

Державний вищий навчальний заклад
“Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”
Фізико-технічний факультет
Кафедра теоретичної і експериментальної фізики

**Методичний посібник
з курсу «Електронна теорія речовини»**

«Електронні явища у фізиці низьких температур»

Розробник: Кланічка Ю.В, кандидат фізико-математичних наук

Методичний посібник з курсу «Електронна теорія речовини» *«Електронні явища у фізиці низьких температур»* затверджений на засіданні кафедри теоретичної та експериментальної фізики, протокол від “__” _____ 20__ р. № ____

Завідувач кафедри _____ (доц. Ліщинський І.М.)

“__” _____ 20__ р.

Івано-Франківськ – 2017 р.

Електронні явища у фізиці низьких температур

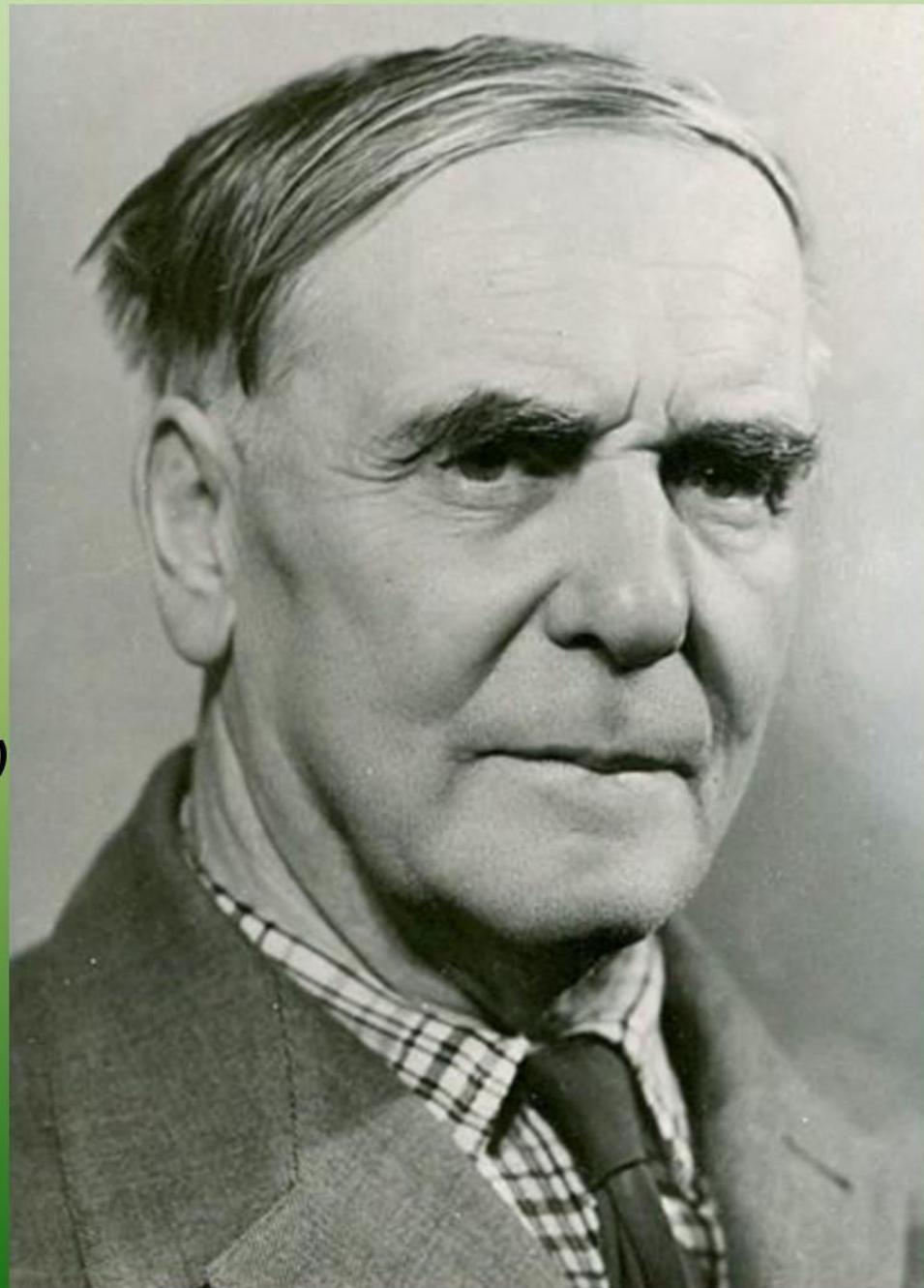
- Надтекучість і надпровідність;
- Критична температура надпровідникового стану;
- Ефект Мейсснера;
- Природа явища надпровідності;
- Модель БКШ;
- Надтекучість рідкого гелію;
- Модель двох рідин.

Надтекучість і надпровідність

Ще Камерлінг-Оннес, досліджуючи властивості вперше отриманого ним рідкого гелію, зазначив його незвичайно високу теплопровідність. Рідина з аномальними фізичними властивостями привертала увагу вчених. Завдяки установці Капіци, яка почала працювати в 1934 році вдалося отримати рідкий гелій в значних кількостях. Камерлінг-Оннес в перших експериментах отримав близько 0,6 літри гелію, тоді як перша установка Капіци мала продуктивність близько 2 літрів на годину. Події 1934-1937 років пов'язані з відлученням від роботи в Мондовской лабораторією і примусовим затриманням в СРСР сильно затримали хід досліджень. Тільки в 1937 році Капіца відновив лабораторне обладнання і повернувся в новому інституті до колишніх напрацювань в галузі фізики низьких температур. Тим часом, на колишньому робочому місці Капіци на запрошення Резерфорда почали роботу в тій же області молоді канадські вчені Джон Аллен і Остін Майзнер. У Мондовской лабораторії залишилася експериментальна установка Капіци по отриманню рідкого гелію - з нею і працювали Аллен та Майзнер. У листопаді 1937 вони отримали достовірні експериментальні результати по зміні властивостей гелію.

Петро Леонідович Капиця

(9 липня 1894, Кронштадт, Санкт-Петербург — 8 квітня 1984, Москва)



Теоретичне обґрунтування надтекучості дали в 1939-1941 роках Лев Ландау, Фрітц Лондон і Ласло Тиса, що запропонували так звану дворідинної моделі. Сам Капіца в 1938-1941 роках продовжив дослідження гелію-II, зокрема підтвердивши напророчену Ландау швидкість звуку в рідкому гелії. Дослідження рідкого гелію як квантової рідини (Конденсат Бозе - Ейнштейна) стало важливим напрямом у фізиці, яка дала цілий ряд чудових наукових робіт. Лев Ландау отримав у 1962 році Нобелівську премію в знак визнання заслуг в побудові теоретичної моделі надплинності рідкого гелію.



Лев Давидович Ландау

Критерій надтекучості Ландау

Розглянемо макроскопічне тіло масою M , що рухається зі швидкістю V . Для визначення мінімальної швидкості, при якій можливе народження хоча б одного порушення, запишемо закони збереження енергії та імпульсу при випусканні квазічастинки

$$MV = MV' + p,$$

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{MV'^2}{2} + \varepsilon(p)$$

Виключаючи V' і опускаючи макроскопічно малу величину $p^2/2M$, отримуємо $pV > \varepsilon(p)$. Найбільш «небезпечним» з точки зору порушення цієї умови є випускання «вперед» $\cos\theta = 1$. Таким чином, отримуємо критерій надплинності Ландау

$$V < V_c = \min \frac{\varepsilon(p)}{p}$$

Фізичний зміст отриманого критерію надтекучості цілком схожий з народженням звукових хвиль рухомим тілом при виконанні критерію Маха і народженням світлових хвиль Ва-вілова-Черенкова при перевищенні швидкості заряду фазової швидкості світати середовищі.

Мікроскопічна теорія надтекучості Боголюбова



Підхід Боголюбова заснований на гранично спрощеною моделі слабонеідеального виродженого бозе-газу з крапковим відштовхуванням при нульовій температурі. Граничне спрощення та приводить до успіху, однак з урахуванням вельми нетривіально прийдуманної Боголюбовим теорією збуджень. Суть полягає в «наближенні неповного вторинного квантування», коли збурення влаштовано не по малій взаємодії, як зазвичай, а по малому «виснаженню» конденсату. Розглянемо це докладніше, в рамках представлення чисел заповнення (вторинного квантовоня). Як відомо, гамільтоніан системи взаємодіючих тотожних частинок

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{q}} U_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2}$$

перейдемо до «ефективного» гамільтоніану

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2} \hat{a}_{\mathbf{p}'_1}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}'_2}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2}$$

$$a_0^{\dagger} = a_0 = \sqrt{N_0}$$

Розглянемо слабонеідеальний бозе-газ при температурі, значно меншою температури бозе-конденсації ідеального газу $T \ll T_B$. Нехтуючи в (10.6) надконденсатними частками ($N_0=N$), для «ефективного» гамільтоніана отримуємо

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = -\mu N + \frac{U_0 N}{2V}, \quad \text{де} \quad \mu = \frac{U_0 N}{V}$$

Оскільки при нульовій температурі «ефективний» гамільтоніан рівний потенціалу системи, то одразу отримаємо тиск неідеального бозе-газу при $T=0$ і гідродинамічну швидкість звуку в ньому

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = V \frac{\partial}{\partial (mN)} \left(-\frac{\Omega_0}{V} \right) = \frac{U_0 N}{mV}$$

Обмежемося далі лише членами другого порядку малості по $\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger$. Тоді отримуємо «ефективний» гамільтоніан, квадратичний по операторах $\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_p$

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \frac{N^2 U_0}{2V} + \sum_{p \neq 0} \left(\frac{NU_0}{V} + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{NU_0}{2V} \sum_{p \neq 0} \left(\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger + \hat{a}_p \hat{a}_{-p} \right)$$

Перетворення Боголюбова

Знамениті u - v перетворення Боголюбова лінійні і змішують оператори дірок (конденсатних) і часток (надконденсатних)

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + v_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}$$

Для того, щоб нові боголюбовської оператори $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ були операторами народження та знищення квазічастинок, потрібно зажадати, щоб перетворення були канонічними. Разом з вимогою діагональності гамільтоніана в нових змінних, це однозначно визначає $u_{\bar{p}}$ і $v_{\bar{p}}$

$$u_{\mathbf{p}}^2 = (1 - A_{\mathbf{p}}^2)^{-1/2},$$

$$v_{\mathbf{p}}^2 = A_{\mathbf{p}}^2 (1 - A_{\mathbf{p}}^2)^{-1/2},$$

$$A_{\mathbf{p}} = (\varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - mc^2) / mc^2$$

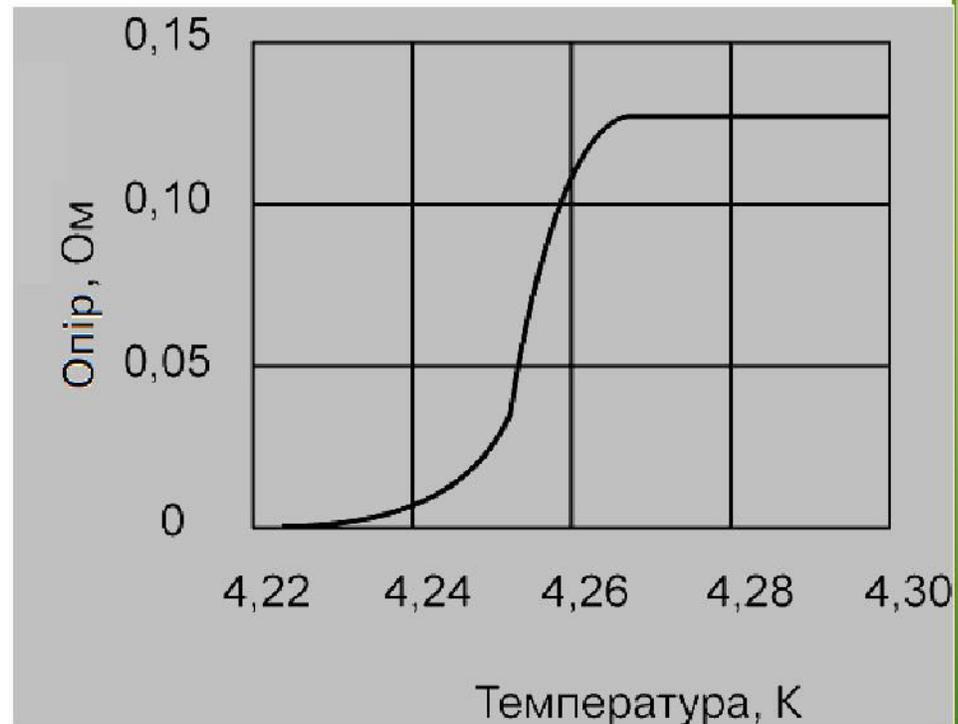
У нових змінних «ефективний» гамільтоніан має вигляд:

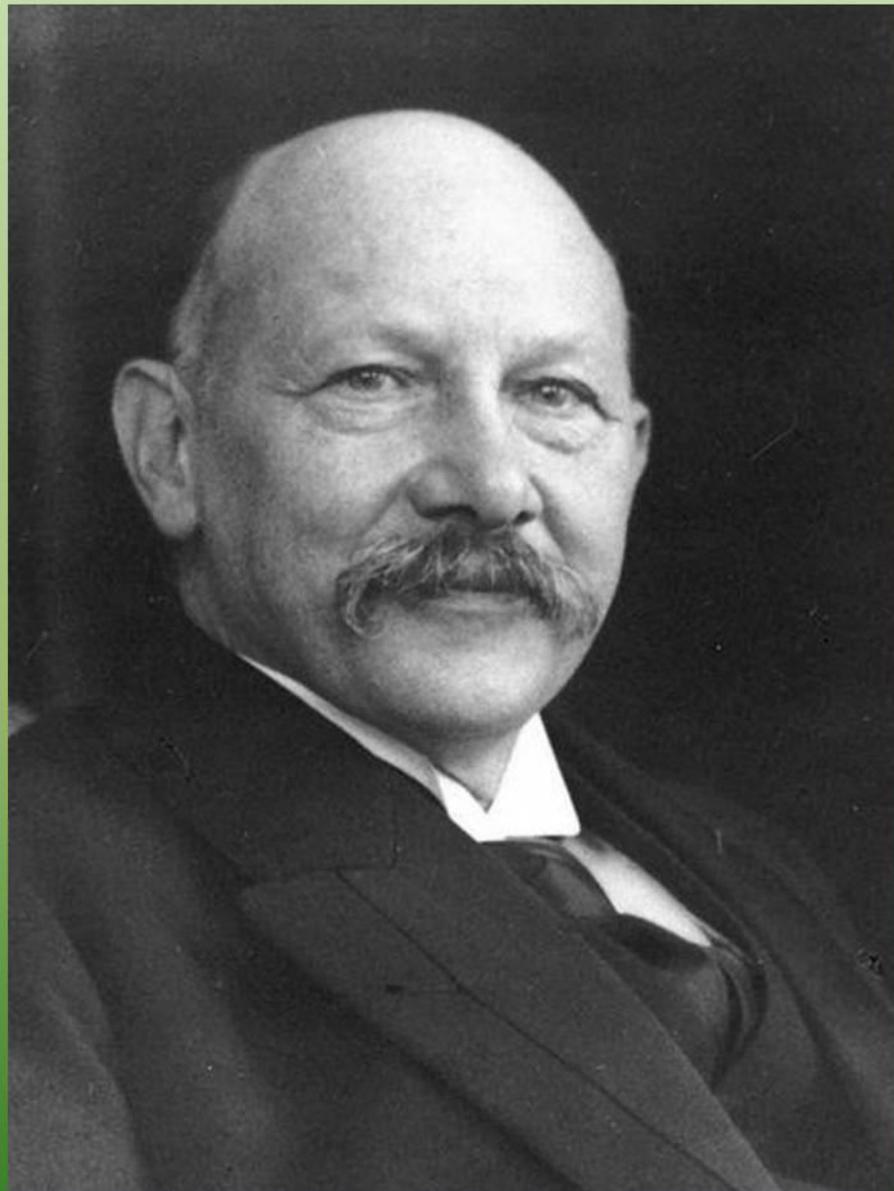
$$\hat{H} - \mu \hat{N} = -\frac{N^2 U_0}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left(\varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{N U_0}{V} \right) + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \varepsilon(\mathbf{p}) \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{p}}$$

Надпровідність

У 1911 р. голландський фізик Камерлінг-Оннес, вивчаючи температурну залежність питомого опору ртуті в області низьких температур, знайшов дивовижне явище: при температурі 4,2 К опір ртуті практично стрибком зменшувався до нуля.

Ртуть переставала чинити опір проходженню електричного струму. Це явище одержало назву надпровідності. В наш час воно встановлено у сотень речовин – чистих металів, металевих сплавів і інтерметалевих з'єднань і навіть у деяких вироджених напівпровідників. Температура переходу в надпровідний стан, яка називається критичною температурою переходу $T_{кр}$, коливається у різних речовин від сотих часток градуса абсолютної шкали до $\gg 20K$.





Гейке Камерлінг-Оннес

(21 вересня 1853, Гронінген — 21 лютого 1926, Лейден)

Нехай довгий надпровідний циліндр із надпровідника I-го роду поміщений в однорідне поздовжнє зовнішнє магнітне поле H_0 . Знайдемо значення цього поля, при якому відбудеться руйнування надпровідності, тобто знайдемо H_{cm}

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0$$

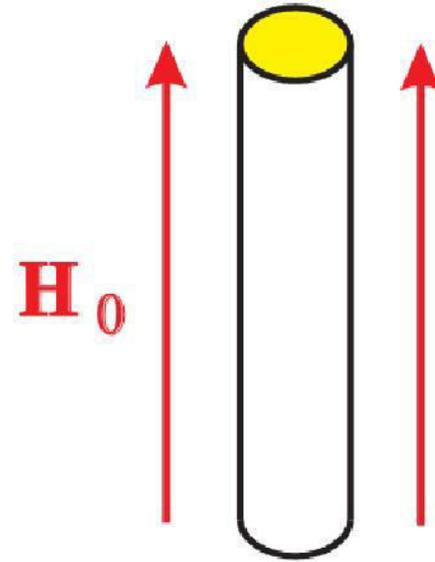
Магнітний момент одиниці об'єму надпровідного циліндра рівний:

$$\mathbf{M} = -\frac{\mathbf{H}_0}{4\pi}$$

При зміні поля від 0 до H_0 джерело поля виконує роботу:

$$-\int_0^{H_0} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}_0 = \frac{H_0^2}{8\pi}$$

Ця робота переходить у вільну енергію надпровідника, що знаходиться в магнітному полі H_0 .



Таким чином, якщо густина вільної енергії надпровідника F_s за відсутності магнітного поля дорівнює F_{s0} , то густина вільної енергії надпровідника в магнітному полі дорівнює:

$$F_{sH} = F_{s0} + \frac{H_0^2}{8\pi}$$

За умови $H_0 = H_{cm}$ отримаємо:

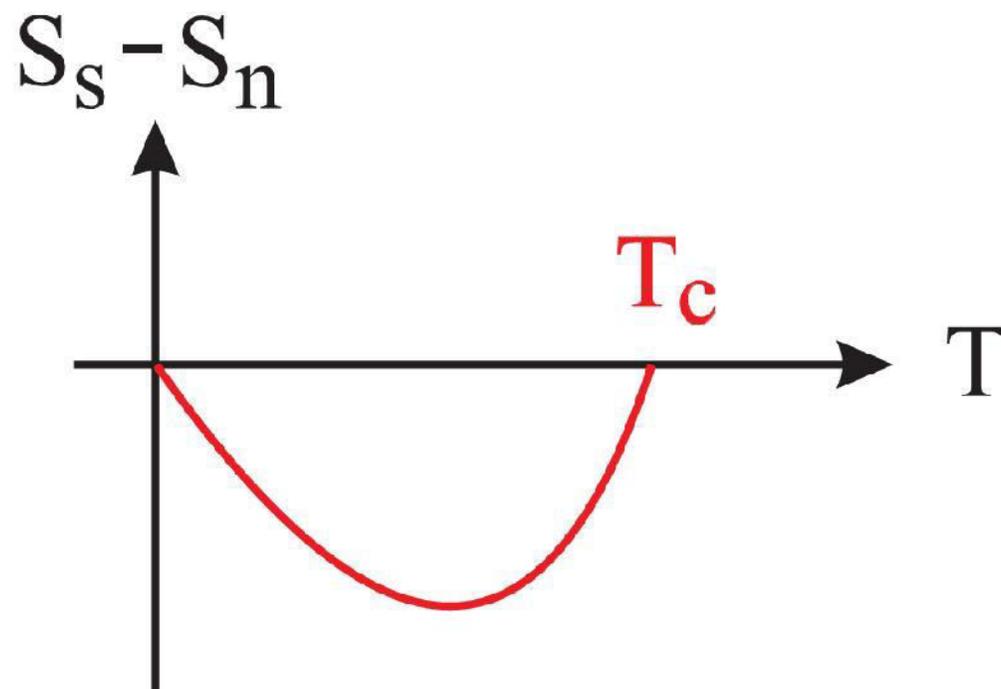
$$F_n - F_{s0} = \frac{H_{cm}^2}{8\pi}.$$

Звідси випливає, що критичне поле масивного матеріалу є мірою того, наскільки надпровідний стан є енергетично більш вигідним, ніж нормальне, тобто наскільки вільна енергія надпровідного стану менше вільної енергії нормального стану.

Тому, поле H_{cm} часто називають **критичним термодинамічним магнітним полем**.

Ентропія надпровідника

$$S_s - S_n = \frac{H_{cm}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_V.$$



Графік залежності ентропії надпровідника від температури

Критична температура надпровідникового стану

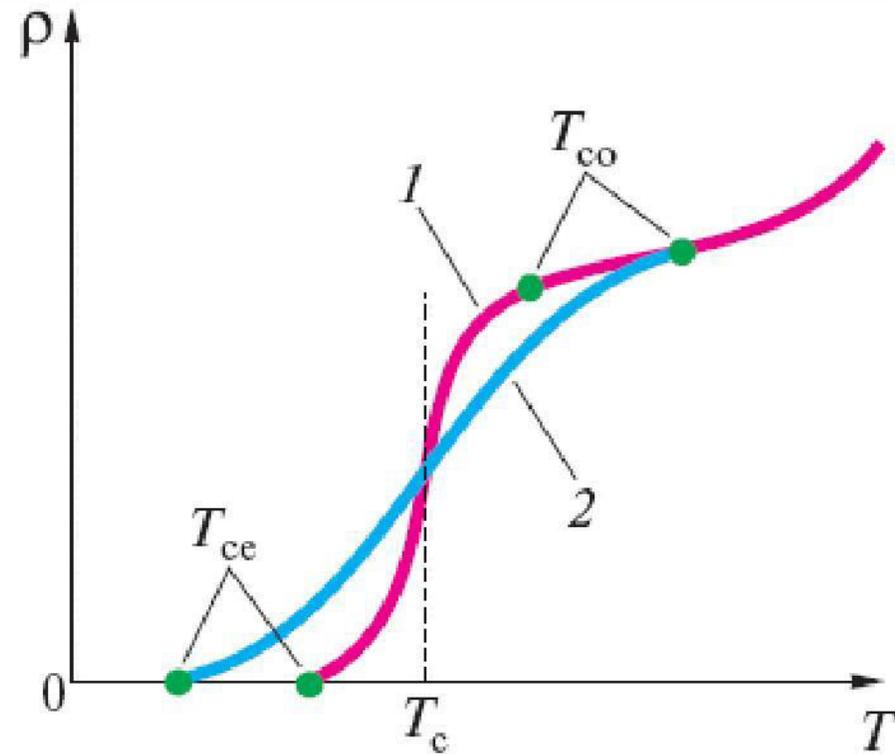
Таким чином, фундаментальною (проте не єдиною) властивістю надпровідника є існування критичної точки, тобто температури, яка розділяє два різних стани речовини: низькотемпературний надпровідний стан з нульовим електричним опором та високотемпературний "нормальний" стан із відмінним від нуля опором. Відсутність електричного опору в надпровідному стані не випливає з електромагнітної теорії Максвелла. Це – чисто експериментальний факт, яким є, приміром, обернена квадратична залежність сили взаємодії від відстані між точковими зарядами. Якщо створити струм у надпровідному кільці, то його затухання можна контролювати по спаданню магнітного поля з часом. В досліді, поставленому в 60-х роках 20 ст., струм у надпровідному кільці циркулював без помітного затухання на протязі двох із половиною років. Цей тривалий експеримент був, на жаль, перерваний з-за страйку водіїв, які вчасно не привезли у лабораторію рідкий гелій. Оцінка показала: якщо струм затухає за експоненціальним законом (релаксація), то характеристичний час повинен перевищувати 10^5 років. Оцінки подібного типу ґрунтуються не на величині поміряного сигналу, а на пороговій чутливості приладу. Якщо сигнал, що кількісно описує дане явище (тут зменшення в часі магнітного поля), не вдається зареєструвати й одночасно не можна гарантувати, що це явище відсутнє, то припускається, що величина сигналу менша ніж порогова чутливість приладу.

Подібним способом оцінюється можливе відхилення у законі Кулона ($\alpha \sim 6 \cdot 10^{-16}$) від оберненої квадратичної залежності сили взаємодії точкових зарядів ($F \sim 1/r^{2+\alpha}$).

Один із кращих провідників – чиста мідь при кімнатній температурі має питомий опір $1,75 \cdot 10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. З охолодженням зразка опір монотонно знижується і при декількох градусах кельвіна досягає значення (залишковий опір). Проте, надпровідником мідь не стає навіть при температурі $T < 0,1 \text{ К}$. Лужні метали, подібно до міді, теж не переходять у надпровідний стан навіть з охолодженням до температури $< 0,1 \text{ К}$. А от алюміній стає надпровідником при $T_k = 1,14 \text{ К}$, ртуть – $4,15 \text{ К}$, свинець – $7,26 \text{ К}$. Загалом 27 металів, тобто приблизно половина металевих елементів періодичної системи переходять у надпровідний стан. Найвищу критичну температуру між елементними металами має ніобій $T_k = 9,2 \text{ К}$. Надпровідний стан виникає не лише в чистих металах, він існує також у сплавах, причому такий сплав може складатися виключно з металів, у котрих власна надпровідність відсутня. Деякі сплави з ніобієм мають досить високу, порівняно з чистими металами, критичну температуру.

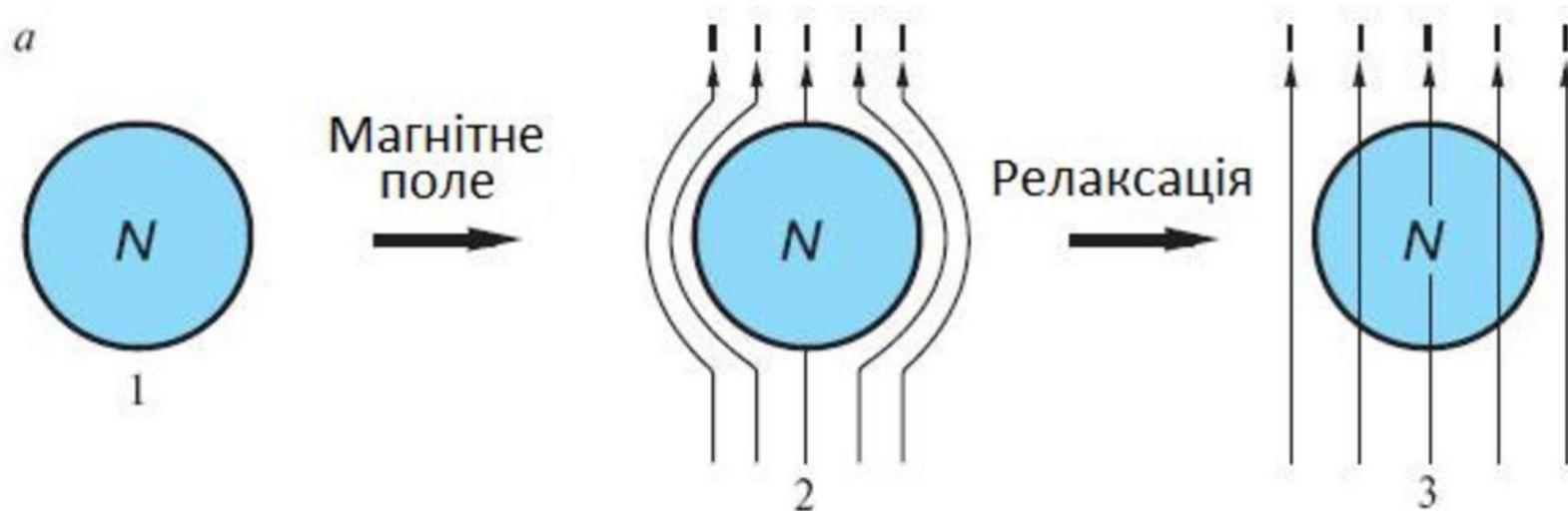
Зі зниженням температури надпровідний стан настає не відразу. Опір провідника спадає до нуля в деякому інтервалі температур, рис. Критичною точкою вважається середина переходу, коли опір спадає наполовину, порівняно з нормальним станом.

Критичною точкою вважається середина переходу, коли опір спадає наполовину, порівняно з нормальним станом. Чим більше у зразку дефектів, тим більш плавно спадає опір (див. крива 2). Для добре очищеної ртуті ця перехідна область займає десять частки градуса, тоді як у деяких керамічних матеріалах перехід у надпровідний стан розтягується на десятки градусів.

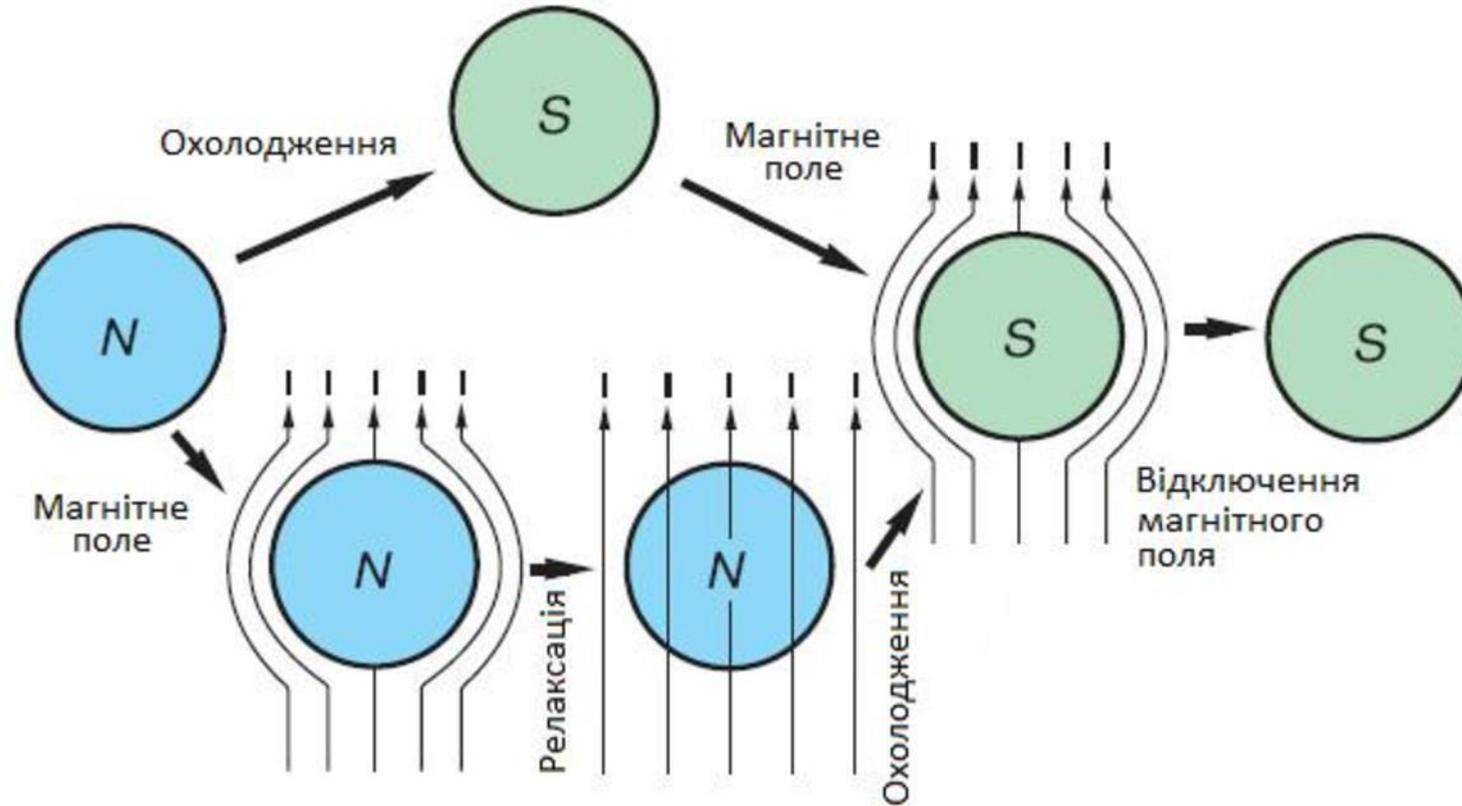


Експериментально переконано, що вільні електрони в надпровіднику можна розглядати у вигляді суміші двох компонент – нормальної та надпровідної. Нормальні електрони проявляють такі ж властивості, що й електрони провідності в нормальному стані провідника, тобто розсіюються на дефектах ґратки. Надпровідні електрони, навпаки, не зазнають розсіяння. При $T = 0K$ усі вільні електрони знаходяться у надпровідному стані. З наближенням температури до критичної концентрація надпровідних електронів спадає до нуля, а число нормальних електронів зростає у відповідній пропорції.

Ефект Мейсснера



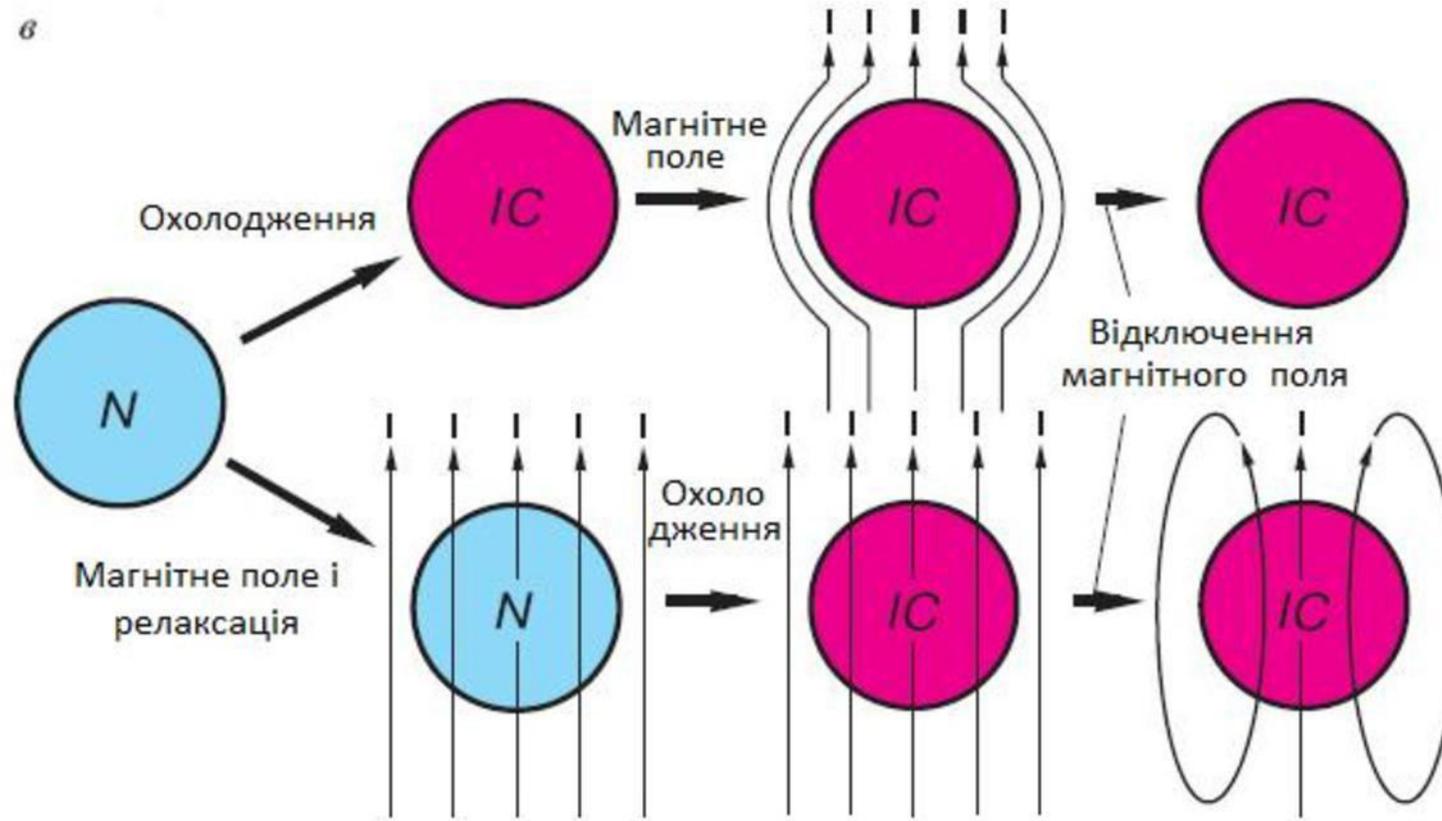
a - нормальний провідник, що має відмінний від нуля опір при будь-якій температурі **(1)**, внесений в магнітне поле. Відповідно до закону електромагнітної індукції виникають струми, які чинять опір проникненню магнітного поля в метал **(2)**. Однак якщо опір відмінно від нуля, вони швидко затухають. Магнітне поле пронизує зразок нормального металу і практично однорідно **(3)**



б - з нормального стану при температурі вище T_c є два шляхи:

- **Перший:** при зниженні температури зразок переходить в надпровідний стан, потім можна накласти магнітне поле, яке виштовхується з зразка.
- **Другий:** спочатку накласти магнітне поле, яке проникне в зразок, а потім знизити температуру, тоді при переході поле виштовхне. Вимкнення магнітного поля дає ту ж картинку

в



в - якби не було ефекту Мейснера, провідник без опору вів би себе по-іншому. При переході в стан без опору в магнітному полі він би зберігав магнітне поле і утримував би його навіть при знятті зовнішнього магнітного поля. Розмагнітити такий магніт можна було б, тільки підвищуючи температуру. Така поведінка, однак, на досвіді не спостерігається.

Ефект Мейснера, що полягає в виштовхуванні надпровідником магнітного потоку $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$. З цього експериментального спостереження робиться висновок про існування незатухаючих струмів усередині надпровідника, які створюють внутрішнє магнітне поле, протилежнонаправлене зовнішньому, прикладеному магнітному полю і компенсує його.

Досить сильне магнітне поле при даній температурі руйнує надпровідний стан речовини. Магнітне поле з напруженістю H_c , яке при даній температурі викликає перехід речовини з надпровідного стану в нормальний, називається критичним полем. При зменшенні температури надпровідника величина H_c зростає. Залежність величини критичного поля від температури з хорошою точністю описується виразом

$$H_c(T) = H_{c0} \left(\frac{T^2}{T_c^2} \right)$$

де H_{c0} - критичне поле при нульовій температурі. Надпровідність зникає і при пропусканні через надпровідник електричного струму із щільністю, більшою, ніж критична j_c , оскільки він створює магнітне поле, більше критичного.

Природа явища надпровідності

Не дивлячись на великі зусилля, витрачені багатьма дослідниками на вивчення надпровідності, її фізична природа стала зрозумілою лише в 1957 р. із створенням Бардіним, Купером і Шриффером мікроскопічної теорії цього явища, що одержала назву БКШ теорії. В основі її лежить уявлення, що між електронами провідності металу можуть діяти сили тяжіння виникаючі внаслідок поляризації ними кристалічних ґраток.

Ми звикли вважати, що два електрони як однойменно заряджені частинки повинні зазнавати лише кулонівське відштовхування один від одного. Подібна ситуація справедлива для електронів, що знаходяться у вільному просторі, може істотно змінитися в кристалі через наявність в ньому інших електронів і позитивно заряджених іонів, в загальному компенсуючих негативні заряди електронів. В таких умовах між електронами крім сил відштовхування можуть виникати непрямі сили тяжіння. Насправді, електрон, рухомий в ґратках, притягує до себе позитивно заряджені іони, дещо зближуючи їх, і тим самим створює уздовж шляху свого руху надмірний позитивний заряд поляризованих ґраток, до якого можуть притягуватись інші електрони. Це еквівалентно виникненню сили тяжіння між електронами, тільки діючої не безпосередньо, а через поляризовані ґратки.

Модель БКШ

Бардин, Купер і Шриффер запропонували універсальний модельний гамільтоніан, який «годиться» для будь-якого механізму спаровування ферміонних квазічастинок за рахунок обміну квантом будь-яких колективних бозона збуджень.

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{p\delta} \xi_p \hat{a}_{p\delta}^+ \hat{a}_{p\delta} - g \sum_{pp'} \hat{a}_{p'+}^+ \hat{a}_{-p'-}^+ \hat{a}_{p+} \hat{a}_{p+}$$

$$\Delta^* = g \sum_{p'} \langle \hat{a}_{p',+}^\dagger \hat{a}_{-p',-}^\dagger \rangle$$

$$\Delta = g \sum_{p'} \langle \hat{a}_{-p',-} \hat{a}_{p',+} \rangle,$$

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{p\sigma} \xi_p \hat{a}_{p\sigma}^+ \hat{a}_{p\sigma} + \frac{1}{g} |\Delta|^2 + \sum_p \left[\Delta^* \hat{a}_{p+}^+ \hat{a}_{-p-} + \Delta \hat{a}_{-p-}^+ \hat{a}_{p+} \right]$$

За допомогою перетворень Боголюбова діагоналізуємо гамільтоніан.

$$\hat{b}_{\mathbf{p}-} = u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}-} + v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}+}^+$$

$$\hat{b}_{\mathbf{p}+} = u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}+} - v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}-}^+$$

Будемо вимагати від цього перетворення канонічності та діагональності нового гамільтоніану. Це однозначно визначає всі величини.

$$\hat{H} - \mu \hat{N} \rightarrow E_0 + \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) \left(\hat{b}_{\mathbf{p}+}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}+} + \hat{b}_{\mathbf{p}-}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}-} \right),$$

$$E_0 = 2 \sum_{\mathbf{p}} \left[\xi_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 - \Delta u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \right] + \frac{1}{g} \Delta^2$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2},$$

$$u_{\mathbf{p}}^2, v_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}} \right)$$

Із врахуванням того, що наші квазічастинки - ферміони

$$n_p \langle \hat{b}_{p+}^+ \hat{b}_{p+} \rangle = \langle \hat{b}_{p-}^+ \hat{b}_{p-} \rangle = \left(e^{\frac{\varepsilon(p)}{T}} + 1 \right)^{-1}$$

отримаємо:

$$1 = \frac{g}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1 - 2n_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}}$$

Це рівняння визначає залежність щілини від температури $\Delta(T)$. При $T=0$ квазічастинок немає $n_p = 0$:

$$1 = \frac{g}{2} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_F^2}{v_F} \int_{-\hbar\omega_D}^{+\hbar\omega_D} \frac{d\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta_0^2}} = \frac{g}{2} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_F^2}{v_F} 2 \int_0^{\hbar\omega_D/\Delta_0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

де безрозмірний інтеграл рівний: $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right|$

У кінцевому результаті для величини щілини отримуємо:

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{gg(\varepsilon_F)}}$$

При кінцевих температурах величина щілини зменшується і в точці переходу $T = T_c$ переходить в нуль $\Delta=0$:

$$1 = \frac{g}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1 - 2n_p}{|\xi_{\bar{p}}|} = \frac{gg(\varepsilon_F)}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{+\hbar\omega_D} \frac{d\xi_p}{2\xi_p} \operatorname{th} \frac{\xi_p}{2}$$

або

$$1 = \frac{gg(\varepsilon_F)}{2} \int_0^{\hbar\omega_D/2T_c} \frac{\operatorname{th}x}{x} dx$$

де $\int_0^x \frac{\operatorname{th}x}{x} dx \approx \int_1^x \frac{dx}{x} = \ln|x|$, звідки отримуємо критичну температуру

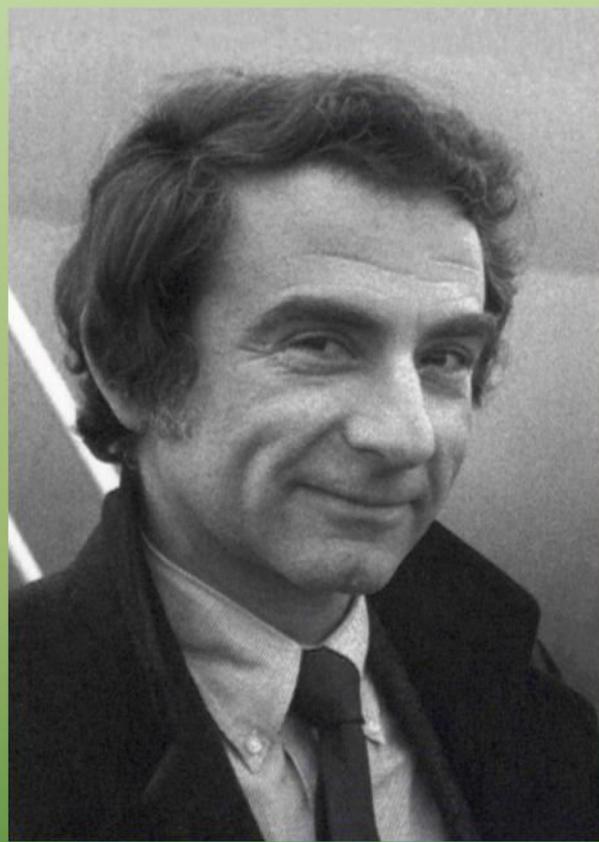
$$T_c \approx \hbar\omega_D \exp\left(-\frac{2}{gg(\varepsilon_F)}\right) = 0,5\Delta_0$$

Точний розрахунок дає: $T_c \approx \frac{\gamma}{\pi} \Delta_0 = 0,57\Delta_0$

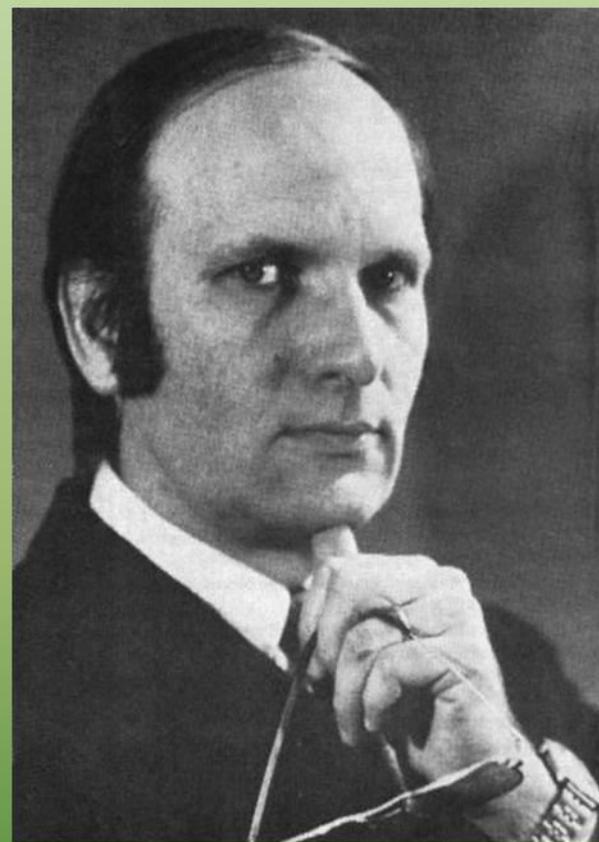
де $\gamma = 1,57$ - стала Ейлера.



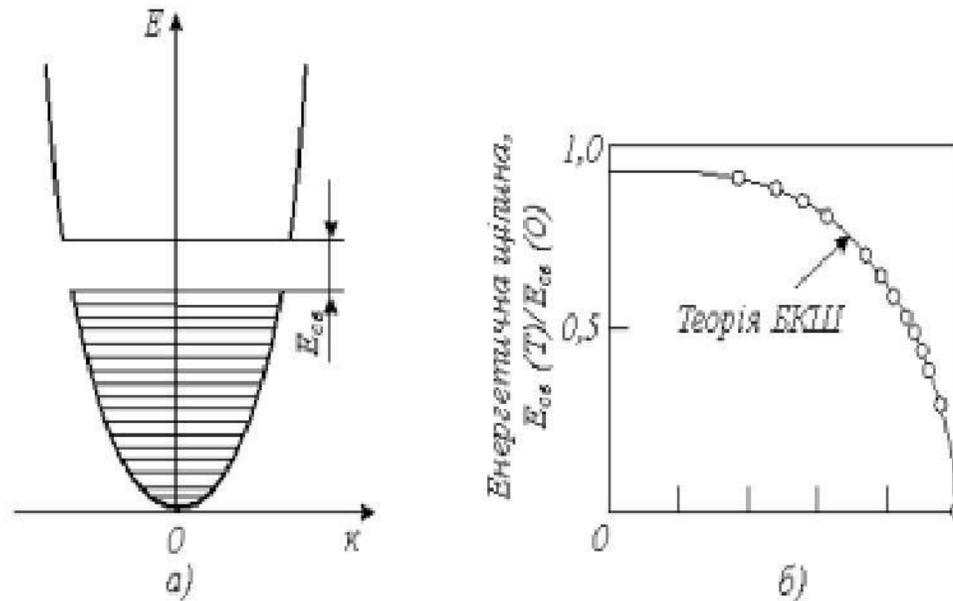
Джон Бардин



Леон Нил Купер



**Джон Роберт
Шриффер**



Утворення щілини в енергетичному спектрі електронів провідника під час переходу його в надпровідний стан **(а)** і залежність ширини енергетичної щілини від температури для танталу **(б)**

У кристалі в такому об'ємі розміщується приблизно 10^6 інших електронів, об'єднаних в куперовські пари. Просторове перекриття такого величезного числа пар повинно неминуче приводити до строгої взаємної кореляції їх руху. Пари не можуть рухатися незалежно одна від одної, як електрони в нормальному металі. Кожна пара, взаємодіючи зі всіма іншими, повинна рухатися строго узгоджено (мовби в унісон) і будь-яке порушення в русі даної пари повинно позначатися на властивостях всієї сукупності пар.

З теорії БКШ виходить, що подібна повна кореляція досягається тоді, коли центри мас всіх пар металу рухаються з однаковим імпульсом. При такій імпульсній впорядкованості пари утворюють єдину сукупність або, як кажуть, конденсат, вирвати з якого окрему пару тим важче, чим більше їх знаходиться в цьому конденсаті.

Проте не всі електрони зони провідності металу здатні об'єднуватися в куперовські пари, а тільки ті з них, які можуть збуджуватися і змінювати свої стани. Такими є лише ферміївські електрони, відповідальні за електропровідність металів. Вони складають приблизно 10^{-4} від загального числа електронів провідності металу.

Маючи нульовий спін, тобто будучи бозе-частинками, куперовські пари конденсуються – розміщуються на одному рівні, розташованому нижче рівня Фермі в нормальному металі на відстані $V = E_{св}/2$ від нього, де $E_{св}$ – енергія зв'язку електрона в парі. Тому для переходу електронів з надпровідного в нормальний стан необхідно витратити енергію $E_{св} = 2V$ на розрив пар, тобто енергію $V = E_{св}/2$ на кожний електрон. Це означає, що нормальний стан електронів в надпровіднику відокремлений від надпровідного стану енергетичною щілиною $E_{св}$.

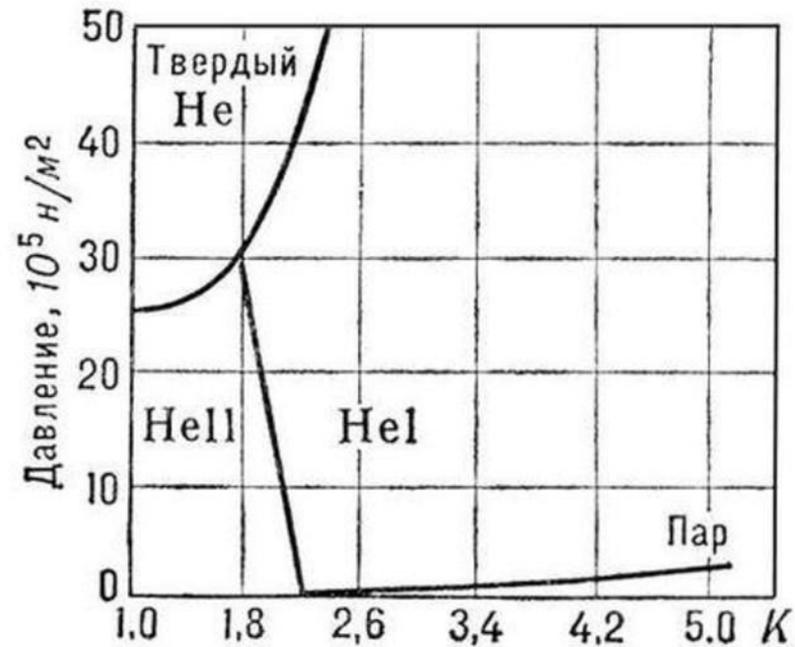
Надтекучість рідкого гелію

У 1937 році **Петро Леонідович Капіца** виявив у гелію парадоксальне властивість: при охолодженні до температур, близьких до абсолютного нуля, рідкий гелій не тільки не стає твердим, але втрачає в'язкість, переходячи в стан надплинності. Абсолютний нуль - температура, при якій хаотичний рух атомів припиняється. Отже, при абсолютному нулі всі тіла повинні бути твердими. Рідкий гелій - єдина речовина, яка не твердне при абсолютному нулі.

Рідкий гелій I володіє малою в'язкістю в порівнянні з іншими рідинами. Але ця в'язкість ще цілком нормальна і вимірно. Вона в 500 разів менше в'язкості води. Петро Леонідович Капіца справив дуже простий і надзвичайно важливий експеримент. Він спостерігав протікання гелію через дуже тонкі щілини. Щілини ці були настільки тонкі, що навіть така зі звичайною точки зору нев'язких рідин, як вода, випливала б через ці щілини протягом багатьох п багатьох діб. Виявилось, що рідкий гелій II протікає через щілини протягом декількох секунд. Петро Леонідович Капіца вдалося показати, що в'язкість гелію відрізняється від в'язкості води не менше ніж в мільярд разів. Це тільки верхня межа, пов'язаний з точністю експериментів, та межа в'язкості, який спостерігав Петро Леонідович Капіца. В'язкість гелію II виявилася настільки маленькою, що взагалі не могла бути виміряна. Можна стверджувати, що рідкий гелій II просто позбавлений всякої в'язкості. Це явище отримало назву надплинності. Тому гелій II називають сверхтекучей рідиною.

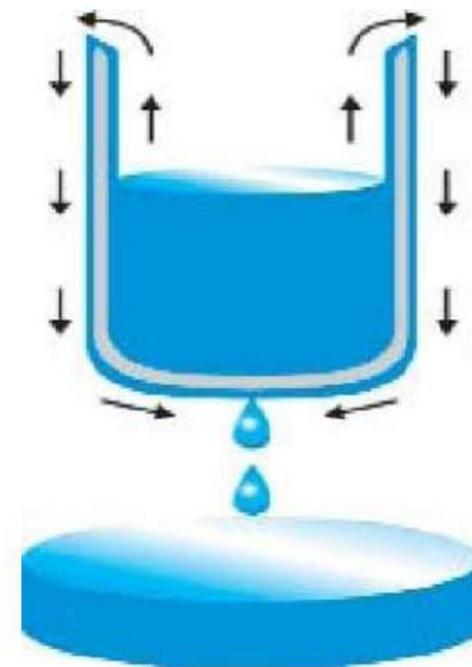
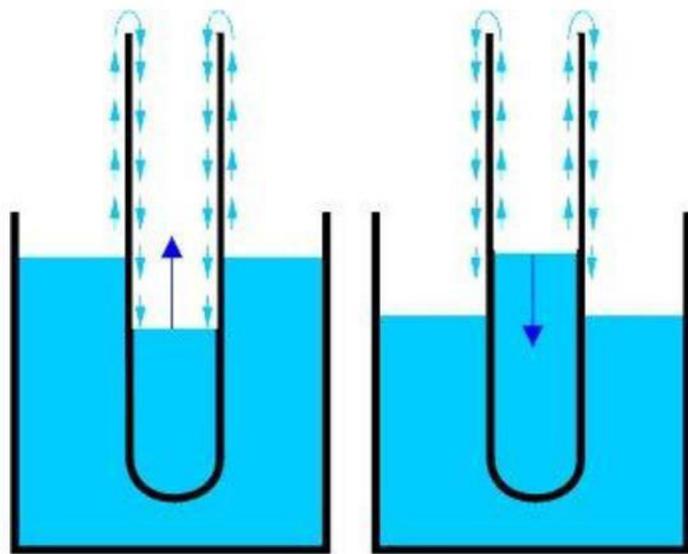
Рідкий гелій - квантова рідина (бозе-рідина), тобто рідина, в макроскопічному обсязі якої проявляються квантові властивості складових її атомів. Квантові ефекти істотні при дуже низьких температурах.

Вище температури **2,17 K** ^4He поводитья як звичайна кріорідина, тобто кипить, виділяючи бульбашки газу. При досягненні температури 2,17 K (при тиску парів **0,005 МПа** - так звана **λ -точка**) рідкий ^4He зазнає фазовий перехід другого роду, що супроводжується різкою зміною ряду властивостей: теплоємності, в'язкості, щільності та ін У рідкому гелії при температурі нижче температури переходу одночасно співіснують 2 фази, **He I** і **He II** з сильно розрізняються властивостями.



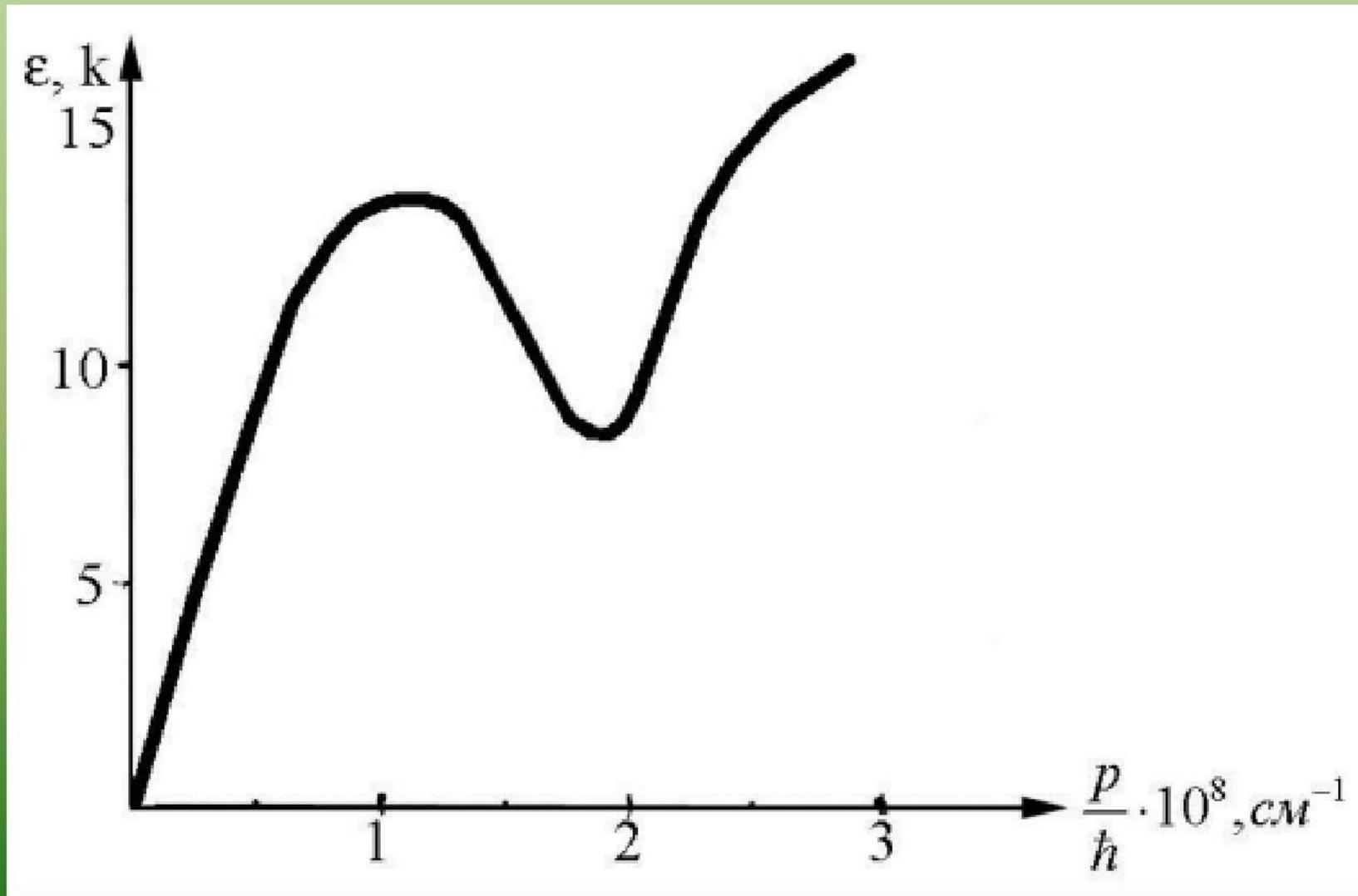
Фазовий перехід в гелії добре помітний, він проявляється в тому, що кипіння припиняється, рідина стає скоєно прозорою. Випаровування гелію, звичайно, триває, але воно йде виключно з поверхні. Різниця в поведінці пояснюється надзвичайно високою теплопровідністю надтекучої фази (в багато мільйонів разів вище, ніж в He I). При цьому в'язкість нормальної фази залишається практично незмінною, що впливає з вимірів в'язкості методом коливного диска. Зі збільшенням тиску температура переходу зміщується в область більш низьких температур. Лінія розмежування цих фаз називається λ -лінією. На малюнку приведена фазова діаграма ^4He .

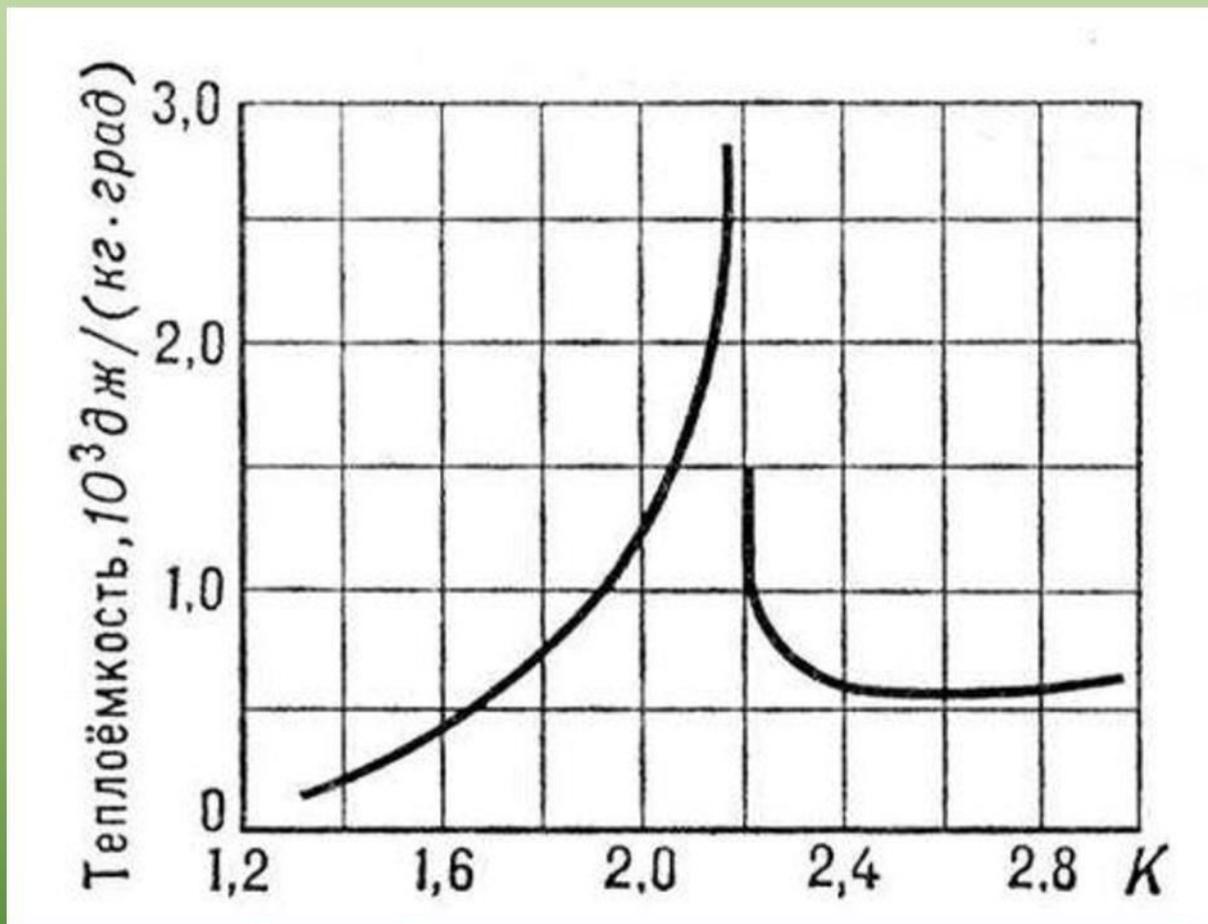
Для He II характерна надтекучість - здатність протікати без тертя через вузькі (діаметром менше 100 нм) капіляри і щілини. Відносний вміст He II зростає з пониженням температури і досягає 100% при абсолютному нулі температури - з цим були пов'язані спроби отримання наднизьких температур пропусканням рідкого гелію через дуже тонкий капіляр, через який пройде тільки надтекуча компонента. Однак, за рахунок того що при температурах, близьких до абсолютного нуля, теплоємність також прагне до нуля, домогтися істотних результатів не вдалося - за рахунок неминучого нагрівання від стінок капіляра і випромінювання. За рахунок надтекучості і досягається аномально висока теплопровідність гелію - теплообмін йде не за рахунок теплопередачі, а за рахунок конвекції надтекучої компоненти в протivotок нормальної, яка переносить тепло (надтекуча компонента не може переносити тепло).



Парадоксальне поведження надтекучого гелію-два. Він вибирається з пробірки через край і або весь виливається у ванну з гелієм, або тече (вверх!) до тих пір, поки рівні рідини у пробірці і в ванні не зрівняються.

Експериментальний спектр збудження ^2He





У момент надпровідного переходу теплоємність гелію різко зростає до величезної величини, а при подальшому охолодженні швидко зменшується.

Другий звук

За рахунок одночасної наявності двох фаз в рідкому гелії, є дві швидкості звуку і специфічне явище - так званий "другий звук". **Другий звук** - слабозатухаючі коливання температури і ентропії в сверхтекучем гелії. Швидкість поширення другого звуку визначається з рівнянь гідродинаміки сверхтекучей рідини в двокомпонентній моделі. Якщо знехтувати аномально малим для гелію коефіцієнтом теплового розширення, то у хвилі другого звуку осцилюють тільки температура і ентропія, а щільність і тиск залишаються постійними. Поширення другого звуку не супроводжується перенесенням речовини.

Другий звук можна також інтерпретувати як коливання концентрації квазічастинок в сверхтекучем гелії. У чистому ^4He це коливання в системі ротони і фононів.

Існування другого звуку було передбачене теоретично Ландау, розрахункове значення дорівнювало **25 м / с**.

Фактично виміряний - **19,6 м/с**.

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Модель двох рідин

Квантова рідина з розглянутим Ландау спектром збуджень при протіканні по трубці втрачає імпульс тільки за рахунок збуджень, що виникають при швидкостях течії

$$v > v_c = \min \left[\frac{\varepsilon(p)}{p} \right]$$

Квантові рідини, спектр яких задовольняє умові $\min \left[\frac{\varepsilon(p)}{p} \right] \neq 0$

проявляють надтекучість (критерій надтекучості Ландау)

Спектр **He II** відповідає цьому критерію при швидкостях течії $v < v_c \approx \varepsilon_0 / p_0$. Однак значення спостережуваної критичної швидкості приблизно на два порядки нижче вказаної величини, що пов'язано з народженням в рідині квантових вихрів.

При $T \neq 0$ **He II** складається з двох компонент – нормальної і надтекучої. Сума густин потоків компонентів:

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$$

Нормальний компонент як будь-яка звичайна рідина гальмується при протіканні через вузькі капіляри.

Рівняння двовидкісний гідродинаміки **He II** включають: рівняння безперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial X_k} = 0 \quad \text{закон збереження імпульсу}$$

де $\Pi_{ik} = \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + P \delta_{ik}$, P – тиск, δ_{ik} – символ кронекера

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} S v_n = 0 \quad \text{р-ня збереження ентропії}$$

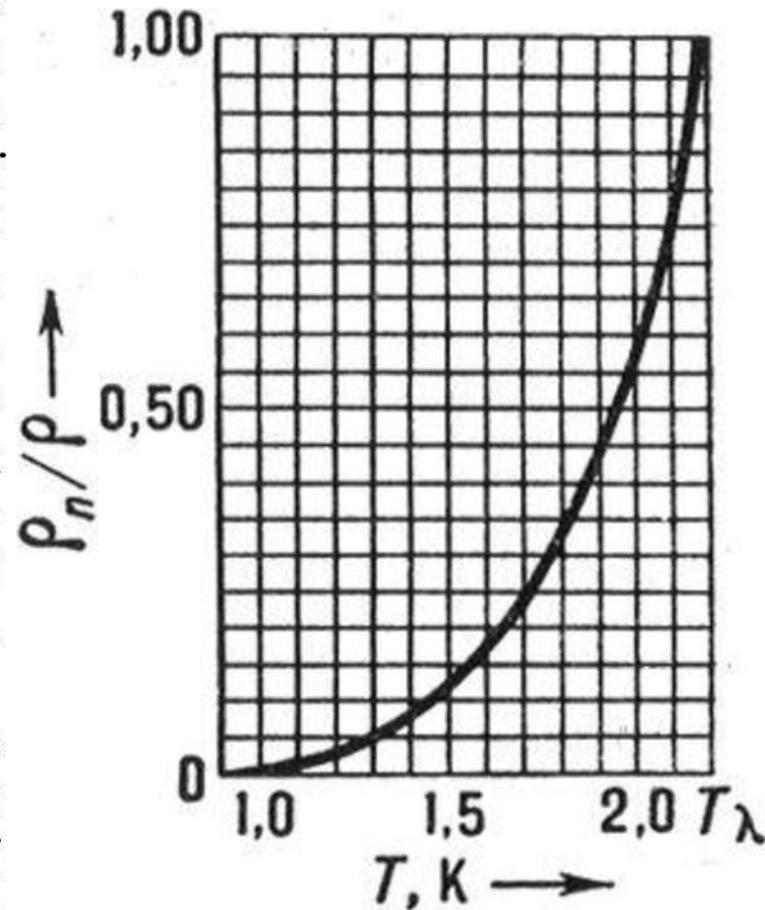
$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) = 0 \quad \text{р-ня для надтекучої компоненти}$$

де μ – хімічний потенціал, що задовільняє тотожність:

$$\rho d\mu = -SdT + dP - (j - \rho_s v_s) d(v_n - v_s)$$

При протіканні гелію крізь щілини з малою швидкістю, надтекуча компонента, за визначенням, обтікає всі перешкоди без втрати кінетичної енергії, тобто без тертя. Тертя могло б виникнути, якби який-небудь виступ щілини породжував би квазічастинки, що забирають в різні боки імпульс рідини. Однак таке явище при малих швидкостях течії енергетично не вигідно, і тільки при перевищенні критичної швидкості течії починають генеруватися ротони.

Ця модель, по-перше, добре пояснює різноманітні термомеханічні, светомеханічні і т. п. явища, що спостерігаються в гелії-II, а по-друге, міцно базується на квантовій механіці.



Відносна частка нормальної компоненти в гелії-II