + \lambda\rho(t)u + i(L_1 v + \lambda\rho(t)v) = 0,$$

звідки

$$L_1 u + \lambda\rho(t)u = 0,\ L_1 v + \lambda\rho(t)v = 0$$

і, отже, функції $u = u(t)$, $v = v(t)$ є власними функціями, які відповідають власному числу $\lambda$. За властивістю 2 маємо $v = cu$ ($c = \text{const}$). Тоді $y = u + iv = (1 + ic)u$ і, отже, власному числу $\lambda$ відповідає дійсна власна функція $u$, що неможливо.

5. *Якщо в рівнянні (6.30) $q(t) \geq 0$ ($t \in [a, b]$), то власні числа першої, другої задачі Штурма—Ліувілля, задачі Штурма—Ліувілля з періодичними крайовими умовами (6.32), а також із мішаними крайовими умовами $y(a) = y'(b) = 0$, $y'(a) = y(b) = 0$ невід'ємні.*

У цьому твердженні легко переконатись, якщо рівність

$$\frac{d}{dt}(p(t)y_n'(t)) - q(t)y_n(t) + \lambda_n\rho(t)y_n(t) = 0$$

помножити на $y_n(t)$ і зінтегрувати по відрізку $[a, b]$:

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(p(t)y_n'(t))y_n(t)\,dt - \int_a^b q(t)y_n^2\,dt + \lambda_n\int_a^b \rho(t)y_n^2(t)\,dt = 0.$$





Виконавши в першому інтегралі інтегрування частинами, дістанемо

$$(p(t)y_n'(t)y_n(t))\Big|_a^b - \int_a^b p(t)y_n'^2(t)\,dt - \int_a^b q(t)y_n^2(t)\,dt +$$
$$+\lambda_n\int_a^b \rho(t)y_n^2(t)\,dt = 0,$$

звідки з урахуванням крайових умов випливає рівність

$$\lambda_n\int_a^b \rho(t)y_n^2(t)\,dt = \int_a^b p(t)(y_n'^2(t)^2)\,dt + \int_a^b q(t)y_n^2(t)\,dt,$$

яка й доводить твердження.

6. *Власні функції задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31) [(6.30), (6.32)], які відповідають різним власним числам, лінійно незалежні на відрізку $[a, b]$.*

Цю властивість пропонуємо довести самостійно.

Із властивості 3 випливає, що система власних функцій задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31) [(6.30), (6.32)] ортогональна [з ваговою функцією $\rho(t)$] на відрізку $[a, b]$. Тому можна ставити задачу про розвинення довільних функцій $f(t)$ ($t \in [a, b]$) у ряд Фур'є за власними функціями $y_n(t)$ задачі Штурма—Ліувілля:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(t), \tag{6.38}$$

$$c_n = \frac{(f(t),\ y_n(t))}{\|\ y_n(t)\ \|^2}, \tag{6.39}$$

де $(f(t),\ y_n(t)) = \int_a^b f(t)y_n(t)\rho(t)\,dt$, $\quad \|\ y_n(t)\ \|^2 = \int_a^b y_n^2(t)\rho(t)\,dt$.

Відповідь на питання про характер збіжності ряду Фур'є (6.38) залежить від властивостей функції $f(t)$. Якщо $f(t)$ двічі неперервно диференційовна на $[a, b]$ і задовольняє крайові умови (6.31) [(6.32)], то ряд Фур'є (6.38) збігається до $f(t)$ на $[a, b]$ абсолютно й рівномірно *(теорема Стеклова).* Якщо функція $f(t)$ кусково-неперервна на $[a, b]$ або інтегровна з квадратом із ваговою функцією $\rho(t)$ на $[a, b]$, то ряд Фур'є (6.38) *збігається до* $f(t)$ *у середньоквадратичному,* тобто

$$\lim_{n\to+\infty}\left\| f(t)-\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(t)\right\|^2=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\left| f(t)-\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(t)\right|^2\rho(t)\,dt=0$$

*(теорема про повноту системи власних функцій регулярної задачі Штурма—Ліувілля).* Збіжності в середньоквадратичному, як правило, достатньо для задач математичної фізики, оскільки дві функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$, для яких $\int_a^b |f_1(t)-f_2(t)|^2\rho(t)\,dt=0$ (*дорівнюють* одна одній *у середньоквадратичному*) можуть відрізнятись одна від одної на множині, настільки малій, що це не впливає на значення інтегралів від $f_1(t)$ і $f_2(t)$.

У випадку задачі Штурма—Ліувілля з періодичними крайовими умовами (6.32) лінійно незалежні власні функції, які відповідають одному власному числу, слід вибрати так, щоб вони були ортогональні.

Так, розвинення кусково-неперервної на $[0, 2\pi]$ функції $f(t)$ у ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма—Ліувілля з періодичними крайовими умовами (див. приклад 6.5) має вигляд ($\|1\|^2=2\pi$, $\|\cos kt\|^2=\|\sin kt\|^2=\pi$)

$$f(t)=\frac{a_0}{2}1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

де $a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt$ $(k=0,1,2,\ldots)$, $b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt$ $(k=1,2,\ldots)$.

Розглянемо приклади важливих сингулярних задач Штурма—Ліувілля, власні функції яких широко застосовують у математичній фізиці [3, 11].

❑ **Приклад 6.7**

$$(1-t^2)y''-2ty'+\lambda y=0,\ \ y\in C_{[-1,1]},\ \ y(1)=1.$$

Власними функціями цієї задачі є так звані *многочлени* ($n$-го степеня) *Лежандра,* які позначають символом $P_n(t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$, а власними числами — числа $\lambda_n=n(n+1)$. Многочлени Лежандра ортогональні на відрізку $[-1, 1]$ із ваговою функцією $\rho(t)=1$.





Наведемо многочлени Лежандра та їхні норми в явному вигляді:

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n],\quad \|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}.$$

На практиці для відшукання $P_n(t)$ найчастіше використовують рекурентне співвідношення

$$(n+1)P_{n+1}(t)-(2n+1)tP_n(t)+nP_{n-1}(t)=0$$

та вирази $P_0(t)=1,\ P_1(t)=t,\ P_2(t)=\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{1}{2}.$

❑ **Приклад 6.8**

$$(1-t^2)y''-2ty'+\left(\lambda-\frac{k^2}{1-t^2}\right)y=0,\ \ y\in C_{[-1,1]},\ \ k=0,1,2,\ldots$$

Власні функції цієї задачі називають ***приєднаними функціями Лежандра (першого роду).*** Якщо в диференціальному рівнянні задачі зробити заміну $y=(1-t^2)^{k/2}z$, то (пропонуємо перевірити це самостійно) для функції $z=z(t)$ дістанемо рівняння

$$(1-t^2)z''-2t(k+1)z'+[\lambda-k(k+1)]z=0$$

або в самоспряженій формі

$$[(1-t^2)^{k+1}z']'+[\lambda-k(k+1)](1-t^2)^k z=0.$$

Таке саме рівняння можна дістати з рівняння прикладу 6.7, якщо здиференціювати його $k$ разів. Тому неперервним на $[-1, 1]$ розв'язком $z(t)$ при $\lambda=n(n+1)$ є функція $z_n^k=\dfrac{d^k}{dt^k}P_n(t)$. Отже, приєднані функції Лежандра першого роду мають вигляд

$$P_n^k(t)=(1-t^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k}{dt^k}P_n(t)\ \ (0\le k\le n).$$

Очевидно,

$$P_n^0(t)=P_n(t),\ \ P_1^1(t)=\sqrt{1-t^2},\ \ P_2^0(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2},$$
$$P_2^1(t)=3t\sqrt{1-t^2},\ \ P_2^2(t)=3(1-t^2).$$

Приєднані функції Лежандра ортогональні на відрізку $[-1, 1]$ із ваговою функцією $\rho(t) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(t) P_m^k(t)\,dt = 0 \quad (m \neq n), \quad \| P_n^k \|^2 = \frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2}{2n+1}.$$

**❑ Приклад 6.9**

$$(1-t^2)y'' - ty' + \lambda y = 0, \quad y \in C^1_{[-1,\,1]}.$$

Рівняння в самоспряженій формі має вигляд

$$(\sqrt{1-t^2}\,y')' + \lambda \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} y = 0.$$

Заміною незалежної змінної $t = \cos x$ (див. п. 5.3) рівняння можна звести до вигляду $z'' + \lambda z = 0$, де $y(t) = z(x)$. Звідси

$$z = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x = y(t) =$$
$$= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\arccos t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\arccos t).$$

Умова неперервної диференційовності на відрізку $[-1, 1]$ виконується лише при $\lambda = n^2$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $c_2 = 0$. Тому

$$y_n(t) = T_n(t) = \cos(n \arccos t) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— власні функції задачі. Очевидно, $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, $T_2(t) = 2t^2 - 1$. Із тотожності

$$\cos nx + \cos(n-2)x = 2\cos x \cos(n-1)x$$

можна дістати рекурентне співвідношення

$$T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \quad (n \geq 2),$$

з якого випливає, що функції $T_n(t)$ є многочленами $n$-го степеня. Їх називають ***многочленами Чебишова.***

**❑ Приклад 6.10**

$$t^2 y'' + ty' + (\lambda t^2 - \nu^2)y = 0, \quad y \in C_{[0,\,b]}, \quad y(b) = 0 \quad (\nu \geq 0).$$





Як показано раніше, рівняння в самоспряженій формі має вигляд

$$(ty')' - \frac{\nu^2}{t} y + \lambda t y = 0.$$

При $\lambda = 0$ дістаємо рівняння Ейлера (див. п. 5.3) $t^2 y'' + ty' - \nu^2 y = 0$, загальним розв'язком якого є функція $y = c_1 t^{\nu} + c_2 t^{-\nu}$ при $\nu \neq 0$ і $y = c_1 + c_2 \ln t$ при $\nu = 0$. Ці функції задовольняють умови $y \in C_{[0,\,b]}$, $y(b) = 0$ лише при $c_1 = c_2 = 0$. Тому $\lambda = 0$ не є власним числом. При $\lambda > 0$ заміна $x = \sqrt{\lambda}t$ $(y(t) = z(x))$ зводить дане рівняння до рівняння Бесселя $x^2 z'' + xz' + (x^2 - \nu^2)z = 0$. Умову $z(x) \in C_{[0,\,\sqrt{\lambda}b]}$ задовольняє функція Бесселя* першого роду порядку (індексу) $\nu$: $z(x) = J_\nu(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda}t)$. Аби ця функція задовольняла ще й умову $y(b) = z(\sqrt{\lambda}b) = 0$, необхідно й достатньо, щоб $\lambda = (\mu/b)^2$, де $\mu$ — додатний корінь рівняння $J_\nu(x) = 0$. У теорії бесселевих функцій [9, 24] доводиться, що це рівняння має нескінченну послідовність $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \ldots < \mu_i^{(\nu)} < \ldots$ додатних коренів. Отже, власні числа й власні функції даної задачі мають вигляд

$$\lambda_i^{(\nu)} = (\mu_i^{(\nu)}/b)^2, \quad y_i(t) = J_\nu(b^{-1}\mu_i^{(\nu)}t) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Власні функції ортогональні на відрізку $[a, b]$ із ваговою функцією $\rho(t) = t$:

$$\int_0^b t J_\nu(b^{-1}\mu_i^{(\nu)}t) J_\nu(b^{-1}\mu_j^{(\nu)}t)\,dt =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \| J_\nu(b^{-1}\mu_i^{(\nu)}t) \|^2 = \dfrac{b^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i^{(\nu)}) & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Насамкінець зазначимо, що ортогональність і повнота системи власних функцій є одними з найважливіших властивостей спектральних задач (і, зокрема, задачі Штурма—Ліувілля), які широко застосовуються при дослідженні фізичних явищ.

---

* Рівняння і функції Бесселя розглянуто в п. 7.4.

Глава 7

# ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

## 7.1 Канонічні форми лінійних рівнянь другого порядку

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку відіграють важливу роль у задачах механіки, фізики, біології та інших наук. Загальні властивості розв'язків лінійних рівнянь висвітлено в п. 4.1. Тут розглянемо специфічні властивості, методи розв'язування й важливі типи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t), \tag{7.1}$$

де $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ — функції, неперервні на деякому інтервалі $I = (\alpha_0, \beta_0)$ ($\alpha_0 \ge -\infty$, $\beta_0 \le +\infty$; замість інтервалу $I$ може розглядатися півінтервал або відрізок).

Якщо $a(t) \ne 0$ ($\forall\, t \in I$), то рівняння (7.1) можна записати так:

$$y'' + h_1(t)y' + h_2(t)y = g(t), \tag{7.2}$$

де $h_1(t) = b(t)/a(t)$, $h_2(t) = c(t)/a(t)$, $g(t) = f(t)/a(t)$.

Якщо рівняння (7.1) помножити на функцію $\mu(t) = \dfrac{1}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ (див. п. 6.4), то його можна подати в *самоспряженій формі*





$$(p(t)y')' + q(t)y = r(t), \tag{7.3}$$

де $p(t) = e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$, $q(t) = c(t)\mu(t)$, $r(t) = f(t)\mu(t)$.

Лінійне однорідне ($r(t) \equiv 0$) рівняння в самоспряженій формі має вигляд

$$(p(t)y')' + q(t)y = 0. \tag{7.4}$$

Часто рівняння (7.2) зручно записувати у вигляді такого, що не містить першої похідної шуканої функції. Якщо в (7.2) функція $h_1(t)$ неперервно диференційовна, то цього можна досягти за допомогою заміни шуканої функції $y = \alpha(t)u$. Справді, підставивши $y' = \alpha' u + \alpha u'$, $y'' = \alpha'' u + 2\alpha' u' + \alpha u''$ у (7.2), дістанемо $\alpha u'' + (2\alpha' + h_1\alpha)u' + (\alpha'' + h_1\alpha' + h_2\alpha)u = g(t)$. Якщо функцію $\alpha = \alpha(t)$ вибрати з умови $2\alpha' + h_1\alpha = 0$, наприклад у вигляді $\alpha(t) = e^{-\frac{1}{2}\int h_1(t)\,dt}$, то відносно функції $u = u(t)$ дістанемо рівняння

$$u'' + Q(t)u = g_1(t), \tag{7.5}$$

де $Q(t) = h_2(t) - \dfrac{1}{4}h_1^2(t) - \dfrac{1}{2}h_1'(t)$ — *інваріант лінійного рівняння (7.2)*, $g_1(t) = f(t)e^{\frac{1}{2}\int h_1(t)\,dt}$.

✍ Пропонуємо самостійно довести, що за допомогою заміни незалежної змінної за формулою $\tau = \int e^{-\int h_1(t)dt} dt$ рівняння (7.2) можна звести до вигляду $\dfrac{d^2z}{d\tau^2} + Q_1(\tau)z = G(\tau)$, де $z(\tau) = y(t(\tau))$.

❑ **Приклад 7.1**

*За допомогою заміни незалежної змінної рівняння $y'' - y' + e^{2t}y = 0$ зведемо до такого, яке не містить першої похідної шуканої функції.*

Маємо:

$$h_1(t) = -1,\ \tau = \int e^{-\int(-1)dt} dt = e^t,\ t = \ln\tau,\ y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dz}{d\tau}\tau,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dz}{d\tau}\tau\right)\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{d^2z}{d\tau^2}\tau + \frac{dz}{d\tau}\right)\tau.$$

Підставивши в рівняння, дістанемо

$$\frac{d^2z}{d\tau^2}\tau^2+\frac{dz}{d\tau}\tau-\frac{dz}{d\tau}\tau+\tau^2z=0 \text{ або } \frac{d^2z}{d\tau^2}+z=0.$$

З останнього рівняння знаходимо

$$z(\tau)=c_1\sin\tau+c_2\cos\tau=y(t)=c_1\sin e^t+c_2\cos e^t.$$

❑ **Приклад 7.2**

*Рівняння* $y''-y'+e^{2t}y=0$ *зведемо до вигляду (7.5) за допомогою заміни шуканої функції* $y=e^{-\frac{1}{2}\int h_1(t)dt}u=e^{\frac{1}{2}t}u$.

Знайшовши інваріант рівняння $Q(t)=e^{2t}-\frac{1}{4}$, дістанемо

$$u''+\left(e^{2t}-\frac{1}{4}\right)u=0.$$

## 7.2 Коливність розв'язків лінійних рівнянь другого порядку

Нетривіальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y''+Q(t)y=0 \quad (Q(t)\in C_I) \tag{7.6}$$

називають *неколивним* на деякому проміжку, якщо він перетворюється в нуль не більше ніж в одній точці цього проміжку; якщо ж він перетворюється в нуль не менше ніж у двох точках проміжку, то такий розв'язок називають *коливним*. Так, наприклад, будь-який нетривіальний розв'язок рівняння $y''-\omega^2y=0$ $(\omega>0)$: $y=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}$ є неколивним на будь-якому проміжку, а будь-який нетривіальний розв'язок рівняння $y''+\omega^2y=0$ $(\omega>0)$: $y=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t$ є коливним на будь-якому проміжку, довжина якого не менша за $2\pi/\omega$.





Розглянемо ознаки коливності й неколивності розв'язків рівняння (7.6).

**Теорема 7.1**

**Будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (7.6) не може мати на відрізку $[a, b]$ більше ніж скінченне число нулів*.**

**Доведення**

Від супротивного припустимо, що розв'язок $y(t)\neq 0$ має на відрізку $[a, b]$ нескінченну множину нулів $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ За лемою Больцано—Вейєрштрасса з послідовності $\{t_n\}$ можна виділити збіжну підпослідовність $t_{n_k}\to t_0\in[a, b]$. За неперервністю маємо $y(t_0)=0$. За теоремою Ролля на інтервалі $(t_{n_k}, t_{n_{k+1}})$ існує точка $\xi_k$ така, що $y'(\xi_k)=0$. Оскільки $\xi_k\to t_0$, то $y'(t_0)=0$. Отже, $y(t_0)=y'(t_0)=0$ і за теоремою єдиності розв'язку задачі Коші $y(t)\equiv 0$, що неможливо.

**Теорема 7.2 (Штурма)**

**Якщо $t_1, t_2$ — два послідовних нулі розв'язку $y_1(t)$ рівняння (7.6), то будь-який інший розв'язок $y_2(t)$, лінійно незалежний з $y_1(t)$, має лише один нуль між $t_1$ і $t_2$.**

**Доведення**

Від супротивного припустимо, що в інтервалі $(t_1, t_2)$ розв'язок $y_2(t)$ не має нулів. Зрозуміло, що $y_2(t_1)\neq 0$, $y_2(t_2)\neq 0$, бо, наприклад, при $y_2(t_1)=0$ для вронскіана $W(t)=W[y_1, y_2]$ дістанемо $W(t_1)=0$, а це неможливо внаслідок лінійної незалежності розв'язків $y_1(t), y_2(t)$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $W(t)>0$. Із рівностей

$$\frac{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}{y_2^2(t)}=\frac{W(t)}{y_2^2(t)},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{y_1(t)}{y_2(t)}\right)=-\frac{W(t)}{y_2^2(t)}$$

матимемо $0=\left(\frac{y_1(t)}{y_2(t)}\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{W(t)}{y_2^2(t)}dt<0$, а це неможливо. Якщо припустити, що між $t_1$ і $t_2$ є два нулі $t_1<\overline{t_1}<\overline{t_2}<t_2$ розв'язку $y_2(t)$: $y_2(\overline{t_1})=y_2(\overline{t_2})=0$, то, аналогічно розмірковуючи, можна довести існування принаймні одного нуля розв'язку $y_1(t)$ між $\overline{t_1}$ і $\overline{t_2}$, а це суперечить умові теореми.

* Якщо функція перетворюється в нуль у точці $t_0$, то кажуть, що $t_0$ є ***нулем*** цієї функції.

**Наслідок 7.1**

*Якщо на проміжку $[a, b]$ один із нетривіальних розв'язків рівняння (7.6) має більше ніж два нулі, то всі розв'язки рівняння коливні на цьому проміжку.*

**Зауваження 7.1**

Теорему Штурма можна сформулювати ще й так: *нулі двох лінійно незалежних розв'язків рівняння (7.6) взаємно відділяють один одного.* (За ілюстрацію можуть правити лінійно незалежні розв'язки $\sin t$, $\cos t$ рівняння $y'' + y = 0$.)

Поряд із (7.6) розглянемо рівняння

$$x'' + P(t)x = 0 \quad (P(t) \in C_I, \ I = [a, b]). \qquad (7.7)$$

**Теорема 7.3 (порівняння)**

Якщо $P(t) \le Q(t) \ \forall \ t \in [a, b]$, то між кожними двома нулями будь-якого розв'язку $x(t)$ рівняння (7.7) є принаймні один нуль будь-якого розв'язку $y(t)$ рівняння (7.6).

**Доведення**

Від супротивного припустимо, що між послідовними нулями $t_1$ і $t_2$ деякого розв'язку $x(t)$ немає жодного нуля деякого розв'язку $y(t)$. Тоді можна вважати, що $x(t) > 0$, $y(t) > 0 \ \forall \ t \in (t_1, t_2)$. У цьому випадку $x(t)$ зростає в правому околі точки $t_1$ і спадає в лівому околі точки $t_2$. Тому $x'(t_1) > 0$, $x'(t_2) < 0$. Із тотожностей $y''(t) + Q(t)y(t) = 0$, $x''(t) + P(t)y(t) = 0$ маємо

$$x''(t)y(t) - y''(t)x(t) = (Q(t) - P(t))x(t)y(t),$$

$$\frac{d}{dt}(x'(t)y(t) - y'(t)x(t)) = (Q(t) - P(t))x(t)y(t),$$

$$|x'(t)y(t) - y'(t)x(t)|\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (Q(t) - P(t))x(t)y(t)\,dt.$$

Оскільки $x(t_1) = x(t_2) = 0$, то останню рівність можна переписати так:

$$x'(t_2)y(t_2) - x'(t_1)y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q(t) - P(t))x(t)y(t)\,dt. \qquad (7.8)$$

За умовою $Q(t) \ge P(t)$, а тому права частина рівності (7.8) невід'ємна. Ліва частина рівності від'ємна, оскільки $y(t_1) > 0$, $y(t_2) > 0$, $x'(t_2) < 0$, $x'(t_1) > 0$.

Ця суперечність доводить твердження теореми.

**Наслідок 7.2**

*Якщо $Q(t) \le 0 \ \forall \ t \in [a, b]$, то всі розв'язки рівняння (7.6) неколивні на проміжку $[a, b]$.*





Для доведення цього твердження застосуємо теорему порівняння, поклавши $P(t) \equiv 0$ у рівнянні (7.7). Припустимо, що деякий нетривіальний розв'язок $y(t)$ рівняння (7.6) має нулі $t_1 < t_2$. Тоді за теоремою 7.3 на інтервалі $(t_1, t_2)$ має принаймні один нуль будь-який нетривіальний розв'язок рівняння $x'' = 0$, що неможливо, наприклад, для розв'язку $x \equiv c = \mathrm{const} \ne 0$.

**Наслідок 7.3**

*Нехай $t_1$ — спільний нуль розв'язків $y(t)$, $x(t)$ рівнянь (7.6) і (7.7) відповідно й на проміжку між $t_1$ і наступним (за $t_1$) нулем $t_2$ розв'язку $x(t)$ є точки, в яких $P(t) < Q(t)$, а в інших точках $P(t) \le Q(t)$. Тоді найближчий до $t_1$ з правого боку нуль розв'язку $y(t)$ розташований не правіше від $t_2$.*

Справді, якщо припустити супротивне, то з (7.8) випливає рівність

$$x'(t_2)y(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (Q(t) - P(t))x(t)y(t)\,dt.$$

яка неможлива, оскільки її ліва частина від'ємна ($x'(t_2) < 0$, $y(t_2) > 0$), а права — додатна.

**Наслідок 7.4**

*Нехай $Q(t) \ge m = \mathrm{const} > 0 \ \forall \ t \in (a, b)$, $\delta(t_j, t_{j+1})$ — відстань між двома послідовними нулями будь-якого розв'язку рівняння (7.6). Тоді $\delta(t_j, t_{j+1}) \le \pi/\sqrt{m}$. Якщо $b - a > \pi/\sqrt{m}$, то будь-який розв'язок рівняння (7.6) має не менше ніж $\left[\frac{\sqrt{m}(b-a)}{\pi}\right]$ нулів на інтервалі $(a, b)$ (символом $[r]$ позначено цілу частину числа $r$).*

Для доведення цього твердження розглянемо рівняння $x'' + mx = 0$. Відстань між послідовними нулями будь-якого розв'язку цього рівняння $x(t) = c_1 \sin(\sqrt{m}t + c_2)$ дорівнює $\pi/\sqrt{m}$. Вибором параметра $c_2$ можна досягти того, що $t_j$ буде нулем деякого розв'язку $x(t)$. Тоді, згідно з наслідком 7.3, $\delta(t_j, t_{j+1}) \le \pi/\sqrt{m}$.

**Наслідок 7.5**

*Нехай $0 < Q(t) \le M = \mathrm{const} \ \forall \ t \in (a, b)$. Тоді $\delta(t_j, t_{j+1}) \ge \pi/\sqrt{M}$. Якщо $b - a > \pi/\sqrt{M}$, то будь-який розв'язок рівняння (7.6) має не більше ніж $\left[\frac{\sqrt{M}(b-a)}{\pi}\right]$ нулів на інтервалі $(a, b)$.*

(Твердження наслідку 7.5 пропонуємо довести самостійно.)

## 7.3

## Інтегрування лінійних рівнянь методом степеневих рядів

Як відомо, інтегрування диференціальних рівнянь досить рідко зводиться до квадратур. У цих випадках застосовують інші методи, найпоширенішим з яких є ***метод степеневих рядів***. Проілюструємо застосування цього методу на прикладі лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$y'' + h_1(t)y' + h_2(t)y = 0. \tag{7.9}$$

Метод степеневих рядів для рівняння (7.9) ґрунтується на такому твердженні [34].

**Теорема 7.4**

Нехай у рівнянні (7.9) функції $h_1(t)$, $h_2(t)$ аналітичні* в інтервалі $(t_0 - r,\ t_0 + r)$:

$$h_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t-t_0)^k,\quad h_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t-t_0)^k \quad (|t-t_0| < r). \tag{7.10}$$

Тоді будь-який розв'язок $y(t)$ цього рівняння є аналітичною функцією в інтервалі $(t_0 - r,\ t_0 + r)$:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-t_0)^k \quad (|t-t_0| < r). \tag{7.11}$$

Точку $t_0$ називають *точкою аналітичності рівняння (7.9)*. В околі точки аналітичності розв'язок рівняння (7.9) шукають у вигляді (7.11), де числа $a_0$, $a_1$, ... підлягають визначенню.

* Функцію $f(t)$ називають *аналітичною* в інтервалі $(t_0 - r,\ t_0 + r)$, якщо $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$, причому останній ряд збігається абсолютно й рівномірно при $|t - t_0| < r$.





❑ **Приклад 7.3**

*Розглянемо рівняння $y'' - y = 0$, загальний розв'язок якого $y = c_1e^t + c_2e^{-t}$ нам відомий, і застосуємо до нього метод степеневих рядів.*

Оскільки $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 1$ — аналітичні при $|t| < +\infty$ функції, то згідно з теоремою 7.4 розв'язок шукатимемо у вигляді (7.11) ($t_0 = 0$): $y = y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ $(|t| < +\infty)$. Маємо

$$y' = y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1},\quad y'' = y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2}.$$

Підставляючи в рівняння, дістанемо

$$(2a_2 + 2\cdot 3a_3t + \ldots + (n-1)na_nt^{n-2} + \ldots) -$$
$$-(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n + \ldots) \equiv 0,$$

або

$$a_0 - 2a_2 + (a_1 - 2\cdot 3a_3)t + (a_2 - 3\cdot 4a_4)t^2 + \ldots +$$
$$+(a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2})t^n + \ldots \equiv 0.$$

Звідси випливають такі рівності:

$$a_0 - 2a_2 = 0,\ a_1 - 2\cdot 3a_3 = 0,\ a_2 - 3\cdot 4a_4 = 0, \ldots,$$
$$a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} = 0, \ldots$$

Залишаючи довільними $a_0$ і $a_1$ (вони не визначаються з цієї системи рівнянь), дістанемо

$$a_3 = \frac{a_1}{3!},\quad a_5 = \frac{a_3}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{5!},\quad a_7 = \frac{a_5}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{7!}, \ldots,$$
$$a_2 = \frac{a_0}{2!},\quad a_4 = \frac{a_2}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{4!},\quad a_6 = \frac{a_4}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{6!}, \ldots$$

Отже, маємо розв'язок

$$y(t) = a_0\left(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\right) + a_1\left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots\right) =$$
$$= a_0 \operatorname{ch} t + a_1 \operatorname{sh} t = c_1e^t + c_2e^{-t},$$

де $a_0$, $a_1$ — довільні сталі.

**❑ Приклад 7.4**

*Методом степеневих рядів зінтегруємо рівняння $y'' + ty = 0$.*

Оскільки $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 1$ — аналітичні при $|t| < +\infty$ функції, то розв'язок $y(t)$ шукатимемо у вигляді $y = y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ $(|t| < +\infty)$. Двічі здиференціювавши цей ряд і підставивши в рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \equiv 0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при $t^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, матимемо

$$2 \cdot 1a_2 = 0,\ 3 \cdot 2a_3 + a_0 = 0,\ 4 \cdot 3a_4 + a_1 = 0, \ldots,\ n(n-1)a_n + a_{n-3} = 0, \ldots$$

Із цих рівнянь знаходимо

$$a_2 = 0,\ a_{n+3} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+3)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Покладемо $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Тоді ненульовими є лише коефіцієнти вигляду $a_{3m}$. Для них маємо рекурентне співвідношення

$$a_{3(m+1)} = -\frac{a_{3m}}{(3m+2)(3m+3)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

звідки

$$a_{3m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3m-1)3m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Отже, побудовано розв'язок рівняння $y_1(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{3m}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3m-1)3m}$, для якого $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Поклавши $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, дістанемо, що ненульовими є лише коефіцієнти вигляду $a_{3m+1}$. Для них маємо рекурентне співвідношення

$$a_{3m+4} = -\frac{a_{3m+1}}{(3m+3)(3m+4)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

звідки

$$a_{3m+1} = \frac{(-1)^m}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3m(3m+1)} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$





Тому $y_2(t) = t + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{3m+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3m(3m+1)}$ — розв'язок, для якого $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

Степеневі ряди, якими представлені розв'язки $y_1(t)$ і $y_2(t)$, збігаються абсолютно й рівномірно при $|t| < +\infty$. Отже, всі розв'язки даного рівняння є аналітичними функціями при $|t| < +\infty$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$.

**❑ Приклад 7.5**

*Методом степеневих рядів розв'яжемо задачу Коші $y'' + ty' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.*

Коефіцієнти $h_1(t) = t$ і $h_2(t) = 1$ є аналітичними функціями при $|t| < +\infty$. Розв'язок задачі Коші шукаємо у вигляді $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ $(a_0 = 1,\ a_1 = 0)$. Підставивши цей вираз у рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)t^{k-2} + t\sum_{k=1}^{\infty} a_k k t^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \equiv 0,$$

або

$$(2a_2 + 3 \cdot 2a_3 t + 4 \cdot 3a_4 t^2 + \ldots) + (a_1 t + 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + \ldots) +$$
$$+ (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) \equiv 0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при $t^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, дістанемо

$$2a_2 + a_0 = 0,\ 3 \cdot 2a_3 + 2a_1 = 0,\ 4 \cdot 3a_4 + 3a_2 = 0, \ldots,$$
$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, \ldots$$

Звідси, враховуючи, що $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, маємо

$$a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{1}{2 \cdot 4}, \ldots,$$
$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{(2m)!!},\ a_{2m+1} = 0 \ (m = 0, 1, \ldots).$$

Тому

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2/2)^m}{m!} = e^{-t^2/2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Точку $t_0$, для якої $\lim\limits_{t\to t_0} h_1(t) = \infty$ або $\lim\limits_{t\to t_0} h_2(t) = \infty$, називають *особливою точкою рівняння (7.9)*.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння (7.9), в якому $h_1(t) = \dfrac{p(t)}{t-t_0}$, $h_2(t) = \dfrac{q(t)}{(t-t_0)^2}$. Тоді це рівняння можна записати у вигляді

$$(t-t_0)^2 y'' + (t-t_0)p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (t \neq t_0). \tag{7.12}$$

Припустимо, що $p(t)$, $q(t)$ — аналітичні функції:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t-t_0)^k, \quad q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (t-t_0)^k \quad (|t-t_0| < r).$$

Якщо $t_0$ — особлива точка рівняння (7.9) (це буде, якщо $p_0 \neq 0$, або $q_0 \neq 0$, або $q_1 \neq 0$), то її називають *регулярною особливою точкою (особливою точкою першого роду) рівняння (7.9)*. В околі регулярної особливої точки $t_0$ розв'язки рівняння (7.9), взагалі кажучи, можуть не зображатися степеневими рядами вигляду (7.11). Так, усі рівняння Ейлера з прикладу 5.11 мають розв'язки, які не зображаються степеневими рядами вигляду (7.11) [для рівняння Ейлера $t^2y'' + a_1ty' + a_2y = 0$ точка $t_0 = 0$ є регулярною особливою точкою, якщо $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$].

Квадратне рівняння

$$\lambda(\lambda-1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \tag{7.13}$$

називають *визначальним рівнянням регулярної особливої точки* $t_0$.

В околі регулярної особливої точки розв'язки рівняння (7.9) шукають у вигляді *узагальненого степеневого ряду*

$$y(t) = (t-t_0)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k, \tag{7.14}$$

де $\lambda$ — корінь визначального рівняння (7.13), а числа $a_0 \neq 0$, $a_1$, $a_2$, ... підлягають визначенню.





**Теорема 7.5** [34]

Нехай $t_0$ — регулярна особлива точка рівняння (7.12), $\lambda_1$, $\lambda_2$ — корені визначального рівняння (7.13), функції $p(t)$, $q(t)$ аналітичні при $|t-t_0| < r$. Тоді, якщо $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, то рівняння (7.12) має два лінійно незалежних розв'язки вигляду

$$y_1(t) = (t-t_0)^{\lambda_1} Z_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} (t-t_0)^{k+\lambda_1},$$
$$y_2(t) = (t-t_0)^{\lambda_2} Z_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} (t-t_0)^{k+\lambda_2}, \tag{7.15}$$

де $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ — аналітичні функції при $|t-t_0| < r$.

◆ **Зауваження 7.2**

Якщо $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, то рівняння (7.12) може мати лише один (нетривіальний) розв'язок $y_1(t)$ вигляду (7.15). У цьому випадку розв'язок, лінійно незалежний із $y_1(t)$, можна шукати, використовуючи формулу Абеля (див. п. 4.1).

Як і у випадку точок аналітичності, метод узагальнених степеневих рядів проілюструємо на прикладах.

❑ **Приклад 7.6**

*Розв'яжемо задачу Коші*

$$ty'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Регулярною особливою точкою рівняння є $t_0 = 0$ ($p(t) = 0$, $q(t) = t$, $p_0 = q_0 = 0$). Визначальне рівняння має невід'ємні цілі корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Тому диференціальне рівняння має розв'язки у вигляді степеневого (не узагальненого) ряду. Розв'язок задачі Коші шукатимемо у вигляді

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \quad (a_1 = 1). \tag{7.16}$$

Підставивши (7.16) у дане рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \equiv 0.$$

Звідси $2\cdot 1a_2 + a_1 = 0,\ 3\cdot 2a_3 + a_2 = 0, \ldots,\ k(k-1)a_k + a_{k-1} = 0, \ldots$ Враховуючи, що $a_1 = 1$, знаходимо

$$a_2 = -\frac{1}{1\cdot 2},\ a_3 = -\frac{a_2}{2\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2!3!},$$
$$a_4 = -\frac{a_3}{3\cdot 4} = -\frac{1}{2!3!3\cdot 4} = -\frac{1}{3!4!}, \ldots,\ a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!}, \ldots$$

Отже,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!} t^k \quad (|t| < +\infty).$$

### ❑ Приклад 7.7

*Методом узагальнених степеневих рядів зінтегруємо рівняння Ейлера* ($t > 0$):

а) $t^2y'' + 6ty' + 4y = 0$; б) $t^2y'' + ty' + 4y = 0$; в) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0$.

Ураховуючи, що $t_0 = 0$ — регулярна особлива точка цих рівнянь, розв'язки шукатимемо у вигляді узагальненого степеневого ряду $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\lambda}$ ($a_0 \neq 0$). Підставлення ряду в рівняння Ейлера дає такі тотожності:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} ((k+\lambda)(k+\lambda-1) + 6(k+\lambda) + 4)a_k t^{k+\lambda} \equiv 0;$

б) $\sum_{k=0}^{\infty} ((k+\lambda)(k+\lambda-1) + (k+\lambda) + 4)a_k t^{k+\lambda} \equiv 0;$

в) $\sum_{k=0}^{\infty} ((k+\lambda)(k+\lambda-1) + 5(k+\lambda) + 4)a_k t^{k+\lambda} \equiv 0.$

Урахувавши, що $a_0 \neq 0$, і прирівнявши до нуля коефіцієнти при $t^\lambda$ ($k = 0$), дістанемо визначальні рівняння та їхні корені:

а) $f(\lambda) \equiv \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -4;$

б) $f(\lambda) \equiv \lambda^2 + 4 = 0,\ \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i;$

в) $f(\lambda) \equiv \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = -2.$





Прирівнявши до нуля коефіцієнти при $t^{k+\lambda}$ ($k = 1, 2, \ldots$), дістанемо рівності вигляду $f(\lambda + k)a_k = 0$.

У випадку а) при $\lambda = -1$ матимемо $f(-1 + k)a_k = 0$, звідки $a_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) і $y_1 = t^{-1}$ ($a_0 = 1$); при $\lambda = -4$ дістанемо $f(-4 + k)a_k = 0$, звідки $a_k = 0$ при $k \neq 3$, $a_3$ — довільне число. Поклавши $a_3 = 0$, $a_0 = 1$, матимемо $y_2 = t^{-4}$. Отже, загальний розв'язок рівняння записується у вигляді $y = c_1t^{-1} + c_2t^{-4}$.

У випадку б) при $\lambda = 2i$ дістаємо $f(2i + k)a_k = 0$, звідки $a_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) і $y_1 = t^{2i} = \cos(2\ln t) + i\sin(2\ln t)$. При $\lambda = -2i$ дістанемо комплексно-спряжений розв'язок $y_2 = t^{-2i} = \cos(2\ln t) - i\sin(2\ln t)$. Загальний розв'язок у дійсній формі записується у вигляді $y = c_1\cos(2\ln t) + c_2\sin(2\ln t)$.

У випадку в) при $\lambda = -2$ маємо $f(-2 + k)a_k = 0$, звідки $a_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) і $y = y_1 = t^{-2}$. Щоб знайти розв'язок $y_2$, лінійно незалежний із $y_1$, використаємо формулу Абеля:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int h_1(t)dt}}{y_1^2} dt = t^{-2} \int \frac{e^{-\int \frac{5dt}{t}}}{t^{-4}} dt = t^{-2} \ln t.$$

Отже, $y = c_1t^{-2} + c_2t^{-2}\ln t$.

### ❑ Приклад 7.8

Для рівняння $2t^2y'' + (3t - 2t^2)y' - (t+1)y = 0$ точка $t_0 = 0$ є регулярною особливою точкою. Враховуючи, що $p_0 = \frac{3}{2}$, $q_0 = -\frac{1}{2}$, запишемо визначальне рівняння $\lambda(\lambda - 1) + \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$, коренями якого є числа $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$.

Згідно з теоремою 7.5 дане рівняння має два лінійно незалежних розв'язки вигляду $y_1(t) = \sqrt{t}Z_1(t)$, $y_2 = t^{-1}Z_2(t)$, де $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ — аналітичні функції при $|t| < +\infty$.

✍ Пропонуємо самостійно довести, що

$$Z_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2t)^k}{5\cdot 7\cdot 9 \ldots (2k+3)},\quad Z_2(t) = e^t.$$

## 7.4

## Рівняння й функції Бесселя

*Рівнянням Бесселя* називають рівняння типу

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0, \tag{7.17}$$

де $\nu \geq 0$ — параметр. Нетривіальні розв'язки рівняння Бесселя називають ***функціями Бесселя****, або ***циліндричними***** ***функціями порядку (індексу)*** $\nu$. Функції Бесселя широко застосовуються під час розв'язування багатьох задач фізики й техніки.

Оскільки рівняння (7.17) не змінюється в разі заміни $t$ на $-t$, то далі розглядаємо випадок $t > 0$. Точка $t_0 = 0$ є регулярною особливою точкою цього рівняння ($p(t) = 1$, $q(t) = t^2 - \nu^2$). Визначальним є рівняння $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0$, або $\lambda^2 - \nu^2 = 0$. Якщо $\nu \neq 0$, то це рівняння має корені $\lambda_1 = \nu$, $\lambda_2 = -\nu$. Розв'язки рівняння Бесселя шукаємо у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\lambda} \quad (a_0 \neq 0). \tag{7.18}$$

Підставивши ряд (7.18) у рівняння Бесселя й скоротивши на $t^\lambda$, дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda + k)^2 - \nu^2]a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+2} = 0.$$

Звідси, прирівнюючи до нуля коефіцієнти при степенях $t$, маємо

$$(\lambda^2 - \nu^2)a_0 = 0, \quad [(\lambda+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0;$$

$$[(\lambda + k)^2 - \nu^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

* У теорії функцій Бесселя [9, 24, 32] розглядається також загальний випадок: $\nu \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$.

** Термін «циліндричні функції» пояснюється тим, що саме такі рівняння і функції виникають у фізичних і технічних задачах, де має місце осьова симетрія.





Нехай тепер $\lambda = \lambda_1 = \nu$. Тоді $a_0 \neq 0$ — будь-яке число, $a_1 = 0$, а для $a_k$ ($k = 2, 3, \ldots$) маємо $a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{k(2\nu + k)}$. Звідси

$$a_{2m+1} = 0 \ (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(\nu+1)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(\nu+1)(\nu+2)}, \ldots,$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)}, \ldots$$

Отже, кореню $\lambda_1 = \nu$ визначального рівняння відповідає розв'язок

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} t^{2k+\nu}. \tag{7.19}$$

Згідно з теоремою 7.5 ряд (7.19) збігається рівномірно на будь-якому відрізку $[0, r]$ ($r > 0$). В (7.19) сталу $a_0$ зручно вибрати у вигляді $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$, де $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$ — гамма-функція Ейлера. Використовуючи відоме співвідношення $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$ (*формулу зниження для гамма-функції*), дістанемо

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu} \stackrel{\text{def}}{=} J_\nu(t). \tag{7.20}$$

Функцію $J_\nu(t)$ називають ***функцією Бесселя першого роду порядку (індексу)*** $\nu$.

Ураховуючи, що $k! = \Gamma(k + 1)$, функцію $J_\nu(t)$ запишемо у вигляді

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \tag{7.21}$$

Якщо $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$, то, згідно з теоремою 7.5, рівняння Бесселя має розв'язок вигляду (7.18), в якому $\lambda = -\nu$. Аналогічно попередньому дістаємо *функцію Бесселя першого роду від'ємного індексу*

$$J_{-\nu}(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \qquad (7.22)$$

Виявляється, що функція $J_{-\nu}(t)$ є розв'язком рівняння Бесселя й при $\nu=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \ldots$, тобто у випадку, коли $2\nu = 1, 3, 5, \ldots$ Більше того, функції Бесселя так званого *напівцілого індексу* $J_{\pm\frac{1}{2}}(t)$, $J_{\pm\frac{3}{2}}(t), \ldots$ виражаються через елементарні функції. Так, наприклад,

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)2^{2k}}=\sqrt{\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{k!\,\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}\,2^{2k}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t.$$

✍ Пропонуємо самостійно показати, що

$$J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t.$$

Таким чином, у випадку $\nu \notin \mathbb{Z}$ загальний розв'язок рівняння Бесселя можна записати у вигляді

$$y=c_1J_\nu(t)+c_2J_{-\nu}(t) \quad (\nu>0) \qquad (7.23)$$

(лінійна незалежність функцій $J_\nu(t)$ і $J_{-\nu}(t)$ випливає з того, що $\lim\limits_{t\to+0}J_\nu(t)=0,\ \lim\limits_{t\to+0}J_{-\nu}(t)=\infty$).

Зауважимо, що при $\nu = n \in \mathbb{Z}$ $(n \ge 0)$ формула (7.22) не дає розв'язку, лінійно незалежного з $J_n(t)$. Справді, при $n = 0$ з (7.22) маємо функцію Бесселя нульового індексу $J_0(t)$, визначену формулою (7.20). Нехай тепер $n = 1, 2, \ldots$ Формально поклавши у (7.22) $\nu = n$ і врахувавши, що величина $\Gamma(-n + k + 1)$ перетворюється в нескінченність при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, дістанемо





$$J_{-n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-n}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n}=(-1)^nJ_n(t)\quad(k=n+m).$$

Тому при цілому $n$ функції $J_n(t)$ і $J_{-n}(t)$ лінійно залежні.

Щоб знайти загальний розв'язок рівняння Бесселя у випадку $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$, введемо до розгляду функцію $Y_\nu(t)=\dfrac{J_\nu(t)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}$, яка є розв'язком рівняння Бесселя. При $\nu\to n\in\mathbb{Z}$ маємо $Y_\nu(t)=(0/0)$. Якщо розкрити цю невизначеність за правилом Лопіталя, то можна дістати таке представлення функції $Y_n(t)=\lim\limits_{\nu\to n\in\mathbb{Z}}Y_\nu(t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$:

$$Y_n(t)=\frac{2}{\pi}J_n(t)\ln\frac{t}{2}-\frac{2^n}{\pi t^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}-$$

$$-\frac{t^n}{\pi 2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]\quad(n=1,2,\ldots).$$

При $n = 0$ маємо

$$Y_0(t)=\frac{2}{\pi}J_0(t)\ln\frac{t}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Функцію $Y_\nu(t)$ називають *функцією Бесселя другого роду порядку (індексу)* $\nu$, або *функцією Неймана*. Функція Неймана $Y_\nu(t)$ є розв'язком рівняння Бесселя й у випадку, коли $\nu$ — ціле число. Лінійна незалежність функцій $J_\nu(t)$ і $Y_\nu(t)$ очевидна. Тому загальний розв'язок рівняння Бесселя (7.17) при будь-якому $\nu \ge 0$ можна записати у вигляді

$$y=c_1J_\nu(t)+c_2Y_\nu(t). \qquad (7.24)$$

Наведемо без доведення деякі важливі факти теорії функцій Бесселя.

**1. Рекурентні співвідношення функцій Бесселя:**

$$
\begin{aligned}
&J_\nu'(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t}J_\nu(t), \quad Y_\nu'(t) = Y_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t}Y_\nu(t),\\
&J_\nu'(t) = -J_{\nu+1}(t) + \frac{\nu}{t}J_\nu(t), \quad Y_\nu'(t) = -Y_{\nu+1}(t) + \frac{\nu}{t}Y_\nu(t),\\
&J_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t}J_\nu(t) - J_{\nu-1}(t), \quad Y_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t}Y_\nu(t) - Y_{\nu-1}(t) \quad (\nu \in \mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{7.25}
$$

Формули (7.25) справедливі для функцій Бесселя різних порядків і доводяться за допомогою почленного диференціювання рядів для $J_\nu(t)$.

**2. Асимптотичні представлення функцій Бесселя.** ① При $t \to +\infty$ справджуються асимптотичні формули

$$
\begin{aligned}
J_\nu(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-1})\right),\\
Y_\nu(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\sin\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-1})\right) \quad (\nu \in \mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

Із формул (7.26) випливає, що циліндричні функції при $t \geq 0$ мають зліченну множину нулів, причому відстань між послідовними нулями функції $J_\nu(t)$ [ а також $Y_\nu(t)$] прямує до $\pi$ при $t \to +\infty$. Можна показати, що при $\nu > -1$ всі нулі функції $J_\nu(t)$ дійсні.

② При $t \to +0$ справджуються асимптотичні формули

$$
\begin{aligned}
J_\nu(t) &= \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(1 + o(t)),\\
Y_n(t) &= -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \in \mathbb{N}),\\
Y_0(t) &= \frac{2}{\pi}\ln\frac{t}{2}(1 + o(1)).
\end{aligned} \tag{7.27}
$$

**3. Ортогональність функцій Бесселя.** Якщо $\mu_i^{(\nu)}$, $\mu_j^{(\nu)}$ — два різних додатних кореня рівняння $J_\nu(t) = 0$, то справджується *властивість ортогональності функцій Бесселя* (див. також приклад 6.10):





$$
\begin{aligned}
&\int_0^b tJ_\nu(b^{-1}\mu_i^{(\nu)}t)J_\nu(b^{-1}\mu_j^{(\nu)}t)\,dt = 0 \quad (i \neq j),\\
&\int_0^b tJ_\nu^2(b^{-1}\mu_i^{(\nu)}t)\,dt = \frac{b^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_i^{(\nu)}) \quad (b > 0).
\end{aligned} \tag{7.28}
$$

Можна показати, що властивість ортогональності справджується також і у випадку, коли $\mu_i^{(\nu)}$, $\mu_j^{(\nu)}$ є коренями загальнішого рівняння типу $\alpha J_\nu(t) + \beta t J_\nu'(t) = 0$ $(\nu > -1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$. У цьому разі

$$
\int_0^b tJ_\nu^2(b^{-1}\mu_i t)\,dt = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_i^2}\right)J_\nu^2(\mu_i) \quad (\mu_i = \mu_i^{(\nu)}). \tag{7.29}
$$

Із (7.28), (7.29) випливає, що функції Бесселя ортогональні з ваговою функцією $\rho(t) = t$.

У задачах математичної фізики часто трапляються такі ряди за функціями Бесселя:

$$
f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_\nu(b^{-1}\mu_i t), \quad b_i = \frac{2}{b^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)}\int_0^b tf(t)J_\nu(b^{-1}\mu_i t)\,dt, \tag{7.30}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} d_i J_\nu(b^{-1}\mu_i t),\\
d_i &= \frac{2}{b^2\left(1 + \dfrac{\alpha^2 - \beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_i^2}\right)J_\nu^2(\mu_i)}\int_0^b tf(t)J_\nu(b^{-1}\mu_i t)\,dt,
\end{aligned} \tag{7.31}
$$

де $\mu_i = \mu_i^{(\nu)}$ — додатні корені рівняння $J_\nu(t) = 0$ $(\nu > -1)$ для ряду (7.30) і додатні корені рівняння $\alpha J_\nu(t) + \beta t J_\nu'(t) = 0$ для ряду (7.31), розміщені в порядку зростання, причому в (7.31) $\alpha/\beta + \nu > 0$.

Ряд (7.30) називають *розвиненням функції $f(t)$ у ряд Фур'є—Бесселя*, а ряд (7.31) — *розвиненням у ряд Діні—Бесселя*.

Якщо $\alpha/\beta + \nu = 0$, то функція $t^\nu$ ортогональна до функцій $J_\nu(b^{-1}\mu_i t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ з ваговою функцією $\rho(t) = t$ на відрізку $[0, b]$ і розвинення (7.31) замінюється таким:

$$f(t) = d_0 t^{\nu} + \sum_{i=1}^{\infty} d_i J_{\nu}(b^{-1}\mu_i t), \tag{7.32}$$

де $d_0 = \dfrac{2(\nu+1)}{b^{2\nu+2}} \int_0^b t^{\nu+1} f(t)\,dt$, а коефіцієнти $d_i (i = 1, 2, ...)$ такі самі, як і в (7.31).

Якщо функція $f(t)$ кусково-неперервна на $[0, b]$ або інтегровна з квадратом із ваговою функцією $\rho(t) = t$ на відрізку $[0, b]$, то ряди (7.30)—(7.32) збігаються до $f(t)$ у середньому квадратичному (див. п. 6.4).

**4. Споріднені рівняння.** Багато інших диференціальних рівнянь, які трапляються в задачах математики, фізики, техніки, можна звести до рівняння Бесселя [19]. Наведемо кілька типів таких рівнянь. Символом $Z_{\nu}(t)$ позначено циліндричну функцію порядку $\nu$.

① $t^2 y'' + ty' + (k^2 t^2 - \nu^2) y = 0 \quad (k = \text{const} \neq 0); \quad y = Z_{\nu}(kt).$ (7.33)

② $t^2 y'' + aty' + (bt^m + c) y = 0 \quad (m \neq 0,\ b \neq 0);$ (7.34)

$$y = t^{\frac{1-a}{2}} Z_{\nu}\left(\frac{2}{m}\sqrt{b}\, t^{\frac{m}{2}}\right) \quad \left(\nu = \frac{1}{m}\sqrt{(1-a)^2 - 4c}\right).$$

③ $t^2 y'' + (1 - 2a) ty' + (b^2 c^2 t^{2b} + a^2 - \nu^2 b^2) y = 0 \quad (b \neq 0,\ c \neq 0);$ (7.35)

$$y = t^a Z_{\nu}(ct^b).$$

**5. Інші циліндричні функції.** Поряд із функціями Бесселя $J_{\nu}(t)$, $Y_{\nu}(t)$ для застосувань важливе значення мають також інші частинні розв'язки рівняння Бесселя й споріднених рівнянь.

Функції

$$H_{\nu}^{(1)}(t) = J_{\nu}(t) + iY_{\nu}(t), \quad H_{\nu}^{(2)}(t) = J_{\nu}(t) - iY_{\nu}(t) \tag{7.36}$$

називають *функціями Ганкеля першого й другого роду* відповідно. Оскільки функції Ганкеля лінійно виражені через функції $J_{\nu}(t)$ і $Y_{\nu}(t)$, то для них справедливі ті самі рекурентні співвідношення типу (7.25), а також асимптотичні представлення при $t \to +\infty$ вигляду





$$H_{\nu}^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{i\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} (1 + O(t^{-1})),$$

$$H_{\nu}^{(2)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-i\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} (1 + O(t^{-1})).$$

Функції

$$\begin{aligned} I_{\nu}(t) &= i^{-\nu} J_{\nu}(it), \\ K_{\nu}(t) &= \frac{\pi}{2} H_{\nu}^{(1)}(it) i^{\nu+1} = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(t) - I_{\nu}(t)}{\sin \pi\nu} \end{aligned} \tag{7.37}$$

називають *модифікованими функціями Бесселя*, або *функціями Бесселя уявного аргументу*. Ці функції є лінійно незалежними (дійсними) розв'язками так званого *рівняння Бесселя уявного аргументу:* $t^2 y'' + ty' - (t^2 + \nu^2) y = 0$, яке є окремим випадком рівняння (7.34) ($a = 1$, $b = -1$, $c = -\nu^2$, $m = 2$). Функцію $K_{\nu}(t)$ називають також *функцією Макдональда*. При $t \to +\infty$ справедливі асимптотичні формули

$$I_{\nu}(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} e^{t} (1 + O(t^{-1})),$$

$$K_{\nu}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} (1 + O(t^{-1})).$$

## 7.5

## Гіпергеометричне рівняння й гіпергеометричні функції

*Гіпергеометричним рівнянням (рівнянням Гаусса)* називають рівняння вигляду

$$t(t-1)y'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)t) y' + \alpha\beta y = 0,$$

де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — дійсні параметри*. Точки $t = 0$ і $t = 1$ є регулярними особливими точками рівняння Гаусса. В околі точки $t = 0$ рівняння Гаусса можна представити у вигляді

$$y'' + \frac{[\gamma - (\alpha+\beta+1)t]\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k}{t} y' - \frac{\alpha\beta\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^{k+1}}{t^2} y = 0 \quad (|t| < 1).$$

Отже, для точки $t = 0$ визначальним є рівняння $\lambda(\lambda - 1) - \gamma\lambda = 0$ з коренями $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = 1 - \gamma$. Якщо $\gamma$ не є цілим недодатним числом, то можна відшукати два лінійно незалежних розв'язки рівняння Гаусса у вигляді узагальнених степеневих рядів, які збігаються при $|t| < 1$. Покажемо це.

Кореню визначального рівняння $\lambda_1 = 0$ відповідає розв'язок у вигляді степеневого ряду

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (a_0 \neq 0).$$

Підставивши цей вираз у рівняння Гаусса, матимемо

$$t(t-1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} + (-\gamma + (\alpha+\beta+1)t)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} +$$
$$+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях $t$ до нуля, дістанемо рекурентну систему для визначення $a_k$:

$$k(k-1)a_k - (k+1)ka_{k+1} - \gamma(k+1)a_{k+1} + (\alpha+\beta+1)ka_k + \alpha\beta a_k = 0,$$

$$a_{k+1} = \frac{k(k-1) + k(\alpha+\beta+1) + \alpha\beta}{(k+1)(k+\gamma)} a_k = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(k+\gamma)} a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

* У теоретичній і математичній фізиці використовують також рівняння *гіпергеометричного типу* $a(t)y'' + b(t)y' + cy = 0$, де $a(t)$, $b(t)$, $c$ — довільні многочлени степеня, не вищого за другий, перший і нульовий відповідно з комплексними коефіцієнтами [32].





Поклавши $a_0 = 1$, послідовно знаходимо

$$a_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}, \quad a_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}, \ldots,$$
$$a_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}, \ldots$$

Знаменники у виразах для $a_k$ не перетворюються в нуль унаслідок умови, яка накладається на параметр $\gamma$ : $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ Отже, розв'язок $y_1(t)$ рівняння Гаусса має вигляд

$$y_1(t) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} t + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} t^2 + \ldots$$

Степеневий ряд у правій частині цієї рівності називають *гіпергеометричним рядом*. Застосувавши ознаку Д'Аламбера, можна переконатися (пропонуємо зробити це самостійно), що цей ряд збігається абсолютно й рівномірно при $|t| < 1$. Суму гіпергеометричного ряду називають *гіпергеометричною функцією* й позначають символом $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$. Таким чином,

$$y_1(t) = F(\alpha, \beta, \gamma, t) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} t^k \quad (|t| < 1).$$

Ураховуючи, що $\Gamma(a + k) = \Gamma(a)a(a + 1)\ldots(a + k - 1)$, де $\Gamma(a)$ — гамма-функція Ейлера, гіпергеометричну функцію записують також у вигляді

$$F(\alpha, \beta, \gamma, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{t^k}{k!} \quad (|t| < 1),$$

де $(a)_k \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ — *символ Похгаммера*, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$

Якщо $\gamma \neq 1$ не є цілим недодатним числом, то розв'язок гіпергеометричного рівняння $y_2(t)$, лінійно незалежний з $y_1(t)$, можна шукати у вигляді $y_2(t) = t^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t^{1-\gamma}u(t)$. Щоб знайти функцію $u = u(t)$, простіше в рівнянні Гаусса виконати заміну $y = t^{1-\gamma}u$. Тоді

$$y' = t^{1-\gamma}u' + (1-\gamma)t^{-\gamma}u, \quad y'' = t^{1-\gamma}u'' + 2(1-\gamma)t^{-\gamma}u' - \gamma(1-\gamma)t^{-\gamma-1}u.$$

Підставивши в рівняння й скоротивши на $t^{1-\gamma}$, дістанемо

$$t(t-1)u'' + (-\gamma_1 + (\alpha_1 + \beta_1 + 1)t)u' + \alpha_1\beta_1 u = 0,$$

де $\gamma_1 = 2 - \gamma$, $\alpha_1 = \alpha + 1 - \gamma$, $\beta_1 = \beta + 1 - \gamma$. Якщо $\gamma_1$ — теж не ціле недодатне число, то розв'язком цього рівняння у вигляді степеневого ряду є гіпергеометрична функція $u = u(t) = F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma,\ t)$. У цьому випадку для розв'язку $y_2(t)$ маємо

$$y_2(t) = t^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma,\ t),$$

а загальний розв'язок гіпергеометричного рівняння можна записати у вигляді

$$y = y(t) = c_1 F(\alpha, \beta, \gamma, t) + c_2 t^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, t)$$

$$(\gamma \notin \mathbb{Z};\ |t| < 1).$$

Якщо функція $t^{1-\gamma}$ не визначена при $t < 0$, то останнє твердження справедливе лише при $t \in (0, 1)$.

До гіпергеометричного й споріднених із ним рівнянь зводиться багато лінійних рівнянь, які широко використовуються в теоретичній і математичній фізиці. Розглянемо, наприклад, рівняння Лежандра

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Неперервними на відрізку $[-1, 1]$ розв'язками цього рівняння, такими, що $y(1) = 1$, є многочлени Лежандра $P_n(t)$ (див. п. 6.4).

Переконаємося в тому, що рівняння Лежандра зводиться до гіпергеометричного рівняння. Для цього в рівнянні Лежандра виконаємо заміну незалежної змінної: $t = 1 - 2\tau$. Тоді





$$\tau = \frac{1}{2}(1 - t), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Підставивши в рівняння Лежандра, дістанемо

$$\frac{1}{4}(1 - (1 - 2\tau)^2)\frac{d^2y}{d\tau^2} + (1 - 2\tau)\frac{dy}{d\tau} + n(n+1)y = 0$$

або гіпергеометричне рівняння

$$\tau(\tau - 1)\frac{d^2y}{dt^2} + (-1 + 2\tau)\frac{dy}{d\tau} - n(n+1)y = 0$$

з параметрами $\alpha = n + 1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$. Одним із розв'язків цього рівняння є гіпергеометрична функція $F(n + 1, -n, 1, \tau)$. Тому розв'язком рівняння Лежандра є функція

$$y(t) = F\left(n + 1, -n, 1, \frac{1-t}{2}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1)}{(k!)^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!C_n^k}{n!k!}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k$$

(коефіцієнти ряду при $k = n + 1, n + 2, \ldots$ дорівнюють нулю).

Оскільки $y(t) \in C_{[-1, 1]}$ і $y(1) = 1$, то

$$P_n(t) = F\left(n + 1, -n, 1, \frac{1-t}{2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!C_n^k}{n!k!}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Безпосереднім підставлянням $n = 1, 2, 3$ дістанемо, наприклад,

$$P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t).$$

Рівняння вигляду

$$ty'' + (\gamma - t)y' - \alpha y = 0$$

з параметрами $\alpha$, $\gamma$ називають ***виродженим гіпергеометричним рівнянням***. Точка $t = 0$ є регулярною особливою точкою цього рівняння. Шукатимемо розв'язок цього рівняння у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\lambda} \quad (a_0 \neq 0).$$

Підставивши останній вираз у рівняння й прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях $t$, дістанемо визначальне рівняння $\lambda(\lambda - 1) + \lambda\gamma = 0$ і рекурентну систему для $a_k$:

$$a_{k+1} = \frac{\alpha + \lambda + k}{(\gamma + \lambda + k)(1 + \lambda + k)} a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

При $\lambda_1 = 0$, поклавши $a_0 = 1$, матимемо

$$a_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \; a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}, \ldots, \; a_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}, \ldots$$

Якщо $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, то знаменники у виразах для $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не перетворюються в нуль. Отже, розв'язок, який відповідає кореню $\lambda_1 = 0$, записується у вигляді

$$y = y_1(t) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} t + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} t^2 + \ldots$$

Ряд у правій частині цієї рівності називають ***виродженим гіпергеометричним рядом***. За допомогою ознаки Д'Аламбера неважко показати (пропонуємо зробити це самостійно), що вироджений гіпергеометричний ряд збігається абсолютно й рівномірно на будь-якому скінченному проміжку $|t| \leq r$. Суму цього ряду

$$F(\alpha, \gamma, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} t^k$$

називають ***виродженою гіпергеометричною функцією***, або ***функцією Куммера***. Використовуючи символи Похгаммера, функцію Куммера можна записати у вигляді





$$F(\alpha, \gamma, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{t^k}{k!} \quad (\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

Якщо в рекурентну систему для визначення коефіцієнтів $a_k$ підставити $\lambda_2 = 1 - \gamma$ $(\gamma \neq 1)$, то

$$a_{k+1} = \frac{\alpha_1 + k}{(\gamma_1 + k)(1 + k)} a_k, \; \alpha_1 = \alpha - \gamma + 1, \; \gamma_1 = 2 - \gamma \; (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Аналогічно попередньому, поклавши $a_0 = 1$, при $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ дістанемо

$$y_2(t) = t^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \; 2 - \gamma, \; t).$$

Отже, при $\gamma \notin \mathbb{Z}$ загальний розв'язок виродженого гіпергеометричного рівняння має вигляд

$$y = y(t) = c_1 F(\alpha, \gamma, t) + c_2 t^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \; 2 - \gamma, \; t).$$

✍ **Пропонуємо самостійно виконати вправи.**

① Довести, що функція Куммера $F(-n, 1, t)$, яка є розв'язком рівняння $ty'' + (1 - t)y' + ny = 0$, лише сталим множником відрізняється від *многочлена Лагерра* $L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$:

$$L_n(t) = n!\,F(-n, 1, t) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{k!} t^k.$$

② Довести, що *рівняння Уіттекера* $4t^2 y'' - (t^2 - 4kt + 4m^2 - 1)y = 0$ $(k, m = \text{const})$ за допомогою заміни $y = t^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} u(t)$ зводиться до виродженого гіпергеометричного рівняння

$$tu'' + (2m + 1 - t)u' + \left(k - m - \frac{1}{2}\right)u = 0,$$

а при $k = 0$ заміною $y = \sqrt{t}u$ зводиться до рівняння Бесселя.

③ Довести, що за допомогою заміни незалежної змінної $x = t^2$ рівняння для *функцій Ерміта* $y'' - 2ty' + 2\nu y = 0$ $(\nu = \text{const})$ зводиться до виродженого гіпергеометричного рівняння

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\nu}{2} y = 0.$$

④ Довести формули диференціювання для гіпергеометричних і вироджених гіпергеометричних функцій:

а) $F'(\alpha, \beta, \gamma, t) = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, t)$;

б) $F'(\alpha, \gamma, t) = \dfrac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, t)$.

⑤ Довести такі співвідношення для гіпергеометричних функцій:

а) $F(\alpha, -n, -n, t) = F(-n, \beta, -n, t) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{\beta+k-1}^{k} t^k$;

б) $F(-n, 1, -n, t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k$;

в) $F(1, 1, 1, t) = F(1, \beta, \beta, t) = F(\alpha, 1, \alpha, t) = (1-t)^{-1}$;

г) $F(-n, \beta, \beta, -t) = (1+t)^n$;

д) $ntF(1-n, 1, 2, t) = 1-(1-t)^n$;

е) $tF\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, -t^2\right) = \operatorname{arctg} t$;

є) $F(1, 1, 2, t) = -\dfrac{1}{t}\ln(1-t)$;

ж) $F(\alpha, \beta, \alpha, t) = (1-t)^{\beta}$;

з) $F\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, t^2\right) = \dfrac{1}{t}\arcsin t$;

и) $2tF\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, t^2\right) = \ln\dfrac{1+t}{1-t}$.

⑥ Довести, що дані функції є розв'язками даних диференціальних рівнянь:

а) $y = F(\nu+1, -\nu, 1, t)$, $t(t-1)y'' + (2t-1)y' - \nu(\nu+1)y = 0$;

б) $y = t^{\alpha}F(a+\alpha, b+\alpha, \alpha-\beta+1, t)$,
$t^2(t-1)y'' + [(a+b+1)t + (\alpha+\beta-1)]ty' + (abt - \alpha\beta)y = 0$;

в) $y = t^{-\alpha}F(1-\alpha, b-\alpha, 1-\alpha+\beta, -at)$,
$(at+1)t^2y'' + [a(b+2)t + (\alpha+\beta+1)]ty' + (abt+\alpha\beta)y = 0$;

г) $y = F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, t)$,
$t(t-1)y'' + [(\alpha+\beta+2n+1)t - (\gamma+n)]y' + (\alpha+n)(\beta+n)y = 0$;

д) $y = (t^3-1)^{\frac{1}{4}} F\left(\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{3}, t^3\right)$, $16(t^3-1)^2y'' + 27ty = 0$.

Глава 8

# ОСНОВИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ

## 8.1

## Основні поняття теорії стійкості за Ляпуновим. Стійкість лінійних систем

Як уже зазначалося (див. п. 3.6), поняття коректності задачі Коші для системи диференціальних рівнянь у нормальній формі містить у собі, зокрема, вимогу неперервної залежності розв'язку від початкових умов на скінченному проміжку зміни незалежної змінної. Якщо функція $f$ (права частина системи) задовольняє умови теореми Пікара, то така властивість розв'язку справджується. Проте досить часто потрібно досліджувати поведінку розв'язку на півосі $[a, +\infty)$. У цьому випадку вже не можна гарантувати того, що малі збурення початкових умов приведуть до малих збурень розв'язку. Це легко зрозуміти на прикладі скалярного рівняння $\dot{y} = \lambda y$ $(t \in [0, +\infty)$, $\lambda = \text{const} \in \mathbb{R})$. Нехай $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ $(y(0) = y_0)$ — незбурений розв'язок, а $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{\lambda t}$ $(\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0)$ — збурений розв'язок рівняння. Тоді $|\tilde{y}(t) - y(t)| = |\tilde{y}_0 - y_0| e^{\lambda t}$ і при $\lambda \le 0$ з нерівності $|\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon$ випливає $|\tilde{y}(t) - y(t)| = |\tilde{y}_0 - y_0| e^{\lambda t} \le |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon$ $\forall t > 0$. Якщо ж $\lambda > 0$, то при достатньо великих $t$ величина $|\tilde{y}(t) - y(t)|$ стає як завгодно великою, хоч би яким малим за модулем було збурення початкових умов $\tilde{y}_0 - y_0$.

Теорія стійкості, розроблена видатним російським ученим О.М. Ляпуновим, вивчає проблему неперервної залежності розв'язків диференціальних рівнянь саме на півосі $[a, +\infty)$.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{8.1}$$

визначену на множині $G = [a, +\infty) \times D$ ($a \in \mathbb{R}$, $D$ — область у $\mathbb{R}^n$), у припущенні існування й єдиності розв'язку задачі Коші з довільними початковими умовами $(t_0, x_0,) \in G$. Розв'язок системи (8.1), який при $t = t_0$ набуває значення $x_0$, позначатимемо через $x(t, t_0, x_0)$.

Сформулюємо означення стійкості*. Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи (8.1) називають *стійким за Ляпуновим*, якщо:

① цей розв'язок існує на півосі $[a, +\infty)$;

② для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного $t_0 \ge a$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що кожний розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ системи (8.1), в якого $\| x_0 - \varphi(t_0) \| < \delta$, існує на півосі $[t_0, +\infty)$ і задовольняє умову

$$\| x(t, t_0, x_0) - \varphi(t) \| < \varepsilon \ \forall\, t \ge t_0.$$

Друга вимога означення стійкості має простий геометричний зміст: графік кожного розв'язку, значення якого при $t = t_0$ належить $\delta$-околу точки $\varphi(t_0)$, повинен при $t \ge t_0$ цілком належати $\varepsilon$-трубці ($\varepsilon$-смузі) розв'язку $\varphi(t)$.

Розв'язок $x = \varphi(t)$ називають *нестійким,* якщо він не є стійким, тобто таким, для якого порушується хоча б одна з вимог, які фігурують в означенні стійкості.

Розв'язок $x = \varphi(t)$ називають *асимптотично стійким за Ляпуновим,* якщо:

① він стійкий за Ляпуновим;

② для кожного $t_0 \ge a$ можна вказати таке $\Delta = \Delta(t_0) > 0$, що для кожного розв'язку $x(t, t_0, x_0)$, в якого $\| x_0 - \varphi(t_0) \| < \Delta$, виконується умова

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t, t_0, x_0) - \varphi(t) \| = 0.$$

◆ **Зауваження 8.1**

Розв'язок $y(t)$ скалярного рівняння $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ називають *стійким (асимптотично стійким, нестійким),* якщо стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий) відповідний розв'язок $x(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))^T$ еквівалентної системи рівнянь у нормальній формі Коші (див. п. 1.3).

---

* У цьому означенні йдеться про стійкість відносно початкових умов. Аналогічно можна було б ввести поняття стійкості відносно параметрів, які входять у праву частину системи. Символом $\|\cdot\|$ позначено евклідову норму вектора (див. п. 3.1).





❑ **Приклад 8.1**

*Дослідимо на стійкість тривіальний розв'язок* $\varphi(t) \equiv 0$ *скалярного рівняння* $\dot{x} = x^2$.

Зінтегрувавши це рівняння (див. приклад 3.4), дістанемо $x(t, t_0, x_0) = \dfrac{1}{t_0 + 1/x_0 - t}$ $(x_0 \ne 0)$. Звідси випливає, що тривіальний розв'язок $\varphi(t) \equiv 0$ нестійкий, оскільки для як завгодно малого $x_0 > 0$ розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ не існує на півосі $[t_0, +\infty)$ (цей розв'язок не є продовжуваним управо за точку $t^* = t_0 + 1/x_0$ : $\lim\limits_{t \to t^*-0} x(t, t_0, x_0) = +\infty$ ).

❑ **Приклад 8.2**

Як уже зазначалося раніше, кожний розв'язок $y = y_0 e^{\lambda t}$ рівняння $\dot{y} = \lambda y$ є стійким при $\lambda \le 0$ і нестійким при $\lambda > 0$. Якщо ж $\lambda < 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} \| \tilde{y}(t) - y(t) \| = \lim\limits_{t \to +\infty} \| \tilde{y}_0 - y_0 \| e^{\lambda t} = 0$ і кожний розв'язок цього рівняння є асимптотично стійким за Ляпуновим (рис. 8.1).

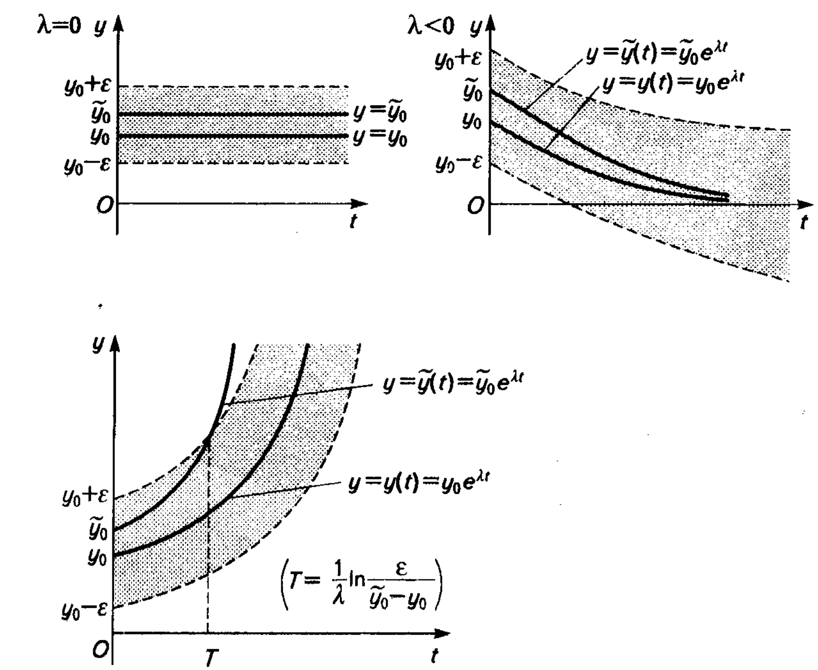


Рис.8.1

**❑ Приклад 8.3**

*Дослідимо на стійкість розв'язок* $x = x(t)$ $(x(0) = x_0)$ *системи* $\dot{x} = Ax$, *де* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Оскільки $X(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ — фундаментальна матриця системи (див. п. 5.1), то $x = x(t) = X(t)x_0$, $\tilde{x} = \tilde{x}(t) = X(t)\tilde{x}_0$ $(\tilde{x}(0) = \tilde{x})$ — відповідно незбурений і збурений розв'язки системи. Оцінимо $\| \tilde{x}(t) - x(t) \|$ на півосі $[0, +\infty)$. Оскільки $\| X(t) \| = \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{2}$, то

$$\| \tilde{x}(t) - x(t) \| = \| X(t)(\tilde{x}_0 - x_0) \| \le \| X(t) \| \| \tilde{x}_0 - x_0 \| =$$
$$= \sqrt{2} \| \tilde{x}_0 - x_0 \| < \varepsilon \quad \forall t \ge 0,$$

як тільки $\| \tilde{x}_0 - x_0 \| < \delta = \varepsilon/\sqrt{2}$ і, отже, розв'язок $x(t)$ стійкий. Елементи фундаментальної матриці $X(t)$ обмежені на $\mathbb{R}$ і не мають границі при $|t| \to +\infty$. Тому $\lim\limits_{t \to +\infty} \| X(t)(\tilde{x}_0 - x_0) \|$ не існує (при $\tilde{x}_0 \ne x_0$) і розв'язок $x(t)$ не є асимптотично стійким.

**❑ Приклад 8.4**

*Дослідимо на стійкість розв'язок* $x = 1/t$ $(t \ge 1)$ *рівняння Ріккаті* $\dot{x} = -(x - 2/t)^2$.

Як відомо (див. п. 2.2), заміна $x = y + 1/t$ зводить це рівняння до рівняння Бернуллі:

$$\dot{y} - \frac{1}{t^2} = -\left(y - \frac{1}{t}\right)^2, \quad \dot{y} = \frac{2}{t}y - y^2.$$

Таким чином, дослідження на стійкість розв'язку $x = 1/t$ рівняння Ріккаті звелося до дослідження на стійкість тривіального розв'язку $y = 0$ $(t \ge 1)$ рівняння Бернуллі. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $y = \dfrac{3t^2}{t^3 + 3c}$, $y = 0$. Розв'язок із початковою умовою $y(1) = \tilde{y}_0$ має вигляд $\tilde{y}(t) = \dfrac{3\tilde{y}_0 t^2}{\tilde{y}_0(t^3 - 1) + 3}$. Звідси випливає, що хоч би яким малим за абсолютним значенням було $\tilde{y}_0 < 0$, розв'язок $\tilde{y}(t)$ не може бути продовжений управо за точку $t^* = (1 - 3/\tilde{y}_0)^{1/3} > 1$ $\left(\lim\limits_{t \to t^* - 0} \tilde{y}(t) = -\infty\right)$. Тому





тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння Бернуллі є нестійким, а заразом є нестійким і розв'язок $x = 1/t$ рівняння Ріккаті.

Із розгляду прикладу 8.4 випливає, що дослідження на стійкість даного розв'язку системи можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв'язку $y \equiv 0$ деякої допоміжної системи. Покажемо це в загальному випадку.

У системі (8.1) виконаємо заміну шуканої функції за формулою

$$x = y + \varphi(t), \tag{8.2}$$

де $y$ — шукана функція [*збурення розв'язку* $\varphi(t)$], $\varphi(t)$ — розв'язок, який досліджується на стійкість. Відносно $y$ дістанемо систему $\dot{y} = f(t, y + \varphi(t)) - \dot{\varphi}(t)$ або, з урахуванням тотожності $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$, систему

$$\dot{y} = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)). \tag{8.3}$$

Систему (8.3) називають ***системою збурень***, або ***системою збурених рухів***. Очевидно, що вона має тривіальний розв'язок (точку спокою) $y \equiv 0$, і задача дослідження його на стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) еквівалентна задачі дослідження на стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (8.1).

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{8.4}$$

із неперервними на півосі $[a, +\infty)$ коефіцієнтами. Як відомо (див. п. 3.5), розв'язок задачі Коші для системи (8.4) єдиний і існує на півосі $[a, +\infty)$.

**Теорема 8.1**

Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи (8.4) стійкий (асимптотично стійкий) тоді й лише тоді, коли стійким (асимптотично стійким) є тривіальний розв'язок відповідної однорідної системи $\dot{y} = A(t)y$.

**Доведення**

У системі (8.4) виконаємо заміну (8.2): $\dot{y} + \dot{\varphi}(t) = A(t)(y + \varphi(t)) + f(t)$, звідки, внаслідок тотожності $\dot{\varphi}(t) \equiv A(t)\varphi(t) + f(t)$, дістаємо систему збурень

$$\dot{y} = A(t)y. \tag{8.5}$$

Як уже зазначалося, стійкість (асимптотична стійкість) тривіального розв'язку системи (8.5) еквівалентна стійкості (асимптотичній стійкості) розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (8.1).

**Наслідок 8.1**

*Оскільки система збурень (8.5) не залежить від розв'язку $x = \varphi(t)$ і функції $f(t)$, то всі розв'язки лінійної системи (8.4) стійкі (нестійкі, асимптотично стійкі) водночас. Тому коректним є поняття стійкості (нестійкості, асимптотичної стійкості) лінійної системи, причому достатньо досліджувати на стійкість лінійну однорідну систему (8.5).*

Покажемо, що стійкість системи (8.5) цілком визначається властивостями її довільної фундаментальної матриці $Y(t)$.

**Теорема 8.2**

Для стійкості лінійної однорідної системи необхідно й достатньо, щоб її фундаментальна матриця $Y(t)$ була обмеженою на $[a, +\infty) : \| Y(t) \| \le K \;\; \forall\, t \ge a \;(K = \text{const} > 0)$.

**Доведення**

Нехай $\| Y(t) \| \le K \;\forall\, t \ge a$ і $\tilde{y} = \tilde{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\tilde{y}_0$ — збурений розв'язок системи (8.5), $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge a$ — довільні. Тоді

$$\| \tilde{y}(t) - 0 \| = \| Y(t)Y^{-1}(t_0)\tilde{y}_0 \| \le \| Y(t) \| \| Y^{-1}(t_0) \| \| \tilde{y}_0 \| \le$$

$$\le K \| Y^{-1}(t_0) \| \| \tilde{y}_0 - 0 \| < \varepsilon,$$

як тільки $\| \tilde{y}_0 - 0 \| = \| \tilde{y}_0 \| < \dfrac{\varepsilon}{K \| Y^{-1}(t_0) \|}$, і, отже, система (8.5) стійка.

Припустимо, що фундаментальна матриця $Y(t)$ не обмежена на $[a, +\infty)$, і покажемо, що тоді система (8.5) нестійка. З припущення випливає: серед стовпців матриці $Y(t)$ знайдеться стовпець $y_j(t)$ із необмеженою на $[a, +\infty)$ нормою, тобто існує така послідовність $t_k \to +\infty$, для якої $\| y_j(t_k) \| \to +\infty$. Нехай тепер $t_0 \ge a$ довільне, $\delta > 0$ — як завгодно мале. За початкову умову збуреного розв'язку візьмемо вектор $\tilde{y}_0 = \dfrac{\delta}{2 \| Y(t_0) \|} Y(t_0)e_j$, де $e_j$ — $j$-й координатний орт простору $\mathbb{R}^n$. Тоді $\| \tilde{y}_0 \| \le \frac{1}{2}\delta < \delta$, а





$$\tilde{y}(t) = y(t, t_0, \tilde{y}_0) = Y(t)\tilde{y}_0 = \frac{\delta}{2 \| Y(t_0) \|} Y(t)e_j = \frac{\delta}{2 \| Y(t_0) \|} y_j(t).$$

Унаслідок необмеженості $\| y_j(t) \|$ знайдеться таке $t_k > t_0$, при якому, наприклад, $\| \tilde{y}(t_k) - 0 \| = \| \tilde{y}(t_k) \| = \dfrac{\delta}{2 \| Y(t_0) \|} \| y_j(t_k) \| \ge 1$, що означає нестійкість системи (8.5).

**Теорема 8.3**

Для асимптотичної стійкості лінійної однорідної системи (8.5) необхідно й достатньо, щоб норма її фундаментальної матриці прямувала до нуля при $t \to +\infty$.

**Доведення**

Нехай $\lim\limits_{t \to +\infty} \| Y(t) \| = 0$. Обмеженість $\| Y(t) \|$ очевидна. Тому система (8.5) стійка. Маємо:

$$\| \tilde{y}(t) - 0 \| = \| Y(t)Y^{-1}(t_0)\tilde{y}_0 \| \le \| Y(t) \| \| Y^{-1}(t_0) \| \| \tilde{y}_0 \| \to 0, \; t \to +\infty.$$

Отже, вимога ② з означення асимптотичної стійкості в даному випадку виконується при довільному $\Delta$.

Нехай система (8.5) асимптотично стійка. Тоді тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ асимптотично стійкий і, згідно з означенням асимптотичної стійкості, $\lim\limits_{t \to +\infty} \| \tilde{y}(t) - 0 \| = \lim\limits_{t \to +\infty} \| \tilde{y}(t) \| = 0$ для довільного розв'язку $\tilde{y}(t)$ такого, що $\| \tilde{y}_0 \| = \| \tilde{y}(t_0) \| < \Delta$. Нехай тепер $y(t)$ — довільний розв'язок системи (8.5) з початковою умовою $y(t_0) = y_0 \ne 0$. Розглянемо розв'язок $\tilde{y}(t)$ системи (8.5) такий, що $\tilde{y}(t) = \dfrac{y(t)}{\| y_0 \|} \dfrac{\Delta}{2}$. Тоді $\| \tilde{y}(t_0) \| = \dfrac{\Delta}{2} < \Delta$ і, отже, $\| \tilde{y}(t) \| = \dfrac{\Delta}{2 \| y_0 \|} \times$ $\times \| y(t) \| \to 0, \; t \to +\infty$. Тому $\lim\limits_{t \to +\infty} \| y(t) \| = 0$ і $\lim\limits_{t \to +\infty} \| Y(t) \| = 0$.

◆ **Зауваження 8.2**

Розв'язки лінійного однорідного скалярного рівняння $y^{(n)} + h_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + h_n(t)y = 0$ з неперервними на $[a, +\infty)$ коефіцієнтами $h_1(t), \ldots, h_n(t)$:

1) стійкі — тоді й лише тоді, коли $\| Y(t) \| \le K \ \forall t \ge a \ (K = \text{const} > 0)$;

2) асимптотично стійкі — тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{t \to +\infty} \| Y(t) \| = 0$, де

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

— матриця Вронського фундаментальної системи розв'язків $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ цього рівняння.

❑ **Приклад 8.5**

*Розглянемо лінійні скалярні рівняння:*

$$\text{а)}\ \dot{x} = a(t)x \quad (a(t) \in C_{[a,+\infty)}); \qquad \text{б)}\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0;$$
$$\text{в)}\ \ddot{y} - \omega^2 y = 0, \quad \omega = \text{const} > 0.$$

Фундаментальна матриця рівняння а) складається з одного розв'язку $e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ $(t_0 \ge a)$. Тому це рівняння є стійким, якщо $\left| \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau \right| \le k = \text{const}\ \forall t \ge t_0$, асимптотично стійким, якщо $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = -\infty$ і нестійким, якщо $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = +\infty$. Для рівнянь б) і в) фундаментальні матриці (матриці Вронського ФСР) мають відповідно такий вигляд:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \text{ і } Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\omega t} & e^{-\omega t} \\ \omega e^{\omega t} & -\omega e^{-\omega t} \end{pmatrix}.$$

Тому рівняння б) стійке, а рівняння в) нестійке.

❑ **Приклад 8.6**

*Розглянемо скалярне рівняння* $\dot{x} = \cos^2 x \ (t \ge 0)$.

Інтегруючи його, дістанемо $x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0 + t) + \pi n$ при $x_0 \ne \pi/2 + k\pi$ і $x_0 = \pi/2 + k\pi$ при $x_0 = \pi/2 + k\pi$ $(n, k \in \mathbb{Z})$. Усі розв'язки обмежені на $\mathbb{R}$.





Легко бачити, що, наприклад, розв'язок $x = -\pi/2$ нестійкий, оскільки для будь-якого $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ (рис. 8.2)

$$\lim_{t \to +\infty} |\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0 + t) - (-\pi/2)| = \pi.$$

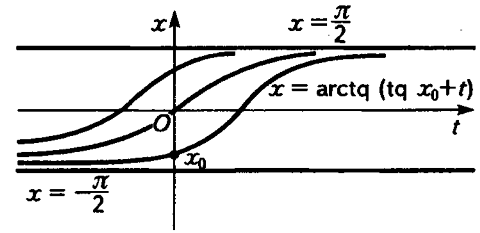


Рис. 8.2

Розглянемо тепер розв'язки рівняння з початковими умовами $x_0, \tilde{x}_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Нехай $x(t) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0 + t)$ — незбурений розв'язок, а $\tilde{x}(t) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tilde{x}_0 + t)$ — збурений. Тоді знайдеться таке $\delta > 0$, що $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \ \forall t \ge 0$, як тільки $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$. Справді, внаслідок неперервності функції $\operatorname{arctg} t$ існує таке $\delta_1 > 0$, що $|\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tilde{x}_0 + t) - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0 + t)| < \varepsilon$ при $|\operatorname{tg} \tilde{x}_0 + t - (\operatorname{tg} x_0 + t)| = |\operatorname{tg} \tilde{x}_0 - \operatorname{tg} x_0| < \delta_1$. Унаслідок неперервності функції $\operatorname{tg} x$ на проміжку $(-\pi/2, \pi/2)$ знайдеться таке $\delta > 0$, що остання нерівність виконується, як тільки $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$. Отже, розв'язки даного рівняння з початковими умовами, які належать проміжку $(-\pi/2, \pi/2)$, стійкі. Оскільки $\lim\limits_{t \to +\infty} |\tilde{x}(t) - x(t)| = |\pi/2 - \pi/2| = 0$, то ці розв'язки стійкі асимптотично.

З розгляду цього прикладу випливає, що нелінійні системи, на відміну від лінійних, можуть мати як стійкі, так і нестійкі розв'язки.

✍ Пропонуємо самостійно показати, що таку властивість має й система $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = xy \ (t \ge 0)$, розв'язки якої можна записати у вигляді $x = x_0$, $y = y_0 e^{x_0 t}$, де $(x_0, y_0)$ — довільна початкова точка.

## 8.2

## Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = Ax \quad (t \ge t_0) \tag{8.6}$$

із дійсною сталою $(n \times n)$-вимірною матрицею $A = (a_{ij})$.

Як відомо, фундаментальну матрицю системи (8.6) можна записати у вигляді $X(t) = e^{A(t-t_0)}$, де $e^{A(t-t_0)}$ — матрична експонента. Структуру матричної експоненти залежно від жорданової нормальної форми матриці $A$ розглянуто в п. 5.1. Із формул (5.8)—(5.10) випливає, що поведінка фундаментальної матриці при $t \to +\infty$ визначена поведінкою матриць-блоків $e^{J_{m_i}(\lambda_i)t} = e^{\lambda_i t} T_{m_i}(t)$, де

$$T_{m_i}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(m_i-1)!}t^{m_i-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(m_i-2)!}t^{m_i-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, s).$$

Звідси можна зробити висновок, що фундаментальна матриця системи (8.6) обмежена на півосі $[t_0, +\infty)$ тоді й лише тоді, коли дійсні частини всіх власних чисел матриці $A$ недодатні, причому кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідають прості ($m_i = 1$) клітини Жордана, а рівність $\lim\limits_{t \to +\infty} \| X(t) \| = 0$ виконується тоді й лише тоді, коли дійсні частини всіх власних чисел матриці $A$ від'ємні.

Ураховуючи це, а також теореми 8.2, 8.3, сформулюємо необхідну й достатню умови стійкості системи (8.6).

**Теорема 8.4**

Аби система (8.6) була стійкою, необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці $A$ були недодатними, причому кожному суто уявному або нульовому власному числу відповідали лише прості (одновимірні) клітини Жордана.

Для асимптотичної стійкості системи (8.6) необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці $A$ були від'ємними.

**Наслідок 8.2**

*Система (8.6) нестійка, якщо хоча б одному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідає неодновимірна клітина Жордана*





*(такому власному числу $\lambda$ кратності $p$ відповідає $s < p$ лінійно незалежних власних векторів матриці $A$), або якщо серед власних чисел матриці $A$ є хоча б одне з додатною дійсною частиною.*

**❑ Приклад 8.7**

*Дослідимо на стійкість систему*

$$\dot{x} = \alpha x + 5y, \;\; \dot{y} = -x + 2y \;\; (\alpha \in \mathbb{R} \text{ — параметр}).$$

Характеристичне рівняння матриці цієї системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 5 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \lambda^2 - (2+\alpha)\lambda + 2\alpha + 5 = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 + \alpha \pm \sqrt{(2+\alpha)^2 - 4(2\alpha+5)}}{2}$. Якщо водночас $2 + \alpha < 0$ і $2\alpha + 5 > 0$, тобто якщо $-5/2 < \alpha < -2$, то корені $\lambda_1$, $\lambda_2$, мають від'ємні дійсні частини й дана система асимптотично стійка. Якщо $2\alpha + 5 > 0$, тобто $\alpha < -5/2$ або $\alpha > -2$, то маємо або два дійсних корені різних знаків, або пару комплексно-спряжених коренів із додатною дійсною частиною. В цьому випадку система нестійка. При $\alpha = -5/2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1/2$ (власні числа недодатні, матриця $A$ має просту структуру) система стійка. При $\alpha = -2$, $\lambda_{1,2} = \pm i$ (дійсні частини власних чисел недодатні, матриця $A$ має просту структуру) система також стійка.

Умови теореми 8.4 у тій її частині, яка стосується асимптотичної стійкості, можна перевірити, не знаходячи власних чисел матриці $A$.

Нехай

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (8.7)$$

— характеристичне рівняння матриці $A$. Матрицю

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (a_k = 0 \text{ при } k > n) \qquad (8.8)$$

називають *матрицею Гурвіца*.

**Теорема 8.5**
**(критерій Рауса—Гурвіца) [14]**
Дійсні частини всіх коренів рівняння (8.7) від'ємні тоді й лише тоді, коли додатні діагональні мінори матриці $H$, тобто коли

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0. \qquad (8.9)$$

Доведемо теорему для випадку лінійної однорідної системи ($n = 2$):

$$\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (8.10)$$

Характеристичне рівняння матриці $A$ запишемо у вигляді

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

де $a_1 = -(a_{11} + a_{22}) = -\mathrm{tr}\, A$, $a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$.

Матриця Гурвіца в цьому випадку має такий вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{tr}\, A & 1 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \qquad (8.11)$$
$$(\Delta_1 = a_1 = -\mathrm{tr}\ A,\ \ \Delta_2 = -\mathrm{tr}\ A \cdot \det A).$$

Твердження теореми 8.5 ($n = 2$) випливає з формул Вієта:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1,\quad \lambda_1\lambda_2 = a_2. \qquad (8.12)$$

Справді, якщо $\lambda_1$, $\lambda_2$ — від'ємні або комплексно-спряжені ($\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$) корені характеристичного рівняння, то $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) > 0$, $a_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ і умова (8.9) при $n = 2$ виконується. Нехай тепер $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, тобто $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Тоді з (8.12) маємо $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, то це можливо лише тоді, коли $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Якщо





$\lambda_1$, $\lambda_2$ комплексно-спряжені, то $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \bar{\lambda}_1 = 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$ і, отже, $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$.

Із формул (8.9) і (8.11) випливає, що для асимптотичної стійкості системи (8.10) необхідною й достатньою є умова

$$\mathrm{tr}\, A < 0,\quad \det\, A > 0. \qquad (8.13)$$

◆ **Зауваження 8.3**

З доведення теореми 8.5 при $n = 2$ випливає, що умова $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ є необхідною й достатньою для того, щоб усі корені рівняння $\lambda_2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ мали від'ємні дійсні частини. У випадку $n > 2$ умова додатності всіх коефіцієнтів рівняння (8.7) є лише необхідною для цього.

◆ **Зауваження 8.4**

Можна показати, що характеристичне рівняння $\det(\lambda E_n - A) = 0$ матриці $A$ системи (8.6) має вигляд

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

де

$$a_1 = -\mathrm{tr}\, A,\quad a_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \ldots, a_n = (-1)^n \det A.$$

✍ Пропонуємо самостійно довести, що система (8.10) стійка (неасимптотично) тоді й лише тоді, коли виконується хоча б одна з *умов:*

① матриця $A$ має пару суто уявних коренів:

$$\mathrm{tr}\, A = 0,\quad \det\, A > 0; \qquad (8.14)$$

② одне власне число дорівнює нулю, а інше — від'ємне:

$$\mathrm{tr}\, A < 0,\quad \det\, A = 0; \qquad (8.15)$$

③ нуль є двократним власним числом, якому відповідають одновимірні клітини Жордана:

$$A = 0. \qquad (8.16)$$

Умови (8.13)—(8.16) вичерпують випадки, коли система (8.10) стійка.

Наступні дві теореми дають достатні умови стійкості лінійних систем, які мало відрізняються від лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.

**Теорема 8.6**
Нехай $\dot{x} = Ax$ ($A$ — стала матриця) — стійка система і $B(t)$ — неперервна на $[t_0, +\infty)$ $(n \times n)$-вимірна матриця така, що

$$\int_{t_0}^{+\infty} \| B(t) \| \, dt < +\infty. \tag{8.17}$$

Тоді система

$$\dot{x} = (A + B(t))x \tag{8.18}$$

також стійка.

Доведення

Різницю будь-яких двох розв'язків $x(t)$ $(x(t_0) = x_0)$ і $\tilde{x}(t)$ $(\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0)$ системи (8.18) можна записати у вигляді

$$\tilde{x}(t) - x(t) = e^{A(t-t_0)}(\tilde{x}_0 - x_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B(\tau)(\tilde{x}(\tau) - x(\tau)) \, d\tau. \tag{8.19}$$

За умовою $\| e^{A(t-t_0)} \| \le C \ \ \forall t \ge t_0$. Із рівності (8.19) маємо

$$\| \tilde{x}(t) - x(t) \| \le C \| \tilde{x}_0 - x_0 \| + \int_{t_0}^{t} C \| B(\tau) \| \| \tilde{x}(\tau) - x(\tau) \| \, d\tau.$$

Звідси, внаслідок леми Гронуолла—Беллмана (див. п. 3.3), дістаємо

$$\| \tilde{x}(t) - x(t) \| \le C e^{C\int_{t_0}^{t} \| B(\tau) \| d\tau} \| \tilde{x}_0 - x_0 \| \le$$

$$\le K \| \tilde{x}_0 - x_0 \| \ \ (t \ge t_0), \tag{8.20}$$

де $K = e^{C\int_{t_0}^{+\infty} \| B(\tau) \| d\tau}$.

Із нерівності (8.20) при $\| \tilde{x}_0 - x_0 \| < \delta = \varepsilon / K$ випливає, що $\| \tilde{x}(t) - x(t) \| < \varepsilon \ \forall t \ge t_0$, тобто всі розв'язки системи (8.18) стійкі.





❑ **Приклад 8.8**

*Застосовуючи теорему 8.6, покажемо, що розв'язки $y(t)$ скалярного рівняння $\ddot{y} + \left(a - \frac{1}{1+t^2}\right)y = 0$ $(a = \text{const} > 0)$ обмежені разом зі своїми похідними $\dot{y}(t)$ на $\mathbb{R}$.*

Оскільки рівняння не змінюється, якщо замінити $t$ на $-t$, достатньо розглянути випадок $t \ge 0$. Поклавши $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, перейдемо до еквівалентної системи

$$\dot{x} = (A + B(t))x, \tag{8.21}$$

де $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{1+t^2} & 0 \end{pmatrix}$, $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$. Власні значення матриці $A$ суто уявні: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a}$. Тому система $\dot{x} = Ax$ стійка. Оскільки $\int_0^{+\infty} \| B(t) \| \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, то згідно з теоремою 8.6 система (8.21) стійка. Тому всі її розв'язки (система лінійна) обмежені на $\mathbb{R}$. Отже, функції $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$ також обмежені на $\mathbb{R}$.

**Теорема 8.7 [14]**
Нехай $\dot{x} = Ax$ ($A$ — стала матриця) — асимптотично стійка система і $B(t)$ — неперервна на $[t_0, +\infty)$ $(n \times n)$-вимірна матриця така, що $\lim\limits_{t \to +\infty} \| B(t) \| = 0$. Тоді система (8.18) також асимптотично стійка.

## 8.3
## Стійкість за першим наближенням

Повернемося до питання про стійкість розв'язку $x = \varphi(t)$ нелінійної системи (8.1): $\dot{x} = f(t, x)$ у припущенні, що вектор-функція $f(t, x)$ двічі неперервно диференційовна в $G$. Як було показано, ця задача еквівалентна задачі дослідження на стійкість тривіального розв'язку (точки спокою) системи збурень (8.3):

$$\dot{y} = F(t, y) \quad (t \geq t_0), \tag{8.22}$$

де $F(t, y) \equiv F(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$, $F(t, 0) \equiv 0$ $(t \geq t_0)$. Одним з основних методів дослідження на стійкість точки спокою системи (8.22) є метод лінеаризації системи в околі цієї точки. Використовуючи формулу Тейлора першого порядку із залишковим членом у формі Лагранжа для кожної компоненти вектор-функції $F(t, y)$, дістанемо

$$F(t, y) = A(t)y + r(t, y), \tag{8.23}$$

де $r(t, y) = O(\| y(t) \|^2)$, $\| y \| \to 0$, а $A(t)$ — матриця Остроградського—Якобі:

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial y}(t, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)). \tag{8.24}$$

Лінеаризована система має вигляд

$$\dot{z} = A(t)z \quad (t \geq t_0). \tag{8.25}$$

Систему (8.25) називають *системою першого (лінійного) наближення* для системи (8.22) відносно тривіального розв'язку [для системи (8.1) — відносно розв'язку $\varphi(t)$]. Природно спочатку дослідити стійкість тривіального розв'язку лінеаризованої системи. Якщо таке дослідження вдалося здійснити, то далі виникає проблема відповідності між стійкістю тривіального розв'язку (8.22) і системи (8.25) — так звана *проблема стійкості за першим наближенням.* За яких умов зі стійкості системи (8.25) випливає стійкість тривіального розв'язку системи (8.22) [стійкість розв'язку $\varphi(t)$ системи (8.1)]? Це питання є основним у теорії стійкості за першим наближенням. Наступні теореми Ляпунова дають відповідь на поставлене запитання.

Припустимо, що асимптотичне співвідношення $r(t, y) = O(\| y \|^2)$, $\| y \| \to 0$ виконується рівномірно по $t \geq t_0$. Тоді існує така стала $K > 0$, що при $\| y \| < \delta$ справджується нерівність

$$\| r(t, y) \| \leq K \| y \|^2 \leq \alpha \| y \| \quad (t \geq t_0), \tag{8.26}$$

де $\alpha = \alpha(\delta) = K\delta$.





**Теорема 8.8**

Нехай матрицант $X(t, \tau)$ системи першого наближення (8.25) при будь-яких $\tau \geq t_0$ і $t \geq t_0$ задовольняє нерівність

$$\| X(t, \tau) \| \leq Re^{-\gamma(t-\tau)} \quad (R, \gamma = \text{const} > 0). \tag{8.27}$$

Тоді тривіальний розв'язок системи (8.22) асимптотично стійкий. Якщо $\| y(t_0) \| < \frac{\delta}{R}$, де $\delta < \frac{\gamma}{KR}$, то будь-який розв'язок $y(t)$ системи (8.22) задовольняє нерівність

$$\| y(t) \| \leq \delta e^{-(\gamma - \alpha R)(t - t_0)} \quad (t \geq t_0). \tag{8.28}$$

**Доведення**

Взявши функцію $r(t, y)$ за неоднорідність, запишемо векторне інтегральне рівняння, еквівалентне системі (8.22) [див. формулу (4.21)]:

$$y(t) = X(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)r(\tau, y(\tau))\,d\tau. \tag{8.29}$$

Нехай $y(t)$ — розв'язок системи (8.22), для якого $\| y(t) \| < \delta$ при $t_0 \leq t < T$. Для такого розв'язку маємо оцінку

$$\| y(t) \| \leq Re^{-\gamma(t - t_0)} \| y(t_0) \| +$$
$$+ R\alpha \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t - \tau)} \| y(\tau) \| \, d\tau \quad (t_0 \leq t < T). \tag{8.30}$$

Помноживши (8.30) на $e^{\gamma(t-t_0)}$ і позначивши $u(t) = e^{\gamma(t - t_0)} \| y(t) \|$, дістанемо

$$u(t) \leq R \| y(t_0) \| + R\alpha \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau. \tag{8.31}$$

З (8.31) за лемою Гронуолла—Беллмана (див. п. 3.3) маємо

$$u(t) \leq R \| y(t_0) \| e^{R\alpha(t - t_0)},$$

звідки

$$\| y(t) \| \le R \| y(t_0) \| e^{-(\gamma-\alpha R)(t-t_0)} \quad (t_0 \le t < T). \qquad (8.32)$$

Оскільки за умовою теореми $\| y(t_0) \| < \delta/R$, $\alpha R = K\delta R < \gamma$, то $-(\gamma - \alpha R) < 0$ і з (8.32) випливає, що

$$\| y(t) \| \le R \| y(t_0) \| e^{-(\gamma-\alpha R)(t-t_0)} < R \| y(t_0) \| < \delta \ (t_0 \le t < T). \ (8.33)$$

Переконаємося в тому, що нерівність (8.33) насправді виконується при всіх $t \ge t_0$. Від супротивного припустимо, що $T > t_0$ — перше значення аргументу, при якому $\| y(T) \| = \delta$. Перейшовши в (8.33) до границі при $t \to T - 0$, дістанемо суперечливу нерівність

$$\delta = \| y(T) \| \le R \| y(t_0) \| e^{-(\gamma-\alpha R)(T-t_0)} < R \| y(t_0) \| < \delta.$$

Отже,

$$\| y(t) \| \le \delta e^{-(\gamma-\alpha R)(t-t_0)} \quad (t \ge t_0)$$

і тривіальний розв'язок системи (8.22) [а заразом і розв'язок $x = \varphi(t)$ системи (8.1)] асимптотично стійкий.

◆ **Зауваження 8.5**

Дослідження на стійкість точки спокою системи першого наближення (8.25) [і, зокрема, встановлення для фундаментальної матриці цієї системи оцінки типу (8.27)] у загальному випадку є складною проблемою. Це пояснюється тим, що способу інтегрування лінійних систем із довільними змінними коефіцієнтами не існує.

Далі розглянемо випадок, коли матриця $A(t)$ у (8.23) стала, тобто коли система збурень (8.22) має вигляд

$$\dot{y} = Ay + r(t, y), \qquad (8.34)$$

де $A$ — дійсна стала $(n \times n)$-вимірна матриця, а функція $r(t, y)$ задовольняє умову (8.26)*. У цьому разі маємо таку систему першого наближення:

* Теореми 8.8—8.10 залишаються справедливими й у випадку, коли функція $r(t, y)$ задовольняє нерівність $\| r(t, y) \| \le K \| y \|^{1+\varepsilon}$ $(t \ge t_0, \varepsilon > 0)$.





$$\dot{z} = Az. \qquad (8.35)$$

Як відомо (див. п. 5.1), фундаментальною матрицею системи (8.35) є матрична експонента $e^{At} = T^{-1}\mathrm{diag}\left[e^{J_{m_1}(\lambda_1)t}, \ldots, e^{J_{m_s}(\lambda_s)t}\right]T$ $(\det T \ne 0)$, де

$$e^{J_{m_i}(\lambda_i)t} = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \ldots & \frac{1}{(m_i-1)!}t^{m_i-1} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{1}{(m_i-2)!}t^{m_i-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \ 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, s). \ (8.36)$$

Припустимо, що дійсні частини всіх власних чисел $\lambda_i$ матриці $A$ від'ємні: $\mathrm{Re}\,\lambda_i = \alpha_i < 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ і покладемо $-\gamma = \max\limits_{1 \le i \le s} \{\alpha_i\}$. Матрицю $e^{At}$ запишемо у вигляді $e^{At} = e^{-\gamma t}B(\gamma, t)$, де

$$B(\gamma, t) = e^{At}e^{\gamma t} = T^{-1}\mathrm{diag}\left[e^{J_{m_1}(\lambda_1+\gamma)t}, \ldots, e^{J_{m_s}(\lambda_s+\gamma)t}\right]T. \qquad (8.37)$$

Оскільки $\mathrm{Re}(\lambda_i + \gamma) = \alpha_i - (-\gamma) < 0$ $(i = 1, \ldots, s)$, то з (8.36), (8.37) випливає, що $\| B(\gamma, t) \| \to 0$, $t \to +\infty$ і, отже, справджується оцінка $\| B(\gamma, t) \| \le R(\gamma)$ $(t \ge 0)$. Звідси $\| e^{At} \| \le R(\gamma)e^{-\gamma t}$ $(t \ge 0)$. Тому матрицант $X(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ системи (8.35) задовольняє нерівність (8.27) зі сталою $R = R(\gamma)$:

$$\| X(t, \tau) \| \le R(\gamma)e^{-\gamma(t-\tau)} \quad (t \ge t_0, \tau \ge t_0). \qquad (8.38)$$

Отже, справджується такий наслідок теореми 8.8.

**Теорема 8.9**

Якщо дійсні частини всіх власних чисел сталої матриці $A$ системи першого наближення (8.35) від'ємні, то тривіальний розв'язок системи збурень (8.34) асимптотично стійкий.

Наступну теорему приймемо без доведення.

**Теорема 8.10 [34]**
Якщо серед власних значень матриці $A$ системи першого наближення (8.35) є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то тривіальний розв'язок системи (8.34) нестійкий.

◆ **Зауваження 8.6**

Якщо серед власних чисел матриці $A$ першого наближення (8.35) є хоча б одне з нульовою дійсною частиною, а решта мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок системи (8.34) може бути як стійким (асимптотично стійким), так і нестійким, тобто з факту стійкості або нестійкості системи першого наближення (8.35) не можна зробити висновок про стійкість (нестійкість) тривіального розв'язку системи збурень (8.34). У цьому випадку, який називають *критичним*, дослідження на стійкість за першим наближенням неможливе й потрібно використовувати властивості наступних (нелінійних) членів розкладу (8.23) або інші методи.

Проілюструємо застосування теорем про стійкість за першим наближенням на важливому прикладі автономних (динамічних) систем. *Автономною системою диференціальних рівнянь* у нормальній формі називають систему вигляду

$$\dot{x} = f(x). \tag{8.39}$$

Стосовно функції $f$ припустимо, що вона двічі неперервно диференційовна в деякій області $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Дослідження на стійкість розв'язку $x = \varphi(t)$ системи (8.39) зводяться до дослідження на стійкість тривіального розв'язку *неавтономної системи* (системи збурень)

$$\dot{y} = F(t, y), \tag{8.40}$$

де $F(t, y) \equiv f(y + \varphi(t)) - f(\varphi(t))$, $F(t, 0) \equiv 0$ $(t \geq t_0)$.

Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ називають *положенням рівноваги автономної системи* (8.39), якщо $f(x_0) = 0$. Якщо $x_0$ — положення рівноваги, то автономна система (8.39) має сталий розв'язок $x = x(t) \equiv x_0$ $(t \geq t_0)$.

Система збурень і система першого наближення для положення рівноваги $x = x_0$ мають відповідно такий вигляд:





$$\dot{y} = f(y + x_0) \ \text{ і } \ \dot{z} = Az,$$

де $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ — матриця Остроградського—Якобі вектор-функції $f(x)$, обчислена при $x = x_0$.

Із теорем 8.9 і 8.10 випливає таке *т в е р д ж е н н я*: *якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ *від'ємні, то положення рівноваги* $x = x_0$ *асимптотично стійке; якщо серед власних чисел матриці* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ *є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то положення рівноваги* $x = x_0$ *нестійке.*

❑ **П р и к л а д 8.9**

*Дослідимо на стійкість положення рівноваги математичного маятника з тертям [33]:*

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \sin y = 0 \quad (k > 0).$$

Для цього рівняння руху маятника зведемо до еквівалентної системи, поклавши $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 - 2kx_2, \end{aligned} \qquad \text{або} \quad \dot{x} = f(x),$$

де $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - 2kx_2 \end{pmatrix}$, $x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Положення рівноваги визначаються із системи рівнянь: $x_2 = 0$, $\sin x_1 + 2kx_2 = 0$. Звідси $x_1 = n\pi$, $x_2 = 0$ $(n \in \mathbb{Z})$. Унаслідок періодичності системи по $x_1$ із періодом $2\pi$ достатньо дослідити два положення рівноваги $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (нижнє положення рівноваги) і $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ (верхнє положення рівноваги).

Знайдемо матрицю Остроградського—Якобі функції $f(x)$:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -2k \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці $A$ для нижнього положення рівноваги має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

Оскільки $k > 0$, то дійсні частини коренів цього рівняння від'ємні. Тому нижнє положення рівноваги асимптотично стійке.

Для верхнього положення рівноваги дістаємо

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні й мають різні знаки. Тому верхнє положення рівноваги нестійке.

❑ **Приклад 8.10**

*Дослідимо на асимптотичну стійкість тривіальний розв'язок системи*

$$\dot{x}_1 = -\sin(x_1 + \alpha x_2), \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 + \ln(1 - x_2)$$

($\alpha$, $\beta$ — дійсні параметри).

Враховуючи стандартні розвинення

$$\sin u = u - \frac{1}{3!}u^3 + \ldots, \quad \ln(1+v) = v - \frac{1}{2}v^2 + \ldots,$$

запишемо лінеаризовану систему (систему першого наближення в околі точки $x_1 = x_2 = 0$):

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \alpha x_2, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 - x_2$$

з матрицею $A = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ \beta & -1 \end{pmatrix}$.

Система першого наближення асимптотично стійка тоді й лише тоді, коли виконуються умови (8.13): $\operatorname{tr} A = -2 < 0$, $\det A = 1 + \alpha\beta > 0$. Отже, якщо $\alpha\beta > -1$, то тривіальний розв'язок даної системи асимптотично стійкий. Зауважимо, що матрицю $A$ системи першого наближення можна знайти також за формулою

$$A = \left.\begin{pmatrix} -\cos(x_1 + \alpha x_2) & -\alpha\cos(x_1 + \alpha x_2) \\ \beta & -\dfrac{1}{1 - x_2} \end{pmatrix}\right|_{\substack{x_1 = 0 \\ x_2 = 0}}.$$

◆ **Зауваження 8.7**

О. М. Ляпуновим методи дослідження розв'язків диференціальних рівнянь на стійкість було поділено на два класи. До першого класу *(перший метод Ляпунова)* належить сукупність способів, які полягають у безпосередньому знаходженні загального або частинного розв'язків відповідних диференціальних рівнянь або систем. *Другий метод Ляпунова* являє собою сукупність способів дослідження на стійкість, не залежних від знаходження будь-яких розв'язків диференціальних рівнянь збуреного руху. Цей метод зводить задачу про стійкість збуреного руху до відшукання деяких функцій від $t$ і $x \in \mathbb{R}^n$ (функцій Ляпунова), які мають певні властивості. Далі викладено основи другого методу Ляпунова *(методу функцій Ляпунова)* для автономних систем.





## 8.4

## Дослідження на стійкість за методом функцій Ляпунова

Нехай $v = v(x)$ — скалярна функція змінної $x \in \mathbb{R}^n$, визначена й неперервно диференційовна в кулі $J_h = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h,\ h > 0\}$ і така, що $v(0) = 0$.

Функцію $v(x)$ називають *додатно-визначеною (від'ємно-визначеною)* в кулі $J_h$, якщо для всіх $x \in J_h$, $x \neq 0$ виконується нерівність $v(x) > 0$ ($v(x) < 0$). В обох цих випадках функцію $v(x)$ називають *знаковизначеною*.

Функцію $v(x)$ називають *додатно-сталою (від'ємно-сталою)* в кулі $J_h$, якщо для всіх $x \in J_h$ виконується нерівність $v(x) \geq 0$ ($v(x) \leq 0$). В обох цих випадках функцію $v(x)$ називають *знакосталою*.

Якщо функція $v(x)$ у кулі $J_h$ набуває як додатних, так і від'ємних значень, то її називають *знакозмінною* в $J_h$.

Розглянемо, наприклад, такі функції ($x \in \mathbb{R}^2$):

а) $v(x) = x_1^4 + x_2^4$; г) $v(x) = (x_1 - x_2)^2$;

б) $v(x) = -3x_1^2 - 4_2^2$; д) $v(x) = -x_1^2$;

в) $v(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^3$; е) $v(x) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.

У випадку а) функція $v(x)$ є додатно-визначеною в крузі $J_h$ при $\forall\ h > 0$; у випадку б) функція $v(x)$ від'ємно-визначена в крузі $J_h$ при $\forall\ h > 0$; в) $v(x) = x_1^2 + x_2^2(1 - 2x_2)$. Звідси випливає, що $v(x)$ додатно-визначена, наприклад, у крузі $x_1^2 + x_2^2 < 1/4$; г) $v(x)$ додатно-стала, оскільки

$v(x) \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^2$ і $v(x) = 0$ не лише при $x_1 = x_2 = 0$, а й у всіх точках прямої $x_1 - x_2 = 0$; д) $v(x)$ від'ємно-стала, оскільки вона перетворюється в нуль не лише при $x_1 = x_2 = 0$, а й у всіх точках прямої $x_1 = 0$ ($x_2 \in \mathbb{R}$); е) $v(x) = x_1x_2(x_1 + x_2)$. Звідси випливає, що $v(x)$ у будь-якому околі точки $x_1 = x_2 = 0$ може набувати значень різних знаків. Тому $v(x)$ є знакозмінною функцією.

Розглянемо тепер автономну систему рівнянь

$$\dot{x} = f(x), \tag{8.41}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1(x), ..., f_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$. Припустимо, що функція $f$ визначена й неперервна в кулі $J_h \subset \mathbb{R}^n$ при деякому $h > 0$, задовольняє умову Ліпшиця в $J_h$ і $f(0) = 0$, тобто система (8.41) має точку спокою.

Нехай $x(t)$ — деякий розв'язок системи (8.41). Уздовж цього розв'язку функція $v = v(x(t))$, як функція змінної $t$, неперервно диференційовна. Величину

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) \tag{8.42}$$

називають *похідною по $t$ від функції $v(x)$ унаслідок системи (8.41) [уздовж траєкторій системи (8.41)].*

У теорії стійкості вивчається поведінка функцій $v(x)$ уздовж траєкторій досліджуваної системи диференціальних рівнянь, щоб за допомогою добутої інформації зробити висновок про стійкість або нестійкість розв'язку. Функції $v(x)$, які при цьому використовуються, називають *функціями Ляпунова.*

**Теорема 8.11**
**(Ляпунова про стійкість)**

Якщо для системи рівнянь (8.41) існує знаковизначена в кулі $J_h$ функція $v(x)$, похідна якої $dv/dt$ унаслідок (8.41) є знакосталою функцією зі знаком, протилежним знаку $v(x)$, або тотожно дорівнює нулю, то точка спокою системи (8.41) стійка за Ляпуновим.





**Доведення**

Нехай $v(x)$ — додатно-визначена функція, $\varepsilon > 0$ — довільне додатне число ($\varepsilon < h$), $l = \min\limits_{\|x\|=\varepsilon} v(x) > 0$. Унаслідок неперервності $v(x)$ знайдеться таке $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$), що $v(x) < l$ при $\|x\| < \delta$. Розглянемо будь-який розв'язок $x(t)$ системи (8.41) такий, що $\|x(t_0)\| = \|x_0\| < \delta$, і покажемо, що $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всіх $t \geq t_0$. Від супротивного припустимо: існує таке $t^* > t_0$, що $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [t_0, t^*)$ і $\|x(t^*)\| = \varepsilon$. З умови теореми випливає, що функція $v(x(t))$ при $t \in [t_0, t_*)$ є незростаючою функцією $t$. Тому $v(x(t^*)) \leq v(x(t_0)) = v(x_0) < l$, що неможливо, оскільки $\|x(t^*)\| = \varepsilon$ і $v(x(t^*)) \geq l$ згідно з означенням числа $l$. Отже, $\|x(t)\| < \varepsilon\ \forall\ t \geq t_0$ і точка спокою системи (8.41) стійка за Ляпуновим.

◆ **Зауваження 8.8**

Якщо $v(x)$ — від'ємно-визначена функція, то як функцію Ляпунова можна взяти додатно-визначену функцію $u(x) = -v(x)$.

**Наслідок 8.3**

*Якщо система (8.41) має знаковизначений в околі точки спокою перший інтеграл, то точка спокою стійка за Ляпуновим. Справді, функцією Ляпунова в цьому випадку може бути сам перший інтеграл, похідна якого внаслідок системи тотожно дорівнює нулю згідно з означенням першого інтеграла (див. п. 1.3).*

❑ **Приклад 8.11**

*Розглянемо систему рівнянь* $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -f(x_1)$ [$f(0) = 0$, $x_1 f(x_1) > 0$ *у достатньо малому околі точки* $x_1 = 0$].

Система має перший інтеграл $\frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f(\tau)\,d\tau = c$. Справді,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f(\tau)\,d\tau\right) = x_2\dot{x}_2 + f(x_1)\dot{x}_1 = x_2(-f(x_1)) + f(x_1)x_2 \equiv 0.$$

Крім того, внаслідок умови $x_1 f(x_1) > 0$ при $x_1 \neq 0$ маємо $\int_0^{x_1} f(\tau)\,d\tau > 0$ і функція $v(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f(\tau)\,d\tau$ додатно-визначена. Тому, згідно з теоремою 8.11, точка спокою системи стійка.

**❑ Приклад 8.12**

*Дослідимо на стійкість положення рівноваги системи*

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -k \sin x_1 \quad (k = \text{const} > 0).$$

Із системи $x_2 = 0$, $-k \sin x_1 = 0$ маємо положення рівноваги: $x_1 = n\pi$, $x_2 = 0$ ($n \in \mathbb{Z}$). Унаслідок періодичності правих частин по $x_1$ із періодом $2\pi$ достатньо розглянути два положення рівноваги: $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ і $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. У першому випадку матриця $A$ системи першого наближення набуває вигляду

$$A = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\substack{x_1=\pi \\ x_2=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці $\lambda^2 - k = 0$ має дійсні корені різних знаків і, отже, положення рівноваги $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ нестійке. У другому випадку

$$A = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

і характеристичне рівняння $\lambda^2 + k = 0$ має суто уявні корені. Критерій стійкості за першим наближенням у цьому випадку не дає відповіді на питання про стійкість або нестійкість точки спокою $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Використавши розв'язання прикладу 8.11, розглянемо додатно-визначену в околі точки спокою функцію (перший інтеграл системи) $v(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + k(1 - \cos x_1)$. Дістаємо:

$$\frac{dv}{dt} = x_2\dot{x}_2 + k \sin x_1 \cdot \dot{x}_1 = -kx_2 \sin x_1 + kx_2 \sin x_1 \equiv 0.$$

Тому точка спокою стійка за Ляпуновим.

**Теорема 8.12**
**(Ляпунова про асимптотичну стійкість)**

Якщо для системи рівнянь (8.41) існує знаковизначена в кулі $J_h$ функція $v(x)$, похідна якої $dv/dt$ унаслідок системи (8.41) є також знаковизначеною функцією зі знаком, протилежним знаку $v(x)$, то точка спокою системи (8.41) асимптотично стійка.





**Доведення**

Нехай функція $v(x)$ додатно-визначена в кулі $J_h$. Далі використаємо таку властивість знаковизначених функцій: якщо $\|x\| \le h_1 < h$, то умова $\|x\| \to 0$ еквівалентна умові $v(x) \to 0$. За теоремою 8.11 точка спокою $x = 0$ стійка за Ляпуновим. Тому існує таке $\Delta > 0$, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ із початковою умовою $x(t_0) = x_0$ ($\|x_0\| < \Delta$) виконується нерівність $\|x(t)\| \le h_1 < h$ при всіх $t \ge t_0$. Для доведення твердження теореми достатньо показати, що $v(x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$, якщо $\|x_0\| < \Delta$.

Від супротивного припустимо, що $\lim\limits_{t \to +\infty} v(x(t)) = \alpha > 0$. Тоді існує таке $h_0 > 0$, що при всіх $t \ge t_0$ виконується нерівність $0 < h_0 \le \le \|x(t)\| \le h_1 < h$. За умовою теореми $\frac{dv}{dt} = -u(x)$, де $u(x)$ — додатно-визначена функція. Нехай $m = \min\limits_{h_0 \le \|x\| \le h_1} u(x) > 0$. Тоді маємо нерівність $\frac{dv}{dt} \le -m \ (t \ge t_0)$, інтегруючи яку в межах від $t_0$ до $t$, дістанемо $v(x(t)) - v(x_0) \le -m(t - t_0)$ або $v(x(t)) \le v(x_0) - m(t - t_0)$ $(t \ge t_0)$, що суперечить умові додатної визначеності функції $v(x)$. Отже, $\lim\limits_{t \to +\infty} v(x(t)) = 0$, а тому й $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$.

**◆ Зауваження 8.9**

Умови теореми 8.12 можна послабити. Справедливе таке твердження [34]: нехай виконуються умови теореми 8.11 і множина $N = \left\{x \mid \frac{dv}{dt} = 0\right\}$ не містить цілком повних траєкторій системи (8.41), крім точки спокою $x = 0$. Тоді точка спокою системи 8.41 асимптотично стійка.

**Теорема 8.13**
**(Ляпунова про нестійкість)**

Якщо для системи (8.41) існує функція $v(x)$, похідна якої $dv/dt$ унаслідок системи (8.41) є знаковизначеною, а сама функція $v(x)$ у будь-якому околі точки $x = 0$ не є знакосталою зі знаком, протилежним знаку $dv/dt$, то точка спокою системи (8.41) нестійка.

**Доведення**

Нехай $dv/dt = u(x)$ — додатно-визначена функція в кулі $J_h$. Оскільки $v(x)$ неперервно диференційовна, то вона обмежена при

$\|x\| \le h_1 < h$. Нехай $\delta > 0$ — довільне мале число. Внаслідок умови теореми існує точка $x_0$ $(0 < \|x_0\| < \delta)$ така, що $v(x_0) = \alpha > 0$. Нехай $x(t)$ — розв'язок системи (8.41) із початковою умовою $x(t_0) = x_0$. Оскільки за умовою теореми функція $v(x(t))$ монотонно зростає, то $v(x(t)) \ge v(x(t_0)) = v(x_0) = \alpha > 0$ $(t \ge t_0)$. Покажемо, що при деякому значенні $t = t^* > t_0$ виконується нерівність $\|x(t^*)\| > h_1$. Від супротивного припустимо, що $\|x(t)\| \le h_1$ при всіх $t \in [t_0, +\infty)$. Тоді [внаслідок умови $v(x(t)) \ge \alpha > 0$ $(t \ge t_0)$] існує таке $h_0 < h_1$, що $0 < h_0 \le \|x(t)\| \le h_1$ при всіх $t \ge t_0$. Покладемо $m = \min\limits_{h_0 \le \|x\| \le h_1} u(x) > 0$. Тоді $dv/dt \ge m$ при всіх $t \ge t_0$. Інтегруючи останню нерівність у межах від $t_0$ до $t$, маємо $v(x(t)) - v(x_0) \ge m(t - t_0)$, або $v(x(t)) \ge v(x_0) + m(t - t_0)$, що суперечить обмеженості функції $v(x)$ при $\|x\| < h_1$. Оскільки $\delta > 0$ будь-яке і $h_1 > 0$ фіксоване, то з нерівності $\|x(t^*)\| > h_1$ випливає нестійкість точки спокою системи (8.41).

◆ **Зауваження 8.10**

Умову знаковизначеності похідної $dv/dt$ у теоремі 8.13 можна послабити. Справедливе твердження [34] *(теорема Четаєва про нестійкість)*. Нехай у деякому околі точки $x = 0$ визначена неперервно диференційовна функція $v(x)$ із такими властивостями: 1) в як завгодно малій кулі $J_h$ існує область $D_+$ (рис. 8.3) така, що точка $x = 0$ належить межі $\partial D_+$ області $D_+$, $v(x) > 0$ $\forall\, x \in D_+$, $v(x) = 0$ $\forall\, x \in \partial D_+ \cap J_h$; 2) $dv/dt > 0$ $\forall\, x \in D_+$. Тоді точка спокою системи (8.41) нестійка.

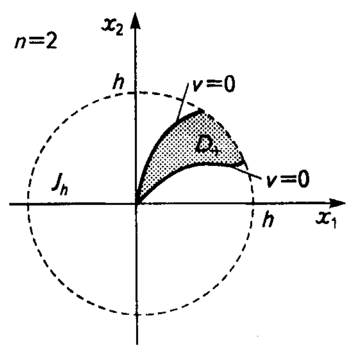


**Рис. 8.3**

Так, наприклад, для системи $\dot{x}_1 = x_2^5 + x_1^7$, $\dot{x}_2 = x_1^5 + x_2^7$ функція $v(x) = x_1^6 - x_2^6$ задовольняє умови теореми Четаєва: 1) $v(x) > 0$ при $|x_1| > |x_2|$; 2) $dv/dt = 6x_1^5(x_2^5 + x_1^7) - 6x_2^5(x_1^5 + x_2^7) = 6(x_1^{12} - x_2^{12}) > 0$ при $|x_1| > |x_2|$. За множину $D_+$ можна взяти $D_+ = \{x \mid -x_1 < x_2 < x_1,\ x_1 > 0\}$. Тому точка спокою даної системи нестійка.

❑ **Приклад 8.13**

*Дослідимо на стійкість точку спокою таких систем:*

а) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1$; б) $\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3,\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3$;

в) $\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3,\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^3$.





Оскільки система а) лінійна зі сталими коефіцієнтами, то достатньо знайти власні числа матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ цієї системи: $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$. Отже, точка спокою стійка неасимптотично. Система а) є системою першого наближення у випадках б) і в), тому дослідження на стійкість за першим наближенням у цих випадках неможливе.

Застосуємо метод функцій Ляпунова. Для всіх трьох випадків виберемо додатно-визначену функцію $v(x) = x_1^2 + x_2^2$. У випадку а) маємо $dv/dt = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1) \equiv 0$ і за теоремою 8.11 точка спокою стійка за Ляпуновим. У випадку б): $dv/dt = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4)$ — від'ємно-визначена функція. Отже, за теоремою 8.12 точка спокою стійка асимптотично. У випадку в): $dv/dt = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_2 + x_1^3) + 2x_2(-x_1 + x_2^3) = 2(x_1^4 + x_2^4)$ — додатно-визначена функція. За теоремою 8.13 точка спокою системи нестійка.

❑ **Приклад 8.14**

*Дослідимо на стійкість тривіальний розв'язок скалярного рівняння*

$$\ddot{y} + g(y)\dot{y} + f(y) = 0, \tag{8.43}$$

де $f(0) = 0$, $yf(y) > 0$ у достатньо малому околі точки $y = 0$, $g(y) > 0$ при $|y| < a$.

Еквівалентна система рівнянь має вигляд $(x_1 = y,\ x_2 = \dot{y})$

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -f(x_1) - g(x_1)x_2. \tag{8.44}$$

Функцію Ляпунова $v(x)$ виберемо як у прикладі 8.11: $v(x) = \dfrac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f(\tau)\,d\tau$ [$v(x)$ — додатно-визначена функція в околі точки $x_1 = x_2 = 0$]. Знайдемо похідну $dv/dt$ унаслідок системи:

$$\frac{dv}{dt} = x_2(-f(x_1) - g(x_1)x_2) + f(x_1)x_2 = -g(x_1)x_2^2.$$

Оскільки $g(x_1) > 0$, то функція $dv/dt$ від'ємно-стала. Застосуємо зауваження 8.9 до теореми 8.12. Множина $N = \left\{x : \dfrac{dv}{dt} = 0\right\} = \{x \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 = 0\}$ не містить цілком повних траєкторій системи, крім точки $x_1 = x_2 = 0$, оскільки при $x_2 = 0$ з другого рівняння маємо $0 = \dot{x}_2 = -f(x_1) \ne 0$ $(x_1 \ne 0)$.

Тому точка спокою системи (8.44) асимптотично стійка, а отже, асимптотично стійкий і тривіальний розв'язок рівняння (8.43).

❑ **Приклад 8.15**

*Дослідимо на стійкість точку спокою системи*

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = \sin^2 x_1.$$

Як функцію Ляпунова візьмемо функцію $v(x) = x_1 x_2$. Маємо

$$dv/dt = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = x_2^2 + x_1 \sin^2 x_1 > 0$$

$$\forall x \in D_+ = \{x : 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1\}.$$

Оскільки $v(x) > 0 \ \forall \ x \in D_+$, то за теоремою Четаєва точка спокою системи нестійка.

❑ **Приклад 8.16**

*Дослідимо на стійкість точку спокою системи*

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_2, \ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^5.$$

Система рівнянь першого наближення має вигляд $\dot{x}_1 = 2x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$. Відповідне характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2 = 0$ має суто уявні корені, й тому дослідження на стійкість за першим наближенням неможливе. Застосуємо метод функцій Ляпунова. Функцію Ляпунова шукатимемо у вигляді $v(x) = A(x_1) + B(x_2)$ (аналогічний вигляд мають праві частини рівнянь системи), де $A(x_1)$, $B(x_2)$ — неперервно диференційовні функції такі, що $A(0) = B(0) = 0$. Знайдемо похідну $dv/dt$ унаслідок системи:

$$\frac{dv}{dt} = A'(x_1)(-x_1^3 + 2x_2) + B'(x_2)(-x_1 - x_2^5).$$

Функції $A$ і $B$ доберемо так, щоб похідна $dv/dt$ мала ту саму структуру, що й функція $v$. Для цього повинна виконуватися рівність

$$2A'(x_1)x_2 - B'(x_2)x_1 = 0, \text{ або } \frac{2x_2}{B'(x_2)} = \frac{x_1}{A'(x_1)}.$$

Остання рівність можлива, якщо вирази $\dfrac{2x_2}{B'(x_2)}$ і $\dfrac{x_1}{A'(x_1)}$ сталі, наприклад дорівнюють 1/2. З рівностей $B'(x_2) = 4x_2$, $A'(x_1) = 2x_1$ дістаємо





$B(x_2) = 2x_2^2$, $A(x_1) = x_1^2$, тобто $v(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ — додатно-визначена функція. Її похідна $\dfrac{dv}{dt} = -2x_1^4 - 4x_2^6$ — від'ємно-визначена функція. Отже, точка спокою даної системи асимптотично стійка.

Розглянутий у прикладі 8.16 метод побудови функції Ляпунова $v(x)$ називають *методом відокремлення змінних.*

✍ Пропонуємо самостійно застосувати метод відокремлення змінних побудови функції Ляпунова для системи

$$\dot{x}_1 = ax_1^3 + bx_2, \ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2^5$$

і дослідити на стійкість точку спокою цієї системи ($a$, $b$, $c$, $d$ — дійсні параметри).

## 8.5

## Фазова площина

Тут розглянемо поведінку на фазовій площині $\mathbb{R}^2$ фазових кривих (траєкторій) автономної системи рівнянь

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \ \ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2), \tag{8.45}$$

де $P(x_1, x_2)$, $Q(x_1, x_2)$ — неперервно диференційовні в деякій області (або на $\mathbb{R}^2$) функції. Система (8.45) може мати лише три типи фазових кривих: точка, замкнена крива *(цикл)* і незамкнена крива. Розв'язок, траєкторією якого є точка $(x_{10}, x_{20})$ (положення рівноваги), є сталим: $x_1(t) = x_{10}$, $x_2(t) = x_{20}$ ($\forall \ t \in \mathbb{R}$). Замкненій кривій відповідає періодичний розв'язок, незамкненій — неперіодичний.

Основною задачею якісного дослідження системи (8.45) є одержання так званого *фазового портрета* системи (картини розбиття фазової площини $\mathbb{R}^2$ на траєкторії), тобто встановлення топологічної структури цього розбиття. Під *топологічною структурою* розуміють усі ті властивості траєкторій системи (8.45), які залишаються інваріантними (незмінюваними) при топологічному, тобто взаємно однозначному і взаємно неперервному, відображенні площини в себе.

Щоб побудувати фазовий портрет системи (8.45), треба знати поведінку траєкторій в околах так званих *особливих траєкторій*: положень рівноваги, граничних циклів і деяких незамкнених кривих (сепаратрис), які відділяють сім'ї траєкторій одну від одної. *Граничним циклом* системи (8.45) називають такий цикл, деякий окіл якого цілком заповнений траєкторіями, по яких фазова точка $(x(t), y(t))$ необмежено наближається до нього при $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$.

Розглянемо спочатку випадок, коли система (8.45) є лінійною й однорідною:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \quad (\dot{x} = Ax), \tag{8.46}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — дійсна стала матриця, $x = (x_1, x_2)^T$. Точка $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ є точкою спокою системи (8.46).

Оскільки $A$ — дійсна матриця, то можливі такі три випадки: 1) власні числа матриці $A$: $\lambda_1$ і $\lambda_2$ дійсні й різні; 2) власні числа $\lambda_1$ і $\lambda_2$ комплексно-спряжені (різні); 3) матриця $A$ має лише одне дійсне власне число.

Розглянемо ці випадки.

**I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ дійсні.** Матриця $A$ в цьому разі має два лінійно незалежних власних вектори $h_1$ і $h_2$, які відповідають власним числам $\lambda_1$ і $\lambda_2$ й утворюють базис на площині. Загальний розв'язок системи (8.46) має вигляд

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2. \tag{8.47}$$

Позначивши через $y_1$, $y_2$ координати вектора $x$ у базисі $h_1$, $h_2$, із (8.47) дістанемо

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{8.48}$$

Достатньо дослідити поведінку траєкторій при $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, оскільки, внаслідок (8.48), фазовий портрет симетричний відносно координатних осей $Oy_1$, $Oy_2$.

1. Нехай $\lambda_1\lambda_2 > 0$ ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$).

а) *Якщо* $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2$), то при $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ маємо $y_1 \to 0$, $y_2 \to 0$ при $t \to +\infty$ і, крім того, $\dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{c_2\lambda_2}{c_1\lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Це означає, що при $t \to +\infty$ траєкторії «входять» у початок координат, дотикаючися до осі $Oy_1$ (напрямленої вздовж власного вектора $h_1$, який





відповідає меншому за модулем власному числу $\lambda_1$). При $c_1 = c_2 = 0$ маємо точку спокою $x = 0$ ($y_1 = y_2 = 0$). При $c_1 = 0$, $c_2 > 0$ траєкторія збігається з піввіссю осі $Oy_1$. При $c_2 = 0$, $c_1 > 0$ траєкторія збігається з піввіссю осі $Oy_2$. У цьому разі точку спокою називають *стійким вузлом*. Розміщення траєкторій в околі стійкого вузла показано на рис. 8.4. Стрілками позначено напрям руху точки вздовж траєкторії при зростанні параметра $t$.

б) *Якщо* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2$), то при $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ маємо $y_1 \to +\infty$, $y_2 \to +\infty$, $t \to +\infty$. Розміщення траєкторій таке саме, як і у випадку а), але напрям руху точки вздовж траєкторії при зростанні параметра $t$ змінюється на протилежний. У цьому разі точку спокою $x = 0$ називають *нестійким вузлом* (рис. 8.5).

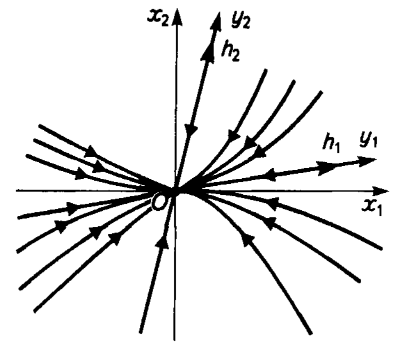


Рис. 8.4

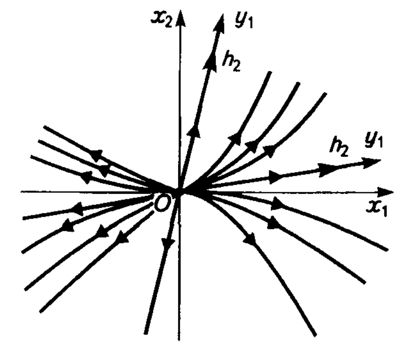


Рис. 8.5

2. Нехай $\lambda_1\lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$). Тоді при $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ маємо $y_1 \to 0$, $y_2 \to +\infty$ при $t \to +\infty$, $y_1 \to +\infty$, $y_2 \to 0$ при $t \to -\infty$. У цьому випадку точку спокою $x = 0$ називають *сідлом* (рис. 8.6). Очевидно, сідло є нестійким положенням рівноваги.

Якщо $c_1 = 0$, $c_2 > 0$, то $y_1 = 0$, $y_2 \to +\infty$ при $t \to +\infty$; якщо $c_2 = 0$, $c_1 > 0$, то $y_2 = 0$, $y_1 \to 0$ при $t \to +\infty$ (ці прямолінійні траєкторії — промені — називають «вусами», або *сепаратрисами*, сідла). Ще дві сепаратриси дістанемо при $c_1 = 0$, $c_2 < 0$, $c_2 = 0$, $c_1 < 0$.

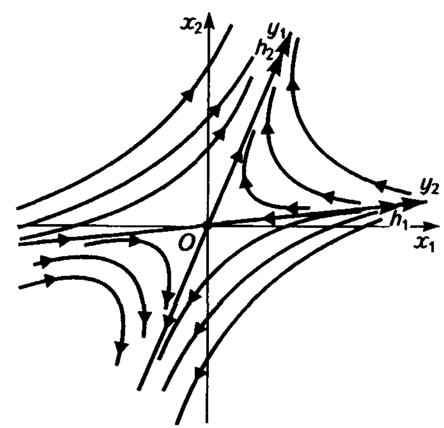


Рис. 8.6

3. Нехай $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Тоді загальний розв'язок системи (8.46) має вигляд $x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 h_2$, де $h_1$, $h_2$ — лінійно незалежні власні вектори матриці $A$, які відповідають власним числам $\lambda_1$ і $\lambda_2 = 0$. Координати $y_1$, $y_2$ вектора $x$ у базисі $h_1$, $h_2$ мають вигляд $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = c_2$. Траєкторіями в цьому разі є півпрямі, паралельні осі $Oy_1$. Всі точки осі $Oy_2$ є положеннями рівноваги (рис. 8.7).

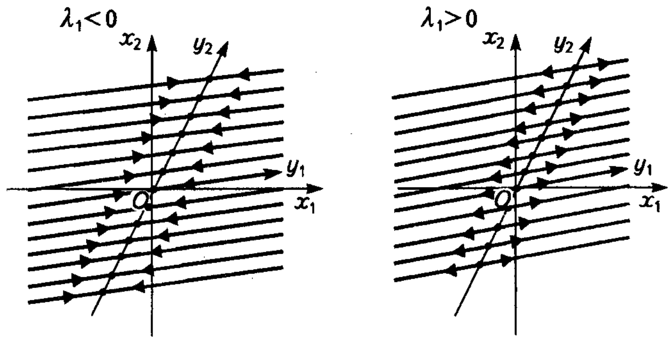


Рис. 8.7

II. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$) **комплексно-спряжені.** В цьому випадку загальний розв'язок системи (8.46) у комплексній формі має вигляд

$$z = c_1 e^{\lambda_1 t} h + c_2 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{h}, \qquad (8.49)$$

де $c_1$, $c_2$ — довільні (комплексні) сталі, $h$, $\bar{h}$ — відповідні лінійно незалежні (комплексні) власні вектори матриці $A$. Відокремлюючи в (8.49) дійсну частину, дістанемо дійсний розв'язок

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(c_1 + \bar{c}_2) e^{\lambda_1 t} h + \frac{1}{2}(\bar{c}_1 + c_2) e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{h},$$

або

$$x = c e^{\lambda_1 t} h + \bar{c} e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{h}, \qquad (8.50)$$

де $c = \frac{1}{2}(c_1 + \bar{c}_2)$.





Нехай $c = re^{i\varphi}$. Тоді з (8.50) маємо ($h = \frac{1}{2}(h_1 - ih_2)$, $\bar{h} = \frac{1}{2}(h_1 + ih_2)$):

$$x = re^{i\varphi} e^{(\alpha + i\beta)t} \frac{1}{2}(h_1 - ih_2) + re^{-i\varphi} e^{(\alpha - i\beta)t} \frac{1}{2}(h_1 + ih_2) =$$

$$= re^{\alpha t} \frac{e^{i(\varphi + \beta t)} + e^{-i(\varphi + \beta t)}}{2} h_1 - ire^{\alpha t} \frac{e^{i(\varphi + \beta t)} - e^{-i(\varphi + \beta t)}}{2} h_2.$$

Отже, $x = re^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) h_1 + re^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) h_2$, де $h_1$, $h_2$ — лінійно незалежні дійсні вектори, $r$, $\varphi$ — довільні сталі. Позначивши через $y_1$, $y_2$ координати вектора $x$ у базисі $h_1$, $h_2$, дістанемо

$$y_1 = re^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi), \quad y_2 = re^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi).$$

Якщо $r = 0$, то маємо точку спокою. Якщо $r > 0$, то при $\alpha < 0$ $y_1 \to 0$, $y_2 \to 0$ при $t \to +\infty$, $y_1^2 + y_2^2 \to +\infty$ при $t \to -\infty$. У цьому разі точку спокою $x = 0$ називають *стійким фокусом.* Якщо $\alpha > 0$, то при $r > 0$ $y_1^2 + y_2^2 \to +\infty$ при $t \to +\infty$, $y_1 \to 0$, $y_2 \to 0$ при $t \to -\infty$. У цьому разі точку спокою називають *нестійким фокусом.* У випадку фокуса траєкторії мають форму спіралей. Розміщення траєкторій в околі стійкого й нестійкого фокусів показано на рис. 8.8 і 8.9 відповідно.

Якщо $\alpha = 0$, то $y_1^2 + y_2^2 = r^2$ і траєкторії в загальному випадку є еліпсами (зокрема – колами) з центрами в початку координат. Точку спокою $x = 0$ у цьому разі називають *центром* (рис. 8.10). Очевидно, центр є стійким положенням рівноваги системи (8.46).

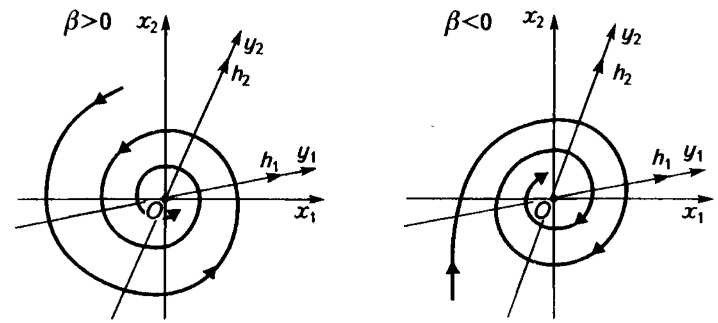


Рис. 8.8

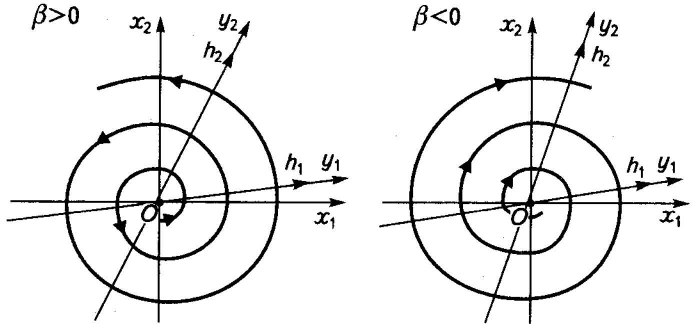


Рис. 8.9

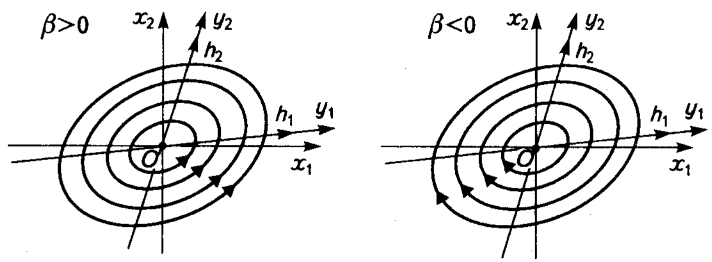


Рис. 8.10

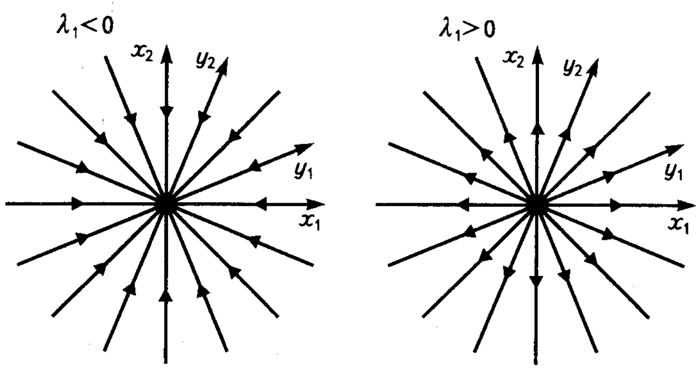


Рис. 8.11



**III. Матриця $A$ має одне дійсне власне число $\lambda_1$.** 1. Якщо матриця $A$ є матрицею простої структури (власні вектори $h_1$ і $h_2$, які відповідають власному числу $\lambda_1$, лінійно незалежні), то загальний розв'язок системи (8.46) має вигляд $x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_1 t} h_2$, звідки для координат $y_1$, $y_2$ вектора $x$ у базисі $h_1$, $h_2$ дістаємо $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t}$. Тому при $\lambda_1 \neq 0$ траєкторіями є промені, які виходять із початку координат, або точка спокою $y_1 = y_2 = 0$ (при $c_1 = c_2 = 0$). У цьому випадку точку спокою називають *дикритичним вузлом* (рис. 8.11), стійким при $\lambda_1 < 0$ і нестійким при $\lambda_1 > 0$.

При $\lambda_1 = 0$ маємо $y_1 = c_1$, $y_2 = c_2$, тобто кожна точка площини є стійким положенням рівноваги. При цьому матриця $A$ є нульовою: $A = 0$.

2. Якщо матриця $A$ не є матрицею простої структури (власному числу $\lambda_1$ відповідає лише один власний вектор $h_1$), то загальний розв'язок системи (8.46) можна записати у вигляді

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_1 t} h_2,$$

де $h_1$, $h_2$ — лінійно незалежні вектори.

Для координат $y_1$, $y_2$ вектора $x$ у базисі $h_1$, $h_2$ маємо $y_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t}$.

Якщо $\lambda_1 < 0$, то при $c_2 = 0$ траєкторією є піввісь $y_1 > 0$ ($c_1 > 0$), або піввісь $y_1 < 0$ ($c_1 < 0$), або точка спокою $y_1 = y_2 = 0$ ($c_1 = 0$). Якщо $c_2 \neq 0$, то $y_1 \to 0$, $y_2 \to 0$ при $t \to +\infty$, $y_1 \to +\infty$, $y_2 \to +\infty$ при $t \to -\infty$ ($c_2 > 0$), $y_1 \to -\infty$, $y_2 \to -\infty$ при $t \to -\infty$ ($c_2 < 0$). У цьому випадку точку спокою $x = 0$ називають *стійким виродженим вузлом*. При $\lambda_1 > 0$ маємо *нестійкий вироджений вузол* (рис. 8.12).

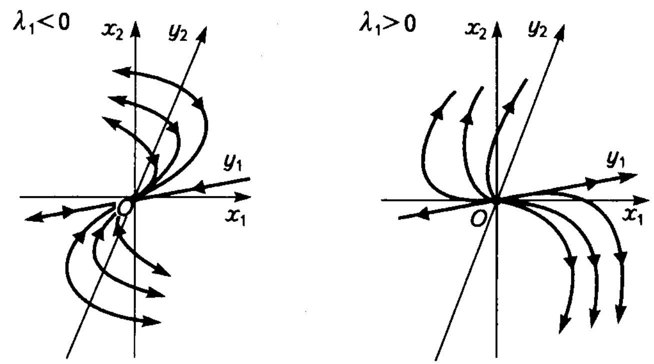


Рис. 8.12

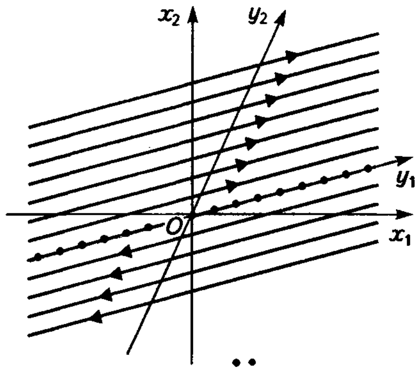


Рис. 8.13

Оскільки при $c_2 \neq 0$ $\dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{c_2\lambda_1}{c_2 + (c_1 + c_2 t)\lambda_1} \to 0$ при $t \to +\infty$, то, «входячи» в початок координат, траєкторії дотикаються до осі $Oy_1$.

При $\lambda_1 = 0$ маємо $y_1 = c_1 + c_2 t$, $y_2 = c_2$. Якщо $c_2 \neq 0$, то траєкторіями є прямі, паралельні осі $Oy_1$. Якщо $c_2 = 0$, то всі точки осі $Oy_1$ є положеннями рівноваги (рис. 8.13).

Зв'язок між власними числами матриці $A$ й типами точки спокою системи (8.46) можна зобразити діаграмою, якщо записати характеристичне рівняння матриці $A$ у вигляді $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$ $(\sigma = -\operatorname{tr} A = -(a_{11} + a_{22}),\ \Delta = \det A)$ і розглянути площину з прямокутними декартовими координатами $\Delta$, $\sigma$. Позначимо на цій площині області, які відповідають різним типам точки спокою (рис. 8.14).

Точкам першої чверті ($\Delta > 0$, $\sigma > 0$) відповідають асимптотично стійкі положення рівноваги — стійкі вузли, стійкі (дикритичні або ви-

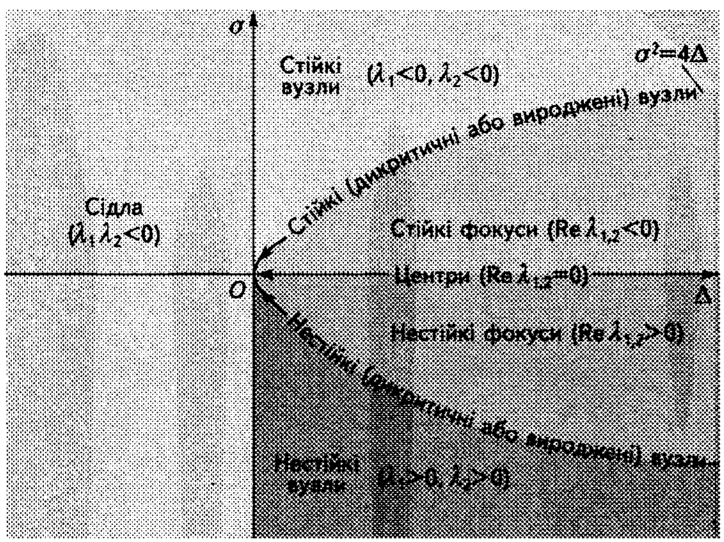


Рис. 8.14





роджені) вузли, стійкі фокуси; точкам другої і третьої чверті ($\Delta < 0$) відповідають нестійкі положення рівноваги — сідла; точкам четвертої чверті ($\Delta > 0$, $\sigma < 0$) відповідають нестійкі положення рівноваги — нестійкі фокуси, нестійкі (дикритичні або вироджені) вузли, нестійкі вузли. Точкам спокою типу «фокус» відповідають точки на площині $(\Delta, \sigma)$, які лежать між вітками параболи $\sigma^2 = 4\Delta : \sigma^2 < 4\Delta$, $\sigma \neq 0$. Точкам півосі $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ відповідають стійкі точки спокою типу «центр». Точкам півосі $\Delta = 0$, $\sigma > 0$ відповідають стійкі положення рівноваги, а точкам півосі $\Delta = 0$, $\sigma < 0$ — нестійкі положення рівноваги (п. I.3). У випадку $\Delta = 0$, $\sigma = 0$ при $A = 0$ кожна точка площини є стійким положенням рівноваги системи (8.46), при $A \neq 0$ точка спокою є нестійкою (пп. III.1, III.2).

Як приклад розглянемо рівняння вільних пружних коливань (див. дод. 3)

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

де $\omega > 0$ — власна частота, $k \geq 0$ — коефіцієнт тертя.

Еквівалентна система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - 2ky \end{aligned} \qquad \left( A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2k \end{pmatrix} \right).$$

Для власних чисел матриці $A$ — коренів характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0 : \lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$ — можливі такі випадки:

1) $k > \omega$ $(\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2)$;

2) $k = \omega$ $(\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0)$;

3) $k < \omega$ $(\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \beta \neq 0,\ \alpha = -k < 0)$.

У випадку 1) маємо точку спокою типу «стійкий вузол». Коливань немає, всі розв'язки згасаючі. У випадку 2) матриця $A$ має лише один власний вектор $h = (1, \lambda)^T$, і, отже, точка спокою є стійким виродженим вузлом (коливань немає, всі розв'язки згасаючі). У випадку 3) загальний розв'язок можна записати у вигляді $x = Ae^{-kt}\cos(\beta t + \varphi)$, де $A$ — *амплітуда*, $\varphi$ — *початкова фаза*, $\beta = \sqrt{\omega^2 - k^2}$ — *частота коливань*. Якщо $k > 0$, то маємо коливання, які згасають при $t \to +\infty$

(точка спокою – стійкий фокус). Якщо $k = 0$ (тертя немає), то відбуваються гармонічні коливання (точка спокою — центр).

Щоб побудувати фазові криві системи (8.46) у випадку вузла, сідла й виродженого вузла, треба спочатку знайти ті прямолінійні траєкторії, які лежать на прямих, що проходять через початок координат. Ці прямі, як було показано, завжди напрямлені вздовж власних векторів матриці $A$.

У випадку вузла фазові криві дотикаються до тієї прямолінійної траєкторії, яка напрямлена вздовж власного вектора, що відповідає найменшому за модулем власному числу матриці $A$.

Щоб дослідити положення рівноваги $(x_{10}, x_{20})$ нелінійної системи (8.45), треба початок координат перенести в точку $(x_{10}, x_{20})$ і розкласти функції $P$ і $Q$ в околі цієї точки за формулою Тейлора, обмежившися членами першого степеня [при цьому припускається, що функції $P$ і $Q$ двічі неперервно диференційовні в околі точки $(x_{10}, x_{20})$]. Тоді система (8.45) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varphi(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \psi(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0). \qquad (8.51)$$

Справджується таке *твердження* [31]: *якщо власні числа матриці A різні і їхні дійсні частини не дорівнюють нулю, то положення рівноваги системи (8.45) [(8.51)] має той самий тип, що й точка спокою лінійної системи (8.46) [системи першого наближення для (8.51)].* Це означає, що коли точка спокою системи першого наближення (8.46) є фокусом, сідлом або вузлом ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то система (8.51) також матиме в початку координат відповідно фокус, сідло або вузол того самого типу стійкості. Якщо ж точка спокою системи першого наближення (8.46) є центром або вузлом ($\lambda_1 = \lambda_2$), то тип точки спокою системи (8.51) може змінитися. Так, якщо для системи (8.46) точка спокою є центром, то для системи (8.51) вона може бути центром або фокусом. Якщо для системи (8.46) точка спокою є вузлом ($\lambda_1 = \lambda_2$), то для системи (8.51) вона може бути вузлом або фокусом (того самого типу стійкості). Таким чином, усі випадки, які трапляються під час класифікації типів точок спокою системи (8.45), можна поділити на дві групи: *некритичні (грубі)* випадки, коли класифікацію можна виконати за першим наближенням, і *критичні*, коли для класифікації потрібно залучати члени вищих степенів.





Дослідження околів положень рівноваги системи (8.45) є *локальною задачею* якісної теорії диференціальних рівнянь [31]. Іноді, дослідивши поведінку кривих в околі кожного положення рівноваги, можна розв'язати *глобальну задачу* якісної теорії — дослідити поведінку фазових кривих системи (8.45) на всій фазовій площині. Проте в загальному випадку ця задача складна. Простіший випадок, коли рівняння траєкторій системи (8.45) $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{Q(x_1, x_2)}{P(x_1, x_2)}$ $(Q(x_1, x_2)\,dx_1 - P(x_1, x_2)\,dx_2 = 0)$ є рівнянням у повних диференціалах. Тоді траєкторії системи (8.45) розміщені на інтегральних кривих цього рівняння, тобто на лініях

$$u(x_1, x_2) = c, \text{ де } \frac{\partial u}{\partial x_1} = Q(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -P(x_1, x_2).$$

У якісній теорії диференціальних рівнянь одним із центральних є питання існування (або відсутності) ізольованих циклів системи (8.46), тобто таких циклів, у деякому околі яких немає інших замкнених траєкторій. Воно безпосередньо пов'язане з питанням про існування ізольованих періодичних розв'язків, які мають велике значення під час дослідження математичних моделей у біології, медицині, радіофізиці, теорії коливань, астрономії, техніці. На практиці часто використовують достатню умову існування граничного циклу системи (8.45) — *принцип кільця: якщо на фазовій площині можна знайти таке кільце $r_1^2 \le (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 \le r_2^2$, що всі траєкторії системи, які починаються на межі цього кільця, входять всередину кільця або одночасно всі виходять з нього, то всередині кільця є граничний цикл системи.*

Для існування центра достатньо, щоб траєкторії мали вісь симетрії, яка проходить через дане положення рівноваги. Якщо рівняння траєкторій $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{Q(x_1, x_2)}{P(x_1, x_2)}$ не змінюється внаслідок заміни $x_1$ на $-x_1$ (або $x_2$ на $-x_2$), то така вісь симетрії, очевидно, існує.

Розглянемо приклади.

**❑ Приклад 8.17**

*Дослідимо точку спокою системи* $\dot{x} = \alpha x + y,\ \dot{y} = -x + \alpha y$ *($\alpha$ — параметр).*

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1 = 0$ має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Якщо $\alpha = 0$, то точка спокою є центром. У цьому випадку система набирає вигляду $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$. Звідси $x^2 + y^2 = c^2$, тобто траєкторіями є кола радіусом $|c| \geq 0$ з центром у точці $O(0, 0)$. Якщо $\alpha \neq 0$, то точка спокою є фокусом — стійким при $\alpha < 0$ і нестійким при $\alpha > 0$. Фазовими кривими є спіралі, які накручуються на точку $O(0, 0)$. При $\alpha < 0$ фазова точка $(x(t), y(t))$ рухається по спіралях у напрямі точки спокою, а при $\alpha > 0$ — від неї.

**❑ Приклад 8.18**

*Дослідимо поведінку траєкторій системи* $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x - 3x^2$.

Із системи $-y = 0$, $x - 3x^2 = 0$ знаходимо два положення рівноваги: $O_1(0, 0)$, $O_2(1/3, 0)$. Характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги $(x_0, y_0)$, має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 - 6x_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 - 6x_0 = 0.$$

Для точки $O_1$ дістаємо $\lambda^2 + 1 = 0$, звідки $\lambda_{1,2} = \pm i$. Отже, положення рівноваги даної системи може бути або центром, або фокусом. Помітивши, що рівняння фазових кривих $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 3x^2}{-y}$ не змінюється внаслідок заміни $y$ на $-y$, робимо висновок, що траєкторії симетричні відносно осі абсцис, тому точка $O_1$ — центр. Характеристичне рівняння, яке відповідає положенню рівноваги $O_2$, має вигляд $\lambda^2 - 1 = 0$, звідки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Тому точка $O_2$ — сідло. Визначимо напрямки, по яких сепаратриси входять у сідло, тобто знайдемо рівняння дотичних до сепаратрис у точці $O_2$. Лінеаризуючи систему в околі точки $O_2$, дістанемо $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = -(x - 1/3)$. Рівняння дотичних шукаємо у вигляді $y = k(x - 1/3)$. Підставивши в рівняння $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 1/3}{y}$, дістанемо $k = \pm 1$. Отже, дотичні до сепаратрис у точці $O_2$ мають такі рівняння: $y = \pm(x - 1/3)$. Можна вважати, що локальну задачу якісної теорії диференціальних рівнянь розв'язано.

Для побудови фазових кривих на всій площині повернемося до рівняння траєкторій $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x - 3x^2}{y}$, яке є рівнянням у повних диференціалах і легко інтегрується: $x^2 + y^2 - 2x^3 = c$. Позначимо $z = 2x^3 - x^2 + c$.





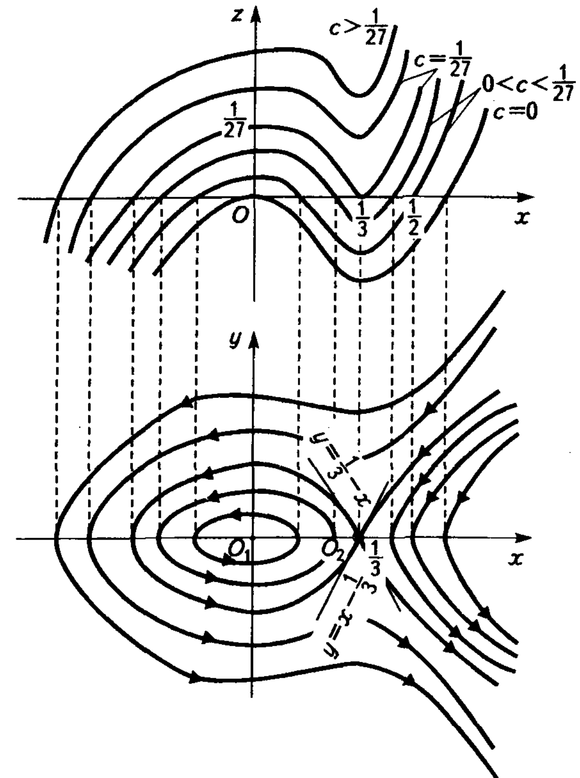


Рис.8.15

Тоді $y = \pm\sqrt{z}$ $(z \geq 0)$. Побудувавши допоміжну сім'ю кривих $z = 2x^3 - x^2 + c$, неважко побудувати сім'ю фазових кривих на всій площині (рис. 8.15).

З умови $z(1/3) = 0$ знаходимо, що рівняння сепаратрис має вигляд $y^2 + x^2 - 2x^3 = 1/27$. Напрям руху вздовж траєкторій легко встановити, врахувавши, що, згідно з першим рівнянням системи, в півплощині $y > 0$ абсциса фазової точки $(x(t), y(t))$ спадає, а в півплощині $y < 0$ — зростає.

**❑ Приклад 8.19**

*Розглянемо систему рівнянь* $\dot{x} = y - x + x^3$, $\dot{y} = -x - y + y^3$. *З'ясуємо, чи має ця система граничний цикл.*

Із рівнянь системи дістаємо

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(y-x+x^3) + 2y(-x-y+y^3) =$$

$$= -2(x^2+y^2) + 2(x^4+y^4).$$

Якщо фазова точка $(x(t),\ y(t))$ знаходиться на колі радіусом $r$, то $x = x(t) = r\cos\varphi$, $y = y(t) = r\sin\varphi$. Тоді

$$\frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = -2r^2 + 2r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) =$$

$$= -2r^2(1 - r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)).$$

Оскільки $\frac{1}{2} \le \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \le 1$, то при $r < 1$ дістаємо $\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) <$ $< -2r^2(1-r^2) < 0$, при $r > 2$ маємо $\frac{d}{dt}(x^2(t)+y^2(t)) > 0$. Звідси, згідно з принципом кільця, визначаємо, що в кільці $1 < x^2 + y^2 < 2$ є граничний цикл, оскільки через кола $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 2$ всі траєкторії даної системи виходять із цього кільця.

# Глава 9

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

## 9.1

## Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку

*Диференціальним рівнянням із частинними похідними першого порядку* називають рівняння типу

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{9.1}$$

де $u = u(x) \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$ — шукана функція, $F(x, u, p) = F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ — задана неперервно диференційовна в деякій області $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ функція, причому

$$\sum_{i=1}^{n} (F'_{p_i})^2 \neq 0 \quad \forall (x, u, p) \in G \quad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{9.2}$$

*Розв'язком рівняння (9.1)* називають неперервно диференційовну функцію $u = u(x)$ $(x \in D \subseteq \mathbb{R}^n)$, яка задовольняє рівняння (9.1) при кожному $x \in D$. Якщо $u(x)$ — розв'язок, то його графік — поверхню $u = u(x)$ у просторі змінних $x$, $u$ — називають *інтегральною поверхнею рівняння (9.1)*.

Розв'язування рівняння (9.1) можна звести до інтегрування деякої системи звичайних диференціальних рівнянь — так званої системи характеристик.

Якщо в (9.1) функція $F(x, u, p)$ має вигляд $F(x, u, p) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) p_k$, то рівняння

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \tag{9.3}$$

називають *лінійним однорідним*. Лінійне однорідне рівняння (9.3) записують також у вигляді

$$(f(x), p(x)) = 0, \tag{9.4}$$

де, внаслідок умови (9.2), $n$-вимірний вектор $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \neq 0$ $\forall x \in D$, $p(x) = \operatorname{grad} u(x))$, ( , ) — символ скалярного добутку.

Поряд із рівнянням (9.3) розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{9.5}$$

Систему (9.5) називають *системою характеристик рівняння (9.3)*, а її фазові криві — *характеристиками рівняння (9.3)*.

Систему характеристик (9.5) записують також у симетричній формі:

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \tag{9.6}$$

Характеристики є інтегральними кривими системи (9.6). Унаслідок умов $f(x) \neq 0$ $\forall x \in D$, $f_k(x) \in C_D^1$ $(k = 1, ..., n)$ для системи (9.5) [(9.6)] справедлива теорема існування й єдиності, і через кожну точку області $D$ проходить одна й лише одна характеристика.

**Теорема 9.1**

**Функція $u = \varphi(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (9.3) тоді й лише тоді, коли $\varphi(x)$ є інтегралом системи характеристик (9.5).**





Доведення теореми випливає з означення інтеграла системи (9.5) (див. п. 1.3) і виразу для похідної функції $\varphi$ унаслідок системи (9.5): $\dfrac{d\varphi}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} \dfrac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} f_k(x).$

**Теорема 9.2**

**Нехай $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_{n-1}(x)$ — незалежні інтеграли системи характеристик (9.6). Тоді загальний розв'язок рівняння (9.3) має вигляд**

$$u = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), \tag{9.7}$$

**де $\Phi$ — довільна неперервно диференційовна функція*.**

**Доведення**

Оскільки за теоремою (9.1) функції $\varphi_j(x)$ є розв'язками рівняння (9.3) при $j = 1, ..., n - 1$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0.$$

Звідси випливає, що функція, визначена формулою (9.7), є розв'язком рівняння (9.3). Покажемо тепер, що будь-який розв'язок $u = \varphi_0(x)$ можна дістати з (9.7) вибором функції $\Phi$.

Оскільки $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x)$ — розв'язки рівняння (9.3), то $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0$ $(j = 0, 1, ..., n-1;\ x \in D)$. Це означає, що ненульовий вектор $f(x)$ є розв'язком лінійної однорідної алгебричної системи рівнянь із матрицею (Остроградського—Якобі)

* Функція $u$, визначена формулою (9.7), є загальним розв'язком рівняння (9.3) у тому розумінні, що будь-який розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді (9.7) за допомогою вибору функції $\Phi$.

$$A = \frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Тому $\det A = 0$ $(x \in D)$ і на множині $D$ існує функціональна залежність [16] $\Psi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \equiv 0$ $(x \in D)$, де $\Psi$ — неперервно диференційовна функція. Звідси, внаслідок незалежності інтегралів $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, маємо $\varphi_0 = \Phi_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

### ❑ Приклад 9.1

*Знайдемо загальний розв'язок рівняння*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Із рівняння $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$ знаходимо характеристики $x^2 + y^2 = c$. Тому загальний розв'язок має вигляд $u = \Phi(x^2 + y^2)$, де $\Phi$ — довільна неперервно диференційовна функція. Рівняння $u = \Phi(x^2 + y^2)$ визначає поверхні обертання навколо осі $Ou$ у просторі змінних $x$, $y$, $u$.

### ❑ Приклад 9.2

*Розглянемо рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a = \text{const}; (t, x) \in \mathbb{R}^2).$$

Система характеристик має вигляд $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a}$. Очевидним інтегралом системи є функція $\varphi(x, t) = x - at$. Тому загальний розв'язок записується так: $u = \Phi(x - at)$. Якщо інтерпретувати змінну $t$ як час, то розв'язками даного рівняння є так звані *біжучі хвилі*. Графік конкретно вибраної функції $\Phi$ задає профіль хвилі, який зі зростанням часу $t$ переміщується в площині $(x, u)$ вздовж осі $Ox$ зі швидкістю $a$ (вправо при $a > 0$).





### ❑ Приклад 9.3

***Знайдемо рівняння поверхонь в $\mathbb{R}^3$ : $u(x, y, z) = 0$, кожна з яких перетинає сім'ю сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c$ під прямим кутом.***

Дві поверхні у спільній точці ортогональні тоді й лише тоді, коли їхні нормалі в цій точці ортогональні. Нормалі до даних поверхонь задаються векторами $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, $\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z)$. Тому з умови ортогональності маємо лінійне однорідне рівняння відносно функції $u$:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Із системи характеристик $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ дістаємо два незалежних перших інтеграли: $\frac{y}{x} = c_1$, $\frac{z}{x} = c_2$. Тому $u = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ і для кожної неперервно диференційовної функції $\Phi$ поверхня, задана рівнянням $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$, є шуканою. В околі площини $x = 0$ поверхні слід задавати рівнянням $\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0$.

### ◆ Зауваження 9.1

Із формули (9.4) випливає, що з геометричного погляду лінійне однорідне рівняння (9.3) описує в $\mathbb{R}^n$ сім'ю поверхонь (многовидів) $S : u(x) = c$ $(c = \text{const})$, у точках яких вектор нормалі до $S : p(x) = \operatorname{grad} u(x)$ ортогональний до вектора $f(x)$, який задає в $\mathbb{R}^n$ векторне поле (рис. 9.1).

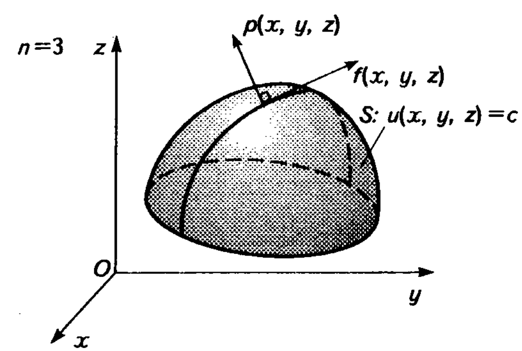


Рис. 9.1

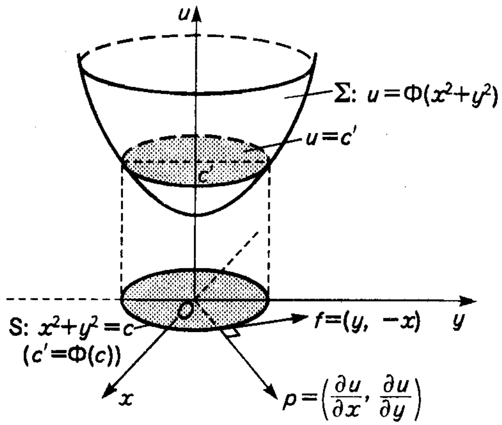


**Рис. 9.2**

Оскільки дотичні до векторних ліній цього поля колінеарні вектору $f(x)$, то поверхні $S$ утворені з векторних ліній поля $f(x)$ [характеристик рівняння (9.3)].

Уздовж довільної характеристики рівняння (9.3) всі інтеграли $\varphi_i(x)$ ($i = 1, ..., n-1$) є сталими: $\varphi_i(x) = c_i$. Тому з (9.7) випливає, що характеристики є поверхнями рівня розв'язку (інтегральної поверхні $\Sigma$) $u = u(x)$. Геометричну ілюстрацію прикладу 9.1 наведено на рис. 9.2.

## 9.2

## Квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

Якщо в (9.1) функція $F(x, u, p)$ має вигляд $F(x, u, p) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x, u)p_k - g(x, u)$, то рівняння

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = g(x, u) \tag{9.8}$$

називають *квазілінійним*.





Покажемо, що квазілінійне рівняння (9.8) можна звести до лінійного однорідного рівняння з допомогою заміни невідомої функції та збільшення на одиницю вимірності векторів $x$ і $f(x)$.

Припустимо, що шукана функція $u = u(x)$ задана неявно рівнянням вигляду

$$v(x, u) = 0 \quad \left(\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0\right), \tag{9.9}$$

і вважатимемо $v$ новою шуканою функцією. Тоді з (9.9) маємо $\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big/\frac{\partial v}{\partial u}$ ($k = 1, ..., n$). Підставивши в рівняння (9.8), дістанемо $\sum_{k=1}^{n} f_k(x, u)\frac{\partial v}{\partial x_k} + g(x, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0$. Позначивши $u = x_{n+1}$, $(x, u) = \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $g(x, u) = f_{n+1}(\tilde{x})$, матимемо лінійне однорідне рівняння

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k(\tilde{x})\frac{\partial v}{\partial x_k} = 0 \tag{9.10}$$

типу (9.3) з $(n+1)$-вимірним вектором $\tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{x}) = (f_1(\tilde{x}), ..., f_{n+1}(\tilde{x}))$. Припустимо, що $\tilde{f}(\tilde{x}) \neq 0 \ \forall \tilde{x} \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Записавши для рівняння (9.10) систему характеристик у вигляді (9.6), дістанемо *систему характеристик квазілінійного рівняння (9.8):*

$$\frac{dx_1}{f_1(x, u)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x, u)} = \frac{du}{g(x, u)}. \tag{9.11}$$

Звідси випливає така *схема розв'язання квазілінійного рівняння* (9.8):

- за коефіцієнтами рівняння (9.8) виписуємо систему характеристик (9.11);
- знаходимо $n$ незалежних інтегралів $\varphi_1(x, u)$, ..., $\varphi_n(x, u)$ цієї системи;
- записуємо співвідношення

$$v(x, u) \equiv \Phi(\varphi_1(x, u), \ldots, \varphi_n(x, u)) = 0, \qquad (9.12)$$

де $\Phi$ — довільна неперервно диференційовна функція, яка задовольняє такі *умови:* ① множина рівня $\tilde{D}_0 = \{(x, u) \in \tilde{D} : v(x, u) = 0\}$ непорожня; ② $\frac{\partial v}{\partial u}(x, u) \neq 0 \ \forall (x, u) \in \tilde{D}_0$.

Співвідношення (9.12) неявно задає загальний розв'язок квазілінійного рівняння (9.8).

Якщо в (9.12) усі функції $\varphi_k$, крім однієї (наприклад, $\varphi_n$), залежать лише від $x$, а функція $\varphi_n(x, u)$ така, що рівняння $\varphi_n(x, u) = \Psi$ елементарно розв'язне відносно $u$, то загальний розв'язок рівняння (9.8) можна записати у явному вигляді. Справді, в цьому випадку внаслідок довільності функції $\Phi$ із (9.12) маємо $\varphi_n(x, u) = \Psi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x))$, де $\Psi$ — довільна функція. Розв'язавши останнє рівняння відносно $u$, дістанемо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$u = \Psi_0(x, \Psi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x))),$$

де $\Psi_0$ — цілком конкретна функція.

**❑ Приклад 9.4**

Система характеристик квазілінійного рівняння

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = u \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

має вигляд

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} = \frac{du}{u}.$$

Знаходимо незалежні перші інтеграли цієї системи: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = c_2$, $ue^{\frac{1}{x}} = c_3$. Співвідношенням $\Phi\left(ue^{\frac{1}{x}}, \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) = 0$ неявно заданий загальний розв'язок даного рівняння. Звідси





$$u = e^{-\frac{1}{x}} \Psi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right),$$

де $\Psi$ — довільна неперервно диференційовна функція.

**❑ Приклад 9.5**

*Розглянемо рівняння*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \alpha u \quad (\alpha = \text{const} > 0). \qquad (9.13)$$

Із системи характеристик

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{\alpha u}$$

дістанемо $n$ незалежних перших інтегралів цієї системи:

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1, \ldots, \frac{x_n}{x_1} = c_{n-1}, \quad \frac{u}{x_1^\alpha} = c_n \quad (x_1 > 0).$$

Звідси маємо неявне задання загального розв'язку рівняння (9.13): $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^\alpha}\right) = 0$. Розв'язавши відносно $u$, дістанемо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$u = x_1^\alpha \Psi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

**❑ Приклад 9.6**

*Розглянемо одновимірне середовище, яке складається з частинок, що рухаються за інерцією.*

Нехай $u = u(x, t)$ — функція, яка точці $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ставить у відповідність швидкість частинки, що в момент часу $t$ знаходиться в точці $x : \dot{x} = u(x, t)$. Оскільки закон руху частинки за інерцією описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} = 0$, то $\frac{d}{dt} u(x, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} = 0$. Звідси дістанемо квазілінійне рівняння *(рівняння Хопфа):*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{9.14}$$

Із системи характеристик $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$ маємо незалежні перші інтеграли $u = c_1$, $x - ut = c_2$. Всі розв'язки (9.14) неявно задані рівнянням

$$\Phi(u,\ x - ut) = 0,$$

де $\Phi$ — довільна неперервно диференційовна функція. Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $u$, то $u = \Psi(x - ut)$.

◆ **Зауваження 9.2**

Вкажемо на зв'язок між характеристиками й інтегральними поверхнями квазілінійного рівняння на прикладі рівняння з двома незалежними змінними

$$f_1(x,\ y,\ u)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,\ y,\ u)\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,\ y,\ u). \tag{9.15}$$

У просторі $\mathbb{R}^3$ коефіцієнти рівняння (9.15) задають векторне поле

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{x}) = (f_1(\tilde{x}),\ f_2(\tilde{x}),\ f_3(\tilde{x})),$$

де $f_3(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x,\ y,\ u)$. Якщо точка $\tilde{x}$ належить інтегральній поверхні $u = u(x,\ y)$, то вектор $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ -1\right)$ є вектором нормалі до цієї поверхні в точці $\tilde{x}$. Тому рівняння (9.15) можна записати у вигляді $(\tilde{f},\ \tilde{p}) = 0$ і, отже, вектори $\tilde{f}$ і $\tilde{p}$ ортогональні. Звідси випливають такі *твердження:* ① вектор $\tilde{f}$ лежить у площині, дотичній до інтегральної поверхні; ② якщо поверхня $u = u(x,\ y)$ в кожній своїй точці $\tilde{x} = (x,\ y,\ u)$ дотикається до вектора $\tilde{f}$, то вона є інтегральною поверхнею.

Наступна теорема встановлює зв'язок між характеристиками й інтегральними поверхнями квазілінійного рівняння в загальному випадку.





**Теорема 9.3**

Якщо інтегральна поверхня $\Sigma : u = \psi(x)$ містить точку $\tilde{x}_0 = (x_0,\ \psi(x_0))$, то вона містить і характеристику, яка проходить через точку $\tilde{x}_0$.

**Доведення**

Нехай $x = x(t)$ — розв'язок задачі Коші $\dot{x} = f(x,\ u)$, $x(0) = x_0$, де $u = \psi(x), f(x,\ u) = (f_1(x,\ u),\ ...,f_n(x,\ u))$. Тоді точка $\tilde{x}_0 = (x_0,\ \psi(x_0))$ належить інтегральній поверхні $\Sigma$ разом із кривою, яка параметрично задана рівняннями $x = x(t)$, $u = \psi(x(t))$. Аби довести, що ця крива є характеристикою, достатньо показати, що $\frac{du}{dt} = g(x,\ u)$. Маємо: $\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}f_k \equiv g(x,\ u)$, оскільки функція $u = \psi(x)$ є розв'язком рівняння (9.8).

◆ **Зауваження 9.3**

Якщо вважати лінійне однорідне рівняння (9.3) окремим випадком квазілінійного рівняння (9.8) ($f_k(x,\ u) \equiv f_k(x)$, $g(x,\ u) \equiv 0$, $k = 1,\ ...,\ n$), то систему характеристик рівняння (9.3) можна записати у вигляді

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x)} = \frac{du}{0}. \tag{9.16}$$

Інтегральними кривими (характеристиками) системи (9.16) є перерізи інтегральних поверхонь лінійного однорідного рівняння (9.3) площинами $u = c$ (рис. 9.3).

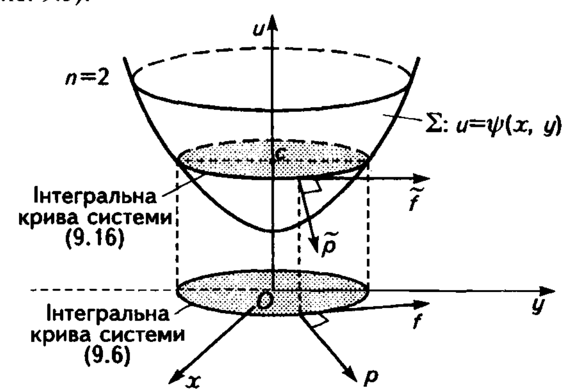


**Рис. 9.3**

# 9.3
## Задача Коші

Звернімося до прикладу 9.2. Як зазначалося, профіль біжучої хвилі описує функція Φ. Фіксуючи цю функцію, ми з усієї множини розв'язків рівняння виділяємо той, який задовольняє умову $u(x, t)|_{t=0} = \Phi(x)$. Цю умову природно назвати *початковою.* Неважко помітити аналогію з початковою задачею (задачею Коші) для звичайного диференціального рівняння. Проте, якщо для останнього початкова умова визначалася точкою скінченновимірного простору, то для рівняння з частинними похідними в початковій умові фігурує функція — елемент нескінченновимірного простору. Геометричний зміст початкової умови з прикладу 9.2 такий. У просторі $\mathbb{R}^3$ точок $(t, x, u)$ задано плоску криву $t = 0$, $u = \Phi(x)$; потрібно знайти поверхню, яка проходить через цю криву.

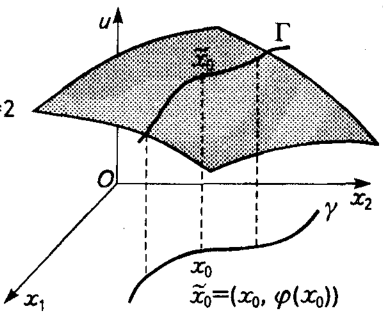


**Рис. 9.4**

*Задача Коші для квазілінійного рівняння* (9.8) ставиться так. Нехай $\gamma$ — $(n-1)$-вимірна гладка гіперповерхня *(початкова гіперповерхня)* в просторі $\mathbb{R}^n$ змінної $x$, $\varphi = \varphi(x)$ $(x \in \gamma)$ — задана неперервно диференційовна функція *(початкова функція)*, $\Gamma = \{(x, \varphi(x)) : x \in \gamma\} \subset \bar{D}$ — графік функції $\varphi$. Потрібно знайти розв'язок рівняння (9.8), який задовольняє початкову умову $u(x)|_{x \in \gamma} = \varphi(x)$, тобто розв'язок, графік якого проходить через поверхню Γ (рис. 9.4).

Пару $(\gamma, \varphi)$ називають *початковою умовою*, або *початковими даними, задачі Коші.* Початкову умову називають *характеристичною (неособливою) в точці* $x_0 \in \gamma$, якщо вектор $f(x_0, u_0) = (f_1(x_0, u_0), \ldots, f_n(x_0, u_0))$ $(u_0 = \varphi(x_0))$ не дотикається до гіперповерхні $\gamma$ у точці $x_0$. У противному разі початкову умову $(\gamma, \varphi)$ називають *особливою в точці* $x_0$.

**Теорема 9.4**

Нехай $f_k(x, u)$, $g(x, u)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — неперервно диференційовні функції в області $\bar{D}$ і початкова умова $(\gamma, \varphi)$ неособлива при кожному $x \in \gamma$. Тоді для кожної точки $x_0 \in \gamma$ у деякому околі точки $\tilde{x}_0$ існує єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння (9.8) із початковою умовою $(\gamma, \varphi)$.

**Доведення**

Розглянемо лише випадок $n = 2$. Нехай гладка крива $\gamma$ (рис. 9.4) параметрично задана системою рівнянь: $x_1 = \theta_1(s)$, $x_2 = \theta_2(s)$ $(\theta_1'^2(s) + \theta_2'^2(s) \neq 0 \ \ \forall s \in (\alpha, \beta) = I)$. Тоді крива Γ задана системою рівнянь $x_1 = \theta_1(s)$, $x_2 = \theta_2(s)$, $u = \varphi(\theta_1(s), \theta_2(s)) \equiv h(s)$





$(s \in I)$. З кожної точки кривої Γ проведемо характеристику, тобто розв'яжемо сім'ю задач Коші:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u), \ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u), \ \dot{u} = g(x_1, x_2, u), \\ &x_1|_{t=0} = \theta_1(s), \quad x_2|_{t=0} = \theta_2(s), \quad u|_{t=0} = h(s) \quad (s \in I). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Нехай

$$x_1 = x_1(t, s),\ x_2 = x_2(t, s),\ u = w(t, s) \ \ (s \in I,\ t \in (-\delta_1(s), \delta_2(s))) \tag{9.18}$$

— розв'язок задачі (9.17). Оскільки розв'язок задачі Коші (9.17) неперервно диференційовно залежить від початкової точки $s$ (див. п. 3.6), то функції (9.18) неперервно диференційовні по $(t, s)$. Нехай $f_i(s) = f_i(\theta_1(s), \theta_2(s), h(s))$ $(i = 1, 2)$. Визначник Остроградського

$$J = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial s} & \dfrac{\partial x_2}{\partial s} \end{vmatrix}\right|_{t=0} = \left.\begin{vmatrix} f_1(s) & f_2(s) \\ \theta_1'(s) & \theta_2'(s) \end{vmatrix}\right|_{(x_1, x_2) \in \gamma} \neq 0,$$

оскільки у випадку неособливої початкової умови $(\gamma, \varphi)$ вектор $(f_1(s), f_2(s))$ і вектор $(\theta_1'(s), \theta_2'(s))$ дотичної до кривої $\gamma$ неколінеарні. Тому в околі кожної точки $x_0 \in \gamma$ функції $t$, $s$, а отже, і $u = w(t, s)$ є неперервно диференційовними функціями змінних $x_1$, $x_2$. Покажемо, що функція $w(t, s) = u(x_1, x_2)$ задовольняє рівняння (9.8) $(n = 2)$. Спочатку виразимо похідні функцій $t$, $s$ через похідні функцій $x_1$, $x_2$:

$$\frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial s}, \ \frac{\partial t}{\partial x_2} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial s}, \ \frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x_2}{\partial t} = -\frac{1}{J}f_2, \ \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{1}{J}\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{1}{J}f_1.$$

Далі маємо

$$\sum_{k=1}^{2} f_k(x_1, x_2, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = f_1\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_1}\right) + f_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{J}\left[f_1\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial w}{\partial s}f_2\right) + f_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\left(-\frac{\partial x_1}{\partial s}\right) + \frac{\partial w}{\partial s}f_1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{J}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\left(f_1\frac{\partial x_2}{\partial s} - f_2\frac{\partial x_1}{\partial s}\right) + \frac{\partial w}{\partial s}(f_1f_2 - f_1f_2)\right] = \frac{\partial w}{\partial t} = g(x_1, x_2, w),$$

оскільки функція $w$ задовольняє третє рівняння системи характеристик (9.17). Єдиність розв'язку задачі Коші для квазілінійного рівняння випливає з факту єдиності розв'язку задачі Коші (9.17) для системи характеристик. Зазначимо, що рівняння (9.18) є параметричними рівняннями графіку розв'язку задачі Коші з початковими умовами $(\gamma, \varphi)$.

### ◆ Зауваження 9.4

З теорем 9.2—9.4 випливає такий практичний ***спосіб розв'язування задачі Коші для квазілінійного рівняння:***

1) за коефіцієнтами рівняння (9.8) виписуємо систему характеристик (9.11);
2) знаходимо $n$ незалежних перших інтегралів $\varphi_1(x, u) = c_1, \ldots, \varphi_n(x, u) = c_n$ системи характеристик;
3) до системи $n$ незалежних перших інтегралів дописуємо систему рівнянь, які задають початкову умову $(\gamma, \varphi)$;
4) з одержаної в такий спосіб *системи рівнянь задачі Коші* виключаємо змінні так, щоб дістати співвідношення типу $F_0(c_1, \ldots, c_n) = 0$;
5) шуканий розв'язок задачі Коші неявно задаємо рівнянням $F_0(\varphi_1(x, u), \ldots, \varphi_n(x, y)) = 0$.

Щоб застосувати цю схему розв'язування задачі Коші для лінійного однорідного рівняння (9.3), його слід розглядати як окремий випадок квазілінійного рівняння (див. зауваження 9.3) і записувати систему характеристик у вигляді (9.16). Зазначимо, що система (9.16) має очевидний перший інтеграл $u = c$.

### ❑ Приклад 9.7

*Розглянемо задачі Коші для рівняння* $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ *з такими початковими умовами:*

$$\text{(а)}\ u|_{y=2x} = \sin x^2;\quad \text{(б)}\ u|_{y=1} = x;\quad \text{(в)}\ u|_{x^2+y^2=1} = c_0 = \text{const}.$$

Незалежні перші інтеграли системи характеристик $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{du}{0}$ мають вигляд $u = c_1$, $x^2 + y^2 = c_2$. У випадку (а), виключаючи змінні $x$, $y$, $u$ із системи рівнянь задачі Коші: $u = c_1$, $x^2 + y^2 = c_2$, $y = 2x$, $u = \sin x^2$, дістанемо $c_1 = \sin\dfrac{c_2}{5}$, звідки $u = \sin\dfrac{x^2 + y^2}{5}$ — розв'язок даної задачі Коші. Зазначимо, що початкова умова $(\gamma, \varphi)$ у цьому разі є неособливою при кожному $x \neq 0$, оскільки вектор $f = (y, -x)$ не дотикається до прямої $\gamma : y = 2x$ у кожній точці цієї прямої.

У випадку (б) початкова умова $(\gamma, \varphi)$ є особливою в точці $(0, 1)$, оскільки в цій точці вектор $f = (y, -x) = (1, 0)$ дотикається до прямої $\gamma : y = 1$. Виключаючи змінні із системи рівнянь задачі Коші: $u = c_1$, $x^2 + y^2 = c_2$, $y = 1$, $u = x$, дістанемо $c_1 = \sqrt{c_2 - 1}$ (при $x > 0$), $c_1 = -\sqrt{c_2 - 1}$ (при $x < 0$), $c_2 \geq 1$. Тому в достатньо





малому околі точки $(x_0, 1) \in \gamma$ $(x_0 \neq 0)$ задача Коші має єдиний розв'язок $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ $(x_0 > 0)$, $u = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ $(x_0 < 0)$. В як завгодно малому околі точки $(0, 1) \in \gamma$ задача Коші розв'язку не має.

У випадку (в) початкова умова $(\gamma, \varphi)$ є особливою в кожній точці кривої $\gamma : x^2 + y^2 = 1$, оскільки $\gamma$ є характеристикою лінійного однорідного рівняння. Задача Коші в цьому разі має безліч розв'язків вигляду $u = \Phi(x^2 + y^2)$, де $\Phi$ — довільна неперервно диференційовна функція така, що $\Phi(1) = c_0$ [наприклад, $u = c_0 + (x^2 + y^2 - 1)\sin(x^2 + y^2)$].

### ❑ Приклад 9.8

*Розглянемо задачу Коші:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a = \text{const},\ (t, x) \in \mathbb{R}^2),\quad u|_{t=0} = \sin x.$$

Незалежні перші інтеграли системи характеристик $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{a} = \dfrac{du}{0}$ мають вигляд $u = c_1$, $x - at = c_2$. Виключивши змінні $t$, $x$, $u$ із системи рівнянь задачі Коші: $u = c_1$, $x - at = c_2$, $t = 0$, $u = \sin x$, дістанемо $c_1 = \sin c_2$, звідки $u = \sin(x - at)$. Як уже зазначалося (див. приклад 9.2), розв'язком є біжуча хвиля, профіль якої зі зростанням часу $t$ переміщується в площині $(x, u)$ вздовж осі $Ox$ зі швидкістю $a$ (вправо при $a > 0$) (рис. 9.5).

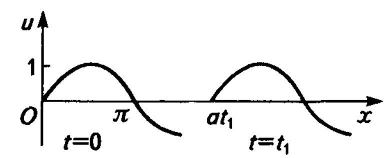


Рис. 9.5

### ❑ Приклад 9.9

*Розв'яжемо задачу Коші з початковою умовою* $u|_{t=0} = \sin x$ *для рівняння Хопфа (9.14):*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Незалежні перші інтеграли системи характеристик рівняння Хопфа мають вигляд (див. приклад 9.6) $u = c_1$, $x - ut = c_2$. Виключивши змінні із системи рівнянь задачі Коші: $u = c_1$, $x - ut = c_2$, $t = 0$, $u = \sin x$, дістанемо $c_1 = \sin c_2$, звідки $u = \sin(x - ut)$. Цим рівнянням неявно задається розв'язок $u(x, t)$ даної задачі Коші. Розв'язок $u(x, t)$ описує деякий хвильовий процес. Графік функції $\sin x$ визначає профіль хвилі в момент $t = 0$ (рис. 9.6, *а*). З плином часу профіль хвилі змінюється так, що точки його перетину з прямою $u = \sin a$ $(a \in \mathbb{R})$ рухаються паралельно осі $Ox$ зі швидкістю $\sin a$ (рис. 9.6, *б*). Зрозуміло, що існує такий момент часу $t^*$, після якого функція $u(x, t)$ втрачає однозначність (рис. 9.6, *в*). Справді, нехай $F_0(x, t, u) \equiv u - \sin(x - ut)$. Тоді $\dfrac{\partial F_0}{\partial u}(x, t, u) =$

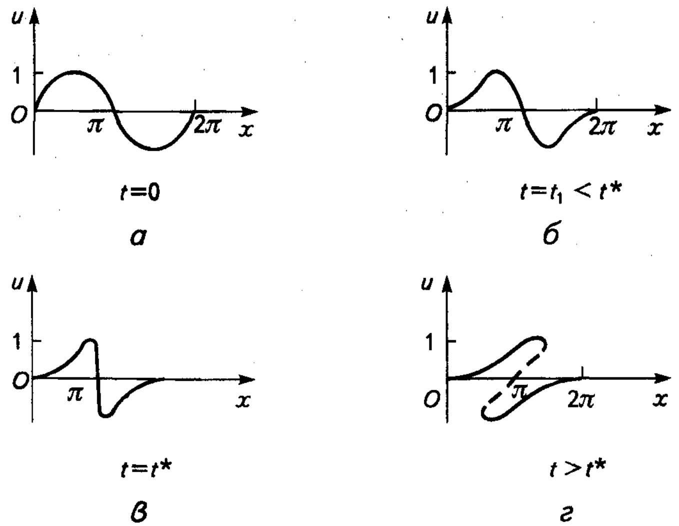


Рис. 9.6

$= 1 + t\cos(x - ut)$. Звідси видно, що при $t \geq t^* = 1$ достатня умова однозначної розв'язності рівняння $F_0(x, t, u) = 0$ відносно $u$ порушується. Це явище пов'язане з утворенням так званих *ударних хвиль* і приводить до розгляду розривного (при $t > t^*$) розв'язку рівняння Хопфа (рис. 9.6, *г*).

◆ **Зауваження 9.5**

Рівняння вигляду $f_1(x_1, x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = g(x_1, x_2)$ називають *лінійним неоднорідним* ($n = 2$). Записавши для цього рівняння задачу Коші (9.17), дістанемо

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad \dot{u} = g(x_1, x_2), \\ x_1|_{t=0} = \theta_1(s), \quad x_2|_{t=0} = \theta_2(s), \quad u|_{t=0} = h(s) \quad (s \in I).\end{gathered} \tag{9.19}$$

Якщо $x(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s))$ — розв'язок задачі Коші для перших двох рівнянь системи (9.19), то з третього рівняння цієї системи маємо

$$u(x) = w(t, s) = h(s) + \int_0^t g(x(\tau, s))\,d\tau$$

або

$$u(x(t, s)) = \varphi(x(0, s)) + \int_0^t g(x(\tau, s))\,d\tau. \tag{9.20}$$





Таким чином, якщо умови теореми 9.4 виконуються, то розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного рівняння можна записати в інтегральній формі (9.20). Формула (9.20) справедлива для довільного $n \in \mathbb{N}$.

❑ **Приклад 9.10**

*Використовуючи формулу (9.20), розв'яжемо задачу Коші:*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u|_{y=1} = x.$$

Нехай $x = s$, $y = 1$ ($s \in \mathbb{R}$) — параметричне задання прямої $\gamma : y = 1$. Задача Коші (9.19) має вигляд

$$\begin{gathered}\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y, \qquad \dot{u} = 1, \\ x|_{t=0} = s, \quad y|_{t=0} = 1, \quad u|_{t=0} = s.\end{gathered}$$

Звідси $x = se^t$, $y = e^t$. За формулою (9.20) дістаємо

$$u(se^t, e^t) = s + \int_0^t 1\,d\tau = s + t,$$

або $u(x, y) = \dfrac{x}{y} + \ln y$.

## 9.4

## Задача Коші для нелінійного рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо нелінійне рівняння (9.1): $F(x, u, p) = 0$ і припустимо, що функція $F$ належить класу $C^2$ в області $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ змінних $x, u, p$ і що виконується умова (9.2).

Нехай $\gamma$ — деяка гладка $(n-1)$-вимірна гіперповерхня, задана параметричними рівняннями: $x = \theta(s)$ ($\theta \in C^2(\Delta)$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$), $\varphi(x)$ ($x \in \gamma$) — початкова функція:

$$\varphi(x)|_{x\in\gamma} = \varphi(\theta(s)) \equiv h(s) \quad (h \in C^2(\Delta)).$$

Як і для квазілінійного рівняння, умову

$$u(x)|_{x\in\gamma} = \varphi(x) \quad (u(\theta(s)) = h(s)) \tag{9.21}$$

називають *початковою умовою задачі Коші для рівняння (9.1)*. Проте, на відміну від квазілінійного рівняння, однієї умови (9.21) недостатньо для однозначного визначення розв'язку рівняння (9.21). Потрібно додатково задати вектор $p = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ у точках гіперповерхні $\gamma$, а також урахувати умову $F(x, u, p) = 0$ $(x \in \gamma)$.

Наведемо загальну схему розв'язання задачі Коші для нелінійного рівняння (9.1) методом, який ґрунтується на використанні системи характеристик цього рівняння.

Нехай функція $u = u(x)$ класу $C^2$ — розв'язок задачі Коші для рівняння (9.1). Тоді $F(x, u(x), p(x)) \equiv 0$ $(x \in D)$. Звідси

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial u} p_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9.22}$$

Оскільки $\frac{\partial p_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial p_k}{\partial x_j}$, то з (9.22) маємо

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial x^j} = -\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial F}{\partial u} p_k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9.23}$$

Розглянемо розв'язок $u = u(x)$ уздовж траєкторій системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{9.24}$$

Тоді (9.23) можна записати у вигляді

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial F}{\partial u} p_k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9.25}$$

Із (9.24) випливає також, що

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} p_k. \tag{9.26}$$

Отже, якщо $u = u(x)$ — розв'язок задачі Коші, то вздовж будь-якої траєкторії системи (9.24) функції $u = u(x)$ і $p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ задовольняють рівняння (9.25), (9.26).





Систему, яка складається з $2n + 1$ рівнянь (9.24)—(9.26), називають *системою характеристик нелінійного рівняння (9.1)*, а її траєкторії у просторі $\mathbb{R}^{2n+1}$ змінних $x, u, p$ — *характеристиками цього рівняння*.

Щоб задати вектор $p = \operatorname{grad} u$ в точках гіперповерхні $\gamma$, початкову умову (9.21) здиференціюємо по $s_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ і до одержаних співвідношень додамо рівняння $F(x, u, p) = 0$ $(x \in \gamma)$:

$$F(\theta(s), h(s), p) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \theta_i}{\partial s_k} = \frac{\partial h}{\partial s_k} \quad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{9.27}$$

Згідно з теоремою про неявну функцію [16] розв'язок $p = w(s) = (w_1(s), \ldots, w_n(s))$ системи (9.27) існує й єдиний у деякому околі точки $s_0 \in \Delta$ $(w(s_0) = p_0$, $F(\theta(s_0), h(s_0), p_0) = 0)$, якщо виконується умова

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial s_{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (s \in \Delta). \tag{9.28}$$

Далі розв'язуємо задачу Коші для системи характеристик (9.24)—(9.26) із такими початковими умовами:

$$\begin{aligned} x_j|_{t=0} &= \theta_j(s) \quad (j = 1, \ldots, n), \\ p_k|_{t=0} &= w_k(s) \quad (k = 1, \ldots, n), \\ u|_{t=0} &= h(s). \end{aligned} \tag{9.29}$$

Розв'язок цієї задачі Коші існує й єдиний, і його можна записати у вигляді

$$\begin{gathered} x = x(t, s), \qquad p = p(t, s), \qquad u = u(t, s) \\ (x(0, s) = \theta(s), \; p(0, s) = w(s), \; u(0, s) = h(s)). \end{gathered} \tag{9.30}$$

Рівняння (9.30) у параметричній формі задають розв'язок задачі Коші для рівняння (9.1). Якщо з першого рівняння (9.30) виразити $t = t_*(x)$, $s = s_*(x)$ і підставити в третє, то дістанемо $u = u(t_*(x), s_*(x))$ — шуканий розв'язок задачі Коші для нелінійного рівняння (9.1).

◆ **Зауваження 9.6**

Із геометричного погляду розв'язання задачі Коші для системи характеристик із початковими умовами (9.29) еквівалентне проведенню характеристик із кожної точки гіперповерхні $\Gamma : x = \theta(s),\ u = h(s),\ p = w(s)\ (s \in \Delta)$ у просторі $\mathbb{R}^{2n+1}$ змінних $x,\ u,\ p$.

◆ **Зауваження 9.7**

Якщо виконується умова (9.28), то кажуть, що має місце *неособливий випадок* початкових умов задачі Коші (в цьому разі вектор $\partial F/\partial p$ не дотикається до гіперповерхні $\gamma$ при кожному $x \in \gamma$). У неособливому випадку гарантується єдиність розв'язку задачі Коші в достатньо малому околі кожної точки гіперповерхні $\Gamma$.

◆ **Зауваження 9.8**

Систему характеристик (9.24)—(9.26) записують також у симетричній формі:

$$\frac{dx_1}{F'_{p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{F'_{p_n}} = \frac{du}{p_1F'_{p_1} + \ldots + p_nF'_{p_n}} = \frac{-dp_1}{F'_{x_1} + p_1F'_u} = \ldots = \frac{-dp_n}{F'_{x_n} + p_nF'_u}. \quad (9.31)$$

Одним з інтегралів системи характеристик є функція $F(x, u, p)$. Справді, для похідної внаслідок системи характеристик маємо

$$\frac{d}{dt}F(x, u, p) = \sum_{j=1}^{n} F'_{x_j}\frac{dx_j}{dt} + F'_u\frac{du}{dt} + \sum_{k=1}^{n} F'_{p_k}\frac{dp_k}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} F'_{x_j}F'_{p_j} + \sum_{k=1}^{n} F'_uF'_{p_k}p_k + \sum_{k=1}^{n} F'_{p_k}\left(-F'_{x_k} - F'_u p_k\right) \equiv 0.$$

◆ **Зауваження 9.9**

Із розглянутого випливає такий практичний *спосіб розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння* (9.1):

1) за рівнянням (9.1) виписуємо систему характеристик (9.31);
2) знаходимо $2n$ незалежних перших інтегралів $F(x, u, p) = c_1$, $\varphi_1(x, u, p) = c_2$, ..., $\varphi_{2n-1}(x, u, p) = c_{2n}$ системи характеристик;
3) до системи $2n$ незалежних перших інтегралів дописуємо систему рівнянь (9.21), які задають початкову умову, а також систему рівнянь (9.27);
4) з одержаної в такий спосіб *системи рівнянь задачі Коші* виключаємо змінні так, щоб дістати рівняння типу $\Phi_0(u, x) = 0$. Цим рівнянням неявно заданий розв'язок задачі Коші.

❑ **Приклад 9.11**

*Методом характеристик розв'яжемо задачу Коші для рівняння* $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} - 4 = 0$ *із початковою умовою* $u|_{y=1} = x\ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.





Позначимо $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ $(F(x, y, u, p, q) \equiv pq - 4)$ і випишемо систему характеристик даного рівняння у вигляді (9.31):

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{du}{2pq} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0}.$$

Незалежні перші інтеграли системи характеристик мають вигляд

$$pq - 4 = c_1,\ p = c_2,\ u - 2px = c_3,\ px - qy = c_4.$$

Початкову умову задають рівняння

$$x = s,\ y = 1,\ u(s, 1) = s\ \ (s \in \mathbb{R}).$$

Із системи (9.27) дістаємо: $p(s)q(s) = 4$, $p(s) = 1$, $q(s) = 4$. Таким чином, система рівнянь даної задачі Коші має вигляд

$$pq - 4 = c_1,\ p = c_2,\ u - 2px = c_3,\ px - qy = c_4,\ x = s,\ y = 1,$$
$$u = s,\ p(s) = 1,\ q(s) = 4.$$

Звідси $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -s$, $c_4 = s - 4$, $p = 1$, $q = 4$, $u - 2x = -s$, $x - 4y = s - 4$. Виключаючи $s$ із двох останніх рівнянь, дістаємо єдиний розв'язок даної задачі Коші $u = x + 4y - 4$. Зауважимо, що в даному випадку умова (9.28) виконується:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial q} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial s} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q(s) & p(s) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -p(s) = -1 \neq 0.$$

❑ **Приклад 9.12**

*Розглянемо задачу Коші*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 4u = 0,\ u|_{x=0} = y^2\ \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Позначимо $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ $(F(x, y, u, p, q) \equiv p^2 + q^2 - 4u)$. Систему характеристик цього рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = 2p,\ \frac{dy}{dt} = 2q,\ \frac{du}{dt} = 2(p^2 + q^2),\ \frac{dp}{dt} = 4p,\ \frac{dq}{dt} = 4q.$$

Параметричні рівняння кривої $\gamma: x = 0$ і початкова умова (9.21) мають відповідно такий вигляд: $x = 0$, $y = s$ $(s \in \mathbb{R})$; $u(0, s) = s^2$. Складаємо систему (9.27):

$$p^2(s) + q^2(s) = 4s^2, \quad q(s) = 2s$$

і розв'язуємо її відносно $p(s)$, $q(s)$: $p(s) = 0$, $q(s) = 2s$. Зазначимо, що в цьому випадку визначник

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial q} \\ \dfrac{\partial \theta_1}{\partial s} & \dfrac{\partial \theta_2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p(s) & 2q(s) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2p(s)$$

дорівнює нулю й умова (9.28) не виконується. Далі розв'язуємо задачу Коші для системи характеристик із початковими умовами

$$x|_{t=0} = 0, \ y|_{t=0} = s, \ u|_{t=0} = s^2, \ p|_{t=0} = 0, \ q|_{t=0} = 2s.$$

Дістаємо: $q = 2se^{4t}$, $p = 0$, $u = s^2e^{8t}$, $y = se^{4t}$, $x = 0$. Звідси $u = y^2$. Легко перевірити, що дана задача Коші має ще один розв'язок $u = x^2 + y^2$.

❑ **Приклад 9.13**

*Розглянемо задачу Коші*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad u|_{x^2+y^2=1} = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Як і раніше, позначимо $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ $(F(x, y, u, p, q) \equiv p^2 + q^2 - 1)$. Систему характеристик запишемо в симетричній формі:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{du}{2(p^2+q^2)} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0}.$$

Незалежні перші інтеграли системи характеристик мають вигляд

$$p^2 + q^2 - 1 = c_1, \quad p = c_2, \quad q = c_3, \quad pu - x = c_4.$$

Початкову умову задають рівняння

$$x = \cos s, \ y = \sin s \quad (s \in [0, 2\pi]), \quad u(\cos s, \sin s) = 0.$$





Із системи (9.27) дістаємо: $p^2(s) + q^2(s) = 1$, $-p(s)\sin s + q(s)\cos s = 0$, звідки $p(s) = \cos s$, $q(s) = \sin s$ [або $p(s) = -\cos s$, $q(s) = -\sin s$]. Таким чином, система рівнянь задачі Коші має вигляд: $p^2 + q^2 - 1 = c_1$, $p = c_2$, $q = c_3$, $pu - x = c_4$, $x = \cos s$, $y = \sin s$, $u = 0$, $p(s) = \cos s$, $q(s) = \sin s$. Звідси $c_2 = \cos s$, $c_3 = \sin s$, $c_1 = 0$, $c_4 = -\cos s$. Маємо $u\cos s - x = -\cos s$, звідки $u = \dfrac{x}{\cos s} - 1$. Урахувавши, що $\cos s = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, дістанемо $u = \sqrt{x^2+y^2} - 1$. Якщо вибрати $p(s) = -\cos s$, $q(s) = -\sin s$, то $u = -\sqrt{x^2+y^2} + 1$.

Зауважимо, що розглянуте в цьому прикладі рівняння є окремим випадком так званого *рівняння ейконала* $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{1}{c^2}$, яке описує поширення світлових променів у однорідному ізотропному середовищі ($c$ = const — швидкість світла).

У задачах механіки при дослідженні руху системи зі скінченним числом ступенів вільності важливу роль відіграє *рівняння Гамільтона—Якобі* [5, 7]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H(t, x, p) = 0, \tag{9.32}$$

де $v = v(x, t)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, яке є окремим випадком рівняння (9.1). Система характеристик цього рівняння має вигляд

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n), \tag{9.33}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} - H. \tag{9.34}$$

Систему (9.33) називають *системою канонічних рівнянь Гамільтона.* Однією з основних задач механіки є знаходження інтегралів системи (9.33). Система канонічних рівнянь Гамільтона не містить функції $v$ і може бути зінтегрована незалежно від рівняння (9.34). Після цього функцію $v$ можна знайти з (9.34) за допомогою квадратури.

Якщо функція $H$ не залежить явно від $t$, то вона є інтегралом системи (9.33). Справді,

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)\equiv 0.$$

Якщо відома однопараметрична сім'я розв'язків рівняння Гамільтона—Якобі (9.32): $v(t, x, a)$ ($a \in \mathbb{R}$ — параметр), то відомий також інтеграл $\frac{\partial v}{\partial a}$ системи (9.33). Справді,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial a}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial a}\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial a}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial a}\frac{\partial H}{\partial p_j}.$$

Диференціюючи тотожність

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x, a)\equiv -H\left(t, x, \frac{\partial v}{\partial x}(t, x, a)\right)$$

по параметру $a$, дістаємо

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial a}\equiv -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial a}.$$

Звідси випливає, що $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)\equiv 0$ і, отже, $\frac{\partial v}{\partial a}$ є інтегралом системи канонічних рівнянь Гамільтона (9.33).

Розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, який містить стільки довільних числових параметрів, скільки є незалежних змінних, називають ***повним інтегралом*** цього рівняння. Оскільки рівняння Гамільтона—Якобі містить лише похідні невідомої функції, то повний інтеграл рівняння має вигляд $v = v(t, x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_n) + a$, де $a_1, ..., a_n, a$ — числові параметри. Справджується ***теорема Остроградського—Якобі*** [7]: ***якщо відомий повний інтеграл $v(t, x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_n) + a$ рівняння Гамільтона—Якобі, то всі перші інтеграли системи канонічних рівнянь Гамільтона*** (9.33) ***визначені рівностями***

$$\frac{\partial v}{\partial a_k}=b_k,\quad \frac{\partial v}{\partial x_k}=p_k \quad (k=1, ..., n).$$

**❑ Приклад 9.14**

*Розглянемо рівняння Гамільтона—Якобі* $\frac{\partial v}{\partial t}+H(p)=0$, *в якому* $H(p)=-\frac{1}{2}p^2$, $v=v(t, x)$ $((t, x)\in\mathbb{R}^2)$.

Неважко переконатися, що повний інтеграл цього рівняння має вигляд $v=\frac{1}{2}a_1^2 t+a_1 x+a$, де $a_1$, $a$ — числові параметри. Справді, $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{2}a_1^2$, $p=\frac{\partial v}{\partial x}=a_1$. Підставивши в рівняння, дістанемо $\frac{1}{2}a_1^2-\frac{1}{2}a_1^2=0$. Згідно з теоремою Остроградського—Якобі перші інтеграли відповідної канонічної системи Гамільтона записуються так: $\frac{\partial v}{\partial a_1}\equiv a_1 t+x=b_1$, $\frac{\partial v}{\partial x}\equiv a_1=p$, де $a_1$, $b_1$ — довільні сталі.





✍ Пропонуємо самостійно показати, що у випадку, коли функція $H$ залежить тільки від $p=(p_1, ..., p_n)$ : $H=H(p)$, повний інтеграл рівняння Гамільтона—Якобі має вигляд

$$v=-H(a_1, ..., a_n)t+\sum_{k=1}^{n}a_k x_k+a,$$

де $a_1, ..., a_n, a$ — числові параметри, а всі перші інтеграли системи канонічних рівнянь (9.33) можна визначити із системи

$$\frac{\partial v}{\partial a_k}\equiv -\frac{\partial H}{\partial a_k}t+x_k=b_k,\quad \frac{\partial v}{\partial x_k}\equiv a_k=p_k \quad (k=1, ..., n),$$

де $a_k$, $b_k$ — довільні сталі.

## 9.5

## Рівняння Пфаффа. Метод Лагранжа—Шарпі відшукання повного інтеграла

***Рівнянням Пфаффа**** в $\mathbb{R}^3$ називають рівняння вигляду

$$P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz=0. \tag{9.35}$$

До рівняння Пфаффа приводить, наприклад, задача про відшукання сім'ї поверхонь у $\mathbb{R}^3$ $U(x, y, z)=c=\text{const}$, ортогональних до векторних ліній векторного поля $F=\{P, Q, R\}$. Якщо $\tau=(dx, dy, dz)$ — вектор, який лежить у площині, дотичній до шуканих поверхонь, то (9.35) є умовою ортогональності векторів $F$ і $\tau$ : $(F, \tau)=0$.

* Із теорією рівнянь Пфаффа в $\mathbb{R}^n$ ($n\ge 3$) можна ознайомитися в [34]. При $n=2$ рівняння Пфаффа має вигляд $P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$ і є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, записаним у симетричній формі (див. п. 3.2).

Стосовно функцій $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ припустимо, що вони неперервно диференційовні в деякій області $D$ простору $\mathbb{R}^3$ змінних $x$, $y$, $z$ і що в цій області виконується умова

$$P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0.$$

Вважаючи, що $R \neq 0$ в області $D$, рівняння (9.35) перепишемо у вигляді

$$dz = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy, \tag{9.36}$$

де

$$A \equiv A(x, y, z) \equiv -\frac{P}{R}, \quad B \equiv B(x, y, z) \equiv -\frac{Q}{R}. \tag{9.37}$$

Рівняння (9.36) еквівалентне системі двох рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z). \tag{9.38}$$

Систему (9.38) називають *повністю інтегровною,* якщо вона має розв'язок $z = \varphi(x, y, c)$, залежний від довільної сталої. Рівняння Пфаффа (9.36) називають *повністю (цілком) інтегровним*, якщо повністю інтегровна відповідна система (9.38).

Нехай система (9.38) повністю інтегровна. Диференціюючи першу з рівностей (9.38) по $y$, а другу — по $x$, дістанемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}A.$$

Звідси, на підставі неперервності мішаної похідної $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, маємо

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}B \equiv \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}A \quad ((x, y, z) \in D). \tag{9.39}$$

Таким чином, тотожність (9.39) є необхідною для того, щоб система (9.38) була повністю інтегровною, тобто мала розв'язок $z = \varphi(x, y, c)$.

Покажемо, що тотожність (9.39) насправді є й достатньою умовою повної інтегровності системи (9.39).

Нехай умова (9.39) виконується. Розглянемо *практичний спосіб інтегрування системи (9.38)* і (одночасно) *рівняння Пфаффа (9.36).*

Зінтегруємо перше з рівнянь системи (9.38), вважаючи $y$ параметром: $z = \psi(x, y, \xi(y))$, і підставимо в друге рівняння: $\psi'_y + \psi'_\xi \xi'(y) = B$, або





$$\xi'(y) = \frac{B - \psi'_y}{\psi'_\xi}. \tag{9.40}$$

Покажемо, що права частина (9.40) не містить $x$. Маємо:

$$\left(\frac{B - \psi'_y}{\psi'_\xi}\right)'_x = \frac{1}{(\psi'_\xi)^2}\left[(B'_x + B'_z\psi'_x - \psi''_{yx})\psi'_\xi - \psi''_{\xi x}(B - \psi'_y)\right].$$

Далі враховуємо, що функція $\psi$ задовольняє перше рівняння системи (9.38):

$$\psi'_x = A, \quad \psi''_{yx} = \psi''_{xy} = A'_y + A'_z\psi'_y, \quad \psi''_{\xi x} = \psi''_{x\xi} = A'_z\psi'_\xi.$$

Використовуючи ці співвідношення й умову (9.39), дістанемо

$$\left(\frac{B - \psi'_y}{\psi'_\xi}\right)'_x = \frac{1}{(\psi'_\xi)^2}\left[(B'_x + B'_z A - A'_y - A'_z\psi'_y)\psi'_\xi - A'_z\psi'_\xi(B - \psi'_y)\right] =$$
$$= \frac{\psi'_\xi}{(\psi'_\xi)^2}\left[A'_y + A'_z B - A'_y - A'_z\psi'_y - A'_z B + A'_z\psi'_y\right] \equiv 0.$$

**Отже, (9.40) є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку відносно функції $\xi(y)$. Зінтегрувавши це рівняння, дістанемо $\xi(y) = \eta(y, c)$, де $c$ — довільна стала. Функція $z = \psi(x, y, \eta(y, c)) \equiv \varphi(x, y, c)$ є розв'язком системи (9.38), який містить довільну сталу. Таким чином, умова (9.39) є необхідною й достатньою для повної інтегровності системи (9.38) [рівняння Пфаффа (9.36)].**

Якщо в (9.39) урахувати формули (9.37) і виконати необхідні перетворення, то умову повної інтегровності рівняння Пфаффа (9.35) можна записати у вигляді

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

або

$$(F, \operatorname{rot} F) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in D. \tag{9.41}$$

Цей факт пропонуємо довести самостійно.

**❑ Приклад 9.15**

*Розглянемо рівняння Пфаффа* $3yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0$.

Маємо: $P = 3yz$, $Q = 2xz$, $R = xy$, $\operatorname{rot} F = (x - 2x, 3y - y, 2z - 3z) = (-x, 2y, -z)$. Тому $(F, \operatorname{rot} F) = -3yzx + 2xz \cdot 2y - xyz \equiv 0$ і дане рівняння повністю інтегровне.

В області $xy \neq 0$ дане рівняння запишемо у вигляді $dz = -\frac{3z}{x}dx - \frac{2z}{y}dy$. Звідси маємо систему $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3z}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2z}{y}$. Зінтегрувавши перше рівняння, вважаючи $y$ параметром, дістанемо $z = \xi(y)x^{-3}$. Підставимо в друге рівняння системи: $\xi'(y) = -\frac{2\xi(y)}{y}$, звідки $\xi(y) = \frac{c}{y^2}$ і $z = \frac{c}{x^3y^2}$.

Розглянемо ***метод Лагранжа—Шарпі*** побудови повного інтеграла рівняння

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{9.42}$$

де $z = z(x, y)$ — шукана функція, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, який зводить відшукання повного інтеграла до інтегрування деякого рівняння Пфаффа.

Співвідношення

$$v(x, y, z, a, b) = 0, \tag{9.43}$$

яке неявно визначає розв'язок рівняння (9.42) і містить дві довільні сталі $a$ і $b$, називають *повним інтегралом Лагранжа рівняння (9.42)*, якщо з нього та з рівнянь

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

виключенням сталих $a$ і $b$ можна дістати рівняння (9.42).

**❑ Приклад 9.16**

*Покажемо, що* $z = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{a}y^2 + b$ ***є повним інтегралом рівняння*** $pq - 2xy = 0$.

Маємо: $p = \frac{\partial z}{\partial x} = ax$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{a}y$ і $pq - 2xy = ax\frac{2}{a}y - 2xy \equiv 0$, тобто при будь-яких сталих $a \neq 0$ і $b$ функція $z$ є розв'язком даного рівняння. Виключивши з рівнянь $\frac{\partial z}{\partial x} = ax$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{a}y$ сталу $a$, дістанемо дане рівняння $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$.

Для рівняння (9.42) складемо систему характеристик у симетричній формі (9.31):

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} = \frac{-dp}{F'_x + pF'_z} = \frac{-dq}{F'_y + qF'_z}. \tag{9.44}$$





Нехай $\Phi(x, y, z, p, q) = a$ ($a$ — довільна стала) — один з інтегралів системи (9.44), такий, що система рівнянь

$$\begin{aligned} &F(x, y, z, p, q) = 0, \\ &\Phi(x, y, z, p, q) = a \end{aligned} \tag{9.45}$$

однозначно розв'язується відносно $p$ і $q$:

$$p \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z), \quad q \equiv \frac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z) \tag{9.46}$$

і визначник $J = \begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix} \neq 0$.

Покажемо, що умова повної інтегровності (9.39) системи (9.46) виконується. Із системи (9.45) знаходимо похідні неявно заданих функцій $p$ і $q$:

$$p'_y = A'_y = \frac{1}{J}(F'_q\Phi'_y - \Phi'_qF'_y), \quad p'_z = A'_z = \frac{1}{J}(F'_q\Phi'_z - \Phi'_qF'_z),$$

$$q'_x = B'_x = \frac{1}{J}(F'_x\Phi'_p - F'_p\Phi'_x), \quad q'_z = B'_z = \frac{1}{J}(F'_z\Phi'_p - F'_p\Phi'_z).$$

Оскільки $\Phi = a$ — інтеграл системи (9.44), то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi'_xF'_p + \Phi'_yF'_q + \Phi'_z(pF'_p + qF'_q) - \Phi'_p(F'_x + pF'_z) - \Phi'_q(F'_y + qF') \equiv 0.$$

Перевіряємо умову (9.39):

$$A'_y + A'_zB - B'_x - B'_zA = \frac{1}{J}|F'_q\Phi'_y - \Phi'_qF'_y + (F'_q\Phi'_z - \Phi'_qF'_z)B -$$
$$-F'_x\Phi'_p + F'_p\Phi'_x - (F'_z\Phi'_p - F'_p\Phi'_z)A| =$$
$$= \frac{1}{J}|F'_p\Phi'_x + \Phi'_yF'_q + \Phi'_z(pF'_p + qF'_q) - \Phi'_p(F'_x + pF'_z) - \Phi'_q(F'_y + qF'_z)| \equiv 0.$$

Далі, інтегруючи рівняння Пфаффа

$$dz = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy \tag{9.47}$$

(під час інтегрування цього рівняння з'являється ще одна довільна стала $b$), дістанемо повний інтеграл рівняння (9.42).

Отже, маємо таку *схему методу Лагранжа—Шарпі*:

- за рівнянням (9.42) складаємо систему характеристик (9.44);
- знаходимо який-небудь інтеграл системи (9.44) вигляду $\Phi = a$ ($a$ — довільна стала) такий, щоб систему (9.45) можна було однозначно розв'язати відносно $p$ і $q$;
- інтегруємо рівняння Пфаффа (9.47) і дістаємо повний інтеграл рівняння (9.42).

**❑ Приклад 9.17**

*Методом Лагранжа—Шарпі знайдемо повні інтеграли таких рівнянь:*

$$\text{а) } p - \varphi(q) = 0; \quad \text{б) } xp + yq + pq - z = 0.$$

Дістаємо:

а) $F = p - \varphi(q)$. Система характеристик має вигляд $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{-\varphi'(q)} = \dfrac{dz}{p - q\varphi'(q)} = \dfrac{-dp}{0} = \dfrac{-dq}{0}$. Звідси

$$p = \varphi(q), \ q = a, \ dz = \varphi(a)\,dx + a\,dy, \ z = \varphi(a)x + ay + b.$$

б) $F = xp + yq + pq - z$. Із системи характеристик $\dfrac{dx}{x+q} = \dfrac{dy}{y+p} = \dfrac{dz}{px + qy + 2pq} = \dfrac{-dp}{0} = \dfrac{-dq}{0}$ маємо $p = a$. Із системи $xp + yq + pq - z = 0$, $p = a$ знаходимо $p = a$, $q = \dfrac{z - ax}{y + a}$. Звідси

$$z = ax + \xi(y), \ \xi'(y) = \frac{\xi(y)}{y+a}, \ \xi(y) = b(y+a), \ z = ax + by + ab.$$

**❑ Приклад 9.18**

*Знайдемо повний інтеграл рівняння* $\varphi_1(x, p) - \varphi_2(y, q) = 0$.

Покладемо $\varphi_1(x, p) = \varphi_2(y, q) = a$. Якщо звідси знайти $p = \psi_1(x, a)$, $q = \psi_2(y, a)$, то дістанемо рівняння Пфаффа $dz = \psi_1(x, a)\,dx + \psi_2(y, a)\,dy$, інтегруючи яке, матимемо повний інтеграл

$$z = \int \psi_1(x, a)\,dx + \int \psi_2(y, a)\,dy + b.$$





✍ Пропонуємо самостійно перевірити, що дані функції є повними інтегралами даних диференціальних рівнянь:

① $z = a(x^2 + y^2) + b, \quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

② $z = \sqrt{2ax + a^2y^2 + b}, \quad \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 yz - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

③ $z = -\dfrac{a^2}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}y\sqrt{a^2 - y^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{y}{a} + b, \quad 2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + y^2 = 0;$

④ $z = ax + by + \varphi(a, b), \quad z - x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} - \varphi\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$

Насамкінець зазначимо, що коли відомий повний інтеграл рівняння (9.42), то задачу інтегрування цього рівняння вважають формально завершеною, оскільки інші розв'язки дістають з нього диференціюванням і виключенням.

Глава 10

# ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ТЕОРЕМИ ФРЕДГОЛЬМА

## 10.1

## Класифікація лінійних рівнянь

*Інтегральним* називають рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла, наприклад,

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds \quad (t \in [a, b]) \tag{10.1}$$

або

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds \quad (t \in [a, b]). \tag{10.2}$$

Тут $K(t, s)$ і $f(t)$ — задані функції, а $\varphi(t)$ — шукана. Функцію $K(t, s)$ називають *ядром інтегрального рівняння*, а $f(t)$ — *вільними членом*; $\lambda$ — параметр (з $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). У випадку (10.1) ядро $K(t, s)$ визначене в квадраті $Q$:

$$Q = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le t \le b,\ \ a \le s \le b\} = [a, b]\times[a, b], \tag{10.3}$$

а у випадку (10.2) — в трикутнику $\Delta$:

$$\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le t \le b,\ \ a \le s \le t\}. \tag{10.4}$$

В обох випадках функція $f(t)$ визначена на проміжку $a \le t \le b$.





Рівняння (10.1) і (10.2) належать до класу *лінійних інтегральних рівнянь:* шукана функція $\varphi(t)$ входить у ці рівняння лінійно. Далі розглядатимуться лише лінійні рівняння.

Якщо шукана функція міститься лише під знаком інтеграла, то рівняння називають *інтегральним рівнянням першого роду*. Наприклад,

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds = f(t) \tag{10.5}$$

або

$$\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds = f(t). \tag{10.6}$$

Рівняння (10.1) і (10.2), в яких шукана функція міститься також і поза знаком інтеграла, називають *інтегральними рівняннями другого роду*.

Якщо межі інтегрування фіксовані, то інтегральне рівняння називають *рівнянням Фредгольма* [(10.1), (10.5)]; якщо ж межі інтегрування змінні, то інтегральне рівняння називають *рівнянням Вольтерра* [(10.2), (10.6)].

Рівняння (10.1), (10.2), (10.5), (10.6) називають *однорідними*, якщо $f(t) \equiv 0$, а в противному разі — *неоднорідними*.

Надалі, як правило, припускаємо, що ядро $K(t, s)$ і вільний член $f(t)$ є неперервними функціями або ж задовольняють умови інтегровності

$$\iint\limits_Q |K(t, s)|^2\,dt\,ds < \infty, \quad \iint\limits_\Delta |K(t, s)|^2\,dt\,ds < \infty,$$

$$\int_a^b |f(t)|^2\,dt < \infty.$$

Наявність знака модуля зумовлена тим, що до розгляду допускаються й комплекснозначні функції.

*Розв'язком інтегрального рівняння* називають функцію $\varphi(t)$, яка перетворює його на тотожність по $t \in [a, b]$.

Наведемо приклади інтегральних рівнянь різних типів та їх розв'язків:

1) $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2} - \displaystyle\int_0^t \frac{s}{1+t^2}\varphi(s)\,ds$; $\varphi(t) = (1+t^2)^{-3/2}$;

2) $\int_0^t (t-s)^2 \varphi(s)\,ds = t^3$; $\varphi(t) = 3$;

3) $\varphi(t) = e^{-t} + \lambda \int_0^1 te^s \varphi(s)\,ds$; $\varphi(t) = e^{-t} + \dfrac{\lambda t}{1-\lambda}$ $(\lambda \ne 1)$;

4) $\varphi(t) = \dfrac{8}{\pi - 2}\int_0^{\pi/4} \sin^2 t\,\varphi(s)\,ds$; $\varphi(t) = \sin^2 t$;

5) $\int_0^1 e^{t-s}\varphi(s)\,ds = 0$;

6) $\int_{-1}^1 (ts^2 + t^2 s)\varphi(s)\,ds = \varphi(t)$.

✍ Самостійно визначте, до якого типу належить кожне з рівнянь. Перевірте вказані розв'язки. Спробуйте знайти нетривіальний ($\varphi(t) \not\equiv 0$) розв'язок рівнянь 5) і 6).

## 10.2

## Задачі, які приводять до інтегральних рівнянь

Однією з таких задач є **задача про відновлення функції $f(t)$ за її перетворенням Фур'є:**

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt. \tag{10.7}$$

Як відомо, функцію $f(t)$ можна знайти за формулою

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{10.8}$$

Можна вважати, що формула (10.8) дає розв'язок інтегрального рівняння (10.7), в якому $f(t)$ — шукана функція, а $F(\omega)$ — задана, або навпаки.





**Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку**

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

теж приводить до інтегрального рівняння (див. п. 3.4):

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))\,ds.$$

Це рівняння, взагалі кажучи, нелінійне.

Розв'язання **початкової задачі для лінійних диференціальних рівнянь** приводить до лінійних рівнянь Вольтерра другого роду.

Нехай, наприклад, маємо диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + [\lambda^2 - p(t)]x(t) = 0 \quad (p(t) \in C_{[0,\,+\infty)}) \tag{10.9}$$

і початкові умови $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Розглянувши неоднорідне рівняння $\ddot{x} + \lambda^2 x = g(t)$ $(\lambda \ne 0)$ з тими самими початковими умовами, де $g(t)$ — деяка неперервна функція, за методом Лагранжа (див. п. 4.2) знайдемо

$$x(t) = x_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{x}_0}{\lambda}\sin \lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin \lambda(t-s)g(s)\,ds.$$

Повертаючися до рівняння (10.9), в якому $g(t) = p(t)\,x(t)$, дістанемо

$$x(t) = x_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{x}_0}{\lambda}\sin \lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin \lambda(t-s)p(s)x(s)\,ds.$$

Це інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно $x(t)$:

$$f(t) = x_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{x}_0}{\lambda}\sin \lambda t, \quad K(t, s) = \sin \lambda(t-s)p(s).$$

Розглянемо загальніший випадок і застосуємо інший метод. Нехай маємо задачу Коші

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=g(t);\quad x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0,$$

де функції $g(t), p(t), x(t)$ неперервні, наприклад, при $t \geq 0$.

Покладемо $\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi(t)$. Беручи до уваги початкові умови і формулу $\int_0^t d\tau \int_0^\tau \varphi(s)\,ds=\int_0^t (t-s)\varphi(s)\,ds$, знаходимо

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^t \varphi(s)\,ds+\dot{x}_0,\quad x(t)=\int_0^t (t-s)\varphi(s)\,ds+\dot{x}_0 t+x_0.$$

Підставимо тепер вирази для $\frac{dx}{dt}$, $x(t)$ і $\frac{d^2x}{dt^2}$ у диференціальне рівняння. Відносно $\varphi(t)$ дістанемо

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

де $f(t)=g(t)-\dot{x}_0 p(t)-\dot{x}_0 t q(t)-x_0 q(t)$, $K(t,s)=-[p(t)+q(t)(t-s)]$. Це інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Якщо функцію $\varphi(t)$ знайдено з цього рівняння, то

$$x(t)=\int_0^t (t-s)\varphi(s)\,ds+\dot{x}_0 t+x_0.$$

**Задача Абеля** історично є першою задачею (1823 р.), яка привела до необхідності розгляду інтегрального рівняння.

Постановка задачі Абеля така. Матеріальна точка під дією сили ваги рухається у вертикальній площині $(\xi, \eta)$ по деякій кривій. Слід визначити цю криву так, щоб матеріальна точка, яка починає свій рух у точці кривої з ординатою $x$, досягла б осі $O\xi$ за час $t=\psi(x)$, де $\psi(x)$ — задана функція. При цьому вважаємо, що матеріальна точка починає рух із нульовою швидкістю, а тертя немає. При $\psi(x)=\text{const}$ дістаємо задачу про таутохрону — криву, рухаючися вздовж якої без тертя, матеріальна точка досягає свого найнижчого положення за один і той самий час, незалежно від початкового положення.





Згідно із законом збереження енергії маємо

$$\frac{mv^2}{2}=mg(x-\eta).$$

Звідси дістаємо абсолютне значення швидкості рухомої точки:

$$v=\sqrt{2g(x-\eta)}.$$

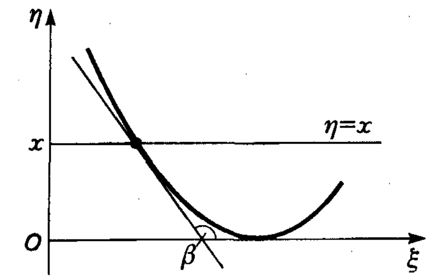

**Рис. 10.1**

Позначимо через $\beta=\beta(\eta)$ кут нахилу дотичної до осі $O\xi$ (рис. 10.1). Тоді для складової вектора швидкості вздовж осі $O\eta$ матимемо

$$\frac{d\eta}{dt}=-\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta,$$

звідки

$$dt=-\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}.$$

Інтегруючи по $\eta$ в межах від 0 до $x$ і по $t$ в межах від 0 до $t=\psi(x)$, дістанемо *рівняння Абеля* відносно функції $\varphi(\eta)=\frac{1}{\sin\beta}$:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\,d\eta=f(x).$$

Тут $f(x)=-\sqrt{2g}\cdot\psi(x)$.

Якщо функцію $\varphi(\eta)$ знайдено, то можемо скласти параметричні рівняння шуканої кривої. Справді, $\varphi(\eta)=1/\sin\beta$, звідки $\eta=\Phi(\beta)$; крім цього, $d\xi=\frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\Phi'(\beta)\,d\beta}{\operatorname{tg}\beta}$. Тому

$$\xi=\int\frac{\Phi'(\beta)\,d\beta}{\operatorname{tg}\beta}=\Psi(\beta).$$

Отже, шукану криву можна задати параметричними рівняннями

$$\xi = \Psi(\beta), \quad \eta = \Phi(\beta).$$

**Задача про малі коливання струни** також зводиться до інтегрального рівняння.

Маємо пружну струну завдовжки $l$, яка без опору змінює свою форму, проте для збільшення її довжини на величину $\Delta l$ згідно із законом Гука потрібна сила $\gamma \cdot \Delta l$, де $\gamma$ — деяка стала. Нехай кінці струни закріплено в точках $A$ та $B$ (рис. 10.2). Якщо струна перебуває в стані спокою під дією лише горизонтальної сили натягу $T_0$, яка дуже велика порівняно з іншими силами, що діють, то положення струни збігається з відрізком $AB$ осі $Ox$.

Припустимо тепер, що в точці $C_0$ з координатами $(\xi, 0)$ до струни прикладена вертикальна сила $P$. Під дією цієї сили струна набирає форми ламаної $ACB$. Вважатимемо відрізок $CC_0$ дуже малим порівняно з відрізками $AC_0$ і $C_0B$ (результат малості $P$ порівняно з $T_0$) і що натяг струни дорівнює $T_0$ і в разі дії сили $P$.

Спроектуємо на вертикальну вісь силу натягу струни в точці $C$ і силу $P$. Із умови рівноваги дістанемо

$$T_0 \sin\alpha + T_0 \sin\beta = P. \tag{10.10}$$

Унаслідок малості величини $\delta$ маємо $\sin\alpha \approx \dfrac{\delta}{\xi}$, $\sin\beta \approx \dfrac{\delta}{l-\xi}$. Тому умова (10.10) набирає вигляду $T_0\dfrac{\delta}{\xi} + T_0\dfrac{\delta}{l-\xi} = P$, звідки $\delta = P\dfrac{(l-\xi)\xi}{T_0 l}$.

Знайдемо тепер відхилення $y(x)$ струни від положення рівноваги в точці з абсцисою $x \le \xi$. Шукаємо $y(x)$ у вигляді

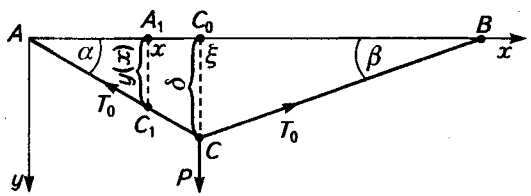


**Рис. 10.2**





$$y(x) = P \cdot G(x, \xi). \tag{10.11}$$

З подібності трикутників $AC_0C$ та $AA_1C$ знаходимо

$$\frac{y(x)}{\delta(\xi)} = \frac{x}{\xi} \quad \text{або} \quad \frac{PG(x,\xi)}{\delta(\xi)} = \frac{x}{\xi}.$$

Звідси

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{T_0 l} & (0 \le x \le \xi), \\ \dfrac{(l-x)\xi}{T_0 l} & (\xi \le x \le l). \end{cases} \tag{10.12}$$

Якщо на струну діє неперервно розподілена вздовж неї сила з лінійною щільністю $p(\xi)$, то на ділянку струни $[\xi, \xi + \Delta\xi]$ діє сила, що приблизно дорівнює $p(\xi)\Delta\xi$ і спричиняє відхилення $G(x, \xi)p(\xi)\Delta\xi$. Принцип суперпозиції дає змогу зробити висновок, що під дією всіх елементарних сил відхилення струни $y(x)$ у точці з абсцисою $x$ становитиме

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\,d\xi. \tag{10.13}$$

Функцію $G(x, \xi)$ з (10.12) називають ***функцією впливу***: вона характеризує вплив сили, прикладеної до струни в точці з абсцисою $\xi$, на відхилення струни в точці з абсцисою $x$.

Якщо треба знайти щільність розподілу сили $p(\xi)$, під впливом якої струна набере заданої форми $y = y(x)$, то (10.13) — не що інше, як інтегральне рівняння Фредгольма першого роду відносно функції $p(\xi)$.

Припустимо тепер, що на струну діє змінна в часі $t$ сила зі щільністю розподілу в точці $\xi$: $p(\xi)\sin\omega t$. Під впливом цієї сили струна рухатиметься. Вважатимемо, що струна здійснює періодичні коливання за законом

$$u = u(x, t) = y(x)\sin\omega t.$$

Якщо $\rho(\xi)$ — лінійна щільність розподілу маси струни в точці $\xi$, то в момент часу $t$ на ділянку струни $[\xi, \xi + \Delta\xi]$, крім сили $p(\xi)\sin\omega t \cdot \Delta\xi$, діє ще сила інерції

$$-\rho(\xi)\Delta\xi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho(\xi)y(\xi)\omega^2 \sin\omega t \cdot \Delta\xi.$$

У цьому випадку рівняння (10.13) набирає вигляду

$$y(x)\sin\omega t = \int_0^l G(x, \xi)[p(\xi)\sin\omega t + \omega^2\rho(\xi)y(\xi)\sin\omega t]d\xi.$$

Скоротимо на $\sin\omega t$ і покладемо

$$\int_0^l G(x, \xi)p(\xi)\,d\xi = f(x), \quad G(x, \xi)\rho(\xi) = K(x, \xi), \quad \omega^2 = \lambda.$$

Тоді відносно $y(x)$ дістанемо рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_0^l K(x, \xi)y(\xi)\,d\xi.$$

## 10.3

## Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма

Нагадаємо спочатку теорему Банаха, яку називають ***принципом стискуючих відображень*** (див. п. 3.1).

**Теорема 10.1**

Нехай оператор $A$ переводить повний метричний простір $X$ у себе і є стискуючим. Тоді існує єдина нерухома точка $x_0 \in X$ оператора $A$: $Ax_0 = x_0$.

Теорема 10.1 допускає низку узагальнень. Наведемо одне з них.





**Теорема 10.2**

Нехай оператор $A$, що переводить повний метричний простір $X$ у себе, є неперервним, причому знайдеться таке натуральне число $n$, що оператор $B = A^n$ стискуючий. Тоді оператор $A$ має єдину нерухому точку.

**Доведення**

Оператор $A : X \to Y$ ($X$, $Y$ — метричні простори) називають неперервним у точці $x_0 \in X$, якщо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in X : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon.$$

Крім того, за означенням $A^2x = A(Ax)$ і т. д.

Побудуємо послідовність $x_k : x_{k+1} = Bx_k$ ($k \geq 1$, $x_1 \in X$ довільне). Оцінимо $\rho(Ax_k, x_k)$. Маємо

$$\rho(Ax_k, x_k) = \rho(A(Bx_{k-1}), Bx_{k-1}) = \rho(B(Ax_{k-1}), Bx_{k-1}) \leq$$

$$\leq q\rho(Ax_{k-1}, x_{k-1}) \leq \ldots \leq q^{k-1}\rho(Ax_1, x_1) \underset{k\to+\infty}{\to} 0 \quad (0 \leq q < 1).$$

Оскільки оператор $B$ стискуючий, то за теоремою Банаха існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді, внаслідок неперервності оператора $A$, з останньої нерівності дістаємо $\rho(Ax_k, x_k) \underset{k\to\infty}{\to} \rho(Ax_0, x_0) = 0$. Тому $Ax_0 = x_0$. Отже, $x_0$ — нерухома точка оператора $A$. Водночас $x_0$ є нерухомою точкою й оператора $B$. Справді,

$$Bx_0 = A^n x_0 = A^{n-1}(Ax_0) = A^{n-1}(x_0) = \ldots = x_0.$$

Оскільки оператор $B$ стискуючий, то точка $x_0$ єдина.

**Рівняння Фредгольма другого роду.** Розглянемо рівняння

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds, \tag{10.14}$$

де $f(t) \in C_{[a, b]}$, $K(t, s) \in C_Q$.

Введемо до розгляду *інтегральний оператор Фредгольма*

$$\tilde{A}\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds, \quad \varphi(t) \in C_{[a,\,b]}.$$

Тоді рівняння (10.14) можна записати в операторній формі:

$$\varphi = f + \lambda\tilde{A}\varphi \quad \text{або} \quad (I - \lambda\tilde{A})\varphi = f, \tag{10.15}$$

де $I$ — одиничний оператор.

Шукатимемо розв'язок інтегрального рівняння (10.14) у просторі $C_{[a,\,b]}$. Розв'язком рівняння (10.14) називають функцію $\varphi_0(t) \in C_{[a,\,b]}$, яка перетворює це рівняння на тотожність:

$$\varphi_0(t) \equiv f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi_0(s)\,ds \quad (t \in [a, b]).$$

Зрозуміло, що при $\lambda = 0$ дістанемо $\varphi_0(t) \equiv f(t)$, і розв'язок єдиний. Покажемо, що рівняння (10.14) має розв'язок і до того ж єдиний і при досить малих $|\lambda|$.

Нехай $A$ — оператор, визначений формулою

$$A\varphi \overset{\text{def}}{=} f + \lambda\tilde{A}\varphi,$$

тобто

$$A\varphi \overset{\text{def}}{=} f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds.$$

Тоді рівняння (10.14) набирає вигляду $A\varphi = \varphi$ і йдеться про відшукання нерухомої точки оператора $A$. Дослідимо властивості цього оператора.

Нехай $\varphi(t) \in C_{[a,\,b]}$. Покажемо, що й функція $g(t) = A\varphi(t)$ теж належить простору $C_{[a,\,b]}$. Це випливає з оцінки:

$$|g(t+h) - g(t)| \le$$
$$\le |f(t+h) - f(t)| + |\lambda| \int_a^b |K(t+h, s) - K(t, s)|\,|\varphi(s)|\,ds < \varepsilon$$





при $|h| < \delta$ ($\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$), оскільки з факту неперервності функцій $f(t)$ і $K(t, s)$ маємо

$$|f(t+h) - f(t)| < \varepsilon/2 \text{ при } |h| < \delta_1,$$

$$|K(t+h, s) - K(t, s)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|\Phi(b-a)} \text{ при } |h| < \delta_2 \ \forall s \in [a, b],$$

де $\Phi = \max\limits_{a \le t \le b} |\varphi(t)|$. Отже, $A : C_{[a,\,b]} \mapsto C_{[a,\,b]}$.

З'ясуємо тепер, при яких значеннях $|\lambda|$ оператор $A$ стикуючий. Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{[a,\,b]}$. Тоді

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{a \le t \le b} |A\varphi_1 - A\varphi_2| = \max_{a \le t \le b} \left| \lambda\int_a^b K(t, s)[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]\,ds \right| \le$$
$$\le |\lambda|\,M(b-a) \max_{a \le t \le b} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = |\lambda|\,M(b-a)\rho(\varphi_1, \varphi_2),$$

де $M = \max\limits_{Q} |K(t, s)|$.

Отже, якщо виконується умова

$$|\lambda|\,M(b-a) < 1, \text{ або } |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \tag{10.16}$$

то оператор $A$ стискуючий.

Простір $C_{[a,\,b]}$ неперервних функцій із рівномірною метрикою повний. Тому можна сформулювати таку достатню умову існування розвитку рівняння (10.14).

**Теорема 10.3**
**(про існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду в просторі $C_{[a,\,b]}$)**

Для будь-якого $\lambda$, що задовольняє умову (10.16), інтегральне рівняння Фредгольма (10.14) із неперервним ядром $K(t, s)$ і неперервним вільним членом $f(t)$ має єдиний неперервний розв'язок $\varphi_0(t)$. Послідовні наближення $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ цього розв'язку визначаються за рекурентною схемою:

$$\varphi_{n+1}(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi_n(s)\,ds \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{10.17}$$

причому $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ $(\varphi_n(t) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_0(t))$, $\varphi_1(t)$ — довільна функція із $C_{[a,b]}$.

❑ **Приклад 10.1**

*Розглянемо рівняння*

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \lambda\int_0^1 ts\varphi(s)\,ds. \tag{10.18}$$

Ядро $K(t, s) = ts$ неперервне при $0 \le t, s \le 1$, $M = \max\limits_Q |K(t, s)| = \max\limits_Q |ts| = 1$. Отже, при $|\lambda| < 1$ розв'язок рівняння (10.18) можна знайти за схемою послідовних наближень:

$$\varphi_1(t) \equiv 0,$$
$$\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \lambda\int_0^1 t\cdot s\cdot 0\cdot ds = \frac{5}{6}t,$$
$$\varphi_3(t) = \frac{5}{6}t + \lambda\int_0^1 ts\frac{5}{6}s\,ds = \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{\lambda}{3}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(t) = \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \ldots + \frac{\lambda^n}{3^n}\right), \ldots$$

Легко бачити, що

$$\varphi_0(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \frac{5t}{2(3-\lambda)}.$$

Зберігаючи припущення про неперервність функцій $K(t, s)$ і $f(t)$, розглянемо рівняння (10.14) у просторі $L_{2[a,b]}$ функцій $x(t)$, інтегровних із квадратом:

$$\int_a^b x^2(t)dt < +\infty,$$

метрика в якому визначена формулою





$$\rho(x(t), y(t)) = \left(\int_a^b [y(t) - x(t)]^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Покажемо насамперед, що коли $x(t) \in L_{2[a,b]}$, то функція

$$\tilde{A}x(t) = y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds \in C_{[a,b]}.$$

Справді, для довільного $t_0 \in [a, b]$ маємо

$$|y(t) - y(t_0)| = \left|\int_a^b [K(t, s) - K(t_0, s)]x(s)\,ds\right| \le$$
$$\le \varepsilon\int_a^b |x(s)|\,ds \le \varepsilon\sqrt{b-a}\left(\int_a^b x^2(s)\,ds\right)^{1/2} \quad \forall t: |t - t_0| < \delta. \tag{10.19}$$

У (10.19) застосовано нерівність Коші—Буняковського й факт рівномірної неперервності ядра $K(t, s)$ на множині $Q$. Оскільки $\varepsilon > 0$ в (10.19) — довільний параметр, то функція $y(t) \in C_{[a,b]}$.

Отже, серед усіх функцій із $L_{2[a,b]}$ розв'язком інтегрального рівняння (10.14) з неперервними $K(t, s)$ та $f(t)$ може бути лише неперервна функція. Справді, якщо $\varphi_0 = \varphi_0(t) \in L_{2[a,b]}$ — розв'язок рівняння (10.14), то $\varphi_0 = \lambda\tilde{A}\varphi_0 + f \in C_{[a,b]}$, як було показано вище.

У просторі $L_{2[a,b]}$ знову приходимо до задачі про відшукання нерухомої точки оператора $A$:

$$L_{2[a,b]} \to C_{[a,b]} \subset L_{2[a,b]},$$

де $A\varphi \overset{\text{def}}{=} f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds.$

Покладемо $B^2 = \int_a^b\int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds$ і покажемо, що за умови

$$|\lambda| < 1/B \tag{10.20}$$

оператор $A : L_{2[a,b]} \to L_{2[a,b]}$ стискуючий. Для будь-яких $\varphi_1, \varphi_2 \in L_{2[a,b]}$ маємо

$$A\varphi_2 - A\varphi_1 = \lambda\int_a^b K(t, s)[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]ds.$$

Застосовуючи нерівність Коші—Буняковського, дістанемо

$$| A\varphi_2 - A\varphi_1 |^2 = \left(\lambda\int_a^b K(t, s)[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]ds\right)^2 \le$$

$$\le \lambda^2\int_a^b K^2(t, s)\,ds\int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2 ds = \lambda^2\rho^2(\varphi_2, \varphi_1)\int_a^b K^2(t, s)\,ds.$$

Зінтегрувавши обидві частини останньої нерівності по $t$ від $a$ до $b$, матимемо

$$\rho^2(A\varphi_2, A\varphi_1) \le \lambda^2 B^2\rho^2(\varphi_2, \varphi_1),$$

або

$$\rho(A\varphi_2, A\varphi_1) \le |\lambda| B\rho(\varphi_2, \varphi_1).$$

Отже, при $|\lambda| B < 1$ [умова (10.20)] оператор $A$ стискуючий. Ураховуючи повноту простору $L_{2[a, b]}$ [21], сформулюємо тепер достатню умову існування розв'язку рівняння (10.14) у просторі $L_{2[a, b]}$.

**Теорема 10.4**
**(про існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду в просторі $L_{2[a, b]}$)**

Нехай в інтегральному рівнянні (10.14) з неперервними $f(t)$ і $K(t, s)$ параметр $\lambda$ задовольняє умову (10.20). Тоді рівняння (10.14) має в $L_{2[a, b]}$ єдиний неперервний розв'язок. Послідовні наближення цього розв'язку можна побудувати за схемою (10.17), причому $\varphi_n(t) \underset{[a, b]}{\Rightarrow} \varphi_0(t)$.

◆ **Зауваження 10.1**

Якщо умови теореми 10.4 виконуються, то можна гарантувати збіжність послідовних наближень лише в середньоквадратичному ($\varphi_n(t) \underset{[a, b]}{\Rightarrow} \varphi_0(t)$), тобто в метриці простору $L_{2[a, b]}$:

$$\rho(\varphi_n(t), \varphi_0(t)) = \left\{\int_a^b [\varphi_n(t) - \varphi_0(t)]^2 dt\right\}^{1/2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$





Як легко бачити, $\dfrac{1}{M(b-a)} \le \dfrac{1}{B}$. Тому умова (10.20) дає більшу область значень параметра $\lambda$, для яких гарантується існування та єдиність неперервного розв'язку. Так, у випадку рівняння (10.18) теореми 10.3 і 10.4 дають області $|\lambda| < 1$, $|\lambda| < 3$ відповідно. «Плата» за таке розширення області — втрата гарантії рівномірної збіжності у схемі послідовних наближень.

Якщо відмовитися від умов неперервності $f(t)$ і $K(t, s)$ у рівнянні (10.14) і вимагати лише, щоб $f(t) \in L_{2[a, b]}$, $K(t, s) \in L_{2Q}$, тобто

$$\int_a^b f^2(t)dt < +\infty, \quad \iint\limits_Q K^2(t, s)ds\,dt = B^2 < +\infty,$$

то в разі виконання умови (10.20) рівняння (10.14) матиме єдиний розв'язок $\varphi(t) \in L_{2[a, b]}$.

Принцип стискуючих відображень можна застосувати й до деяких класів нелінійних інтегральних рівнянь.

Нехай маємо рівняння

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s, \varphi(s))\,ds, \tag{10.21}$$

в якому $f(t)$ і $K(t, s, z)$ — неперервні функції своїх аргументів при $a \le t \le b$, $a \le s \le b$, $z \in \mathbb{R}$.

Припустимо, що функція $K(t, s, z)$ задовольняє умову Ліпшіца щодо аргументу $z$, тобто

$$| K(t, s, z_2) - K(t, s, z_1) | \le L\, | z_2 - z_1 |,$$

де $L$ — деяка стала, яка не залежить від $z_1$, $z_2$.

Розглянемо відображення $A$ повного простору $C_{[a, b]}$ у себе, де

$$A\varphi \overset{\text{def}}{=} f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s, \varphi(s))\,ds.$$

Тоді рівняння (10.21) можна записати у вигляді $\varphi = A\varphi$.

Неважно знайти умову, за якої оператор $A$ стискуючий. Нехай $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — довільні функції з $C_{[a, b]}$. Тоді

$$|A\varphi_2 - A\varphi_1| = \left|\lambda\int_a^b [K(t, s, \varphi_2(s)) - K(t, s, \varphi_1(s))]ds\right| \le$$
$$\le |\lambda| L(b-a) \max_{a\le s\le b} |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| \quad \forall t \in [a, b].$$

Тому

$$\rho(A\varphi_2, A\varphi_1) = \max_{a\le t\le b} |A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| \le |\lambda| L(b-a)\rho(\varphi_2, \varphi_1).$$

Отже, в разі виконання умови $|\lambda| < 1/L(b-a)$ оператор $A$ буде стискуючим і, внаслідок теореми 10.1, інтегральне рівняння (10.21) матиме при таких $\lambda$ єдиний неперервний розв'язок. Його можна знайти методом послідовних наближень за схемою

$$\varphi_{n+1}(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s, \varphi_n(s))\,ds \quad (n \in \mathbb{N}),$$

де $\varphi_1(t)$ — довільна функція з $C_{[a, b]}$.

❑ **Приклад 10.2**

*Застосуємо метод послідовних наближень до рівняння*

$$\varphi(t) = 1 + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{ts}{1+\varphi^2(s)}ds.$$

У цьому випадку функція $K = K(t, s, z) = \dfrac{ts}{1+z^2}$ неперервна за всіма своїми аргументами. Вона має обмежену частинну похідну по $z$:

$$\left|\frac{\partial K}{\partial z}\right| = \left|-\frac{2tsz}{(1+z^2)^2}\right| < 1 \quad (-1 \le t,\ \ s \le 1,\ \ -\infty < z < +\infty)$$

і, отже, задовольняє умову Ліпшіца щодо $z$ зі сталою $L = 1$. Тому умова $|\lambda| < \dfrac{1}{L(b-a)} = \dfrac{1}{2}$ виконується. Застосуємо метод послідовних наближень, поклавши $\varphi_1(t) \equiv 1$. Тоді





$$\varphi_2(t) = 1 + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{ts}{1+1^2}ds = 1.$$

Зрозуміло, що $\varphi_n(t) = 1$ при $n = 2, 3, \ldots$ Отже, єдиним розв'язком даного рівняння є функція

$$\varphi_0(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 1.$$

✍ **Пропонуємо самостійно перевірити виконання умов теореми 10.3 і знайти послідовні наближення $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ розв'язків таких рівнянь:**

а) $\varphi(t) = 1 + \int_0^1 t\varphi(s)\,ds$;

б) $\varphi(t) = e^t + \lambda\int_0^1 e^{t-s}\varphi(s)\,ds$;

в) $\varphi(t) = t + \frac{1}{3}\int_0^1 (ts + s^2)\varphi(s)\,ds$.

## 10.4

## Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерра

Розглянемо рівняння

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds, \tag{10.22}$$

в якому $f(t) \in C_{[a, b]}$, а ядро $K(t, s)$ неперервне в трикутнику $\Delta$ [див. (10.4)].

Нехай $A$ — оператор, визначений формулою

$$A\varphi \overset{\text{def}}{=} f(t) + \lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds \quad (\varphi = \varphi(t) \in C_{[a, b]}).$$

Як і в п. 10.3, легко перевірити, що $A : C_{[a, b]} \to C_{[a, b]}$.

Для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{[a, b]}$ маємо

$$|A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| \le |\lambda| M(t-a)\rho(\varphi_2, \varphi_1) \le |\lambda| M(b-a)\rho(\varphi_2, \varphi_1)$$

$$(M = \max_{\Delta} |K(t, s)|),$$

тобто

$$\rho(A\varphi_2, A\varphi_1) \le |\lambda| M(b-a)\rho(\varphi_2, \varphi_1).$$

З останньої нерівності можна зробити висновок про неперервність оператора $A$.

Покажемо, що деякий степінь оператора $A^n$ стискуючий. Маємо:

$$|A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| \le (t-a)|\lambda| M\rho(\varphi_2, \varphi_1),$$

$$|A^2\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| = \left|\lambda\int_a^t K(t, s)[A\varphi_2(s) - A\varphi_1(s)]\,ds\right| \le$$

$$\le |\lambda|^2 \frac{M^2(t-a)^2}{2}\rho(\varphi_2, \varphi_1),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$|A^n\varphi_2(t) - A^n\varphi_1(t)| \le \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!}\rho(\varphi_2, \varphi_1).$$

Для будь-якого $\lambda$ натуральне число $n$ можна добрати так, щоб

$$\alpha_n = \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!} < 1,$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Отже, оператор $A^n$ стискуючий:

$$\rho(A^n\varphi_2, A^n\varphi_1) \le \alpha_n\rho(\varphi_2, \varphi_1) \quad (\alpha_n < 1).$$

Виконуються всі умови теореми 10.2, тому досліджуваний оператор $A$ має єдину нерухому точку в $C_{[a, b]}$. Таким чином, справедливе таке твердження.





**Теорема 10.5**
**(про існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра в $C_{[a, b]}$)**

Нехай в інтегральному рівнянні Вольтерра (10.22) ядро $K(t, s)$ і вільний член $f(t)$ неперервні, а $\lambda$ — довільний параметр. Тоді рівняння (10.22) має єдиний неперервний розв'язок $\varphi_0(t)$, який можна знайти за методом послідовних наближень:

$$\varphi_0(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \quad (\varphi_n(t) \underset{t\in[a, b]}{\rightrightarrows} \varphi_0(t)),$$

де $\varphi_{n+1}(t) = f(t) + \lambda\int_a^t K(t, s)\varphi_n(s)\,ds \quad (n \in \mathbb{N})$, $\varphi_1(t)$ — довільна функція з $C_{[a, b]}$.

❑ **Приклад 10.3**

***Розглянемо рівняння***

$$\varphi(t) = t - \int_0^t (t-s)\varphi(s)\,ds \quad (t \in [0, \pi]).$$

Очевидно, всі умови теореми 10.5 виконуються. Покладемо $\varphi_1(t) \equiv t$. Тоді

$$\varphi_2(t) = t - \int_0^t (t-s)s\,ds = t - \frac{t^3}{3!},$$

$$\varphi_3(t) = t - \int_0^t (t-s)\left(s - \frac{s^3}{3!}\right)ds = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\varphi_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)}, \ldots$$

Зрозуміло, що

$$\varphi_n(t) \underset{[0, \pi]}{\rightrightarrows} \varphi_0(t) \equiv \sin t.$$

Безпосередня перевірка показує, що функція $\varphi_0(t) = \sin t$ $(t \in [0, \pi])$ є розв'язком даного інтегрального рівняння.

Метод послідовних наближень може бути застосований і до нелінійних рівнянь типу Вольтерра. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, \varphi(s))\,ds. \tag{10.23}$$

Запишемо його в операторній формі: $\varphi = A\varphi$, де оператор $A$ визначений формулою

$$A\varphi \overset{\text{def}}{=} f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, \varphi(s))\,ds \quad (\varphi = \varphi(t) \in C_{[a,\,b]}).$$

Справедливе таке твердження.

**Теорема 10.6**

Нехай в інтегральному рівнянні (10.23) функція $f(t)$ неперервна на $[a, b]$, функція $K(t, s, z)$ неперервна при $a \le s \le t \le b$, $-\infty < z < +\infty$ і задовольняє умову Ліпшіца щодо $z$ зі сталою $L$. Тоді інтегральне рівняння (10.23) при будь-якому значенні $\lambda$ має єдиний неперервний розв'язок $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, де $\varphi_1(t)$ — довільна функція з $C_{[a,\,b]}$, а послідовні наближення визначені формулою

$$\varphi_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t, s, \varphi_n(s))\,ds \quad (n \in \mathbb{N}).$$

✍ Пропонуємо самостійно довести такі властивості оператора $A$:

1) $A : C_{[a,\,b]} \mapsto C_{[a,\,b]}$;

2) $A$ — неперервний оператор;

3) $\exists\, n \in \mathbb{N}$ таке, що оператор $A^n$ стискуючий.

❑ **Приклад 10.4**

*Методом послідовних наближень розв'яжемо інтегральне рівняння*

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{1 + \varphi^2(s)}{1 + s^2}\,ds \quad (t \in [0, 1]),$$

*взявши* $\varphi_1(t) = t$.





Очевидно,

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \frac{1 + s^2}{1 + s^2}\,ds = t.$$

Отже, $\varphi_n(t) = t$ $(n \ge 1)$. Тому $\varphi_0(t) = t$.

Якщо вибрати інше початкове наближення, наприклад $\varphi_1(t) = 0$, то викладки істотно ускладнюються. Це свідчить про важливість вдалого вибору початкового наближення.

## 10.5

## Інтегральні рівняння з виродженим ядром

Інтегральні рівняння цього класу вдається повністю дослідити, використовуючи апарат теорії лінійних алгебричних рівнянь.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds \quad (t \in [a, b]),$$

де функція $f(t) \in C_{[a,\,b]}$, а ядро має вигляд

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s). \tag{10.24}$$

Ядро типу (10.24) називають *виродженим*. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що системи функцій $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ та $b_1(s), b_2(s), \ldots, b_n(s)$ лінійно незалежні на $[a, b]$.

Припустимо, що $a_i(t), b_i(t) \in C_{[a,\,b]}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тоді ядро $K(t, s) \in C_Q$, де $Q = [a, b] \times [a, b]$. *Інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром* має вигляд

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds. \tag{10.25}$$

Припустимо, що рівняння (10.25) має розв'язок $\varphi = \varphi_0(t) \in C_{[a,\,b]}$. Позначивши $c_i = \int_a^b b_i(s)\varphi_0(s)\,ds$, з (10.25) дістанемо

$$\varphi_0(t) = f(t) + \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j a_j(t). \qquad (10.26)$$

Отже, розв'язання рівняння (10.25) зводиться до відшукання сталих $c_j$ ($j = 1, 2, ..., n$).

Помножимо послідовно рівність (10.26) на $b_i(t)$ і зінтегруємо одержані рівності по $t$ від $a$ до $b$. Увівши позначення

$$\int_a^b a_j(t)b_i(t)\,dt = k_{ij}, \quad \int_a^b b_i(t)f(t)\,dt = f_i \quad (i, j = 1, 2, ..., n),$$

відносно шуканих сталих $c_1, c_2, ..., c_n$ дістанемо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} k_{ij}c_j = f_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (10.27)$$

Якщо система (10.27) несумісна, то, очевидно, й інтегральне рівняння (10.25) розв'язку не має. Якщо ж система (10.27) має розв'язок $c_1, c_2, ..., c_n$, то, підставивши його у формулу (10.26), дістанемо функцію $\varphi_0(t) \in C_{[a,\,b]}$, яка задовольняє інтегральне рівняння (10.25). У цьому неважко переконатися безпосередньою перевіркою.

Можна зробити висновок про те, що інтегральне рівняння (10.25) та система лінійних алгебричних рівнянь (10.27) «рівносильні»: вони мають розв'язок або не мають його водночас.

Головний визначник $D(\lambda)$ системи (10.27) називають *визначником Фредгольма*, а нулі визначника, тобто корені рівняння $D(\lambda) = 0$ — *характеристичними (власними) числами ядра* (10.24). Із факту «рівносильності» інтегрального рівняння (10.25) і лінійної алгебричної системи (10.27) випливає таке твердження.

**Теорема 10.7**
**(перша теорема Фредгольма)**

Для того щоб рівняння (10.25) мало єдиний розв'язок $\varphi_0(t) \in C_{[a,\,b]}$ [заданий формулою (10.26)] для довільної функції $f(t) \in C_{[a,\,b]}$, необхідно й достатньо, щоб число $\lambda$ не було характеристичним.





◆ **Зауваження 10.2**

Однорідному інтегральному рівнянню з виродженим ядром

$$\varphi(t) = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds \qquad (10.28)$$

відповідає однорідна система лінійних алгебричних рівнянь

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} k_{ij}c_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (10.29)$$

Система (10.29) має тривіальний (нульовий) розв'язок $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$... тоді й лише тоді, коли $D(\lambda) \neq 0$. Тому першу теорему Фредгольма формулюють ще й так: аби інтегральне рівняння (10.25) мало єдиний розв'язок для довільної функції $f(t) \in C_{[a,\,b]}$, необхідно й достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння (10.28) мало лише тривіальний розв'язок.

❑ **Приклад 10.5**

*Розв'яжемо інтегральне рівняння з виродженим ядром*

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_0^1 (t - s)\varphi(s)\,ds \quad (t \in [0, 1]).$$

Маємо

$$a_1(t) = t, \;\; b_1(s) = 1, \;\; a_2(t) = 1, \;\; b_2(s) = -s,$$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda t\int_0^1 \varphi(s)\,ds + \lambda\int_0^1 (-s)\varphi(s)\,ds.$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$\varphi_0(t) = f(t) + \lambda c_1 t + \lambda c_2,$$

де сталі $c_1$, $c_2$ задовольняють систему рівнянь

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)c_1 - \lambda c_2 = f_1, \quad \frac{\lambda}{3}c_1 + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)c_2 = f_2$$

$$\left(k_{11} = \frac{1}{2},\; k_{12} = 1,\; k_{21} = -\frac{1}{3},\; k_{22} = -\frac{1}{2};\; f_1 = \int_0^1 f(t)\,dt,\; f_2 = \int_0^1 (-t)f(t)\,dt\right).$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{3} & 1+\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = 1+\frac{\lambda^2}{12} \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тому дане рівняння не має дійсних характеристичних чисел. За формулами Крамера знаходимо:

$$c_1 = \frac{6(2f_1 + \lambda(f_1 + 2f_2))}{\lambda^2 + 12}, \quad c_2 = \frac{2(6f_2 - \lambda(2f_1 + 3f_2))}{\lambda^2 + 12}.$$

Якщо, наприклад, $f(t) \equiv 1$, то $f_1 = 1,\ f_2 = -\frac{1}{2},\ c_1 = \frac{12}{\lambda^2+12},\ c_2 = \frac{\lambda+6}{\lambda^2+12}$.

Тому у випадку $f(t) \equiv 1$ шуканим розв'язком є функція

$$\varphi_0(t) = 1 + \frac{12}{\lambda^2+12}t - \frac{\lambda^2+6\lambda}{\lambda^2+12} \quad (t \in [0, 1]).$$

Перетворимо формулу (10.26) для розв'язку рівняння (10.25). Нехай $D_{ij}(\lambda)$ — алгебричне доповнення елемента $d_{ij}$ визначника $D(\lambda)$. Тоді

$$c_i = \frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) f_k \quad (i = 1, ..., n);$$

$$\varphi_0(t) = f(t) + \lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(t) = f(t) + \frac{\lambda}{D(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) a_i(t) f_k.$$

Остаточно маємо

$$\varphi_0(t) = f(t) + \lambda\int_a^b R(t, s, \lambda) f(s)\,ds, \tag{10.30}$$

де

$$R(t, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)}\sum_{i,\,k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) a_i(t) b_k(s). \tag{10.31}$$





Функцію $R(t, s, \lambda)$ називають *резольвентою інтегрального рівняння (10.25)* [або ядра (10.24)]. Із формули (10.31) легко бачити, що резольвента $R(t, s, \lambda)$ є дробово-раціональною функцією змінної $\lambda$ (при фіксованих $t, s$), неперервною по $t, s$ у квадраті $Q$, якщо $\lambda$ — нехарактеристичне число.

✍ Пропонуємо самостійно знайти резольвенту рівняння з прикладу 10.5.

Розглянемо тепер випадок, коли $\lambda$ збігається з одним із характеристичних чисел ядра (10.24). У цьому разі однорідна система (10.29) має $p$ $(1 \le p \le n)$ лінійно незалежних нульових вектор-розв'язків:

$$c_l = (c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, ..., c_n^{(l)}) \quad (l = 1, 2, ..., p).$$

Функції

$$\varphi_l(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(l)} a_i(t) \quad (l = 1, 2, ..., p), \tag{10.32}$$

а також їх довільні лінійні комбінації є розв'язками однорідного рівняння (10.28). Нетривіальні розв'язки рівняння (10.28) називають *власними* (*фундаментальними*) *функціями* цього рівняння (або його ядра), які відповідають даному характеристичному числу. Число $p$ називають *рангом*, або *кратністю*, даного характеристичного числа.

Неважко показати, що множина всіх власних функцій, які відповідають даному характеристичному числу, утворює лінійний простір вимірності $p$, базисом якого є система функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_p(t)$. У цьому випадку довільний розв'язок однорідного рівняння (10.28) можна подати у вигляді

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varphi_j(t), \tag{10.33}$$

де $\alpha_j$ $(j = 1, 2, ..., p)$ — деякі сталі. Тому (10.33) називають *загальним розв'язком однорідного інтегрального рівняння (10.28)*.

Ядро $K^*(t, s) \overset{\text{def}}{=} K(t, s)$ називають *спряженим до ядра* $K(t, s)$. [Якщо $K(t, s)$ — комплекснозначна функція, то $K^*(t, s) \overset{\text{def}}{=} \overline{K(s, t)}$.]

Інтегральне рівняння

$$\psi(t) = g(t) + \lambda\int_a^b K^*(t, s)\psi(s)\,ds \tag{10.34}$$

називають *спряженим до інтегрального рівняння (10.1)*. У випадку рівняння (10.25) з виродженим ядром спряженим до нього є рівняння

$$\psi(t) = g(t) + \lambda\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\int_a^b a_i(s)\psi(s)\,ds. \tag{10.35}$$

У випадку $g(t) \equiv 0$ спряжене [до (10.28)] інтегральне рівняння є таким:

$$\psi(t) = \lambda\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\int_a^b a_i(s)\psi(s)\,ds, \tag{10.36}$$

а його розв'язок можна записати у вигляді

$$\psi(t) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i b_i(t),$$

де сталі $\tilde{c}_i$ визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\tilde{c}_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} k_{ji}\tilde{c}_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{10.37}$$

Алгебричну систему (10.37) називають *спряженою* до системи (10.29), її матриця є транспонованою до матриці системи (10.29). Системи (10.29) і (10.37) мають однакове число $p$ лінійно незалежних вектор-розв'язків. Базисом простору розв'язків рівняння (10.36) є система функцій

$$\psi_l(t) = \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i^{(l)} b_i(t) \quad (l = 1, 2, ..., n),$$

де





$$\tilde{c}_l = (\tilde{c}_1^{(l)}, \tilde{c}_2^{(l)}, ..., \tilde{c}_n^{(l)}) \quad (l = 1, 2, ..., p) \tag{10.38}$$

— базис простору розв'язків системи (10.37).

Отже, справедливе таке твердження.

**Теорема 10.8**
**(друга теорема Фредгольма)**

Якщо $\lambda$ є характеристичним числом ядра $K(t, s)$ з виродженим ядром, то однорідне інтегральне рівняння (10.28) і спряжене до нього рівняння (10.36) мають однакове число лінійно незалежних власних функцій.

Нехай тепер $\lambda$ — характеристичне число ядра $K(t, s)$ рангу $p$. Розглянемо неоднорідне рівняння (10.25):

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds.$$

Його розв'язок (якщо він існує) записується у вигляді (10.26):

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(t),$$

де сталі $c_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) визначаються із системи алгебричних рівнянь (10.27):

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} k_{ij}c_j = f_i \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Як відомо (див. п. 6.2), для сумісності системи рівнянь (10.27) необхідно й достатньо, щоб вектор її вільних членів $(f_1, f_2, ..., f_n)$ був ортогональним до підпростору розв'язків спряженої однорідної системи. Це означає, що вектор $(f_1, f_2, ..., f_n)$ має бути ортогональним до кожного з $p$ базисних векторів (10.38), тобто

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \tilde{c}_i^{(l)} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

Оскільки $f_i = \int_a^b f(t) b_i(t)\,dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, то звідси маємо

$$\int_a^b f(t) \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^{(l)} b_i(t)\,dt = \int_a^b f(t)\psi_l(t)\,dt = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Отже, справедливе таке твердження.

**Теорема 10.9**
**(третя теорема Фредгольма)**

Якщо $\lambda$ — характеристичне число, то неоднорідне інтегральне рівняння (10.25) з виродженим ядром має розв'язок тоді й лише тоді, коли вільний член $f(t)$ ортогональний до всіх розв'язків спряженого однорідного рівняння (10.36).

Таким чином, у випадку, коли $\lambda$ — характеристичне число, питання про існування розв'язку неоднорідного рівняння (10.25) зводиться до перевірки $p$ умов ортогональності [ці умови називають також *умовами розв'язності* рівняння (10.25)]:

$$\int_a^b f(t)\psi_l(t)\,dt = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, p). \tag{10.39}$$

Якщо ці умови справджуються, то інтегральне рівняння має нескінченну множину розв'язків, яку можна описати формулою

$$\varphi(t) = \sum_{l=1}^{p} \alpha_l \varphi_l(t) + \tilde{\varphi}(t). \tag{10.40}$$

Перший доданок у (10.40) — загальний розв'язок однорідного рівняння (10.28), а другий — деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (10.25).





**□ Приклад 10.6**

*Розглянемо рівняння з виродженим ядром*

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{-1}^{1} (ts^2 + st^2)\varphi(s)\,ds \quad (t \in [-1, 1]). \tag{10.41}$$

Розв'язок рівняння (10.41) має вигляд [див. (10.26)]

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda c_1 \cdot t + \lambda c_2 \cdot t^2,$$

де $c_1$, $c_2$ визначаються із системи [див. (10.27)]

$$c_1 - \frac{2}{5}\lambda c_2 = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,dt, \quad -\frac{2}{3}\lambda c_1 + c_2 = \int_{-1}^{1} t f(t)\,dt. \tag{10.42}$$

Оскільки $D(\lambda) = 1 - \dfrac{4}{15}\lambda^2$, то при $\lambda \neq \pm\sqrt{15}/2$ система (10.42) завжди має єдиний розв'язок. Отже, інтегральне рівняння (10.41) має єдиний розв'язок для довільної функції $f(t) \in C_{[-1,\,1]}$.

Нехай $\lambda = \sqrt{15}/2$. Тоді однорідна система

$$c_1 - \frac{2}{5}\lambda c_2 = 0, \quad -\frac{2}{3}\lambda c_1 + c_2 = 0$$

має загальний розв'язок $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\beta,\ \beta\right)$, де $\beta$ — довільна стала. Отже, однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{15}}{2}\int_{-1}^{1} (ts^2 + st^2)\varphi(s)\,ds \tag{10.43}$$

має однопараметричну сім'ю розв'язків

$$\varphi(t) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}t + t^2\right)\beta.$$

Оскільки ядро інтегрального рівняння симетричне ($K(t, s) \equiv K(s, t)$), то спряжене однорідне рівняння збігається з (10.43) і має таку саму сім'ю розв'язків:

$$\psi(t) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}t + t^2\right)\beta.$$

Тому умова розв'язності у випадку $\lambda = \sqrt{15}/2$ набирає вигляду

$$\int_{-1}^{1}\left(t^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}t\right)f(t) = 0. \tag{10.44}$$

Наприклад, при $f(t) \equiv 1$ умова (10.44) не виконується і відповідне інтегральне рівняння не має розв'язку.

✍ Пропонуємо самостійно перевірити, що при $f(t) = t^3 - \frac{3}{5}t$ умова (10.44) виконується й інтегральне рівняння (10.41) має нескінченну множину розв'язків вигляду

$$\varphi(t) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}t + t^2\right)\beta + t^3 - \frac{3}{5}t,$$

де $\beta$ — довільна стала.

Як вправу для самостійної роботи пропонуємо розглянути випадок $\lambda = -\sqrt{15}/2$ і побудувати резольвенту інтегрального рівняння (10.41) у разі нехарактеристичного $\lambda$.

Наслідком теорем 10.6—10.9 є таке твердження.

**Теорема 10.10**
**(альтернатива Фредгольма)**

Якщо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має лише тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння завжди має єдиний розв'язок.

Якщо ж однорідне рівняння має нетривіальні розв'язки, то відповідне неоднорідне інтегральне рівняння залежно від вільного члена $f(t)$ або взагалі не має розв'язку, або ж має нескінченну множину розв'язків.

◆ **Зауваження 10.3**

Теореми Фредгольма 10.6—10.10 справджуються не лише у випадку виродженого ядра, а й у випадку неперервного ядра $K(t, s)$ [21].





✍ Пропонуємо самостійно виконати такі вправи.

① Безпосереднім підставлянням показати, що функція $\varphi_0(t)$ з (10.26), в якій $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — розв'язок системи (10.27), є розв'язком інтегрального рівняння (10.25).

② Розв'язати інтегральні рівняння з виродженим ядром:

а) $\varphi(t) = 1 + \int_{-1}^{1}\varphi(s)\,ds;$

б) $\varphi(t) = 3 + 2\int_0^1 (t + s)\varphi(s)\,ds;$

в) $\varphi(t) = f_i(t) + \int_{-1}^{2} e^{t-s}\varphi(s)\,ds;\quad f_1(t) \equiv 1,\quad f_2(t) \equiv t^2;$

г) $\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_0^{\pi}\sin(t + s)\varphi(s)\,ds;$

д) $\varphi(t) = \lambda\int_0^{\pi}\cos t\sin s\varphi(s)\,ds;$

е) $\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_0^1 (t^2 s^2 - 1)\varphi(s)\,ds.$

Для кожного рівняння знайти визначник Фредгольма, резольвенту, характеристичні числа, власні функції, записати спряжене рівняння.

Глава 11

# ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ Й ЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

## 11.1

## Лінійні нормовані простори

Нагадаємо поняття лінійного простору. Нехай $H$ — множина елементів довільної природи і справджуються такі *аксіоми*.

I. *$H$ — абелева група відносно групової операції додавання.* Це означає, що *однозначно визначена сума $x + y$ двох довільних елементів $x, y \in H$ $(x + y \in H)$, причому виконуються такі умови:*

① $x + y = y + x$ (комутативність);

② $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність);

③ $\exists!$ елемент $\theta \in H$ такий, що $x + \theta = x \quad \forall x \in H$ ($\theta$ — нуль простору $H$);

④ $\forall x \in H \quad \exists!(-x) \in H$ такий, що $x + (-x) = \theta$, де $(-x)$ — елемент, протилежний $x$.

Природно вводиться операція, обернена до операції додавання, яку називають *відніманням*: $x - y \overset{\text{def}}{=} x + (-y)$.

II. *Визначена операція множення елементів $x, y, z, \ldots$ із $H$ на дійсні (комплексні) числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, причому $\alpha x \in H$ і виконуються такі умови:*

① $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

② $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

③ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.





Множину $H$, яка задовольняє аксіоми I і II, називають *лінійним (векторним) простором.*

Залежно від того, на які числа допускається множення елементів із $H$, розрізняють дійсний та комплексний лінійні простори.

Наприклад, сукупність усіх векторів площини зі звичайними операціями додавання векторів та множення їх на дійсні числа утворює лінійний простір. Множина елементів простору $C_{[a,\, b]}$ зі звичайними операціями додавання функцій і множення функцій на числа утворює лінійний простір. Нуль цього простору — функція $x(t) \equiv 0 \ \forall\, t \in [a, b]$.

✍ Пропонуємо самостійно перевірити, чи утворюють лінійні простори такі множини:
а) сукупність векторів на площині, кожний з яких виходить із початку координат, а закінчується — в межах першої чверті;
б) сукупність усіх монотонних на проміжку $[a, b]$ функцій;
в) множина всіх періодичних із заданим періодом $T$ функцій.

Множину $H$ називають *лінійним нормованим простором*, якщо виконуються такі *умови:*

I. $H$ — лінійний простір.

II. Кожному елементу $x \in H$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\| x \|$, яке називається *нормою* цього елемента, причому виконуються *аксіоми норми*:

① $\| x \| \ge 0$; $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$;

② $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$;

③ $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$.

У лінійному нормованому просторі метрику можна ввести за формулою

$$\rho(x, y) \overset{\text{def}}{=} \| x - y \| . \tag{11.1}$$

Збіжність послідовності елементів $x_n$ $(x_n \in H)$ до елемента $x_0 \in H$ $(x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n)$ означає, що $\| x_n - x_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$. Визначену в такий спосіб збіжність у лінійному нормованому просторі називають *збіжністю за нормою.*

Якщо лінійний нормований простір повний у розумінні збіжності за нормою, то його називають *банаховим простором.*

Банаховими є, наприклад, такі простори:

1) простір $\mathbb{R}^n$ з евклідовою нормою

$$\| x \| = \left( \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n);$$

2) простір $L_{2[a,\ b]}$ функцій $x(t)$, інтегровних із квадратом: $\int_a^b | x(t) |^2 dt < \infty$, і нормою $\| x \| = \left( \int_a^b | x(t) |^2 \, dt \right)^{1/2}$.

3) простір $C_{[a,\ b]}$ з нормою $\| x \| = \max\limits_{a \le t \le b} | x(t) |$.

Розглянемо лінійний простір функцій $x(t)$, неперервних на відрізку $[a, b]$. Норму в цьому просторі можна ввести за формулою

$$\| x \| = \int_a^b | x(t) | \, dt. \tag{11.2}$$

Позначимо цей простір через $C_{1[a,\ b]}$. Тоді

$$\rho(x, y) = \int_a^b | x(t) - y(t) | \, dt.$$

Простір $C_{1[a,\ b]}$ не є повним.

Наведемо приклад фундаментальної, але не збіжної послідовності елементів із $C_{1[a,\ b]}$. Розглянемо таку послідовність $x_n(t)$ $(0 \le t \le 1)$:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1/2, \\ n + 1 - 2nt, & 1/2 \le t \le 1/2 + 1/2n, \\ 0, & 1/2 + 1/2n \le t \le 1. \end{cases}$$

Ця послідовність збіжна за нормою (11.2) до функції

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1/2, \\ 0, & 1/2 < t \le 1, \end{cases}$$

оскільки при $n \to +\infty$





$$\rho(x_n, x) = \int_0^1 | x_n(t) - x(t) | \, dt = \int_{1/2}^{1/2 + 1/2n} (n + 1 - 2nt) \, dt \le 1/2n \to 0.$$

Звідси випливає, що послідовність $x_n(t)$ фундаментальна, але границі в $C_{1[a,\ b]}$ вона не має, бо збігається до розривної функції. Отже, $C_{1[a,\ b]}$ — лінійний нормований простір, який не є банаховим.

## 11.2

## Лінійні оператори. Норма оператора

Нехай $H$ і $\tilde{H}$ — лінійні простори. Нагадаємо, що оператор $A$, який діє з $H$ у $\tilde{H}$ $(A : H \mapsto \tilde{H})$, називають *лінійним*, якщо $\forall\, x, y \in D_A$ та $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) справджуються такі *умови*:

① $A(x + y) = Ax + Ay$;

② $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Розглянемо деякі приклади лінійних операторів. Область визначення оператора позначено символом $D_A$ $(D_A \subseteq H)$.

1. Оператор $O$, який кожному елементу простору $H$ ставить у відповідність нуль-елемент простору $\tilde{H}$ : $Ox = \Theta_{\tilde{H}}$, називають ***нульовим*** (***нуль-оператором***).

2. Оператор $I : H \mapsto H$ такий, що $Ix = x \ \forall\, x \in H$, називають ***одиничним***.

3. Оператор, який діє за правилом $Ax = \lambda x \ \forall\, x \in H$ ($\lambda$ — фіксоване число), називають ***оператором подібності***.

Оператор $A$ називають неперервним у точці $x_0 \in D_A \subseteq H$, якщо для довільної послідовності елементів $x_n$ $(x_n \in D_A)$, яка збігається до $x_0$ за нормою в $H$, відповідна послідовність $Ax_n$ збігається до елемента $Ax_0$ за нормою простору $\tilde{H}$, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = Ax_0$.

Як приклад розглянемо ***інтегральний оператор Фредгольма***

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds \quad (x(t) \in C_{[a,\,b]}), \tag{11.3}$$

де $K(t, s)$ — неперервна функція в квадраті $Q = [a, b] \times [a, b]$. Формула (11.3) визначає оператор $A$, який діє в просторі $C_{[a,\,b]}$.

✍ Пропонуємо самостійно показати, що оператор $A$ має такі властивості:

1) $A : C_{[a,\,b]} \mapsto C_{[a,\,b]}$;
2) $A$ — лінійний оператор;
3) $A$ — неперервний оператор;
4) справедлива оцінка

$$\| Ax(t) \| \le M(b-a) \| x \|, \tag{11.4}$$

де $M = \max\limits_Q | K(t, s) |$.

Знову розглянемо інтегральний оператор Фредгольма

$$y(t) = Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds \quad (x(t) \in L_{2[a,\,b]}) \tag{11.5}$$

у припущенні, що ядро $K(t, s)$ задовольняє умову

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds = B^2 < \infty. \tag{11.6}$$

Використовуючи нерівність Коші—Буняковського дістаємо

$$\| y(t) \|^2 = \int_a^b y^2(t)\,dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds \right\}^2 dt \le$$

$$\le \int_a^b \left\{ \int_a^b K^2(t, s)\,ds \int_a^b x^2(s)\,ds \right\} dt =$$

$$= \int_a^b x^2(s)\,ds \int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,ds\,dt = \| x \|^2 \; B^2,$$

звідки випливає, що $A : L_{2[a,\,b]} \mapsto L_{2[a,\,b]}$.

Таким чином,





$$\| y \|^2 \le B^2 \| x \|^2,$$

або

$$\| Ax \| \le B \| x \|. \tag{11.7}$$

Лінійність оператора $A$ очевидна, а неперервність випливає з оцінки (11.7), бо, якщо $x_n \to x_0$, то

$$\| Ax_n - Ax_0 \| = \| A(x_n - x_0) \| \le B \| x_n - x_0 \| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

**Теорема 11.1**

**Нехай оператор $A : H \mapsto \tilde{H}$ лінійний і неперервний у деякій точці $x_0 \in H$. Тоді він неперервний у всьому просторі $H$.**

**Доведення**

Нехай $x_n \to x$ ($\forall\, x \in H$). Тоді $x_n - x + x_0 \to x_0$. З неперервності $A$ в точці $x_0$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} A(x_n - x + x_0) = Ax_0$. Унаслідок лінійності оператора $A$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n - x + x_0) = \lim_{n\to\infty} (Ax_n - Ax + Ax_0) = Ax_0,$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Лінійний оператор $A : H \mapsto \tilde{H}$ називають *обмеженим*, якщо $D_A = H$ і існує така стала $M > 0$, що

$$\| Ax \|_{\tilde{H}} \le M \| x \|_H . \tag{11.8}$$

Найменшу з можливих сталих $M$ із (11.8) називають *нормою оператора $A$* й позначають $\| A \|$. Для обмеженого оператора $A$ маємо

$$\| Ax \| \le \| A \| \| x \| \tag{11.9}$$

і, отже, обмежений оператор переводить кожну обмежену множину $\{x\} \subset H$ в обмежену множину $\{Ax\} \subset \tilde{H}$.

Можна показати [21], що

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| . \qquad (11.10)$$

✍ Пропонуємо самостійно знайти норму оператора $A : C_{[a,\,b]} \mapsto C_{[a,\,b]}$ $(0 < a < b)$, визначеного формулою $Ax(t) = tx(t)$.

**Теорема 11.2**
**(критерій обмеженості лінійного оператора)**
Лінійний оператор $A : H \mapsto \tilde{H}$ ($H$, $\tilde{H}$ — лінійні нормовані простори) обмежений тоді й лише тоді, коли він неперервний.

Доведення

Нехай оператор $A : H \mapsto \tilde{H}$ обмежений. Тоді $\| Ay - Az \| = \| A(y - z) \| \le M \| y - z \| < \varepsilon$ при $\| y - z \| \le \delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$, отже, оператор $A$ неперервний.

Нехай тепер оператор $A : H \mapsto \tilde{H}$ неперервний. Від супротивного припустимо, що $A$ необмежений. Тоді існує послідовність $y_n \in H$ така, що $\| y_n \| = 1$, і водночас $\| Ay_n \| > n$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. Маємо $\left\| A\left(\frac{y_n}{n}\right) \right\| = \frac{1}{n} \| Ay_n \| > 1$ і, отже, $\left\| A\left(\frac{y_n}{n}\right) - A \cdot \Theta \right\| > 1$, що суперечить неперервності оператора $A$, оскільки $\left\| \frac{y_n}{n} - \Theta \right\| = \frac{1}{n} \| y_n \| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Наведемо приклад необмеженого оператора. Нехай $\tilde{H} = C_{[a,\,b]}$ і $Ax = \frac{d}{dt} x(t)$. Цей оператор лінійний, визначений на підпросторі $C^{(1)}{}_{[a,\,b]} \subset C_{[a,\,b]}$ функцій, які мають неперервну похідну. Оператор $A$ не є обмеженим. Справді, нехай $x_n(t) = \sin nt$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тоді $\| x_n \| = \max\limits_{-\pi \le t \le \pi} | \sin nt | = 1$, але $\| Ax_n \| = \max\limits_{-\pi \le t \le \pi} \left| \frac{d}{dt} \sin nt \right| = n$ і тому $\sup\limits_{\|x\|=1} \| Ax \| = +\infty$.





## 11.3

## Простір лінійних обмежених операторів

Два оператори $A : H \mapsto \tilde{H}$ і $B : H \mapsto \tilde{H}$ вважаємо *рівними* $(A = B)$, якщо виконуються такі умови: $D_A = D_B = D$ і $Ax = Bx$ $\forall\, x \in D$.

Суму $((A + B) : H \mapsto \tilde{H})$ і добуток $(\alpha A : H \mapsto \hat{H})$ оператора на число означимо так:

$$(A + B)x \overset{\text{def}}{=} Ax + Bx, \quad (\alpha A)x \overset{\text{def}}{=} \alpha(Ax) \quad (\forall\, x \in H).$$

Таким чином, множина $L = (H \mapsto \hat{H})$ усіх лінійних обмежених операторів, що діють із $H$ у $\tilde{H}$, є лінійним нормованим [норма оператора визначена формулою (11.10)] простором.

Можна показати, що коли $\hat{H}$ — повний простір, то простір $L$ лінійних обмежених операторів теж повний [8].

Розглянемо оператори $A$, $B \in L = (H \mapsto H)$. Добуток операторів $(AB : H \mapsto H)$ визначимо за правилом:

$$AB : (AB)x \mapsto A(Bx) \quad (\forall\, x \in H). \qquad (11.11)$$

Неважко показати, що оператор $C = AB$ теж лінійний і обмежений, тобто $C \in L$ Справді, для всіх $x, y \in H$ і будь-якого числа $\alpha$ маємо

$$AB(x + y) = A(B(x + y)) = A(Bx_1 + By_2) = (AB)x_1 + (AB)y_2,$$

$$(AB)(\alpha x) = A(B(\alpha x)) = A(\alpha Bx) = \alpha(AB)x,$$

$$\| ABx \| \le \| A \| \| Bx \| \le \| A \| \| B \| \| x \|.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\| AB \| \le \| A \| \| B \| . \qquad (11.12)$$

Для степенів $A^2 = A \cdot A$, ..., $A^n = A \cdot A^{n-1}$ оператора $A \in L = (H \mapsto H)$ дістаємо оцінку $\| A^n \| \le \| A \|^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

У просторі $L = (H \mapsto \hat{H})$ роль «одиниці» відносно операції множення операторів виконує одиничний оператор $I$ (див. п. 11.2).

## 11.4
## Обернені оператори

Введемо важливе поняття оберненого оператора. Розглянемо простір $L = (H \mapsto H)$. Оператор $A_l^{-1}$ називають ***лівим оберненим*** до оператора $A \in L$, якщо $A_l^{-1}A = I$, і ***правим оберненим*** $A_r^{-1}$, якщо $AA_r^{-1} = I$.

Якщо оператор $A$ має і лівий, і правий обернені оператори, то вони збігаються. Справді,

$$A_l^{-1} = A_l^{-1}(AA_r^{-1}) = (A_l^{-1}A)A_r^{-1} = A_r^{-1}.$$

У цьому разі кажуть, що $A$ має *обернений оператор* $A^{-1}$ : $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Можна показати [21], що $A^{-1} \in L$.

Нехай $H = l_2$ — простір послідовностей $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$ таких, що $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ з нормою $\| x \| = \left( \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$. Введемо оператори $A$, $B \in L = (l_2 \mapsto l_2)$ таким чином:

$$Ax = (0, x_1, x_2, ..., x_k, ...), \quad Bx = (x_2, x_3, ..., x_k, ...).$$

Пропонуємо самостійно показати, що $B = A_l^{-1}$, але $B \neq A_r^{-1}$.

Відшукання оберненого оператора в конкретних випадках — важлива й складна задача. Якщо оператор $A^{-1}$ відомий, то можна відразу записати розв'язок операторного рівняння $Ax = f$ ($f$ — відомий елемент із $H$). Це $x = A^{-1}f$.

**Теорема 11.3**
**(Банаха, про існування оберненого оператора)**
Нехай $A \in L = (H \mapsto H)$ — лінійний обмежений оператор, який діє в повному просторі $H$, причому





$$\| A \| \leq q < 1. \tag{11.13}$$

Тоді оператор $I + A$ має обернений лінійний обмежений оператор $(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$.

**Доведення**

Розглянемо послідовність $S_n$ елементів повного простору $L$:

$$S_n = I - A + A^2 - ... + (-1)^n A^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Для всіх $p \in \mathbb{N}$, ураховуючи (11.12), (11.13), маємо

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \| (-1)^{n+1} A^{n+1} + ... + (-1)^{n+p} A^{n+p} \| \leq$$
$$\leq \| A \|^{n+1} + \| A \|^{n+2} + ... + \| A \|^{n+p} \leq q^{n+1}(1 + q + q^2 + ...) =$$
$$= \frac{q^{n+1}}{1-q} \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

звідки випливає факт фундаментальності послідовності операторів $S_n$. Тому $\lim_{n \to \infty} S_n = S \in L$.

Знайдемо добуток

$$S(I + A) = \lim_{n \to \infty} (I - A + A^2 - ... + (-1)^n A^n)(I + A) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} (I + (-1)^n A^{n+1}) = I.$$

Цілком аналогічно можна показати, що $(I + A)S = I$. Отже,

$$S = (I + A)^{-1}.$$

## 11.5

## Застосування теореми Банаха про існування оберненого оператора до інтегральних рівнянь

**Рівняння Фредгольма.** Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds \tag{11.14}$$

із неперервним у квадраті $Q = [a, b] \times [a, b]$ ядром $K$ та неперервною на $[a, b]$ функцією $f$.

За допомогою інтегрального оператора Фредгольма (11.3)

$$A\varphi(t) = \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds$$

запишемо інтегральне рівняння (11.14) в операторній формі:

$$(I - \lambda A)\varphi = f. \tag{11.15}$$

Згідно з теоремою 11.3 у разі виконання умови

$$|\lambda|\,\|A\| = q < 1 \tag{11.16}$$

з (11.15) маємо

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f + \ldots \tag{11.17}$$

Ряд (11.17) називають *рядом Неймана*. Оскільки $\|A\| < M(b-a)$ [див. оцінку (11.4)], то для виконання умови (11.16) достатньо, щоб

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \quad \left(M = \max_Q |K(t, s)|\right). \tag{11.18}$$





Знайдемо тепер степені оператора $A$:

$$A^2 f = A(Af) = \int_a^b K(t, s)\left(\int_a^b K(s, \tau)f(\tau)\,d\tau\right)ds =$$

$$= \int_a^b \left\{\int_a^b K(t, s)K(s, \tau)\,ds\right\} f(\tau)\,d\tau = \int_a^b K_2(t, \tau)f(\tau)\,d\tau,$$

де ядро $K_2(t, \tau)$ — *друга ітерація* ядра $K(t, s)$ — має вигляд

$$K_2(t, \tau) = \int_a^b K(t, s)K(s, \tau)\,ds.$$

Вважаємо, що $K_1(t, s) \equiv K(t, s)$. Отже,

$$A^2 f = \int_a^b K_2(t, s)f(s)\,ds.$$

Аналогічно

$$A^3 f = A(A^2 f) = \int_a^b K(t, s)\left(\int_a^b K_2(s, \tau)f(\tau)\,d\tau\right)ds =$$

$$= \int_a^b K_3(t, \tau)f(\tau)\,d\tau,$$

де $K_3(t, \tau) = \int_a^b K(t, s)K_2(s, \tau)\,ds$ — ***третя ітерація*** ядра $K(t, s)$ і т. д.:

$$A^n f = \int_a^b K_n(t, s)f(s)\,ds,$$

де $K_n(t, s)$ — ***n-на ітерація*** ядра $K(t, s)$,

$$K_n(t, s) = \int_a^b K(t, \tau)K_{n-1}(\tau, s)\,d\tau \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{11.19}$$

Зрозуміло, що всі *ітеровані* (*повторні*) ядра $K_n(t, s) \in C_Q (n \in \mathbb{N})$. Отже, єдиний розв'язок рівняння (11.14) можна записати у вигляді

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K_1(t, s)f(s)\,ds + \lambda^2\int_a^b K_2(t, s)f(s)\,ds + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^n\int_a^b K_n(t, s)f(s)\,ds + \ldots, \tag{11.20}$$

причому ряд (11.20) збіжний, якщо виконується умова (11.18).

Розглянемо ряд

$$K_1(t, s) + \lambda K_2(t, s) + \ldots + \lambda^{n-1}K_n(t, s) + \ldots \tag{11.21}$$

У разі виконання умови (11.18) ряд у (11.21) рівномірно збіжний у квадраті $Q$. Це випливає з оцінок:

$$|K_2(t, s)| \le \int_a^b |K(t, \tau)||K(\tau, s)|\,d\tau \le M^2(b-a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|K_n(t, s)| \le \int_a^b |K(t, \tau)||K_{n-1}(\tau, s)|\,ds \le M^n(b-a)^{n-1}, \ldots$$

Тому $|\lambda^{n-1}K_n(t, s)| \le Mq^{n-1}$ $(q = |\lambda||M|(b-a) < 1)$. Позначимо суму ряду (11.21) через

$$R(t, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t, s) \quad (|\lambda| < 1/M(b-a)). \tag{11.22}$$

Тоді розв'язок рівняння (11.14) можна записати у вигляді

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b R(t, s, \lambda)f(s)\,ds. \tag{11.23}$$

Очевидно, функція $R(t, s, \lambda)$ — *резольвента* ядра $K(t, s)$ — неперервна в квадраті $Q$ і аналітична по $\lambda$ при $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$.





**◆ Зауваження 11.1**

Існують випадки, коли формула (11.23) справедлива для будь-яких $\lambda$. Це, зокрема, буде тоді, коли ядро $K(t, s)$ ортогональне до самого себе, тобто

$$K_2(t, s) = \int_a^b K(t, \tau)K(\tau, s)\,d\tau \equiv 0.$$

Тоді, очевидно, $R(t, s, \lambda) = K(t, s)$.

✍ Пропонуємо самостійно перевірити, що ядро $K(t, s) = \sin t\cos s$ $(0 \le t, s \le \pi)$ ортогональне до самого себе. Це твердження справедливе, наприклад, і для ядра

$$K(t, s) = \sum_{n=1}^{m} a_n \sin nt\cos ns \quad (0 \le t, s \le 2\pi).$$

**❑ Приклад 11.1**

*Розв'яжемо інтегральне рівняння*

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_0^1 ts\varphi(s)\,ds.$$

У даному випадку $K(t, s) = ts$, $a = 0$, $b = 1$, $M = \max\limits_{0\le t, s\le 1}|ts| = 1$. Для ітерацій ядра $K(t, s)$ маємо

$$K_1(t, s) = ts, \quad K_2(t, s) = \int_0^1 t\tau\cdot\tau\cdot s\,d\tau = \frac{ts}{3},$$
$$K_3(t, s) = \frac{ts}{3^2}, \ldots \quad K_n(t, s) = \frac{ts}{3^{n-1}}, \ldots$$

Отже, для резольвенти $R(t, s, \lambda)$ дістаємо

$$R(t, s, \lambda) = ts\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{3^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{3^n} + \ldots\right) = \frac{3ts}{3-\lambda}.$$

Розв'язок рівняння знаходимо за формулою (11.23):

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_0^1 \frac{3ts}{3-\lambda}f(s)\,ds.$$

Зазначимо, що ряд для $R(t, s, \lambda)$ збігається при $|\lambda| < 3$, а умова (11.18) дає меншу (гарантовану!) область збіжності $|\lambda| < 1$.

Сформулюємо добуті вище результати у вигляді теореми.

**Теорема 11.4**

Нехай в інтегральному рівнянні (11.14) ядро $K(t, s) \in C_Q$, $f(t) \in C_{[a, b]}$ і нехай виконується умова (11.18). Тоді рівняння (11.14) має єдиний неперервний розв'язок $\varphi(t)$, який можна записати у вигляді (11.23), де резольвента $R(t, s, \lambda)$ є сумою ряду (11.22).

Наведемо деякі важливі властивості резольвенти $R(t, s, \lambda)$, визначеної формулою (11.22).

1. *Резольвента задовольняє інтегральні рівняння*

$$\begin{aligned} R(t, s, \lambda) &= K(t, s) + \lambda\int_a^b K(t, \tau)R(\tau, s, \lambda)\,d\tau, \\ R(t, s, \lambda) &= K(t, s) + \lambda\int_a^b K(\tau, s)R(t, \tau, \lambda)\,d\tau. \end{aligned} \tag{11.24}$$

2. *Якщо резольвента $R(t, s, \lambda)$ є ядром нового інтегрального рівняння з параметром $\mu$, то резольвентою цього ядра є функція $R(t, s, \lambda + \mu)$.*
3. *Якщо $R(t, s, \lambda)$ — резольвента ядра $K(t, s)$, то резольвентою спряженого ядра $K^*(t, s) \equiv K(s, t)$ є функція $R(s, t, \lambda)$.*

**◆ Зауваження 11.2**

1. У випадку, коли параметр $\lambda$ недостатньо малий [умова (11.18) не виконується] й ядро $K(t, s)$ невироджене, розв'язок інтегрального рівняння (11.14) можна побудувати так. Нехай $|\lambda| \le R_0$, де $R_0 > 0$ — довільне фіксоване число. Припустимо, що ядро $K(t, s)$ можна наблизити виродженим ядром $\tilde{K}_n(t, s) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s)$ так, що $K(t, s) = \tilde{K}_n(t, s) + K'(t, s)$,

де $\max\limits_{Q} |K'(t, s)| = M' < \dfrac{1}{R_0(b-a)}$. Рівняння (11.14) запишемо у вигляді

$$\varphi(t) = f_1(t, \lambda) + \lambda\int_a^b K'(t, s)\varphi(s)\,ds, \tag{11.25}$$

де $f_1(t, \lambda) = f(t) + \lambda\int_a^b \tilde{K}_n(t, s)\varphi(s)\,ds.$





Розглядаючи функцію $f_1(t, \lambda)$ як вільний член рівняння (11.25), застосуємо до нього формулу (11.23) [умова (11.18) очевидно виконується: $|\lambda|\, M'(b-a) < 1$]. За формулою (11.22) дістаємо резольвенту рівняння (11.25) $R'(t, s, \lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}K'_n(t, s)$. Тоді

$$\varphi(t) = f_1(t, \lambda) + \lambda\int_a^b R'(t, s, \lambda)f_1(s, \lambda)\,ds. \tag{11.26}$$

Співвідношення (11.26) можна записати у вигляді

$$\varphi(t) = f(t, \lambda) + \lambda\int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(t, \lambda)b_i(s)\varphi(s)\,ds, \tag{11.27}$$

де

$$f(t, \lambda) = f(t) + \lambda\int_a^b R'(t, \tau, \lambda)f(\tau)\,d\tau,$$

$$a_i(t, \lambda) = a_i(t) + \lambda\int_a^b R'(t, \tau, \lambda)a_i(\tau)\,d\tau \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ядро рівняння (11.27) вироджене. Розв'язуючи його, дістанемо розв'язок рівняння (11.14).

2. Сформулюємо твердження [22], на якому ґрунтується метод наближеного розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма (11.14) заміною його ядра $K(t, s)$ близьким до нього виродженим ядром.

Нехай функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ — розв'язки інтегральних рівнянь

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds,$$

$$\psi(t) = \tilde{f}(t) + \lambda\int_a^b \tilde{K}(t, s)\psi(s)\,ds$$

і $\tilde{R}(t, s, \lambda)$ — резольвента ядра $\tilde{K}(t, s)$. Припустимо, що $\forall\, t \in [a, b]$ виконуються нерівності

$$\int_a^b |K(t, s) - \tilde{K}(t, s)|\,ds < \varepsilon, \quad |f(t) - \tilde{f}(t)| < \eta,$$

$$\int_a^b |\tilde{R}(t, s, \lambda)|\,ds < G, \quad \varepsilon\,|\lambda|\,(1 + |\lambda|\,G) < 1.$$

Тоді справедлива оцінка

$$|\varphi(t)-\psi(t)| < \eta(1+|\lambda|G)+\frac{N|\lambda|(1+|\lambda|G)^2\varepsilon}{1-|\lambda|(1+|\lambda|G)\varepsilon} \quad (t\in[a,b]),$$

де $N=\max\limits_{[a,b]}|f(t)|$.

З оцінки випливає, що похибку наближеної рівності $\varphi(t)\approx\psi(t)$ можна зробити як завгодно малою, добираючи належним чином $\varepsilon$ і $\eta$ [тобто $\tilde{K}(t,s)$ і $\tilde{f}(t)$].

**Рівняння Вольтерра.** Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)\varphi(s)\,ds \quad (t\in[a,b]). \tag{11.28}$$

Як і у випадку рівняння Фредгольма, можна побудувати резольвенту ядра $K(t,s)$ рівняння (11.28) як суму ряду з ітерованих ядер. Вважатимемо, що ядро $K(t,s)\in C_\Delta$ [див. (10.4)], а $f(t)\in C_{[a,b]}$.

Ітеровані ядра в цьому випадку будуються за формулами

$$\begin{aligned}K_1(t,s)&=K(t,s),\\ K_n(t,s)&=\int_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau \quad (n\ge 2),\end{aligned} \tag{11.29}$$

а резольвента $R(t,s,\lambda)$ має вигляд

$$R(t,s,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t,s). \tag{11.30}$$

Ряд у (11.30) збігається рівномірно для будь-яких значень параметра $\lambda$, а його сума — резольвента $R(t,s,\lambda)\in C_\Delta$ при будь-якому фіксованому $\lambda$. Це випливає з оцінки

$$|K_n(t,s)|\le\frac{M^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!},$$

яку рекомендуємо одержати самостійно, виходячи з рекурентних співвідношень (11.29).





Як і у випадку рівняння Фредгольма, неважко дістати формулу

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^t R(t,s,\lambda)f(s)\,ds, \tag{11.31}$$

котра дає неперервний розв'язок рівняння (11.28) для будь-якого значення параметра $\lambda$.

**Теорема 11.5**
Нехай в інтегральному рівнянні (11.28) $K(t,s)\in C_\Delta$, $f(t)\in C_{[a,b]}$. Тоді це рівняння при будь-якому $\lambda$ має єдиний неперервний розв'язок $\varphi(t)$, що виражається формулою (11.31).

Доведемо єдиність розв'язку $\varphi(t)$. Припустимо, що розв'язків два: $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$, тоді їх різниця $\psi_0(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$ задовольняє однорідне рівняння

$$\psi(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)\psi(s)\,ds. \tag{11.32}$$

Проте це рівняння має лише тривіальний розв'язок $\psi(t)\equiv 0$. Справді, з рівняння (11.32) дістаємо нерівність

$$|\psi(t)|\le|\lambda|\int_a^t|K(t,s)||\psi(s)|\,ds\le|\lambda|MN(t-a),$$

де $N=\max\limits_{a\le t\le b}|\psi(t)|$, $M=\max\limits_{\Delta}|K(t,s)|$. Ітеруючи цю нерівність, матимемо

$$|\psi(t)|\le|\lambda|^2 M^2N\frac{(t-a)^2}{2!},\ \ldots,\ |\psi(t)|\le\frac{NM^n(t-a)^n}{n!}\to 0,$$
$$n\to+\infty \quad (\forall t\in[a,b]).$$

Отже, $\psi(t)\equiv 0$ на $[a,b]$.

❑ **Приклад 11.2**

*Розв'яжемо інтегральне рівняння*

$$\varphi(t)=e^t+\lambda\int_0^t e^{t-s}\varphi(s)\,ds \quad (t\in[0,1]).$$

Тут $K(t, s) = e^{t-s}$. Згідно з формулами (11.29) послідовно знаходимо

$$K_1(t, s) = e^{t-s}, \quad K_2(t, s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}\, d\tau = e^{t-s}(t-s), \ldots,$$

$$K_n(t, s) = e^{t-s} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тому резольвента має вигляд [див. (11.30)]

$$R(t, s, \lambda) = e^{t-s} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{t-s} e^{\lambda(t-s)} = e^{(1+\lambda)(t-s)}.$$

За формулою (11.31) дістаємо розв'язок

$$\varphi(t) = e^t + \lambda \int_0^t e^{(1+\lambda)(t-s)} e^s\, ds = e^{(1+\lambda)t}.$$

◆ **Зауваження 11.3**

Оператор Вольтерра має важливу особливість: значення функції

$$A\varphi(t) = \int_a^t K(t, s)\varphi(s)\, ds$$

у момент $t$ визначається значеннями функції $\varphi(s)$ тільки при $s \le t$, інакше кажучи, цей оператор ураховує лише «передісторію» процесу.

Розв'язок рівняння Вольтерра [формула (11.31)]

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t, s, \lambda) f(s)\, ds$$

у будь-який момент $t$ також визначається значенням зовнішнього впливу $f(s)$ лише в попередні моменти $s \le t$.

Раніше припускалося, що в рівнянні (11.38) ядро й вільний член неперервні. Ці умови можна послабити. Нехай

$$\int_a^b \int_a^t |K(t, s)|^2\, ds\, dt = B^2 < \infty, \quad \int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty. \qquad (11.33)$$

Справедливе таке твердження.





**Теорема 11.6**

Інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)\varphi(s)\, ds \quad (a \le t \le b),$$

в якому ядро та вільний член задовольняють умови (11.33), має єдиний розв'язок $\varphi(t) \in L_{2[a,\, b]}$ при будь-яких $\lambda$.

Зазначимо, що формули (11.31), (11.30), (11.29) для розв'язку, резольвенти $R(t, s, \lambda)$ та ітерованих ядер зберігаються й у цьому випадку.

## 11.6

## Інтегральні рівняння з ядром, яке має слабку особливість

У застосуваннях часто трапляються інтегральні рівняння Вольтерра з розривним ядром вигляду

$$K(t, s) = \frac{H(t, s)}{(t-s)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1), \qquad (11.34)$$

де $H(t, s)$ — неперервна функція в трикутнику $\Delta$ [див. (10.4)]. Зокрема, такий вигляд має рівняння Абеля (див. п. 10.1)

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = f(t). \qquad (11.35)$$

Розглянемо в $L_{2\Delta}$ інтегральне рівняння Вольтерра другого роду з ядром вигляду (11.34)

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \frac{H(t, s)}{(t-s)^{\alpha}} \varphi(s)\, ds. \qquad (11.36)$$

При $\alpha \geq 1/2$ квадрат ядра неінтегровний на $\Delta$. Проте рівняння (11.36) можна розв'язати, «поліпшуючи» ядро в такий спосіб. Побудуємо другу ітерацію ядра $K(t, s)$:

$$K_2(t, s) = \int_s^t K(t, \tau)K(\tau, s)\,d\tau = \int_s^t \frac{H(t, \tau)H(\tau, s)}{(t-\tau)^\alpha(\tau - s)^\alpha}\,d\tau.$$

Зробимо заміну: $\tau = s + (t - s)z$. Тоді дістанемо

$$K_2(t, s) = (t-s)^{1-2\alpha}\int_0^1 \frac{H(t, s+(t-s)z)\,H(s+(t-s)z, s)}{z^\alpha(1-z)^\alpha}\,dz \quad (11.37)$$

або

$$K_2(t, s) = (t-s)^{1-2\alpha}F_2(t, s),$$

де $F_2(t, s)$ — обмежена в $\Delta$ функція, оскільки інтеграл в (11.37) при $\alpha < 1$ збіжний.

Аналогічно можемо знайти подальші ітерації ядра $K(t, s)$:

$$\begin{aligned} &K_3(t, s) = (t-s)^{2-3\alpha}F_3(t, s), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &K_n(t, s) = (t-s)^{n-1-n\alpha}F_n(t, s), \end{aligned} \quad (11.38)$$

де $F_3, \ldots, F_n$ — обмежені функції.

Із формул (11.38) випливає, що повторне ядро $K_n(t, s)$ обмежене, якщо

$$n(1-\alpha) - 1 > 0. \quad (11.39)$$

Справді, для будь-якого $\alpha \in (0, 1)$ можна знайти таке натуральне $n$, що нерівність (11.39) виконуватиметься. Отже, для всіх $\alpha \in (0, 1)$ можна вказати номер $n$ такий, що відповідне ядро $K_n(t, s)$ буде обмежене.

Покажемо, що рівняння Вольтерра

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds \quad (11.40)$$





можна звести до аналогічного рівняння з ядром $K_n(t, s)$ і деяким вільним членом $f_n(t)$. Помножимо обидві частини рівняння (11.40) на $\lambda K(t, s)$ і зінтегруємо в межах від $a$ до $t$:

$$\lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds = \lambda\int_a^t K(t, s)f(s)\,ds +$$
$$+\lambda^2\int_a^t K(t, s)\left\{\int_a^s K(s, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right\}ds. \quad (11.41)$$

Змінюючи порядок інтегрування в (11.41), дістаємо

$$\varphi(t) = f_2(t) + \lambda^2\int_a^t K_2(t, s)\varphi(s)\,ds, \quad (11.42)$$

де

$$f_2(t) = f(t) + \lambda\int_a^t K(t, s)f(s)\,ds.$$

Якщо властивості ядра $K_2(t, s)$ нас «не влаштовують» (наприклад, воно необмежене), то процес можна продовжити:

$$\varphi(t) = f_3(t) + \lambda^3\int_a^t K_3(t, s)\varphi(s)\,ds,$$

де $f_3(t) = f_2(t) + \lambda^2\int_a^t K_3(t, s)f_2(s)\,ds$, і т. д.

У такий спосіб за скінченну кількість кроків прийдемо до рівняння Вольтерра з обмеженим ядром $K_n(t, s)$ і деяким вільним членом $f_n(t)$. Розв'язавши це рівняння, дістанемо розв'язок рівняння (11.40).

Застосуємо вказаний спосіб до рівняння Абеля (11.35) (це інтегральне рівняння першого роду, але процедура побудови рівняння з обмеженим ядром застосовна). У рівнянні (11.35) $K(t, s) = (t-s)^{-1/2}$. Тому, згідно з (11.37) ($H \equiv 1$, $\alpha = 1/2$)

$$K_2(t, s) = \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

(ураховано, що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $B(p, q)$, $\Gamma(p)$ — β- і γ-функції Ейлера відповідно).

Припускаючи, що розв'язок рівняння (11.35) існує, домножимо обидві частини цього рівняння на $K(t, s) = (t - s)^{-1/2}$ і зінтегруємо в межах від 0 до $t$. Аналогічно (11.41), (11.42) дістанемо

$$\int_0^t K_2(t, s)\varphi(s)\,ds = \int_0^t K(t, s)f(s)\,ds,$$

тобто

$$\pi\int_0^t \varphi(s)\,ds = \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t - s}}\,ds.$$

Здиференціювавши по $t$ обидві частини останньої рівності, прийдемо до формули

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t - s}}\,ds. \tag{11.43}$$

Якщо функція $f(t)$ диференційовна, то вираз (11.43) можна перетворити. Застосувавши до інтеграла в (11.43) формулу інтегрування частинами ($u(s) = f(s)$, $v(s) = -2(t - s)^{1/2}$), дістанемо

$$\int_0^t \frac{f(s)\,ds}{\sqrt{t - s}} = 2f(0)\sqrt{t} + 2\int_0^t (t - s)^{\frac{1}{2}} f'(s)\,ds.$$

Підставивши знайдений вираз для інтеграла в (11.43), матимемо

$$\varphi(t) = \frac{f(0)}{\pi\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{f'(s)}{\sqrt{t - s}}\,ds. \tag{11.44}$$

❑ **Приклад 11.3**

*Використовуючи формулу (11.44), розв'яжемо задачу про таутохрону (див. п. 10.1).*

У цьому випадку $f(s) \equiv c = \text{const}$ і з (11.44) дістаємо





$$\varphi(t) = \frac{c}{\pi\sqrt{t}}.$$

Ураховуючи, що $\varphi(\eta) = \dfrac{1}{\sin\beta}$, знаходимо $\sin\beta = \dfrac{\pi\sqrt{\eta}}{c}$, звідки $\eta = \dfrac{c^2}{\pi^2}\sin^2\beta$.

Далі маємо (див. п. 10.1)

$$d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{c^2}{\pi^2}\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{c^2}{\pi^2}(1 + \cos 2\beta)\,d\beta.$$

Звідси знаходимо ξ і дістаємо параметричні рівняння шуканої кривої:

$$\xi = \frac{c^2}{\pi^2}\left(\beta + \frac{1}{2}\sin 2\beta\right) + c_1, \quad \eta = \frac{c^2}{2\pi^2}(1 - \cos 2\beta).$$

◆ **Зауваження 11.4**

Як і у випадку інтегрального рівняння Вольтерра (11.40), замість інтегрального рівняння Фредгольма

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds \tag{11.45}$$

можна розглядати аналогічне рівняння з ітерованим ядром вигляду

$$\varphi(t) = f_n(t) + \lambda\int_a^b K_n(t, s)\varphi(s)\,ds, \tag{11.46}$$

де $f_n(t) = f_{n-1}(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)f_{n-1}(s)\,ds$ $(n \geq 2,\ f_1(t) \equiv f(t))$. Цей спосіб дає змогу усунути деякі особливості ядра, оскільки ітеровані ядра гладкіші, ніж вихідне ядро.

Наприклад, якщо в (11.45)

$$K(t, s) = \frac{H(t, s)}{|t - s|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \tag{11.47}$$

де $H(t, s)$ — обмежена на $Q = [a, b] \times [a, b]$ функція, то ітероване ядро $K_n(t, s)$ матиме таку саму структуру, але при цьому число α змінюється на $1 - n(1 - \alpha)$ [аналогічно випадку (11.34)] і, отже, при досить великих $n$ показник $1 - n(1 - \alpha)$ стане від'ємним, а ядро $K_n(t, s)$ буде обмеженим.

✍ ① Розв'язати інтегральні рівняння Абеля (11.35), якщо:

$$а)\ f(t) = c\sqrt{t};\quad б)\ f(t) = \sin t.$$

② Розв'язати узагальнене рівняння Абеля

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds = f(t) \quad (0 < \alpha < 1).$$

## 11.7

## Інтегральні рівняння із симетричними ядрами

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма (11.14). Ядро $K(t, s)$ цього рівняння називають *симетричним*, якщо $K(t, s) \equiv K(s, t)\ \forall\ (t, s) \in Q$ [у випадку комплекснозначної функції симетричне ядро визначене рівністю $K(t, s) = K^*(t, s) = \overline{K(s, t)}$ ]. Інтегральне рівняння, ядро якого симетричне, називають *рівнянням із симетричним ядром,* або *симетричним інтегральним рівнянням.* Далі розлядатимемо рівняння (11.4) із симетричним ядром. Аналогічно п. 10.4 значення параметра $\lambda = \lambda_0$ називають *характеристичним (власним) числом ядра* $K(t, s)$, якщо однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(t) = \lambda_0 \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds \tag{11.48}$$

має принаймні один нетривіальний розв'язок. Такий розв'язок називають *власною,* або *фундаментальною, функцією ядра.*

### Основні властивості симетричних інтегральних рівнянь

1. *Будь-яке неперервне симетричне ядро* $K(t, s) \not\equiv 0$ *має принаймні одне власне число** .

Слід зауважити, що несиметричні ядра можуть не мати власних чисел. Так, наприклад, неважко перевірити, що вироджене (несиметричне) ядро $K(t, s) = ts^2((t, s) \in [-1, 1] \times [-1, 1])$ не має жодного власного числа.

2. *Якщо* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *— власні функції, які відповідають одному власному числу* $\lambda_0$, *то й довільна лінійна комбінація* $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ $(c_1, c_2$ *— сталі:* $c_1^2 + c_2^2 > 0)$ *є власною функцією, яка відповідає власному числу* $\lambda_0$.

Цю властивість пропонуємо довести самостійно.

3. *Власні функції* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, *що відповідають різним власним числам* $\lambda_1$ *і* $\lambda_2$, *ортогональні:*

$$\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt = 0. \tag{11.49}$$

Справді, за умовою,

$$\varphi_1(t) \equiv \lambda_1 \int_a^b K(t, s)\varphi_1(s)\,ds, \quad \varphi_2(t) \equiv \lambda_2 \int_a^b K(t, s)\varphi_2(s)\,ds.$$

Із першої тотожності маємо

$$\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt = \lambda_1 \int_a^b \left( \int_a^b K(t, s)\varphi_1(s)\,ds \right)\varphi_2(t)\,dt.$$

Змінюючи порядок інтегрування з урахуванням симетричності ядра $K(t, s)$, дістанемо $\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt$, звідки випливає (11.49).

◆ **Зауваження 11.5**

Із властивостей 2 і 3 випливає, що систему власних функцій симетричного ядра можна вважати ортонормованою.

4. *Власні числа симетричного ядра дійсні.*

Аби довести це твердження, припустимо (від супротивного), що $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0\ (\beta_0 \neq 0)$ — комплексне власне число і $\varphi_0(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ — власна функція, яка йому відповідає. Неважко довести, що в цьому випадку $\overline{\varphi_0(t)} = \varphi_1(t) - i\varphi_2(t)$ є власною функцією, яка відповідає вла-

* З доведенням цього твердження можна ознайомитися в [22, 27].

сному числу $\overline{\lambda_0} = \alpha_0 - i\beta_0$. За властивістю 3 функції $\varphi_0(t)$ і $\overline{\varphi_0(t)}$ ортогональні:

$$\int_a^b \varphi_0(t)\overline{\varphi}(t)\,dt = \int_a^b (\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t))\,dt = 0.$$

Звідси, внаслідок неперервності функцій $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, випливає, що $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \equiv 0$ і, отже, $\varphi_0(t) \equiv 0$, а це неможливо.

5. *Будь-який відрізок* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *може містити лише скінченну множину власних чисел.*

Аби довести це твердження, припустимо (від супротивного), що в деякому відрізку $[\alpha, \beta]$ міститься нескінченна послідовність власних чисел $\delta_n$, а $\psi_n(t)$ — послідовність власних функцій, які їм відповідають. Знайдемо коефіцієнти Фур'є ядра $K(t, s)$ за ортонормованою системою $\{\psi_k(t)\}: c_k = \int_a^b K(t, s)\psi_k(s)\,ds = \frac{1}{\delta_k}\psi_k(t)$. Застосовуючи нерівність Бесселя, маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_k^2(t)}{\delta_k^2} \le \int_a^b K^2(t, s)\,ds \quad (t \in [a, b],\ n \in \mathbb{N}).$$

Зінтегрувавши по $t$ від $a$ до $b$, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\delta_k^2} \le \int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,ds\,dt \overset{\text{def}}{=} B^2 < +\infty \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{11.50}$$

Оскільки $\delta_k \in [\alpha, \beta]$ $(k \in \mathbb{N})$, то $\delta_k^2 \le \gamma^2$ $(\gamma^2 = \max\{\alpha^2, \beta^2\})$. Тоді з (11.50) випливає, що $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma^2} \le B^2$, а це неможливо, оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2}$ розбіжний.

Із властивості 5 випливає, що всі власні числа можна занумерувати в порядку зростання їхніх абсолютних значень: $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots$ і що $|\lambda_n| \to +\infty$, якщо множина всіх власних чисел *(спектр ядра)* нескінченна.





6. *Кожному власному числу* $\lambda$ *симетричного ядра відповідає скінченна множина лінійно незалежних власних функцій.*

Це твердження доводиться аналогічно властивості 5. Пропонуємо довести його самостійно.

7. *Симетричне ядро є виродженим тоді й лише тоді, коли воно має скінченний спектр.*

Справді, якщо ядро $K(t, s)$ вироджене, то власні числа є нулями визначника Фредгольма $D(\lambda)$ (див. п. 10.4). Рівняння $D(\lambda) = 0$ має, очевидно, скінченну кількість коренів. Нехай тепер $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — спектр ядра, а $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — повна система відповідних їм лінійно незалежних (ортонормованих) власних функцій. Покажемо, що в цьому випадку

$$K(t, s) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(t)\varphi_k(s). \tag{11.51}$$

Нехай $\tilde{K}(t, s)$ — різниця лівої та правої частин (11.51). Від супротивного припустимо, що $\tilde{K}(t, s) \not\equiv 0$. Оскільки ядро $\tilde{K}(t, s)$ симетричне, то за властивістю 1 існує власне число $\mu$ і власна функція $\tilde{\varphi}(t)$ цього ядра. Доведемо, що функція $\tilde{\varphi}(t)$ ортогональна до всіх власних функцій ядра $K(t, s)$. Маємо ($\forall\, m = 1, 2, \ldots, n$)

$$\int_a^b \tilde{\varphi}(t)\varphi_m(t)\,dt = \mu\int_a^b \varphi_m(t)\int_a^b \tilde{K}(t, s)\tilde{\varphi}(t)\,ds\,dt =$$

$$= \int_a^b \tilde{\varphi}(s)\int_a^b \left( K(t, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(t)\varphi_k(s) \right)\varphi_m(t)\,dt\,ds =$$

$$= \int_a^b \tilde{\varphi}(s)\left( \int_a^b K(t, s)\varphi_m(t)\,dt - \frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(s) \right)ds =$$

$$= \int_a^b \tilde{\varphi}(s)\left( \frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(s) - \frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(s) \right)ds = 0.$$

Звідси випливає, що число $\mu$ і функція $\tilde{\varphi}(t)$ є власними й для ядра $K(t, s)$. Справді,

$$\tilde{\varphi}(t) = \mu\int_a^b \tilde{K}(t, s)\tilde{\varphi}(s)\,ds =$$

$$= \mu\int_a^b \left( K(t, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(t)\varphi_k(s) \right)\tilde{\varphi}(s)\,ds = \mu\int_a^b K(t, s)\tilde{\varphi}(s)\,ds.$$

Оскільки $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ — повна система лінійно незалежних власних функцій ядра $K(t, s)$, то $\tilde{\varphi}(t)$ є лінійною комбінацією функцій цієї системи, що неможливо, бо $\tilde{\varphi}(t)$ ортогональна до всіх цих функцій. Отже, $\tilde{K}(t, s) \equiv 0$ і справедлива рівність (11.51).

8. *Якщо $\lambda_0$ і $\varphi_0(t)$ — відповідно власне число та власна функція симетричного ядра $K(t, s)$, то $\lambda_0^n$ і $\varphi_0(t)$ — власне число й власна функція ітерованого ядра $K_n(t, s)$ (див. п. 11.5).*

Цю властивість симетричного ядра пропонуємо довести самостійно.

9. *Аби неперервна функція $\psi(t)$ була ортогональною до симетричного ядра $K(t, s)$: $\int_a^b K(t, s)\psi(s)\,ds = 0 \quad (t \in [a, b])$, необхідно й достатньо, щоб вона була ортогональною до кожної власної функції ядра: $\int_a^b \psi(s)\varphi_k(s)\,ds = 0 \quad (k = 1, 2, ...)$.*

Цю властивість приймемо без доведення.

10. *(Теорема Гільберта—Шмідта). Якщо функція $f(t)$ може бути представлена у вигляді*

$$f(t) = \int_a^b K(t, s)h(s)\,ds, \tag{11.52}$$

*де $h(s)$ — кусково-неперервна функція на $[a, b]$, а $K(t, s)$ — симетричне ядро, то її можна розвинути в абсолютно й рівномірно збіжний на відрізку $[a, b]$ ряд Фур'є за системою власних функцій ядра $K(t, s)$:*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t) \quad \left( c_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\,dt \right). \tag{11.53}$$





Для доведення застосуємо критерій Коші рівномірної збіжності. Оскільки $c_k = \dfrac{h_k}{\lambda_k}$ $(k = 1, 2, ...)$, де $h_k = \int_a^b h(s)\varphi_k(s)\,ds$ — коефіцієнти Фур'є функції $h(t)$, то за нерівністю Коші—Буняковського маємо

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) \right| \le \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k^2} \right)^{1/2} < \varepsilon \quad \forall n > n_0,$$

оскільки за нерівностями Бесселя для функцій $h(t)$ і $K(t, s)$ відповідно

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 \le \int_a^b h^2(s)\,ds, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k^2} \le \int_a^b K^2(t, s)\,ds \le N = \text{const}.$$

Нехай тепер $\psi(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(t)$. Неперервна на $[a, b]$ функція $\psi(t)$ ортогональна до всіх функцій $\varphi_m(t)$. Справді,

$$\int_a^b \psi(t)\varphi_m(t)\,dt = \int_a^b \left( f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) \right)\varphi_m(t)\,dt = c_m - \frac{h_m}{\lambda_m} = 0$$

$$(m = 1, 2, ...).$$

Отже,

$$\int_a^b \psi^2(t)\,dt = \int_a^b \psi(t)\left( f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) \right)dt = \int_a^b \psi(t)f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \psi(t)\int_a^b K(t, s)h(s)\,ds\,dt = \int_a^b h(s)\int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt\,ds = 0,$$

оскільки за властивістю 9 функція $\psi(t)$ ортогональна до ядра $K(t, s)$. Тому $\psi^2(t) \equiv 0$ і $\psi(t) \equiv 0$.

11. *Якщо в неоднорідному рівнянні (11.14) $\lambda$ не є власним числом ядра $K(t, s)$, то рівняння має єдиний розв'язок $\varphi(t)$, який можна представити у вигляді*

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k - \lambda}\varphi_k(t), \tag{11.54}$$

*де* $c_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\,dt$ *— коефіцієнти Фур'є функції* $f(t)$.

Справді, в цьому випадку за першою теоремою Фредгольма рівняння має єдиний розв'язок $\varphi(t)$, для якого

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda g(t), \tag{11.55}$$

де $g(t) = \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds$. За теоремою Гільберта—Шмідта $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(t)$. Підставимо (11.55) у рівняння (11.14):

$$f(t) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(t) \equiv f(t) + \lambda\int_a^b K(t, s)\left(f(s) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(s)\right)ds.$$

Звідси

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(t) \equiv \int_a^b K(t, s)f(s)\,ds + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} A_k\int_a^b K(t, s)\varphi_k(s)\,ds.$$

Застосувавши теорему Гільберта—Шмідта до функції $\int_a^b K(t, s)f(s)\,ds$ і враховуючи, що $\int_a^b K(t, s)\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(t)$, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} A_k\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k},$$

звідки випливає, що $A_k = \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda}$.





Пропонуємо самостійно довести, що у випадку, коли $\lambda = \lambda_p$ ($\lambda_p$ — деяке власне число), необхідною й достатньою умовою розв'язності неоднорідного рівняння із симетричним ядром є умова ортогональності функції $f(t)$ до системи лінійно незалежних власних функцій $\varphi_p(t)$, $\varphi_{p+1}(t)$, ..., $\varphi_{p+r-1}(t)$, які відповідають власному числу $\lambda_p$, причому, якщо умова розв'язності виконується, то неоднорідне рівняння має $r$-параметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{k=0}^{r-1} A_k\varphi_{p+k}(t) + \lambda_p\sum_{k}{}'\frac{c_k}{\lambda_k - \lambda_p}\varphi_k(t),$$

де $A_0, A_1, ..., A_{r-1}$ — довільні сталі, а штрих означає, що в останній сумі доданки з номерами $k = p, p+1, ..., p+r-1$ мають бути опущені.

◆ **Зауваження 11.6**

Важливим застосуванням теорії інтегральних рівнянь Фредгольма із симетричним ядром є теорія спектральних задач Штурма—Ліувілля (див. п. 6.4). Розглянемо, наприклад, задачу Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31).

Нехай $\lambda = 0$ не є власним числом цієї задачі. Тоді (див. п. 6.3) існує функція Гріна $G(t, s)$ ($G(t, s) = G(s, t)$) крайової задачі для рівняння $L_1 y = -f(t)$ з крайовими умовами (6.31), причому розв'язок задачі можна записати у вигляді $y(t) = -\int_a^b G(t, s)f(s)\,ds$. Поклавши $f(t) = -\lambda\rho(t)y(t)$, прийдемо до [еквівалентного задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31)] інтегрального рівняння

$$y(t) = \lambda\int_a^b G(t, s)\rho(s)y(s)\,ds. \tag{11.56}$$

Рівняння (11.56) можна звести до рівняння із симетричним ядром відносно функції $\varphi(t) = y(t)\sqrt{\rho(t)}$:

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b G(t, s)\sqrt{\rho(t)\rho(s)}\varphi(s)\,ds. \tag{11.57}$$

Тому власні функції задачі Штурма—Ліувілля (6.30), (6.31) є власними функціями інтегрального рівняння (11.57), і навпаки. Це, зокрема, дає змогу дістати теорему Стеклова як наслідок теореми Гільберта—Шмідта. Справді, нехай $f(t)$ — двічі неперервно диференційовна функція на відрізку $[a, b]$, яка задовольняє крайові умови (6.31). Тоді функція $L_1 f = h(t) \in C_{[a,b]}$ і $f(t) = \int_a^b G(t, s)h(s)\,ds$. Отже, за теоремою Гільберта—Шмідта функція $f(t)$ може бути представлена абсолютно й рівномірно збіжним на відрізку $[a, b]$ рядом Фур'є за системою власних функцій задачі (6.30), (6.31).

# ДОДАТКИ

*Додаток 1*

## ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ Й ФОРМУЛИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

### Д. 1.1. Основні теореми операційного числення

| Назва | Оригінал | Зображення |
|---|---|---|
| Про перетворення Лапласа | $f(t) \in O\lvert\alpha_0\rvert$ | $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ $(\mathrm{Re}\ p > \alpha_0)$ |
| Про обернене перетворення Лапласа | $\frac{1}{2}(f(t-0)+f(t+0)) = \frac{1}{2\pi i}\times$ $\times\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$ $(\mathrm{Re}\ p = s > \alpha_0)$ | $F(p)$ |
| Про лінійність перетворення Лапласа | $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)$ $(f_k(t) \in O\lvert\alpha_{0k}\rvert)$ | $\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(p)$, $\mathrm{Re}\ p > \alpha_0$ $\left(\begin{array}{l}\alpha_0 = \max\limits_{1\le k\le n}\{\alpha_{0k}\},\\ a_k = \mathrm{const},\ k = 1, \ldots, n\end{array}\right)$ |
| Про диференціювання оригіналу | $f'(t)$; $f^{(n)}(t)$ | $pF(p) - f(+0)$; $p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(+0)$ |
| Про інтегрування оригіналу | $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{1}{p}F(p)$ |





*Продовження дод. 1.1*

| Назва | Оригінал | Зображення |
|---|---|---|
| Про диференціювання зображення | $-tf(t)$; $(-1)^n t^n f(t)$ | $F'(p)$; $F^{(n)}(p)$ |
| Про інтегрування зображення | $\frac{f(t)}{t} \in O\lvert\alpha_0\rvert$ | $\int_p^{\infty} F(q)\,dq$ $(\mathrm{Re}\ p > \alpha_0)$ |
| Про заміну масштабу | $f(ct)$ $(c = \mathrm{const} > 0)$ | $\frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right)$ |
| Про зміщення зображення | $e^{\lambda t} f(t)$ $(\lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{C})$ | $F(p-\lambda)$ $(\mathrm{Re}(p-\lambda) > \alpha_0)$ |
| Про запізнення оригіналу | $f(t-\tau)h(t-\tau)$ $(\tau = \mathrm{const} > 0)$ | $e^{-p\tau}F(p)$ |
| Про випередження оригіналу | $f(t+\tau)h(t)$ $(\tau = \mathrm{const} > 0)$ | $e^{p\tau}\left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t)e^{-pt}\,dt\right]$ |
| Про граничні співвідношення | $f'(t) \in O\lvert\alpha_0\rvert$ $f(+0) = \mathrm{const}$; $f(+\infty) = \mathrm{const}$ | $f(+0) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$; $f(+\infty) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$ |
| Про зображення згортки оригіналів | $f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ $(f(t) \in O\lvert\alpha_0\rvert,\ g(t) \in O\lvert\beta_0\rvert)$ | $F(p)G(p)$, $(\mathrm{Re}\ p > \gamma_0 = \max\{\alpha_0, \beta_0\})$ |
| Перша теорема розвинення | $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k t^{k-1}}{(k-1)!} \in O\lvert R_0\rvert$ | $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$ $(\lvert p\rvert \ge R_0 > 0)$ |

*Закінчення дод. 1.1*

| Назва | Оригінал | Зображення | |
|---|---|---|---|
| Друга теорема розвинення для раціональних функцій | $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{(m_k-1)!}[(p-p_k)^{m_k}\times$ $\times e^{pt}F(p)]\Big\vert_{p=p_k}^{(m_k-1)}$ | Правильний нескоротний раціональний дріб $F(p)=\frac{K(p)}{N(p)}$ | $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — корені $N(p)$ кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_l$ |
| | $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{K(p_k)}{N'(p_k)}e^{p_k t}$ | | $m_1=m_2=\ldots=$ $=m_l=1$ |

## Д.1.2. Зображення й оригінали

| № пор. | $f(t)$ | $F(p)$ | № пор. | $f(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $h(t)$ | $\frac{1}{p}$ | 9 | $\operatorname{ch}\omega t$ | $\frac{p}{p^2-\omega^2}$ |
| 2 | $h(t-\tau)\ (\tau>0)$ | $e^{-p\tau}\frac{1}{p}$ | 10 | $e^{\alpha t}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$ |
| 3 | $e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{p-\alpha}$ | 11 | $e^{\alpha t}\cos\omega t$ | $\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$ |
| 4 | $t^{\alpha}\ (\alpha>-1)$ | $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ | 12 | $t\sin\omega t$ | $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| 5 | $t^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | 13 | $t\cos\omega t$ | $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ |
| 6 | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ | 14 | $e^{\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$ | $\frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$ |
| 7 | $\cos\omega t$ | $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ | 15 | $e^{\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$ | $\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$ |
| 8 | $\operatorname{sh}\omega t$ | $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ | 16 | $e^{\alpha t}t^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ | $\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$ |





*Закінчення дод. 1.2*

| № пор. | $f(t)$ | $F(p)$ | № пор. | $f(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | $\frac{1}{2}t^2e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{(p-\alpha)^3}$ | 30 | $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}\omega t-$ $-\sin\omega t)$ | $\frac{\omega^3}{p^4-\omega^4}$ |
| 18 | $\frac{t^n}{n!}\sin\omega t$ | $\frac{1}{2i}\left(\frac{(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}-\right.$ $\left.-\frac{(p-i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}\right)$ | 31 | $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\omega t-$ $-\cos\omega t)$ | $\frac{\omega^2 p}{p^4-\omega^4}$ |
| 19 | $(1+\alpha t)e^{\alpha t}$ | $\frac{p}{(p-\alpha)^2}$ | 32 | $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}\omega t+$ $+\sin\omega t)$ | $\frac{\omega p^2}{p^4-\omega^4}$ |
| 20 | $\frac{1}{\alpha^3}(\alpha-t)e^{-\frac{t}{\alpha}}$ | $\frac{p}{(1+\alpha p)^2}$ | 33 | $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\omega t+$ $+\cos\omega t)$ | $\frac{p^3}{p^4-\omega^4}$ |
| 21 | $\frac{1}{\alpha^2}(e^{\alpha t}-1-\alpha t)$ | $\frac{1}{p^2(p-\alpha)}$ | 34 | $\sin\omega t\operatorname{sh}\omega t$ | $\frac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}$ |
| 22 | $\alpha e^{-\frac{t}{\alpha}}+t-\alpha$ | $\frac{1}{p^2(1+\alpha p)}$ | 35 | $\cos\omega t\operatorname{sh}\omega t$ | $\frac{\omega(p^2-2\omega^2)}{p^4+4\omega^4}$ |
| 23 | $\frac{1}{\alpha^2}(1+$ $+(\alpha t-1)e^{\alpha t})$ | $\frac{1}{p(p-\alpha)^2}$ | 36 | $\sin\omega t\operatorname{ch}\omega t$ | $\frac{\omega(p^2+2\omega^2)}{p^4+4\omega^4}$ |
| 24 | $\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$ | $\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$ | 37 | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ | $\frac{1}{\sqrt{p}}$ |
| 25 | $\left(t+\frac{1}{2}\alpha t^2\right)e^{\alpha t}$ | $\frac{p}{(p-\alpha)^3}$ | 38 | $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ | $\frac{1}{p\sqrt{p}}$ |
| 26 | $\cos^2\omega t$ | $\frac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$ | 39 | $\frac{1+2\alpha t}{\sqrt{\pi t}}$ | $\frac{p+\alpha}{p\sqrt{p}}$ |
| 27 | $\sin^2\omega t$ | $\frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$ | 40 | $J_0(t)$ | $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ |
| 28 | $\operatorname{ch}^2\omega t$ | $\frac{p^2-2\omega^2}{p(p^2-4\omega^2)}$ | 41 | $J_\nu(t)\ (\nu>-1)$ | $\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^\nu}{\sqrt{p^2+1}}$ |
| 29 | $\operatorname{sh}^2\omega t$ | $\frac{2\omega^2}{p(p^2-4\omega^2)}$ | 42 | $\delta(t-\alpha)$ | $e^{-\alpha p}$ |

*Додаток 2*

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА В ЗАДАЧАХ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

## Д. 2.1. Основні поняття

Однією з основних задач варіаційного числення* є *задача відшукання екстремумів функціоналів*.

Нехай $K$ — деякий клас функцій із повного лінійного нормованого (банахового) простору $B$. Прикладами таких просторів (див. п 3.1) є простір $C_{[a,\,b]}$ усіх дійсних, неперервних на $[a, b]$ функцій (норма в $C_{[a,\,b]}$ визначена формулою $\|y\|_0 = \max\limits_{[a,\,b]} |y(x)|$, $y \in C_{[a,\,b]}$); простір $C^k_{[a,\,b]}$ усіх дійсних, неперервних разом зі своїми похідними до $k$-го порядку включно на відрізку $[a, b]$, функцій (норма в $C^k_{[a,\,b]}$ визначена формулою $\|y\|_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{[a,\,b]} |y^{(i)}(x)|$, $y \in C^k_{[a,\,b]}$).

Якщо кожній функції $y = y(x) \in K$ за деяким законом поставлене у відповідність число $J(y) = J(y(x)) \in \mathbb{R}$, то кажуть, що на множині $K$ задано *функціонал* $J(y)$.

Так, наприклад, формулою $S(y) = \int_a^b y(x)\,dx$ $(y(x) \ge 0,\ y(x) \in C_{[a,\,b]})$ задано функціонал, який функції $y(x)$ ставить у відповідність площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = y(x)$; формулою $l(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$ $(y(x) \in C^1_{[a,\,b]})$ задано функціонал, який функції $y(x)$ ставить у відповідність довжину дуги кривої $y = y(x)$ $(x \in [a, b])$; формулою $\sigma(z) = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy$ задано функціонал, який функції $z = z(x, y) \in C^1_D$ ставить у відповідність площу криволінійної поверхні, заданої рівнянням $z = z(x, y)$ $((x, y) \in D)$.

* Із загальною теорією варіаційного числення можна ознайомитися в [39, 17, 29].





У розглянутих прикладах функціонали задано за допомогою операції інтегрування. Такі функціонали називають *інтегральними*. Проте це не єдиний спосіб задання функціоналів. Так, наприклад, функціонали

$$J(y) = \sum_{i=1}^{n} y^2(x_i), \quad J(y) = \frac{y(x_1)\ldots y(x_n)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1 + y^2(x_i))}$$

$$(x_i \in [a, b],\ i = 1, \ldots, n;\ y(x) \in C_{[a,\,b]})$$

задано за допомогою арифметичних операцій. Слід зазначити, що в класичному варіаційному численні вивчаються здебільшого інтегральні функціонали.

Нехай $y_0 = y_0(x) \in K$ — фіксована функція, $h = h(x) \in K$ — довільна функція (*варіація функції* $y_0$) така, що $y = y(x) = y_0 + h \in K$. Величину $\Delta J(y_0, h) \overset{\text{def}}{=} J(y_0 + h) - J(y_0)$ називають *приростом функціонала* $J(y)$ на функції $y_0$ («у точці $y_0$»).

Функціонал $J(y)$ називають *неперервним у точці* $y_0$, якщо $|\Delta J(y_0, h)| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0$ — будь-яке) $\forall h \in K : \|h\| < \delta$ (символом $\|\cdot\|$ позначено норму у відповідному просторі).

Так, наприклад, функціонали $S(y)$ і $l(y)$ є неперервними, оскільки

$$|\Delta S(y_0, h)| = \left|\int_a^b h(x)\,dx\right| \le \|h\|_0\,(b-a) < \varepsilon \ \text{ при } \|h\|_0 < \delta_0 = \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$|\Delta l(y_0, h)| = \left|\int_a^b \left(\sqrt{1 + (y_0' + h')^2} - \sqrt{1 + y_0'^2}\right) dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \frac{|2y_0'h' + h'^2|}{\sqrt{1 + (y_0' + h')^2} + \sqrt{1 + y_0'^2}}\,dx \le \frac{1}{2}\int_a^b |2y_0'h' + h'^2|\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}(2\|y_0\|_1 + 1)\|h\|_1\,(b-a) < \varepsilon$$

$$\text{при } \|h\|_1 < \min\left\{1,\ \frac{2\varepsilon}{(2\|y_0\|_1 + 1)(b-a)}\right\} = \delta_1.$$

Неперервний функціонал $J(y)$ називають *лінійним*, якщо $J(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 J(h_1) + \alpha_2 J(h_2)$ для довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ і будь-яких $h_1, h_2 \in K$.

Лінійними функціоналами є, наприклад: $J(y) = \int_a^b a_0(x) y(x)\,dx$ $(y(x) \in$

$\in C_{[a,b]}$; $a(x) \in C_{[a,b]}$ — фіксована функція); $J(y) = \int_a^b (a_0(x)y(x) + b_0(x)y'(x))\,dx$ ($y(x) \in C^1_{[a,b]}$; $a_0(x)$, $b_0(x) \in C_{[a,b]}$ — фіксовані функції).

Якщо приріст $\Delta J(y_0, h)$ функціонала $J(y)$ можна представити у вигляді

$$\Delta J(y_0, h) = \varphi(y_0, h) + o(\| h \|), \quad \| h \| \to 0, \tag{Д.2.1}$$

де $\varphi(h) \equiv \varphi(y_0, h)$ — лінійний функціонал, то функціонал $J(y)$ називають *диференційовним* (у точці $y_0$), а лінійний функціонал $\varphi(h) \equiv \delta J(y_0, h)$ — *першою варіацією (варіацією, першим диференціалом) функціонала* $J(y)$ у точці $y_0$.

Знайдемо, наприклад, варіації таких функціоналів:

а) $J(y) = \int_a^b y^2(x)\,dx \quad (y \in C_{[a,b]})$;

б) $J(y) = \int_a^b (y(x) + x^2 y'(x))\,dx \quad (y \in C^1_{[a,b]})$.

Маємо:

а) $$\Delta J(y_0, h) = \int_a^b ((y_0(x) + h(x))^2 - y_0^2(x))\,dx = 2\int_a^b y_0(x)h(x)\,dx + \int_a^b h^2(x)\,dx, \quad \left|\int_a^b h^2(x)\,dx\right| \le \| h \|_0^2 (b-a) = o(\| h \|_0), \ \| h \|_0 \to 0.$$

Отже, $\delta J(y_0, h) = 2\int_a^b y_0(x)h(x)\,dx$.

б) $$\Delta J(y_0, h) = \int_a^b (y_0(x) + h(x) + x^2(y_0'(x) + h'(x)))\,dx - \int_a^b (y_0(x) + x^2 y_0'(x))\,dx = \int_a^b (h(x) + x^2 h'(x))\,dx = \delta J(y_0, h).$$

Зазначимо, що коли функціонал $J(y)$ диференційовний у точці $y_0 = y_0(x)$, то його варіацію $\varphi(h)$ можна знайти за формулою

$$\varphi(h) \equiv \delta J(y_0, h) = \frac{d}{dt} J(y_0 + th)\Big|_{t=0}. \tag{Д.2.2}$$

Справді, поклавши $\psi(t) = J(y_0 + th)$ $(t \in \mathbb{R})$, з умови диференційовності (Д.2.1) дістанемо

$$\psi(t) - \psi(0) = \varphi(th) + o(t), \quad t \to 0. \tag{Д.2.3}$$





Унаслідок лінійності функціонала $\varphi$ маємо $\varphi(th) = t\varphi(h)$. Тому з рівності (Д.2.3) випливає, що $\psi'(0) = \varphi(h)$.

Вираз $\psi'(0)$, де $\psi(t) = J(y_0 + th)$ $(t \in \mathbb{R})$, $h \in K$, називають *першою варіацією за Лагранжем функціонала* $J(y)$ у точці $y_0$. Для розглядуваних у класичному варіаційному численні інтегральних функціоналів поняття першої варіації за Лагранжем збігається з поняттям варіації функціонала в традиційному розумінні (як лінійної частини приросту). Тому для відшукання варіацій функціоналів далі використовуватимемо формулу (Д.2.2).

Знайдемо, наприклад, за формулою (Д.2.2) варіацію функціонала $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ $(y(x) \in C^1_{[a,b]})$ у припущенні, що $F$ — неперервно диференційовна функція своїх змінних. Маємо

$$\delta J(y_0, h) = \frac{d}{dt}\int_a^b F(x, y_0 + th, y_0' + th')\,dx \,\Big|_{t=0} = \int_a^b (F_y'(x, y_0, y_0')h + F_{y'}'(x, y_0, y_0')h')\,dx. \tag{Д.2.4}$$

Точку $y_0 = y_0(x) \in K$ називають *точкою мінімуму (максимуму) функціонала* $J(y)$, якщо

$$\Delta J(y_0, h) \ge 0 \quad (\le 0)\ \forall h \in K : \| h \| < \delta.$$

Якщо функціонал $J(y)$ має варіацію (Д.2.2), то можна дістати необхідну умову мінімуму або максимуму *(екстремуму)* функціонала, аналогічну необхідній умові локального екстремуму функцій багатьох змінних.

**Теорема Д.2.1**

Нехай $y_0 = y_0(x) \in K$ — точка екстремуму функціонала $J(y)$ і в цій точці функціонал має варіацію $\delta J(y_0, h)$. Тоді

$$\delta J(y_0, h) = 0 \quad (\forall h \in K). \tag{Д.2.5}$$

**Доведення**

При $h = 0$ рівність (Д.2.5) очевидна. Нехай $h \ne 0 \in K$ — будь-яка. Розглянемо точку $y_0 = y_0 + th$ при $|t| < \delta/\| h \|$. Тоді $\| th \| = |t|\| h \| < \delta$ і виконується нерівність $J(y_0 + th) \le J(y_0)$ (для точки максимуму) або $J(y_0 + th) \ge J(y_0)$ (для точки мінімуму). Це означає, що диференційовна при $t = 0$ функція $\psi(t) = J(y_0 + th)$ у точці $t = 0$ має внутрішній локальний екстремум. Отже, за відомою теоремою аналізу $\psi'(0) = \delta J(y_0, h) = 0$.

Використовуючи *основну лему варіаційного числення* (*лему Лагранжа*), необхідну умову (Д.2.5) екстремуму функціонала $J(y)$ записують у формі рівнянь Ейлера.

**Лема Д.2.1**
**(Лагранжа для функцій однієї змінної)**

Якщо $f(x) \in C_{[a,\, b]}$ і для будь-якої функції $h(x) \in C_{[a,\, b]}$ виконується рівність

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0, \qquad (Д.2.6)$$

то $f(x) \equiv 0$ ($x \in [a, b]$).

Доведення

Припустимо від супротивного, що існує точка $x_0 \in [a, b]$ така, що, наприклад, $f(x_0) = r_0 > 0$. Унаслідок неперервності функції $f(x)$, на деякому відрізку $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ ($x_0 \in [\alpha, \beta]$) виконуватиметься нерівність $f(x) > r_0/2$. Якщо вибрати неперервну функцію $h_0(x)$ у вигляді $h_0(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$ при $x \in [\alpha, \beta]$, $h_0(x) \equiv 0$ при $x \in [a, b]\backslash[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)h_0(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)h_0(x)\,dx > \frac{r_0}{2}\int_\alpha^\beta h_0(x)\,dx > 0,$$

що суперечить умові (Д.2.6). Отже, $f(x) \equiv 0$ ($x \in [a, b]$).

◆ **Зауваження Д.2.1**

Твердження леми Д.2.1 справедливе й у випадку, коли рівність (Д.2.6) виконується для функцій $h(x) \in C^k_{[a,\, b]}$, які задовольняють додаткові умови типу $h(a) = h'(a) = \dots = h^{(k-1)}(a) = 0$, $h(b) = h'(b) = \dots = h^{(k-1)}(b) = 0$. У цьому разі для доведення леми Лагранжа можна використати, наприклад, функцію $h_0(x) \in C^k_{[a,\, b]}$, визначену так:

$$h_0(x) = (x-\alpha)^{2k}(x-\beta)^{2k} \text{ при } x \in [\alpha, \beta],\ h_0(x) \equiv 0 \text{ при } x \in [a, b]\backslash[\alpha, \beta].$$

**Лема Д.2.2**
**(Лагранжа для функцій багатьох змінних)**

Нехай $G$ — замкнена обмежена область із $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial G$, $f(x_1, \dots, x_n) \in C_G$ і для будь-якої функції $h(x_1, \dots, x_n) \in C_G$ виконується рівність





$$\int_G f(x)h(x)\,dx = 0 \quad (x = (x_1, \dots, x_n),\ dx = dx_1 \dots dx_n). \qquad (Д.2.7)$$

Тоді $f(x) \equiv 0$ ($x \in G$).

Доведення

Аналогічно доведенню леми Д.2.1 припустимо, що $f(x_0) = r_0 > 0$ ($x_0 \in G$). Тоді, внаслідок неперервності функції $f(x)$, знайдеться така куля $S_0 : \|x - x_0\| \le \varepsilon_0$, $S_0 \subset G$, для якої $f(x) > r_0/2\ \forall x \in S_0$. Побудувавши неперервну функцію $h_0(x)$ у вигляді $h(x_0) = (\varepsilon^2 - \|x - x_0\|)^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) при $x \in S_0$, $h_0(x) \equiv 0$ при $x \in G\backslash S_0$, дістанемо

$$\int_G f(x)h_0(x)\,dx = \int_{S_0} f(x)h_0(x)\,dx > \frac{r_0}{2}\int_{S_0} h_0(x)\,dx > 0,$$

що суперечить умові (Д.2.7). Отже, $f(x) \equiv 0$ ($x \in G$).

◆ **Зауваження Д.2.2**

Твердження леми Д.2.2 справедливе й у випадку, коли рівність (Д.2.7) виконується для функцій $h(x)$, які задовольняють додаткові умови диференційовності, а також умову $h(x)\big|_{x \in \partial G} = 0$.

## Д.2.2. Рівняння Ейлера найпростішої задачі варіаційного числення (задачі із закріпленими кінцями)

***Випадок функціонала, залежного від скалярної функції скалярної змінної:***

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \to \text{extr},\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b. \qquad (Д.2.8)$$

Екстремум шукають у класі функцій $y = y(x) \in C^1_{[a,\, b]}$ таких, що на кінцях відрізка приймають задані значення $y_a$, $y_b$. Геометричний зміст задачі полягає у відшуканні гладкої кривої, яка сполучає точки $(a, y_a)$, $(b, y_b)$ і на якій функціонал $J(y)$ має екстремальне значення. Припускається, що функції $F$, $F'_x$, $F'_y$, $F'_{y'}$ неперервно диференційовні.

Згідно з теоремою Д.2.1, якщо $y = y_0(x)$ — точка екстремуму функціонала $J(y)$, то варіація функціонала в цій точці дорівнює нулю: $\delta J(y_0, h) = 0$ (тотожно по $h$). Використовуючи формулу (Д.2.4) для варіації функціонала (Д.2.8), маємо

$$\delta J(y_0, h) = \int_a^b (F'_y(x, y_0, y'_0)h + F'_{y'}(x, y_0, y'_0)h')\,dx = 0. \qquad (Д.2.9)$$

Зауважимо, що, оскільки $y_0(a) + h(a) = y_a$, $y_0(b) + h(b) = y_b$, $y_0(a) = y_a$, $y_0(b) = y_b$, то варіація $h = h(x) \in C^1_{[a,\,b]}$ задовольняє умови $h(a) = h(b) = 0$. Другий доданок у (Д.2.9) перетворимо, інтегруючи частинами, поклавши $h'dx = dv$, $u = F'_{y'}(x, y_0, y'_0)$:

$$\delta J(y_0, h) = \int_a^b F'_y(x, y_0, y'_0)h\,dx + (F'_{y'}(x, y_0, y'_0)h(x))\Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b \frac{d}{dx}(F'_{y'}(x, y_0, y'_0))h\,dx =$$

$$= \int_a^b \left( F'_y(x, y_0, y'_0) - \frac{d}{dx}(F'_{y'}(x, y_0, y'_0)) \right) h\,dx = 0. \qquad (Д.2.10)$$

З (Д.2.10) за лемою Д.2.1 дістаємо

$$F'_y(x, y_0, y'_0) - \frac{d}{dx}(F'_{y'}(x, y_0, y'_0)) = 0,$$

або

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0 \quad (x \in [a, b]). \qquad (Д.2.11)$$

Рівняння (Д.2.11) називають *рівнянням Ейлера (Ейлера—Лагранжа) варіаційної задачі* (Д.2.8).

Припустивши, що $y = y(x)$ — двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$ функція, з (Д.2.11) дістанемо

$$F'_x - F''_{xy'} - F''_{yy'}y' - F''_{y'y'}y'' = 0. \qquad (Д.2.12)$$

Таким чином, застосування необхідної умови екстремуму функціонала у варіаційній задачі (Д.2.8) приводить до розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння Ейлера другого порядку (Д.2.12) з крайовими умовами $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Розв'язки цієї крайової задачі (а також відповідні інтегральні криві рівняння Ейлера) називають *екстремалями варіаційної задачі*. Екстремум функціонала $J(y)$ може реалізуватися лише на екстремалях.

Якщо функція $F$ не залежить від $y$ : $F = F(x, y')$, то рівняння Ейлера має вигляд $\frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0$, звідки дістаємо перший інтеграл $F'_{y'}(x, y') = c$ *(інтеграл імпульсу)*.





Якщо функція $F$ не залежить від $x$ : $F = F(y, y')$, то рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$F - y'F'_{y'} = c \qquad (Д.2.13)$$

*(інтеграл енергії)*. Щоб довести це, знайдемо похідну внаслідок рівняння Ейлера від $F - y'F'_{y'}$:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F'_{y'}) = F'_y y' + F'_{y'}y'' - y''F'_{y'} - F''_{y'y}y'^2 - F''_{y'y'}y'y'' = y'\left( F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} \right) = 0.$$

✍ Пропонуємо скласти й самостійно дослідити рівняння Ейлера для таких випадків:

① $F = F(x, y)$; ② $F(x, y, y') = P(x, y) + y'Q(x, y)$; ③ $F = F(y')$.

***Випадок функціонала, залежного від векторної функції скалярної змінної:***

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \to \text{extr}, \ \ y(a) = y_a, \ y(b) = y_b \qquad (Д.2.14)$$

$$(y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))).$$

Екстремум шукають у класі вектор-функцій $y = y(x) \in C^1_{n[a,\,b]}$. Припускається, що функції $F$, $F'_x$, $F'_y$, $F'_{y'}$ неперервно диференційовні.

✍ Пропонуємо самостійно показати, що *система диференціальних рівнянь Ейлера* варіаційної задачі (Д.2.14) має вигляд

$$F'_{y_j} - \frac{d}{dx}(F'_{y'_j}) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n; \ x \in [a, b]). \qquad (Д.2.15)$$

***Випадок функціонала, залежного від скалярної функції скалярного аргументу й похідних вищих порядків:***

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx \to \text{extr}, \ \ y^{(k)}(a) = y_{ak}, \ y^{(k)}(b) = y_{bk} \qquad (Д.2.16)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Екстремум шукають у класі функцій $y = y(x) \in C^n_{[a,\,b]}$. Припускається, що функції $F$, $F'_x$, $F'_y$, ..., $F'_{y^{(n)}}$ неперервно диференційовні.

*Рівняння Ейлера—Пуассона* варіаційної задачі (Д.2.16) має вигляд

$$F'_y + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k)}} = 0. \qquad (Д.2.17)$$

(Рівняння (Д.2.17) також пропонуємо вивести самостійно.)

***Випадок функціонала, залежного від скалярної функції векторного аргументу:***

$$J(z) = \int_G F(x, z, p_1, \ldots, p_n)\,dx \to \text{extr} \quad z\big|_{\partial G} = v(x) \qquad (Д.2.18)$$

($x = (x_1, \ldots, x_n)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область із кусково-гладкою межею $\partial G$; $p_k = z'_{x_k}$, $k = 1, \ldots, n$). Екстремум шукають у класі функцій $z = z(x) \in C^1_G$. Припускається, що функції $F, F'_x, F'_z, F'_{p_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ неперервно диференційовні.

*Рівняння Ейлера—Остроградського* варіаційної задачі (Д.2.18) має вигляд

$$F'_z - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F'_{p_k} = 0. \qquad (Д.2.19)$$

Одержимо рівняння (Д.2.19) при $n = 2$. Функціонал $J(z)$ у цьому випадку запишемо у вигляді

$$J(z) = \iint_G F(x, y, z, p_1, p_2)\,dx\,dy \quad (p_1 = z'_x,\ p_2 = z'_y).$$

Варіацію функціонала знаходимо за формулою (Д.2.2):

$$\delta J(z_0, h) = \frac{d}{dt} J(z_0 + th)\big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \iint_G F(x, y, z_0 + th, z'_{0x} + th'_x, z'_{0y} + th'_y)\,dx\,dy\big|_{t=0} =$$

$$= \iint_G [F'_z h + F'_{p_1} h'_x + F'_{p_2} h'_y]\,dx\,dy. \qquad (Д.2.20)$$

У (Д.2.20) функції $F'_z, F'_{p_1}, F'_{p_2}$ обчислені в точці $(x, y, z_0, z'_{0x}, z'_{0y})$. Перетворимо два останніх доданки в (Д.2.20), використовуючи формулу Гріна:

$$\iint_G [F'_{p_1} h'_x + F'_{p_2} h'_y]\,dx\,dy =$$

$$= \iint_G \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(F'_{p_1})h - \frac{\partial}{\partial y}(F'_{p_2})h + \frac{\partial}{\partial x}(F'_{p_1} h) + \frac{\partial}{\partial y}(F'_{p_2} h) \right] dx\,dy =$$

$$= \iint_G \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(F'_{p_1}) - \frac{\partial}{\partial y}(F'_{p_2}) \right] h\,dx\,dy + \oint_{\partial G} F'_{p_1} h\,dy - F'_{p_2} h\,dx =$$

$$= -\iint_G \left[ \frac{\partial}{\partial x}(F'_{p_1}) + \frac{\partial}{\partial y}(F'_{p_2}) \right] h\,dx\,dy,$$





оскільки $h\big|_{\partial G} = 0$. Із необхідної умови екстремуму функціонала $J(z)$: $\delta J(z_0, h) = 0$ тепер маємо

$$\iint_G \left[ F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{p_2} \right] h\,dx\,dy = 0,$$

звідки, внаслідок леми Д.2.2, дістаємо рівняння Ейлера—Остроградського (Д.2.19) ($n = 2$):

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{p_2} = 0.$$

Розглянемо, наприклад, рівняння Ейлера—Остроградського варіаційної задачі

$$J(z) = \iint_G (z'^2_x + z'^2_y)\,dx\,dy \to \text{extr}, \quad z(x, y)\big|_{\partial G} = v(x, y).$$

У цьому випадку $F'_z = 0$, $F'_{p_1} = 2z'_x$, $F'_{p_2} = 2z'_y$ і рівняння Ейлера—Остроградського має вигляд $-\frac{\partial}{\partial x}(2z'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(2z'_y) = 0$ або $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$. Це *рівняння Лапласа*. Щоб знайти екстремалі даної задачі, потрібно розв'язати одну з основних задач математичної фізики — задачу Діріхле для рівняння Лапласа.

*Додаток 3*

# ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРУ

## Д.3.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки будуються на основі другого закону Ньютона: *зміна кількості руху точки пропорційна прикладеній силі, що спричинює рух, і відбувається в напрямі прямої, по якій ця сила діє:*

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f}. \qquad (Д.3.1)$$

Якщо $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — закон руху точки ($\vec{r}(t)$ — радіус-вектор), $m = \text{const}$ — маса точки, то векторне диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}, \qquad (Д.3.2)$$

де $\vec{f} = \vec{f}\left(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)$ — рівнодійна сил, прикладених до точки.

Проектуючи рівняння (Д.3.2) на осі прямокутної декартової системи координат *Oxyz*, дістанемо координатну форму рівнянь руху

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z, \qquad (Д.3.3)$$

де $X$, $Y$, $Z$ — проекції сили $\vec{f}$ на координатні осі.

У динаміці вільної матеріальної точки розв'язуються задачі двох основних типів. У *першій основній задачі* за відомим законом руху $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і масою $m$ точки потрібно знайти рівнодійну $\vec{f}$ сил, які спричинили заданий рух





точки. Розв'язок цієї задачі дається формулою $\vec{f} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. У *другій основній задачі* заданими величинами є маса $m$ точки, рівнодійна сил $\vec{f} = \vec{f}\left(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)$ і початкові умови, тобто значення радіуса-вектора $\vec{r}(t)$ і швидкості $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ при $t = t_0$. Потрібно знайти закон руху $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки в просторі. Друга основна задача динаміки зводиться до розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (Д.3.3).

Наведемо приклади розв'язування другої основної задачі динаміки.

**1. Закон руху матеріальної точки, кинутої з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ ($|\vec{v}_0| = v_0$) під кутом $\alpha$ до горизонту**. Вісь $Oz$ прямокутної декартової системи координат спрямуємо вертикально вгору. Вважатимемо поле тяжіння однорідним. Тоді, нехтуючи опором повітря, дістанемо диференціальні рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg,$$

де $m$ — маса точки, $g$ — прискорення вільного падіння. Звідси

$$x = \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \dot{y}_0 t + y_0,$$
$$z = -gt^2/2 + \dot{z}_0 t + z_0, \qquad (Д.3.4)$$

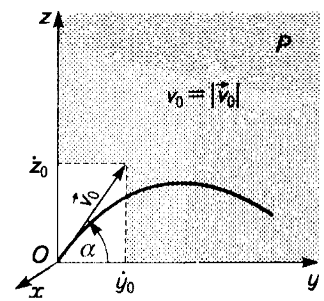

Рис. Д.3.1

де $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ — початкове положення, $\vec{v}_0 = \{\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$ — початкова швидкість точки при $t = 0$.

Із перших двох рівнянь (Д.3.4) маємо $\dot{y}_0(x - x_0) = \dot{x}_0(y - y_0)$ — рівняння площини $P$, яка проходить через точку $(x_0, y_0, z_0)$ паралельно осі $Oz$. Отже, рух точки відбувається у вертикальній площині $P$. Взявши цю площину за координатну площину $Oyz$, а початкову точку $(x_0, y_0, z_0)$ — за початок координат, дістанемо (рис. Д.3.1): $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0\cos\alpha$, $\dot{z}_0 = v_0\sin\alpha$. Із (Д.3.4) маємо закон руху точки

$$x = 0, \quad y = v_0 t\cos\alpha, \quad z = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2.$$

**2. Знаходження швидкості й часу падіння тіла на Землю.** Припустимо, що тіло масою $m$ падає на Землю з великої висоти $H$ із початковою швидкістю $v_0 = 0$ (рис. Д.3.2).

Нехтуючи опором повітря, дістанемо, що на тіло діє лише сила земного тяжіння, обернено пропорційна квадрату відстані тіла від центра Землі. Тому диференціальне рівняння руху тіла в проекції на вісь $Ox$ матиме вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\left(\frac{R}{R+H-x}\right)^2, \qquad (Д.3.5)$$

де $x$ — зміщення тіла, $R$ — радіус Землі. Враховуючи, що $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, із рівняння (Д.3.5) дістаємо

$$v\,dv = g\frac{R^2dx}{(R+H-x)^2},$$

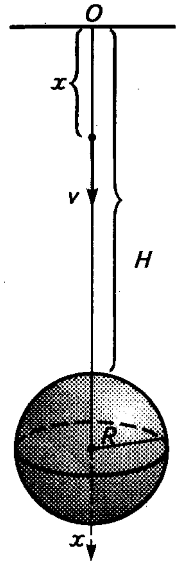

Рис. Д.3.2

звідки $v^2 = \frac{2gR^2}{R+H-x} - c$, де $c$ — стала інтегрування. При $x = 0$, $v = v_0 = 0$ матимемо $c = \frac{2gR^2}{R+H}$. Тому $v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H-x} - \frac{2gR^2}{R+H}}$. Поклавши $x = H$, дістанемо кінцеву швидкість падіння тіла на Землю

$$v_к = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}. \qquad (Д.3.6)$$

Щоб знайти час $T$ падіння тіла на Землю, рівняння руху запишемо у формі $\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{R}{R+H-x}\right)^2$ і виразимо: $\frac{R}{R+H-x} = \frac{v^2+c}{2gR}$. Звідси

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{v^2+c}{2gR}\right)^2, \quad dt = 4gR^2\frac{dv}{(v^2+c)^2},$$

$$T = 4gR^2\int_0^{v_к}\frac{dv}{(v^2+c)^2} = 4gR^2\left[\frac{v}{2c(v^2+c)} + \frac{1}{2c^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{c}}\right]\Bigg|_0^{v_к}.$$

Підставивши значення $v_к$ і $c$, дістанемо





$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+H}{2g}}\left[\sqrt{RH} + (R+H)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{H}{R}}\right]. \qquad (Д.3.7)$$

Із формул (Д.3.6) і (Д.3.7) випливає, що

$$v_\infty = \lim_{H\to+\infty} v_к = \sqrt{2gR}, \quad v_к \approx \sqrt{2gH} \quad (H \ll R), \quad T \approx \sqrt{2H/g} \quad (H \ll R).$$

**3. Вільні коливання матеріальної точки за відсутності опору.** Розглянемо вертикальні коливання тягарця на пружині (рис. Д.3.3). У стані спокою вага тягарця зрівноважена силою натягу деформованої пружини: $mg = n\delta_{ст}$ ($mg$ — вага тягарця, $\delta_{ст}$ — статична деформація пружини, $n$ — коефіцієнт жорсткості пружини). У зміщеному положенні ($x$ — зміщення тягарця від положення рівноваги, $x > 0$ при зміщенні вниз) на тягарець діє вниз вага $mg$, а в протилежному напрямі — сила $n(x + \delta_{ст})$. За другим законом Ньютона маємо $m\ddot{x} = mg - n(x + \delta_{ст})$, або, враховуючи, що $mg = n\delta_{ст}$,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega = \sqrt{n/m}). \qquad (Д.3.8)$$

Як відомо, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (Д.3.8) зі сталими коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (Д.3.9)$$

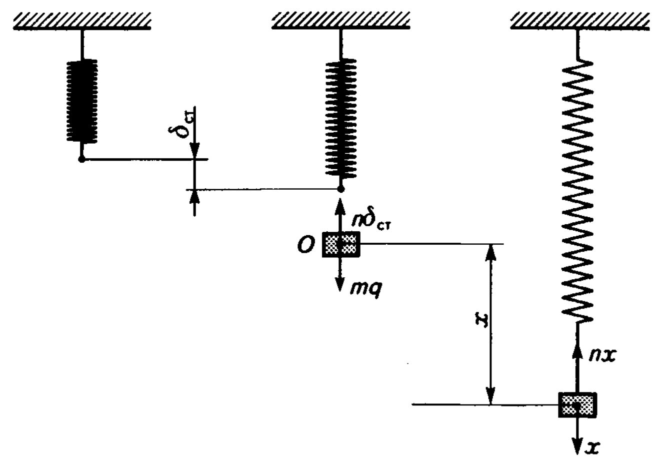

Рис. Д.3.3

де $A$, $\varphi$ — довільні сталі. Сталу $A$ називають *амплітудою коливань* (відстань від положення рівноваги до крайнього положення тягарця під час коливань). Величину $\omega t + \varphi$ називають *миттєвою фазою коливань,* а $\varphi$ — *початковою фазою.* Коливання, які здійснюються за законом (Д.3.9), називають *вільними незатухаючими гармонічними.* Період коливань $T = 2\pi\sqrt{m/n} = 2\pi\sqrt{\delta_{\text{ст}}/g}$. Закон вільних коливань можна записати також, використовуючи початкові значення $x_0$, $\dot{x}_0$:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t. \qquad (Д.3.10)$$

**4. Вільні коливання матеріальної точки за наявності опору середовища.** Розглянемо рух тягарця, враховуючи опір середовища. Якщо швидкість руху невелика, то сила опору середовища прямо пропорційна швидкості й напрямлена протилежно їй. Тому рівняння руху має вигляд $m\ddot{x} = -nx - \mu\dot{x}$ $(\mu > 0)$, або

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (k = \mu/2m). \qquad (Д.3.11)$$

У випадку $k < \omega$ (сила тертя досить мала) загальний розв'язок рівняння (Д.3.11) можна записати у вигляді

$$x = Ae^{-kt} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - k^2}). \qquad (Д.3.12)$$

Рух точки, визначений формулою (Д.3.12), називають *вільними затухаючими коливаннями* (рис. Д.3.4). Швидкість затухання характеризується *коефіцієнтом тертя k.* Інтервал часу між двома послідовними проходженнями тягарця через положення рівноваги в одному й тому самому напрямі називають *періодом затухаючих коливань:* $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}$ (поява опору середовища зумовлює сповільнення руху — збільшується період коливань).

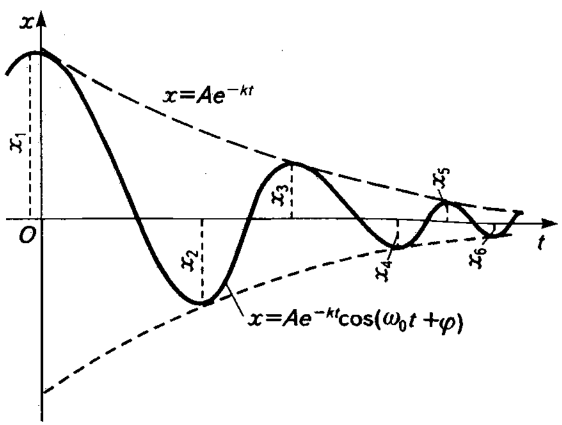


**Рис. Д.3.4**





Важливою характеристикою затухаючих коливань є відношення двох послідовно взятих максимальних відхилень від положення рівноваги. Нехай $x_m$, $x_{m+1}$ — два таких відхилення. Тоді

$$\left|\frac{x_m}{x_{m+1}}\right| = \left|\frac{Ae^{-kt}\cos(\omega_0 t + \varphi)}{Ae^{-k(t+T_0/2)}\cos(\omega_0(t + T_0/2) + \varphi)}\right| = e^{\frac{kT_0}{2}} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

оскільки $\omega_0 T_0/2 = \pi$. Тому числа $|x_1|$, $|x_2|$, ... становлять геометричну (спадну) прогресію зі знаменником $e^{-kT_0/2}$.

Величину $\Delta = e^{kT_0/2}$ називають *декрементом затухання,* а величину $\delta = \ln\Delta = kT_0/2$ — *логарифмічним декрементом затухання.*

З урахуванням початкових значень $x_0$, $\dot{x}_0$ закон вільних коливань за наявності опору середовища можна записати у вигляді

$$x = e^{-kt}\left(x_0 \cos \omega_0 t + \frac{kx_0 + \dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t\right).$$

У випадку $k \ge \omega$ (сила тертя досить велика) загальний розв'язок рівняння руху має вигляд

$$x = c_1 e^{-(k - \sqrt{k^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{-(k + \sqrt{k^2 - \omega^2})t} \quad (k > \omega),$$

або

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-kt} \quad (k = \omega),$$

де $c_1$, $c_2$ — довільні сталі. В цьому випадку тягарець проходить положення рівноваги не більше ніж один раз, $\lim\limits_{t \to +\infty} x = 0$ і коливання відсутні. Такий рух називають *аперіодичним затуханням.*

**5. Вимушені коливання.** Розглянемо коливальний рух тягарця, зумовлений відновлювальною силою, пропорційною зміщенню тягарця від положення рівноваги, силою опору, пропорційною швидкості, й періодичною в часі *(збурювальною)* силою $H \cos \nu t$.

Рівняння руху в цьому разі має вигляд

$$m\ddot{x} = -nx - \mu\dot{x} + H\cos\nu t,$$

або

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = \frac{H}{m}\cos\nu t. \tag{Д.3.13}$$

У випадку $0 < k < \omega$ загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді

$$x = Ae^{-kt}\cos(\omega_0 t + \varphi) + B\cos(\nu t + \delta), \tag{Д.3.14}$$

де

$$B = \frac{H}{m\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4k^2\nu^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2k\nu}{\nu^2 - \omega^2}. \tag{Д.3.15}$$

Перший доданок у правій частині формули (Д.3.14) — загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння — визначає вільні коливання, що затухають у часі, другий — вимушені коливання. Тому через достатньо великий інтервал часу з будь-якою точністю матимемо *закон вимушених коливань:*

$$x \approx B\cos(\nu t + \delta). \tag{Д.3.16}$$

Вимушені коливання не залежать від початкових умов руху, не затухають за наявності опору середовища; частота вимушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили $\nu$.

Залежність амплітуди $B$ вимушених коливань від частоти $\nu$ збурювальної сили ($B = B(\nu)$) показано на рис. Д.3.5.

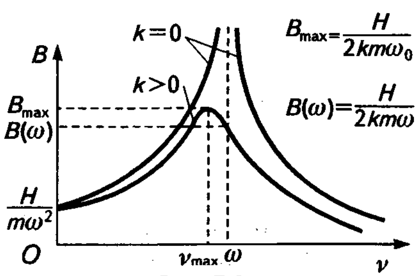

Рис. Д.3.5

При фіксованих $H$, $m$, $k$, $\omega$ максимальне значення амплітуди $B(\nu)$ вимушених коливань досягається в разі виконання умови $\alpha'(\nu) = ((\omega^2 - \nu^2)^2 + 4k^2\nu^2)' = 0$, тобто при $\nu = \nu_{max} = \sqrt{\omega^2 - 2k^2}$ : $B_{max} = B(\nu_{max}) = \dfrac{H}{2km\omega_0}$.

Якщо опору середовища немає ($k = 0$), то загальний розв'язок рівняння (Д.3.13) записується у вигляді





$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{H}{m(\omega^2 - \nu^2)}\cos\nu t \quad \text{при } \nu \neq \omega, \tag{Д.3.17}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{H}{2m\omega}t\sin\omega t \quad \text{при } \nu = \omega. \tag{Д.3.18}$$

Розв'язок (Д.3.17) втрачає зміст у випадку *резонансу*, коли $\nu = \omega$ (частота збурювальної сили дорівнює частоті вільних незатухаючих коливань). Із (Д.3.18) випливає, що за відсутності опору середовища амплітуда коливань при резонансі з часом зростає необмежено. За наявності опору у випадку $\nu = \omega$ амплітуда $B(\omega)$ залишається скінченною: $B(\omega) = \dfrac{H}{2mk\omega}$. Вона не змінюється з часом, хоча може бути досить великою при достатньо малих $k$.

## Д.3.2. Диференціальні рівняння в біологічних та екологічних процесах

Розглянемо диференціальні рівняння, які виникають у найпростіших математичних моделях динаміки ізольованих популяцій [25]. Найпростіша модель зростання популяції організмів задається рівнянням $\dot{N} = \mu N$, де $N = N(t)$ — чисельність (кількість, густота, об'єм тощо) популяції, $t$ — час, $\mu$ — величина, яка є різницею коефіцієнтів народжуваності ($B$) і смертності ($D$) : $\mu = B - D$. Розв'язком цього рівняння при $\mu = \text{const}$ є функція $N = N(0)e^{\mu t}$. При $\mu > 0$ маємо закон Мальтуса [закон експоненціального росту популяції в сприятливому (в розумінні поживності) середовищі]: $N(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Якщо $\mu < 0$, то $N(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Наведене рівняння є рівнянням природного «росту». Таким рівнянням описується радіоактивний розпад, зростання популяцій мікробів, водоростей, дріжджів, бактерій до того, як середовище почне виснажуватися. Закон Мальтуса справедливий на обмежених інтервалах часу.

У природі для багатьох популяцій виконується умова $N(t) \to K$ ($K = \text{const}$) при $t \to +\infty$. Одна з моделей, яка враховує цю умову, має вигляд ($\mu = \mu(N) = r(1 - N/K)$, $r = \text{const} > 0$):

$$\dot{N} = rN(1 - N/K). \tag{Д.3.19}$$

Рівняння (Д.3.19) називають *рівнянням логістичного росту*.

Розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними (Д.3.19) має вигляд

$$N(t) = \frac{K}{1-(1-K/N_0)e^{-rt}} \quad (N(0) = N_0;\ N(t) \to K,\ t \to +\infty).$$

На початку XX ст. В. Вольтерра розглянув моделі взаємодії популяцій двох видів, які можна показати у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 + \gamma_1 N_2), \quad \frac{dN_2}{dt} = N_2(\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1),$$

де $\varepsilon_i$ — коефіцієнти природного приросту, $\gamma_i$ — коефіцієнти міжвидової взаємодії ($i = 1, 2$). Модель описує або боротьбу видів за спільну їжу, або взаємодію типу «хижак—жертва».

У логістичному рівнянні (Д.3.19) величину $r$ називають *мальтузіанським коефіцієнтом*, а величину $K$ — *ємністю середовища*. Це рівняння можна записати також у вигляді $\dot{N} = N(r - \gamma N)$, де $\gamma = r/K$ — коефіцієнт *внутрішньовидової конкуренції*. Логістичне рівняння (Д.3.19) використовується в грубих моделях продуктивності екосистем і моделях динаміки фітомаси в природних системах. Для опису останніх часто використовують неавтономне логістичне рівняння, в якому параметри $r$ і $\gamma$ є функціями часу:

$$\dot{N} = N(r(t) - \gamma(t)N). \qquad (Д.3.20)$$

За допомогою заміни невідомої функції $N = 1/z$ рівняння Бернуллі (Д.3.20) зводиться до лінійного рівняння $\dot{z} + r(t)z = \gamma(t)$, розв'язок якого має вигляд

$$N(t) = \frac{N_0 e^{\int_0^t r(\tau)d\tau}}{1 + N_0 \int_0^t \gamma(\tau) e^{\int_0^\tau r(s)ds} d\tau} \quad (N(0) = N_0). \qquad (Д.3.21)$$

Маючи конкретну залежність функцій $r(t)$ і $\gamma(t)$ від часу, за формулою (Д.3.21) можна описати динаміку зміни $N(t)$.

Якщо швидкість росту популяції залежить від чисельності попереднього покоління, то логістичне рівняння переходить у рівняння із запізненням аргументу*

$$\dot{N} = (r - \gamma N(t - \tau))N, \qquad (Д.3.22)$$

* Із теорією рівнянь із запізненням аргументу можна ознайомитися в [27, 30].





де $\tau = \text{const} > 0$ — середній вік покоління. Для розв'язування такого рівняння необхідно задати *початкову функцію* $\varphi(t)$ : $N(t) = \varphi(t)$ при $-\tau \le t \le 0$ ($\varphi(t) > 0$). Таким чином, задача Коші (початкова задача) для рівняння (Д.3.22) полягає у відшуканні неперервної функції $N(t)$ при $t \ge 0$, яка задовольняє рівняння (Д.3.22) скрізь, крім, можливо, точок $t = k\tau$ ($k \in \mathbb{N}$), а на початковому відрізку $[-\tau, 0]$ збігається із заданою функцією $\varphi(t)$. *Метод кроків* розв'язання початкової задачі полягає в поетапному відшуканні функції $N(t)$ на кожному з відрізків $[k\tau, (k+1)\tau]$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Спочатку розглядаємо відрізок $[0, \tau]$, на якому значення $N(t - \tau) = \varphi(t - \tau)$ відоме й рівняння (Д.3.22) є лінійним. Розв'язок цього рівняння з початковою умовою $N(0) = \varphi(0)$ можна відшукати аналітично або чисельно. Далі розглядаємо відрізок $[\tau, 2\tau]$, для якого функція $N(t - \tau)$ вже відома й знаходимо розв'язок відповідної задачі Коші для лінійного рівняння. Продовжуючи цей процес, дістанемо розв'язок рівняння (Д.3.22) при $t \in [0, T]$.

## *Додаток 4*

# ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ ДІРАКА ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Багато задач фізики й техніки приводять до ситуації, коли класичне поняття функції [як правила, згідно з яким кожному значенню $x \in D(f)$ ставиться у відповідність одне, цілком визначене число $y = f(x)$] є недостатнім. Так, наприклад, розподіл маси вздовж деякої прямої зручно задавати за допомогою щільності цього розподілу. Якщо $\rho(x)$ ($x \in [a, b]$) — щільність розподілу маси ($\rho(x) = 0$, $x \notin [a, b]$) — інтегровна функція, то для маси маємо $m = \int_a^b \rho(x)\,dx$. Проте, якщо розподіл такий, що на прямій у точці $x = 0$ зосереджена одинична маса, то щільність цього розподілу не можна описати жодною функцією. Справді, нехай $\delta(x)$ — щільність розподілу. Тоді формально має бути

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1. \qquad (Д.4.1)$$

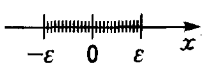

**Рис. Д. 4.1**

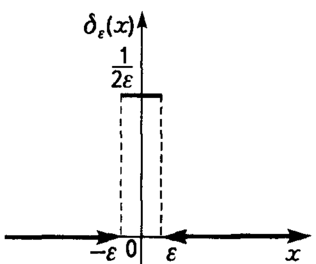

**Рис. Д. 4.2**

Зрозуміло, що з погляду класичних понять функції і невласного інтеграла співвідношення (Д.4.1) неможливі. Припустимо тепер, що одинична маса рівномірно розподілена на малому відрізку $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) (рис. Д.4.1). Тоді щільність такого розподілу $\delta_\varepsilon(x)$ має вигляд так: $\delta_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\varepsilon}$ при $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ (рис. Д.4.2), $\delta_\varepsilon(x) = 0$ при $x \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$. При цьому $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = $ $= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dx = 1.$

Виходячи з фізичного змісту розглядуваного прикладу, можна зробити висновок про те, що щільність розподілу одиничної маси $\delta(x)$





має бути (в певному розумінні) границею щільності розподілу $\delta_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to +0$ ($\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \delta_\varepsilon(x)$), так що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1. \qquad (Д.4.2)$$

До «функції», яка має властивості (Д.4.1), можна прийти також, розглядаючи щільність розподілу одиничного позитивного заряду, зосередженого в точці $x = 0$, або дію миттєвої сили. Припустимо, що протягом малого часу (від $t = -\varepsilon$ до $t = \varepsilon$; $\varepsilon > 0$) на тіло діє деяка стала сила $\delta_\varepsilon(t)$, яка надає тілу кількість руху $mv = 1$. Тоді $\delta_\varepsilon(t) = 0$ при $t \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$ і, згідно із законом Ньютона, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(t)\,dt = mv = 1$. Звідси $\delta_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{2\varepsilon}$ при $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Перейшовши до «границі» при $\varepsilon \to +0$, дістанемо миттєву силу $\delta(t)$ із властивостями (Д.4.1).

«Функцію» $\delta(x)$ із властивостями (Д.4.1) називають *дельта-функцією* (*$\delta$-функцією*) *Дірака**, або *одиничною імпульсною функцією з центром імпульсу в точці* $x = 0$.

Як випливає з (Д.4.2), інтеграл з участю $\delta$-функції слід розуміти як границю відповідного інтеграла з участю $\delta_\varepsilon$-функції при $\varepsilon \to +0$. Нехай $\varphi = \varphi(x)$ — неперервна функція. Покажемо, що виконуються співвідношення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \quad (a < 0 < b). \qquad (Д.4.3)$$

Справді, застосувавши теорему про середнє значення, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(\xi) 2\varepsilon = \varphi(0) \quad (\xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]).$$

Аналогічно $\int_a^b \delta(x)\varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_a^b \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$

Для функції $\delta(x - x_0)$** *з центром імпульсу в точці* $x_0$ аналогічно попередньому можна дістати такі співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0),$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x_0 < a, \text{ або } x_0 > b, \\ \varphi(x_0) & \text{при } a < x_0 < b, \end{cases} \quad (a < b). \qquad (Д.4.4)$$

---

* $\delta$-Функцію було введено англійським фізиком-теоретиком П. Діраком (1902—1984) у 1930 р. в монографії «Принципи квантової механіки».

** Функцію $\delta(x - x_0)$ називають також *зміщеною дельта-функцією*.

Для означення δ-функції, поряд із розглянутими вище (розривними) $\delta_\varepsilon$-функціями, можуть використовуватися також так звані дельтаподібні функціональні послідовності $\delta_n(x)$ нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Таку послідовність називають *дельтаподібною*, якщо рівність

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0) \qquad (Д.4.5)$$

виконується для кожної неперервної функції $\varphi=\varphi(x)$, яка перетворюється в нуль поза деяким скінченним відрізком*.

Кожний член дельтаподібної послідовності може бути деяким наближенням функції $\delta(x)$, причому за означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0) \qquad (Д.4.6)$$

для кожної пробної функції $\varphi$.

Характерна властивість поведінки членів дельтаподібної послідовності полягає в тому, що при достатньо великому $n$ ці функції набувають як завгодно великих значень на достатньо малому відрізку $[-\Delta,\ \Delta]$ (рис. Д.4.3), причому справджуються граничні рівності

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(x)\varphi(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{a}^{b}\delta_n(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0)\quad(a<0<b),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a}^{b}\delta_n(x)\varphi(x)\,dx=0\quad(0\notin[a,\ b]), \qquad (Д.4.7)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{a}\delta_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{b}^{+\infty}\delta_n(x)\,dx=0\quad(a<0,\ b>0),$$

де $\varphi$ — пробна функція.

Дельтаподібними є, наприклад, послідовності:

$$\delta_{1n}(x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-\frac{n}{2}x^2},$$

$$\delta_{2n}(x)=\frac{n}{\pi(n^2x^2+1)},$$

$$\delta_{3n}(x)=\frac{n}{\pi\,\mathrm{ch}\,nx}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

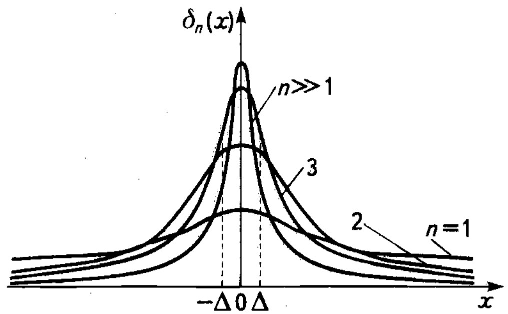

**Рис. Д.4.3**

* Функцію $\varphi$ називатимемо *пробною*, або *основною*.





Пропонуємо самостійно переконатися в тому, що при кожному $n\in\mathbb{N}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{kn}(x)\,dx=1$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ і що послідовності $\delta_{kn}(x)$ задовольняють умови (Д.4.7).

Як уже зазначалося раніше, δ-функція не є функцією в класичному розумінні. Вона належить до класу так званих узагальнених функцій*. Не розглядаючи строгу теорію цих функцій, наведемо ***основні правила дій над δ-функціями*** й прокоментуємо їх.

① $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\varphi(x)\,dx=\varphi(x_0),$$
$$\int_{a}^{b}\delta(x-x_0)\varphi(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } x_0<a \text{ або } x_0>b,\\ \varphi(x_0) & \text{при } a<x_0<b\end{cases} \qquad (Д.4.8)$$

($\varphi=\varphi(x)$ — пробна функція). Ці формули випливають із співвідношень (Д.4.6), (Д.4.7).

② $$\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(x-x_1)+\delta(x-x_2)]\varphi(x)\,dx=\varphi(x_1)+\varphi(x_2). \qquad (Д.4.9)$$

Формула (Д.4.9) визначає суму двох δ-функцій із центрами імпульсів у точках $x_1$ і $x_2$, оскільки за означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(x-x_1)+\delta(x-x_2)]\varphi(x)\,dx=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta_{n1}(x-x_1)+\delta_{n2}(x-x_2)]\varphi(x)\,dx=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$$

для кожної пробної функції $\varphi=\varphi(x)$ і дельтаподібних послідовностей $\delta_{n1}(x)$, $\delta_{n2}(x)$.

③ $$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x),$$
$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0) \qquad (Д.4.10)$$

($f(x)$ — неперевна функція). Формула (Д.4.10) означає, що дії функцій $f(x)\delta(x)$ і $f(0)\delta(0)$ на будь-яку пробну функцію $\varphi(x)$ однакові. Справді,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)\varphi(x)\,dx=f(0)\varphi(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(0)\delta(x)\varphi(x)\,dx.$$

* Із математичною теорією узагальнених функцій можна ознайомитися в [20, 21]. Із (Д.4.8) випливає, що δ-функція є лінійним функціоналом, який кожній неперервній функції $\varphi(x)$ ставить у відповідність число $\varphi(x_0)$.

④ $$\frac{d}{dx}h(x) = \delta(x),$$
$$\frac{d}{dx}h(x - x_0) = \delta(x - x_0). \qquad (Д.4.11)$$

Тут $h(x)$ — функція Хевісайда. Вона не диференційовна в класичному розумінні. Тому першу з рівностей (Д.4.11) слід розуміти так:

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}\delta_n(t)\,dt = h(x).$$

Аналогічно розуміють і другу з рівностей (Д.4.11).

⑤ Нехай $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ при } x < x_0, \\ f_2(x) \text{ при } x > x_0, \end{cases}$ причому функції $f_1$ і $f_2$ диференційовні й існують скінченні границі $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$. Тоді

$$f_*'(x) = f'(x) + A\delta(x - x_0) \quad (A = f(x_0+0) - f(x_0-0)), \qquad (Д.4.12),$$

де символом $f'$ позначено звичайну похідну функції $f$ (яка існує при $x < x_0$ і $x > x_0$), а символом $f_*'$ — узагальнену похідну. Рівність (Д.4.12) виконується в тому розумінні, що $f(x) = f(a) + \int_a^x f_*'(t)\,dt$ $(a < x_0)$. Справді,

$$f(a) + \int_a^x f_*'(t)\,dt = f(a) + \int_a^x [f'(t) + A\delta(t - x_0)]dt =$$
$$= \begin{cases} f(a) + f(x) - f(a) \text{ при } x < x_0, \\ f(a) + f(x_0 - 0) - f(a) + f(x) - f(x_0 + 0) + A \text{ при } x > x_0 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} f_1(x) \text{ при } x < x_0, \\ f_2(x) \text{ при } x > x_0 \end{cases} = f(x).$$

Якщо функція $f$ має в точках $x_1, x_2, \ldots$ стрибки, що дорівнюють $A_1, A_2, \ldots$, і диференційовна в інших точках, то формула для узагальненої похідної набирає вигляду

$$f_*'(x) = f'(x) + \sum_k A_k\delta(x - x_k). \qquad (Д.4.13)$$

⑥ Нехай $f(x)$ — неперервно диференційовна функція, яка має скінченну або нескінченну множину простих коренів $\{x_k\}$ $(f'(x_k) \neq 0)$ (рис. Д. 4.14). Тоді





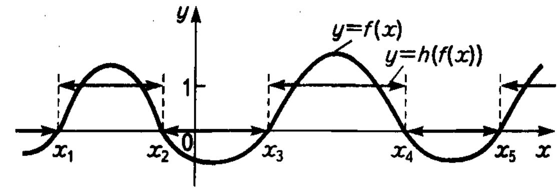


**Рис. Д. 4.4**

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{1}{|f'(x_k)|}\delta(x - x_k). \qquad (Д.4.14)$$

Щоб переконатись у справедливості формули (Д.4.14), знайдемо (узагальнену) похідну функції $h(f(x))$. За правилом диференціювання складної функції маємо $\frac{d}{dx}(h(f(x))) = f'(x)\delta(f(x))$. Проте, використовуючи формулу (Д.4.13), дістаємо $\frac{d}{dx}(h(f(x))) = \sum_k \operatorname{sign} f'(x_k)\delta(x - x_k)$. Отже, $f'(x)\delta(f(x)) = \sum_k \operatorname{sign} f'(x_k)\delta(x - x_k)$. Звідси, враховуючи (Д.4.10), матимемо

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\operatorname{sign} f'(x_k)}{f'(x)}\delta(x - x_k) = \sum_k \frac{1}{|f'(x_k)|}\delta(x - x_k).$$

Із (Д.4.14) випливають, наприклад, такі співвідношення:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad (a \neq 0), \qquad (Д.4.15)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (a > 0), \qquad (Д.4.16)$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x - n\pi), \quad \delta(\cos x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad (Д.4.17)$$

у справедливості яких пропонуємо переконатися самостійно.

⑦ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x - x_0)\varphi(x)\,dx = (-1)^n\varphi^{(n)}(x_0), \quad (n \in \mathbb{N}). \qquad (Д.4.18)$$

Формула (Д.4.18) визначає дію узагальненої похідної $n$-го порядку від δ-функції на $n$ разів неперервно диференційовну пробну функцію φ. Справді, при $n = 1$ маємо*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\delta_n(x)\varphi(x)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(x)\varphi'(x)\,dx\right] = -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi'(x)\,dx = -\varphi'(0).$$

Аналогічно можна розглянути випадок $n > 1$.

⑧
$$\begin{aligned} &\delta(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau},\ \ \delta(t)\doteqdot 1,\\ &\delta^{(n)}(t-\tau)\doteqdot p^n e^{-p\tau},\ \ \delta^{(n)}(t)\doteqdot p^n. \end{aligned} \qquad (Д.4.19)$$

Формула (Д.4.19) дає (узагальнені) зображення за Лапласом δ-функції та її похідних. Справді, внаслідок (Д.4.18) маємо

$$\delta^{(n)}(t-\tau) \doteqdot \int_0^{+\infty} \delta^{(n)}(t-\tau)e^{-pt}\,dt = (-1)^n (e^{-pt})\Big|_{t=\tau}^{(n)} = p^n e^{-p\tau} \quad (\tau > 0).$$

Розглядаючи $\delta(t)$ як граничний випадок $\delta(t-\tau)$ при $\tau \to +0$, дістанемо $\delta_{(t)}^{(n)} \doteqdot p^n$.

⑨ Спектральна щільність δ-функції:

$$\begin{aligned} &\delta(t-\tau)\doteqdot e^{-i\omega\tau},\ \ \delta(t)\doteqdot 1,\\ &\delta^{(n)}(t-\tau)\doteqdot (i\omega)^n e^{-i\omega\tau},\ \ \delta^{(n)}(t)\doteqdot (i\omega)^n \quad (n\in\mathbb{N}). \end{aligned} \qquad (Д.4.20)$$

У справедливості формул (Д.4.20) можна переконатись аналогічно п. ⑧.

⑩ Розглянемо диференціальні рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + \varphi(t, y, y', \ldots, y^{(n-2)})\delta(t-t_0), \qquad (Д.4.21)$$

$$y_m^{(n)} = f(t, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)}) + \varphi(t, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-2)})\delta_m(t-t_0), \qquad (Д.4.22)$$

де $\delta_m(t)$ ($m \in \mathbb{N}$) — дельтаподібна послідовність нескінченно диференційовних функцій, $f$, φ — неперервні функції своїх аргументів, які задовольняють умови теореми існування й єдиності розв'язку (див. п. 3.4). Нехай $y_m = y_m(t)$ — розв'язок рівняння (Д.4.22). Розв'язком $y = y(t)$ рівняння (Д.4.21) (з δ-функцією в правій частині) називають границю** $y = \lim\limits_{m\to+\infty} y_m$.

* Ураховано, що $\delta_n(x)$ — нескінченно диференційовна функція й що пробна функція φ перетворюється в нуль поза деяким скінченним відрізком.





⑪ Розв'язок рівняння (Д.4.21) при $t \ne t_0$ задовольняє рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (Д.4.23)$$

і такі додаткові умови при $t = t_0$:

$$\begin{aligned} &y(t_0+0) = y(t_0-0) = y_0,\ \ y'(t_0+0) = y'(t_0-0) = y_0', \ldots,\\ &y^{(n-2)}(t_0+0) = y^{(n-2)}(t_0-0) = y_0^{(n-2)},\\ &y^{(n-1)}(t_0+0) = y^{(n-1)}(t_0-0) + \psi(t_0), \end{aligned} \qquad (Д.4.24)$$

де

$$\psi(t_0) = \varphi(t_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}). \qquad (Д.4.25)$$

Справді, $y(t)$ є розв'язком рівняння (Д.4.23) при $t \ne t_0$ (це випливає з (Д.4.21) і означення δ-функції). Функції $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-2)}(t)$ мають бути неперервними при $t = t_0$. Якби, наприклад, $y^{(n-2)}(t)$ мала розрив при $t = t_0$, то $y^{(n-1)}(t)$ була б сумою звичайної функції і доданку типу $b\cdot\delta(t-t_0)$ (див. п. ⑤), а $y^{(n)}(t)$ містила б доданок $b\cdot\delta'(t-t_0)$, і тому ліва частина рівняння (Д.4.21) не збігалася би з правою частиною. Отже, $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-2)}(t)$ неперервні при $t = t_0$, а $y^{(n-1)}(t)$ може мати скінченний стрибок при $t = t_0$. Зінтегруємо рівняння (Д.4.21) по відрізку $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$):

$$y^{(n-1)}(t_0+\varepsilon) - y^{(n-1)}(t_0+\varepsilon) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,dt +$$

$$+\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\varphi(t, y, y', \ldots, y^{(n-2)})\delta(t-t_0)\,dt.$$

Урахувавши (Д.4.8), матимемо

$$y^{(n-1)}(t_0+\varepsilon) - y^{(n-1)}(t_0-\varepsilon) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,dt + \psi(t_0).$$

** Перевага застосування δ-функції полягає, зокрема, в тому, що не потрібно щоразу вдаватися до граничного переходу — він міститься в самому означенні δ-функції.

Перейшовши в останній рівності до границі при $\varepsilon \to +0$ (інтегральний член при цьому прямує до нуля внаслідок обмеженості підінтегральної функції), дістанемо $y^{(n-1)}(t_0+0) - y^{(n-1)}(t_0-0) = \psi(t_0)$.

⑫ Задача відшукання розв'язку рівняння (Д.4.21) з початковими умовами

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-2)}(t_0) = y_0^{(n-2)},\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \quad (Д.4.26)$$

при $t > t_0$ еквівалентна задачі відшукання розв'язку рівняння (Д.4.23) з початковими умовами

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-2)}(t_0) = y_0^{(n-2)},\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} + \psi(t_0). \quad (Д.4.27)$$

Це твердження є наслідком п. ⑪.

⑬ Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь і скалярне лінійне диференціальне рівняння (див. п. 4.1):

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\quad L_1 y = g(t).$$

Як відомо, розв'язки цих рівнянь із нульовими початковими умовами можна записати у вигляді [формули (4.28), (4.29)]

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f(\tau)\,d\tau,\quad \tilde{y}(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) g(\tau)\,d\tau, \quad (Д.4.28)$$

де $X(t,\tau)$ — матрицант системи, а $K(t,\tau)$ — функція Коші скалярного рівняння. Запишемо розв'язок із нульовими початковими умовами відповідної лінійної матричної системи $\dot{X} = A(t)X + F(t)$:

$$\tilde{X}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) F(\tau)\,d\tau. \quad (Д.4.29)$$

Будемо тлумачити вільний член $F(t)$ ($g(t)$) як зовнішнє збурення (сигнал, силу), що діє на лінійну систему, а її розв'язок — як реакцію на це збурення. Вважатимемо, що за відсутності збурення система перебуває в спокої [$X \equiv 0$ ($y \equiv 0$)]. Нехай тепер $F(t) = F_n(t) = E_s\delta(t-s)$ ($g(t) = g_s(t) = \delta(t-s)$), де $t_0 < s < t$. Тоді з формул (Д.4.28), (Д.4.29) випливає, що $\tilde{X}_s(t) = X(t,s)$ ($\tilde{y}_s(t) = K(t,s)$), тобто матрицант і відповідно функція Коші є реакцією лінійної системи на одиничний імпульс [$\delta$-функцією $\delta(t-s)$].

## *СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ*


1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
2. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Л.: ЛГУ, 1981.
3. *Білоколос Є. Д., Юрачківський А. П., Шека Д. Д.* Спеціальні функції в задачах математичної фізики. — К.: ВПЦ «Київ. ун-т», 2000.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К.: ИМ НАНУ, 1995.
5. *Бугаєнко Г. О.* Курс теоретичної механіки. — К.: Рад. шк., 1968.
6. *Бугаєнко Г. О., Фонкич М. Є.* Електродинаміка. Теорія відносності. — К.: Рад. шк., 1965.
7. *Бутенин Н. В., Фуфаев Н. А.* Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1991.
8. *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* Интегральные уравнения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
9. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
10. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. — М.: Наука, 1966.
11. *Вірченко Н. О., Ляшко І. І.* Графіки елементарних та спеціальних функцій. — К.: Наук. думка, 1996.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
13. *Ґудименко Ф. С.* Диференціальні рівняння. — К.: КДУ, 1958.
14. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
15. *Диференціальні* рівняння / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай та ін. — К.: Вища шк., 1984.
16. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз: У 2 ч. — К.: Либідь, 1994.

17. *Калайда О. Ф.* Варіаційне числення. — К.: ВПЦ «Київ. ун-т», 1999.
18. *Калайда О. Ф.* Лінійні інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння. — К.: ВПЦ «Київ. ун-т», 1997.
19. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
20. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. — М.: Мир, 1978.
21. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — К.: Вища шк., 1974.
22. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975.
23. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения. Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1968.
24. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.
25. *Ляшенко І. М., Мукоєд А. П.* Моделювання біологічних та екологічних процесів. — К.: ВПЦ «Київ. ун-т», 2002.
26. *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление. — К.: Вища шк., 1973.
27. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. — К.: Вища шк., 1979.
28. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959.
29. *Моклячук М. П.* Варіаційне числення. Екстремальні задачі. — К.: Либідь, 1994.
30. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
31. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
32. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974.
33. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах. — К.: Либідь, 2003.
34. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003.
35. *Соболев В. И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. — М.: Наука, 1968.
36. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
37. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
38. *Шкіль М. І., Сотниченко М. А.* Звичайні диференціальні рівняння. — К.: Вища шк., 1992.
39. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

# *ЗМІСТ*

Навчальне видання

**Кривошея Сергій Арсенович**
**Перестюк Микола Олексійович**
**Бурим Володимир Михайлович**

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Художнє оформлення *О. Г. Григора*
Технічне редагування *Т. О. Щур*
Коректори *А. В. Бородавко, А. І. Бараз*
Комп'ютерна верстка *М. Б. Гутман*



Підп. до друку 16.11.2004. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Папір офс. № 1. Гарнітура Таймс. Офсетний друк.
Умов.-друк. арк. 23,72. Умов. фарбовідб. 24,18. Обл.-вид. арк. 23,00.
Тираж 3 700 пр. Вид. № 4159. Зам. № 5-566.

Видавництво «Либідь»
01004 Київ, вул. Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію № 404 від 06.04.2001

Віддруковано на ВАТ "Білоцерківська книжкова фабрика",
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.