М. Д. Бабич, С. І. Куприков

Навчальний посібник з курсу

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І

Київ – 2003

КИЇВСЬКИЙ СЛАВІСТИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

М. Д. Бабич, С. І. Куприков

ВИЩА МАТЕМАТИКА

тести і контрольні завдання
для студентів заочної форми навчання
економічних спеціальностей

Навчальний посібник
У 2-х частинах
Частина 1

(Елементи вищої алгебри, векторної алгебри, аналітичної геометрії, теорії границь та диференціального числення)

Київ – 2003

ББК 22.1
Б – 12

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів заочної форми навчання (лист №14/18.2 – 822 від 18 квітня 2002 р.)

Рецензенти: Д.Я. Хусаїнов – доктор фізико-математичних наук, професор
В.О. Людвиченко – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник.

Укладачі: доктор фізико-математичних наук, професор Бабич М. Д.
кандидат технічних наук, доцент Куприков С. І.

Вища математика. Тести і контрольні завдання для студентів заочної форми навчання економічних спеціальностей: Навчальний посібник для студентів заочної форми навчання економічних спеціальностей. – Ч.1. – К.: КСУ,2003. – 56 с.

ISBN 5 – 7763 – 1198 – 5

Посібник містить короткі теоретичні відомості та набір тестових прикладів з основних розділів курсу дисципліни “Вища математика”, що викладається студентам економічних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

У першій частині розглянуті елементи вищої алгебри, векторної алгебри, аналітичної геометрії та диференціального числення однієї змінної і наведені варіанти контрольних робіт

ББК 22.1
Б – 12

ISBN 5 – 7763 – 1198 – 5

Зміст

Передмова

Навчальний посібник призначається для допомоги студентам заочної форми навчання в оволодінні плановим курсом вищої математики і виконання відповідної контрольної роботи.

Методичні вказівки містять короткий виклад теоретичного матеріалу та приклади розв‘язання типових задач з кожної теми, що повинно сприяти самостійному виконанню контрольних робіт.

Тридцять варіантів контрольних робіт забезпечують індивідуальне виконання студентами запропонованих завдань і дають можливість індивідуальної оцінки викладачем роботи кожного студента.

Посібник може бути також використаний як додатковий довідниковий матеріал з вищої математики студентами як заочної, так і очної форми навчання.

1.Елементи лінійної алгебри

Однією із основних і найбільш поширених задач лінійної алгебри є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Разом з питаннями сумісності таких систем важливу роль відіграють методи їх розв'язування. У звязку із вивченням таких систем та методів їх розв'язування виникли поняття визначника і матриці.

1.1 Визначники 2-го і 3-го порядків

Число, позначене символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і визначене рівністю

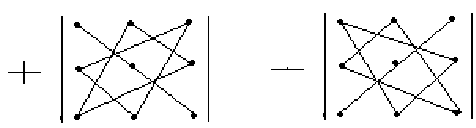
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

називають визначником 2-го порядку.

Число, позначене символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ і визначене рівністю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \tag{1.2}$$

називають визначником 3-го порядку. Числа a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{33}$, що складають визначник, називаються елементами визначника. Для позначення елементів визначника використовуються подвійні індекси: a_{ij} .Перший індекс (i) визначає номер рядка, а 2-й (j) – номер стовпчика визначника. Права частина рівності (1.2) обчислюється за такими схемами.



тобто елементи добутків (1.2), взяті з відповідно вказаними знаками, або з'єднані відрізками (головна і друга діагональ), або утворюють трикутники.

Для обчислення визначника третього порядку можна використовувати і так зване „правило Саррюса". Для обчислення визначника за цим правилом припишемо справа до визначника спочатку перший, а потім другий стовпчики:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right|.$$

$$+\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right|. \qquad - \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right|$$

Тоді, як показано на схемі, доданки суми (1. 2) що не змінюють свій знак, знаходяться шляхом добутку елементів, що стоять на головній діагоналі та паралельно їй;

а для знаходження доданків, що змінюють свій знак, треба перемножити елементи, що стоять на другій діагоналі та паралельно їй:

.

Приклад 1. Обчислити визначник за правилом трикутника.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2)\cdot 3 + (-1)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) - \\ -(-2)\cdot 2\cdot 2 = -6+6-2-9+1+8 = -2.$$

Приклад2. Обчислити визначник за правилом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}\Bigg| =$$

$$= 2\cdot 3\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot(-2)\cdot 2 -$$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -6+6-2-9+8+1 = -2.$$

Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Позначимо через a_{ij} (i, j=1,2,3) елемент визначника (1.2), який знаходиться на перетині його i–го рядка і j–го стовпчика. Якщо в (1.2) викреслити i –й рядок і j –й стовпчик, то одержимо визначник 2-го порядку, який називається доповнюючим мінором елемента a_{ij} і позначається M_{ij}.

Мінор M_{ij}, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} і позначається A_{ij}, тобто

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\,\mathrm{M}_{ij}. \qquad (1.3)$$

Теорема розкладу. Визначник Δ дорівнює сумі парних добутків всіх елементів якогось рядка або стовпчика на їх алгебраїчні доповнення.

Для визначника Δ із (1.2) цей розклад за елементами 1-го рядка із врахуванням (1.3) буде виглядати так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \qquad (1.4)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Приклад. Розкласти за елементами 1-го рядка і обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3+4) + 1\cdot(1+6) + 1\cdot(-2-9) = -2.$$

1.2 *Система 3-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими*

Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad (1.5)$$

за умови, що визначник системи (складений із коефіцієнтів при невідомих)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1.6)$$

має єдиний розв'язок, що записується у вигляді дробів:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (1.7)$$

Чисельник Δ_j (j=1,2,3) є визначник Δ , в якому j-й стовпчик замінений стовпчиком із вільних членів системи, тобто:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Правило, згідно з яким невідомі x_1, x_2, x_3 системи (1.5) визначаються у вигляді дробів (1.7), називається правилом Крамера.

Приклад. Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Обчислюємо визначники Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 3 + (-2)\cdot(-1)\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 3 - (-2)\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = -21 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 20 - 3 - 90 - 4 + 2 = -63,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 60 - 9 - 8 + 10 = 42,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 6 - 8 - 36 + 40 + 1 = 21.$$

Отже, $x_1 = \frac{-63}{-21} = 3;\quad x_2 = \frac{42}{-21} = -2;\quad x_3 = \frac{21}{-21} = -1$.

1.3 Метод Гаусса виключення невідомих

Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь називаються перетворення таких трьох типів:

1). Перестановка двох рівнянь;

2). Множення обох частин одного із рівнянь на довільне число, відмінне від нуля;

3). Додавання до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого, домноженого на будь-яке число.

Елементарні перетворення переводять дану систему рівнянь в еквівалентну систему.

Метод Гаусса полягає у зведенні з допомогою елементарних перетворень системи виду (1.5) до трикутного вигляду.

Складемо із коефіцієнтів при невідомих і вільних членів системи (1.5) таблиці A і $\overline{A}$**:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right),$$

де A називається матрицею системи (1.5), а $\overline{A}$ - розширеною матрицею системи (1.5).

Практично зводити до трикутного вигляду зручно не саму систему (1.5), а розширену матрицю, з'єднуючи матриці, що отримуються знаком еквівалентності ~. Покажемо це на попередньому прикладі:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & -8 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -8 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Перший рядок домножуємо відповідно на –2 і –3 і додаємо до 2-го і 3-го рядка. Далі 2-й рядок ділимо на 7. До 3-го рядка додаємо другий, помножений на –5. Ми одержимо трикутну систему, еквівалентну (1.5)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad\quad -3x_3 = 3. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо x_3 = -1. Підставимо це значення x_3 у друге рівняння і одержимо x_2 – (-1) = -1 або x_2 = -2. Далі значення x_2 і x_3 підставляємо у 1-е рівняння. В результаті $x_1 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 4$, або x_1 = 3.

Таким чином, $x_1 = 3$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1$.

2. Елементи аналітичної геометрії на площині.

2.1 Прямокутна декартова система координат

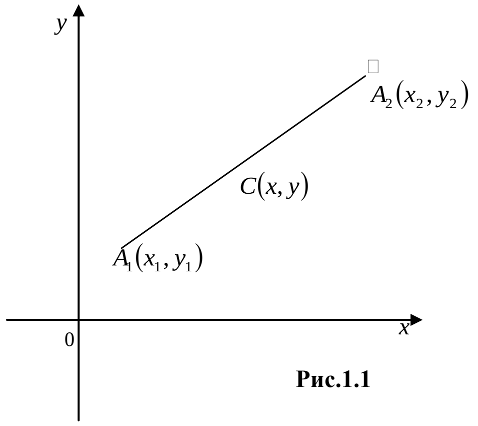


Рис.1.1

Дві взаємно перпендикулярні направлені прямі ОХ - вісь абсцис і ОУ - вісь ординат, що перетинаються в точці О, яка називається початком координат, з визначеними додатніми напрямами по ОХ вправо і по ОУ вверх від початку О та вибраною одиницею виміру (масштабу), утворюють прямокутну декартову систему координат (рис.1.1).

Найпростішими задачами, що розв'язуються в системі координат, є відстань між двома точками та поділ відрізка в даному відношенні.

Відстань d між точками A_1 і A_2 визначається за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \; ; \qquad (2.1)$$

Якщо точка С ділить відрізок A_1A_2 у відношенні λ, тобто $\frac{A_1C}{CA_2} = \lambda$, то координати x і y точки С визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (2.2)$$

Зокрема, якщо точка С ділить відрізок A_1A_2 пополам, тоді λ=1 і формули (2.2) матимуть вигляд

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (2.3)$$

2.2 Рівняння прямої на площині

1. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* має вигляд

$$y = kx + b \qquad (2.4)$$

Параметр $k = tg\alpha$ називається кутовим коефіцієнтом, α - кут нахилу прямої до додатного напряму осі ОХ, b - величина відрізка, який пряма відтинає на осі ОУ.

2. *Загальне рівняння прямої* визначається рівнянням

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.5)$$

Це рівняння зводиться до виду (2.4) шляхом розв'язання його відносно y. Дійсно

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = kx + b, \qquad \text{де } k = -\frac{A}{B}; \quad b = -\frac{C}{B}.$$

3. *Рівняння прямої у відрізках на осях* має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (2.6)$$

де $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$ - відрізки, що відтинає пряма на осях координат.

4. *Кут* φ *між двома прямими* $y = k_1x + b_1$; $y = k_2x + b_2$ визначається за формулою

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\ , \qquad (2.7)$$

звідки випливають:

умова паралельності прямих $k_2 = k_1$, що відповідає значенню $\varphi = 0$;

умова перпендикулярності прямих $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, що відповідає значенню $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Якщо прямі задані загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned};$$

то кут між ними можна визначити і за такою формулою: $tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$.

5. *Рівняння пучка прямих*, що проходять через дану точку $A_1(x_1, y_1)$ з невизначеним кутовим коефіцієнтом *k*, має вигляд

$$y - y_1 = k(x - x_1)\,. \qquad (2.8)$$

Фіксоване значення кутового коефіцієнта *k* виділяє із пучка конкретну пряму.

6. *Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки* $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$ має вигляд

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,. \qquad (2.9)$$

7. *Координати точки перетину двох не паралельних прямих* $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$ визначаються як розв'язок системи цих рівняннь.

8. *Нормальне рівняння прямої* має вигляд

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (2.10)$$

де р – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, а α -- кут нахилу цього перпендикуляра до осі ОХ. Щоб звести загальне рівняння прямої (2.5) до нормального виду, потрібно всі його члени домножити на нормуючий множник М = $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, взятий із знаком, протилежним знаку вільного члена С, тобто:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0\,. \qquad (2.11)$$

9. *Відстань d точка P (x_o, y_o) від прямої* (2.11) знайдемо, якщо в (2.11) замість біжучих координат *x* і *y* підставимо координати x_o, y_o точки Р і одержане число візьмемо за абсолютною величиною, тобто :

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \qquad (2.12)$$

<u>*Приклад*</u>. Задано вершини трикутника ABC: A (4; -1); B (-3; 2); C (1; 3). Знайти:

а) довжину сторони AB;
б) рівняння сторін AB і BC;
в) кут між прямими AB і BC;
г) рівняння медіани BM і висоти AD;
д) довжину висоти AD.

<u>*Розв'язання*</u>

а) довжину AB обчислюємо за формулою (2.1), а саме: d= $\sqrt{(-3-4)^2 + (2-(-1))^2}$ $= \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$;

б) рівняння сторін AB і BC знаходимо за формулою (2.9) $\frac{y+1}{2+1}=\frac{x-4}{-3-4} \Rightarrow -7(y+1)=3(x-4) \Rightarrow 3x+7y-5=0$ — загальне рівняння AB; $\frac{y-2}{3-2}=\frac{x+3}{1+3} \Rightarrow 4(y-2)=1(x+3) \Rightarrow x-4y+11=0$ — загальне рівняння BC;

в) кут між прямими AB і BC знаходимо за формолою (2.7). Для цього рівняння AB і BC запишемо у вигляді (2.4), тобто $y=-\frac{3}{7}x+\frac{5}{7}$ і $y=\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$ відповідно.

Позначимо $k_1=-\frac{3}{7}, k_2=\frac{1}{4}$. Тоді tg φ $=\frac{\frac{1}{4}-(-\frac{3}{7})}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{(-3)}{7}}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{28}}=\frac{19}{25}$. Звідси φ = arctg 0,76;

г) медіана BM ділить сторону AC пополам. Отже, знайдемо координати точки M, як середини сторони AC за формулами (2.3)

$$x=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2};\ y=\frac{-1+3}{2}=1, \text{ отже M}\left(\frac{5}{2};1\right).$$

Тоді згідно з (2.9) $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-\frac{5}{2}}{-3-\frac{5}{2}} \Rightarrow -11(y-1)=2x-5 \Rightarrow 2x+11y-16=0$ - рівняння медіани BM.

Для знаходження рівняння висоти AD запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через точку A. Це буде

$$y+1=k_1(x-4).$$

Із цього пучка виділимо ту пряму, яка буде перпендикулярна прямій BC. k_2 = 1/4 - кутовий коефіцієнт BC. Із умови перпендикулярності двох прямих знаходимо $k_1=-\frac{1}{k_2}=-4$.

$$\text{Тоді} \quad y+1=-4(x-4) \Rightarrow 4x+y-15=0 \text{ — рівняння AD;}$$

д) для знаходження довжини AD зведемо рівняння BC до нормального виду. Нормуючий множник M = $-\frac{1}{\sqrt{17}}$. Тоді згідно з (2.12) відстань d від точки A до прямої BC, або ж AD, буде такою: $d=\left|\frac{1\cdot4-4\cdot(-1)+11}{-\sqrt{17}}\right|=\frac{19}{\sqrt{17}}$.

3. Елементи векторної алгебри

3.1 Скаляри і вектори. Дії над векторами

Скалярною величиною або скаляром називається величина, яка характеризується своїм числовим значенням у вибраній системі одиниць.

Величина, яка разом із своїм числовим значенням характеризується напрямом, називається векторною або вектором.

Позначається вектор одним із символів: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Під модулем (довжиною) вектора $\vec{a}$ розуміють чисельне його значення, без врахування напряму, тобто $|\overline{a}| = a$ – число. Вектор $\vec{0}$, у якого $|\vec{0}|=0$, називається нульовим. Напрямок нульового вектора довільний.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються рівними, якщо вони розташовані на паралельних прямих або таких, що співпадають, мають однакову довжину і напрямок.

Рівні вектори не розрізняються. Це зумовлює поняття вільного вектора, що допускає його паралельний перенос в будь-яку точку простору із збереженням довжини і напрямку.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній і тій же прямій або на паралельних прямих.

Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Додавання векторів. Сумою векторів $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ називається вектор $\vec{s}$, який замикає просторову ламану, побудовану на цих векторах. Зокрема, в паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, одна векторна діагональ є сума $\vec{a}+\vec{b}$, а друга є різниця $\vec{a} - \vec{b}$ даних векторів.

Множення вектора на скаляр. Добутком вектора $|\overline{a}|$ на скаляр κ називається вектор $\overrightarrow{\kappa a}$, який має довжину $\kappa|\overline{a}|$ і напрям однаковий з $\vec{a}$, якщо $\kappa > 0$ і протилежний з $\vec{a}$, якщо $\kappa < 0$.

Проекція вектора на вісь. Якщо вектор $\vec{a}$ утворює кут φ з віссю Ох, тоді проекція вектора $\vec{a}$ на цю вісь визначається формулою $np_x\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Для колінеарних і компланарних векторів мають місце такі твердження:

Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли вони пропорціональні, тобто $\vec{b} = \kappa\vec{a}$ (κ – скаляр).

Три ненульових вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією двох інших, наприклад, $\vec{c} = \kappa\vec{a} + m\vec{в}$, де κ і m скаляри.

3.2 Прямокутні координати точки і вектора у просторі

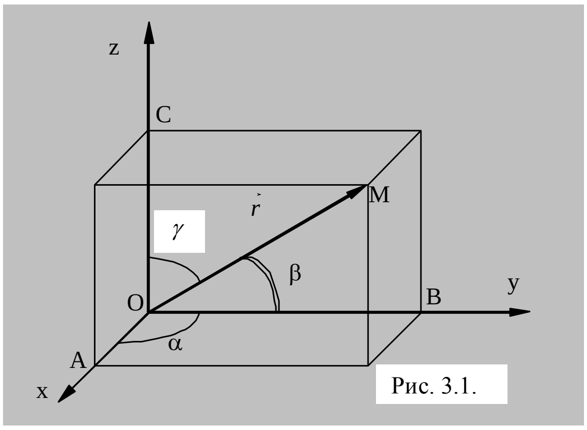


Рис. 3.1.

Нехай дано три взаємно перпендикулярні координатні осі (рис.3.1) із спільним початком O і дана точка $M(x, y, z)$. Вектор $\overline{OM} = \vec{r}$ називається радіусом-вектором точки М. Проекції радіуса-вектора $\vec{r}$ на осі координат *OA=x, OB=y, OC=z,* називаються прямокутними координатами точки *M(x,y,z)*, або вектора $\vec{r} = \overline{OM}$. Модуль або довжина радіуса-вектора $\vec{r} = \overline{OM}$ визначається (як діагональ прямокутного паралелепіпеда) за формулою

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{3.1}$$

Одиничні вектори координатних осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називаються ортами, через які радіус-вектор визначається так:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\,. \tag{3.2}$$

Для вектора $\overrightarrow{AB}$, що заданий координатами початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$, його проекції на осі координат будуть такі:

$$\left.\begin{aligned} np_X\, AB &= X = x_2 - x_1 \\ np_Y\, AB &= Y = y_2 - y_1 \\ np_Z\, AB &= Z = z_2 - z_1 \end{aligned}\right\}. \tag{3.3}$$

У цьому випадку формули (3.1) і (3.2) записуються так:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,, \tag{3.4}$$

$$\overline{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\,. \tag{3.5}$$

Якщо позначити через $\alpha, \beta, \gamma (0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi)$ кути, які утворює радіус-вектор $\vec{r}$ з координатними осями, то будемо мати

$$x = |\vec{r}|\cos\alpha;\ y = |\vec{r}|\cos\beta;\ z = |\vec{r}|\cos\gamma\,. \tag{3.6}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються напрямними косинусами радіуса-вектора $\vec{r}$, причому із (3.1) і (3.6) випливає, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{3.7}$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів дорівнює 1.

Таким чином, радіус-вектор $\vec{r}$ і довільний вектор $\overrightarrow{AB}$ повністю визначаються своїми координатами, що випливає із формул (3.2)-(3.6). А це означає, що представлення $\vec{r}$ і $\overrightarrow{AB}$ формулами (3.2) і (3.5) рівносильне записам $\vec{r} = \{x, y, z\}, \overrightarrow{AB} = \{X, Y, Z\}$

3.3 Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi, \tag{3.8}$$

де $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Із формули (3.8)

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \tag{3.9}$$

звідки випливає, що два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні , тобто $\varphi=\frac{\pi}{2}$, тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані в координатній формі, тобто

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\{a_x,a_y,a_z\} \text{ або } \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\\ \vec{b}&=\{b_x,b_y,b_z\} \text{ або } \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},\end{aligned} \tag{3.10}$$

то перемножуючи їх як многочлени і враховуючи, що скалярні добутки ортів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ задовольняють співвідношенням $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$, а $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, одержимо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z, \tag{3.11}$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі парних добутків їх однойменних координат. З урахуванням (3.11) і (3.1) формула (3.9) набуває вигляду

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{3.12}$$

<u>*Приклад*</u>. Знайти кут між векторами $\vec{a}=\{2,-1,3\}; \vec{b}=\{1,2,1\}$.

На основі (3.12) маємо

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{2-2+3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{84}}\approx0{,}3273,$$

звідки $\varphi=\arccos(0{,}3273)\approx70°6'$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то має місце умова $\vec{b}=k\vec{a}$. Тоді згідно з (3.10) $(b_x,b_y,b_z)=k(a_x,a_y,a_z)$, що еквівалентно $b_x=ka_x$, $b_y=ka_y$, $b_z=ka_z$, або $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$ – *умова паралельності двох векторів*. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, тобто $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то із (3.12) випливає $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$ – *умова перпендикулярності двох векторів*.

3.4 Векторний добуток двох векторів

Трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається правою (або утворює праву трійку), якщо найкоротший шлях від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ із кінця вектора $\vec{c}$ спостерігається проти годинникової стрілки. Якщо такий рух від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ з кінця вектора $\vec{c}$ спостерігається за годинниковою стрілкою, то трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається лівою.

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається такий третій вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (рис.3.2), який визначається такими трьома умовами:

1) модуль вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$ – площа ОАВС;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто до площини паралелограма ОАВС;

3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ неколінеарні, то вони утворюють праву трійку векторів.

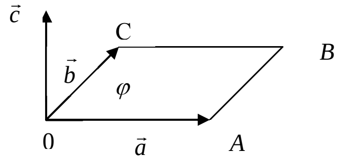


Рис. 3.2

Векторний добуток має такі властивості:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, тобто при перестановці множників знак векторного добутку міняється на протилежний.
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ – розподільний закон.
3. Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тобто кут φ=0, то $\vec{a} \times \vec{b}$ =0, зокрема $\vec{a} \times \vec{a}$ =0.

На основі означення векторного добутку для ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мають місце співвідношення.

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{k} = \bar{0};$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j}. \tag{3.13}$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координатну форму (3.10), то перемноживши їх векторно із врахуванням (3.13) одержимо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \tag{3.14}$$

або згідно з (1.4)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{3.15}$$

Із формули (3.14) випливає рівність

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2, \tag{3.16}$$

яка геометрично характеризує квадрат площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.Звідси площа трикутника:

$$S_{OAC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{3.17}$$

3.5 Мішаний добуток трьох векторів

Під мішаним (або векторно-скалярним) добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ розуміють число:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \pm V, \tag{3.18}$$

яке дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, зведених до спільного початку, як на сторонах і взятому із знаком +, якщо ці вектори утворюють праву трійку та із знаком – , якщо вони утворюють ліву трійку.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані своїми координатами, , тобто $c = \{c_x, c_y, c_z\}$ а $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають вигляд (3.10), то

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{3.19}$$

Із мішаного добутку випливає необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0. \tag{3.20}$$

Геометрично це означає, що об’єм паралелепіпеда дорівнює нулю.

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$V_{nip} = \pm\frac{1}{6}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}. \tag{3.21}$$

Приклад. Дано три вектори $\bar{a} = \{1;3;-2\}; \bar{b} = \{-1;1;-1\}$ і $\bar{c} = \{0;1;2\}$. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b}$; φ- кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$; $|\vec{a}\times\vec{b}|$; $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Розв’язання

На основі (3.11) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ =1· (-1)+3·1+(-2) · (-1) = -1+3+2 = 4;

Згідно з (3.10), (3.11) і (3.1) cosφ = $\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{42}}$; φ = arccos $\frac{4}{\sqrt{42}}$.

За формулою (3.16)

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 = (-1)^2 + (13)^2 + (4)^2 = 26. \quad \text{Звідси } \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{26}.$$

Згідно з (3.19) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =2+2+0+0+1+6=11.

4. Елементи аналітичної геометрії у просторі

4.1 Площина у просторі

1. Загальне рівняння площини. Нехай у просторі, тобто у прямокутній системі координат Oxyz, задано площину P (рис.4.1) її довільною точкою $M_o(x_o y_o z_o)$ і ненульовим вектором $\vec{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярним до цієї площини. Вектор $\vec{N}$ називається нормальним вектором площини. Візьмемо на площині P біжучу точку M(x,y.z) і утворимо вектор $\overrightarrow{M_o M} = \{x - x_o, y - y_o, z - z_o\}$. Очевидно, що при будь-якому розташуванні точки M на площині P вектори $\vec{N}$ і $\overrightarrow{M_o M}$ будуть взаємно перпендикулярні. Тоді згідно з умовою (3.11) їх скалярний добуток буде дорівнювати нулю, тобто:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ де } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 . \qquad (4.1)$$

Рівняння (4.1) називається загальним рівнянням площини. В залежності від значень A,B,C,D площина може займати різні положення в системі координат Oxyz .

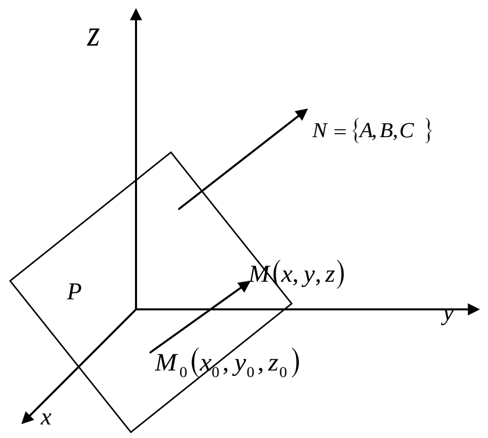


Рис.4.1

2. Рівняння площини у відрізках на осях. Рівняння (4.1) зводиться до рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (4.2)$$

де $a = -\frac{D}{A}; b = -\frac{D}{B}; c = -\frac{D}{C}$ — відрізки, які відтинає площина на координатних осях.

3. *Рівняння площини, що проходить через три точки.* Нехай на площині P задано три точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), і M_3 (x_3, y_3, z_3). , які не лежать на одній прямій. Такі три точки однозначно визначають площину.

Розглянемо на площині P довільну точку M (x, y, z) і утворимо вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y_1 - y_1; z - z_1\}; \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1\}$. Ці вектори лежать на площині P, отже вони компланарні. Тоді згідно з умовою (3.20) компланарності трьох векторів можна записати:

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0, \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.3)$$

що і визначає рівняння площини, яка проходить через три точки.

4. Кут між двома площинами. Кут між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ визначається як кут між їх нормальними векторами $N1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $N2=\{A_2,B_2,C_2\}$ за формулою (3.12), тобто

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \quad (4.4)$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин визначаються умовами паралельності і перпендикулярності їх нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, тобто:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$ — *умова паралельності,*

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$ - *умова перпендикулярності.*

5. Відстань від точки до площини. Якщо задано рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$ і точка M_0 (x_0, y_0, z_0) поза нею, то відстань ***d*** від точки M_0 до цієї площини визначається за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (4.5)$$

Приклад. Знайти відстань точки $M_0(4;3;0)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1;3;0)$; M_2 $(4;-1;2)$ і M_3 $(3;0;1)$.

Розв'язання

Знайдемо за формулою (4.3) рівняння площини

$$0=\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 4-1 & -1-3 & 2-0 \\ 3-1 & 0-3 & 1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=(x-1)(-4+6)-(y-3)(3-4)+z(-9+8) = 2x-2+y-3-z = 2x+y-z-5.$$

Отже, рівняння площини $M_1M_2M_3$ є $2x + y - z - 5 = 0$.

За формулою (4.5) знайдемо відстань від точки M_0 до площини

$$d=\frac{|2\cdot4+1\cdot3-1\cdot0-5|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{8+3-5}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

4.2 Пряма у просторі

1. Канонічне рівняння прямої. Пряма L у просторі однозначно визначається точкою $M_0(x_0;y_0z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S}=\{m,n,p\}$, паралельним прямій L (рис.4.2). Візьмемо на прямій L біжучу точку $M(x,y,z)$ і утворимо вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$. За умовою вектор $\overrightarrow{M_0M}$ паралельний вектору $\vec{S}$. Тоді з умови паралельності двох векторів випливає рівняння

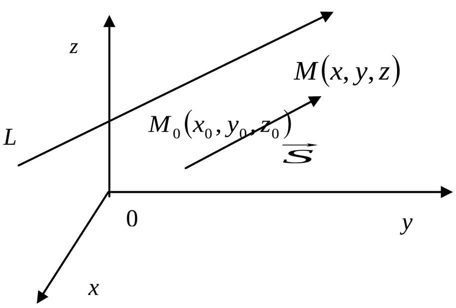


Рис. 4.2

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \quad (4.6)$$

яке називається канонічним рівнянням прямої.

2. *Параметричні рівняння прямої.* Якщо в (4.6) кожне із співвідношень прирівняти параметру t і виразити x, y, z, то одержимо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}. \qquad (4.7)$$

3. *Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві задані точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Така пряма має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (4.8)$$

4. *Загальне рівняння прямої у просторі.* Воно визначається системою рівнянь двох непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (4.9)$$

з нормальними векторами $N1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $N2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Такі площини перетинаються по прямій, рівняння якої є (4.9).

Якщо із (4.9) виключити послідовно один раз *y*, другій раз *x* (вважаючи *z* довільною сталою), то одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}, \qquad (4.10)$$

що визначає рівняння прямої у проекціях. Це рівняння можна записати в канонічній формі

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - 0}{1}.$$

5. Кут між двома прямими. Якщо дві прямі задані своїми канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

з напрямними векторами $\vec{S}1 = \{m_1, n_1, p_1\}; \vec{S}2 = \{m_2, n_2, p_2\}$, то кут φ між цими прямими визначається як кут між їхніми напрямними векторами, тобто, згідно з (3.12)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}1 \cdot \vec{S}2}{\left|\vec{S}1\right| \cdot \left|\vec{S}2\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (4.11)$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих визначаються умовами паралельності і перпендикулярності їх напрямних векторів, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ — умова паралельності}$$

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \text{ — умова перпендикулярності.}$$

Приклад. Задано координати трьох точок $M_1(2;-1;3)$, $M_2(1;2;-1)$ і $M_3(-3;2;1)$. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку M_3 паралельно прямій M_1M_2, а також кут між прямими M_1M_2 і M_1M_3.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння прямих M_1M_2 і M_1M_3. За формулою (4.8)

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y+1}{2+1} = \frac{z-3}{-1-3} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4} \text{ — рівняння } M_1M_2;$$

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y+1}{2+1} = \frac{z-3}{1-3} \Rightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2} \text{ — рівняння } M_1M_3.$$

Звідси $\vec{S}_1 = \{-1;\ 3;-4\}, \vec{S}_2 = \{-5;\ 3;-2\}$ – напрямні вектори прямих M_1M_2 і M_1M_3. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right|} = \frac{(-1)(-5) + 3 \cdot 3 + (-4)(-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{5 + 9 + 8}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{38}} = \frac{22}{2\sqrt{247}} = \frac{11}{\sqrt{247}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{11}{\sqrt{247}} \approx \arccos 0{,}69991 \approx 45°30'.$$

Рівняння прямої, що проходить через точку M_3 паралельно прямій M_1M_2, буде пряма з напрямним вектором $\vec{S}_1$ прямої M_1M_2, тобто $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-4}$.

4.3 Пряма і площина у просторі

1. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

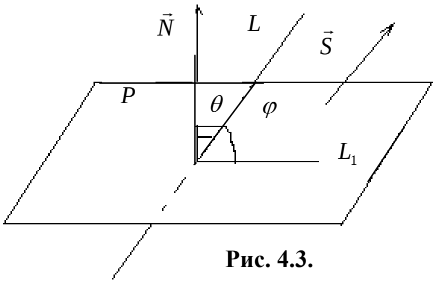


Рис. 4.3.

Нехай площина P і пряма L, що її перетинає (рис..4.3) задані своїми рівняннями $Ax+By+Cz+D=0$ і $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Відомо, що гострий кут φ між прямою L і площиною P є кут між прямою L і її проекцією L_1 на площину P. Позначимо через θ гострий кут між нормальним вектором $\vec{N} = \{A; B; C\}$ площини P і напрямним вектором $\vec{S} = \{m; n; p\}$ прямої L. Оскільки $\varphi + \theta = 90°$, то $\varphi = 90° - \theta$, тому $\sin\varphi = \sin(90° - \theta) = \cos\theta$. Якщо $\theta > 90°$, тоді $\sin\varphi = -\cos\theta$, або $\sin\varphi = |\cos\theta|$ в будь якому випадку. Але $\cos\theta = \frac{\left|\vec{N}\right| \cdot \left|\vec{S}\right|}{\left|\vec{N}\right| \cdot \left|\vec{S}\right|}$, тому кут між прямою і площиною визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{\left|\vec{N}\right| \cdot \left|\vec{S}\right|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{4.12}$$

Якщо пряма L паралельна площині P, тоді вектори $\vec{N}$ і $\vec{S}$ перпендикулярні, тобто $\vec{N} \cdot \vec{S} = 0$, або

$$Am + Bn + Cp = 0, \tag{4.13}$$

що визначає *умову паралельності прямої і площини*.

Якщо ж пряма L перпендикулярна до площини P, то вектори $\vec{N}$ і $\vec{S}$ паралельні і має місце співвідношення

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}, \tag{4.14}$$

що є *умовою перпендикулярності прямої і площини*.

2. Точка перетину прямої і площини.

Щоб знайти точку перетину прямої і площини, потрібно параметричні рівняння прямої (4.7) підставити в загальне рівняння площини (4.1) і розв'язати його відносно невідомого параметра t. Знайдене значення $t=t_0$ потрібно підставити в (4.7). Одержані значення x_0, y_0, z_0 є координатами точки перетину прямої і площини.

Приклад. Знайти точку перетину площини $3x-5y+6z+8=0$ з прямою, що проходить через точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(-2;3;5)$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2 за формулою (4.8) і запишемо його в параметричній формі

$$\frac{x-3}{-2-3}=\frac{y+1}{3+1}=\frac{z-2}{5-2}\Rightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{3}=t.$$

Звідси $\frac{x-3}{-5}=t;\ \frac{y+1}{4}=t;\ \frac{z-2}{3}=t$, або $x=-5t+3;\ y=4t-1;\ z=3t+2$ – параметричні рівняння M_1M_2. Підставимо ці значення x,y,z в рівняння площини і розв'яжемо його відносно параметра t.

$3(-5t+3)-5(4t-1)+6(3t+2)+8=0;$

$-15t+9-20t+5+18t+12+8=0 \Rightarrow -17t+34=0 \Rightarrow t=2.$

Підставимо $t=2$ у параметричні рівняння M_1M_2.

$x=-5\cdot2+3=-7;\ y=4\cdot2-1=7;\ z=3\cdot2+2=8.$

Отже, пряма M_1M_2 перетинає площину у точці $M_0(-7;7;8)$.

Приклад. Задано координати вершини піраміди *ABCD:* $A(2;4;-3)$; $B(-1;0;3)$; $C(1;-1;3)$; $D(2;1;3)$. Знайти:

1) довжину ребра *AB;*
2) кут між ребрами AB і AD
3) рівняння площини ABC
4) кут між ребром AD і гранню ABC
5) площу грані ABC
6) об"єм піраміди
7) рівняння прямої AB
8) рівняння висоти, опущеної із вершини D на грань ABC
9) відстань від вершини D до гарні ABC

Розв'язання

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$, які будуть використані в обчисленнях.

$\overrightarrow{AB}=\{-3;-4;6\}$; $\overrightarrow{AC}=\{-1;-5;6\}$; $\overrightarrow{AD}=\{0;-3;6\}$. Тоді:

1) довжина ребра обчислюється за формулою (3.4), тобто

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{9+16+36}=\sqrt{61};\ \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1+25+36}=\sqrt{62};\ \left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45};$$

2) кут між ребрами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ обчислюється за формулою (3.12). Отже:

$$\cos\varphi=\frac{AB\cdot AD}{|AB|\cdot|AD|}=\frac{(-3)\cdot0+(-4)(-3)+6\cdot6}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{45}}=\frac{12+36}{3\sqrt{305}}=\frac{48}{3\sqrt{305}}=\frac{16}{\sqrt{305}},$$

а звідси $\varphi=\arccos\frac{16}{\sqrt{305}}$.

3) рівняння площини ABC знайдемо згідно з (4.3), як рівняння площини, що проходить через три точки A, B, C, або три компланарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AM}=\{x-2;y-4;z+3\}$; де M(x, y, z)– біжуча точка площини ABC. Отже,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -1-2 & 0-4 & 3+3 \\ 1-2 & -1-4 & 3+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -3 & -4 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$ =(x-2)(-24+30)-(y-4)(-18+6)+

+(z+3)(15-4)=6x-12+12y-48+11z+33=6x+12y+11z-27=0 - рівняння площини ABC;

4) кут між ребром $\overrightarrow{AD}$ і гранню ABC визначається за формулою (4.12), в якій $\vec{N}=\{6;12;11\}$ – нормальний вектор площини ABC, а $\vec{S}=\overrightarrow{AD}$. Отже,

$$\sin\varphi = \frac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\vec{N}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{6\cdot 0+(-3)\cdot 12+6\cdot 11}{\sqrt{36+144+121}\cdot\sqrt{45}} = \frac{30}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{301}} = \frac{10}{\sqrt{1505}} = 0{,}25777,$$

$$\varphi = \arcsin\frac{10}{\sqrt{1505}} \approx \arcsin 025777 \approx 14°57';$$

5) площа грані ABC обчислюється за формулою (3.17) через векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто згідно (3.16) через довжину вектора $\vec{N}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+144+121} = \frac{1}{2}\sqrt{301} \text{ кв.од.;}$$

6) об'єм піраміди DABC обчислюємо за формулами (3.19) і (3.21)

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & -4 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(90+18-54-24) = \frac{1}{6}\cdot 30 = 5 \text{ куб.од.;}$$

7) рівняння прямої AB знаходимо згідно з формулою (4.8) як рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B, отже:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-4}{0-4} = \frac{z+3}{3+3} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+3}{6};$$

8) канонічне рівняння пучка прямих що проходять через точку D згідно з (4.6) матимуть вигляд

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

Із цього пучка прямих виділимо ту, яка буде перпендикулярна до площини ABC. Умова перпендикулярності прямої і площини -- це умова паралельності напрямного вектора прямої $\vec{S}=\{m,n,p\}$ і нормального вектора $\vec{N}=\{6;12;11\}$ площини ABC. Отже, згідно з (4.14)

$\frac{6}{m}=\frac{12}{n}=\frac{11}{p}$, або m=6, n=12, p=11. Тоді $\frac{x-2}{6}=\frac{y-1}{12}=\frac{z-3}{11}$ – буде рівняння висоти, опущеної із вершини D на грань ABC;

9) відстань від точки D до грані ABC знаходиться за формулою (4.5)

$$d = \frac{|2\cdot 6+1\cdot 12+3\cdot 11-27|}{\sqrt{301}} = \frac{|12+12+33-27|}{\sqrt{301}} = \frac{30}{\sqrt{301}}.$$

5. Елементи математичного аналізу

5.1. Вступ до математичного аналізу

Поняття функції і функціональної залежності

Основними поняттями математичного аналізу є поняття функції та функціональної залежності. Ці поняття пов‘язані із змінними величинами, які можуть бути як незалежними, яким надаються певні допустимі значення, так і залежними, що повністю визначаються незалежними величинами. Надалі будемо позначати незалежну змінну буквою *x* і називати її аргументом, а залежну змінну буквою *y* і називати її функцією.

Означення. Змінна величина *y* називається функцією змінної величини *x*, якщо кожному допустимому значенню величини *x* за певним правилом або законом ставиться у відповідність одне або декілька цілком певних значень величини *y*.

Той факт, що *y* є функція від *x*, позначається так:

$$y = f(x) \tag{5.1}$$

Множина X тих значень аргументу *x*, при яких функція $y = f(x)$ визначена або існує, називається областю визначення функції (ОВФ).

Множиною X можуть бути: інтервал $(a, b) = \{x | a < x < b\}$; відрізок $[a,\ b] = \{x | a \le x \le b\}$; напівінтервали $[a,\ b) = \{x | a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \le b\}$; нескінченні інтервали $(-\infty, a) = \{x | -\infty < x < a\}$, $(b, \infty) = \{x | b < x < \infty\}$, $(-\infty, \infty) = \{x | -\infty < x < \infty\}$.

Функція називається заданою явно, якщо її права частина не містить залежної змінної, наприклад: $y = \sin 2x + x^2$.

Означення границі функції. Способи обчислення границі функції.

Сформулюємо деякі поняття, які будуть надалі використані.

Околом точки x_0 називається будь-який інтервал (α, β), що містить точку x_0, тобто $\alpha < x_0 < \beta$.

δ - околом точки x_0 називається множина тих значень x, для яких справедлива нерівність $|x - x_0| < \delta$, тобто, звідси випливає, що δ - окіл точки x_0 є інтервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ із центром у точці x_0 і радіусом $\delta > 0$.

Точка x_0 називається граничною точкою або точкою згущення числової множини $X = \{x\}$, якщо в будь-якому її околі містяться відмінні від x_0 значення x із X. Сама точка згущення при цьому може належати X або ні.

Нехай в області X з граничною точкою x_0 задана деяка функція $f(x)$. Нас буде цікавити поведінка цієї функції при наближенні x до x_0, тобто $x \to x_0$.

Означення. Число А називається границею функції $f(x)$ при x, прямуючому до x_0 ($x \to x_0$), якщо функція визначена в деякому околі точки x_0 (за винятком, можливо, самої точки x_0) і якщо для будь-якого як завгодно малого наперед визначеного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$ (в загальному випадку залежне від ε), що для всіх x, що входять в область визначення функції (за винятком x_0) і таких, що задовольняють умові $|\ x - x_0\ | < \delta$, має місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Для знаходження границь функції нам знадобляться наступні означення та теореми:

1.Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

1.1 Функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

1.2 Функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

1.3 Функція $f(x)$ називається обмеженою при $x \to x_0$, якщо існує таке додатнє число А, що для всіх значень x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $|f(x)| \le A$.

1.4 Добуток обмеженої при $x \to x_0$ функції на нескінченно малу при $x \to x_0$ функцією є функція нескінченно мала при $x \to x_0$

1.5 Якщо $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно малі при $x \to x_0$, то їх сума також буде нескінченно малою при $x \to x_0$

1.6 Якщо $f(x)$ є функція обмежена при $x \to x_0$, а $g(x)$– нескінченно велика при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$

1.7 Якщо $f(x)$ є функція обмежена при $x \to x_0$, а $g(x)$– нескінченно мала при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$

1.8 Якщо $f(x)$ є функція нескінченно велика при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ є функція нескінченно мала (при $x \to x_0$). Якщо ж $f(x)$ є функція нескінченно мала при $x \to x_0$ і $f(x_0) \ne 0$ при $x \ne x_0$, то $\frac{1}{f(x_0)}$ є функція нескінченно велика при $x \to x_0$

2. *Арифметичні дії над границями.*

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, де A і B скінченні числа, то

2.1 $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$(Границя алгебраїчної суми скінченного числа функції дорівнює сумі границь цих функцій).

2.2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$ (Границя добутку скінченного числа функції дорівнює добуткові границь цих функцій)

2.3 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ $(B \ne 0)$ (Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, за умови, що границя дільника не дорівнює 0).

Сталу можна виносити за знак границі.

3. *Перша важлива границя*: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Друга важлива границя: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Розкриття невизначеностей.

При дослідженні границь $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ можуть трапитись такі випадки:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Незважаючи на те, що границі обох функцій відомі, сказати щось певне про границю їх відношення, не знаючи за яким законом ці функції змінюються, не можна. Для того, щоб охарактеризувати цю границю, вважають, що коли $f(x)\to\infty$ і $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$ або $f(x)\to 0$ і $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляє відповідно невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ або $\dfrac{0}{0}$. Крім того невизначеності можуть бути виду $\infty-\infty$, та $0\cdot\infty$. Обидві ці невизначеності зводяться до двох попередніх, тому ми розглянемо лише питання дослідження виразу $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, враховуючи закони зміни функцій $f(x)$ і $g(x)$. Таке дослідження називається розкриттям невизначеності і полягає воно у знаходженні відповідної границі цього виразу. Як це робити, покажемо на прикладах.

Приклад 1.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+2x-1}{5+8x+4x^2}$.

Коли $x\to\infty$, то досліджуваний вираз представляє собою невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Для того ж, щоб застосувати теорему про границю частки, необхідно, щоб і знаменник, і чисельник мали скінченну границю і при цьому границя знаменника не дорівнювала б нулеві. В даному випадку ця теорема не може бути застосована , оскільки при $x\to\infty$ як чисельник, так і знаменник прямують до ∞ . Таким чином, ми маємо відношення двох нескінченно великих функцій. Для розкриття невизначенності перетворимо функції так, щоб можна було застосувати теорему про границі. Для цього чисельник та знаменник поділимо на найбільшу степінь х (в даному випадку x^2). Тоді ми отримаємо:

$$\frac{8x^2+2x-1}{5+8x+4x^2}=\frac{8+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x}+4}.$$

Тепер при відшуканні границі отриманого виразу можна застосувати теорему про границю частки, оскільки і знаменник, і чисельник мають скінченні границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(8+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\text{(за теоремою про границю суми функцій)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}8+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=8+0-0=8,$$

(оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, а границя сталої є сама стала).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x}+4\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x}+\lim_{x\to\infty}4=0+0+4=4$$

Остаточно ми отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+2x-1}{5+8x+4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x}+4}=\text{(за теоремою про границю частки)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(8+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x}+4\right)}=\text{(за теоремою про границю суми)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}8+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}4}=$$

$$=\frac{8+0-0}{0+0+4}=2.$$

Приклад 2.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x-8}{3x^3-2x^2+11}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{3-\frac{2}{x}+\frac{11}{x^3}}=$

(чисельник та знаменник поділили на x^3)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11}{x^3}}=\frac{0+0-0}{3-0+0}=0$$

Приклад 3.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

При $x\to 0$ і чисельник , і знаменник прямують до нуля:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}-2\right)=\left(\sqrt{4}-2\right)=0$ (замість x підставляємо значення, до якого він прямує),

$\lim\limits_{x\to 0}x=0$

і ми отримуємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити її, перенесемо ірраціональність з чисельника в знаменник. Для цього чисельник і знаменник домножимо на $\sqrt{4+x}+2$:

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$$

тепер замість x ставимо 0 – те значення, до якого він прямує .

Тоді отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

Приклад 4.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-x-2}$.

Як і в попередньому прикладі, при $x\to 2$ і чисельник , і знаменник прямують до нуля:

$\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-8\right)=\left(8-8\right)=0$;

$\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x-2\right)=4-2-2=0$;

отже, ми знов маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. При розкритті цієї невизначенності ми будемо спиратись на те, що при відшуканні границі $f(x)$ при $x\to a$ за означенням не вимагається, щоб значення $x=a$ входило в область визначення функції. Це дає нам можливість поділити чисельник і знаменник на $x-a$.

Для цього чисельник x^3-8 розкриваємо як різницю кубів двох чисел: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Знаменник також розкладаємо на множники. Для цього прирівнюємо його до 0 і знаходимо корені: $x^2-x-2=0$; $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}$;

$x_1=-1$; $x_2=2$; звідки $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

Тоді $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}=$ (підставляємо $x=2$)

$=\dfrac{12}{3}=4$

Приклад 5.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Зауважимо, що при визначенні границі тригонометричної функції можна незалежну змінну замінити її граничним значенням, якщо воно належить області існування функції.

Так, $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, але $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx$ не існує, оскільки йому не можна приписати конкретного числового значення.

Скориставшись зауваженням, підставимо замість x його граничне значення. Ми отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x}{\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x}=\frac{\sin 2\cdot 0}{\sin 3\cdot 0}$$

тобто маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Скористаємось для розкриття цієї невизначеності першою важливою границею $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$. Для цього поділимо і помножимо чисельник на 2х, а знаменник – на 3х. Тоді ми отримаємо: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}\cdot\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=$ (скорочуємо дріб $\dfrac{2x}{3x}$ на х і виносимо сталу за знак границі) $=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{2}{3}\dfrac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}}$

$$\begin{pmatrix}\textit{Зроблено}\quad\textit{заміну}\\ 2x=y, x\to 0\Rightarrow y\to 0\\ 3x=z, x\to 0\Rightarrow z\to 0\end{pmatrix}$$

Застосувавши тепер до чисельника і знаменника першу важливу границю, ми прийдемо до такого виразу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{\lim\limits_{я\to 0}\frac{\sin z}{z}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

Приклад 6.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

В цьому прикладі основа степеня $\dfrac{x+3}{x-2}\to 1$ при $x\to\infty$, а показник степеня $(2x+1)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$, тобто має місце невизначеність виду 1^{∞}. Для розкриття цієї невизначеності слід скористатися другою важливою границею

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Іноді дуже корисними можуть бути наслідки з цієї границі

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}\ (k\neq 0) \quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{-1} \tag{5.2}$$

та представлення її в загальному вигляді:

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e \tag{5.3}$$

Для того, щоб звести шукану границю до виду (5.3), скористаємося стандартним способом виділення в основі степеня одиниці:

$$\frac{x+3}{x-2}=\frac{x-2+2+3}{x-2}=\frac{(x-2)+5}{x-2}=1+\frac{5}{x-2}.$$

Тепер, щоб отримати границю виду (5.3), потрібно піднести $\left(1+\dfrac{5}{x-2}\right)$ до степеня $(x-2)$ і виконати необхідні перетворення. В результаті одержимо:

$$\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{2x+1}=\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{x-2}\cdot 2x+1}=\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x-2}\right]^{\frac{2x+1}{x-2}}.$$

Остаточно, виходячи із (5.2) і (5.3) та теореми про границю степеня, одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x-2}\right]^{\frac{2x+1}{x-2}}=e^{5\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-2}}=e^{5\cdot 2}=e^{10}$$

Цю границю можна відшукати і іншим способом. Поділимо чисельник і знаменник основи шуканої границі на *x*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{2x+1}{x}}}{\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{2x+1}{x}}}=\frac{e^{3\cdot\lim\frac{2x+1}{x}}}{e^{-2\cdot\lim\frac{2x+1}{x}}}=\frac{e^{3\cdot 2}}{e^{-2\cdot 2}}=\frac{e^{6}}{e^{-4}}=e^{10}$$

або

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{2\left(\frac{5}{\alpha}+2\right)+1}=l\ \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{10}(1+\alpha)^{5}=e^{10}.$$

$$\begin{bmatrix} \text{Зроблено заміну} \\ \dfrac{5}{x-2}=\alpha \Rightarrow x=\dfrac{5}{\alpha}+2 \\ \text{якщо } x\to\infty,\ \text{то}\,\alpha\to 0 \end{bmatrix}.$$

Невизначеність $0\cdot\infty$, що випливає із умов $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$, або $f(x)\to\infty$, $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$, на основі твердження (1.8) зводиться до невизначеностей $\dfrac{\infty}{\infty}$ або $\dfrac{0}{0}$.

Аналогічно невизначеність виду $\infty - \infty$, що випливає із співвідношення $f(x) - g(x)$, якщо $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, за допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

5.2. Похідна функції. Основні правила диференціювання

Неперервність функції

Означення. Приростом деякої змінної величини називається різниця поміж наступним і попереднім значеннями цієї змінної.

Приріст незалежної змінної (аргументу) позначається Δx, а приріст функції - Δy. Таким чином $x + \Delta x$ - прирощене значення аргументу, а $y + \Delta y$ - прирощене значення функції.

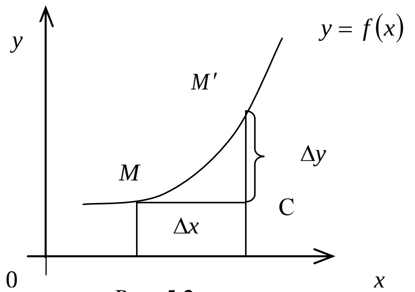


Рис. 5.2

Якщо при деякому x (Рис. 5.2) $\Delta x \to 0$ і при цьому точка $M' \to M$, а $\Delta y \to 0$, то кажуть, що функція $y = f(x)$при даному значенні x є неперервною.

Означення Функція $y = f(x)$, що визначена на множині X, називається неперервною при $x \to x_1$ (або в точці $x = x_1$), якщо функція визначена при $x = x_1$ $(x_1 \in X)$ і приріст функції Δy у точці x_1 прямує до нуля, коли приріст аргументу $\Delta x_1 = x - x_1$ прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \Delta y_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \left[f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1) \right] = 0.$$

Означення Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_1$, якщо $f(x)$ визначена при $x = x_1$ і має місце рівність

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Означення Функція $y = f(x)$ називається неперервною на деякій множині X, якщо вона визначена і неперервна в будь-якій точці $x \in X$, тобто для будь-якого $x \in X$ справедлива рівність

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) - f(x) \right] = 0.$$

Точки, в яких порушується неперервність функції, називаються точками розриву цієї функції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на проміжку X. Візьмемо деяку точку $x \in X$. Надамо значенню x приріст $\Delta x \neq 0$ (що не виводить його за границі X), тоді функція y отримає приріст $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Означення Похідною функції $y = f(x)$називається границя (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту незалежної змінної, коли приріст незалежної змінної прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$ Позначення похідної: y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y = f(x)$ в будь-якій точці $x \in X$ дорівнює кутовому коефіцієнту (тангенсу кута нахилу) дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ в даній точці x. (Рис. 5.3)

Економічний зміст похідної: похідна об‘єму виробленої продукції по часу $u'(t_0)$ є продуктивність праці в момент t_0.

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x скінчену похідну, то кажуть, що вона в цій точці диференційовна.

Нехай функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ диференційовані в т. х. Тоді справедливі наступні рівності:

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

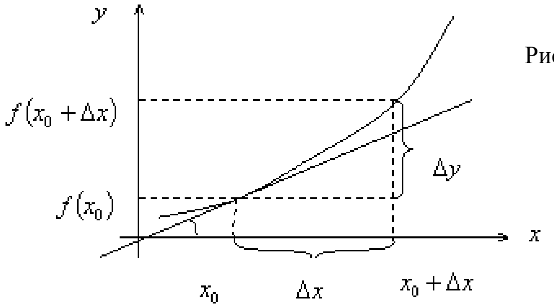


Рис. 5.3

Таблиця похідних

№ з/п	Функція y	Похідна y'
1	c	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	a^x	$a^x \ln a$
7	e^x	e^x
8	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
9	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
10	$\sin x$	$\cos x$
11	$\cos x$	$-\sin x$
12	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
13	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
14	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
17	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Теорема (про похідну від складної функції).

Нехай функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці x_0 похідну $u' = \varphi'(x_0)$ і нехай функція $y = f(u)$ має у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$ похідну $y'_u = f'_u(u_0)$. Тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ в даній точці x_0 також буде мати похідну, що дорівнює добуткові похідних функцій $f(u)$ і $\varphi(x)$:

$$[f(\varphi(x))]' = f'_u(\varphi(x_0))\varphi'_x(x_0)$$

або, коротше, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

(Підкреслимо, що символ $f'_u(\varphi(x_0))$ означає похідну функції $f(u)$ по її аргументу u (а не по x)). З урахуванням цієї теореми формули таблиці похідних приймуть дещо інший вигляд. Так, наприклад $(u^n)' = nu^{n-1}u'_x$, а $(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$ і т.д.

Приклад 1.

$y = \sin^2 x$

В цьому прикладі роль функції $u(x)$ відіграє $\sin x$: $u = \sin x$, $y = u^2$; тоді $y' = (u^2)' = 2u \cdot u'_x = (u'_x$ означає, що похідну тепер треба брати від функції u

по змінній x$) = 2u \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x$.

Приклад 2.

$y = \sin x^2$

Тепер роль u буде відігравати x^2 (аргумент функції $\sin x$).

$y = \sin u(x)$; $y' = (\sin u)'_x = (\sin u)'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$

Треба відмітити, що “глибина вкладення” (тобто кількість операцій взяття функції від функції) може бути довільною. Розглянемо це в наступному прикладі.

Приклад 3.

Знайти похідну функції

$y = \sin tg\sqrt{3x} + e^{\arccos \ln x}$.

Це похідна від суми двох складних функцій

$u = \sin tg\sqrt{3x}$ та $v = e^{\arccos \ln x}$.

Нагадаємо, що похідна від суми двох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій:

$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

Розглянемо ці похідні окремо:

$u = \sin tg\sqrt{3x}$.

Щоб побудувати цю функцію u, ми повинні знайти спочатку такі функції:

$\varphi = 3x$

$\psi = \sqrt{\varphi} = \sqrt{3x}$

$\omega = tg\,\psi = tg\sqrt{\varphi} = tg\sqrt{3x}$

$u = \sin\omega = \sin tg\,\psi = \sin tg\sqrt{\varphi} = \sin tg\sqrt{3x}$

Таким чином ми маємо три проміжні функції.

Щоб знайти похідну від u по x, нам треба йти тепер від u до φ:

$u' = \left(\sin\left(tg\sqrt{3x}\right)\right)' = \sin(\omega(x))'_x =$

$= (\sin\omega(x))'_{\omega}\,\omega'_x = \cos\omega(x)\cdot\omega'_x =$

(підставляємо замість ω її значення)

$= \cos(tg\,\psi)\cdot(tg\,\psi)'_{\psi}\cdot\psi'_x = \cos(tg\,\psi)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\psi}\cdot\psi'_x =$

(підставляємо значення ψ)

$= \cos\left(tg\sqrt{\varphi}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{\varphi}}\cdot\left(\sqrt{\varphi}\right)'_x = \cos\left(tg\sqrt{\varphi}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{\varphi}}\cdot\left(\sqrt{\varphi}\right)'_{\varphi}\cdot\varphi'_x =$

$= \cos tg\sqrt{3x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{3x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3$

Якщо ж відкинути всі ці проміжні функції, то операцію знаходження похідної можна було б записати набагато компактніше:

$\left(\sin\left(tg\sqrt{3x}\right)\right)' = \cos\left(tg\sqrt{3x}\right)\cdot\left(tg\sqrt{3x}\right)' = \cos\left(tg\sqrt{3x}\right)\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{3x}}\cdot\left(\sqrt{3x}\right)' =$

$= \cos tg\sqrt{3x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{3x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot(3x)' = \cos\left(tg\sqrt{3x}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{3x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3$

Тепер візьмемо похідну від другого доданку:

$v = e^{\arccos\ln x}$

Користуючись набутим досвідом, ми одразу можемо написати:

$\left(e^{\arccos\ln x}\right)' = e^{\arccos\ln x}\cdot(\arccos\ln x)' = e^{\arccos\ln x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)\cdot(\ln x)' = e^{\arccos\ln x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)\cdot\dfrac{1}{x}$

Остаточно ми отримаємо:

$$y' = \frac{3\cos\left(tg\sqrt{3x}\right)}{2\sqrt{3x}\cos^2\sqrt{3x}} - \frac{e^{\arccos\ln x}}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

Приклад 4.

Знайти похідну функції

$y = \sqrt{3 + arctg\,3x}\cdot 8^{\sin 5x}$

Це похідна від добутку двох функцій:

$u = \sqrt{3 + arctg\,2x}$ та $v = 8^{\sin 5x}$.

Для її знаходження треба скористатись формулою

$(uv)' = u'v + uv'$.

Знайдемо похідні від u та v:

$u' = \left(\sqrt{3 + arctg^3 x}\right)'$ (беремо похідну від корня) $= \dfrac{1}{2\sqrt{3 + arctg^3 x}}\left(arctg^3 x\right)' =$

(тепер похідну від степеня $arctgx$) $= \dfrac{1}{2\sqrt{3 + arctg^3 x}}\cdot 3arctg^2 x(arctgx)' =$ (залишилося взяти похідну від $arctgx$) $= \dfrac{1}{2\sqrt{3 + arctg^3 x}}\cdot 3arctg^2 x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$.

$v' = \left(8^{\sin 5x}\right)' =$ (беремо як похідну від показникової функції $y = a^u$)

$= 8^{\sin 5x}\ln 8\cdot(\sin 5x)' = 8^{\sin 5x}\ln 8\cdot\cos 5x\cdot(5x)' = 8^{\sin 5x}\ln 8\cdot\cos 5x\cdot 5 = 5\ln 8\cdot 8^{\sin 5x}\cdot\cos 5x$

Підставляючи ці похідні в формулу похідної добутку, остаточно одержимо:

$$y'=\left(\sqrt{3+arctg^3x}\cdot 8^{\sin 5x}\right)'=\frac{3arctg^2x}{2(1+x^2)\sqrt{3+arctg^3x}}\cdot 8^{\sin 5x}+\sqrt{3+arctg^3x}\cdot 5\ln 8\cdot 8^{\sin 5x}\cdot\cos 5x$$

Приклад 5.

Знайти похідну функції

$$y=\frac{\ln\cos 8x}{arctg\sqrt{x}}$$

Це похідна від частки двох функцій $y=\frac{u}{v}$, де $u=\ln\cos 8x$, $v=arctg\sqrt{x}$ і вона знаходиться за формулою:

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Шукаємо похідні u та v:

$u'=(\ln\cos 8x)'=$ (беремо похідну від $\ln u$) $=\frac{1}{\cos 8x}(\cos 8x)'=$ (беремо похідну від $\cos u$) $=-\frac{1}{\cos 8x}\sin 8x(8x)'=-\frac{8\sin 8x}{\cos 8x}=-8tg8x$.

$v'=\left(arctg\sqrt{x}\right)'=$ (беремо похідну від $arctgu$) $=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Підставляючи знайдені похідні у формулу, одержимо:

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{-8tg8x\cdot arctg\sqrt{x}-\ln\cos 8x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}{arctg^2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{-16\sqrt{x}(1+x)tg8x\cdot arctg\sqrt{x}-\ln\cos 8x}{2\sqrt{x}(1+x)arctg^2\sqrt{x}}.$$

Приклад 6.

Знайти похідну від функції $y=x^{\sqrt{x}}$.

Така функція носить назву показниково-степенева і в загальному випадку записується так: $y=[u(x)]^{v(x)}$.

Щоб знайти похідну від показниково-степеневої функції, її треба попередньо прологарифмувати:

$$\ln y=v(x)\ln u(x).$$

Тепер беремо похідні від лівої та правої частини, зважуючи, що y є складна функція x:

$$(\ln y)'=(v(x)\ln u(x))';$$

$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\ln u+v(\ln u)'$ або

$$y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right).$$

Підставляючи замість y його значення, остаточно одержимо:

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right).$$

Повернемося до нашого прикладу:

$y = x^{\sqrt{x}}$, $\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$ або $\ln y = \sqrt{x}\ln x$.

Беремо похідні: $(\ln y)' = (\sqrt{x}\ln x)'$

$\frac{1}{y}y' = (\sqrt{x})'\ln x + \sqrt{x}(\ln x)'$;

$y' = y\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$.

Скорочуючи і підставляючи замість y його значення, одержуємо відповідь:

$y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

$y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right)$.

Приклад 7.

Знайти похідну від неявно заданої функції

$x^2 y^3 - \sin xy + 5 = 0$

Нагадаємо, що функція задана неявно, якщо функціональна залежність не розв‘язана відносно залежної змінної.

$F(x,\ y) = 0$.

Щоб в такому випадку знайти похідну y'_x, не розв‘язуючи це рівняння відносно y, треба взяти похідну від функції F рівняння по x, і до неї додати похідну від F по y, помножену на y'_x, тобто

$F'_x(x,\ y) + F'_y(x,\ y)\cdot y'_x = 0$.

З отриманого виразу знаходимо y'_x:

$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Для нашого прикладу ми отримаємо: (спочатку беремо похідну по x):

$2xy^3 - \cos xy \cdot (xy)'_x$ (тепер додаємо похідну по y, домножуючи її на y'_x)

$+ x^2 \cdot 3y^2 \cdot y'_x - \cos xy \cdot (xy)'_y \cdot y'_x = 0$.

$2xy^3 - y\cos xy + 3x^2y^2y'_x - x\cos xy \cdot y'_x = 0$

Звідси знаходимо y'_x:

$y'_x = -\frac{2xy^3 - y\cos xy}{3x^2y^2 - x\cos xy}$.

Для знаходження похідної можна одразу скористатись отриманою формулою

$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Для цього треба спочатку від $F(x,\ y)$ взяти похідну по x, вважаючи y сталою, тобто $F'_x(x,\ y) = 2xy^3 - \cos(x,\ y)\cdot y$, а потім взяти похідну по y, вважаючи сталою змінну x:

$F'_y(x,\ y) = 3x^2y^2 - x\sin(x,\ y)$.

Залишилося поділити одержані похідні:

$$y'_x = -\frac{2xy^3 - y\cos(x,\ y)}{3x^2y^2 - x\sin(x,\ y)}.$$

5.3. Загальна схема дослідження функції і побудови графіка

Зростання та спадання функції. Екстремум функції.

Для дослідження функцій нам знадобляться наступні означення та теореми.

Означення. Функція *f(x)* називається зростаючою на проміжку Х, якщо для будь-яких x_1 , x_2 з цього проміжку із умови $x_1 \langle\ x_2$ випливає $f(x_1) \langle\ f(x_2)$ і спадною, якщо із умови $x_1 \langle\ x_2$ випливає $f(x_1) \rangle\ f(x_2)$.

Теорема 1.(достатня умова зростання функції). Якщо похідна диференційовної функції додатня всередині деякого проміжку *X*, то функція на цьому проміжку зростає.

Теорема 2. (достатня умова спадання функції). Якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині деякого проміжку *X*, то функція на цьому проміжку спадає.

Означення. Точка x_0 називається точкою максимуму функції $f(x)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується умова $f(x) \le f(x_0)$.

Означення. Точка x_0 називається точкою мінімуму функції $f(x)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується умова $f(x) \ge f(x_0)$.

Максимум та мінімум об'єднують єдиним терміном - екстремум.

Необхідна умова екстремуму.

Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала екстремум в точці x_0, необхідно, щоб

її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Точки, в яких виконується необхідна умова екстремуму, називаються критичними або стаціонарними. Підкреслимо, що ці точки повинні обов'язково входити в область визначення функції.

Важливо розуміти, що критична точка не обов'язково повинна бути точкою екстремуму. Щоб перевірити, чи є критична точка точкою екстремуму, потрібна перевірка достатніх умов.

Перша достатня умова екстремуму.

Якщо при переході через стаціонарну точку x_0 похідна $f'(x)$ диференційовної функції $y = f(x)$ змінює свій знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму, якщо знак $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то точка x_0 є точкою мінімуму, якщо ж знак похідної $f'(x)$ при переході через точку x_0 не змінюється, то в цій точці екстремуму нема.

Друга достатня умова екстремуму.

Якщо перша похідна двічі диференційованої функції $y = f(x)$ дорівнює нулю в точці x_0, а її друга похідна в цій точці додатня ($f''(x_0) > 0$), то x_0 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо ж $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимуму.

Схема дослідження функції на екстремум має такий вигляд:

Знаходимо першу похідну функції $f'(x)$ і розв’язуємо рівняння $f'(x) = 0$.
В інтервалах, на які корені цього рівняння ділять область визначення функції, знаходимо знаки першої похідної. Якщо $f'(x) > 0$, то функція в цьому інтервалі зростає, якщо $f'(x) < 0$ - функція спадає. Корені рівняння $f'(x) = 0$, при переході через які перша похідна змінює знак, є точками екстремуму.

Опуклість та угнутість функції. Точки перегину.

Означення Функція $y = f(x)$ називається угнутою (опуклою вниз) на проміжку *X*, якщо для будь-яких двох значень $x_1,\ x_2 \in X$ з цього проміжку виконується нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Відмітимо, що графік функції, угнутої в точці x_0, лежить над дотичною, проведеною до графіка в точці x_0.

Означення Функція $y = f(x)$ називається опуклою (опуклою вгору) на проміжку *X*, якщо для будь-яких двох значень $x_1,\ x_2 \in X$ з цього проміжку виконується нерівність: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Графік функції, опуклої в точці x_0, лежить під дотичною, проведеною до графіка функції в точці x_0.

Означення Точка графіка диференційованої функції $y = f(x)$, при переході через яку графік змінює опуклість на угнутість (або навпаки), називається точкою перегину.

Теорема 3. Якщо друга похідна функції $y = f(x)$ додатна (від'ємна) в інтервалі $(a\ ,b\ )$ то графік цієї функції є угнутим (опуклим) на цьому інтервалі.

Теорема 4. Якщо друга похідна $f''(x)$ функції $y = f(x)$ обертається в точці x_0 в нуль і при переході через цю точку змінює знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ графіка цієї функції є точкою перегину.

Наведені теореми дозволяють досліджувати функцію на опуклість та угнутість. Схема дослідження має такий вигляд:

- знаходимо другу похідну функції $f''(x)$ і розв'язуємо рівняння $f''(x) = 0$, шукаючи стаціонарні точки другого роду. Функція може мати перегин тільки в цих точках, тобто там, де друга похідна обертається в нуль, прямує до нескінченності або взагалі не існує.
- в інтервалах, на які корені рівняння $f''(x) = 0$ ділять область визначення функції, знаходимо знаки другої похідної. В інтервалах, де $f''(x) > 0$, графік функції угнутий (опуклий вниз),а де $f''(x) < 0$ графік функції опуклий (опуклий вверх).

Корені рівняння $f''(x)=0$, при переході через які друга похідна змінює знак, є точками перегину графіка функції.

Асимптоти графіка функції.

При побудові графіка функції дуже важливе значення має те, як буде вести себе функція при $x \to \pm\infty$, а також випадки необмеженого зростання за абсолютною величиною значень $f(x)$ в скінченій області визначення. Дослідження цих випадків приводить до так званих асимптот, тобто прямих, до яких графік функції необмежено наближується.

Означення Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма лінія, до якої необмежено наближується прямуюча у нескінченність гілка графіка функції хоча б і перетинаючи цю пряму нескінчену кількість разів.

Асимптоти можуть бути трьох видів: горизонтальні, вертикальні, похилі.

Означення Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ або $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ дорівнює ∞ (точка $x = a$ є точкою розриву)

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ задана для всіх x>M (x<M), де M>0, то кажуть, що пряма

$y = kx + b$

є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$ ($x \to -\infty$), якщо функцію можна представити у вигляді

$f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Теорема 5. Для того, щоб графік функції $y = f(x)$ мав при $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) похилу асимптоту $y = kx + b$, необхідно і достатньо, щоб існували скінчені границі

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[f(x) - kx\right] = b.$$

При $k=0$ отримуємо горизонтальну асимптоту .

На основі проведених вище досліджень функції загальну схему дослідження функції рекомендується вести наступній послідовності:

- Знайти область визначення функції. Точки розриву.
- Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність (тобто перевірити графік на симетричність).
- Знайти корені функції (точки перетину графіка функції з осями координат). Цим ми розбиваємо область визначення функції на інтервали знакосталості $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.
- Дослідити функцію на наявність асимптот.
- Дослідити функцію на екстремум. Знайти інтервали зростання і спадання функції.
- Знайти точки перегину і дослідити функцію на опуклість.
- Побудувати графік функції.

Для прикладу проведемо повне дослідження функції $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ і побудуємо її графік, користуючись наведеною схемою:

Знаходимо область визначення функції. Для цього прирівнюємо до нуля знаменник.

$x^2 - 1 = 0$; $x = \pm\sqrt{1}$; $x = -1$; $x = 1$.

Область визначення: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

Досліджуємо функцію на парність-непарність.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1}; \quad f(-x) = -f(x)$$

- функція непарна, графік функції симетричний відносно початку координат.

Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат; для цього прирівнюємо функцію до нуля: $f(x) = 0$.

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Графік перетинає вісь OX тільки в одній точці $x = 0$.

Знаходимо інтервали знакосталості функції з урахуванням області визначення:

$x \in (-\infty; -1)$. Щоб знайти знак функції на цьому інтервалі, підставимо в функцію деяке значення x з цього інтервалі, наприклад $x = -2$.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{(-2)^2 - 1} = \frac{-8}{4 - 1} < 0$$

Таким чином, на інтервалі $(-\infty; -1)$ функція від'ємна.

Отформатировано: Английский (США)

$x \in (-1;\,0)$: $f(-0{,}5) = \dfrac{(-0{,}5)^3}{(-0{,}5)^2 - 1} = \dfrac{-0{,}125}{0{,}25-1} > 0$ функція додатна.

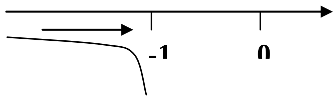
$x \in (0;\,1)$: $f(0{,}5) = \dfrac{(0{,}5)^3}{(0{,}5)^2 - 1} = \dfrac{0{,}125}{0{,}25-1} < 0$ функція від’ємна.

$x \in (1;\ \infty)$: $f(-2) = \dfrac{2^3}{2^2 - 1} = \dfrac{8}{4-1} > 0$ функція додатна.

Знаходимо точки розриву і перевіряємо наявність асимптот.

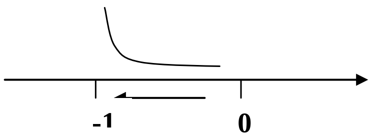
Точки розриву: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

$\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$



(x прямує до –1 зліва: $|x| > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0,\ x^3 < 0,\ \dfrac{x^3}{x^2-1} < 0$)

$\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$



(тепер x прямує до –1 справа: $|x| < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0,\ x^3 < 0,\ \dfrac{x^3}{x^2-1} > 0$)

Отже, $\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^3}{x^2-1} - +\infty$

Аналогічні дослідження проведемо для точки $x_2 = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$

Звідси випливає, що прямі $x = -1$ і $x = 1$ є вертикальними асимптотами.

Перевіряємо функцію на наявність похилих асимптот; для цього використовуємо теорему 5.

Шукаємо границю функції при $x \to \pm\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

тобто можливе існування похилої асимптоти, яка має вигляд $y = kx + b$.

$k_1 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = 1$; $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = 1$

Таким чином $k = k_1 = k_2 = 1$

$b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} \right) = 0$

$b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} \right) = 0$

Отже, існує похила двостороння асимптота і вона має рівняння

$y = 1 \cdot x + 0 = x$; або $y = x$.

Шукаємо інтервали зростання та спадання функції і її екстремуми, використовуючи для цього першу похідну. (Перевіряємо необхідну умову: якщо функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ локальний екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує).

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Тепер прирівнюючи першу похідну до нуля знаходимо стаціонарні точки, (точки підозрілі на екстремум):

$$\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2\left(x^2-3\right) = 0 \quad x_{1,2} = 0,\ x_3 = -\sqrt{3},\ x_4 = \sqrt{3}.$$

Нагадаємо, що стаціонарними є також точки, де похідна не існує. В нашому випадку це точки $x = -1$; $x = 1$ (але ці точки не входять в область визначення функції і дослідженню не підлягають). Стаціонарні точки, розбивають область визначення на інтервали зростання (спадання) функції:
$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$. В кожному з інтервалів визначаємо знак першої похідної, підставляючи у вираз першої похідної довільне значення аргументу з цього інтервалу.
Так, наприклад, для інтервалу $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ отримаємо

$f'(x) = \left.\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right|_{x=-2} = \frac{4(4-3)}{(4-1)^2} > 0$; похідна додатна, отже, функція зростає (якщо похідна від'ємна, функція спадає).

Враховуючи знаки першої похідної в інтервалах і обчислюючи значення функції в стаціонарних точках, складаємо зведену таблицю.

табл.1

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}, -1\right)$	$-1-0$	$-1+0$	$(-1, 0)$
$f'(x)$	$+$	0	—	$\nexists$	$\nexists$	—
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$

x	0	$(0, 1)$	$1-0$	$1+0$	$\left(1, \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	0	—	$\nexists$	$\nexists$	—	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

В цій таблиці значення $(-1-0)$ означає, що обчислюється значення функції зліва від точки $x = -1$; $(-1+0)$ означає, що обчислюється значення функції справа від точки $x = -1$; аналогічно для точок $(1-0)$ та $(1+0)$. Тепер використовуємо першу достатню умову екстремуму: якщо похідна при переході через стаціонарну точку змінює знак з + на - , то в даній точці $\left(x = -\sqrt{3}\right)$ є $\max$; якщо функція змінює знак з – на +, то в даній точці $\left(x = \sqrt{3}\right)$ є $\min$; якщо знак не змінюється, то екстремуму нема.

Відмітимо ще, що оскільки функція симетрична відносно початку координат, то достатньо було б розглянути тільки праву або ліву піввісі: $(-\infty, 0]$ або $[0, \infty)$.

Шукаємо точки перегину і інтервали опуклості та угнутості. При цьому користуємось наступним правилом: дуга графіка кривої $y = f(x)$ є опуклою на інтервалі (a, b), якщо в усіх точках цього інтервалу виконується нерівність $f''(x) < 0$, і є угнутою, якщо $f''(x) > 0$. Ще раз нагадаємо, що точки кривої, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x) \to \infty$, або друга похідна в яких зовсім не існує, називаються критичними або стаціонарними точками другого роду.

Точки перегину слід шукати тільки серед стаціонарних точок другого роду, при цьому перегин в т. x_0 буде тільки в тому випадку, коли друга похідна при переході через цю точку змінює свій знак.

Шукаємо стаціонарні точки. Для цього знаходимо другу похідну і шукаємо точки, в яких ця похідна обертається в нуль або не існує.

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2 \cdot 2x(x^2 - 1)(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 - 4x^5 + 12x^3 + 6x}{(x - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0; \ \ x_1 = 0;$$

крім того, друга похідна не існує в точках $x_2 = -1$ та $x_3 = +1$ (але ці точки не належать області визначення функції і дослідженню не підлягають).

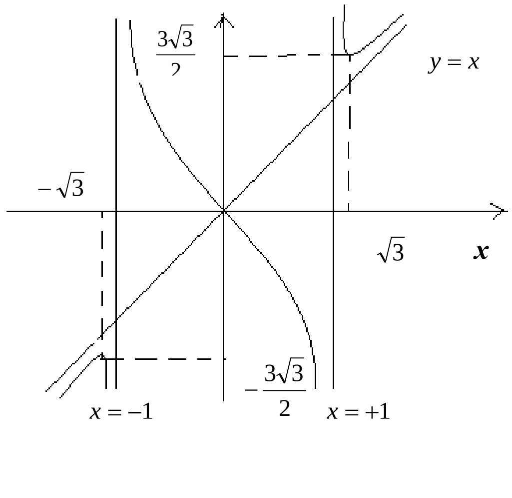
Таким чином, стаціонарною є точка $x = 0$. Вона разом з точками –1; +1 розділяє область визначення функції на інтервали $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, \infty)$.

Тепер, щоб з'ясувати, чи є визначена стаціонарна точка точкою перегину, треба визначити знак другої похідної зліва і справа від досліджуваної точки. Якщо ці знаки різні, то стаціонарна точка другого роду є точкою перегину; якщо ж знаки не змінюються, то в даній стаціонарній точці перегину нема.

Результати дослідження для зручності користування доцільно звести в таблицю.

табл.2

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	—	+	0	—	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	0	$\cap$	$\cup$



Із таблиці видно, що в кожному з інтервалів друга похідна скінчена і зберігає свій знак: у першому - , у другому +, у третьому - , в четвертому +. Це означає, що в інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(0; 1)$ графік функції опуклий, а в інтервалах $(-1, 0)$ та $(1; \infty)$ - угнутий. В точці $x = 0$ друга похідна дорівнює нулеві, і при переході з другого інтервала в третій вона змінює знак. Це означає, що точка $x = 0$ є точкою перегину досліджуваного графіка.

Побудову графіка функції починаємо із проведення асимптот. Провівши асимптоти, наносимо координати точок мінімуму, максимуму та перегину. Після цього, користуючись даними таблиць 1 та 2, будуємо графік функції.

Контрольні роботи

Вивчаючи курс вищої математики студент повинен виконати контрольне завдання №1 з наступних розділів:

Елементи вищої алгебри.
Елементи векторної алгебри.
Аналітична геометрія на площині і у просторі.
Елементи теорії границь.
Похідна і диференціал функції одної змінної.
Дослідження функцій за допомогою похідних.

При виконанні контрольної роботи студент повинен керуватися такими вказівками:

Контрольну роботу потрібно виконувати в окремому зошиті, на обкладинці якого вказується номер контрольної роботи, прізвище та ініціали студента, навчальний шифр (номер залікової книжки або студентського квитка), дата відсилання контрольної роботи до університету та адреса студента.

Розв‘язки задач та пояснення до них повинні бути докладними. У разі необхідності потрібно наводити графіки та рисунки.

Контрольна робота складається з 6 завдань. З кожного завдання треба виконати задачу, номер якої співпадає з номером варіанту.

Номер варіанта контрольної роботи визначається цифрами навчального шифру (номера залікової книжки) за таблицею.

Варіант	**Останні цифри номера залікової книжки**					
01	01	31	...	91	...	271
02	02	32	...	92	...	272
03	03	33	...	93	...	273
04	04	34	...	94	...	274
05	05	35	...	95	...	275
06	06	36	...	96	...	276
07	07	37	...	97	...	277
08	08	38	...	98	...	278
09	09	39	...	99	...	279
10	10	40	...	100	...	280
11	11	41	...	101	...	281
12	12	42	...	102	...	282
13	13	43	...	103	...	283
14	14	44	...	104	...	284
15	15	45	...	105	...	285
16	16	46	...	106	...	286
17	17	47	...	107	...	287
18	18	48	...	108	...	288
19	19	49	...	109	...	289
20	20	50	...	110	...	290
21	21	51	...	111	...	291
22	22	52	...	112	...	292
23	23	53	...	113	...	293
24	24	54	...	114	...	294
25	25	55	...	115	...	295
26	26	56	...	116	...	296
27	27	57	...	117	...	297
28	28	58	...	118	...	298
29	29	59	...	119	...	299
30	30	60	...	120	...	300

Контрольна робота №1

Елементи лінійної алгебри. Векторна алгебра і аналітична геометрія. Границі і похідні функцій. Дослідження функцій за допомогою похідних.

І. Задана система лінійних рівнянь. Розв‘язати її двома способами:

а) методом Крамера;

б) методом Гаусса**.**

1 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=3 \\ 5x_1+x_2+2x_3=2 \\ 3x_1-x_2+x_3=9 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=-6 \\ x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-4x_3=4 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=4 \\ 3x_1-2x_2+x_3=1 \\ 7x_1+3x_2+5x_3=-8 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-7 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x_1-4x_2-x_3=8 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=-4 \\ x_1-3x_2-7x_3=75 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x_1-7x_2+x_3=-8 \\ x_1+x_2+3x_3=2 \\ 2x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 3x_1-5x_2-x_3=-1 \\ 4x_1+x_2+2x_3=-3 \\ 2x_1-3x_2+x_3=5 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=-3 \\ x_1+2x_2-3x_3=2 \\ 5x_1-x_2+7x_3=8 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 4x_1+x_2-5x_3=-2 \\ 2x_1-3x_2+7x_3=4 \\ 3x_1+x_2-2x_3=7 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=-2 \\ x_1-5x_2+4x_3=5 \\ 7x_1+3x_2-4x_3=8 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=5 \\ x_1-2x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=7 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 5x_1-x_2-3x_3=9 \\ 2x_1+x_2+2x_3=7 \\ x_1-5x_2-3x_3=-2 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3=1 \\ 7x_1+3x_2-x_3=2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 3x_1-x_2+5x_3=-3 \\ 2x_1-3x_2-x_3=4 \\ 5x_1+2x_2+3x_3=7 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x_1+5x_2-3x_3=-8 \\ 4x_1-3x_2+3x_3=7 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=9 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 7x_1-8x_2+2x_3=10 \\ 3x_1+4x_2-x_3=-7 \\ 2x_1-3x_2+5x_3=0 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x_1-3x_2-3x_3=-10 \\ 7x_1+5x_2-4x_3=5 \\ 3x_1-2x_2+9x_3=-11 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5 \\ x_1+4x_2+7x_3=8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 3x_1+7x_2+7x_3=3 \\ 5x_1+3x_2-4x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-5 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1-3x_2-5x_3=-9 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4 \\ 4x_1-3x_2+7x_3=1 \end{cases}$

21
$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=0\\2x_1-5x_2+7x_3=4\\4x_1+3x_2+2x_3=7\end{cases}$$

22
$$\begin{cases}2x_1-5x_2+7x_3=9\\3x_1+2x_2-5x_3=4\\4x_1-3x_2+x_3=3\end{cases}$$

23
$$\begin{cases}2x_1-2x_2-5x_3=-10\\3x_1+x_2-3x_3=5\\4x_1-3x_2+5x_3=7\end{cases}$$

24
$$\begin{cases}2x_1+5x_2-3x_3=-8\\4x_1-3x_2+3x_3=7\\3x_1+2x_2+4x_3=9\end{cases}$$

25
$$\begin{cases}2x_1+7x_2+9x_3=-8\\7x_1+3x_2-5x_3=9\\3x_1-x_2-2x_3=-5\end{cases}$$

26
$$\begin{cases}2x_1-3x_2-3x_3=-10\\7x_1+5x_2-4x_3=5\\3x_1-2x_2+9x_3=-11\end{cases}$$

27
$$\begin{cases}3x_1-x_2-2x_3=-10\\4x_1+3x_2+5x_3=7\\2x_1-x_2+3x_3=-4\end{cases}$$

28
$$\begin{cases}3x_1+7x_2-9x_3=10\\2x_1-3x_2+x_3=0\\5x_1-4x_2-3x_3=7\end{cases}$$

29
$$\begin{cases}5x_1-3x_2-3x_3=-4\\x_1+2x_2-x_3=7\\2x_1-5x_2+4x_3=5\end{cases}$$

30
$$\begin{cases}5x_1+5x_2-7x_3=13\\2x_1-3x_2-4x_3=-5\\3x_1+2x_2+5x_3=7\end{cases}$$

II Задано вершини трикутника ABC. Знайти: a) рівняння сторони BC трикутника; b)рівняння медіани BM і висоти AD; c) довжину висоти AD.

1. A(3; 1) B(7; -3) C(2; -4)
2. A(8; -2) B(4; 1) C(-1; 3)
3. A(2; 2) B(6; 3) C(1; 5)
4. A(-6; 4) B(3; -2) C(-2; 7)
5. A(1; -1) B(5; 2) C(2; 4)
6. A(5; 1) B(6; -2) C(-1; 0)
7. A(1; 0) B(4; -1) C(7; 3)
8. A(0; 7) B(-3; -1) C(1; 2)
9. A(-1; 5) B(2; 3) C(-2; 4)
10. A(-1; 5) B(0; -2) C(5; 3)
11. A(-2; -1) B(3; 4) C(2; 0)
12. A(1; 1) B(0; -5) C(5; 3)
13. A(3; -2) B(1; 1) C(-1; 5)
14. A(1; -5) B(-3; -2) C(2; 3)
15. A(-4; 3) B(5; -1) C(1; -3)
16. A(-2; 6) B(1; 7) C(8; 1)
17. A(1; 7) B(-2; 2) C(3; 1)
18. A(2; -7) B(-1; 4) C(0; -5)
19. A(-2; -3) B(1; 5) C(4; 7)
20. A(-4; 5) B(-1; -3) C(1; 6)
21. A(3; -4) B(1; 3) C(-1; 6)
22. A(0; 1) B(2; -5) C(-1; -6)
23. A(0; 5) B(-4; -1) C(3; 2)
24. A(7; -3) B(-1; 6) C(3; 5)
25. A(3; -1) B(2; 8) C(-4; 5)
26. A(-4; -7) B(-5; 4) C(1; -8)
27. A(-5; -4) B(-1; 5) C(6; 1)
28. A(5; 7) B(10; 1) C(-1; -8)
29. A(-2; 4) B(-5; -1) C(2; -7)
30. A(7; 0) B(-4; 8) C(-1; -2)

III Задано координати вершини піраміди ABCD. Знайти: 1) довжину ребра AB; 2) кут між ребрами AD і AB; 3) рівняння площини ABC; 4) кут між ребром AD і гранню ABC; 5) площу грані ABC; 6) об‘єм піраміди; 7) рівняння прямої AB; 8) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC.

1. A (7; 7; 3)   B (6; -5; 8)   C (-3; 5; 8)   D (8; 4; -1)
2. A (5; 6; 8)   B (6; 10; 7)   C (8; 3; -2)   D (3; -4; 7)
3. A (7; -2; 2)   B (-5; 7; 7)   C (3; 2; 5)   D (1; 1; -5)
4. A (6; 5; 5)   B (-1; -3; 4)   C (2; 5; -8)   D (-2; 3; 4)
5. A (1; 8; 2)   B (-5; -2; -6)   C (-2; 4; 4)   D (1; 1; -3)
6. A (-3; 4; 5)   B (4; -3; 1)   C (3; -3; 0)   D (2; -3; -4)
7. A (1; 7; 2)   B (2; -5; 7)   C (0; 5; -3)   D (4; -3; 2)
8. A (4; -5; 5)   B (5; 2; 6)   C (-1; -3; -4)   D (-2; 5; 7)
9. A (3; -4; 5)   B (8; 7; 4)   C (5; 9; -3)   D (-4; -3; -2)
10. A (1; 8; 2)   B (-5; 7; 4)   C (3; -2; 6)   D (-4; -3; -2)
11. A (1; 0; 2)   B (2; -1; 3)   C (-1; 7; 2)   D (-3; 4; 8)
12. A (0; 1; 1)   B (-1; 2; 3)   C (1; 5; 0)   D (2; 4; -8)
13. A (1; 2; -1)   B (3; 5; -2)   C (2; 0; -1)   D (-3; 0; -1)
14. A (-2; 5; 3)   B (10; -4; 1)   C (5; 3; 1)   D (4; 2; -1)
15. A (4; 2; -1)   B (2; 0; 2)   C (5; 3; 1)   D (-3; -7; 8)
16. A (3; 1; 2)   B (5; -7; 9)   C (2; 0; -1)   D (-3; 2; 7)
17. A (1; 1; 2)   B (-5; 1; -1)   C (3; -2; 4)   D (-1; -4; 5)
18. A (7; -2; -3)   B (-4; 2; 1)   C (2; 4; 6)   D (3; 2; -5)
19. A (2; 3; -4)   B (5; 7; 9)   C (2; -2; 4)   D (9; 1; 2)
20. A (5; -2; 0)   B (4; 3; -2)   C (-1; -2; -3)   D (5; -3; 2)
21. A (0; 2; -3)   B (-1; 5; 7)   C (2; -3; 4)   D (4; 5; -2)
22. A (-2; 3; 4)   B (1; 1; 1)   C (4; -3; 2)   D (0; 5; -6)
23. A (1; -5; 4)   B (0; 6; -3)   C (3; 2; 1)   D (2; 7; -3)
24. A (2; 4; -3)   B (-4; 2; 3)   C (0; 2; -5)   D (1; 5; -7)
25. A (1; -1; 0)   B (2; 5; 7)   C (-7; 1; 2)   D (4; 3; -3)
26. A (3; 1; -2)   B (5; -4; 0)   C (3; 4; -2)   D (1; -5; 3)
27. A (5; -3; 0)   B (0; -1; 3)   C (7; 2; 1)   D (3; -2; 4)
28. A (7; 1; 1)   B (2; 0; -1)   C (1; -2; 5)   D (3; 4; 5)
29. A (3; 5; 1)   B (2; -4; 3)   C (4; -3; 2)   D (-1; 7; 3)
30. A (4; -3; 2)   B (1; 1; -1)   C (0; 2; -3)   D (2; 2; -4)

IV Знайти границі

1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x+4x^2}{3+5x-8x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-2}\right)^{x+1}$
	$\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^3+125}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{4x+9}-3}$	
2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x-2}{5x^3-6x+12}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{2x-1}$
	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^3+27}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{x^2}$	
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$
	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$	
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-49x+1}{x^2+4}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$
	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$	
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+12x-5}{18-47x^2+x^3}$	$\lim\limits_{x\to0} x\operatorname{ctg} x$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{x}$
	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	
6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-142x^2-1}{7+12x^2-x^3}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{x}$
	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{8+x}-\sqrt{8}}{x}$	
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+11x-2}{4+75x-x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$
	$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$	
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-6}{6x^2-12x+1}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$
	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^3+27}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$	
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+7}{4x^3-7x+1}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{3x}$
	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$	

10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-75x^2+12}{x^4+11x-7}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{3}x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$
	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$	
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-18x+11}{2x^4+75x^3-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos8x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+2}\right)^{3x}$
	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	
12	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^4-27x^2+17}{5x-x^4}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x-\operatorname{arctg}x}{5x+\arcsin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$
	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to-7}\frac{\sqrt{11+x}-2}{x+7}$	
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x^3+4x}{2+8x^3-4x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin7x}{2\operatorname{tg}3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$
	$\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2-x-30}{x^3+125}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{1-\sqrt{1+x+x^2}}$	
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+5x-x^3}{x^2-12x+5x^3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}16x-\sin6x}{x^3+\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{2x}\right)^{2x}$
	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^3-8}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}}$	
15	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3}{2x^5+3x^3-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin4x-\operatorname{arctg}2x}{x^2+\sin2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-6}{x}\right)^{2x+1}$
	$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	
16	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-9}{4x^2+13x+2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin5x-\operatorname{arctg}3x}{x+\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x}\right)^{2x-1}$
	$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{x^3-64}$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}{3-\sqrt{2x+1}}$	
17	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11+x^2-7x^3}{x^2+3x^3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-\cos2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x}\right)^{3x+2}$
	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-6x+8}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{x^2-2x^3}$	
18	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-x^3}{3x^2-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin7x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{2-x}\right)^{3x}$
	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-4x}$	$\lim\limits_{x\to8}\frac{x-\sqrt{8x}}{8-x}$	

19	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-2}{x^3-2x+5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin 9x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+3}\right)^{2x+3}$
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^3+2x^2-3x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$	
20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3-x^3}{4x^2-7}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg}3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{x^2}$
	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-6x-7}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	
21	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+12x-4}{2x^3-7}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2\operatorname{tg}3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-2}\right)^{2x^3}$
	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-7x+6}$	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$	
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-3x^2+6x-1}{x^2-17x+2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{arctg}x}{\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{4x-2}$
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$	
23	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-181x^2+5}{9x^3+x-8}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^{3x+1}$
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-4x+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{3x^2}$	
24	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-7x^4-8x^2+1}{11+13x^4-2x^5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2}{x^3+1}\right)^{3x^3}$
	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^2+6x+8}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$	
25	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+8-81x^3}{3x^2-5x^4}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 4x}{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x-3}\right)^{7x}$
	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+6x-16}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x^2}-1}{2x^2+x^3}$	
26	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+25x^2-81}{x+8-12x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{3x}$
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-12x+5}{5x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	
27	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81x^2+17}{1+15x+81x^2-x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{arctg}2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x-3}\right)^{2x+1}$
	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$	

28	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+8x^3-x^4}{17+27x-2x^4}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x-3}\right)^{2x-1}$
	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-1}$	
29	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-75x^3-12x^2+5}{1+x^2+4x^3+x^4}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+3}\right)^{3x+1}$
	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x^2-3x}$	
30	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-17x^2+x}{1+81x^4-x^5}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+12}{x-4}\right)^{3x+2}$
	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}$	

V Знайти похідні функцій

1	$y=\sqrt{16-x^5}+\dfrac{7}{\sqrt[7]{x^4}}-\dfrac{4}{x}$	$y=\operatorname{tg} x\ln(x+\sin x)$	$y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$
	$y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{\sin x}}$	$\sin xy=x^2y^3+2x-y$	
2	$y=\sqrt[3]{21+x^7}-\dfrac{7}{\sqrt[6]{x^5}}+\dfrac{2}{x}$	$y=2^{x^2}\operatorname{arctg} 3x$	$y=\dfrac{\sin^3 x}{\ln\operatorname{tg} x^3}$
	$y=(\arcsin x)^{\sqrt{x}}$	$y=3x-\ell^{x^2y}+6$	
3	$y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{\sqrt[5]{x^3}}+\sqrt[4]{x^2+x-11}$	$y=e^{\operatorname{tg} x}\arcsin\sqrt{x}$	$y=\dfrac{\sin(x^2+2)}{7^{-(x^2+3)}}$
	$y=(\arcsin x)^{\ln x}$	$\sin\left(x^2+y\right)=\dfrac{x}{y^2}$	
4	$y=\sqrt[5]{x^2+x-1}+\sin 2x$	$y=\sqrt{\operatorname{tg} x+2}\,\ln(\sin 4x)$	$y=\dfrac{x^3-\sin^3 x}{\arcsin 4x}$
	$y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$	$2x^2+xy^2=2y^3$	
5	$y=\dfrac{7}{\sqrt[6]{x^5}}+\dfrac{8}{x}-\cos^2 x$	$y=\sin 7x\sqrt{\operatorname{arctg} x^2-3}$	$y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$
	$y=x^{\ln x}$	$x^2-y+a\sin xy=1$	
6	$y=\sqrt{x^6+x^3-5}+\operatorname{tg} 7x$	$y=7^{3x}\operatorname{ctg}^3 5x$	$y=\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\cos x^2}$
	$y=\left(x+x^2\right)^x$	$x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=R^{\frac{3}{2}}$	
7	$y=\sqrt{\operatorname{tg} x+2}-\arcsin 4x$	$y=\sqrt[3]{1-3x^2}\operatorname{ctg} 4x$	$y=\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$
	$y=(\cos x)^{\ln x}$	$y=\sin\dfrac{3}{x}+x^2y$	

8	$y=\sqrt[3]{\sin 7x+4}+\operatorname{ctg}4x$	$y=\sqrt[3]{21+x}\sin^2 3x$	$y=\frac{\ln(tgx-1)}{tgx^3-2}$
	$y=(\sin x)^{\ln x}$	$\sqrt{xy}+x\sqrt{y}=5y^2$	
9	$y=\arcsin\sqrt{\operatorname{tg}x}+\frac{4}{x}$	$y=\sqrt{16-x^5}\cos^2\frac{x}{7}$	$y=\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\arcsin 4x}$
	$y=(\sin 2x)^{\cos 3x}$	$xy^2+y\ln x=1$	
10	$y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\sin^2 x$	$y=\sqrt[5]{x^2+x-1}\operatorname{tg}7x$	$y=\frac{\sin^2 x}{\ln(x^2+\cos x)}$
	$y=(\arcsin x)^{\cos x}$	$x^2y+\ln xy+y^2=4$	
11	$y=\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}+\sin^3 4x$	$y=\sqrt[3]{21-x^7}\sin^3 4x$	$y=\frac{7^{3x}}{\operatorname{ctg}^3\sin x}$
	$y=(arctgx)^{\sin x}$	$x\ln y+y\ln x=x^3$	
12	$y=\sqrt{\arcsin x^2+8}-\operatorname{tg}(\ln x)$	$y=e^{(x^2-1)}\cos^4 3x$	$y=\frac{\sqrt[3]{21+x^7}}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$
	$y=x^{\cos x}$	$x^2y+e^{xy}+y\cos x=5$	
13	$y=\sin^3(\ln x)-\sqrt{e^x+\operatorname{tg}x}$	$y=\sqrt[3]{x-\cos^2 4xe^{-x^2}}$	$y=\frac{\sqrt[5]{x^2+x-1}}{\arcsin^2\sqrt{x}}$
	$y=x^{\operatorname{tg}x}$	$2^x+3^y=5^{x+y}$	
14	$y=\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+e^{\sin 4x}$	$y=7^{(x^2+1)}*ctg^3 3x$	$y=\frac{\cos^2 x-1}{arctgx^2}$
	$y=x^{\arcsin x}$	$2x^2y+x\sqrt{y}-\sin xy^3$	
15	$y=\operatorname{tg}^4(\sin 4x)+\sqrt{\ln(\sin x)+1}$	$y=e^{\arcsin 4x}\sqrt{x^3+x-1}$	$y=\frac{\sqrt{x+\cos^2 4x}}{2^{\ln x}}$
	$y=x^{\arccos x}$	$x+e^{x^2y^3}-y\ln x=5$	
16	$y=\arcsin^2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[7]{x^5}}$	$y=8^{x^5}\ln\operatorname{tg}\sqrt{x}$	$y=\frac{\ell^{\arcsin 4x}}{\cos^3\sqrt{x}}$
	$y=x^{ars\operatorname{tg}x}$	$7^x+15^y=3^{x+y}$	
17	$y=e^{\arcsin\sqrt{x}}+\ln^2(\operatorname{tg}4x)$	$y=3^{\sin x}\arcsin^3\sqrt{x}$	$y=\frac{\cos x^4}{\ln\sin\sqrt{x}}$
	$y=(\sin x)^{\arcsin x}$	$x^2y+\sin xy^2=8$	
18	$y=5^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}+\sin\ln x$	$\ell^{\cos x}*arctg^2\sqrt{x}$	$y=\frac{\sin^3 5x}{\arccos 4x}$
	$y=(\sin x)^{\operatorname{arctg}x}$	$xy^2+\cos x^3y=5$	
19	$y=e^{ar\operatorname{tg}\sqrt{x}}+\sin\operatorname{tg}3x$	$y=\sqrt{(x-2)^6}\ln^3 x$	$y=\frac{3^{\cos 4x}}{\operatorname{arctg}\ln x}$
	$y=(\arcsin x)^{\sin x}$	$xy^3+xe^y=x^3$	
20	$y=6^{\arcsin\sqrt{x}}+\operatorname{tg}\ln x$	$y=\sin^2 x*\sqrt{\ln\sin x+1}$	$y=\frac{tgx^4}{\ln\cos 5x}$
	$y=(\arcsin x)^{\cos x}$	$e^{x+y}+x^2y^3=7$	

21	$y=\ln^2 x+\sqrt{(x-4)^5}$	$y=e^{atc\sin\sqrt{x}}\ln\sin x$	$y=\dfrac{\arcsin tgx}{\cos x^3}$
	$y=\left(\arcsin x\right)^{\operatorname{tg}x}$	$\sin xy+x^3y^2=3$	
22	$y=\lg(x+\sin x+2)+\operatorname{tg}^2 3x$	$y=6^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\ln\sin 4x$	$y=\dfrac{e^{\arccos\sqrt{x}}}{\sqrt{\ln\sin x+1}}$
	$y=\left(\arcsin x\right)^{\operatorname{arctg}x}$	$x^3y^5+\cos x^2y=4$	
23	$y=2^{\ln\sin x}+\arg\operatorname{tg}7x^3$	$y=\sqrt{(x-4)^5}e^{\sin^2 x}$	$y=\dfrac{3^{arctgx^2}}{\cos^4 7x}$
	$y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\sin x}$	$e^{2x+3y}+\sin xy=4$	
24	$y=e^{-\sin 4x}+\arccos^2 7x$	$y=2^{\ln\sin x}\cos^2 x\ln x$	$y=\dfrac{\sqrt{(x-4)^7}}{arctg^3\sqrt{x}}$
	$y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\cos x}$	$e^{3y}+\sin x^3y^2=5x$	
25	$y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^5}}+\arcsin^2 5x$	$y=e^{\arcsin x^2}\ln tgx$	$y=\dfrac{2^{\ln\cos x}}{\sin^2\ln x}$
	$y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\operatorname{tg}x}$	$2^{x+1}+5^{y-2}=7^{x-y}$	
26	$y=\ln^2\cos 3x+\operatorname{arctg}x^2$	$y=e^{-\sin 3x}\arccos^2 3x$	$y=\dfrac{\arcsin x^2}{\sin^3 x}$
	$y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\arcsin x}$	$3^{x-2}+4^{y+3}=6^{2x+3y}$	
27	$y=\ln\sin^3 x+\sqrt{e^{2x}+\operatorname{ctg}x}$	$y=tg^2x\cdot\sin\sqrt{x}$	$y=\dfrac{e^{-\cos 3x}}{\arcsin^2 4x}$
	$y=(\arcsin x)^{arctgx}$	$x\sin y-ye^x=4$	
28	$y=\lg\sin 4x+\arcsin^2 3x$	$y=\sqrt{x^3+\sin x}\,\operatorname{tg}(\sin 2x)$	$y=\dfrac{7^{\sin 3x}}{arctg\sqrt{x}}$
	$y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\operatorname{arctg}x}$	$x\cos y-ye^x=\sin x$	
29	$y=\sqrt{x^3+x-1}+6^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}$	$y=\ln(\sin 3x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	$y=\dfrac{\sqrt{x^3+\sin x}}{e^{tgx}}$
	$y=\left(\operatorname{tg}x\right)^{\sin x}$	$x\arcsin 3y-y^2\operatorname{arctg}\sqrt{x}=4$	
30	$y=e^{\operatorname{arctg}\sin x}2^{x^3}$	$y=\sqrt{x^{5-\cos 4x}}\ln(\operatorname{tg}3x)$	$y=\dfrac{\cos^2 7x}{5^{tgx}}$
	$y=\left(\operatorname{tg}x\right)^{\arcsin x}$	$y\operatorname{arctg}x^2-x^3\arccos y=8$	

VI Провести повне дослідження функції, побудувати її графік та знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої у точці M(x_0, y_0).

1	$y=\dfrac{x}{1-x^2};\quad x_0=0$	2	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2};\quad x_0=2$
3	$y=\dfrac{x^2-3x+20}{x-4};\quad x_0=1$	4	$y=\dfrac{2x+3}{x^2-1};\quad x_0=-1$
5	$y=\dfrac{x^2-3x+20}{x-5};\quad x_0=2$	6	$y=\dfrac{x^2-5x+3}{x+1};\quad x_0=2$

7	$y=\dfrac{x^2-3x+25}{x-6};\quad x_0=1$	8	$y=\dfrac{2x-1}{x^2-4};\quad x_0=1$
9	$y=\dfrac{x^2}{x^2-1};\quad x_0=2$	10	$y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1};\quad x_0=2$
11	$y=\dfrac{x^2-2x-15}{x-1};\quad x_0=2$	12	$y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1};\quad x_0=0$
13	$y=\dfrac{x^2+1}{x};\quad x_0=1$	14	$y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1};\quad x_0=2$
15	$y=\dfrac{x^3+1}{x^2};\quad x_0=2$	16	$y=\dfrac{x^2-3x-4}{x+2};\quad x_0=-1$
17	$y=\dfrac{x}{3-x^2};\quad x_0=1$	18	$y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1};\quad x_0=1$
19	$y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2};\quad x_0=1$	20	$y=\dfrac{x^2-3x-10}{x+1};\quad x_0=-2$
21	$y=\dfrac{x}{(x-1)^2};\quad x_0=-1$	22	$y=\dfrac{x^2-3x+11}{x-2};\quad x_0=-1$
23	$y=\dfrac{x^2+3x-10}{x+1};\quad x_0=1$	24	$y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2};\quad x_0=1$
25	$y=\dfrac{x^2+2x-15}{x+1};\quad x_0=1$	26	$y=\dfrac{x^2+3x-18}{x-2};\quad x_0=1$
27	$y=\dfrac{x^2+5x+4}{x-2};\quad x_0=1$	28	$y=\dfrac{x^2-x-2}{1+2x};\quad x_0=1$
29	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2};\quad x_0=0$	30	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2};\quad x_0=2$

Рекомендована література

Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика.– К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.

Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А.Путко, М.Н. Тришин, М.Н. Фридман / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера – Москва: ЮНИТИ, 2000. – 471 с.

Математика в экономике: Учебно-методическое пособие для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера / ВЗФЭИ. – Москва: Финстатинформ, 1999. – 94 с.

Н.М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. – Москва: Просвещение, 1988. – 324 с.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – Москва: Наука, 1964. – 360 с.

Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. / Под ред. проф. Н.В.Ефимова / - Москва: Наука, 1964. – 254 с.

Сборник задач по математике для втузов. Ч І. Линейная алгебра и основы математического анализа. Учеб. пособие для втузов. / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича /. – Москва: Наука, 1986. – 464 с.

Г.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1971. – 416 с.

Каплан И.А. Практические заняття по высшей математике. – Харьков: ХГУ, 1970. – 576 с.

В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики. – Москва: Наука, 1985. – 575 с.

В.П. Дубовик, І.І. Юрик. Вища математика. – Київ: Вища школа, 1993. – 648 с.