

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»

Е.Ю. Лискина

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ

Учебное пособие

Рязань 2009

УДК 330.4
ББК 65в30я73
Л63

Печатается по решению редакционно-издательского совета государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» в соответствии с планом изданий на 2009 год.

Научный редактор: *М.Т. Терёхин*, д-р физ.-мат. наук, проф.
(РГУ им. С.А. Есенина)

Рецензенты: *В.В. Теняев*, канд. физ.-мат. наук, доц. (АПУ ФСИН России)
С.А. Нелюхин, канд. физ.-мат. наук, доц. (РГРТУ)
В.В. Абрамов, канд. физ.-мат. наук, доц.
(РГУ им. С.А. Есенина)

Лискина Е.Ю.

Л63 Экономико-математические модели : учебное пособие / Е.Ю. Лискина ; Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина. – Рязань, 2009. – 110 с.

ISBN 978–5–88006–600–1

Учебное пособие разработано и составлено для студентов, обучающихся по специальностям 080107 «Налоги и налогообложение» и 080103 «Национальная экономика», в соответствии с существующими стандартами по математике. В нем приводятся теоретические сведения об экономико-математических моделях, изучаемых в курсе математики, примеры решения задач с их использованием, тексты задач для организации самостоятельной работы студентов и контроля приобретенных знаний. Пособие может быть полезно студентам, обучающимся по экономическим (080504 «Государственное и муниципальное управление», 080105 «Финансы и кредит», 080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит») и экономико-математическим специальностям.

Ключевые слова: *математика, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, экономико-математические модели, балансовые модели, динамические модели, оптимизация.*

УДК 330.4
ББК 65в30я73

© Лискина Е.Ю., 2009
© Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет
имени С.А. Есенина», 2009
ISBN 978–5–88006–600–1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Часть I. Экономико-математические модели	5
Введение	5
Тема 1. Матричные балансовые модели макроэкономики	9
Тема 2. Моделирование простейших финансовых операций	16
Тема 3. Однофакторные оптимизационные модели микроэкономики	38
Тема 4. Моделирование распределения доходов среди групп населения	43
Тема 5. Моделирование рыночного равновесия	46
Тема 6. Моделирование поведения потребителя	54
Тема 7. Моделирование поведения производителя	78
Тема 8. Динамические модели макроэкономики	90
Часть II. Задачи для организации самостоятельной и исследовательской работы студентов	100
Список рекомендуемой литературы	109

Предисловие

В последнее время существенно расширилось применение математических методов в экономическом и финансовом анализе, принятии решений, управлении производством. В связи с этим возросла роль математических дисциплин для подготовки специалистов по экономическим специальностям. *Цели* настоящего учебного пособия заключаются, во-первых, в ознакомлении студентов с основными экономико-математическими моделями; во-вторых, в обучении студентов проведению расчетов и экономического анализа с использованием этих моделей.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для организации практических занятий, контрольных, самостоятельных и исследовательских работ по математике студентов, обучающихся по специальностям 080107 «Налоги и налогообложение» и 080103 «Национальная экономика». Его содержательную часть составляют теоретические сведения о применении математических методов в экономических исследованиях и при построении математических моделей, подробные решения типовых задач по теме «Экономико-математические модели», задания для самостоятельных и исследовательских работ. Настоящее учебное пособие является дополнением к практикуму по математике, составленному автором для студентов специальности 080107 «Налоги и налогообложение».

Пособие состоит из двух частей. Первая часть разделена на темы, в каждой из которых рассмотрена какая-либо экономико-математическая модель и примеры проведения анализа и расчетов с ее использованием. В начале каждой темы приведен перечень математических понятий, владение которыми необходимо при изучении данной экономико-математической модели. В конце каждой темы даны ссылки на учебники и учебные пособия, содержащие теоретический материал по данной теме. Вторая часть содержит типовые задания для организации самостоятельной и исследовательской работы студентов.

Учебное пособие может быть использовано при организации аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов всех экономических и экономико-математических специальностей.

Часть I

Экономико-математические модели

Введение

Математической моделью называют приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Математические модели представляют собой мощный аппарат исследования и прогнозирования различных явлений. Использование математических моделей в экономических исследованиях позволяет:

- 1) выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов;
- 2) из четко сформулированных исходных данных и соотношений математическими методами получить выводы, соответствующие изучаемому объекту в той же мере, что и предположения;
- 3) математические методы (особенно статистические) позволяют получать новые знания об объекте, оценивать форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующих имеющимся наблюдениям;
- 4) точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и выводы.

Моделирование любых явлений и процессов реального мира включает в себя следующие структурные элементы:

- 1) объект исследования (явление, процесс);
- 2) исследователь (субъект исследования);
- 3) модель, осуществляющую отношение между исследователем и познаваемым объектом.

Процесс моделирования состоит из четырех этапов.

На **первом этапе** исследователь конструирует (или находит среди известных) другой объект – модель исходного объекта, отображающую лишь некоторые наиболее существенные черты последнего. Другими словами, любая модель заменяет оригинал в строго ограниченном смысле. Отсюда следует, что для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные его стороны или характеризующих его с разной степенью детализации.

На **втором этапе** процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Основным вопросом на этом этапе является решение так называемой **прямой задачи**, то есть получение в результате анализа модели выходных данных для их дальнейшего сопоставления с результатами наблюдений изучаемого явления или процесса. Одной из форм такого исследования является проведение модельных экспериментов с помощью ЭВМ, при которых целенаправленно изменяются условия функционирования модели и систематизируются результаты ее поведения. Конечным результатом этапа является совокупность знаний (теоретических следствий) о модели в отношении выделенных существенных сторон объекта-оригинала.

Третий этап заключается в выяснении того, удовлетворяет ли принятая модель **критерию практики**, то есть согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями (знаниями) о модели в предлагаемой точности наблюдений. Если модель не удовлетворяет критерию практики, то ее нельзя

применять к исследованию объекта-оригинала, требуется коррекция модели. Если модель удовлетворяет критерию практики, то далее осуществляется перенос знаний с модели на оригинал и переход с языка модели на язык оригинала. Полученные знания используются как для построения обобщающей теории реального объекта, так и для управления им.

Четвертый этап состоит в последующем анализе и модернизации модели в связи с накоплением новых данных об изучаемом объекте.

Построение экономико-математических моделей обладает рядом существенных особенностей, связанных как с объектом моделирования, так и с применением аппарата и средств математического моделирования. Рассмотрим основные особенности этапов построения экономико-математических моделей.

Первый этап подразделяется на два шага. На **первом шаге** происходит постановка экономической проблемы и ее качественный анализ. Для этого требуется:

- 1) сформулировать сущность проблемы, принимаемые предпосылки и допущения;
- 2) выделить важнейшие черты и свойства моделируемого объекта, процесса или явления;
- 3) изучить структуру и взаимосвязь элементов моделируемого объекта, процесса или явления;
- 4) сформулировать гипотезы, объясняющие поведение и развитие моделируемого объекта, процесса или явления.

На **втором шаге** происходит **формализация** изучаемой экономической проблемы, то есть запись в виде, пригодном для изучения ее математическими методами, а именно:

- 1) определяется тип модели, изучается возможность ее применения в данной задаче, то есть стремятся построить модель, относящуюся к хорошо изученному классу математических моделей, что может привести к некоторому упрощению исходных предпосылок, не искажающему основных черт моделируемого объекта; однако, возможна ситуация, когда формализация проблемы приводит к неизвестной ранее математической структуре;
- 2) уточняется перечень экзогенных и эндогенных параметров, форма связей (**экзогенными параметрами** называют величины, которые могут быть заданы вне модели или известны заранее; **эндогенными параметрами (переменными)** называют величины, которые не могут быть заданы извне и которые нужно определить в ходе расчетов по модели);
- 3) вводятся обозначения для экзогенных и эндогенных параметров;
- 4) взаимосвязи между эндогенными параметрами (переменными) записываются в виде математических зависимостей (уравнений, неравенств, функций и т.п.).

Второй этап построения экономико-математической модели подразделяется на три шага. На **первом шаге** проводится аналитическое исследование изучаемой модели, то есть математическими методами выявляются общие свойства модели и ее решений. В частности, решаются следующие задачи:

- 1) доказательство существования хотя бы одного решения сформулированной задачи;
- 2) определение количества решений;
- 3) отыскание способа найти все решения, структура множества решений;
- 4) диапазон изменения параметров модели и другие.

Второй шаг состоит в подготовке исходной информации. Для его реализации требуется:

- 1) выработать общие принципы отбора данных для использования в данной экономико-математической модели;
- 2) осуществить сбор данных;
- 3) провести первичную обработку собранных данных для использования в модели.

Третий шаг представляет собой численное решение моделируемой экономической проблемы. Он включает в себя:

- 1) разработку алгоритмов численного исследования и подготовку программ для ЭВМ;
- 2) непосредственное проведение расчетов (модельный эксперимент).

Численное решение существенно дополняет результаты аналитического исследования, а для многих моделей является единственно возможным способом исследования.

На **третьем этапе** решается вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели. Поэтому в первую очередь производятся **верификация** (проверка правильности структуры) и **валидация** (проверка соответствия данных, полученных на основе модели, реальному процессу) модели по тем свойствам, которые были выбраны в качестве существенных. В случае отрицательного ответа требуется вернуться на несколько этапов назад и уточнить или изменить модель. В случае положительного ответа полученные результаты интерпретируются с экономической точки зрения и используются для анализа и прогнозирования экономических явлений и процессов и управления ими.

Четвертый этап состоит в совершенствовании модели вследствие накопления новых наблюдений и дальнейшего развития теории.

Для перечисленных этапов экономико-математического моделирования характерны прямая и обратная взаимосвязи этапов. Прямая взаимосвязь этапов при построении экономико-математической модели заключается в последовательном переходе от этапа к этапу. Обратная взаимосвязь этапов состоит в возврате к предыдущим этапам при выполнении одного из промежуточных. Наиболее часто необходимость возврата к предыдущим этапам возникает:

- 1) при формализации модели, если выясняется, что исходная постановка задачи или слишком сложна или противоречива;
- 2) подготовке исходной информации, если выясняется, что необходимая информация или отсутствует или затраты на ее подготовку слишком велики;
- 3) анализе численных результатов, если выясняется, что полученные результаты не соответствуют реальному процессу.

Во всех перечисленных случаях требуется корректировка математической модели, а в некоторых случаях – уточнение постановки исходной задачи.

По своему определению любая экономико-математическая модель **не полна**, так как учитывает только наиболее существенные факторы функционирования реального экономического объекта. Влияние каждого из неучтенных факторов предполагается малым, но совокупность всех неучтенных факторов может определять существенное отклонение в поведении объекта. В этом случае также предполагается, что совокупность всех факторов, не учитываемых явно в экономико-математической модели, оказывает на объект относительно малое результирующее воздействие с точки зрения решаемой экономической проблемы.

Состав учитываемых в модели факторов, тип и структура экономико-математической модели могут быть уточнены в ходе совершенствования модели.

В настоящее время пока не создано единой системы классификации экономико-математических моделей. В табл. 1 приводится классификация по наиболее часто используемым признакам.

Таблица 1

Классификация экономико-математических моделей

№ п/п	Классификационный признак	Класс моделей	Комментарий
1.	Общее целевое назначение	Теоретико-аналитические	Используются при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов
		Прикладные	Применяются в решении конкретных экономических задач анализа, планирования и управления
2.	Степень объединения объектов моделирования	Макроэкономические	Отражают функционирование экономики как единого целого
		Микроэкономические	Отражают функционирование отдельных экономических объектов (предприятий, фирм и т.п.)
3.	Цель создания и применения	Балансовые	Выражают требование наличия ресурсов и их использования
		Трендовые	Отражают развитие экономической системы через тренд (длительную тенденцию) ее основных показателей
		Оптимизационные	Предназначены для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, потребления, распределения и т.п.
		Имитационные	Предназначены для использования в процессе компьютерной имитации изучаемых явлений и процессов
4.	Тип информации	Аналитические	Построены на априорной информации (на основе предположений, без проведения опыта)
		Идентифицируемые	Построены на апостериорной информации (на основе данных, полученных из опыта)
5.	Учет фактора времени	Статические	Все зависимости в модели отнесены к одному моменту времени
		Динамические	Описывают экономическую систему в развитии
6.	Учет фактора неопределенности	Детерминированные	Совокупность значений на входе модели и результаты на выходе связаны функциональными зависимостями
		Стохастические	При задании на входе модели определенной совокупности значений на выходе могут получаться различные результаты в зависимости от воздействия случайных факторов
7.	Тип математического аппарата, используемого в модели	Матричные	Используют аппарат алгебры матриц и матричного анализа
		Модели линейного и нелинейного программирования	Используют аппарат функций многих переменных, линейного и нелинейного программирования
		Корреляционно-регрессионные	Используют аппарат математической статистики
		Дифференциальные	Используют аппарат математического анализа и дифференциальных уравнений
		Модели теории массового	Используют аппарат теории массового обслуживания

		обслуживания	
		Сетевые	Используют аппарат теории графов и планирования на сетях
		Игровые	Используют аппарат теории игр
8.	Подход к изучению	Дескриптивные (описательные)	Предназначены для описания и объяснения фактически наблюдаемых явлений и/или их прогнозирования
		Нормативные	Предназначены для выяснения вопроса, как должна быть устроена и как должна развиваться экономическая система в смысле определенных критериев

Тема 1. Матричные балансовые модели макроэкономики

Необходимые математические понятия: матрица, виды матриц (прямоугольная, квадратная, ступенчатая, треугольная, диагональная, единичная, матрица-столбец, матрица-строка, вектор), элементарные операции над матрицами, действия с матрицами (транспонирование, умножение на число, сложение и умножение матриц), определитель квадратной матрицы, обратная матрица и способы ее вычисления, ранг матрицы, системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения (метод обратной матрицы, алгоритм Гаусса), собственные значения квадратных матриц.

1.1. Понятие о балансовых моделях

Одной из важнейших задач экономической политики государства является регулирование производства с целью обеспечения населения выпускаемой продукцией и дальнейшим бескризисным развитием экономики. Такое регулирование может быть осуществлено с помощью так называемых **балансовых моделей**. В основе их создания лежит **балансовый метод**, то есть метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Предполагается, что рассматриваемая экономическая система состоит из объектов, каждый из которых производит некоторый продукт, одна часть которого потребляется другими объектами системы, а другая часть выводится за пределы системы в качестве ее **конечного продукта**. Под **балансовой моделью** понимают систему уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между количеством продукции, производимым отдельными экономическими объектами и совокупной потребностью в этой продукции.

Если вместо понятия «продукт» ввести более общее понятие «ресурс», то под балансовой моделью следует понимать систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования.

Важнейшими видами балансовых моделей являются:

- 1) частичные материальные, трудовые, финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;
- 2) межотраслевые балансы;
- 3) матричные технические, промышленные, финансовые планы предприятий и фирм.

Балансовый метод и созданные на его основе балансовые модели служат основным инструментом поддержания пропорций в народном хозяйстве. Балансовые модели на базе отчетных балансов характеризуют сложившиеся пропорции, в них ресурсная часть всегда равна расходной. Для выявления

диспропорций используются балансовые модели, в которых фактические ресурсы сопоставляются не с их фактическим потреблением, а с потребностью в них.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей составляет таблица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. Например, в модели межотраслевого баланса такую роль играет таблица межотраслевого баланса, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении.

Различают статические и динамические балансовые модели.

Недостатком балансовых моделей является невозможность сравнения отдельных вариантов экономических решений, что не позволяет сделать выбор оптимального варианта развития экономической системы.

1.2. Модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева

Рассматриваемая модель впервые была сформулирована в 1936 г. в работах американского экономиста В.В. Леонтьева, который анализировал причины экономической депрессии США 1929 – 1933 гг. Впоследствии эти работы были удостоены Нобелевской премии.

Построим простейшую модель эффективного планирования экономики государства.

Будем полагать, что производственная сфера хозяйства состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Такое представление об отрасли является допущением модели, так как в реальной экономике отрасль определяется не только названием выпускаемой продукции, но и ведомственной принадлежностью предприятий. Производимая отраслями продукция идет на потребление населением, экспорт и государственные расходы (непроизводственное потребление или конечный продукт). Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Таким образом, каждая отрасль выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель. Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени; в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем обозначения:

x_i – общий объем продукции i -й отрасли (ее **валовой выпуск**);

x_{ij} – объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью при производстве объема продукции x_j ;

y_i – объем продукции i -й отрасли, предназначенный для потребления в непроизводственной сфере (**конечный продукт**).

Эффективное ведение народного хозяйства предполагает наличие баланса между отраслями. **Балансовый принцип** связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i -й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме балансовый принцип можно записать в виде

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + K + x_{in} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) называют **соотношениями баланса**. Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, в дальнейшем везде будем рассматривать стоимостный баланс, то есть выраженный в денежных единицах.

Величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ называют **коэффициентами прямых затрат**. Они

отражают интенсивность внутрисистемных потоков продукции, а именно показывают, какое количество продукции i -й отрасли необходимо для производства единицы продукции j -й отрасли, если учитывать только прямые затраты. Нулевое значение коэффициента прямых затрат указывает на отсутствие прямых связей между конкретными отраслями. Предполагается, что среди коэффициентов прямых затрат имеются ненулевые, в противном случае никакие отрасли не связаны между собой, что лишает смысла рассмотрение их как системы.

В.В. Леонтьев на основании анализа экономики США установил, что в течение длительного периода времени величины a_{ij} меняются слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. Это явление можно объяснить тем, что технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объем потребления j -й отраслью продукции i -й отрасли при производстве своей продукции объема x_j есть технологическая константа. В силу этого факта можно сделать следующее допущение (**гипотеза линейности**): для производства продукции j -й отрасли объема x_j нужно использовать продукцию i -й отрасли объема $a_{ij}x_j$, где a_{ij} – постоянное число, то есть материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение постулирует линейность существующей технологии и распространяется и на другие виды издержек: оплату труда, нормативную прибыль и т.п.

С учетом гипотезы линейности соотношения баланса примут вид

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + K + a_{in}x_n + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Введем обозначения: $\vec{x} = (x_1, x_2, K, x_n)^T$ – вектор-столбец валового выпуска, $\vec{y} = (y_1, y_2, K, y_n)^T$ – вектор-столбец конечного потребления,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & K & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат. Тогда соотношения баланса

(1.2) в матричной форме можно записать так:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}. \quad (1.3)$$

Матричное уравнение (1.3) называют **математической моделью линейного статического межотраслевого баланса В.В. Леонтьева**.

Математическую модель межотраслевого баланса можно использовать для решения трех основных задач.

Задача 1. Когда известны вектор валового выпуска \vec{x} и матрица прямых затрат A , рассчитать вектор конечного потребления \vec{y} . Для этого в матричном уравнении (1.3) нужно выразить, а затем вычислить вектор \vec{y} : $(E - A)\vec{x} = \vec{y}$, где E – единичная матрица.

Задача 2. Для периода времени T (например, год) известен вектор конечного потребления \vec{y} и матрица прямых затрат A . Требуется определить вектор валового выпуска \vec{x} . Для этого необходимо решить систему линейных уравнений (1.3). В силу прикладного характера задачи все элементы матрицы A и векторов \vec{x} и \vec{y} должны быть неотрицательными.

Задача 3. Задав для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции для первых отраслей и объемы валового выпуска для вторых отраслей. В этом случае удобнее использовать модель межотраслевого баланса в виде системы (1.2).

Матрицу A , все элементы которой неотрицательны, называют **продуктивной**, если для любого вектора \bar{y} с неотрицательными элементами существует решение уравнения (1.3) – вектор \bar{x} , все элементы которого неотрицательны. В этом случае и модель Леонтьева называют **продуктивной**.

Выразим из системы (1.3) вектор \bar{x} , тогда $\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{p}$.

Матрицу $B = (E - A)^{-1}$ называют **матрицей полных затрат**. Элементы матрицы $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ называют **коэффициентами полных затрат**.

Коэффициенты полных затрат показывают, какое количество продукции i -й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечного продукта j -й отрасли. Сформулируем критерии продуктивности матрицы прямых затрат.

Теорема 1. Если для матрицы A с неотрицательными элементами и некоторого вектора \bar{y} с неотрицательными элементами уравнение (1.3) имеет решение \bar{x} с неотрицательными элементами, то матрица A продуктивна.

Теорема 2. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и все ее элементы неотрицательны.

Теорема 3. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если максимум сумм ее элементов по любому столбцу (строке) не превосходит единицы $\max_{j=1,n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$, причем хотя бы для одного столбца (строки) $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$.

Теорема 4. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна тогда и только тогда, когда наибольшее собственное значение матрицы меньше единицы.

Пример 1. Отрасль состоит из двух предприятий. Вектор валового выпуска продукции и матрица внутреннего потребления имеют вид $\bar{p} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Найти вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли.

Решение. Подставим в уравнение $(E - A)\bar{x} = \bar{p}$ значения \bar{x} и A , получим

$$\bar{p} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 - 200 \\ -50 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Вектор конечного продукта $\bar{y} = (200; 250)^T$.

Пример 2. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период в условных денежных единицах. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли в следующем отчетном периоде, если конечное потребление в энергетике планируется увеличить вдвое, а в машиностроении – сохранить на прежнем уровне.

№	Отрасль	Потребление	Конечный	Валовой
---	---------	-------------	----------	---------

п/п		1	2	продукт	выпуск
1.	Энергетика	7	21	72	100
2.	Машиностроение	12	15	123	150

Решение. 1) Подготовим данные для проведения расчетов по модели. Вектор конечного потребления и вектор валового выпуска за отчетный период имеют вид $\bar{p}_0 = (72; 123)^T$ и $\bar{x}_0 = (100; 150)^T$ соответственно.

Объемы потребления в отраслях $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$. Вычислим коэффициенты прямых затрат: $a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07$, $a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14$, $a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12$, $a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10$. Выпишем матрицу прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}$.

Так как конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а в машиностроении сохранится на прежнем уровне, то новый вектор конечного продукта имеет вид $\bar{p} = (144; 123)^T$.

2) Матрица прямых затрат имеет неотрицательные элементы. Проверим ее на продуктивность с помощью теоремы 1.3:

$$\max\{0,07 + 0,12; 0,14 + 0,10\} = \max\{0,19; 0,24\} = 0,24 < 1.$$

Поэтому для любого вектора конечного продукта \bar{p} можно найти необходимый объем валового выпуска \bar{x} .

3) Найдем необходимый объем валового выпуска \bar{x} двумя способами:

Первый способ. По формуле $\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{p}$ (метод обратной матрицы).

Найдем матрицу полных затрат $(E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,90 \end{pmatrix},$$

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,90 \end{vmatrix} = 0,93 \cdot 0,90 - (-0,12) \cdot (-0,14) = 0,8202 \neq 0,$$

$$(E - A)^T = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,12 \\ -0,14 & 0,90 \end{pmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим новый вектор валового выпуска

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{p} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Второй способ. Метод Гаусса.

Требуется решить систему уравнений $(E - A)\bar{x} = \bar{p}$. Так как $E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,90 \end{pmatrix}$, а $\bar{p} = (144; 123)^T$, то в матричной форме эта система уравнений примет вид

$$\begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,93 & -0,14 & 144 \\ -0,12 & 0,90 & 123 \end{array} \right) \xrightarrow{C_2 + \frac{0,12}{0,93} C_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0,93 & -0,14 & 144 \\ 0 & 0,88 & 141,6 \end{array} \right).$$

Ранги основной и расширенной матриц системы равны между собой, следовательно, система уравнений совместна. Число неизвестных равно числу уравнений системы и рангу расширенной матрицы, следовательно, система имеет единственное решение. Выпишем равносильную систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 0,93x_1 - 0,14x_2 = 144; \\ 0,88x_2 = 141,6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{144+0,14x_2}{0,93}; \\ x_2 = \frac{141,6}{0,88}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{144+0,14 \cdot 160,5}{0,93}; \\ x_2 = 160,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 179,0; \\ x_2 = 160,5. \end{cases}$$

Ответ. Валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,0 условных денежных единиц, а в машиностроительной – до 160,5 условных денежных единиц.

1.3. Линейная модель обмена

Линейная модель обмена (модель международной торговли) впервые была предложена Д. Риккардо в XVIII веке.

Будем полагать, что n стран ведут торговлю. Обозначим x_1, x_2, \dots, x_n части национальных бюджетов этих стран, которые расходуются на покупку товаров. Эти величины называют **национальными торговыми бюджетами**.

Пусть a_{ij} – доля бюджета x_j , которую j -я страна тратит на закупку товаров у i -ой страны. Введем матрицу коэффициентов a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Так как национальный торговый бюджет расходуеться только на закупки товаров внутри страны и вне ее, то справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1; \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

Матрицу A вида (1.4) со свойством (1.5) называют **структурной матрицей торговли**.

Для i -й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.6)$$

Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли заключается в том, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального дохода, то есть $p_i \geq x_i$ или с учетом (1.6)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.7)$$

Нетрудно показать, что в условиях (1.7) возможен только знак равенства. Действительно, сложим все эти неравенства при i от 1 до n . Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j , получим

$$x_1 \sum_{i=1}^n a_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^n a_{i2} + \dots + x_n \sum_{i=1}^n a_{in} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (1.8)$$

В силу условий (1.5) неравенство (1.8) можно записать так:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

откуда возможен только знак равенства.

Таким образом, условия (1.7) принимают вид

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.9)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбец национальных торговых бюджетов $\vec{p} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, тогда уравнения (1.9) можно записать в матричной форме

$$A\vec{p} = \vec{p}. \quad (1.10)$$

Это уравнение означает, что собственный вектор структурной матрицы торговли A , соответствующий ее собственному значению $\lambda = 1$, состоит из национальных торговых бюджетов стран, удовлетворяющих условию бездефицитной международной торговли.

Пример 3. Структурная матрица торговли двух стран имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$. Найти национальные торговые бюджеты стран, удовлетворяющие условию сбалансированной бездефицитной торговли при условии, что сумма бюджетов этих стран составляет 1 800 условных денежных единиц.

Решение. Перепишем уравнение (1.10) в виде $(A - E)\vec{p} = 0$ или

$$\left(\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 \\ 0,5 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем матричное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} -0,5x_1 + 0,4x_2 = 0; \\ 0,5x_1 - 0,4x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Тогда $\{x_1 = 0,8x_2; x_2 \in \mathbf{R}\}$, и вектор национальных торговых бюджетов двух стран имеет вид $\vec{p} = x_2 \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}$, то есть бюджеты торгующих стран относятся как 0,8:1.

Так как сумма национальных торговых бюджетов составляет 1 800 условных денежных единиц, то есть $x_1 + x_2 = 1800$, или $0,8x_2 + x_2 = 1800$, тогда $x_2 = \frac{1800}{1,8} = 1000$ условных денежных единиц, а $x_1 = 0,8 \cdot 1000 = 800$ условных денежных единиц.

Ответ. Национальные торговые бюджеты двух стран составляют $x_1 = 800$, $x_2 = 1000$ условных денежных единиц.

Теоретический материал: [1, гл. 1, 3], [2, гл. 15, 16], [3, гл. 1], [4, темы 2–7], [6], [8], [9, гл. 1], [10], [11, гл. 17], [14, гл. 4], [15], [17, гл. 9], [19, гл. 7], [20, гл. 6].

Тема 2. Моделирование простейших финансовых операций

Необходимые математические понятия: функция, непрерывная функция, степенная, показательная и логарифмическая функции; последовательность, предел последовательности, способы вычисления пределов последовательностей; бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, вычисление предела $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и следствия из него; арифметическая и геометрическая прогрессии; вычисление неопределенных и определенных интегралов, формула Ньютона–Лейбница; метод интегрирования по частям.

2.1. Понятие о банковской деятельности и финансовом анализе

Современные банки – это финансовые посредники, извлекающие прибыль на денежном рынке. Банк можно определить как учреждение, которое привлекает свободные денежные средства и размещает их на возвратной основе. Такое определение позволяет выделить в деятельности банка **активные** и **пассивные** финансовые операции. **Пассивными** называют финансовые операции по привлечению денежных ресурсов в банк, **активными** – операции по размещению.

Любая финансовая операция предполагает совокупность условий, согласованных ее участниками. К таким условиям относятся: сумма денежных средств, сроки и способы начисления процентов и погашения долга и т.д. Совместное влияние на операцию многих факторов делает конечный ее результат неочевидным. Для его оценивания требуется специальный количественный анализ, совокупность методов которого составляет предмет **финансовой математики**.

К основным задачам, решаемым методами финансовой математики, относятся:

- 1) расчет конечных результатов финансовой операции для каждой из участвующих в ней сторон;
- 2) сравнение эффективности различных операций или вариантов;
- 3) выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции;
- 4) разработка планов выполнения финансовых операций;
- 5) расчет параметров эквивалентного изменения условий финансовой операции.

Основными элементами любой финансовой операции являются: размер платежа, сроки проведения выплат и ставка процентов.

Необходимость учета сроков проведения выплат в финансовых операциях определяется **принципом неравноценности денег**, относящихся к разным моментам времени. В силу этого принципа «сегодняшние деньги» ценнее «будущих», так как могут быть инвестированы и принести доход. Следствием принципа неравноценности денег является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. В финансовых вычислениях фактор времени учитывают с помощью начисления процентов.

Процентными деньгами (процентами) в финансовых расчетах называют абсолютную величину дохода от представления денег в долг в любой форме: выдача денежной ссуды, продажа в кредит, размещение денег на сберегательный счет, учет векселя, депозит, покупка сберегательного сертификата и т.п.

Процентной ставкой называют отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине представленной в долг денежной суммы (**начальной суммы**). Ставка измеряется в процентах, а также в виде десятичной или обыкновенной дроби. В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется, во-первых, как инструмент

увеличения начальной суммы, а во-вторых, как измеритель степени доходности финансовой операции.

Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют **периодом начисления**.

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга (**начальной сумме**). Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к начальной сумме называют **наращением** или **капитализацией**.

Начисление процентов, как правило, производится в отдельные моменты времени (дискретно), причем в качестве периодов начисления принимают год, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять **непрерывные проценты**. Если ставка процентов применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока финансовой операции, то такую процентную ставку называют **простой**. Если ставка процентов применяется к сумме с процентами, начисленными в предыдущий период начисления, то такую процентную ставку называют **сложной**.

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть **постоянными** или **переменными (плавающими)**. **Наращенной (конечной) суммой** финансовой операции (ссуды, долга, вклада и т.д.) называют начальную сумму вместе с начисленными на нее к концу срока (к концу финансовой операции) процентами.

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете на год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого вводят величину n – срок ссуды в долях года, которую вычисляют по формуле $n = \frac{t}{N}$, где t – срок операции (ссуды) в днях, N – число дней в году (временная база). Существует несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы N и способом измерения срока пользования ссудой t .

По выбору временной базы N различают **обыкновенный (коммерческий) процент** (за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом)) и **точный процент** (за базу измерения времени берут действительное число дней в году (365 или 366)). Определение срока пользования ссудой t может быть **точным** (вычисляют фактическое число дней между двумя датами) и **приближенным** (продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, причем все месяцы считаются равными, содержащими по 30 дней). В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день.

Различные варианты временной базы N и методов подсчета дней ссуды t приводят к следующим схемам расчета процентов, применяемым в практике:

- 1) точные проценты с точным числом дней ссуды (схема 365/365, британская практика);
- 2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (схема 365/360, французская практика);
- 3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (схема 360/360, германская практика).

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется. Из трех используемых схем наиболее точное значение конечной суммы получается при использовании схемы 365/365. Если обозначить K_b – значение конечной суммы, вычисленной по схеме 365/365, K_f – значение конечной суммы, вычисленной по схеме 365/360, K_g – значение конечной суммы, вычисленной по схеме 360/360, то указанные значения будут связаны неравенствами $K_g < K_b < K_f$.

В дальнейшем при моделировании различных финансовых операций будем предполагать, что используются точные проценты с точным числом дней ссуды.

Решение обратной задачи: нахождение первоначальной суммы денег K_0 при известных: конечной сумме K_T , процентной ставке и сроке финансовой операции, – называют **дисконтированием** конечной суммы K_T . В этом случае величину K_0 называют **дисконтированным** значением (*современной величиной, текущей стоимостью, приведенной суммой*) суммы K_T .

2.2. Моделирование однократных инвестиций капитала.

Проценты по вкладам

Прием вкладов (депозитов) у населения относят к пассивным операциям банков. **Вклад (депозит)** – это денежные средства (в наличной и безналичной форме, в национальной или иностранной валюте), переданные в банк их собственником для хранения на определенных условиях. Операции, связанные с привлечением денежных средств во вклады, называют **депозитными**. Умение вычислять наращенные суммы по вкладам при различных условиях начисления процентов позволяет принимать обоснованные решения о вложениях денег.

Пусть вклад в банк составил K_0 денежных единиц (начальная сумма). Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых (процентная ставка). Требуется найти размер вклада K_T через T лет.

Если по данному вкладу начисляются **простые проценты**, то размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\frac{p}{100} K_0 = 0,01pK_0$.

Следовательно, через год сумма вклада составит $K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = K_0(1 + 0,01p)$ денежных единиц, через два года $K_2 = K_1 + 0,01pK_0 = K_0(1 + 0,01p) + 0,01pK_0 = K_0(1 + 2 \cdot 0,01p)$ денежных единиц и т.д. Процесс изменения суммы вклада с начисляемыми простыми процентами можно представить в виде арифметической прогрессии с первым членом K_0 и разностью $0,01pK_0$. Тогда последний член прогрессии будет равен

$$K_T = K_{T-1} + 0,01pK_0 = K_0(1 + 0,01p(T-1)) + 0,01pK_0 = K_0(1 + 0,01pT).$$

Таким образом, через T лет сумма вклада составит

$$K_T = K_0(1 + 0,01pT) \text{ денежных единиц.} \quad (2.1)$$

Формулу (2.1) называют **формулой наращения по простым процентам** или **формулой простых процентов**. Множитель $(1 + 0,01pT)$ в формуле (2.1) называют **множителем наращения**. Он показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы. Величину $0,01pT K_0$ называют **суммой процентов**.

Простые проценты, как правило, применяют при краткосрочных финансовых операциях (срок операции не превышает года) и в случае, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а выплачиваются периодически. При использовании **сложных процентов** размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число раз $(1 + 0,01p)$, то есть через год наращенная сумма составит $K_1 = K_0 + 0,01pK_0 = K_0(1 + 0,01p)$ денежных единиц, через два года $K_2 = K_1(1 + 0,01p) = K_0(1 + 0,01p)^2$ денежных единиц и т.д. Наращение по схеме сложных процентов представляет собой геометрическую прогрессию

с первым членом K_0 и знаменателем $(1 + 0,01p)$. Тогда последний член прогрессии будет равен $K_T = K_{T-1}(1 + 0,01p) = K_0(1 + 0,01p)^{T-1}(1 + 0,01p) = K_0(1 + 0,01p)^T$. Таким образом, через T лет сумма вклада составит

$$K_T = K_0(1 + 0,01p)^T \text{ денежных единиц.} \quad (2.2)$$

Формулу (2.2) называют **формулой сложных процентов**. Множитель $(1 + 0,01p)^T$ в формуле (2.2) называют **множителем наращивания**.

В практике финансовых расчетов используется схема, при которой проценты на капитал начисляются несколько раз в году. При этом оговаривается годовая процентная ставка $p\%$ и количество начислений в течение года n . Фактически в этом случае за базовый период принимается $\frac{1}{n}$ часть года со ставкой сложных процентов $\frac{p\%}{n}$. В результате через T лет сумма вклада составит

$$K_T = K_0 \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nT} \text{ денежных единиц.} \quad (2.3)$$

Формулу (2.3) также называют **формулой сложных процентов (формулой сложных процентов с многократной капитализацией)**. Ее можно использовать в демографических расчетах (естественный прирост народонаселения), в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта, инфляция и т.п.).

Чем больше n , тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. При $n \rightarrow +\infty$ получается последовательность $K_T(n) = K_0 \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nT}$, предел которой равен

$$\begin{aligned} K_T &= \lim_{n \rightarrow +\infty} K_0 \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nT} = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_0 \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nT \frac{0,01p}{0,01p}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} K_0 \left(\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{0,01p}} \right)^{0,01pT} = K_0 e^{0,01pT}. \end{aligned}$$

Расчет наращенной суммы, выполненный по формуле

$$K_T = K_0 e^{0,01pT}, \quad (2.4)$$

называют **вычислениями по непрерывным процентам**. Чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ее называют **силой роста** и обозначают $\delta = 0,01p$. Множитель наращивания при непрерывном начислении процентов равен $e^{0,01pT} = e^{T\delta}$.

Приравнивая множители наращивания при дискретном и непрерывном начислении процентов, можно получить формулу перехода от одних ставок к другим.

В формулах (2.1) – (2.4) можно найти любую величину из K_T , K_0 , p , T , n , зная все остальные.

Пример 1. Пусть начальная сумма вклада составляет 100 тыс. рублей. Ставка 8 % годовых. Определить наращенную сумму за полгода, год, два года: а) по схеме простых процентов; б) по схеме сложных процентов с однократной капитализацией; в) по схеме сложных процентов с поквартальной капитализацией; г) по схеме непрерывных процентов с той же силой роста.

Решение. 1. По схеме простых процентов (формула (2.1)) наращенная сумма составит:

через полгода $K_{0,5} = 100\,000 \cdot (1 + 0,5 \cdot 0,08) = 104\,000$ рублей,

через год $K_1 = 100\,000 \cdot (1 + 1 \cdot 0,08) = 108\,000$ рублей,

через два года $K_2 = 100\,000 \cdot (1 + 2 \cdot 0,08) = 116\,000$ рублей.

2. По схеме сложных процентов с однократной капитализацией (формула (2.2)) наращенная сумма составит:

через полгода $K_{0,5} = 100\,000 \cdot (1 + 0,08)^{0,5} = 103\,923,05$ рублей,

через год $K_1 = 100\,000 \cdot (1 + 0,08)^1 = 108\,000$ рублей,

через два года $K_2 = 100\,000 \cdot (1 + 0,08)^2 = 116\,640$ рублей.

3. По схеме сложных процентов с поквартальной капитализацией (формула (2.3) при $n = 4$) наращенная сумма составит:

через полгода $K_{0,5} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{0,5 \cdot 4} = 104\,040$ рублей,

через год $K_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{1 \cdot 4} = 108\,243,22$ рублей,

через два года $K_2 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{2 \cdot 4} = 117\,165,24$ рублей.

4. По схеме непрерывных процентов при силе роста 8 % (формула (2.4)) наращенная сумма составит:

через полгода $K_{0,5} = 100\,000 \cdot e^{0,5 \cdot 0,08} = 104\,081,08$ рублей,

через год $K_1 = 100\,000 \cdot e^{1 \cdot 0,08} = 108\,328,71$ рублей,

через два года $K_2 = 100\,000 \cdot e^{2 \cdot 0,08} = 117\,351,09$ рублей.

Ответ. Результаты расчетов представим в виде таблицы:

Период начисления	Схема начисления процентов, руб.			
	Простые проценты	Сложные проценты с однократной капитализацией	Сложные проценты с поквартальной капитализацией	Непрерывные проценты
полгода	104 000	103 923,05	104 040	104 081,08
год	108 000	108 000	108 243,22	108 328,71
два года	116 000	116 640	117 165,94	117 351,09

Замечание. Обобщая полученные результаты расчетов, можно сделать следующие выводы:

1) при сроке вклада менее года вкладчику выгоднее использовать простые проценты, сложные проценты с многократной капитализацией или непрерывные проценты;

2) при сроке вклада в один год использование простых процентов и сложных процентов с однократной капитализацией приводит к одинаковым результатам, а использование сложных процентов с многократной капитализацией или непрерывных процентов приводит к большей величине наращенной суммы;

3) при сроке вклада более года вкладчику выгоднее использовать сложные проценты; использование сложных процентов с многократной капитализацией или непрерывных процентов также приводит к большей величине наращенной суммы.

Пример 2. Темп инфляции составляет 1 % в день. Во сколько раз уменьшится первоначальная сумма через полгода?

Решение. По формуле сложных процентов имеем $K = K_0(1 - 0,01)^{182}$, где K_0 – первоначальная сумма, 182 – число дней в полугодии, $p = -1\%$. Используя непрерывные проценты, получаем $K = K_0 e^{182 \cdot (-0,01)} = \frac{K_0}{e^{1,82}} \approx \frac{K_0}{6}$.

Ответ. Инфляция с темпом 1 % в день уменьшит первоначальную сумму примерно в 6 раз.

Пример 3. Банк предлагает клиентам депозит с условиями: срок 3 года, ставка 9 % годовых, капитализация осуществляется ежеквартально. Какую сумму клиент должен положить на депозит, чтобы получить в конце срока действия вклада 200 тыс. руб.?

Решение. По условию задачи наращение суммы происходит по схеме сложных процентов (формула (2.3)) с капитализацией $n = 4$ раза в год, $T = 3$ года, $K_T = 200\,000$ руб., $p = 9\%$ годовых. Для определения начальной суммы преобразуем формулу (2.3), а затем подставим в нее имеющиеся данные:

$$K_0 = \frac{K_T}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nT}} = \frac{200\,000}{\left(1 + \frac{0,09}{4}\right)^{4 \cdot 3}} = 153\,133,50 \text{ рублей.}$$

Ответ. Чтобы получить 200 тыс. рублей, клиенту требуется положить на указанный депозит 153 133,5 рублей.

2.3. Моделирование потоков платежей

Потоком платежей называют серию последовательных выплат и/или поступлений денежных средств, распределенную во времени. Выплаты представляют отрицательными величинами, а поступления – положительными. Примерами потоков платежей являются выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий и пособий и т.д. Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. **Наращенной суммой потока** платежей называют сумму всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока финансовой операции. **Современной величиной потока платежей** называют сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему. Конкретный смысл обобщающих характеристик определяется природой потока платежей и порождающей его причиной.

2.3.1. Финансовые ренты

Поток платежей, все составляющие которого являются положительными величинами и поступают через равные интервалы времени, называют **финансовой рентой (аннуитетом)**. Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

член ренты – величина каждого отдельного платежа;

период ренты – временной интервал между двумя соседними платежами;

срок ренты – время от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

процентная ставка – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;

число платежей в году;
число начислений процентов в году;
моменты платежа внутри периода ренты.

Примерами финансовых рент являются ежемесячные отчисления в пенсионный фонд; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется фонд определенного назначения (страховой, инвестиционный и т.п.), инвестиционные программы. Классификация финансовых рент приведена в табл. 2.

Таблица 2

Классификация финансовых рент

№ п/п	Классификационный признак	Тип ренты	Комментарий
1.	Продолжительность периода ренты	Годовая	Выплата ренты осуществляется один раз в год
		m -срочная	В году осуществляется m выплат
		Непрерывная	Рента выплачивается непрерывно (используется для теоретических исследований)
2.	Число начислений процентов в год	С однократным начислением	Начисление процентов осуществляется один раз в год
		С n -кратным начислением	Начисление процентов осуществляется n раз в год
		С непрерывным начислением	Начисление процентов осуществляется непрерывно (используется для теоретических исследований)
3.	Величина членов ренты	Постоянная	Рента с равными членами
		Переменная	Величина членов ренты меняется, возможно, по определенному закону
4.	Вероятность выплаты платежей	Верная	Подлежит безусловной выплате
		Условная	Выплата ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события
5.	Число членов ренты	Конечная (ограниченная)	Число членов ренты конечно
		Бесконечная (вечная)	Число членов ренты бесконечно
6.	Наличие сдвига момента начала ренты от момента заключения договора	Немедленная	Срок ренты начинается с момента заключения договора
		Отложенная (отсроченная)	Срок ренты сдвинут на определенное время от момента заключения договора
7.	Момент выплаты платежей	Обычная (постнумерандо)	Выплаты осуществляются в конце каждого периода
		Авансированная (пренумерандо)	Выплаты осуществляются в начале каждого периода

Наращенную сумму финансовой ренты к моменту последнего платежа принято обозначать FV (future value), а современную – PV (present value).

Построим математические модели некоторых финансовых рент. Для каждой ренты получим формулы для вычисления FV и PV .

Постоянная годовая рента с однократным начислением процентов

Обычная постоянная годовая рента с однократным начислением процентов выплачивается в конце каждого года в течение T лет по K денежных единиц, проценты начисляются один раз по ставке $p\%$ в конце года.

Получим формулу для вычисления FV . На первый взнос проценты начисляются $(T-1)$ раз (в течение $(T-1)$ лет). В результате первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $K(1+0,01p)^{T-1}$. На второй взнос проценты начисляются $(T-2)$ раз (в течение $(T-2)$ лет). Тогда второй взнос возрастет к концу срока ренты до величины $K(1+0,01p)^{T-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Нарощенные величины взносов, выписанные в ряд, начиная с последнего, представляют собой геометрическую прогрессию $K, K(1+0,01p), K(1+0,01p)^2, \dots, K(1+0,01p)^{T-2}, K(1+0,01p)^{T-1}$, в которой первый член равен K , а знаменатель равен $(1+0,01p)$ (его называют **множителем наращивания**). Следовательно, к концу срока ренты ее наращенная сумма FV будет равна

$$FV = K + K(1+0,01p) + K(1+0,01p)^2 + \dots + K(1+0,01p)^{T-1} = K \frac{(1+0,01p)^T - 1}{(1+0,01p) - 1}$$

или

$$FV = K \frac{(1+0,01p)^T - 1}{0,01p}. \quad (2.5)$$

Величину $S(T, p) = \frac{(1+0,01p)^T - 1}{0,01p}$ называют **коэффициентом наращивания обычной ренты**.

Для вычисления PV найдем дисконтированные значения каждого из платежей и их сумму. Для вычисления дисконтированного значения платежа, произведенного в t_i -ом году, нужно величину K разделить на соответствующий множитель наращивания $(1+0,01p)^{t_i}$. Для первого платежа имеем $K(1+0,01p)^{-1}$, для второго – $K(1+0,01p)^{-2}$ и т.д., для последнего – $K(1+0,01p)^{-T}$. Таким образом, дисконтированные значения платежей представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $K_1 = K(1+0,01p)^{-1}$ и знаменателем $(1+0,01p)^{-1}$. Величину $V = (1+0,01p)^{-1}$ называют **множителем дисконтирования** или **годовым дисконт-фактором**. Очевидно, что множитель дисконтирования и множитель наращивания являются взаимно обратными величинами.

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\begin{aligned} PV &= K(1+0,01p)^{-1} + K(1+0,01p)^{-2} + \dots + K(1+0,01p)^{-T} = \\ &= K(1+0,01p)^{-1} \frac{(1+0,01p)^{-T} - 1}{(1+0,01p)^{-1} - 1} \end{aligned}$$

или

$$PV = K \frac{1 - (1+0,01p)^{-T}}{0,01p}. \quad (2.6)$$

Величину $A(T, p) = \frac{1 - (1+0,01p)^{-T}}{0,01p}$ называют **коэффициентом приведения (дисконтирования) обычной ренты**. Нетрудно видеть, что

$$FV(1+0,01p)^{-T} = K \frac{(1+0,01p)^T - 1}{0,01p} (1+0,01p)^{-T} = K \frac{1 - (1+0,01p)^{-T}}{0,01p} = PV,$$

то есть дисконтирование наращенной суммы FV дает современную сумму PV . Соответственно коэффициенты приведения и наращенной обычной ренты связаны равенством $S(T, p)(1 + 0,01p)^{-T} = AS(T, p)$.

В отличие от обычной ренты, в случае авансированной годовой ренты с однократным начислением процентов в конце года при наращении на первый платеж проценты начисляются в течение всех T лет, а при дисконтировании первый платеж не дисконтируется. Вследствие этого формулы для вычисления наращенной и современной сумм примут вид соответственно

$$FV = K(1 + 0,01p) \frac{(1 + 0,01p)^T - 1}{0,01p}, \quad (2.6')$$

$$PV = K \frac{1 - (1 + 0,01p)^{-T}}{1 - (1 + 0,01p)^{-1}}. \quad (2.7')$$

Постоянная годовая рента с n -кратным начислением процентов

Обычная постоянная годовая рента с n -кратным начислением процентов выплачивается в конце каждого года в течение T лет по K денежных единиц, проценты начисляются n раз в год по ставке p % годовых.

В этом случае ставка, по которой происходит однократное начисление процентов, уменьшается в n раз, а число начислений возрастает в n раз. Тогда на первый взнос проценты начисляются $(T-1)n$ раз (в течение $(T-1)$ лет) по ставке $\frac{p}{n}$ %. В результате первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{(T-1)n}$. На второй взнос проценты начисляются $(T-2)n$ раз (в течение $(T-2)$ лет). Тогда второй взнос возрастет к концу срока ренты до величины $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{(T-2)n}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Наращенные величины взносов представляют собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке: $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{(T-1)n}$, $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{(T-2)n}$, ..., K , в которой первый член равен K , а знаменатель (множитель наращения) равен $\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^n$. Следовательно, к концу срока ренты ее наращенная сумма FV будет равна

$$FV = K \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{Tn} - 1}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^n - 1}. \quad (2.8)$$

Для вычисления PV найдем дисконтированные значения каждого из платежей и их сумму. Для вычисления дисконтированного значения платежа, произведенного в t_i -м году, нужно величину K разделить на соответствующий множитель наращения $\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{t_i n}$. Тогда современное значение первого платежа равно $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n}$, второго – $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-2n}$ и т.д., последнего – $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tn}$. Таким образом, дисконтированные значения платежей представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n}$ и знаменателем $\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n}$. Величину $V = \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n}$ также называют **множителем дисконтирования** или **годовым дисконт-фактором** при n -кратном начислении процентов. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$PV = K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n} \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tn} - 1}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n} - 1} = K \frac{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tn}}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n} - 1}. \quad (2.9)$$

В случае авансированной годовой ренты с n -кратным начислением процентов в конце года при наращении на первый платеж проценты начисляются в течение всех T лет n раз в год, а при дисконтировании первый платеж не дисконтируется. Вследствие этого формулы для вычисления наращенной и современной сумм примут вид соответственно

$$FV = K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{Tn} \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{Tn} - 1}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^n - 1}, \quad (2.8')$$

$$PV = K \frac{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tn}}{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-n}}. \quad (2.9')$$

Постоянная годовая рента с непрерывным начислением процентов

Постоянная годовая рента с непрерывным начислением процентов является предельным случаем постоянной годовой ренты с n -кратным начислением процентов при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому для вычисления наращенной и современной сумм обычной и авансированной рент требуется вычислить предел при $n \rightarrow +\infty$ от правой части в формулах (2.8), (2.9), (2.8') и (2.9') (аналогично предельному переходу для вывода формулы (2.4)). Тогда для обычной ренты получаем

$$FV = K \frac{e^{0,01pT} - 1}{e^{0,01p} - 1}, \quad PV = K \frac{1 - e^{-0,01pT}}{e^{0,01p} - 1}, \quad (2.10)$$

а для авансированной

$$FV = K \frac{e^{0,01pT} - 1}{e^{0,01p} - 1}, \quad PV = K \frac{1 - e^{-0,01pT}}{1 - e^{-0,01p}}. \quad (2.11)$$

Из формул (2.10) и (2.11) следует, что величины наращенных сумм обычной и авансированной рент совпадают. Нетрудно показать, что современная сумма авансированной ренты больше современной суммы обычной ренты в $e^{0,01p}$ раз.

Постоянная m -срочная рента с однократным начислением процентов

Обычная рента выплачивается m раз в год в течение T лет. Всего в год выплачивается K денежных единиц, проценты начисляются один раз по ставке p % в конце года.

В этом случае размер отдельного платежа составляет $\frac{K}{m}$ денежных единиц. На первый платеж проценты начисляются в течение всех T лет за исключением первого периода длительностью $\frac{1}{m}$ года, поэтому наращенная сумма первого платежа составит $\frac{K}{m} (1 + 0,01p)^{T - \frac{1}{m}}$ денежных единиц. На второй платеж проценты начисляются в течение всех T лет за исключением первых двух периодов общей длительностью $\frac{2}{m}$ года, поэтому наращенная сумма второго платежа составит $\frac{K}{m} (1 + 0,01p)^{T - \frac{2}{m}}$ и т.д. На m -й платеж проценты начисляются в течение всех T лет за исключением первых m периодов общей длительностью $\frac{m}{m} = 1$ год, поэтому наращенная сумма m -го платежа составит $\frac{K}{m} (1 + 0,01p)^{T - 1}$ и т.д. На последний платеж проценты не начисляются. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке: $\frac{K}{m} (1 + 0,01p)^{T - \frac{1}{m}}, \frac{K}{m} (1 + 0,01p)^{T - \frac{2}{m}}, \dots$

..., $\frac{K}{m}$, – у которой первый член равен $\frac{K}{m}$, знаменатель равен $(1 + 0,01p)^{\frac{1}{m}}$, общее число членов прогрессии равно Tm . Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой прогрессии:

$$FV = \frac{K}{m} \frac{(1+0,01p)^{\frac{1}{m}Tm} - 1}{(1+0,01p)^{\frac{1}{m}} - 1} = \frac{K}{m} \cdot \frac{(1+0,01p)^T - 1}{(1+0,01p)^{\frac{1}{m}} - 1}. \quad (2.12)$$

Для вычисления PV найдем дисконтированные значения каждого из платежей и их сумму. Для вычисления дисконтированного значения платежа, произведенного в период $\frac{i}{m}$, нужно величину платежа $\frac{K}{m}$ разделить на соответствующий множитель

наращения $(1 + 0,01p)^{\frac{i}{m}}$. Поэтому современное значение первого платежа составит $\frac{K}{m}(1 + 0,01p)^{-\frac{1}{m}}$, второго – $\frac{K}{m}(1 + 0,01p)^{-\frac{2}{m}}$ и т.д., m -го – $\frac{K}{m}(1 + 0,01p)^{-1}$, $m + 1$ -го – $\frac{K}{m}(1 + 0,01p)^{-1-\frac{1}{m}}$ и т.д., для последнего – $\frac{K}{m}(1 + 0,01p)^{-T}$. Таким образом, дисконтированные значения платежей представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{K}{m}(1 + 0,01p)^{-\frac{1}{m}}$ и знаменателем $(1 + 0,01p)^{-\frac{1}{m}}$. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$PV = \frac{K}{m} (1 + 0,01p)^{-\frac{1}{m}} \cdot \frac{(1+0,01p)^{-\frac{1}{m}Tm} - 1}{(1+0,01p)^{-\frac{1}{m}} - 1} = \frac{K}{m} \cdot \frac{(1+0,01p)^{-T} - 1}{1 - (1+0,01p)^{-\frac{1}{m}}}. \quad (2.13)$$

Величину $A(T, p, m) = \frac{(1+0,01p)^{-T} - 1}{m(1 - (1+0,01p)^{-\frac{1}{m}})}$ называют **коэффициентом**

приведения m -срочной ренты с однократным начислением процентов.

Авансированная постоянная m -срочная рента с однократным начислением процентов в конце года отличается от обычной тем, что при наращении на первый платеж проценты начисляются на протяжении всех T лет, а при вычислении современной суммы первый платеж не дисконтируется. В этом случае формулы для вычисления наращенной и современной сумм примут вид

$$FV = \frac{K}{m} (1 + 0,01p)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{(1+0,01p)^T - 1}{(1+0,01p)^{\frac{1}{m}} - 1}, \quad (2.12')$$

$$PV = \frac{K}{m} \cdot \frac{1 - (1+0,01p)^{-T}}{1 - (1+0,01p)^{-\frac{1}{m}}}. \quad (2.13')$$

Постоянная m -срочная рента

с n -кратным начислением процентов, $m = n$

В ряде контрактов операции по начислению процентов и поступлению рентных платежей производятся несколько раз в год и совпадают по времени, то есть $m = n$. В этом случае рассматриваемая рента аналогична постоянной годовой ренте с однократным начислением процентов с той лишь разницей, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период. Ставка за период будет составлять $\frac{p}{n}$ % (при ставке p % годовых), число периодов начисления – Tn . Тогда формулы для вычисления наращенной и современной сумм для обычной ренты примут вид

$$FV = K \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{Tn} - 1}{0,01p}, \quad PV = K \frac{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tn}}{0,01p}, \quad (2.14)$$

а для авансированной ренты

$$FV = K \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right) \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{Tn} - 1}{0,01p}, \quad PV = K \frac{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tn}}{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-1}}. \quad (2.14')$$

Постоянная m -срочная рента

с n -кратным начислением процентов, $m \neq n$

Это общий случай m -срочной ренты с начислением процентов n раз в году, $m > 1$, $n > 1$. Ставка за период будет составлять $\frac{p}{n}$ % (при ставке p % годовых), число периодов начисления – Tm .

Первый член обычной ренты $\frac{K}{m}$, уплаченный спустя $\frac{1}{m}$ года после начала, составит к концу срока ренты вместе с начисленными на него процентами величину $\frac{K}{m} \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\left(T - \frac{1}{m}\right)n} = \frac{K}{m} \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{Tn - \frac{n}{m}}$. Второй член ренты к концу срока возрастет до $\frac{K}{m} \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\left(T - \frac{2}{m}\right)n} = \frac{K}{m} \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{Tn - 2\frac{n}{m}}$ и т.д., последний член ренты составляет $\frac{K}{m}$. Таким образом, наращенные значения членов ренты составляют геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{K}{m}$ и знаменателем $\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$, записанную в обратном порядке. В результате получаем наращенную сумму

$$FV = \frac{K}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{m} Tm} - 1}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{m}} - 1} = \frac{K}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nT} - 1}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{m}} - 1}. \quad (2.15)$$

Формула для расчета современной величины обычной ренты выглядит следующим образом:

$$PV = \frac{K}{m} \frac{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tm}}{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{m}} - 1}. \quad (2.16)$$

Аналогично рассуждая, можно получить формулы для расчета авансированной m -срочной ренты с начислением процентов n раз в году

$$FV = \frac{K}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nT} - 1}{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-\frac{n}{m}}}, \quad PV = \frac{K}{m} \frac{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-Tm}}{1 - \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{-\frac{n}{m}}}. \quad (2.17)$$

Постоянная непрерывная рента

с непрерывным начислением процентов

Этот вид ренты содержит два существенных допущения:

- 1) платежи величиной K денежных единиц поступают в каждый момент времени t ($t \rightarrow +\infty$);
- 2) проценты начисляются непрерывно с силой роста p % ($n \rightarrow +\infty$).

В результате первого допущения, во-первых, становится невозможным использование формулы суммы геометрической прогрессии, а во-вторых, исчезает различие между обычной и авансированной рентами. В этом случае для описания процесса поступления платежей удобно использовать линейную функцию вида $K(t) = Kt$. Действительно, в каждый момент времени поступает K денежных единиц. За промежуток времени от 0 (начала ренты) до t поступит

$$K(t) = \int_0^t K d\tau = K\tau \Big|_0^t = Kt \text{ денежных единиц.}$$

В результате второго допущения множитель наращения станет равным $e^{0,01pt}$, а множитель дисконтирования – $e^{-0,01pt}$. Действительно, в каждый момент времени поступивший в этот момент платеж умножается на $\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nt}$. Указанный множитель наращения является непрерывным обобщением множителя $\left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ (при $m \rightarrow +\infty$ $t = \frac{1}{m}$ – бесконечно малая величина). Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{nt} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{0,01p}{n}\right)^{\frac{n}{0,01p} \cdot 0,01pt} = e^{0,01pt}.$$

Так как множитель дисконтирования и множитель наращения являются взаимно обратными величинами, то соответствующий множитель дисконтирования равен $V = e^{-0,01pt}$.

Пусть срок действия ренты составляет T лет. Тогда наращенную и современную суммы можно вычислить как интегралы на отрезке $[0; T]$ от функций $Kte^{0,01pt}$ и $Kte^{0,01-pt}$ соответственно

$$FV = \int_0^T Kte^{0,01pt} dt, \quad PV = \int_0^T Kte^{-0,01pt} dt. \quad (2.18)$$

Рассматриваемый вид ренты используется в теоретических исследованиях в основном для прогнозирования изменений, вызванных изменением параметров ренты, а также при определении эффективности финансовой операции (см. п. 2.4).

Определение параметров финансовой ренты

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты FV или ее современной сумме PV остальных параметров ренты. В этом случае, как правило, число платежей m и число начислений процентов n в году задаются по согласию подписывающих сторон. Из оставшихся параметров: срока действия ренты T , годовой процентной ставки p % и годовой суммы платежей K , – любые два задаются, а третий выражается и рассчитывается из формул для PV и FV , соответствующих условиям конкретной ренты.

Пример 4. Для проведения замены оборудования предприятию необходимо за 10 лет накопить 2 млн денежных единиц. Ежегодно она может вносить в банк для этой цели 100 тыс. денежных единиц на специальный счет. Под какую ставку сложных процентов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?

Решение. Согласно условиям задачи, предприятию нужно заключить договор ренты на срок $T = 10$ лет с ежегодным внесением на счет $K = 100$ тыс. денежных единиц, чтобы получить величину $FV = 2$ млн денежных единиц. Будем считать, что банк предлагает договор обычной ренты (проценты начисляются в конце каждого срока капитализации) с ежеквартальным начислением процентов ($n = 4$).

Первый способ. Согласно формуле (2.8), для определения величины p %

получаем уравнение $2000 = 100 \frac{\left(1 + \frac{0,01p}{4}\right)^{40} - 1}{\left(1 + \frac{0,01p}{4}\right)^4 - 1}$, из которого получаем $p \approx 13,945$ %

годовых (для вычисления величины p % использовался математический пакет Maple 7).

Второй способ. Используя формулу (2.8), найдем нижнюю и верхнюю оценки процентной ставки, подставляя в нее различные числовые значения величины p %. В частности,

$$\text{при } p_n \% = 13 \%, FV_n = 100 \frac{(1 + 0,13 \cdot 0,25)^{40} - 1}{(1 + 0,13 \cdot 0,25)^4 - 1} \approx 1901 \text{ (тыс. руб.)},$$

$$\text{при } p_e \% = 14 \%, FV_e = 100 \frac{(1 + 0,14 \cdot 0,25)^{40} - 1}{(1 + 0,14 \cdot 0,25)^4 - 1} \approx 2006 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Далее корректировку нижнего значения процентной ставки проведем по следующей интерполяционной формуле: $p = p_n + \frac{FV - FV_n}{FV_e - FV_n} (p_e - p_n)$ [3, с. 346].

$$\text{Вычислим } p = 13 + \frac{2000 - 1901}{2006 - 1901} (14 - 13) = 13,943 \%. .$$

Проверим правильность нахождения действительной процентной ставки:

$$FV = 100 \frac{(1 + 0,13943 \cdot 0,25)^{40} - 1}{(1 + 0,13943 \cdot 0,25)^4 - 1} = 1999,8 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Так как величина $FV = 1999,8$ меньше требуемой, то для уточнения величины процентной ставки снова воспользуемся интерполяционной формулой, полагая $FV_n = 1999,8$, $p_n = 13,943 \%$. Тогда

$$p = 13,943 + \frac{2000 - 1999,8}{2006 - 1999,8} (14 - 13,943) = 13,945 \%. .$$

Проверяя правильность нахождения действительной процентной ставки, получаем $FV = 2000,0$ (тыс. руб.).

Ответ. Величина процентной ставки составляет $p \approx 13,945 \%$ годовых.

2.3.2. Нерегулярные потоки платежей

Поток платежей называют **нерегулярным**, если отдельные платежи потока имеют разную величину и поступают в любые (непериодические) моменты времени. Рассмотрим нерегулярный поток, предусматривающий платежи $K(t_i)$ в момент времени t_i , $i = \overline{0, n}$. Нарощенная сумма такого потока платежей, приведенная к моменту времени $T \geq t_n$, определяется выражением

$$FV(T) = \sum_{i=0}^n K(t_i) \cdot A_{t_i}, \quad (2.19)$$

где A_{t_i} – множитель наращения на промежутке времени $(T - t_i)$. При дисконтировании нерегулярного потока платежей к моменту времени $t = 0$ для каждого t_i вводят в рассмотрение дисконт-фактор V_{t_i} , тогда дисконтированная сумма нерегулярного потока будет равна величине

$$PV(0) = \sum_{i=0}^n K(t_i) \cdot V_{t_i}. \quad (2.20)$$

В частности, при неизменности годовой процентной ставки $p\%$ на всем промежутке времени $[0; T]$, ежегодной капитализации и использовании схемы сложных процентов формулы (2.19) и (2.20) примут вид

$$FV(T) = \sum_{i=0}^n K(t_i) \cdot (1 + 0,01p)^{(T-t_i)}, \quad PV(0) = \sum_{i=0}^n \frac{K(t_i)}{(1 + 0,01p)^{t_i}}.$$

2.3.3. Двусторонние потоки платежей

Двусторонним называют поток платежей, который предполагает распределенные во времени переходы денежных сумм от одного владельца к другому. С позиций одного из участников такой многоэтапной операции можно считать, что поступление денежных средств к нему в момент времени t_i соответствует положительному платежу ($K(t_i) > 0$), а выплата им денежных средств в момент t_j – отрицательному платежу ($K(t_j) < 0$). Простейшим примером двустороннего потока платежей является получение и погашение кредита.

Рассмотрим простейшие модели получения и погашения кредита.

Модель потребительского кредита

Потребительский кредит в размере K_0 выдается на срок T под простую годовую процентную ставку $p\%$. Проценты наращивания начисляются на всю сумму кредита в момент его открытия и присоединяются к основному долгу. Наращенная сумма долга согласно формуле (2.1) в этом случае будет равна $K_T = K_0(1 + 0,01pT)$. Если предположить, что m – число выплат в году, то можно определить величину разового погасительного платежа

$$S = \frac{K_T}{mT} = \frac{K_0(1 + 0,01pT)}{mT}. \quad (2.21)$$

По формуле (2.21) можно находить и другие параметры потребительского кредита.

Простейшая модель долгосрочной кредитной операции

Предположим, что заемщик берет кредит по частям у одного и того же кредитора под $p\%$ годовых по схеме, представленной в таблице:

Срок выплаты суммы заемщику	Выплаченная сумма, денежных единиц
Сразу по заключении договора	K_0
В момент времени t_1	K_1
В момент времени t_2	K_2
...	...
В момент времени t_m	K_m

Пусть схема возвращения кредита выглядит следующим образом:

Срок получения суммы	Полученная сумма, денежных единиц
В момент времени $t_k, t_k \geq t_m$	K_k
В момент времени t_{k+1}	K_{k+1}
...	...

В момент времени t_n	K_n
------------------------	-------

Предполагается, что моменты времени t_i ($i = \overline{1, m}$ и $i = \overline{k, n}$) кратны целому числу лет. Годовая процентная ставка не меняется на протяжении всего срока действия кредита.

Найдем современную величину данного потока платежей. Для этого приведем все суммы на момент заключения договора (каждую сумму K_i ($i = \overline{1, m}$ и $i = \overline{k, n}$) разделим на множитель наращения $(1 + 0,01p)^{t_i}$, затем составим алгебраическую сумму выплат и поступлений, причем слагаемые, соответствующие выплатам, запишем со знаком «-», а поступлениям – со знаком «+», тогда получим

$$K_{совр.} = -K_0 - K_1(1 + 0,01p)^{-t_1} - K_2(1 + 0,01p)^{-t_2} - K - K_m(1 + 0,01p)^{-t_m} + \\ + K_k(1 + 0,01p)^{-t_k} + K_{k+1}(1 + 0,01p)^{-t_{k+1}} + K + K_n(1 + 0,01p)^{-t_n}.$$

Так как дисконтированные суммы, соответствующие кредитам и погашениям, должны быть равны, то $K_{совр.} = 0$. В этом случае получаем так называемое **балансовое равенство**

$$-K_0 - K_1(1 + 0,01p)^{-t_1} - K_2(1 + 0,01p)^{-t_2} - K - K_m(1 + 0,01p)^{-t_m} + \\ + K_k(1 + 0,01p)^{-t_k} + K_{k+1}(1 + 0,01p)^{-t_{k+1}} + K + K_n(1 + 0,01p)^{-t_n} = 0. \quad (2.22)$$

Таким образом, в рассматриваемой модели современная величина потока платежей представляет собой соотношение баланса между суммой кредита и платежами, поступающими в счет его погашения.

С помощью балансового равенства можно находить величину любой из сумм выплат или поступлений при известных остальных выплатах и поступлениях и/или величину процента за кредит.

Пример 5. Заемщик берет кредит по частям у одного и того же кредитора под 9 % годовых по схеме: 10 млн руб. в момент заключения договора, через год 8 млн руб. и еще через два года – 5 млн руб. Схема погашения кредита выглядит так: через 5 лет после заключения договора нужно выплатить 4 млн руб., через 6 лет – 6 млн руб., через 7 лет – 9 млн руб., через 8 лет – 7 млн руб., через 9 лет – 5 млн руб., через 10 лет – 7 млн руб. Последняя выплата предполагается через 11 лет после заключения договора. Предполагается, что проценты начисляются 1 раз в год в конце каждого года. Найти величину последней выплаты и процент по кредиту.

Решение. 1. Найдем величину последней выплаты по кредиту. Для этого требуется найти дисконтированные значения (на момент заключения договора) всех денежных сумм данного потока платежей, составить балансовое равенство и найти неизвестную сумму последнего платежа. Вычисление дисконтированных значений всех денежных сумм представим в виде таблицы. Суммы, которые банк выплачивает заемщику в виде кредита, отрицательны.

Время платежа	Размер платежа, млн руб.	Дисконтированное значение платежа, руб.
В момент заключения договора	-10	-1 000 000
Через 1 год	-8	$-8\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-1} = -7\,339\,449,54$

Через 3 года	-5	$-5\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-3} = -3\,860\,917,40$
Через 5 лет	4	$4\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-5} = 2\,599\,725,55$
Через 6 лет	6	$6\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-6} = 3\,577\,603,96$
Через 7 лет	9	$9\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-7} = 4\,923\,308,20$
Через 8 лет	7	$7\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-8} = 3\,513\,063,96$
Через 9 лет	5	$5\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-9} = 2\,302\,138,90$
Через 10 лет	7	$7\,000\,000 \cdot (1 + 0,09)^{-10} = 2\,956\,875,65$
Через 11 лет	K_{11}	$K_{11} \cdot (1 + 0,09)^{-11} = K_{11} \cdot 1,09^{-11}$

Составим балансовое равенство (2.22):

$$-1\,000\,000 - 7\,339\,449,54 - 3\,860\,917,40 + 2\,599\,725,55 + 3\,577\,603,96 + 4\,923\,308,20 + 3\,513\,063,96 + 2\,302\,138,90 + 2\,956\,875,65 + K_{11} \cdot 1,09^{-11} = 0,$$

из которого находим $K_{11} = 3\,425\,904,98$ руб.

2) Найдем процент по кредиту. Для этого вычислим общую величину платежей, поступивших в уплату кредита:

$$\begin{aligned} K_5 + K_6 + K_7 + K_8 + K_9 + K_{10} + K_{11} &= \\ &= 4 + 6 + 9 + 7 + 5 + 7 + 3,425\,904\,98 = 41,425\,904\,98 \text{ млн руб.} \end{aligned}$$

Величина платежей, полученных в качестве кредита, составляет

$$K_0 + K_1 + K_3 = 10 + 8 + 5 = 23 \text{ млн руб.}$$

Тогда процент по кредиту (плата заемщика за пользование денежными средствами) равен $41,425\,904\,98 - 23 = 18,425\,904\,98$ млн руб.

Ответ. Величина последней выплаты по кредиту $K_{11} \approx 3,42$ млн руб., процент по кредиту составляет 18,42 млн руб.

2.4. Оценка эффективности некоторых финансовых операций

Оценка эффективности финансовых операций необходима для сопоставления доходов от их проведения и выбора наиболее выгодных.

Для однократных капиталовложений одним из критериев оценки эффективности является сравнение величин прибылей от рассматриваемых операций, другим – сравнение величин их *эффективных процентных ставок*.

Эффективной годовой процентной ставкой p_{ef} называют ставку, обеспечивающую то же значение наращенной суммы K_T при одноразовом в течение года начислении процентов, что и n -разовое со ставкой $\frac{p\%}{n}$, где $p\%$ – годовая процентная ставка рассматриваемой финансовой операции. Используя формулы (2.2) и (2.3), для определения p_{ef} получаем, что

$$K_T = K_0 \left(1 + 0,01 p_{ef}\right)^T = K_0 \left(1 + \frac{0,01 p}{n}\right)^{nT},$$

откуда следует

$$p_{ef} = \left(\left(1 + \frac{0,01 p}{n}\right)^n - 1 \right) \cdot 100 \% . \quad (2.23)$$

Эффективная процентная ставка обладает свойством $p_{ef} \geq p$ и позволяет сравнивать различные варианты инвестиций: если для двух инвестиционных проектов получилось $p_{ef1} \geq p_{ef2}$, то первый проект считается более выгодным.

Пример 6. Коммерческий банк, обслуживающий предприятие по выдаче заработной платы, задерживает перечисляемые ему средства в среднем на 9 месяцев. За это время он успевает «прокрутить» эти деньги в виде краткосрочных кредитов, выдаваемых частным предпринимателям на 3 месяца под 3 % в месяц. Рассчитать, что выгоднее банку: кредитовать из собственных средств предприятия на условиях ставки годового процента, равной 20 %, или заниматься вышеуказанной деятельностью.

Решение. Первый способ. Пусть банк задерживает сумму K_0 . Вычислим прибыль от каждой финансовой операции с использованием суммы K_0 . Для краткосрочного кредита ставка $p_1 \% = 3 \%$ в месяц, $T_1 = 9$ месяцев, тогда по формуле сложных процентов (2.2) наращенная сумма равна

$$K_{T_1} = K_0(1 + 0,01p)^{T_1} = K_0(1 + 0,03)^9 = 1,305 \cdot K_0 \text{ денежных единиц,}$$

а прибыль $\Pi_1 = 1,305 \cdot K_0 - K_0 = 0,305 \cdot K_0$ денежных единиц.

Для операции кредитования предприятия при $p_2 \% = 20 \%$ годовых, $T_2 = 1$ год, ежегодном начислении процентов по кредиту, наращенная сумма равна $K_{T_2} = 1,2 \cdot K_0$ денежных единиц, а прибыль $\Pi_2 = 1,2 \cdot K_0 - K_0 = 0,2 \cdot K_0$ денежных единиц. Допустим, что начисление процентов по кредиту предприятию происходит ежемесячно. Тогда наращенная сумма $K'_{T_2} = K_0 \left(1 + \frac{0,01 \cdot 20 \%}{12}\right)^{12} = 1,219 \cdot K_0$, а прибыль: $\Pi'_2 = 1,219 \cdot K_0 - K_0 = 0,219 \cdot K_0$. Так как $0,2 \cdot K_0 < 0,219 \cdot K_0 < 0,305 \cdot K_0$, то есть $\Pi_2 < \Pi'_2 < \Pi_1$, то банку выгоднее выдавать краткосрочные кредиты частным предпринимателям.

Второй способ. Найдем значение эффективной процентной ставки p_{ef1} финансовой операции по выдаче краткосрочных кредитов. Согласно условию задачи, реальная процентная ставка $\frac{p_1 \%}{12} = 3 \%$, срок краткосрочного кредита 3 месяца, за 9 месяцев кредит можно выдать 3 раза по 3 месяца, тогда $nT = 9 = 12 \cdot 0,75$ (9 месяцев составляют 0,75 года), $n = 12$. Тогда эффективная процентная ставка по краткосрочным кредитам может быть вычислена по формуле (2.23):

$$p_{ef1} = \left(\left(1 + \frac{0,01p_1}{n} \right)^n - 1 \right) \cdot 100 \% = \left((1 + 0,03)^{12} - 1 \right) \cdot 100 \% \approx 42,6 \% .$$

Если начисление процентов по кредиту для предприятий на условиях ставки годового процента $p_2 \% = 20 \%$ осуществляется один раз в год, то $p_{ef2} = p_2 = 20 \%$. Так как $p_{ef2} < p_{ef1}$, то банку выгоднее «прокручивать» деньги в виде краткосрочных кредитов. Если начисление процентов по кредиту для предприятий на условиях ставки годового процента $p_2 \% = 20 \%$ осуществляется ежемесячно. Тогда эффективная процентная ставка этой операции будет равна

$$p_{ef2} = \left(\left(1 + \frac{0,01p_2}{n} \right)^n - 1 \right) \cdot 100 \% = \left(\left(1 + \frac{0,2}{12} \right)^{12} - 1 \right) \cdot 100 \% \approx 21,9 \% .$$

Следовательно, и при ежемесячном начислении процентов по кредиту для предприятий банку выгоднее выдавать краткосрочные кредиты частным предпринимателям.

Ответ. Банку выгоднее выдавать краткосрочные кредиты частным предпринимателям.

Полной доходностью потребительского кредита называют годовую ставку $r\%$, начисление процентов по которой обеспечит выплату всех платежей. Получим уравнение для отыскания величины $r\%$. Разрешим уравнение (2.21) относительно K_0 , получим $K_0 = \frac{SmT}{(1+0,01pT)}$, где K_0 – сумма кредита, S – величина разового погасительного платежа, m – число выплат в году, T – срок кредита, $p\%$ – простая годовая ставка наращивания. С другой стороны, выплаты в счет погашения кредита можно представить в виде годовой m -срочной ренты по ставке $r\%$, современная стоимость которой согласно формуле (2.7') равна $K_0 = S \frac{1-(1+0,01r)^{-T}}{(1+0,01r)^{1/m}-1}$. Приравняв выражения для K_0 , получим уравнение для определения полной доходности потребительского кредита

$$\frac{1-(1+0,01r)^{-T}}{(1+0,01r)^{1/m}-1} = \frac{mT}{(1+0,01pT)}. \quad (2.24)$$

Полная доходность потребительского кредита является аналогом эффективной процентной ставки.

Пример 7. Потребительский кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 4 года по ставке 8 % годовых. Погасительные платежи выплачиваются ежемесячно. Определить величину ежемесячных выплат и полную доходность кредитора.

Решение. Величина ежемесячных выплат рассчитывается по формуле (2.21):

$$S = \frac{K_0(1+0,01pT)}{mT} = \frac{100\,000(1+0,08 \cdot 4)}{12 \cdot 4} = 2\,750 \text{ руб.}$$

Для определения полной доходности $r\%$ вычислим величину

$$\frac{mT}{(1+0,01pT)} = \frac{12 \cdot 4}{(1+0,08 \cdot 4)} = 36, (36),$$

сделаем замену переменных $a = 1 + 0,01r$, тогда уравнение (2.24) примет вид

$$1 - a^{-4} = 3, (36) \cdot (\sqrt[12]{a} - 1). \quad (2.24')$$

Уравнение (2.24') может быть решено численными методами или с помощью математических пакетов (например, Maple 7). Решая его, получим $a \approx 1,1533$, тогда полная доходность кредитора равна

$$r = (a - 1) \cdot 100\% = (1,1533 - 1) \cdot 100\% = 15,33\%.$$

Ответ. Величина ежемесячных выплат по кредиту равна 2 750 руб., полная доходность кредитора равна 15,33 % годовых.

Для оценки эффективности двусторонних финансовых потоков используют **чистую приведенную величину** и **индекс прибыльности** финансовой операции.

Чистой приведенной величиной NPV (net present value) называют современную величину потока $NPV = PV(0)$, вычисляемую по формуле (2.20), в которой величины $K(t_i)$ являются поступлениями или выплатами потока и рассматриваются как платежи потока с соответствующими знаками. Операция считается эффективной для участника, если для него $NPV > 0$. Доказано, что знак показателя NPV не зависит от момента времени, к которому приводится поток платежей. Поэтому для оценки эффективности любой многоэтапной финансовой

операции достаточно рассчитать NPV для любого момента приведения и определить знак этого показателя.

При неизменности годовой процентной ставки $p\%$, ежегодной капитализации и использовании схемы сложных процентов чистый приведенный доход на начальный момент инвестирования составит

$$NPV = PV(0) = \sum_{i=0}^n \frac{K(t_i)}{(1 + 0,01p)^{t_i}}.$$

Если поступающие средства изменяются во времени и описываются функцией $K(t)$, а проценты начисляются непрерывно, то чистый приведенный доход от потока платежей за время $T = t_n$ вычисляют по

$$\text{формуле } NPV = \int_0^T K(t) e^{-\frac{pt}{100}} dt.$$

Недостатком показателя NPV является невозможность сопоставлять эффективности двух различных финансовых операций с целью выбора наиболее выгодной.

Для этого используют другой показатель, называемый индексом прибыльности или внутренней эффективной ставкой операции.

Индексом прибыльности (внутренней эффективной ставкой операции, внутренней нормой процента по капиталовложениям, полной доходностью финансовой операции) называют процентную ставку, при которой сумма всех дисконтированных капитальных затрат и дисконтированных доходов равна нулю. Обозначения: PI (profitability index), IRR (internal rate of return). Согласно этому определению индекс прибыльности PI равен эффективной процентной ставке, при которой $NPV = 0$, то есть индекс прибыльности PI является корнем уравнения

$$\sum_{i=0}^n \frac{K(t_i)}{(1 + 0,01 \cdot PI)^{t_i}} = 0. \quad (2.25)$$

Финансовая операция считается выгодной, если $PI \geq 15\%$.

Следует заметить, что значение PI не зависит от того, к какому моменту времени приводится (дисконтируется) поток платежей при расчете NPV .

Пример 8. Инвестиционный проект рассчитан на три года при процентной ставке 8% годовых. Первоначальные базовые капиталовложения составят 10 млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн руб. Определить эффективность инвестиционного проекта при ежегодном и непрерывном инвестировании.

Решение. Так как поток платежей инвестиционного проекта представляет собой переменную ренту, то для оценки его эффективности достаточно рассчитать NPV потока. Рассчитаем NPV инвестиционного проекта при ежегодном и непрерывном инвестировании.

Пусть средства поступают ежегодно. Так как первоначальные базовые капиталовложения составили 10 млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн руб., то $K(0) = 10$ млн руб., через год сумма капиталовложений составит $K(1) = 10 + 1 = 11$ млн руб., через два года – $K(2) = 11 + 1 = 12$ млн руб., через три года – $K(3) = 12 + 1 = 13$ млн руб. Тогда NPV инвестиционного проекта составит

$$NPV = \sum_{i=0}^3 \frac{K(t_i)}{(1+0,08)^{t_i}} = 10 + \frac{11}{1,08} + \frac{12}{(1,08)^2} + \frac{13}{(1,08)^3} \approx 40,8 \text{ млн руб.}$$

Получили, что $NPV \approx 40,8$ млн руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 40,8 млн руб. при постоянной процентной ставке.

Пусть средства поступают непрерывно. Составим функцию изменения капиталовложений $K(t)$. Так как первоначальные базовые капиталовложения составили 10 млн руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн руб., то через год сумма капиталовложений составит $K(1)=10+1$ млн руб., через два года $K(2)=10+1 \cdot 2$ млн руб., через t лет $K(t)=10+1 \cdot t$ млн руб. Тогда чистый приведенный доход от капиталовложений за 3 года составит

$$\begin{aligned} NPV &= \int_0^T K(t) e^{-\frac{pt}{100}} dt = \int_0^3 (10+t) e^{-\frac{8t}{100}} dt = \int_0^3 (10+t) e^{-0,08 \cdot t} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 10+t \\ dv = e^{-0,08 \cdot t} dt \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} du = dt \\ v = -12,5 e^{-0,08 \cdot t} \end{array} \Big|_0^3 = -12,5(10+t) e^{-0,08 \cdot t} \Big|_0^3 + 12,5 \int_0^3 e^{-0,08 \cdot t} dt = \\ &= -12,5(10+3) e^{-3 \cdot 0,08} + 12,5 \cdot 10 - (12,5)^2 e^{-0,08 \cdot t} \Big|_0^3 = \\ &= 125 - \frac{12,5 \cdot 13}{e^{0,24}} - (12,5)^2 \left(\frac{1}{e^{0,24}} - 1 \right) \approx 30,5. \end{aligned}$$

Получили, что $NPV \approx 30,5$ млн руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные непрерывные капиталовложения от 10 до 13 млн руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн руб. при постоянной процентной ставке. Величина NPV при непрерывном поступлении денег получилась меньше величины NPV при ежегодном поступлении, так как дисконт-фактор $e^{-0,01pt}$ непрерывной капитализации убывает значительно быстрее дисконт-фактора $(1+0,01p)^{-t_i}$ ежегодной капитализации.

Ответ. При ежегодном инвестировании $NPV \approx 40,8$ млн руб., при непрерывном – $NPV \approx 30,5$ млн руб.

Пример 9. Обсуждаемый вариант капитальных затрат и ожидаемых доходов финансового проекта представлен в таблице. Оценить его эффективность для инвестора, если годовая процентная ставка $p = 8\%$ годовых.

Время платежа t_i , годы	0	1	2	3	5	7	10	13	15
Размер платежа, млн руб.	-12	-8	-5	-3	15	10	8	6	4

Решение. Вычислим чистый приведенный доход NPV (млн руб.) проекта на момент заключения договора:

$$NPV = \sum_{i=0}^{15} \frac{K(t_i)}{(1+0,08)^{t_i}} = -10 - \frac{8}{1,08} - \frac{5}{(1,08)^2} - \frac{3}{(1,08)^3} + \frac{16}{(1,08)^5} + \frac{14}{(1,08)^7} +$$

$$+ \frac{10}{(1,08)^{10}} + \frac{8}{(1,08)^{13}} + \frac{6}{(1,08)^{15}} \approx 4,45.$$

Найдем индекс прибыльности PI финансового проекта. По определению PI является корнем уравнения (2.25). Сделаем замену переменной вида $x = \frac{1}{(1+0,01 \cdot PI)}$, с учетом которой уравнение (2.25) можно записать следующим

образом: $\sum_{i=0}^{15} K(t_i) x^{t_i} = 0$ или

$$-10 - 8x - 5x^2 - 3x^3 + 16x^5 + 14x^7 + 10x^{10} + 8x^{13} + 6x^{15} = 0.$$

Решение уравнения $x \approx 0,903$ (получено с использованием пакета Maple7), тогда

$$PI = \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \cdot 100 \% = \left(\frac{1}{0,903} - 1 \right) \cdot 100 \% \approx 10,73\% \text{ годовых.}$$

Ответ: $NPV \approx 4,45$ млн руб., $PI \approx 10,73\%$, проект является выгодным.

Теоретический материал: [1, гл. 6, 11], [2, гл. 2, 7], [3, гл. 3, 7, 15], [4, темы 8, 14], [5], [6, гл. 2, 7], [13], [14, гл. 2, §6], [15], [18, гл. 2–7], [19, гл. 5].

Тема 3. Однофакторные оптимизационные модели микроэкономики

Необходимые математические понятия: функция, непрерывная функция, основные элементарные функции; производная, таблица производных основных элементарных функций, правила вычисления производных, применение дифференциального исчисления к исследованию функций.

3.1. Классификация экономических показателей

Все экономические показатели можно разделить на **абсолютные** и **относительные**. **Абсолютные показатели** выражаются в каких-либо объемных или денежных единицах и представляют собой либо значение величины за определенный промежуток времени (**потоковое значение**), либо значение величины на определенную дату (**запасовое значение**). **Относительные показатели** представляют собой отношения абсолютных (или других относительных) показателей: например, количество единиц одного показателя на единицу другого в один и тот же момент времени или отношение двух значений одного и того же показателя в различные моменты времени (**темпы роста данного показателя**). Для комплексного анализа экономической ситуации важно учитывать как абсолютные, так и относительные показатели. Наиболее широко используют **средние** и **предельные** величины.

Пусть $F(x)$ – некоторый абсолютный показатель. Его так же называют **суммарной величиной**. В экономике в роли суммарных величин выступают доход (выручка) или издержки как функции объема выпуска ($R(Q)$ или $C(Q)$), объем выпуска как функция от количества переменного ресурса, например, труда $Q(L)$, полезность как функция количества потребляемого блага $U(x)$ и другие экономические показатели.

Среднюю величину $AF(x)$ определяют как отношение суммарной величины $F(x)$ к независимой переменной x : $AF(x) = \frac{F(x)}{x}$. Примеры средних величин в экономике: средний доход (выручка) $AR = \frac{R(Q)}{Q}$, средние издержки $AC = \frac{C(Q)}{Q}$, средний продукт труда $AQ_L = \frac{Q(L)}{L}$ и т.д.

Маржинальную (предельную) величину $MF(x)$ определяют как производная суммарной величины $F(x)$ по независимой переменной x : $MF(x) = F'(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$ (предполагается, что независимая переменная меняется непрерывно). В случае, когда суммарная величина меняется дискретно, то под маржинальной (предельной) величиной понимают отношение изменения $\Delta F(x)$ суммарной величины $F(x)$ к вызвавшему это изменение изменению Δx независимой переменной x : $MF(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x}$. Примеры предельных величин в экономике: предельный доход (выручка) $MR = R'(Q)$, предельные издержки $MC = C'(Q)$, предельный продукт труда $MQ_L = Q'(L)$ и т.д.

Суммарные, средние и предельные величины могут быть заданы как аналитически (формулой), так и графически.

Пример 1. Пусть зависимость издержек производства задана формулой $C(Q) = 30Q - 0,04Q^3$. Найти средние и предельные издержки при объеме продукции $Q = 10$ единиц.

Решение. Средние издержки заданы формулой $AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$, тогда $AC = \frac{30Q - 0,04Q^3}{Q} = 30 - 0,04Q^2$; средние издержки при объеме продукции $Q = 10$ единиц $AC(10) = 30 - 0,04 \cdot 10^2 = 30 - 4 = 26$ денежных единиц на единицу продукции. Предельные издержки задаются формулой $MC = C'(Q)$, тогда $MC = (30Q - 0,04Q^3)' = 30 - 0,12Q^2$; предельные издержки при объеме продукции $Q = 10$ единиц $MC(10) = 30 - 0,12 \cdot 10^2 = 30 - 12 = 18$ денежных единиц на единицу продукции.

Ответ. Средние издержки $AC = 26$ денежных единиц на единицу продукции, предельные издержки $MC = 18$ денежных единиц на единицу продукции.

3.2. Максимизация прибыли фирмы

Экономическими показателями, характеризующими работу фирмы, являются объем выпуска продукции Q , цена единицы продукции $P(Q)$, доход (выручка) от продажи $R(Q) = P(Q)Q$, издержки $C(Q)$, прибыль $\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$. Доход от продаж $R(Q) = P(Q)Q$ определяется зависимостью $P(Q)$ цены от количества проданной продукции. Издержки $C(Q)$ зависят от технологии производства. Требуется найти такой объем выпуска продукции Q , при котором прибыль была бы максимальна.

В микроэкономике известен закон: *оптимальный уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода: $MR = MC$* . Покажем, что этот закон можно получить как следствие теоремы Ферма. Действительно, объем выпуска продукции Q_{opt} оптимален, если прибыль $\Pi(Q_{opt})$ максимальна. В точке наибольшего значения, по теореме Ферма, $\Pi'(Q_{opt}) = 0$ или $R'(Q_{opt}) - C'(Q_{opt}) = 0$, или $R'(Q_{opt}) = C'(Q_{opt})$, или $MR(Q_{opt}) = MC(Q_{opt})$.

Аналогично рассуждая, можно получить еще один закон микроэкономики: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек: $AC = MC$* . Действительно, уровень наиболее экономичного производства $Q_{эк}$ характеризуется тем, что средние издержки

$AC(Q_{эк})$ минимальны. Следовательно, $(AC(Q_{эк}))' = 0$. Так как $AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$, то $(AC(Q))' = \frac{C'(Q)Q - C(Q)}{Q^2}$, тогда $C'(Q_{эк}) = \frac{C(Q_{эк})}{Q_{эк}}$ или $MC(Q_{эк}) = AC(Q_{эк})$.

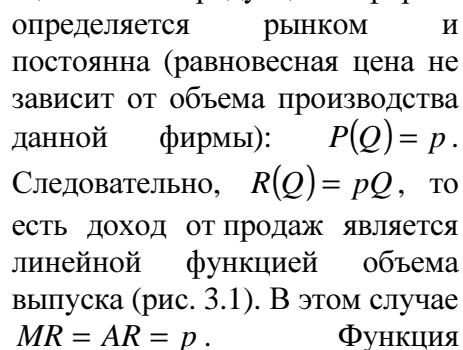
В микроэкономике типичная функция издержек может иметь вид $C(Q) = \lambda_0 + \lambda_1 Q - \lambda_2 Q^2 + \lambda_3 Q^3$, где $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 > 0$ – экзогенные параметры. Для упрощения выкладок будем полагать, что $\lambda_0 = 0$, и функция издержек имеет вид $C(Q) = \lambda_1 Q - \lambda_2 Q^2 + \lambda_3 Q^3$.

Исследуем функцию издержек $C(Q) = \lambda_1 Q - \lambda_2 Q^2 + \lambda_3 Q^3$ на возрастание, убывание и точки экстремума. Производная функции издержек $C'(Q) = \lambda_1 - 2\lambda_2 Q + 3\lambda_3 Q^2$. Если $\lambda_2^2 - 3\lambda_1\lambda_3 > 0$, то необходимое условие экстремума $C'(Q) = \lambda_1 - 2\lambda_2 Q + 3\lambda_3 Q^2 = 0$ выполняется при $Q_1 = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$ и $Q_2 = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$. Производная функции издержек $C'(Q) > 0$ при $Q \in (0, Q_1)$ и $Q \in (Q_2, +\infty)$. На этих интервалах издержки возрастают. Производная функции издержек $C'(Q) < 0$ при $Q \in (Q_1, Q_2)$. На этом интервале издержки убывают. Следовательно, при $Q_1 = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$ функция издержек $C(Q)$ имеет максимум, а при $Q_2 = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 3\lambda_1\lambda_3}}{3\lambda_3}$ – минимум. Если $\lambda_2^2 - 3\lambda_1\lambda_3 \leq 0$, то функция издержек строго монотонно возрастает.

Найдем уровень наиболее экономичного производства. Он определяется как точка минимума функции средних издержек. Средние издержки $AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \lambda_1 - \lambda_2 Q + \lambda_3 Q^2$. Тогда $(AC(Q))' = -\lambda_2 + 2\lambda_3 Q = 0$ при $Q_{эк} = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}$ единиц. По второму достаточному условию экстремума $(AC(Q))'' = 2\lambda_3 > 0$ при всех значениях Q , следовательно, $Q_{эк} = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}$ – точка минимума функции средних издержек. Но, с другой стороны, в этой точке $AC = MC$.

Проанализируем функции дохода от продаж и прибыли фирмы для двух типов рыночной структуры: совершенной конкуренции и монополии.

В условиях совершенной конкуренции цена на продукцию фирмы

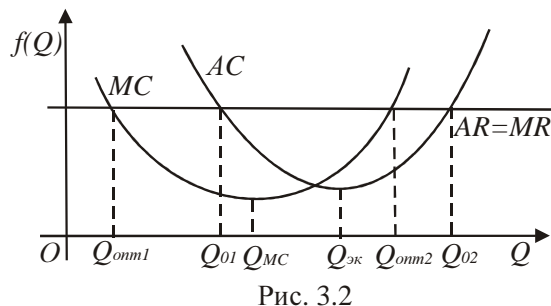


Решая неравенство $\Pi(Q) > 0$
или

Возможны три случая:

- 2) если $p \leq \lambda_1$ и $\lambda_2^2 + 4(p - \lambda_1)\lambda_3 > 0$, то $\Pi(Q) = 0$ при $Q = 0$,
 $Q_{01} = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 + 4(p - \lambda_1)\lambda_3}}{2\lambda_3}$ и $Q_{02} = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 4(p - \lambda_1)\lambda_3}}{2\lambda_3}$ (рис. 3.1). На рис. 3.2 это точки,
 в которых $AR = AC$;

- Исследуем функцию прибыли $\Pi(Q)$ на монотонность и экстремумы. Найдем оптимальный уровень производства. Он определяется как



Необходимое условие экстремума имеет вид $\Pi'(Q) = 0$ или $(p - \lambda_1) + 2\lambda_2 Q - 3\lambda_3 Q^2 = 0$.

Здесь также возможны три случая:

1) если $p > \lambda_1$, то точка экстремума (при $Q > 0$) только одна:

$Q_{onm} = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 3(p - \lambda_1)\lambda_3}}{3\lambda_3}$. Используя достаточные условия существования экстремума, нетрудно показать, что она является точкой максимума;

2) если $p \leq \lambda_1$ и $\lambda_2^2 + 3(p - \lambda_1)\lambda_3 > 0$, то точек экстремума две:

$Q_{1onm} = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 + 3(p - \lambda_1)\lambda_3}}{3\lambda_3}$ и $Q_{2onm} = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 3(p - \lambda_1)\lambda_3}}{3\lambda_3}$. Исследование функции $\Pi(Q)$ на монотонность показывает, что прибыль убывает при $Q \in (0, Q_{1onm})$ и $Q \in (Q_{2onm}, +\infty)$, а возрастает при $Q \in (Q_{1onm}, Q_{2onm})$. Точка

$Q_{1onm} = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 + 3(p - \lambda_1)\lambda_3}}{3\lambda_3}$ является точкой минимума прибыли, а точка

$Q_{2onm} = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 3(p - \lambda_1)\lambda_3}}{3\lambda_3}$ – точкой максимума (рис. 3.1). На рис.3.2 это точки,

в которых $MR = MC$. Эта ситуация является наиболее типичной для микроэкономики: при малых объемах выпуска издержки растут быстрее, чем доход от продаж; с увеличением объема производства доход от продаж увеличивается быстрее, чем издержки, а начиная с некоторого уровня производства, издержки снова превышают доход от продаж;

3) если $p \leq \lambda_1$ и $\lambda_2^2 + 3(p - \lambda_1)\lambda_3 < 0$, то функция прибыли монотонно убывает и экстремумов не имеет. В этом случае производство нерентабельно.

Максимизация прибыли фирмы в условиях монополии

В случае монополии фирма сама выбирает цену, исходя из кривой спроса. Так как кривая спроса $Q = Q(P)$ является убывающей, то и зависимость цены от спроса $P = P(Q)$, обратная к функции спроса, является убывающей, поэтому $P'(Q) < 0$. Функция дохода имеет вид $R(Q) = P(Q)Q$. При той же функции издержек функция прибыли будет равна

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P(Q)Q - \lambda_1 Q + \lambda_2 Q^2 - \lambda_3 Q^3.$$

Зная явный вид функции $P = P(Q)$, можно найти оптимальный уровень производства как точку максимума функции прибыли (в этой точке по-прежнему предельный доход равен предельным издержкам). Графики функций дохода, издержек и прибыли показаны на рис. 3.3.

Функция среднего дохода

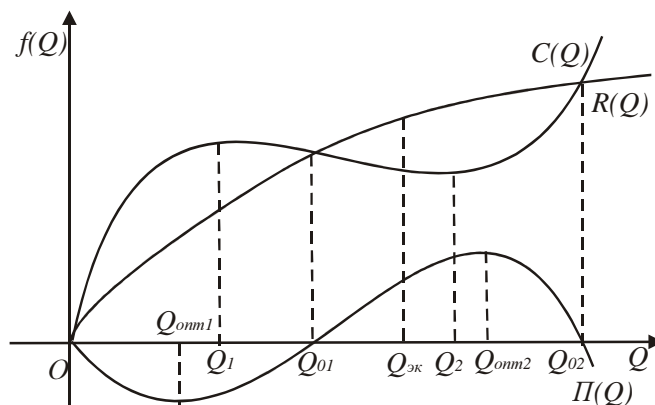


Рис. 3.3

$AR(Q) = \frac{P(Q)Q}{Q} = P(Q)$ совпадает с функцией цены от спроса и убывает. Функция

предельного дохода

$$MR(Q) = R'(Q) = (P(Q)Q)' = QP'(Q) + P(Q) = AR(Q) + QP'(Q) < AR(Q)$$

при любых объемах выпуска, так как $P'(Q) < 0$ (рис. 3.4).

Пример 2. Пусть зависимость цены от спроса имеет вид $P(Q) = 100 - Q$, функция издержек

$$C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000.$$

Найти объем производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Решение. Функция прибыли имеет вид

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P(Q)Q - C(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000.$$

Тогда $\Pi'(Q) = -3Q^2 + 72Q - 69$. Приравняв производную функции прибыли к нулю, получаем $Q_{onm1} = 1$, $Q_{onm2} = 23$.

Проверим достаточное условие экстремума. Вторая производная функции прибыли равна $\Pi''(Q) = -6Q + 72$, тогда $\Pi''(Q_{onm1}) = -6 + 72 = 66 > 0$, следовательно, при $Q_{onm1} = 1$ функция прибыли достигает минимума. Так как $\Pi''(Q_{onm2}) = -6 \cdot 23 + 72 = -66 < 0$, то при $Q_{onm2} = 23$ функция прибыли достигает максимума. Максимальная прибыль $\Pi_{\max} = -23^3 + 36 \cdot 23^2 - 69 \cdot 23 - 4000 = 1290$ денежных единиц.

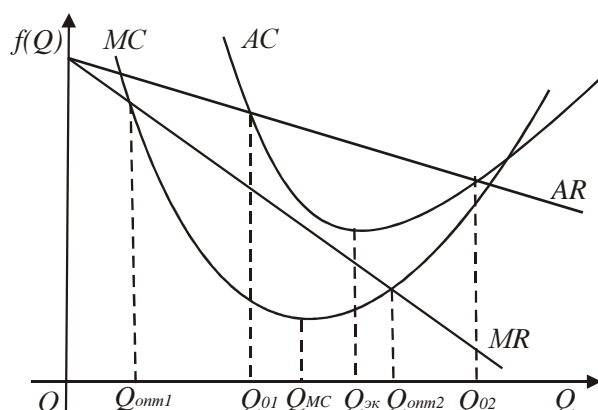


Рис. 3.4

3.3. Оптимизация налогообложения предприятий

Пусть β – налог с единицы выпускаемой продукции. Тогда суммарный налог с Q единиц продукции составит $B = \beta Q$. В этом случае функция прибыли будет иметь вид $\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) - \beta Q$. Требуется выяснить, каким должен быть налог β , чтобы величина суммарного налога B со всей продукции была наибольшей.

Условие максимума прибыли имеет вид $\Pi'(Q) = R'(Q) - C'(Q) - \beta = 0$. Решая это уравнение, находим $Q_{onm}(\beta)$ (то есть оптимальный объем производства зависит от налога β). Подставим $Q_{onm}(\beta)$ в величину суммарного налога, получим $B = \beta Q(\beta)$ и отсюда найдем оптимальное значение налога β .

Пример 3. Пусть $R(Q) = 16Q - Q^2$, $C(Q) = Q^2 + 1$. Выяснить, каким должен быть налог β , чтобы величина суммарного налога B со всей продукции была наибольшей, найти оптимальный объем производства и максимальную прибыль. Сравнить полученный результат с результатом отсутствия налогообложения.

Решение. Функция прибыли имеет вид $\Pi(Q) = -2Q^2 + 16Q - 1 - \beta Q$. Необходимое условие максимума прибыли: $\Pi'(Q) = -4Q + 16 - \beta = 0$. Отсюда $Q_{opt}(\beta) = 4 - \frac{\beta}{4}$. Проверим достаточное условие экстремума: $\Pi''(Q) = -4Q < 0$ при любом значении $Q > 0$. Следовательно, точка $Q_{opt}(\beta) = 4 - \frac{\beta}{4}$ является точкой максимума при условии $0 \leq \beta < 16$.

Подставим полученное значение объема производства в величину суммарного налога, получим $B = \beta Q(\beta) = \beta \left(4 - \frac{\beta}{4}\right) = 4\beta - \frac{\beta^2}{4}$. Необходимое условие максимума суммарного налога $B'(\beta) = 0$ или $4 - \frac{\beta}{2} = 0$. Тогда $\beta = 8$. Так как $B''(\beta) = -\frac{1}{2} < 0$, то $\beta = 8$ является точкой максимума. Тогда максимальный суммарный налог $B_{\max} = B(8) = 32 - \frac{64}{4} = 16$, оптимальный объем производства $Q_{opt}(8) = 2$, а максимальная прибыль $\Pi_{\max} = \Pi(2) = 7$.

При отсутствии налогообложения ($\beta = 0$) оптимальный объем производства $Q_{opt}(0) = 4$, а максимальная прибыль $\Pi_{\max} = \Pi(4) = 31$. Таким образом, уменьшение налогообложения стимулирует рост выпуска продукции и приводит к увеличению прибыли от ее реализации.

Теоретический материал: [1, гл. 7, 8], [2, гл. 4, 5], [3, гл. 5, 6], [4, темы 11, 12], [5], [6], [7, , гл. 3, 4, 6], [8], [11, гл. 4, 5], [14], [19, гл. 4].

Тема 4. Моделирование распределения доходов среди групп населения

Необходимые математические понятия: функция, непрерывная функция, основные элементарные функции; первообразная и неопределенный интеграл, таблица первообразных основных элементарных функций, определенный интеграл, геометрический смысл определенного интеграла, способы вычисления интегралов.

4.1. Понятие о распределении доходов и кривой Лоренца

Доходом называют превышение стоимости произведенного продукта над затратами на его производство, а также долю каждого класса, социальной группы или определенного индивидуума в произведенном продукте, присвоенную ими. Формирование доходов населения – одна из главных задач социальной политики государства. Однако при наличии общих принципов формирования доходов сохраняются условия неравенства получаемых доходов и, как следствие, уровней жизни различных слоев и групп населения.

В экономической теории зависимость процента доходов (y) от процента имеющего их населения (x) называют **кривой Лоренца**. Она является показателем, отражающим неравномерность распределения совокупного дохода общества между различными группами населения.

Равномерное распределение доходов (абсолютное равенство) характеризуется тем, что 20 % населения получают 20 % от совокупного дохода, 40 % населения – 40 % от совокупного дохода. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца имеет вид прямой OA (идеальная кривая Лоренца) и может быть задана функцией $y = x$ на отрезке $[0; 1]$ (рис. 4.1, за 1 приняты 100 % доходов и 100 % населения).

Абсолютное неравенство означает, что и 20 %, и 40 %, и т.д. населения не получают никакого дохода, за исключением одного человека, который получает 100 % совокупного дохода. Ломаная OBA на рис. 4.1 – кривая Лоренца при абсолютном неравенстве.

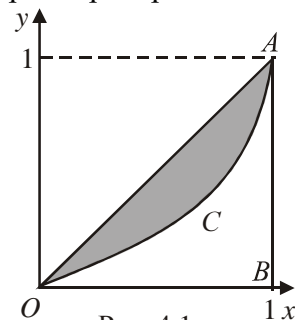


Рис. 4.1

Реальное распределение совокупного дохода представлено кривой $O\dot{C}A$ (реальная кривая Лоренца). Чем дальше кривая $O\dot{C}A$ от прямой OA , тем больше неравенство в распределении доходов в данной экономике на данный момент времени.

Доказано (см., например, [15]), что реальная кривая Лоренца является вогнутой возрастающей функцией $y = f(x)$, заданной на отрезке $[0; 1]$ (за 1 приняты 100 % доходов и 100 % населения).

4.2. Индекс Джини

Величину, равную отношению площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$, к площади треугольника OAB , называют **индексом**

(**коэффициентом**) **Джини**: $GI = \frac{S}{S_{\triangle OAB}}$ (см. рис. 4.1). Коэффициент Джини

характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

Так как треугольник OAB является прямоугольным и равнобедренным со стороной катета, равной 1, поэтому $S_{OAB} = \frac{1}{2}$. Отсюда получаем формулу для вычисления коэффициента Джини

$$GI = \frac{S}{S_{\Delta OAB}} = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx. \quad (4.1)$$

В условиях абсолютного равенства площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$, $S = 0$, тогда и $GI = 0$. В условиях абсолютного неравенства площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$, $S = S_{\Delta OAB}$, тогда $GI = 1$. Следовательно, $0 \leq GI \leq 1$, причем чем дальше кривая $ОСА$ от прямой OA , тем более неравномерно распределены доходы в данной экономике, тем больше площадь фигуры S , и тем ближе значение GI к единице.

Замечание. Иногда в литературе (например, в [19]) индексом Джини называют величину, равную площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = f(x)$.

Пример. Пусть функция Лоренца имеет вид $f(x) = x^2$. Найти индекс Джини.

Решение. Согласно формуле (4.1) имеем

$$GI = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $GI = \frac{1}{3}$. Так как $GI = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, то в данной экономике распределение доходов достаточно равномерное.

Теоретический материал: [1, гл. 11], [2, гл. 7], [4, тема 14], [9, гл. 12], [11, гл. 7], [14, гл. 4], [17], [19, гл. 4].

Тема 5. Моделирование рыночного равновесия

Необходимые математические понятия: функция, непрерывная функция, основные элементарные функции; предел функции, способы вычисления пределов функций; бесконечно малые и бесконечно большие функции, замечательные пределы и следствия из них; производная, таблица производных основных элементарных функций, правила вычисления производных; линейные дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения; линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и методы их решения, состояние равновесия дифференциального уравнения.

5.1. Спрос и предложение. Понятие о рыночном равновесии

Обмен товаров на деньги и наоборот называют рыночными отношениями. Важнейшими факторами рыночных отношений являются спрос и предложение. **Спросом** называют количество товаров, которое покупатели могут приобрести. **Предложением** называют количество товаров, произведенных на продажу. **Рыночным равновесием** называют ситуацию, когда удастся продать все количество товаров, изготовленных на продажу, то есть величины спроса и предложения совпадают. Цену единицы товара, при которой достигается состояние рыночного равновесия (величины спроса и предложения совпадают), называют **равновесной ценой**. В силу того, что спрос и предложение меняются с течением времени под воздействием многих факторов, возникает задача поиска рыночного равновесия и равновесной цены, являющаяся главной проблемой не только рыночных отношений, но математического моделирования.

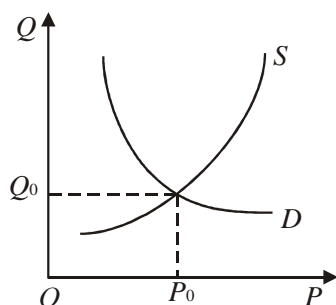
Простейшей моделью рыночного равновесия является так называемая паутинная модель «спрос-предложение». При ее построении используются следующие допущения:

1. На рынке имеется всего один продукт.
2. Изменяться может только цена этого продукта.
3. Все остальные факторы, от которых зависит спрос на данный товар и объем предложения данного товара (цены на другие товары, основные производственные фонды, характер применяемой технологии, налоги и дотации, природно-климатические условия и т.д.), остаются неизменными.

С учетом перечисленных допущений можно задать функции спроса D и предложения S от цены товара P : $Q = D(P)$ и $Q = S(P)$.

Характерной особенностью функции предложения $S(P)$ для многих видов товаров является ее монотонное возрастание. Рост предложения при увеличении цены можно объяснить тем, что увеличивается оптимальный объем выпуска товара предприятием при увеличении его цены, а также тем, что для производства высокорентабельного товара в отрасль включаются новые предприятия. При этом на плоскости OPQ кривая предложения (линия S на рис. 5.1) задается уравнением $P = MC(Q)$ ($MC(Q)$ – предельные издержки от производства единицы продукции) и представляет собой геометрическое место точек минимумов линий постоянной прибыли (см. тему 7).

Характерная особенность функции спроса $D(P)$ – ее монотонное убывание для многих видов товаров, при этом ее график (кривая D на рис. 5.1)



представляет собой геометрическое место точек на плоскости OPQ , в которых цена принимает максимально возможное значение на линиях постоянной полезности (см. тему 6).

Функции спроса и предложения являются основными составляющими модели рынка товаров, поскольку они, по предположению, представляют собой решения оптимизационных задач, которые возникают перед участниками («покупателями» и «товаропроизводителями»). Пересечение графиков спроса и предложения происходит в точке равновесия (точка $(P_0; Q_0)$ на рис. 5.1), а соответствующую этой точке цену $P = P_0$ называют **равновесной**.

В силу свойств кривых спроса и предложения равновесное решение является устойчивым в том смысле, что если цена строго фиксирована и равна равновесной $P = P_0$, то товаропроизводитель, максимизируя прибыль, поставляет на рынок товар в количестве $S(P_0) = Q_0$; одновременно потребитель, стремясь максимизировать полезность, предъявляет спрос $D(P_0) = Q_0$. При установлении на совершенно конкурентном рынке равновесной цены объем товаров (предложение), предлагаемый товаропроизводителем и доставляющий ему максимум прибыли по данной цене, в точности равен спросу потребителя. Математически этот факт можно выразить уравнением $S(P) = D(P)$, решением которого будет являться значение равновесной цены $P = P_0$. Если параметры уравнения $S(P) = D(P)$ не зависят от времени, то его называют **статической моделью «спрос-предложение»**, в противном случае – **динамической моделью**.

Динамические модели рынка используются для анализа изменения переменных (цена, спрос, предложение) во времени в случае, когда цена в начальный момент отличается от равновесной. При этом процесс установления равновесной цены может быть описан различными моделями при использовании одних и тех же функций спроса $D(P)$ и предложения $S(P)$ (предполагается, что функции предложения и спроса удовлетворяют следующим условиям: $S'(P) > 0$, $D'(P) < 0$). Различают два подхода:

1) непрерывный, в котором динамика цен описывается дифференциальным уравнением вида $F\left(D(P), S(P), \frac{dP}{dt}\right) = 0$ или $F\left(D(P), S(P), \frac{dP}{dt}, \frac{d^2P}{dt^2}\right) = 0$ (см. пункт 5.3);

2) дискретный, когда переменные на промежутке времени $[t, t+1)$ принимаются неизменными.

В последнем случае последовательным промежуткам времени $[t, t+1)$ соответствуют значения цены P_t , спроса D_t и предложения S_t . В зависимости от используемых гипотез в дискретной модели динамики цен происходит либо запаздывание предложения, – в этом случае равновесная цена определяется из уравнения $S(P_{t+1}) = D(P_t)$, либо запаздывание спроса – в этом случае равновесная цена определяется из уравнения $S(P_t) = D(P_{t+1})$. В обоих случаях процесс поиска равновесной цены является итерационным, то есть представляет собой формирование последовательности цен $\{P_t\}$, сходящейся к равновесной цене P_0 .

Динамические непрерывные модели «спрос-предложение» позволяют дать прогноз изменения цены с течением времени. Дискретные модели с

запаздыванием представляют интерес потому, что в них более последовательно, чем в непрерывных, отражаются процедуры принятия решений. Подробнее о моделях «спрос-предложение» с запаздыванием можно ознакомиться в [11, гл. 5], [16, гл. 21] и [19, гл. 5].

Модель рыночного равновесия в экономической системе с производством, распределением и потреблением большого числа товаров была предложена в конце XIX века Вальрасом. При ее построении предполагается, что число производителей и потребителей так велико, что ни один из них не может влиять на цены. При исследовании модели было доказано, что при определенных условиях существуют цены конкурентного равновесия, при которых каждый потребитель максимизирует свою полезность, а каждый производитель – свою прибыль ([9, гл. 7]).

5.2. Статическая модель рынка

5.2.1. Построение модели

Наиболее часто упоминаемой в курсе экономической теории паутиной моделью рыночного равновесия является статическая модель, удовлетворяющая допущениям 1–3 и предположению о том, что цена P не меняется с течением времени. Так как зависимость *спроса* $D(P)$ *от цены* P на товар является убывающей функцией, то в рамках рассматриваемой модели эту зависимость можно задать степенной функцией $D = kP^a + c$, где $a < 0$, $k > 0$. Зависимость *предложения* $S(P)$ *от цены* P на товар является возрастающей функцией. Эту зависимость так же можно задать степенной функцией $S = P^b + d$, где $b \geq 1$.

Величины D , S , P положительны, поэтому графики функций спроса и предложения расположены в первой четверти (рис. 5.1). Величины a , b , k , c и d зависят от внешних причин (так называемые *экзогенные параметры*). Условие равновесия $D(P) = S(P)$ является алгебраическим уравнением. Решение этого уравнения, равновесная цена P_0 , представляет собой точку пересечения графиков функций $S(P)$ и $D(P)$ (рис. 5.1).

Задача поиска равновесной цены представляет собой фактически торг между производителем и покупателем. В процессе торга возникает последовательность чисел, состоящая из называемых производителем и покупателем цен. В определенных условиях (функции $S(P)$ и $D(P)$ *вогнутые*, то есть $a < 0$, $k > 0$, $b \geq 1$) эта последовательность сходится к равновесной цене: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P_0$ (рис.

5.2, а)). При других условиях (функции $S(P)$ и $D(P)$ *выпуклые*, то есть $0 < a < 1$ при $k > 0$ и $0 < b < 1$, или $a > 1$ при $k < 0$ и $0 < b < 1$) равновесная цена неустойчива. В процессе торга последовательность цен расходится (рис. 5.2, б)).

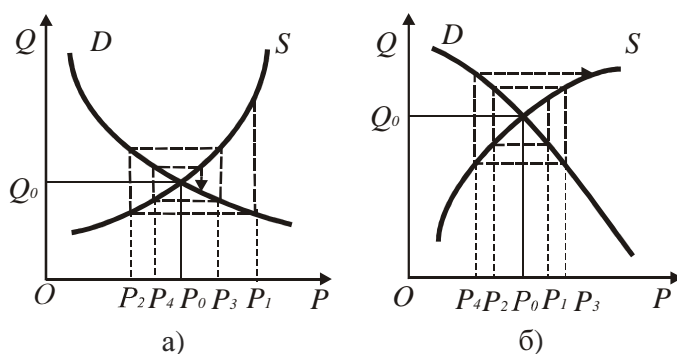


Рис. 5.2

На плоскости OPQ соответствующий процесс поиска равновесной цены изображается в виде «паутины», которая «намотана» на кривые спроса и предложения. Это дало основание для названия модели – *паутинная*.

Сходимость последовательности цен к равновесной цене можно объяснить и с экономической точки зрения. Например, если цена товара на рынке выше равновесной, то предложение превышает спрос и возникает затоваривание. В этой ситуации товаропроизводители (продавцы) многих видов товаров готовы пойти на снижение цены с целью привлечения большего числа покупателей (например, если речь идет о скоропортящихся товарах). Следовательно, при значениях цены выше равновесной происходит давление на нее в сторону уменьшения. Если же цена на рынке ниже равновесной, то спрос превышает предложение, и товар становится дефицитным. В этой ситуации часть покупателей готова заплатить за товар более высокую цену, но снизить риск и с уверенностью приобрести товар (например, если образуется очередь покупателей, то стоящие в ее конце могут не получить товара). Таким образом, при значениях цены ниже равновесной происходит давление на нее в сторону увеличения. Эти две тенденции приводят к тому, что на рынках многих видов товаров, как правило, устанавливается равновесие, при котором спрос равен предложению.

Замечание. Для функций $D(P)$ и $S(P)$ возможны и другие функциональные зависимости (например, линейная, показательная или полиномиальная). Способы получения этих зависимостей рассматриваются в темах 6 и 7 соответственно. При этом $S(P)$ будет положительной возрастающей функцией, а $D(P)$ – положительной убывающей функцией. Выпуклость или вогнутость функций $S(P)$ и $D(P)$ определяет сходимость или расходимость последовательности цен к равновесной цене.

5.2.2. Эластичность функции

При исследовании паутинной модели рыночного равновесия одной из главных является задача о том, насколько сильно изменяются спрос и предложение при изменении цены. Другими словами, требуется оценить чувствительность спроса и предложения к изменению цены. Для измерения чувствительности одного экономического показателя y к изменению другого показателя x используют относительные изменения переменных x и y .

Пусть величина y непрерывно зависит от x , и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Изменение независимой переменной x (Δx) приводит к изменению переменной y (Δy). Предел отношения относительных изменений переменных x и y называют *эластичностью функции* $y = f(x)$. Обозначим

эластичность изменения переменной y при изменении переменной x $E_x(y)$, тогда, используя определение производной, получаем

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \right) / \left(\frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{f'(x)}{y/x} = \frac{f'(x)}{f(x)/x} = \frac{Mf}{Af},$$

где Mf – предельное значение функции f в точке x , Af – среднее значение функции в точке x . Эту эластичность называют так же **предельной** или **точечной** эластичностью.

Замечание. В экономике под эластичностью понимают отношение относительных изменений переменных x и y : $E_x(y) = \left(\frac{\Delta y}{y} \right) / \left(\frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$.

Свойства эластичности

1. Эластичность – безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины x и y : $E_{ax}(by) = E_x(y)$.

2. Эластичности взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x , равна сумме эластичностей этих функций:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x , равна разности эластичностей этих функций:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

5. Эластичность суммы двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x , вычисляется по формуле

$$E_x(u+v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}.$$

5.2.3. Использование эластичности

в анализе экономических показателей

Пусть $y = f(x)$ – функция экономического показателя y от экономического показателя (или фактора) x . Различают три вида экономического показателя y в зависимости от величины $|E_x(y)|$:

а) если $|E_x(y)| > 1$, то экономический показатель y называют **эластичным по x** ;

б) если $|E_x(y)| = 1$, то экономический показатель y называют **нейтральным по x** ;

в) если $|E_x(y)| < 1$, то экономический показатель y называют **неэластичным по x** .

Эластичность функции $y = f(x)$ показывает приблизительно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%. Если экономический показатель y эластичен по x , то при изменении величины x , величина y меняется сильно, а если неэластичен, то слабо.

В качестве классического примера абсолютно неэластичного спроса ($E_P(D)=0$) рассматривается спрос на инсулин, неэластичного спроса ($|E_P(D)| < 1$) – спрос на товары первой необходимости (хлеб, молоко и т.п.).

Найдем изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на $a\%$. Величина спроса численно равна количеству проданных единиц продукции, то есть $D(P)=Q(P)$. Тогда доход (выручку) производителя от продажи $Q(P)$ единиц товара можно вычислить по формуле $R=QP$. Используя формулу для эластичности произведения функций и учитывая, что эластичность спроса по цене всегда отрицательна (зависимость спроса от цены – убывающая функция), а $E_P(Q)=E_P(D)$, получаем

$$E_P(R)=E_P(Q)+E_P(P)=E_P(Q)+1=1-|E_P(D)|. \quad (5.1)$$

Из формулы видно, что эластичность выручки по цене отрицательна для товаров, спрос на которые эластичен ($|E_P(D)| > 1$), и положительна для товаров, спрос на которые неэластичен ($|E_P(D)| < 1$). Это означает, что если спрос неэластичен, то изменение цены вызывает изменение выручки в том же направлении. Продавцам выгодно повышать цену, так как повышение цены увеличивает выручку. Если же спрос эластичен, то увеличение цены вызывает изменение выручки в противоположном направлении. В этом случае продавцам выгоднее снижать цену на товар.

Пример 1. Пусть опытным путем установлены функции спроса и предложения от цены товара P : $D=\frac{P+1}{P}$, $S=P^2+1$. Найти: 1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) изменение спроса (в процентах) и изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 10 %.

Решение. 1) Равновесная цена определяется равенством $S(P)=D(P)$ или $\frac{P+1}{P}=P^2+1$. Решая это уравнение, получаем, что равновесная цена $P_0=1$ (денежных единиц).

2) Найдем эластичность спроса по цене:

$$E_P(D)=\frac{P}{D(P)}D'(P)=\frac{P}{(P+1)/P}\left(\frac{P+1}{P}\right)'=\frac{P^2}{P+1}\cdot\frac{P-(P+1)}{P^2}=\frac{-1}{P+1}.$$

При $P_0=1$ $E_{P_0}(D)=-0,5$. Так как $|E_P(D)|=|-0,5|=0,5 < 1$, то спрос является неэластичным по цене.

Найдем эластичность предложения по цене:

$$E_P(S)=\frac{P}{S(P)}S'(P)=\frac{P}{P^2+1}(P^2+1)'=\frac{P}{P^2+1}\cdot 2P=\frac{2P^2}{P^2+1}.$$

При $P_0=1$ $E_{P_0}(S)=1$. То есть предложение по цене нейтрально.

3) Найдем изменение спроса (в процентах) при увеличении цены на 10 %. Так как эластичность спроса $D=D(P)$ показывает приблизительно, на сколько процентов изменится спрос D при изменении цены P на 1 %, то при увеличении цены на $a\%$ спрос изменится на величину $\Delta D=a\% \cdot E_P(D)$. При $a=10\%$ получаем $\Delta D=10\% \cdot (-0,5)=-5\%$, то есть спрос уменьшится на 5 %.

Найдем изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 10 %. Согласно формуле (5.1) имеем $E_P(R) = 1 - |E_P(D)| = 1 - 0,5 = 0,5$, тогда $\Delta R = a \% \cdot E_P(D) = 10 \% \cdot 0,5 = 5 \%$, то есть доход увеличится на 5 %.

Ответ: 1) равновесная цена $P_0 = 1$ (денежных единиц); 2) при равновесной цене $E_{P_0}(D) = -0,5$, $E_{P_0}(S) = 1$; 3) при увеличении цены на 10 % спрос уменьшится на 5 %, а доход увеличится на 5 %.

Замечание. Используя значения эластичностей спроса и предложения по цене в точке P_0 , можно выяснить, сходится ли последовательность цен к равновесному значению. В частности, если $|E_{P_0}(D)| \leq E_{P_0}(S)$, то последовательность цен сходится. Если же $|E_{P_0}(D)| > E_{P_0}(S)$, то расходится.

5.3. Динамические модели рынка

5.3.1. Модель Эванса

Простейшей динамической моделью равновесия на рынке одного товара является модель Эванса. При ее построении используются следующие предположения:

1. Спрос и предложение являются линейными функциями цены:

$$D(P) = a - bP, \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (\text{спрос с ростом цены убывает});$$

$$S(P) = \alpha + \beta P, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (\text{предложение с ростом цены растет}).$$

2. При нулевой цене спрос превышает предложение: $a > \alpha$.

3. Время t считается непрерывным.

4. Изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением:

$$\Delta P = \gamma(D(P) - S(P))\Delta t, \quad \gamma > 0. \quad (5.2)$$

Согласно формуле (5.2) взаимодействие потребителей и производителей происходит таким образом, что отражающая это взаимодействие цена непрерывно приспосабливается к ситуации на рынке: в случае превышения спроса над предложением – возрастает, в противоположном случае – падает. Непрерывное изменение цены удобно описывать производной цены по времени: $\dot{P} = \frac{dP}{dt}$. Тогда, используя предположения 1–4, приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно цены:

$$\dot{P} = -\gamma(b + \beta)P + a - \alpha \quad (5.3)$$

с начальным условием $P(0) = P_0$.

Дифференциальное уравнение (5.3) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Его состоянием равновесия, определяемым условием $\dot{P} = 0$, является прямая $P = \frac{a - \alpha}{\gamma(b + \beta)}$.

Решением, удовлетворяющим начальному условию $P(0) = P_0$, является функция

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{a - \alpha}{\gamma(b + \beta)} \right) e^{-\gamma(b + \beta)t} + \frac{a - \alpha}{\gamma(b + \beta)}.$$

Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(P_0 - \frac{a - \alpha}{\gamma(b + \beta)} \right) e^{-\gamma(b + \beta)t} + \frac{a - \alpha}{\gamma(b + \beta)} \right) = \frac{a - \alpha}{\gamma(b + \beta)}$, то равновесная цена с течением времени обязательно будет достигнута, причем ее значение не будет зависеть от начальной цены $P(0) = P_0$.

Заметим, что равновесная цена динамической модели Эванса в γ раз меньше равновесной цены $P_s = \frac{a - \alpha}{(b + \beta)}$ статической модели «спрос-предложение», определяемой равенством $D(P) = S(P)$, с теми же функциями спроса и предложения.

5.3.2. Модель рынка, учитывающая темп изменения цены

В реальных ситуациях спрос и предложение зависят не только от цены, но и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывной и дифференцируемой зависимостью цены от времени эти характеристики описываются, соответственно, первой (\dot{P}) и второй (\ddot{P}) производными функции $P(t)$ по времени t . В этом случае функции спроса и предложения могут иметь вид

$$D(t) = d_1 \ddot{P} + d_2 \dot{P} + d_3 P + d_4, \quad S(t) = s_1 \ddot{P} + s_2 \dot{P} + s_3 P + s_4. \quad (5.4)$$

Принятые в (5.4) зависимости могут быть объяснены следующим образом:

1) спрос «подогревается» темпом изменения цены: если темп растет (коэффициент при \dot{P} больше нуля), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот;

2) изменение цены также влияет на спрос покупателя: если цена растет (коэффициент при P больше нуля), то спрос уменьшается, если цена падает (коэффициент при P меньше нуля), то спрос растет;

3) предложение также усиливается темпом изменения цены и ростом цены.

Если предположить, что в уравнениях (5.4) экзогенные параметры d_i и s_i ($i = \overline{1, 4}$) – вещественные числа, то, записывая условие рыночного равновесия $D(P) = S(P)$, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно равновесной цены $P(t)$:

$$(d_1 - s_1) \ddot{P} + (d_2 - s_2) \dot{P} + (d_3 - s_3) P + (d_4 - s_4) = 0. \quad (5.5)$$

Для прогнозирования изменения цены (динамики цены) P требуется установить функциональную зависимость $P(t)$. Для этого нужно найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (5.5), которое может быть получено как сумма общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$(d_1 - s_1) \ddot{P} + (d_2 - s_2) \dot{P} + (d_3 - s_3) P = 0$$

и любого частного решения неоднородного дифференциального уравнения (5.5). В качестве любого частного решения можно использовать значение равновесной цены P_0 , которое находят из уравнения (5.5), полагая в нем $\dot{P} = \ddot{P} = 0$.

С прикладной точки зрения функция $P(t)$ должна быть определена и положительна при $t \geq 0$ ($P(t) > 0$), и удовлетворять одному из следующих условий:

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = P_0$, P_0 – равновесная цена.
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \pm\infty$ или не существует.
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$ не существует, $P(t)$ – ограниченная периодическая функция.

Условие 1 описывает состояние стабильного рынка в условиях конкуренции, условие 2 характеризует панику на рынке или гиперинфляцию, условие 3 – динамику цен товаров сезонного спроса (функция $P(t)$ испытывает периодические колебания около состояния равновесия).

Пример 2. Пусть $D(t) = 3P - P - 2P + 18$, $S(t) = 4P + P + 3P + 3$. Найти равновесную цену и общий вид функции $P(t)$. Выяснить, какова тенденция изменения цены с течением времени.

Решение. Приравняв $D(t) = S(t)$ и выполняя необходимые преобразования, получим уравнение (5.5) в виде

$$P + 2P + 5P - 15 = 0. \quad (5.6)$$

Найдем равновесную цену, полагая в уравнении (5.6) $P = P_0 = 0$. Тогда равновесная цена будет являться корнем уравнения $5P - 15 = 0$, следовательно, $P_0 = 3$ (денежных единиц).

Найдем динамику изменения цены. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид $P + 2P + 5P = 0$, его характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Следовательно, $P_1(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения $P + 2P + 5P = 0$ (C_1 и C_2 – произвольные постоянные и могут быть заданы так, чтобы $P_1(t) > 0$). Тогда общее решение уравнения (5.6) представляет собой сумму $P_1(t)$ и P_0 :

$$P(t) = P_1(t) + P_0 = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3.$$

Выясним, какова тенденция изменения цены с течением времени. Для этого вычислим $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3 = \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0, \quad (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) - \text{ограниченная} \right] = 3 = P_0. \end{aligned}$$

Так как выполняется условие 2, то состояние рынка стабильное. Динамика цены при условии, что в начальный момент времени цена $P(0) = 4$, а скорость цены $P'(0) = 1$, показана на рис 5.3.

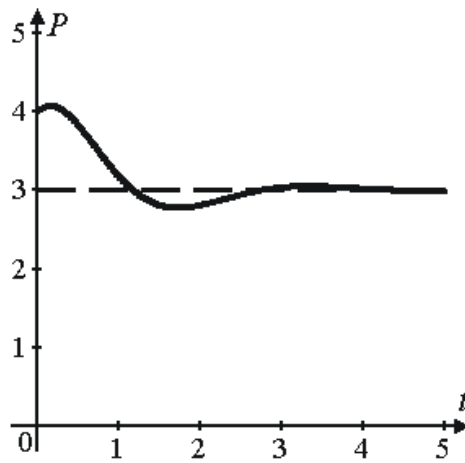


Рис. 5.3

Ответ. Равновесная цена $P_0 = 3$ (денежных единиц). Динамика цены описывается функцией $P(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3$, состояние рынка стабильное.

Теоретический материал: [1, гл. 5, 6, 12], [2, гл. 3, 10, 11], [3, гл. 4, 9], [4, темы 9, 10, 21], [5], [6, гл. 2, 5, 12], [7], [8, гл. 7], [9], [10, гл. 5, 19–21], [13, гл. 5, §3], [14], [18, гл. 4].

Тема 6. Моделирование поведения потребителя

Необходимые математические понятия: функция, непрерывная функция, основные элементарные функции; выпуклые и вогнутые функции и их свойства; предел функции, способы вычисления пределов функций; бесконечно малые и бесконечно большие функции, замечательные пределы и следствия из них; производная, таблица производных основных элементарных функций, правила вычисления производных, применение дифференциального исчисления к исследованию функций, асимптоты к графику функции; раскрытие неопределенностей; функции многих переменных, линии уровня функции двух переменных; вычисление частных производных, градиент; экстремумы функций многих переменных, условный экстремум функции многих переменных, метод множителей Лагранжа.

6.1. Математические модели потребительского спроса

Одним из важных понятий экономической теории является домашнее хозяйство (потребитель). В условиях рыночной системы управления производственной и сбытовой деятельностью предприятий и фирм в основе принятия хозяйственных решений лежит информация о потребностях домашних хозяйств в товарах и услугах (о потребительском спросе). Обоснованность этих решений проверяется рынком в ходе реализации произведенных товаров и услуг. Следовательно, начальным пунктом всего цикла предпринимательской деятельности становится изучение потребительского спроса и поведения потребителей. При этом главная проблема заключается в том, чтобы установить зависимость объемов приобретаемых товаров и услуг (состав и уровень спроса на товары и услуги) от различных факторов, как экономических, так и естественных. К экономическим факторам относятся уровень производства (предложения) товаров и услуг S , уровень денежных доходов отдельных групп населения I , уровень и соотношение цен P . К естественным факторам относятся демографический состав населения, в первую очередь размер и состав семьи F , а также привычки и традиции, уровень культуры, природно-климатические условия, личные предпочтения и т.д.

Экономические факторы очень мобильны, особенно распределение населения по уровню денежных доходов. Естественные же факторы меняются сравнительно медленно и в течение небольшого периода (до 3–5 лет) не оказывают заметного влияния на спрос. Исключение составляет демографический состав населения. Поэтому в текущих и перспективных прогнозах спроса все естественные факторы, кроме демографических, как правило, учитывают сообща, введя фактор под названием «время» t . Таким образом, в общем виде спрос определяется как функция многих переменных вида $Q = D(S, I, P, F, t)$.

Однако в зависимости от характера задачи обычно рассматривают и исследуют различные модели потребительского спроса, классификация которых представлена в таблице 3.

В данной теме будет рассмотрена модель потребительского выбора и некоторые однофакторные и многофакторные аналитические модели спроса, следующие из нее.

Классификация математических моделей потребительского спроса

№ п/п	Класс моделей	Особенность модели	Комментарий
1.	Структурные	Исследуется структура спроса как распределение потребителей по уровню дохода.	Для каждой экономической группы населения по статистическим бюджетным данным может быть рассчитана присущая ей структура спроса (потребления). При этом предполагается, что на изучаемом отрезке времени заметные изменения претерпевает лишь доход, а цены, размер семьи и прочие факторы принимаются неизменными. Изменение дохода, например, его рост, можно рассматривать как перемещение определенного количества семей из низших доходных групп в высшие. Семьи, которые попадают в высшую доходную группу, будут иметь ту же структуру потребления и спроса, какая сложилась у семей с таким же доходом к настоящему времени. Имея соответствующие структуры спроса, рассчитанные по данным статистики бюджетов, и частоты распределения потребителей по уровню дохода, можно рассчитать общую структуру спроса.
2.	Компаративные (сравнительные)	Частный случай структурных моделей спроса	В моделях сопоставляются структуры спроса данного исследуемого объекта и некоторого аналогичного объекта, в качестве которого обычно рассматривают регион или группу населения с оптимальными потребительскими характеристиками.
3.	Конструктивные (модели бюджета в потребителе)	Исследуется состав спроса с точки зрения баланса между объемом потребления и объемами потребленных товаров	В основе моделей лежат уравнения бюджета населения, то есть такие уравнения, которые выражают равенство объема потребления в денежном выражении (бюджета потребителя) и суммы произведений количества каждого потребленного товара на его цену. Примеры: прожиточный минимум; рациональные бюджеты, основанные на научных нормах потребления, прежде всего, продуктов питания; перспективные бюджеты (например, так называемый бюджет достатка) и др.
4.	Оптимизационные (модели потребительского выбора)	Исследуется состав спроса с точки зрения его оптимальной полезности для потребителя, имеющего фиксированный доход	При построении моделей полагают, что потребитель располагает фиксированной величиной дохода, который он полностью тратит на приобретение благ (продуктов, товаров, услуг). В модели не учитывается изменение предпочтений потребителя с течением времени и возможность делать или расходовать сбережения. Цены благ считаются заданными. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенные количества благ таким образом, чтобы их совокупная полезность была максимальной для потребителя.
5.	Аналитические	Исследуется изменение спроса при изменении различных факторов	Модели строятся в виде уравнений, характеризующих зависимость спроса на товары и услуги от различных факторов. В них функциональная зависимость $Q = D(S, I, P, F, t)$ принимает вполне определенный вид. Такие модели могут быть однофакторными и многофакторными.
6.	Регрессионные	Выясняется характер и вид зависимости спроса от различных факторов	Используя методы обработки статистических данных (регрессионный и дисперсионный анализ), находят вид функции $Q = D(S, I, P, F, t)$ и выясняют характер зависимости (аналитический, корреляционный и т.д.) спроса от того или иного фактора.

6.2. Модель потребительского выбора

При изучении поведения потребителя наиболее важная задача заключается в том, чтобы установить, в каких объемах он приобретает товары и услуги при заданных ценах и доходе. Для решения этой задачи построим модель потребительского выбора, используя следующие предположения:

1. Потребитель в течение определенного промежутка времени (например, в течение года) располагает доходом I , который он полностью тратит на приобретение благ (продуктов, товаров, услуг). Точнее говоря, величина I – это не доход, а расход данного потребителя за указанный промежуток времени. Возможности делать или расходовать сбережения в течение этого промежутка времени нет.

2. Пусть n – конечное число рассматриваемых товаров (благ); $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ – набор объемов благ (товаров), приобретенных потребителем за указанный срок при заданных ценах и доходе за тот же срок. Цены благ считаются заданными и не меняются в течение данного промежутка времени.

Множество всевозможных наборов благ Q с неотрицательными координатами будем называть **пространством товаров**: $\{Q \in \mathbf{R}^n : Q_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$. Конкретное решение потребителя о покупке определенного набора товаров математически можно представить как выбор конкретной точки $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ в пространстве товаров.

3. Каждый потребитель изначально имеет свои предпочтения на некотором подмножестве пространства товаров $X \subset \{Q \in \mathbf{R}^n : Q_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$. Это означает, что для каждой пары $\bar{Q} \in X, \bar{\bar{Q}} \in X$ имеет место одно из трех отношений (π, ϕ, \sim – знаки отношений предпочтения):

$\bar{Q} \phi \bar{\bar{Q}}$ – набор благ \bar{Q} предпочтительнее набора благ $\bar{\bar{Q}}$;

$\bar{Q} \pi \bar{\bar{Q}}$ – набор благ \bar{Q} менее предпочтителен, чем набор благ $\bar{\bar{Q}}$;

$\bar{Q} \sim \bar{\bar{Q}}$ – для потребителя оба набора обладают одинаковой степенью предпочтения.

Отношения предпочтения обладают следующими свойствами:

1) если $\bar{Q} \phi \bar{\bar{Q}}$ и $\bar{\bar{Q}} \phi \tilde{Q}$, то $\bar{Q} \phi \tilde{Q}$ (транзитивность);

2) если $\bar{Q} > \bar{\bar{Q}}$ то $\bar{Q} \phi \bar{\bar{Q}}$ (**ненасыщаемость**: больший набор всегда предпочтительнее меньшего).

Каждый потребитель принимает решение о приобретении набора благ, исходя только из своей системы предпочтений. Предпочтения потребителя постоянны и не меняются в течение рассматриваемого промежутка времени.

4. Отношения предпочтения каждого потребителя при определенных предположениях можно представить в форме некоторой **функции полезности** $u(Q)$ такой, что:

1) из $\bar{Q} \phi \bar{\bar{Q}}$ следует $u(\bar{Q}) > u(\bar{\bar{Q}})$ (из предпочтительности набора благ \bar{Q} по сравнению с набором $\bar{\bar{Q}}$ следует, что полезность от набора благ \bar{Q} больше полезности от набора благ $\bar{\bar{Q}}$);

2) из $\bar{Q} \sim \bar{\bar{Q}}$ следует $u(\bar{Q}) = u(\bar{\bar{Q}})$.

Для каждого потребителя такое представление многовариантно. Введение функции полезности позволяет заменить качественные отношения предпочтения привычными количественными отношениями между числами: больше, меньше, равно.

5. Функция полезности обладает следующими свойствами:

1) $\frac{\partial u}{\partial Q_i} > 0$ – с ростом потребления блага полезность растет;

2) $\lim_{Q_i \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial Q_i} = +\infty$ – небольшой прирост i -го блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность;

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial Q_i^2} < 0$ – с ростом потребления i -го блага скорость роста полезности замедляется (функция $u(x)$ является выпуклой вверх);

4) $\lim_{Q_i \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial Q_i} = 0$ – при очень большом объеме i -го блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности;

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial Q_i \partial Q_j} > 0$ – предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого продукта.

Примеры функций полезности:

а) логарифмическая: $u = \sum_{i=1}^n a_i \log_d (Q_i - c_i)$, где $a_i > 0$, $Q_i > c_i \geq 0$, $(i = \overline{1, n})$, $d > 0$, $d \neq 1$;

б) функция постоянной эластичности: $u = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-b_i} (Q_i - c_i)$, где $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $Q_i > c_i \geq 0$, $(i = \overline{1, n})$;

в) функция Р. Стоуна: $u = \prod_{i=1}^n (Q_i - c_i)^{a_i}$, где $Q_i > c_i \geq 0$, $a_i > 0$ ($i = \overline{1, n}$).

Коэффициент $c_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$) интерпретируется как минимально необходимое количество i -го блага, которое требуется для жизни; $a_i > 0$ ($i = \overline{1, n}$) – коэффициент, характеризующий относительную ценность i -го блага для потребителя.

Предельной полезностью блага Q_i называют предел отношения приращения полезности к вызвавшему этот прирост приращению товара:

$$\lim_{\Delta Q_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta Q_i} = \frac{\partial u}{\partial Q_i}.$$

Предельная полезность показывает, на сколько единиц возрастает полезность, если товар возрастет на величину ΔQ_i . Свойство 3) функции полезности называют законом убывания предельной полезности или **законом Госсена** (Госсен – немецкий экономист XIX века).

Поверхностью безразличия называют гиперповерхность размерности $(n-1)$, на которой полезность постоянна: $u(Q) = C = \text{const}$ или в дифференциальной форме

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial Q_i} dQ_i = 0 \quad (6.1)$$

Условие (6.1) означает, что касательная к поверхности безразличия перпендикулярна градиенту полезности.

С точки зрения потребителя наличие множества наборов товаров, обладающих одинаковой полезностью (то есть одинаковой степенью предпочтения), означает возможность замены одного набора другим равноценным набором, в том числе возможность замены одного товара другим. Например, пусть в соотношении (6.1) $dQ_i = 0$ для $i = \overline{3, n}$, тогда оно примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial u}{\partial Q_2} dQ_2 = 0, \text{ откуда следует, что } \frac{dQ_2}{dQ_1} = -\frac{\partial u / \partial Q_1}{\partial u / \partial Q_2}, \text{ то есть предельная}$$

норма замены первого товара вторым равна отношению предельных полезностей первого и второго товаров. Норма замены показывает, сколько требуется единиц второго товара, чтобы заменить выбывшую единицу первого товара.

Бюджетным множеством называют множество тех наборов товаров, которые может приобрести потребитель, имея доход I :

$$B = \left\{ Q \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n P_i Q_i \leq I \right\}, \quad P = (P_1, P_2, \dots, P_n) - \text{упорядоченный набор цен на}$$

набор благ $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$. Уравнение гиперповерхности $\sum_{i=1}^n P_i Q_i = I$,

ограничивающей бюджетное множество, будем называть **уравнением линии бюджетного ограничения** или **линией бюджетного ограничения**.

В теории потребления предполагается, что потребитель всегда стремится максимизировать свою полезность и единственное, что его сдерживает, – это ограниченность дохода. Другими словами, требуется найти максимум функции полезности $u(Q)$ на множестве $X \cap B$. В математическом анализе доказано, что функция $u(Q)$, удовлетворяющая условиям 1) – 5) на множестве $X \cap B$, достигает

экстремума на границе $\sum_{i=1}^n P_i Q_i = I$ множества $X \cap B$, что приводит к следующей

задаче нахождения условного максимума функции полезности:

$$\max_{Q \in X \cap B} u(Q) = \max_{\sum_{i=1}^n P_i Q_i = I} u(Q). \quad (6.2)$$

Задача (6.2) сводится к нахождению безусловного экстремума функции Лагранжа

$$L(Q, \lambda) = u(Q) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i - I \right). \text{ При этом в курсе математического анализа доказано,}$$

что в силу свойств 3) – 5) функции полезности, необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial Q_i} - \lambda P_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv -\left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i - I \right) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

являются также и достаточными условиями экстремума и определяют единственную точку максимума (Q^*, λ^*) функции Лагранжа

$L(Q, \lambda) = u(Q) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_i Q_i - I \right)$ и, соответственно, единственную точку условного

максимума x^* функции полезности $u(x)$ при условии $\sum_{i=1}^n P_i Q_i = I$.

Из первого уравнения системы (6.3) следует, что потребитель при фиксированном доходе так выбирает набор x^* , что в этой точке отношения предельных полезностей равны отношениям цен: $\frac{\partial u(Q_1^*)}{\partial Q_1} : \frac{\partial u(Q_2^*)}{\partial Q_2} : K : \frac{\partial u(Q_n^*)}{\partial Q_n} = P_1 : P_2 : K : P_n$. Другими словами, в оптимальном наборе предельные полезности выбираемых товаров должны быть пропорциональны ценам.

Замечание 1. Для некоторых видов благ (например, для предметов роскоши) функция полезности не обладает свойствами 3) – 5) (в частности, функция Стоуна при условии $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$ удовлетворяет свойствам 3) – 5), а при

$\sum_{i=1}^n a_i > 1$ – нет). В этом случае функция полезности $u(Q)$ на множестве $X \cap B$ может и не иметь экстремума.

Замечание 2. Аналитический вид функции полезности $u(Q)$ от набора благ $Q = (Q_1, Q_2, K, Q_n)$ может быть установлен методами математической статистики.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию модели потребительского выбора. Для этого удобно воспользоваться функцией полезности $u = u(Q_1, Q_2)$ от двух видов благ Q_1 и Q_2 при ценах на них, соответственно, P_1 и P_2 , если потребитель при фиксированном доходе (бюджете) I стремится максимизировать функцию полезности $u = u(Q_1, Q_2)$.

Поверхности безразличия функции полезности $u = u(Q_1, Q_2)$ представляют собой семейство кривых на плоскости OQ_1Q_2 , определяемых семейством уравнений $u(Q_1, Q_2) = C$ (C – любое положительное число). Бюджетное множество

$$B = \{(Q_1, Q_2) \in \mathbf{R}^2 : Q_1 \geq c_1, Q_2 \geq c_2, P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \leq I\}$$

представляет собой треугольник, расположенный в первой координатной четверти. Точка максимума (Q_1^*, Q_2^*) функции полезности является точкой касания линии бюджетного ограничения $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = I$ и линии уровня $u(Q_1^*, Q_2^*) = C^*$ (см. рис. 6.1).

Пример 1. Функция полезности для двух благ имеет вид $u = 4Q_1^{3/4} Q_2^{1/4}$. Цены благ равны соответственно $P_1 = 3$ денежных единицы, $P_2 = 2$ денежных единицы, доход потребителя ограничен величиной $I = 6$ денежных единиц. Найти оптимальное распределение благ Q_1 и Q_2 .

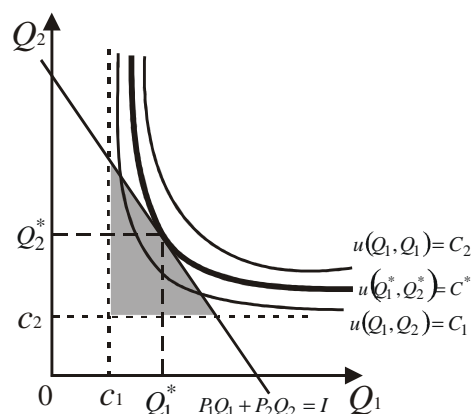


Рис. 6.1

Решение. В силу условий задачи, уравнение линии бюджетного ограничения $P_1Q_1 + P_2Q_2 = I$ и функция Лагранжа $L(Q_1, Q_2, \lambda)$ соответственно примут вид $3Q_1 + 2Q_2 = 6$ и $L(Q_1, Q_2, \lambda) = 4Q_1^{3/4}Q_2^{1/4} - \lambda(3Q_1 + 2Q_2 - 6)$. Выпишем систему уравнений (6.3) и найдем ее решение:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} \equiv 3Q_1^{-1/4}Q_2^{1/4} - 3\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} \equiv Q_1^{3/4}Q_2^{-3/4} - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv -(3Q_1 + 2Q_2 - 6) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_2 = \lambda^4 Q_1, \\ \lambda^{-3} - 2\lambda = 0, \\ 3Q_1 + 2Q_2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = \frac{6}{3 + 2\lambda^4}, \\ Q_2 = \frac{6\lambda^4}{3 + 2\lambda^4}, \\ \lambda^4 = 0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 1,5; \\ Q_2 = 0,75, \\ \lambda^4 = 0,5. \end{cases}$$

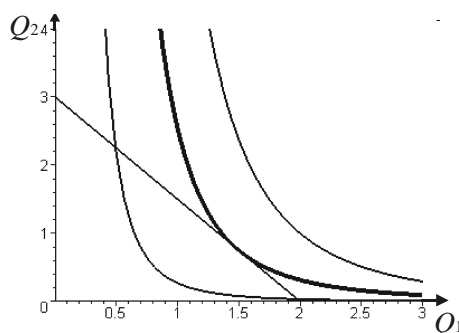


Рис. 6.2

Таким образом, точка условного экстремума функции полезности $u = 4Q_1^{3/4}Q_2^{1/4}$ имеет координаты $(1,5; 0,75)$. Значение функции полезности в точке условного экстремума $u^* = 3 \cdot 2^{3/4}$. Линии уровня функции полезности и линия бюджетного ограничения представлены на рис. 6.2 (линия уровня, соответствующая $u^* = 3 \cdot 2^{3/4}$, выделена более жирно).

Ответ: $u^*(1,5; 0,75) = 3 \cdot 2^{3/4}$.

6.3. Аналитические однофакторные модели спроса

6.3.1. Функции покупательского спроса

Функциями покупательского спроса (функциями спроса) называют функции, отражающие зависимость объема спроса на отдельные товары и услуги от комплекса факторов, влияющих на него. Такие функции применяют в аналитических моделях спроса и потребления и строятся на основе информации о структуре доходов населения, ценах на товары, составе семей и других факторах.

Наибольшее влияние на спрос оказывают цена и доход, поэтому многие расчеты спроса и потребления осуществляются в виде функции от цены товара $Q = D(P)$ или в виде функции от душевого денежного дохода $Q = D(I)$, а в наиболее общем случае – в виде функции от душевого денежного дохода и цен на все приобретаемые товары $Q = D(I, P)$ ($P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ – упорядоченный набор цен.). Для того, чтобы получить аналитический вид указанных функций спроса, нужно разрешить уравнения (6.3) относительно благ Q_i ($i = \overline{1, n}$): $Q_i = D_i(I, P_1, P_2, \dots, P_n)$. При этом, если

1) в функции $Q_i = D_i(I, P_1, P_2, \dots, P_n)$ зафиксировать доход I и цены на все блага, кроме i -го, то получится однофакторная прямая зависимость спроса на благо x_i от цены P_i единицы этого блага $Q_i = D_i(P_i)$ (такие зависимости встречались в теме 5);

2) в функции $Q_i = D_i(I, P_1, P_2, \dots, P_n)$ зафиксировать доход I и цены на все блага, кроме j -го ($i \neq j$), то получится однофакторная перекрестная зависимость

спроса на благо Q_i от цены P_j единицы блага Q_j : $Q_i = D_i(P_j)$ (такие зависимости характеризуют взаимозаменяемость и взаимодополняемость благ);

3) в функции $Q_i = D_i(I, P_1, P_2, K, P_n)$ зафиксировать цены на все блага, то получится однофакторная зависимость спроса на благо x_i от дохода потребителя I : $Q_i = D_i(I)$.

Общий случай функции спроса получается, если и доход и цены на все рассматриваемые блага считаются переменными величинами.

Замечание. Во всех трех случаях график функции спроса представляет собой геометрическое место точек плоскости, в которых аргумент (цена или доход) принимает максимально возможное значение на линиях постоянной полезности.

6.3.2. Зависимость спроса от дохода

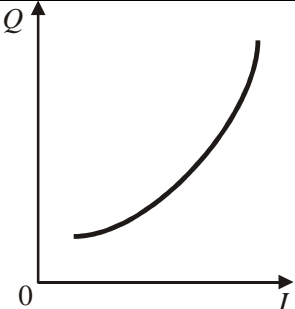
Рассмотрим однофакторные функции спроса от дохода потребителя $Q = D(I)$. Соответствующие этим функциям кривые называют **кривыми Энгеля** (по имени изучавшего их немецкого экономиста). Так как спрос на различные блага (товары и услуги) существенно зависит не только от дохода потребителя, но и от типа блага (например, продукты можно условно разделить на жизненно необходимые и деликатесы), то существует несколько классификаций функций спроса, соответствующих различным типам благ.

Одна из классификаций функций спроса товаров и благ проводится по критерию выпуклости соответствующих этим функциям кривых Энгеля (табл. 4).

Таблица 4

Классификация кривых Энгеля

№ п/п	Форма кривой Энгеля	Характер зависимости спроса от дохода	Тип блага	Вид кривой Энгеля
1.	Выпуклая вверх функция	Рост значений спроса, начиная с определенного момента, по мере насыщения спроса отстает от роста дохода	Товары первой необходимости	
2.	Линейная функция (функция нейтральной выпуклости)	Спрос на данный товар возрастает пропорционально доходу	Товары качества жизни (одежда, обувь, фрукты и т.п.)	

3.	Выпуклая вниз функция	По мере роста дохода спрос на данную группу товаров возрастает все более высокими темпами	Предметы роскоши	
----	-----------------------	---	------------------	---

Пример 2. Дана функция полезности Р. Стоуна $u = (Q_1 - c_1)^{a_1} (Q_2 - c_2)^{a_2}$ при бюджетном ограничении $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \leq I$. Найти функции спроса на блага Q_1 и Q_2 в зависимости от дохода и прямые функции спроса от цены.

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(Q_1, Q_2, \lambda)$:

$$L(Q_1, Q_2, \lambda) = (Q_1 - c_1)^{a_1} (Q_2 - c_2)^{a_2} - \lambda(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - I).$$

Запишем для нее необходимые условия существования экстремума (6.3)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} \equiv a_1 (Q_1 - c_1)^{a_1-1} (Q_2 - c_2)^{a_2} - \lambda P_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} \equiv a_2 (Q_1 - c_1)^{a_1} (Q_2 - c_2)^{a_2-1} - \lambda P_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv -(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - I) = 0. \end{cases}$$

Решение полученной системы уравнений относительно благ Q_1 и Q_2 имеет

$$\text{вид } Q_1 = \frac{a_1}{(a_1 + a_2)P_1} I + \frac{a_2 P_1 c_1 - a_1 P_2 c_2}{(a_1 + a_2)P_1}, \quad Q_2 = \frac{a_2}{(a_1 + a_2)P_2} I + \frac{-a_2 P_1 c_1 + a_1 P_2 c_2}{(a_1 + a_2)P_2}.$$

Зафиксируем цены P_1 и P_2 , введем обозначения $k_1 = \frac{a_1}{(a_1 + a_2)P_1}$,

$b_1 = \frac{a_2 P_1 c_1 - a_1 P_2 c_2}{(a_1 + a_2)P_1}$, $k_2 = \frac{a_2}{(a_1 + a_2)P_2}$, $b_2 = \frac{-a_2 P_1 c_1 + a_1 P_2 c_2}{(a_1 + a_2)P_2}$, получим следующие функции спроса на блага Q_1 , Q_2 от дохода I : $Q_1 = k_1 I + b_1$, $Q_2 = k_2 I + b_2$. Обе функции спроса линейны, следовательно, функция Р. Стоуна моделирует полезность от двух благ одного типа (предметов второй необходимости).

Если же в функции $Q_1 = \frac{a_1}{(a_1 + a_2)P_1} I + \frac{a_2 P_1 c_1 - a_1 P_2 c_2}{(a_1 + a_2)P_1}$ зафиксировать величины P_2 и I , а в функции $Q_2 = \frac{a_2}{(a_1 + a_2)P_2} I + \frac{-a_2 P_1 c_1 + a_1 P_2 c_2}{(a_1 + a_2)P_2}$ – величины

P_1 и I , а затем ввести обозначения $a = \frac{a_1(I - P_2 c_2)}{(a_1 + a_2)}$, $b = \frac{a_2 c_1}{(a_1 + a_2)}$,

$c = \frac{a_2(I - P_1 c_1)}{(a_1 + a_2)}$, $d = \frac{a_1 c_2}{(a_1 + a_2)}$, то получим прямые зависимости спроса от цены

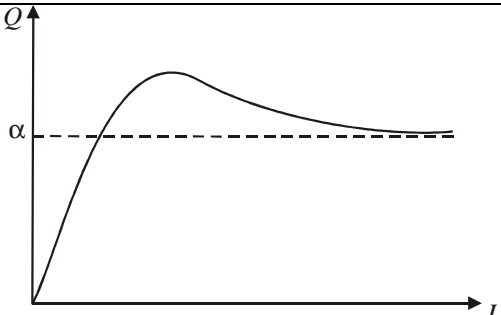
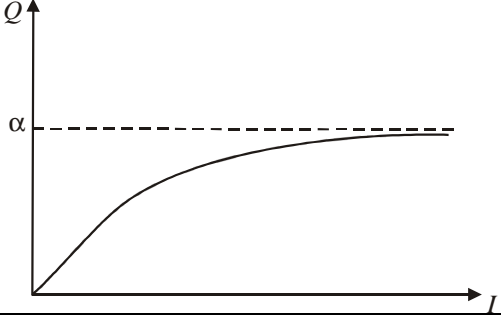
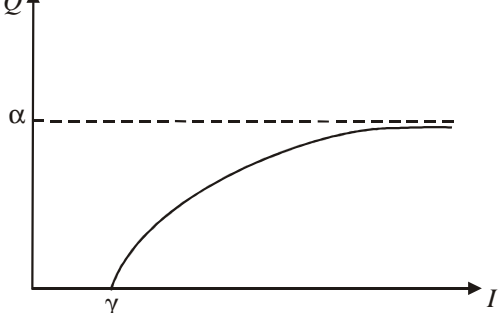
$$Q_1 = \frac{a}{P_1} + b, \quad Q_2 = \frac{c}{P_2} + d.$$

Ответ: функции спроса от дохода $Q_1 = k_1 I + b_1$, $Q_2 = k_2 I + b_2$; прямые функции спроса от цены $Q_1 = \frac{a}{P_1} + b$, $Q_2 = \frac{c}{P_2} + d$.

Тот же принцип классификации групп товаров по типам функций спроса от дохода использовал шведский экономист Л. Торнквист, который предложил специальные виды функций спроса (**функции Торнквиста**) для четырех групп товаров: малоценных, первой необходимости, второй необходимости, предметов роскоши (табл. 5). Величины $\alpha > 0$, β , γ являются параметрами модели и определяются через коэффициенты функции полезности и значения цен на все рассматриваемые блага.

Таблица 5

Классификация функций Торнквиста

№ п/п	Функция	Тип блага	Вид графика
1.	$Q = \frac{\alpha I(I + \beta)}{I^2 + \gamma}$	Малоценные товары	
2.	$Q = \frac{\alpha I}{I + \beta}$	Товары первой необходимости	
3.	$Q = \frac{\alpha(I - \gamma)}{I + \beta}$	Товары второй необходимости (относительной роскоши)	

4.	$Q = \frac{\alpha I (I - \gamma)}{I + \beta}$	Предметы роскоши	
----	---	------------------	--

Пример 3. Для функции полезности от двух благ вида $u = \frac{Q_1^{a_1} Q_2^{a_2 - a_1}}{(Q_1 + a_2 - a_1)^{a_2}}$ ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – параметры) при бюджетном ограничении $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \leq I$. Найти функции спроса на блага Q_1 , Q_2 в зависимости от дохода потребителя.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(Q_1, Q_2, \lambda) = \frac{Q_1^{a_1} Q_2^{a_2 - a_1}}{(Q_1 + a_2 - a_1)^{a_2}} - \lambda(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - I).$$

Составляя для нее систему уравнений (6.3) и решая ее относительно благ Q_1 , Q_2 , получаем $Q_1 = \frac{a_1 I}{I + a_2 P_1}$, $Q_2 = \frac{I(I - P_1(a_1 - a_2))}{I + a_2 P_1}$. Зафиксируем цены P_1 и P_2 , введем обозначения: $\alpha = a_1$, $\gamma = P_1(a_1 - a_2)$, $\beta = a_2 P_1$, получим следующие функции спроса на блага Q_1 , Q_2 от дохода I :

$$Q_1 = \frac{\alpha I}{I + \beta} - \text{функция спроса на товары первой необходимости}$$

$$Q_2 = \frac{I(I - \gamma)}{I + \beta} - \text{функция спроса на предметы роскоши.}$$

Отсюда следует, что приведенная функция полезности моделирует полезность от благ различных ценовых групп.

Ответ: функции спроса $Q_1 = \frac{\alpha I}{I + \beta}$ и $Q_2 = \frac{I(I - \gamma)}{I + \beta}$.

6.3.3. Исследование однофакторных функций спроса.

Предельные параметры модели потребительского выбора

Исследование однофакторных функций спроса методами дифференциального исчисления позволяет найти некоторые дополнительные характеристики модели потребительского выбора, в частности, тенденции изменения спроса при изменении цен и дохода, к какому типу принадлежит каждое из рассматриваемых благ, максимально и минимально возможный уровень спроса и т.п.

Примерный план исследования и экономическая интерпретация результатов приведены в табл. 6 (во втором столбце таблицы переменной x обозначен действующий фактор).

Таблица 6

Исследование однофакторных функций спроса

№ п/п	План исследования функции спроса	Результат и его экономическая интерпретация для соответствующей функции спроса
-------	----------------------------------	--

	$Q = D(x)$	Прямая зависимость спроса от цены $Q_i = D_i(P_i)$	Перекрестная зависимость спроса от цены $Q_i = D_i(P_j),$ $i \neq j$	Зависимость спроса от дохода потребителя $Q = D(I)$
1.	Найти область определения функции из условий $\begin{cases} D(x) \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases}$ – промежуток $\langle x_0, +\infty \rangle$, левый конец которого может как включаться, так и не включаться			Левая граница области определения характеризует минимальную величину дохода, с которого начинается спрос на данный вид блага
2.	Вычислить $Q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0+0} D(x)$	Q_0 – максимально возможная субъективная потребность потребителя в данном благе	Q_0 – максимальная объективная возможность потребителя приобрести данное благо при фиксированном уровне дохода	Q_0 – минимальная величина спроса на благо при минимальном доходе I_0

Окончание таблицы 6

№ п/п	План исследования функции спроса $Q = D(x)$	Результат и его экономическая интерпретация для соответствующей функции спроса		
		Прямая зависимость спроса от цены $Q_i = D_i(P_i)$	Перекрестная зависимость спроса от цены $Q_i = D_i(P_j),$ $i \neq j$	Зависимость спроса от дохода потребителя $Q = D(I)$
3.	Вычислить производную $D'(x)$	$D'_i(P_i)$	$D'_i(P_j)$	$D'(I)$
	Найти промежутки возрастания или убывания (из условий $D'(x) > 0$ или $D'(x) < 0$)			Позволяет определять ценность блага для потребителя
	Найти точки экстремума и определить их характер (максимум или минимум)	Позволяет найти точки наибольшего или наименьшего спроса и соответствующие им значения действующего фактора		
4.	Вычислить $Q_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} D(x).$			
	Если значение $Q_\infty \in \mathbf{R}$, то оно характеризует уровень насыщения спроса на благо при неограниченном росте фактора x (прямая $Q = Q_\infty$ – горизонтальная асимптота к графику функции $Q = D(x)$).	Величина $Q = Q_\infty$ характеризует минимальную объективную жизненную потребность в данном благе	Величина $Q = Q_\infty$ характеризует минимальную объективную потребность в данном благе	Величина $Q = Q_\infty$ характеризует уровень насыщения спроса при неограниченном росте дохода потребителя

	<p>Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} D(x) = +\infty$, то следует найти уравнение наклонной асимптоты к графику функции спроса $Q = kx + b$</p> <p>$(k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(x)}{x},$ $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (D(x) - kx))$</p>	Позволяет выяснить общую тенденцию изменения спроса при неограниченном росте фактора x		
5.	Найти $D''(x)$, чтобы выяснить характер выпуклости функции спроса	Позволяет определить характер устойчивости рыночного равновесия		Позволяет определить, к какому типу принадлежит благо

Пример 4. Дана функция полезности от двух благ $u = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + 1)^2}$. Цены благ равны соответственно $P_1 = 3$ денежных единицы, $P_2 = 2$ денежных единицы, доход потребителя ограничен величиной $I = 6$ денежных единиц. Найти:

- 1) оптимальное распределение благ Q_1 и Q_2 (сделать чертеж);
- 2) прямые функции спроса на блага Q_1 и Q_2 в зависимости от цен;
- 3) перекрестные функции спроса на блага Q_1 и Q_2 в зависимости от цен;
- 4) функции спроса на блага Q_1, Q_2 в зависимости от дохода потребителя.

В случаях 2) – 4) провести исследование функций спроса, построить схематично их графики. Выяснить: а) к какому типу принадлежат блага Q_1 и Q_2 ; б) какой именно товар они могут представлять (продукт питания, одежду, бытовую технику и т.п.).

Решение. 1. Найдем оптимальное распределение благ Q_1 и Q_2 . Согласно условию задачи уравнение линии бюджетного ограничения имеет вид $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = I$ или $3Q_1 + 2Q_2 = 6$. Составим для соответствующей функции Лагранжа $L(Q_1, Q_2, \lambda) = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + 1)^2} - \lambda(3Q_1 + 2Q_2 - 6)$ систему уравнений (6.3) и

решим ее:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} \equiv Q_2 \frac{(Q_1 + 1)^2 - 2Q_1(Q_1 + 1)}{(Q_1 + 1)^4} - 3\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} \equiv \frac{Q_1}{(Q_1 + 1)^2} - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv -(3Q_1 + 2Q_2 - 6) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{Q_2(1 - Q_1)}{3(Q_1 + 1)^3}, \\ \lambda = \frac{Q_1}{2(Q_1 + 1)^2}, \Leftrightarrow \\ 3Q_1 + 2Q_2 = 6; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{Q_1}{2(Q_1+1)^2}, \\ \frac{Q_2(1-Q_1)}{3(Q_1+1)^3} = \frac{Q_1}{2(Q_1+1)^2}, \\ 3Q_1+2Q_2=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{Q_1}{2(Q_1+1)^2}, \\ Q_2 = \frac{3Q_1(Q_1+1)}{2(1-Q_1)}, \\ Q_1 + \frac{Q_1(Q_1+1)}{(1-Q_1)} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{Q_1}{2(Q_1+1)^2}, \\ Q_2 = \frac{3Q_1(Q_1+1)}{2(1-Q_1)}, \\ Q_1 = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = \frac{1}{2}, \\ Q_2 = \frac{9}{4}, \\ \lambda = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Таким образом, точка условного экстремума функции полезности $u = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1+1)^2}$

имеет координаты $(0,5; 2,25)$. Значение функции полезности в точке условного экстремума $u^* = 0,5$. То есть при уровне дохода $I = 6$ денежных единиц и ценах

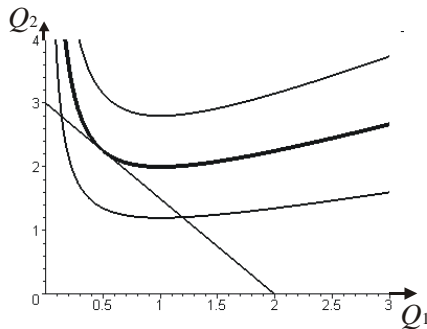


Рис. 6.3

благ $P_1 = 3$ денежные единицы, $P_2 = 2$ денежные единицы, потребителю нужно приобретать 0,5 единиц блага Q_1 и 2,25 единиц блага Q_2 . Полезность от этих благ составит $u^* = 0,5$ (максимальное значение). Линии уровня функции полезности и линия бюджетного ограничения представлены на рис. 6.3 (жирным выделена линия уровня, соответствующая $u^* = 0,5$).

2. Найдем функции спроса в зависимости от цен (прямые и перекрестные) и функции спроса в зависимости от дохода. Для этого воспользуемся формулой для линии бюджетного ограничения в общем виде $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = I$. Тогда система уравнений (6.3) может быть записана и решена следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} \equiv Q_2 \frac{(Q_1+1)^2 - 2Q_1(Q_1+1)}{(Q_1+1)^4} - P_1 \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} \equiv \frac{Q_1}{(Q_1+1)^2} - P_2 \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv -(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - I) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{Q_2(1-Q_1)}{P_1(Q_1+1)^3}, \\ \lambda = \frac{Q_1}{P_2(Q_1+1)^2}, \\ P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = I; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{Q_1}{P_2(Q_1+1)^2}, \\ \frac{Q_2(1-Q_1)}{P_1(Q_1+1)^3} = \frac{Q_1}{P_2(Q_1+1)^2}, \\ P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = I; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{Q_1}{P_2(Q_1+1)^2}, \\ Q_2 = \frac{P_2(Q_1+1)^2}{P_1 Q_1(Q_1+1)}, \\ Q_1 + \frac{Q_1(Q_1+1)}{(1-Q_1)} = \frac{I}{P_1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = \frac{I}{I+2P_1}, \\ Q_2 = \frac{I(I+P_1)}{P_2(I+2P_1)}, \\ \lambda = \frac{I(I+2P_1)}{4P_2(I+P_1)^2}. \end{cases}$$

Таким образом, общий вид зависимости спроса от дохода и цен для каждого из благ Q_1 и Q_2 имеет вид $Q_1 = \frac{I}{I+2P_1}$, $Q_2 = \frac{I(I+P_1)}{P_2(I+2P_1)}$.

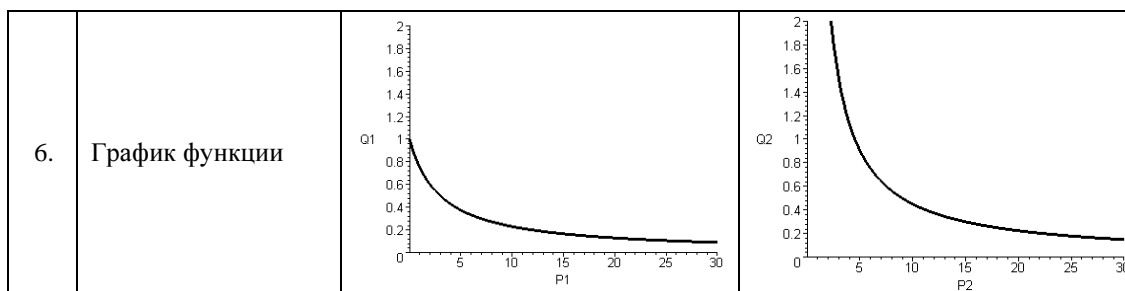
В функции $Q_1 = \frac{I}{I+2P_1}$ зафиксируем величину $I=6$, а в функции $Q_2 = \frac{I(I+P_1)}{P_2(I+2P_1)}$ – величины $I=6$ и $P_1=3$, получим **прямые зависимости спроса от цены** $Q_1 = \frac{3}{3+P_1}$ и $Q_2 = \frac{9}{2P_2}$. Проведем исследование прямых функций спроса от цены методами дифференциального исчисления. Результаты исследования представим в виде табл. 7.

Таблица 7

№ п/п	План исследования	Результаты исследования	
		$Q_1 = \frac{3}{3+P_1}$	$Q_2 = \frac{9}{2P_2}$
1.	Область определения	$P_1 \geq 0$	$P_2 > 0$
2.	Уровень спроса при минимальной цене на товар $\lim_{P \rightarrow P_0+0} Q(P)$	$\lim_{P_1 \rightarrow 0+0} Q_1(P_1) = \lim_{P_1 \rightarrow 0+0} \frac{3}{3+P_1} = 1$	$\lim_{P_2 \rightarrow 0+0} Q_2(P_2) = \lim_{P_2 \rightarrow 0+0} \frac{9}{2P_2} = +\infty$
3.	Производная $Q'(P)$	$Q'_1 = -\frac{3}{(3+P_1)^2} < 0$ при $P_1 \geq 0$	$Q'_2 = -\frac{9}{2P_2^2} < 0$ при $P_2 > 0$
	Промежутки возрастания и убывания	Убывает при $P_1 \geq 0$	Убывает при $P_2 > 0$
	Точки экстремума	Нет	Нет

Окончание таблицы 7

№ п/п	План исследования	Результаты исследования	
		$Q_1 = \frac{3}{3+P_1}$	$Q_2 = \frac{9}{2P_2}$
4.	Уровень спроса при неограниченном росте цены $\lim_{P \rightarrow +\infty} Q(P)$	$\lim_{P_1 \rightarrow +\infty} Q_1(P_1) = \lim_{P_1 \rightarrow +\infty} \frac{3}{3+P_1} = 0$	$\lim_{P_2 \rightarrow +\infty} Q_2(P_2) = \lim_{P_2 \rightarrow +\infty} \frac{9}{2P_2} = 0$
5.	Вторая производная $Q''(P)$	$Q''_1 = \frac{6}{(3+P_1)^3} > 0$ при $P_1 \geq 0$	$Q''_2 = \frac{9}{P_2^3} > 0$ при $P_2 > 0$
	Характер выпуклости	Выпуклая вниз	Выпуклая вниз



Таким образом, прямые функции спроса от цены являются убывающими выпуклыми вниз функциями. При неограниченном росте цены каждого блага спрос на них падает до нуля. Заметим, что при нулевом значении цены блага Q_1 спрос на него конечен и равен $Q_1(0)=1$. Наличие максимально возможной субъективной потребности потребителя в данном благе говорит о том, что благо Q_1 является необходимым продуктом питания, возможно, скоропортящимся (например, хлеб или молоко).

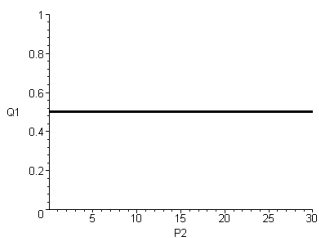
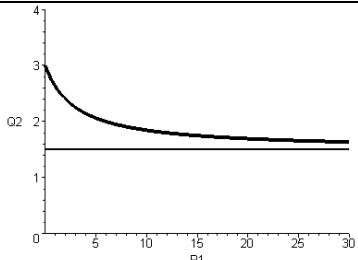
В функции $Q_1 = \frac{I}{I + 2P_1}$ зафиксируем величину $I = 6$ и $P_1 = 3$, а в функции $Q_2 = \frac{I(I + P_1)}{P_2(I + 2P_1)}$ – величины $I = 6$ и $P_2 = 2$, получим **перекрестные зависимости спроса от цены** $Q_1 = 0,5$ (спрос на благо Q_1 не зависит от цены на благо Q_2) и $Q_2 = \frac{3(6 + P_1)}{2(3 + P_1)}$, после исследования которых получим результаты, представленные в табл. 8.

Таблица 8

№ п/п	План исследования	Результаты исследования	
		$Q_1 = 0,5$	$Q_2 = \frac{3(6+P_1)}{2(3+P_1)}$
1.	Область определения	$P_2 \geq 0$	$P_1 \geq 0$
2.	Уровень спроса при минимальной цене на другой товар $\lim_{P \rightarrow P_0+0} Q(P)$	$\lim_{P_2 \rightarrow 0+0} Q_1(P_2) = 0,5$	$\lim_{P_1 \rightarrow 0+0} Q_2(P_1) = \lim_{P_1 \rightarrow 0+0} \frac{3(6+P_1)}{2(3+P_1)} = 3$

Окончание таблицы 8

№ п/п	План исследования	Результаты исследования	
		$Q_1 = 0,5$	$Q_2 = \frac{3(6+P_1)}{2(3+P_1)}$
3.	Производная $Q'(P)$	$Q'_1 = 0$ при $P_2 \geq 0$	$Q'_2 = -\frac{9}{2(3+P_1)^2}$ при $P_1 \geq 0$
	Промежутки возрастания и убывания	Сохраняет постоянное значение при $P_2 \geq 0$	Убывает при $P_1 \geq 0$
	Точки экстремума	Нет	Нет

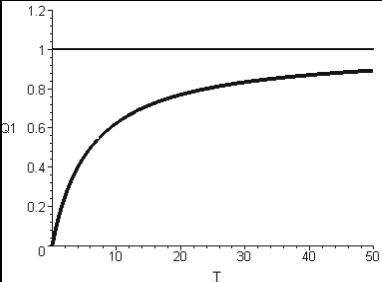
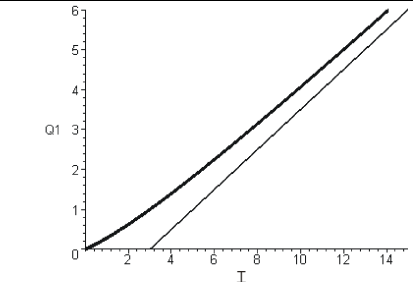
4.	Уровень спроса при неограниченном росте цены другого товара $\lim_{P \rightarrow +\infty} Q(P)$	$\lim_{P_2 \rightarrow +\infty} Q_1(P_2) = 0,5$	$\lim_{P_1 \rightarrow +\infty} Q_2(P_1) = \lim_{P_1 \rightarrow +\infty} \frac{3(6+P_1)}{2(3+P_1)} = 1,5$
5.	Вторая производная $Q''(P)$	$Q_1'' = 0$ при $P_2 \geq 0$	$Q_2'' = \frac{9}{(3+P_1)^3} > 0$ при $P_1 \geq 0$
	Характер выпуклости	Функция нейтральной выпуклости (линейная)	Выпуклая вниз
6.	График функции		

Таким образом, спрос на благо Q_1 не зависит от цены на благо Q_2 . Это означает, что потребитель будет приобретать товар Q_1 при любом уровне цен на товар Q_2 . Максимальная объективная возможность потребителя приобрести благо Q_2 составляет 3 единицы при уровне дохода в 6 денежных единиц. Спрос на благо Q_2 снижается при росте цены на благо Q_1 до фиксированного уровня 1,5 единицы. Это означает, что при росте цены на благо Q_1 потребитель уменьшает свои притязания на благо Q_2 до уровня минимально возможной объективной потребности в этом благе.

В функции $Q_1 = \frac{I}{I+2P_1}$ зафиксируем величину $P_1 = 3$, а в функции $Q_2 = \frac{I(I+P_1)}{P_2(I+2P_1)}$ – величины $P_1 = 3$ и $P_2 = 2$, получим **зависимости спроса от дохода** $Q_1 = \frac{I}{I+6}$ и $Q_2 = \frac{0,5I(I+3)}{(I+6)}$. Результаты исследования этих функций также представим в виде табл. 9.

Таблица 9

№ п/п	План исследования	Результаты исследования	
		$Q_1 = \frac{I}{I+6}$	$Q_2 = \frac{0,5I(I+3)}{(I+6)}$
1.	Область определения	$I \geq 0$	$I \geq 0$
2.	Уровень спроса при минимальном	$\lim_{I \rightarrow 0+0} Q_1(I) = \lim_{I \rightarrow 0+0} \frac{I}{I+6} = 0$	$\lim_{I \rightarrow 0+0} Q_2(I) = \lim_{I \rightarrow 0+0} \frac{0,5I(I+3)}{(I+6)} = 0$

	доходе $\lim_{I \rightarrow I_0+0} Q(I)$		
3.	Производная $Q'(I)$	$Q'_1 = \frac{6}{(I+6)^2} > 0$ при $I \geq 0$	$Q'_2 = \frac{0,5(I^2+15I+15)}{(I+6)^2} > 0$ при $I \geq 0$
	Промежутки возрастания и убывания	Возрастает при $I \geq 0$	Возрастает при $I \geq 0$
	Точки экстремума	Нет	Нет
4.	Уровень спроса при неограниченном росте цены $\lim_{I \rightarrow +\infty} Q(I)$	$\lim_{I \rightarrow +\infty} Q_1(I) = \lim_{I \rightarrow +\infty} \frac{I}{I+6} = 1,$	$\lim_{I \rightarrow +\infty} Q_2(I) = \lim_{I \rightarrow +\infty} \frac{0,5I(I+3)}{(I+6)} = +\infty.$
	Асимптоты	$Q = 1$ – горизонтальная асимптота	$k = \lim_{I \rightarrow +\infty} \frac{Q_2(I)}{I} = \lim_{I \rightarrow +\infty} \frac{0,5(I+3)}{(I+6)} = 0,5$ $b = \lim_{I \rightarrow +\infty} (Q_2(I) - kI) =$ $= \lim_{I \rightarrow +\infty} \left(\frac{0,5I(I+3)}{(I+6)} - 0,5I \right) = -1,5,$ $Q = 0,5I - 1,5$ – наклонная асимптота
5.	Вторая производная $Q''(I)$	$Q''_1 = \frac{-12}{(I+6)^3} < 0$ при $I \geq 0$	$Q''_2 = \frac{9}{I^3} > 0$ при $I \geq 0$
	Характер выпуклости	Выпуклая вверх	Выпуклая вниз
6.	График функции		

Таким образом, используя данные табл. 5, получаем, что благо (товар) Q_1 – предмет первой необходимости, Q_2 – предмет роскоши (этот факт подтверждается также и тем, что спрос на благо Q_1 не зависит от цены на благо Q_2). Так как спрос на товар Q_2 начинается с дохода $I = 0$, а при неограниченном росте дохода ($I \rightarrow +\infty$) тенденция изменения спроса приближается к линейной зависимости (существует наклонная асимптота $Q = 0,5I - 1,5$), то согласно табл. 4 товар Q_2 является товаром качества жизни.

Ответ: 1) оптимальное распределение: при уровне дохода $I = 6$ денежных единиц и ценах благ $P_1 = 3$ денежные единицы, $P_2 = 2$ денежные единицы, потребителю нужно приобретать 0,5 единиц блага Q_1 и 2,25 единиц блага Q_2 . Полезность от этих благ составит $u^* = 0,5$ (максимальное значение);

2) благо (товар) Q_1 является предметом первой необходимости (продуктом питания), Q_2 – предметом качества жизни (одеждой или обувью).

6.4. Аналитическая многофакторная модель спроса

Пусть при исследовании модели потребительского выбора (6.2) были получены функции потребительского спроса

$$Q_i = D_i(I, P_1, P_2, K, P_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.4)$$

в которой величины I, P_1, P_2, \dots, P_n являются переменными. В этом случае систему функций (6.4) называют **аналитической многофакторной моделью потребительского спроса**.

Обобщим понятие эластичности (тема 5) на случай функции многих переменных. Пусть дана зависимость экономического показателя y от показателей x_1, x_2, \dots, x_n : $y = f(x_1, x_2, K, x_n)$. **Частичным предельным (точечным) коэффициентом эластичности показателя y по показателю x_i**

называют величину $E_{x_i}(y) = \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n})$. Она показывает приблизительно процентное изменение величины показателя y при изменении величины показателя x_i на 1 %.

Величины $E_{P_i}(Q_i) = \frac{P_i}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial P_i} \quad (i = \overline{1, n})$ называют **частичными предельными (точечными) прямыми коэффициентами эластичности** спроса по цене.

Величины $E_{P_j}(Q_i) = \frac{P_j}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} \quad (i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j)$ называют **частичными предельными (точечными) перекрестными коэффициентами эластичности** спроса по цене. Величины $E_I(Q_i) = \frac{I}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial I}$ называют **частичными предельными (точечными) коэффициентами эластичности** спроса по доходу.

Зная частичные коэффициенты эластичности спроса по действующим факторам, можно количественно сравнивать между собой блага, входящие в модель потребительского выбора (6.2) и вычислять значения различных экономических показателей. Наиболее важные приложения частичных коэффициентов эластичности приводятся в табл. 10.

Таблица 10

Приложения частичных коэффициентов эластичности спроса

№ п/п	Коэффициент эластичности	Что позволяет найти	Как найти
1.	$E_{P_i}(Q_i) = \frac{P_i}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial P_i}$	Величина ΔQ_i	$\Delta Q_i = E_{P_i}(Q_i) \Delta P_i$

	(прямая эластичность спроса по цене)	изменения спроса Q_i на товар при изменении цены P_i на величину ΔP_i (в %)	
		Величина ΔR_i изменения выручки R_i от продажи товара при изменении цены P_i на величину ΔP_i (в %)	$\Delta R_i = (1 - E_{P_i}(Q_i)) \Delta P_i$
2.	$E_{P_j}(Q_i) = \frac{P_j}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial P_j}$ ($i \neq j$) (перекрестная эластичность спроса по цене)	Заменяемость благ Q_i и Q_j ($i \neq j$)	Если $E_{P_j}(Q_i) > 0$, то благо Q_j можно заменить благом Q_i (увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой)
		Дополняемость благ Q_i и Q_j ($i \neq j$)	Если $E_{P_j}(Q_i) < 0$, то благо Q_i можно дополнить благом Q_j (рост цены любого товара приводит к снижению спроса)
3.	$E_I(Q_i) = \frac{I}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial I}$ (эластичность спроса по доходу)	Ценность (качество) блага Q_i для потребителя	Если $E_I(Q_i) > 0$, то благо Q_i является ценным для потребителя (с ростом доходов спрос на него увеличивается)
			Если $E_I(Q_i) < 0$, то благо Q_i является малоценным для потребителя (с ростом доходов спрос на него падает, потребитель предпочитает более качественные товары)

Замечание. Если $E_{P_j}(Q_i) = 0$, то благо Q_i является частичным заменителем блага Q_j .

Пример 5. Найти частичные коэффициенты эластичности функций спроса, полученных при решении задачи потребительского выбора примера 4.

Решение. В примере 4 были получены трехфакторные функции спроса от дохода и цен $Q_1 = \frac{I}{I+2P_1}$, $Q_2 = \frac{I(I+P_1)}{P_2(I+2P_1)}$. Цены благ равны соответственно

$P_1 = 3$ денежные единицы, $P_2 = 2$ денежные единицы, доход потребителя ограничен величиной $I = 6$ денежных единиц. Вычисление коэффициентов эластичности и анализ результатов выполним в виде табл. 11.

Таблица 11

Функция спроса	Выражение для коэффициента эластичности	Значение коэффициента эластичности	Анализ результата
$Q_1 = \frac{I}{I+2P_1}$	Прямая эластичность спроса по	$E_{P_1}(Q_1) = -0,6$,	Благо Q_1

	$\text{цене } E_{P_1}(Q_1) = \frac{P_1}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} =$ $= \frac{P_1(I+2P_1)}{I} \cdot \frac{(-2I)}{(I+2P_1)^2} =$ $= \frac{-2P_1}{(I+2P_1)^2} < 0$	$ E_{P_1}(Q_1) = 0,6 < 1$	является неэластичным по цене (при росте цены спрос на него снижается достаточно слабо)
	Перекрестная эластичность спроса по цене $E_{P_2}(Q_1) = \frac{P_2}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} =$ $= \frac{P_2(I+2P_1)}{I} \cdot 0 = 0$	$E_{P_2}(Q_1) = 0$	Благо Q_1 частично заменяет благо Q_2
	Эластичность спроса по доходу $E_I(Q_1) = \frac{I}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial I} =$ $= \frac{I(I+2P_1)}{I} \cdot \frac{2P_1}{(I+2P_1)^2} =$ $= \frac{2P_1}{(I+2P_1)^2} > 0$	$E_I(Q_1) = 0,6$, $ E_I(Q_1) = 0,6 < 1$	Благо Q_1 является ценным для потребителя, но не эластичным по доходу (при росте дохода спрос на него растет достаточно слабо)
$Q_2 = \frac{I(I+P_1)}{P_2(I+2P_1)}$	Прямая эластичность спроса по цене $E_{P_2}(Q_2) = \frac{P_2}{Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial P_2} =$ $= \frac{P_2^2(I+2P_1)}{I(I+P_1)} \cdot \frac{(-I(I+P_1))}{P_2^2(I+2P_1)} = -1$	$E_{P_2}(Q_2) = -1$, $ E_{P_2}(Q_2) = 1$	Благо единичной эластичности, то есть спрос убывает обратно пропорционально росту цены
	Перекрестная эластичность спроса по цене $E_{P_1}(Q_2) = \frac{P_1}{Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial P_1} =$ $= \frac{P_1 P_2(I+2P_1)}{I(I+P_1)} \cdot \frac{(-I^2)}{P_2(I+2P_1)^2} =$ $= \frac{-IP_1}{I^2+3P_1I+2P_1^2} < 0$	$E_{P_1}(Q_2) = -\frac{1}{6}$, $ E_{P_1}(Q_2) = \frac{1}{6} < 1$	Благо Q_2 дополняет благо Q_1 , но не эластично относительно изменения цены P_1
	Эластичность спроса по доходу $E_I(Q_2) = \frac{I}{Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial I} =$ $= \frac{IP_2(I+2P_1)}{I(I+P_1)} \cdot \frac{I^2+4P_1I+2P_1^2}{P_2(I+2P_1)^2} =$ $= \frac{I^2+4P_1I+2P_1^2}{I^2+3P_1I+2P_1^2} > 0$	$E_I(Q_2) = \frac{7}{6}$, $ E_I(Q_2) = \frac{7}{6} > 1$	Благо Q_2 является ценным для потребителя и эластичным по доходу (при росте дохода спрос на него растет достаточно сильно)

Ответ: $E_{P_1}(Q_1) = -0,6$, $E_{P_2}(Q_1) = 0$, $E_I(Q_1) = 0,6$, $E_{P_2}(Q_2) = -1$,
 $E_{P_1}(Q_2) = -\frac{1}{6}$, $E_I(Q_2) = \frac{7}{6}$.

6.5. Уравнение Слуцкого

Методы дифференциального исчисления позволяют выяснить, как меняется спрос потребителя в целом на весь набор благ $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ при изменении цен P_i ($i = \overline{1, n}$), а также – как меняется при этом полезность $u(Q)$.

Очевидно, что увеличение цены блага Q_i на малую величину dP_i снижает спрос на него на величину $dQ_i = \frac{\partial Q_i}{\partial P_i} dP_i$, а вместе с ним и полезность $u(Q)$

на величину $du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial Q_i} dQ_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial P_i} dP_i$. При этом осуществляется

переход с данной линии уровня функции полезности на другую, расположенную ниже первой и ближе к осям координат. Чтобы сохранить полезность $u(Q)$ на прежнем уровне ($du = 0$), потребитель вынужден либо заменять благо Q_i другим, либо увеличивать (компенсировать) свой доход на некоторую величину dI .

Величину $\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}$ называют **эффектом замены блага Q_i благом Q_j** . Величину

$\frac{\partial Q_i}{\partial I}$ называют **эффектом дохода**.

В экономическом анализе показано, что действие эффекта замены и эффекта дохода связано с результирующим изменением спроса следующим уравнением (с его выводом можно ознакомиться в [6, гл. 5] или в [7, гл. 26]):

$$\frac{\partial Q_i}{\partial P_j} = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j} \right)_c - \frac{\partial Q_i}{\partial I} Q_j, \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (6.5)$$

Оно было опубликовано российским математиком Е.Е. Слуцким в 1915 году (впоследствии эта работа была удостоена Нобелевской премии по экономике).

Величина $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j} \right)_c$ описывает действие эффекта замены при наличии компенсации

(индекс c показывает, что перекрестная частная производная рассчитывается при необходимой для поддержания прежнего уровня благосостояния

компенсации дохода). Величина $\frac{\partial Q_i}{\partial I} Q_j$ описывает действие эффекта дохода,

выраженное в тех же единицах, что и эффект замены (множитель Q_j приводит их

к одной размерности). Величина $\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}$ представляет собой результирующее

воздействие на спрос, складывающееся из изменения структуры спроса и общего его изменения при изменении уровня реального дохода. Например:

1) для ценного товара $\frac{\partial Q_i}{\partial I} > 0$ (спрос растет при росте дохода), тогда

согласно уравнению (6.5) $\frac{\partial Q_i}{\partial P_j} < \left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j} \right)_c$: если спрос растет, то он растет больше

при наличии компенсации, если падает – то в меньшей степени;

2) если $\frac{\partial Q_i}{\partial P_j} < 0$, но $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right)_c > 0$, то товары Q_i и Q_j взаимозаменяемы,

но представляются взаимодополняемыми без учета компенсации;

3) используя свойства функции полезности 1) – 5) (см. пункт 6.2), можно доказать, что $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_i}\right)_c < 0$; если при этом оказалось, что $\frac{\partial Q_i}{\partial P_i} > 0$ (спрос растет

при росте цены, такой товар называют **товаром Гиффина**), но $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right)_c < 0$, тогда

из (6.5) следует $\frac{\partial Q_i}{\partial I} > 0$ (товар Q_i является малоценным).

Уравнение Слуцкого может использоваться для расчета эффекта замены при наличии компенсации $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right)_c$ и оценки взаимозаменяемости или

взаимодополняемости товаров, так как частные производные $\frac{\partial Q_i}{\partial I}$ и $\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}$

вычислить значительно легче, чем $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right)_c$. Если $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right)_c > 0$ и $\left(\frac{\partial Q_j}{\partial P_i}\right)_c > 0$, то

товары Q_i и Q_j называют **взаимозаменяемыми** (компенсируемое увеличение

цены на товар Q_j приводит к увеличению спроса на товар Q_i). Если $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right)_c < 0$

и $\left(\frac{\partial Q_j}{\partial P_i}\right)_c < 0$, то товары Q_i и Q_j называют **взаимодополняемыми**

(компенсируемое увеличение цены на товар Q_j приводит к снижению спроса на оба товара Q_i и Q_j).

Пример 6. Рассчитать эффекты замены при наличии компенсации для благ Q_1 и Q_2 примера 4. Оценить блага Q_1 и Q_2 с точки зрения их взаимозаменяемости или взаимодополняемости.

Решение. В примере 4 были получены трехфакторные функции спроса от дохода и цен: $Q_1(P_1, P_2, I) = \frac{I}{I + 2P_1}$, $Q_2(P_1, P_2, I) = \frac{I(I + P_1)}{P_2(I + 2P_1)}$. Цены благ равны соответственно $P_1 = 3$ денежных единицы, $P_2 = 2$ денежных единицы, доход потребителя ограничен величиной $I = 6$ денежных единиц. Вычислим частные производные функций $Q_1(P_1, P_2, I)$ и $Q_2(P_1, P_2, I)$ по переменным P_1 , P_2 , I и их значения в точке $(P_1, P_2, I) = (3; 2; 6)$:

$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} = \frac{-2I}{(I + 2P_1)^2},$	$\frac{\partial Q_1(3; 2; 6)}{\partial P_1} = -\frac{1}{12};$	$\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} = \frac{-I^2}{P_2(I + 2P_1)^2},$	$\frac{\partial Q_2(3; 2; 6)}{\partial P_1} = -\frac{1}{8};$
$\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = 0,$	$\frac{\partial Q_1(3; 2; 6)}{\partial P_2} = 0;$	$\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} = \frac{-I(I + P_1)}{P_2^2(I + 2P_1)},$	$\frac{\partial Q_2(3; 2; 6)}{\partial P_2} = -\frac{9}{8};$

$\frac{\partial Q_1}{\partial I} = \frac{2P_1}{(I+2P_1)^2},$	$\frac{\partial Q_1(3; 2; 6)}{\partial I} = \frac{1}{24};$	$\frac{\partial Q_2}{\partial I} = \frac{I^2 + 4P_1I + 2P_1^2}{P_2(I+2P_1)^2},$	$\frac{\partial Q_2(3; 2; 6)}{\partial I} = \frac{7}{16}.$
--	--	---	--

Значения функций $Q_1(P_1, P_2, I)$ и $Q_2(P_1, P_2, I)$ в точке $(P_1, P_2, I) = (3; 2; 6)$ будут равны соответственно $Q_1(3; 2; 6) = 0,5$, $Q_2(3; 2; 6) = 2,25$ (см. пример 4).

Запишем уравнение Слуцкого (6.5) в виде, удобном для оценки эффектов замены при наличии компенсации для каждого из благ Q_1 и Q_2 , в полученную систему четырех уравнений подставим значения производных и функций $Q_1(P_1, P_2, I)$, $Q_2(P_1, P_2, I)$ в точке $(P_1, P_2, I) = (3; 2; 6)$; вычислим величины эффектов замены при наличии компенсации:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \right)_c = \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial I} Q_1, \\ \left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \right)_c = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial I} Q_2, \\ \left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} \right)_c = \frac{\partial Q_2}{\partial P_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial I} Q_2, \\ \left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} \right)_c = \frac{\partial Q_2}{\partial P_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial I} Q_1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \right)_c = -\frac{1}{12} + \frac{1}{24} \cdot 0,5, \\ \left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \right)_c = 0 + \frac{1}{24} \cdot 2,25, \\ \left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} \right)_c = -\frac{9}{8} + \frac{7}{16} \cdot 2,25, \\ \left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} \right)_c = -\frac{1}{8} + \frac{7}{16} \cdot 0,5; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \right)_c = -\frac{1}{16}, \\ \left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \right)_c = \frac{3}{32}, \\ \left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} \right)_c = -\frac{9}{64}, \\ \left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} \right)_c = \frac{3}{32}. \end{array} \right.$$

Таким образом, так как $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} = -\frac{1}{8} < 0$ и $\left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} \right)_c = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \right)_c = \frac{3}{32} > 0$, то блага Q_1 и Q_2 являются взаимозаменяемыми, но представляются взаимодополняемыми без учета компенсации, а так как $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = 0$, то благо Q_2 дополняет благо Q_1 , но не наоборот. Так как $\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} = -\frac{1}{12} < 0$, $\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} = -\frac{9}{8} < 0$, $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \right)_c = -\frac{1}{16} < 0$ и $\left(\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} \right)_c = -\frac{9}{64} < 0$, то оба блага являются ценными для потребителя.

Ответ. Блага Q_1 и Q_2 являются взаимозаменяемыми, но представляются взаимодополняемыми без учета компенсации; благо Q_2 дополняет благо Q_1 , но не наоборот. Оба блага являются ценными для потребителя.

При выводе уравнения Слуцкого был получен ряд соотношений, подтверждающих ряд экономических явлений:

1. Уравнение связи прежних цен на блага с изменениями спроса на них $\sum_{i=1}^n P_i \Delta Q_i = 0$ характеризует сложный характер изменения спроса: на одни блага спрос растет, на другие – падает.

2. Выражение для оценки величины компенсации дохода $\Delta I = \sum_{i=1}^n Q_i \Delta P_i$ подтверждает тот факт, что при увеличении цен компенсация дохода должна быть положительной, а при уменьшении – отрицательной.

3. $\left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_i}\right)_c < 0$. При повышении цены спрос на благо падает даже при компенсации дохода.

4. Уравнение $\sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial I} P_i = 1$ подтверждает, что для данного потребителя существуют как ценные, так и малоценные товары.

5. Уравнение $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right)_c P_i = 0$ подтверждает, что для товара Q_j существует товар-заменитель при компенсационном изменении дохода.

Теоретический материал: [1, гл. 5–8, 15], [2, гл. 3–5, 8, 28], [3, гл. 4–6, 8], [4, темы 9–12, 17, 18], [8, гл. 2–4, 7–9], [7], [9], [10, гл. 7], [11], [12, гл. 3–5, 9–11, 26], [16], [17], [18, гл. 7], [21, гл. 8].

Тема 7. Моделирование поведения производителя

Необходимые математические понятия: функции многих переменных, линии уровня функции двух переменных; выпуклые и вогнутые функции, однородные функции; вычисление частных производных первого и второго порядков, градиент; экстремумы функций многих переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремумов; условный экстремум, метод множителей Лагранжа.

7.1. Моделирование производственной деятельности

Основная цель производственной сферы экономики – обеспечение общества предметами потребления (товарами и услугами). Производители (предприятия, фирмы, отрасли и т.п.) в определенных условиях стремятся вести свою деятельность с наибольшей выгодой для себя. Поэтому представляет интерес создание математических моделей производства и их исследование с точки зрения максимизации прибыли.

Построение моделей проведем на основе следующих предположений:

1. Производство – это целостная неструктурированная единица, на вход которой поступают ресурсы, а на выходе получается результат функционирования предприятия в форме выпуска некоторого совокупного продукта.

2. Ресурсы рассматриваются как аргументы, а объем выпуска – как некоторая функция, которую в дальнейшем будем называть **производственной функцией**.

3. Производитель работает в стабильных условиях, поэтому его поведение определяется стремлением к максимизации прибыли при использовании существующей технологии производства.

4. Структура предприятия постоянна, то есть в рассматриваемый момент ассортимент выпускаемой продукции не меняется.

5. В случае построения модели на микроэкономическом уровне предполагается, что производитель действует в условиях совершенной конкуренции.

Математическое моделирование деятельности производителя имеет две основных составляющих:

- 1) моделирование производственных функций;
- 2) решение задачи о максимизации прибыли от производственной деятельности.

Замечание. Задача о максимизации прибыли не является единственной при моделировании производственной деятельности. Помимо нее рассматриваются следующие задачи:

- 1) о моделировании сбалансированного производства (см. тему 1);
- 2) прогнозировании роста выпуска (см. тему 8);
- 3) стратегическом планировании деятельности предприятия;
- 4) моделировании деятельности производителя в кризисных ситуациях.

7.2. Моделирование производственных функций

Производственной функцией называют зависимость результата производственной деятельности от обусловивших этот результат факторов. Независимые переменные принимают значения объемов используемых факторов производства (ресурсов); зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции.

Будем предполагать, что предприятие выпускает один или несколько видов продукции, общий объем которой будем называть **совокупным выпуском** (или просто **выпуском**) и обозначать переменной Q . Объем совокупного выпуска может измеряться как в натуральных, так и в стоимостных показателях. В качестве факторов производства будем использовать настоящий труд L (среднее число занятых за промежуток времени или количество отработанных за этот промежуток человеко-часов) и капитал K (основные производственные фонды или прошлый труд в виде средств труда). Как правило, таким промежутком времени является год.

Замечание. В литературе ([8, гл. 6], [10, гл. 3]) встречается использование третьего фактора – предметов труда M (затраченное за промежуток времени топливо, сырье, материалы, комплектующие и т.п.). В силу того, что исследование функций двух и трех переменных принципиально одинаково, и при этом функции двух переменных допускают наглядную геометрическую интерпретацию, в настоящем пособии изучаются производственные функции двух переменных $Q = F(K, L)$ (двухфакторные производственные функции).

Производственные функции вида $Q = F(K, L)$ реализуют схему «затраты-выпуск» и используются в различных областях экономики. На микроэкономическом уровне в качестве производителя может выступать фирма, отрасль, межотраслевой комплекс. На макроэкономическом уровне в роли производителя выступает регион или страна в целом. В обоих случаях производственные функции описывают взаимосвязи между величиной ресурсов, затраченных за некоторый промежуток времени (год) и итоговым выпуском продукции за этот же промежуток и используются для решения задач анализа, планирования и прогнозирования развития производства.

Производственную функцию называют **статической**, если фактор времени не входит в нее явно, а параметры функции считаются неизменными в течение рассматриваемого промежутка времени. Производственную функцию называют **динамической**, если время t входит в нее в качестве фактора, влияющего на объем выпуска (например, учитывается научно-технический прогресс) и/или параметры производственной функции зависят явно от времени. В настоящей теме используются статические производственные функции.

Область определения производственной функции – первая координатная четверть (множество $X = \{(K, L) \in \mathbf{R}^2 : K \geq 0, L \geq 0\}$). Свойства производственных функций представлены в табл. 12.

Таблица 12

**Свойства производственных функций
и их экономическая интерпретация**

№ п/п	Формальное свойство	Экономическая интерпретация
1.	$F(0, 0) = F(K, 0) = F(0, L) = 0$	Без ресурсов нет выпуска
2.	$K_2 > K_1 \Rightarrow F(K_2, L) > F(K_1, L),$ $L_2 > L_1 \Rightarrow F(K, L_2) > F(K, L_1)$	С увеличением объема затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет
3.	$K > 0, L > 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$	С увеличением объема затрат одного (любого) ресурса при неизменном количестве другого объем выпуска растет

4.	$K > 0, L > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$	С увеличением объема затрат одного (любого) ресурса при неизменном количестве другого величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу этого ресурса убывает (закон убывающей эффективности производства)
----	---	---

Окончание таблицы 12

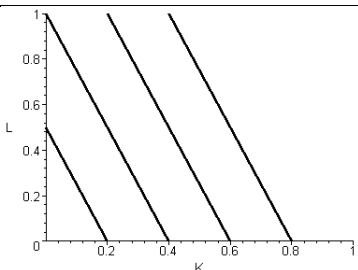
№ п/п	Формальное свойство	Экономическая интерпретация
5.	$K > 0, L > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} \geq 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} \geq 0$	При увеличении объема затрат одного (любого) ресурса при неизменном количестве другого предельная эффективность последнего возрастает
6.	$\forall m \in \mathbf{R} \quad F(mK, mL) = m^p F(K, L)$	Производственная функция является однородной степени $p > 0$. Величину p называют отдачей от масштаба производства . При $p > 1$ наблюдается рост эффективности производства от роста масштаба производства (при увеличении объемов затрат ресурсов в m раз объем производства возрастает в m^p раз). При $p < 1$ – снижение эффективности производства от роста масштаба производства. При $p = 1$ эффективность производства при росте масштаба постоянна

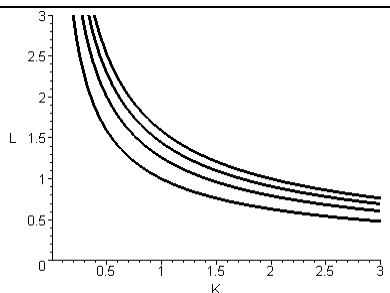
Графиком двухфакторной производственной функции является двумерная поверхность в трехмерном пространстве. Линии уровня производственной функции называют **изоквантами** (линиями постоянного уровня производства). При выполнении всех свойств 1–6 производственная функция является выпуклой вверх, а ее линии уровня – выпуклыми вниз.

Наиболее часто используемые производственные функции и графики их линий уровня приведены в табл. 13.

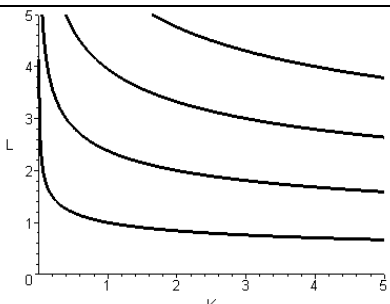
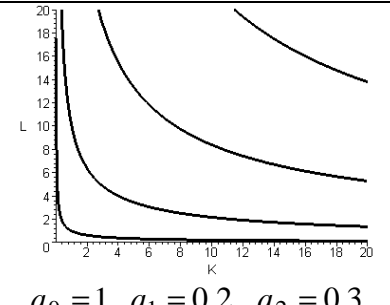
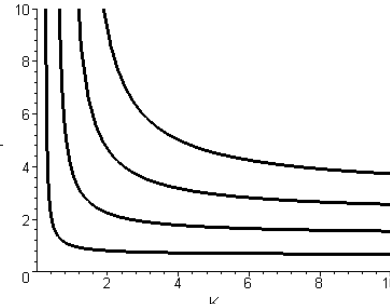
Таблица 13

Виды производственных функций

№ п/п	Формула	Название	Вид линий уровня
1.	$Q = a_0 + a_1 K + a_2 L,$ $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$	Линейная функция	 <p>$a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 2$</p>
2.	$Q = a_1 K + a_2 L,$ $a_1 > 0, a_2 > 0$	Линейно-однородная функция	

3.	$Q = a_0 K^{a_1} L^{a_2},$ $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$	Мультипликативная производственная функция	 <p>$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$</p>
----	---	--	--

Окончание таблицы 13

№ п/п	Формула	Название	Вид линий уровня
3.	$Q = a_0 K^{a_1} L^{1-a_1},$ $a_0 > 0, a_1 > 0$	Функция Кобба–Дугласа (классическая)	 <p>$a_0 = 1, a_1 = 0,2$</p>
	$Q = a_0 K^{a_1} L^{a_2},$ $a_0 > 0, 0 < a_1 < 1,$ $0 < a_2 < 1$	Неоклассическая функция	 <p>$a_0 = 1, a_1 = 0,2, a_2 = 0,3$</p>
4.	$Q = a_0 \left(\frac{a_1}{K^\rho} + \frac{(1-a_1)}{L^\rho} \right)^{-\gamma/\rho},$ $a_0 > 0, \gamma > 0, 0 < a_1 < 1,$ $\rho \geq -1$	Функция с постоянной эластичностью замещения (функция CES)	 <p>$a_0 = 1, a_1 = 0,3, \gamma = 0,9, \rho = 0,8$</p>

5.	$Q = \min(a_1 K, a_2 L),$ $a_1 > 0, a_2 > 0$	Функция В.В. Леонтьева (функция с бесконечной эластичностью замещения)	
----	---	---	--

Замечание 1. Некоторые из производственных функций, приведенных в табл. 13, не удовлетворяют одновременно всем свойствам 1–6.

Замечание 2. Наиболее часто в экономико-математическом моделировании используются мультипликативные производственные функции и функции CES, так как они наиболее адекватно характеризуют реальное производство. Для получения аналитических выражений реальных производственных функций используются методы анализа временных рядов и статистической обработки данных (в частности, метод множественной регрессии, см., например, [6, гл. 10], [8, гл. 6]).

Для исследования производственных функций используют средние и предельные показатели, например:

$$\text{а) } E_K(Q) = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{Q} \right) / \left(\frac{\Delta K}{K} \right) = \frac{K}{Q} \frac{\partial Q}{\partial K}, \quad E_L(Q) = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{Q} \right) / \left(\frac{\Delta L}{L} \right) = \frac{L}{Q} \frac{\partial Q}{\partial L} \quad -$$

эластичности продукции Q по факторам производства (затратам капитала и труда соответственно);

$$\text{б) } E_K(L) = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta L}{L} \right) / \left(\frac{\Delta K}{K} \right) = \frac{K}{L} \frac{\partial L}{\partial K}, \quad E_L(K) = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta K}{K} \right) / \left(\frac{\Delta L}{L} \right) = \frac{L}{K} \frac{\partial K}{\partial L} \quad -$$

эластичности замещения одного ресурса другим, характеризующие необходимое изменение (как правило, в процентах) величины одного ресурса при изменении количества другого ресурса на 1% с тем, чтобы выпуск при этом не изменился;

$$\text{в) } \mu = -\frac{\partial F}{\partial L} / \frac{\partial F}{\partial K} \quad - \text{ предельная норма замещения одного ресурса другим.}$$

Используя их, можно получить экономическую интерпретацию параметров производственных функций и основные характеристики производства ([6, гл. 6]). В частности, в мультипликативной функции коэффициент $a_0 > 0$ интерпретируется как параметр нейтрального научно-технического прогресса, $a_1 > 0$ – как эластичность выпуска по основным фондам, $a_2 > 0$ – эластичность выпуска по труду. Если $a_1 > a_2$, то имеет место **трудоосберегающий** (интенсивный) рост производства, в противном случае – **фондосберегающий** (экстенсивный) рост.

Рассмотрим некоторые микроэкономические модели, использующие аппарат производственных функций.

7.3. Двухфакторные оптимизационные модели микроэкономики

7.3.1. Максимизация прибыли от производства одного вида продукции

Пусть выпуск некоторого вида продукции описывается производственной функцией $Q = F(K, L)$. **Доходом (выручкой)** R предприятия в определенном временном периоде называют произведение PQ общего объема Q выпускаемой предприятием продукции на рыночную цену P этой продукции. **Издержками** C

фирмы называют общие выплаты фирмы в определенном временном периоде за все виды затрат $C = C(K, L)$. Линию уровня функции издержек $C_0 = C(K, L)$ называют *изокостой*. **Прибылью** Π предприятия в определенном временном периоде называют разность между полученным предприятием доходом R и его издержками производства $\Pi = R - C$ или $\Pi(K, L) = PF(K, L) - C(K, L)$. Точку (K_0, L_0) называют *оптимальным распределением ресурсов*, если в ней функция прибыли $\Pi(K, L) = PF(K, L) - C(K, L)$ принимает максимальное значение.

Будем предполагать, что функция издержек линейно зависит от объемов затрачиваемых ресурсов: $C(K, L) = w_K K + w_L L$. Коэффициенты w_K, w_L – рыночные цены на ресурсы. В микроэкономике принято считать, что если предприятие функционирует в условиях чистой (совершенной) конкуренции, на рыночные цены P, w_K, w_L оно влиять не может. В этом случае основная цель производителя заключается в максимизации прибыли путем рационального распределения затрачиваемых ресурсов. Формальная постановка задачи максимизации прибыли зависит от того, какой временной промежуток (долговременный или краткосрочный) предшествует периоду, в котором максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного промежутка производитель может выбирать любой вектор затрат ресурсов (K, L) из пространства ресурсов $X = \{(K, L) \in \mathbf{R}^2 : K \geq 0, L \geq 0\}$ (условие неограниченности ресурсов). Следовательно, задача максимизации прибыли формулируется следующим образом: найти оптимальное распределение ресурсов и максимум функции прибыли $\Pi(K, L)$ на множестве X или

$$\max_X \Pi(K, L). \quad (7.1)$$

Другими словами, поиск оптимального плана и максимума прибыли сводится к задаче отыскания локального экстремума функции $\Pi(K, L)$ в области $K \geq 0$ и $L \geq 0$ (при условии, что нет других ограничений). При этом оптимальное распределение ресурсов (K_0, L_0) называют *локальным рыночным равновесием фирмы* в случае долговременного промежутка. Изоквантата и изокоста, проходящие через точку (K_0, L_0) , обязательно касаются друг друга.

Найдем предельную норму замещения одного ресурса другим при оптимальном распределении ресурсов. В точке локального экстремума первые производные функции прибыли равны нулю. Отсюда имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} P \frac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial K} - \frac{\partial C(K_0, L_0)}{\partial K} = 0, \\ P \frac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial L} - \frac{\partial C(K_0, L_0)}{\partial L} = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Тогда предельную норму замены в точке оптимального распределения ресурсов можно вычислить следующим образом:

$$\mu = - \frac{\partial F(K_0, L_0) / \partial L}{\partial F(K_0, L_0) / \partial K} = - \frac{\partial C(K_0, L_0) / \partial L}{\partial C(K_0, L_0) / \partial K}$$

(в литературе предельную норму замены иногда определяют как положительное число). В частности, если $C(K, L) = w_K K + w_L L$, где w_K, w_L – факторные цены на труд и капитальные затраты соответственно, то $\mu = -\frac{w_L}{w_K}$. Таким образом, в точке локального рыночного равновесия в случае линейной функции издержек

предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению цен на эти ресурсы.

Для линейной функции издержек $C(K, L) = w_K K + w_L L$ система уравнений (7.2) примет вид

$$\begin{cases} P \frac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial K} - w_K = 0, \\ P \frac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial L} - w_L = 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

из которого можно найти оптимальное распределение ресурсов (K_0, L_0) как пару функций, зависящих от цен P, w_K, w_L :

$$K_0 = D_K(P, w_K, w_L), \quad L_0 = D_L(P, w_K, w_L). \quad (7.4)$$

Функции (7.4) называют **функциями спроса на ресурсы**. Их значения выражают оптимальные выборы (K_0, L_0) затрат ресурсов как функции цены выпускаемой продукции и цен на ресурсы. Если подставить выражения (7.4) в производственную функцию $Q = F(K, L)$, получится функция

$$Q = F(D_K(P, w_K, w_L), D_L(P, w_K, w_L)) = S(P, w_K, w_L),$$

которую называют **функцией предложения выпуска**. Знание функции $Q = S(P, w_K, w_L)$ позволяет отслеживать реакцию производителя на изменение цены выпуска и цен ресурсов, а также оценивать взаимозаменяемость и взаимодополняемость ресурсов (см. [6, гл. 6]; [10, гл. 3]). При фиксированных ценах ресурсов w_K и w_L функция предложения выпуска принимает вид $Q = S(P)$, используемый при моделировании равновесия типа «спрос-предложение» (тема 5).

Замечание. Если функция издержек нелинейна, то функции спроса на ресурсы можно найти как решение системы (7.2). В этом случае они будут зависеть от цены продукта P и параметров функции $C = C(K, L)$.

Если же издержки не должны превышать некоторой заданной величины C_0 , то задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка формулируется следующим образом: найти оптимальное распределение ресурсов и максимум функции прибыли $\Pi(K, L)$ на множестве X при условии $C(K, L) \leq C_0$, что равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \Pi(K, L) = PF(K, L) - C(K, L), \\ \max_X F(K, L), \\ C(K, L) \leq C_0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Другими словами, требуется найти точку (K_0, L_0) условного экстремума производственной функции $Q = F(K, L)$ на множестве X при ограничении $C(K, L) \leq C_0$, а затем вычислить значение функции прибыли $\Pi(K, L)$ в точке (K_0, L_0) .

Замечание 1. В математическом анализе доказано, что выпуклая (вверх или вниз) функция при ограничениях, образующих выпуклое множество, достигает экстремума на границе этого множества. Так как производственная функция и множество, образованное множеством X при условии $C(K, L) \leq C_0$, являются выпуклыми, то задачу (7.5) можно заменить более простой:

$$\begin{cases} \Pi(K, L) = PF(K, L) - C_0, \\ \max_X F(K, L), \\ C(K, L) = C_0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Задача (7.6) может быть решена с использованием метода множителей Лагранжа. Множество решений $(K_0(C_0), L_0(C_0))$ при всевозможных значениях $C_0 > 0$ образует так называемую **линию долговременного развития фирмы**. Точка локального рыночного равновесия задачи (7.1) обязательно принадлежит этой линии (см. [5, гл. 11]).

Замечание 2. В теории фирмы доказано, что значение множителя Лагранжа λ_0 в решении задачи (7.6) обратно пропорционально значению рыночной цены единицы выпускаемой продукции: $P_0 = \frac{1}{\lambda_0}$.

Замечание 3. Некоторые производственные функции могут и не иметь локального экстремума при неограниченных затратах ресурсов (например, классическая функция Кобба–Дугласа). В этом случае решением задачи (7.1) является линия долговременного развития фирмы. При этом производителю выгодно наращивать производство.

Пример. Производственная функция некоторого предприятия имеет вид $Q = 3K^{1/3}L^{1/3}$, цена единицы продукции $P = 10$ денежных единиц, функция издержек линейна, стоимость аренды единицы производственных фондов $w_K = 5$ денежных единиц, ставка заработной платы $w_L = 10$ денежных единиц на человека. Найти:

1. Оптимальное распределение ресурсов и соответствующую ему прибыль от производства одного вида продукции в долгосрочном периоде, если предприятие может неограниченно увеличивать затраты ресурсов.
2. Оптимальное распределение ресурсов и соответствующую ему прибыль от производства одного вида продукции в краткосрочном периоде, если затраты ресурсов ограничены величиной $C_0 = 100$ денежных единиц.
3. Функции спроса на ресурсы, функцию предложения выпуска.
4. Уравнение линии долговременного развития фирмы.
5. Предельную норму замены одного ресурса другим.
6. Рыночную цену единицы продукции.

Решение. Функции прибыли и издержек данной задачи имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \Pi(K, L) &= P \cdot 3K^{1/3}L^{1/3} - w_K K - w_L L = 30K^{1/3}L^{1/3} - 5K - 10L, \\ C(K, L) &= w_K K + w_L L = 5K + 10L. \end{aligned}$$

1. Найдем решение задачи (7.1) поиска оптимального плана в условиях неограниченных затрат ресурсов:

$$\max_X (P \cdot 3K^{1/3}L^{1/3} - w_K K - w_L L),$$

где $X = \{(K, L) \in \mathbf{R}^2 : K \geq 0, L \geq 0\}$. Найдем частные производные первого порядка функции прибыли: $\frac{\partial \Pi}{\partial K} = PK^{-2/3}L^{1/3} - w_K$, $\frac{\partial \Pi}{\partial L} = PK^{1/3}L^{-2/3} - w_L$. Запишем необходимое условие существования локального экстремума (7.3) и найдем стационарные точки функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PK^{-2/3}L^{1/3} - w_K = 0, \\ PK^{1/3}L^{-2/3} - w_L = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = \left(\frac{w_K}{P}\right)^3 K^2, \\ K^{1/3} \left(\left(\frac{w_K}{P}\right)^3 K^2\right)^{-2/3} = \frac{w_L}{P}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = \frac{P^3}{w_L w_K^2}, \\ L = \frac{P^3}{w_L^2 w_K}. \end{cases} \quad (7.7)$$

При $P=10$, $w_K=5$, $w_L=10$ получаем $K_0=4$ единицы, $L_0=2$ единицы. Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} = -\frac{2}{3} PK^{-4/3}L^{1/3}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = -\frac{2}{3} PK^{1/3}L^{-4/3}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial L \partial K} = \frac{\partial \Pi}{\partial K \partial L} = \frac{1}{3} PK^{1/3}L^{-2/3}.$$

Тогда определитель, позволяющий проверить достаточное условие существования локального экстремума, примет вид

$$\Delta(K, L) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} P^2 KL - \frac{1}{9} P^2 K^{-4/3} L^{-4/3} = \frac{P^2}{9} K^{-4/3} L^{-4/3} (4K^{1/3} L^{1/3} - 1).$$

Его значение в точке $(K_0, L_0) = (4; 2)$ равно $\Delta(4; 2) = \frac{175}{36} > 0$, следовательно,

локальный экстремум существует. При этом $\frac{\partial^2 \Pi(4; 2)}{\partial K^2} = -\frac{5}{3} \sqrt[3]{2} < 0$, следовательно,

точка $(K_0, L_0) = (4; 2)$ является точкой локального максимума, значение функции прибыли в которой $\Pi(4; 2) = 30 \cdot 2 - 20 - 20 = 20$ денежных единиц.

2. Найдем решение задачи (7.5), то есть оптимальное распределение и соответствующую ему прибыль при условии $C(K, L) \leq C_0$. Производственная функция $Q = 3K^{1/3}L^{1/3}$ удовлетворяет всем условиям 1)–6) пункта 7.2, в силу которых является выпуклой вверх. Так как функция издержек линейна, то подмножество множества X , точки которого удовлетворяют неравенству $w_K K + w_L L \leq C_0$, является выпуклым. Следовательно, задача (7.5) сводится к поиску условного экстремума функции $Q = 3K^{1/3}L^{1/3}$ при условии $w_K K + w_L L = C_0$, $C_0 = 100$.

Составим функцию Лагранжа $L(K, L) = P \cdot 3K^{1/3}L^{1/3} - \lambda(w_K K + w_L L - C_0)$, запишем для нее необходимое условие существования экстремума и найдем решение полученной системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial L} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K^{-2/3}L^{1/3} - \lambda w_K = 0, \\ K^{1/3}L^{-2/3} - \lambda w_L = 0, \\ w_K K + w_L L - C_0 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{K^{-2/3}L^{1/3}}{w_K}, \\ \lambda = \frac{K^{1/3}L^{-2/3}}{w_L}, \\ w_K K + w_L L - C_0 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{K^{-2/3}L^{1/3}}{w_K}, \\ \frac{K^{-2/3}L^{1/3}}{w_K} = \frac{K^{1/3}L^{-2/3}}{w_L}, \\ w_K K + w_L L - C_0 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{K^{-2/3}L^{1/3}}{w_K}, \\ L = \frac{w_K K}{w_L}, \\ w_K K + w_L L - C_0 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = \frac{C_0}{2w_K}, \\ L = \frac{C_0}{2w_L}, \\ \lambda = 3\sqrt[3]{\frac{2}{w_K w_L C_0}}. \end{cases} \quad (7.8)$$

При $w_K=5$, $w_L=10$, $C_0=100$ получим оптимальное распределение ресурсов $K_0=10$ единиц, $L_0=5$ единиц, соответствующая ему прибыль $\Pi(10; 5) = 30 \cdot 10^{1/3} \cdot 5^{1/3} - 100 \approx 10,52$ денежных единиц. Так как $\Pi(10; 5) < \Pi(4; 2)$,

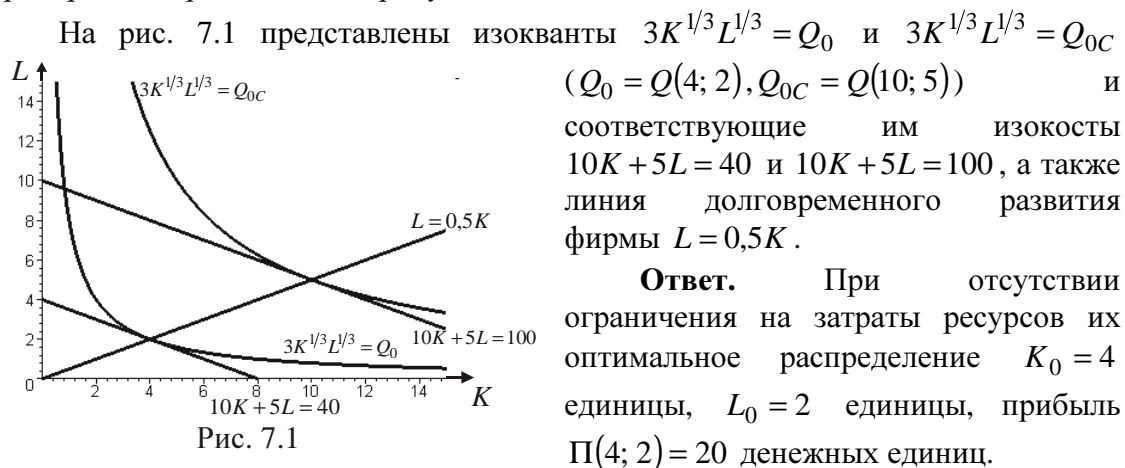
то предприятию выгоднее уменьшить объем выпуска, так как затраты ресурсов $K_0 = 10$ единиц, $L_0 = 5$ единиц слишком велики.

3. Из системы уравнений (7.7) следует, что функции спроса на ресурсы при неограниченных издержках имеют вид $K = \frac{P^3}{w_L w_K^2}$, $L = \frac{P^3}{w_L^2 w_K}$, а соответствующая им функция предложения выпуска $Q = 3 \left(\frac{P^3}{w_L w_K^2} \right)^{1/3} \left(\frac{P^3}{w_L^2 w_K} \right)^{1/3} = \frac{3P^2}{w_L w_K}$. Функции спроса на ресурсы при ограниченных издержках в силу системы (7.8) равны $K = \frac{C_0}{2w_K}$, $L = \frac{C_0}{2w_L}$, им соответствует функция предложения выпуска $Q = 3 \left(\frac{C_0}{2w_K} \right)^{1/3} \left(\frac{C_0}{2w_L} \right)^{1/3} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{C_0^2}{4w_L w_K}}$.

4. Линия долговременного развития фирмы представляет собой множество точек с координатами $(K; L) = \left(\frac{C}{2w_K}; \frac{C}{2w_L} \right)$ (C – параметр). Уравнение этого множества точек в системе координат OKL можно получить, если из каждой координаты выразить параметр C , а затем приравнять полученные результаты: $L = \frac{w_K}{w_L} K$. С учетом $w_K = 5$, $w_L = 10$ получаем $L = 0,5K$.

5. В силу линейности функции издержек, предельная норма замены одного ресурса другим равна $\mu = -\frac{w_L}{w_K} = -2$, то есть один работающий может быть заменен двумя единицами производственных фондов.

6. Из системы (7.8) $\lambda_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{w_K w_L C_0}}$, то рыночная цена единицы продукции составит $P_0 = \frac{1}{\lambda_0} = \sqrt[3]{0,5 w_K w_L C_0} = \sqrt[3]{0,5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 100} \approx 13,57$ денежных единиц. По условию цена единицы продукции $P = 10$ денежных единиц, следовательно, предприятие продает свою продукцию по заниженной цене.



Ответ. При отсутствии ограничения на затраты ресурсов их оптимальное распределение $K_0 = 4$ единицы, $L_0 = 2$ единицы, прибыль $\Pi(4; 2) = 20$ денежных единиц.

Если затраты ресурсов ограничены величиной $C_0 = 100$ денежных единиц, то оптимальное распределение ресурсов $K_0 = 10$ единиц, $L_0 = 5$ единиц, соответствующая ему прибыль $\Pi(10; 5) \approx 10,52$ денежных единиц.

Функции спроса на ресурсы при неограниченных издержках $K = \frac{P^3}{w_L w_K^2}$, $L = \frac{P^3}{w_L^2 w_K}$, соответствующая функция предложения выпуска $Q = \frac{3P^2}{w_L w_K}$. Функции

спроса на ресурсы при ограниченных издержках $K = \frac{C_0}{2w_K}$, $L = \frac{C_0}{2w_L}$, функция предложения выпуска $Q = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{C_0^2}{4w_L w_K}}$. Линия долговременного развития фирмы $L = 0,5K$. Предельная норма замены $\mu = -\frac{w_L}{w_K} = -2$. Рыночная цена единицы продукции $P_0 \approx 13,57$ денежных единиц.

В случае краткосрочного промежутка производитель должен учитывать неизбежные ограничения на объемы затрачиваемых ресурсов, которые формально могут быть заданы системой неравенств $g_i(K, L) \leq \overline{b_i}$ ($i = \overline{1, m}$). Тогда задачу максимизации прибыли можно формально представить соотношениями

$$\begin{cases} \max_x \Pi(K, L), \\ g_i(K, L) \leq \overline{b_i}, i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Задача (7.9) может быть решена методами нелинейного программирования. Однако процесс ее решения является более трудоемким, чем задачи (7.1), и существенно зависит от вида производственной функции, функции издержек и наложенных ограничений.

К задаче максимизации прибыли от производства одного вида продукции примыкает ряд других оптимизационных задач.

7.3.2. Минимизация издержек при постоянном уровне выпуска

Пусть $Q = F(K, L)$ – функция выпуска некоторого товара в зависимости от используемых ресурсов: капитала K и труда L ; $C = C(K, L)$ – функция затрат на ресурсы K и L . Уровень производства задан величиной Q_0 . Требуется найти точку (K_0, L_0) оптимального распределения ресурсов, то есть такие значения K_0 и L_0 , что при данном уровне выпуска Q_0 издержки минимальны. Другими словами, требуется найти точку условного экстремума функции $C = C(K, L)$ при условии $F(K, L) = Q_0$:

$$\begin{cases} \Pi(K, L) = PQ_0 - C(K, L), \\ \min_x C(K, L), \\ F(K, L) = Q_0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Задача (7.10) также решается методом множителей Лагранжа ([5, гл. 11]).

7.3.3. Максимизация прибыли от производства различных видов продукции

Пусть некоторое предприятие производит m видов товаров в количестве Q_1, Q_2, \dots, Q_m ; P_1, P_2, \dots, P_m – соответственно, цены единицы каждого товара ($P_i, i = \overline{1, m}$, – постоянные величины). Затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек $C = C(Q_1, Q_2, K, Q_m)$. Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi(Q_1, Q_2, K, Q_m) = \sum_{i=1}^m P_i Q_i - C(Q_1, Q_2, K, Q_m). \quad (7.11)$$

Максимум прибыли отыскивают как локальный экстремум функции (7.11) при $Q_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ (при отсутствии других ограничений). Необходимое условие локального экстремума имеет вид $\frac{\partial \Pi}{\partial Q_i} = 0$ ($i = \overline{1, m}$) приводит к системе уравнений относительно переменных Q_1, Q_2, \dots, Q_m :

$$P_i - \frac{\partial C}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (7.12)$$

Система уравнений (7.12) реализует известное правило экономики: *предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара.*

Если же в задаче имеются другие ограничения, заданные системой равенств или неравенств и обусловленные ограниченностью имеющихся на предприятии ресурсов, то максимизация прибыли сводится к отысканию наибольшего значения на множестве, определенном системой ограничений (в случае ограничений-неравенств), или к отысканию условного экстремума при условиях-ограничениях (в случае ограничений-равенств).

7.3.4. Оптимизация спроса

Задача связана с распределением товара одного вида по разным рынкам с разными спросами с тем, чтобы максимизировать прибыль. Так как эластичность спроса на рынках неодинакова, то на товар устанавливаются разные цены, что ведет к так называемой ценовой дискриминации.

Пусть Q_1, Q_2, \dots, Q_m – количество одного и того же товара, продаваемого на m рынках по ценам $P_1(Q_1), P_2(Q_2), \dots, P_m(Q_m)$, то есть цена на каждом рынке зависит от количества продаваемого товара. Допустим, что функция затрат зависит от общего количества продаваемого товара: $C = C(Q_1, Q_2, K, Q_m)$. Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi(Q_1, Q_2, K, Q_m) = \sum_{i=1}^m P_i(Q_i)Q_i - C(Q_1, Q_2, K, Q_m). \quad (7.13)$$

Необходимое условие локального экстремума $\frac{\partial \Pi}{\partial Q_i} = 0$ ($i = \overline{1, m}$) приводит к системе уравнений относительно переменных Q_1, Q_2, \dots, Q_m для определения стационарных точек функции (7.13) в области $Q_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ (при отсутствии других ограничений):

$$P_i(Q_i) + Q_i \frac{\partial P_i}{\partial Q_i} - \frac{\partial C}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (7.14)$$

Затем для полученных точек проверяются достаточные условия существования локального экстремума.

Проведем анализ дохода $R_i = Q_i P_i(Q_i)$ ($i = \overline{1, m}$), полученного на каждом рынке, в зависимости от цены на товар x_i . Для этого найдем предельный доход для каждого рынка

$$MR_i = (Q_i P_i(Q_i))' = P_i(Q_i) + Q_i P_i'(Q_i) = P_i(Q_i) \left(1 + \frac{Q_i P_i'(Q_i)}{P_i(Q_i)} \right) = P_i(Q_i) \left(1 + \frac{1}{E_{P_i}(Q_i)} \right),$$

где $E_{P_i}(Q_i)$ – эластичность спроса на i -м рынке ($i = \overline{1, m}$). Так как зависимость спроса от цены – убывающая функция, то $E_{P_i}(Q_i) < 0$, следовательно, предельный доход на i -м рынке можно представить в более удобной форме

$$MR_i = P_i(Q_i) \left(1 - \frac{1}{|E_{P_i}(Q_i)|} \right) \quad (i = \overline{1, m}). \quad (7.15)$$

Если $|E_{P_i}(Q_i)| < 1$, то рынок неэластичный и $MR_i < 0$. Если $|E_{P_i}(Q_i)| > 1$, то рынок эластичный и $MR_i > 0$ ($i = \overline{1, m}$).

Если $\frac{\partial C}{\partial Q_i} > 0$ ($i = \overline{1, m}$), то для выполнения условий (7.14) требуется, чтобы был выбран рынок с положительным предельным доходом или с эластичным спросом, то есть с условием $|E_{P_i}(Q_i)| > 1$. Перепишем условие (7.14) с учетом (7.15)

$$P_i(Q_i) \left(1 - \frac{1}{|E_{P_i}(Q_i)|} \right) = \frac{\partial C}{\partial Q_i} \quad (i = \overline{1, m}),$$

из которого выводится условие «ценовой дискриминации»: *чем меньше по абсолютной величине эластичность данного рынка при данном количестве продаваемого товара, тем выше должна быть цена на товар при условии максимизации прибыли.*

Теоретический материал: [1, гл. 15], [2, гл. 8], [3, темы 17, 18], [4, ч. I, гл. 8], [5, гл 8–11], [6, гл. 1, 6], [7, гл. 25], [8, гл. 8], [10, гл. 3], [11], [12, гл. 7].

Тема 8. Динамические модели макроэкономики

Необходимые математические понятия: дифференциальные уравнения первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, линейные уравнения, уравнения Бернулли) и методы их решения; общее решение, задача Коши, частное решение, интегральная кривая; состояние равновесия; траектория дифференциального уравнения, равновесная траектория; предел функции.

8.1. Понятие о динамических макроэкономических моделях

В теме 1 рассматривались *статические* балансовые модели, то есть модели, относящиеся к определенному моменту или промежутку времени при условии, что их компоненты и параметры не зависят от времени. Модели, в которых учитывается зависимость компонентов и параметров от времени, называют *динамическими*. Динамические модели позволяют проследить изменение процесса во времени, дать прогноз развития экономического явления, найти взаимосвязь переменных во времени.

Время в экономической динамике может рассматриваться как непрерывное или дискретное. Непрерывное время удобно для моделирования, так как позволяет использовать аппарат дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений. Дискретное время удобно для приложений, поскольку статистические данные всегда дискретны и относятся к конкретным единицам времени. Для дискретного времени может использоваться аппарат разностных уравнений. Большинство известных моделей экономической динамики существует как в непрерывном, так и в дискретном вариантах. В обоих вариантах для них могут быть получены аналогичные результаты, и уровень сложности самих моделей примерно одинаков.

По цели исследования динамические модели макроэкономики можно разделить на *описательные* и *оптимизационные*. Описательные модели предназначены для прогнозирования экономического развития и исследования равновесного состояния. Назначение оптимизационных моделей – изучение влияния на экономику управляющих воздействий и определение условий возникновения в экономике переходных процессов, удовлетворяющих заданным свойствам.

В настоящем пособии рассматривается несколько описательных односекторных моделей экономической динамики с непрерывным временем.

Под *экономическим развитием*, как правило, подразумевают изменение национального дохода данного государства или изменение количества ресурсов (труда и капитала с течением времени). *Состоянием равновесия* принято называть такое состояние объекта, которое он сохраняет при отсутствии внешних воздействий. *Сектором* принято называть структурную единицу экономики, производящую один совокупный продукт. Достоинством односекторных моделей с непрерывным временем является возможность аналитически представить развитие экономики.

При изучении описательных моделей экономической динамики наибольший интерес с практической точки зрения вызывают следующие задачи:

- 1) определение условий, при которых будет наблюдаться экономический рост;
- 2) описание процессов выхода к состоянию равновесия;

3) поиск условий, при которых к состоянию равновесия приводит экономический рост.

Всюду далее для основных экономических факторов будем использовать следующие обозначения:

X – валовой выпуск в денежном выражении (национальный доход), полученный на момент времени t ;

I – инвестиции в производство на момент времени t ;

S – общее потребление на момент времени t ;

Y – конечное потребление на момент времени t ;

G – государственные расходы на момент времени t ;

K – капитал (количество денег);

L – труд (количество работающего населения);

$l \in (0; 1)$ – норма инвестиций или норма накопления (доля национального дохода, идущая на инвестиции в производство);

$m > 0$ – капиталоотдача, величина $1/m$ – темп прироста капитала (или норма акселерации или приростная капиталоемкость); норма акселерации $1/m$ определяется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства и предполагается постоянной во времени;

$z(t) = \frac{\dot{Z}}{Z(t)}$ – непрерывный темп прироста экономического показателя Z в момент времени t .

Для односекторной экономики X , Y , G , I , K , L являются неотрицательными числовыми функциями.

Основой для построения различных описательных моделей экономической динамики является так называемое **балансовое уравнение**

$$X = S + I, \quad (8.1)$$

в котором предполагается, что весь произведенный национальный доход X распределяется между общим потреблением S и инвестициями в производство I .

Односекторные экономико-математические модели с непрерывным временем, описывающие экономическое развитие в установившемся режиме (то есть не переходный процесс), могут быть описаны одним обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами или системой таких уравнений вида

$$\dot{y}_i = Y_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.2)$$

Введем несколько важных математических понятий.

Линию, определяемую условиями $\dot{y}_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$), называют **равновесной траекторией** или **состоянием равновесия** системы (8.2) (\dot{y}_i означает производную по времени от функции y_i ($i = \overline{1, n}$)). Состояние равновесия также называют **равновесным решением** или **равновесной траекторией** системы (8.2).

Состояние равновесия $y_i = f_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) системы (8.2) называют **устойчивым (по Ляпунову)** по отношению к величинам y_i , если для всякого малого положительного числа ε найдется другое положительное число δ , такое, что для всех неравновесных решений $y_i = y_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), для которых в начальный момент времени $t = t_0$ справедливы неравенства $|y_i(t_0) - f_i(t_0)| \leq \delta$

($i = \overline{1, n}$), при всех $t > t_0$ будут выполняться неравенства $|y_i(t) - f_i(t)| < \varepsilon$ ($i = \overline{1, n}$). Устойчивое состояние равновесия $y = f(t)$ дифференциального уравнения $\dot{y} = Y(t, y)$ представлено на рис. 8.1, а), неустойчивое – на рис. 8.1, б).

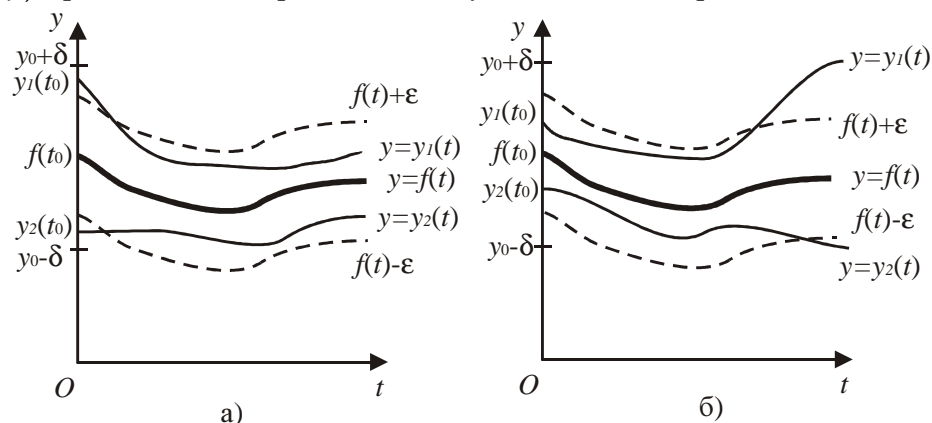


Рис. 8.1

Если состояние равновесия устойчиво, и если число δ можно выбрать настолько малым, что для всех неравновесных решений, удовлетворяющих неравенствам $|y_i(t_0) - f_i(t_0)| \leq \delta$ ($i = \overline{1, n}$), будут выполняться условия $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - f_i(t)| = 0$ ($i = \overline{1, n}$), то неравновесное решение $y_i = y_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) называют **устойчивым асимптотически**. Асимптотически устойчивое состояние равновесия дифференциального уравнения $\dot{y} = Y(t, y)$ представлено на рис. 8.2.

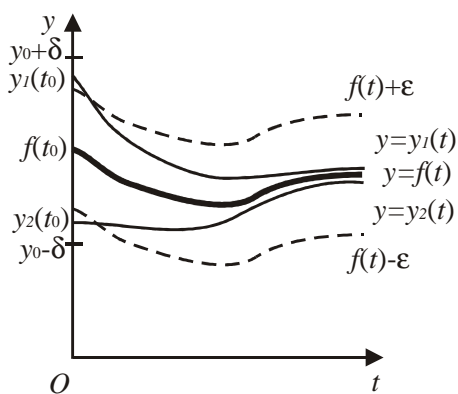


Рис. 8.2

Построим и исследуем основные динамические модели макроэкономики.

8.2. Модели естественного роста

Модели естественного роста описывают динамику некоторого экономического показателя (валового национального дохода X , объема продукции некоторой отрасли Q , количества денег в государстве K , народонаселения и, в частности, количества трудоспособного населения L) и являются наиболее простыми из моделей подобного рода, так как учитывают наименьшее число факторов.

Базовой моделью можно считать модель естественного роста валового национального дохода. При ее построении используются следующие предположения:

1. Часть национального дохода идет на инвестиции в производство; балансовое уравнение имеет вид $I = IX$. Общее потребление не выделяется.
2. Инвестиции мгновенно поступают в прирост национального дохода (инвестиционный лаг равен нулю) и расходуются только на производство (выбытия денежных средств нет).
3. В результате расширения производства будет получен прирост национального дохода, часть которого опять будет использована на инвестиции в

производство. Это приведет к изменению (увеличению) скорости роста национального дохода, причем эта скорость полагается пропорциональной количеству инвестиций: $\dot{X} = mI$.

4. Экономика считается закрытой (чистый экспорт равен нулю).

Подставляя $I = lX$ в $\dot{X} = mI$, получаем дифференциальное уравнение **математической модели естественного экономического роста**

$$\dot{X} = mlX. \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решение задачи Коши с начальным условием $X(0) = X_0$ уравнения (8.3) имеет вид

$$X(t) = X_0 e^{mlt}. \quad (8.4)$$

Функция (8.4) при $m > 0$ и $l > 0$ является строго монотонно возрастающей.

Темп прироста национального дохода $x(t) = \frac{\dot{X}}{X(t)} = ml$ является постоянным.

Следовательно, при выполнении предположений 1–4 наблюдается экспоненциальный рост национального дохода с постоянным темпом ml . Если весь национальный доход идет на инвестиции в производство ($l = 1$), то модель (8.3) позволяет найти, что максимально возможный (технологический) темп прироста национального дохода $x_{\max} = m$.

Состоянием равновесия дифференциального уравнения (8.3), определяемым из условия $\dot{X} = 0$, является решение $X(t) = 0$. С экономической точки зрения равновесная траектория характеризует ситуацию отсутствия производства, а неравновесные траектории с течением времени удаляются от прямой $X(t) = 0$. Следовательно, равновесная траектория $X(t) = 0$ является неустойчивой. Поведение траекторий уравнения (8.3) в окрестности состояния равновесия при $ml = 0,03$ и различных начальных условиях показано на рис. 8.3.

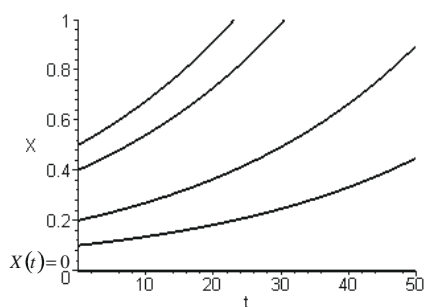


Рис. 8.3

Добавив к предположениям 1–4 несколько дополнительных, можно получить модификации модели естественного экономического роста, называемые **математическими моделями роста капитала**.

5. Валовой выпуск (национальный доход) определяется ценой товара $P(K)$ и производственной функцией $F(K)$ следующим образом: $X = P(K)F(K)$, где капитал $K = K(t)$ является функцией времени.

6. Все инвестиции идут только на расширение производства (то есть на увеличение ресурса K), выбытия капитала нет, что приводит к изменению скорости роста капитала: $I = \dot{K}$, тогда $\dot{X} = m\dot{K}$.

7. Научно-технический прогресс не учитывается.

Подставляя $X = P(K)F(K)$ и $\dot{X} = m\dot{K}$ в уравнение (8.3), получим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{K} = lP(K)F(K). \quad (8.5)$$

В зависимости от вида функции $P(K)$ и производственной функции $F(K)$ можно получить несколько различных вариантов модели (8.5).

Если предположить следующее:

8. Весь произведенный продукт реализуется полностью (рынок не насыщаем), то $P(K) = P = const$.

9. Производственная функция линейна (либо затраты труда постоянны во времени, либо выпуск не зависит от затрат труда, поскольку труд не является дефицитным ресурсом): $F(K) = K$.

Тогда уравнение (8.5) принимает вид

$$\dot{K} = lPK \quad (8.6)$$

и называется **дифференциальным уравнением естественного роста капитала**.

Уравнение (8.6) является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, решением задачи Коши которого с начальным условием $K(0) = K_0$ является функция

$$K = K_0 e^{lPt} \quad (8.7)$$

Состоянием равновесия, определяемым условием $\dot{K} = 0$, является решение уравнения (8.6) вида $K(t) = 0$. Поведение траекторий в окрестности состояния равновесия дифференциального уравнения (8.7) аналогично поведению траекторий в окрестности состояния равновесия дифференциального уравнения (8.3).

Если же вместо предположения 8 допустить, что зависимость цены единицы ресурса капитала от количества этого ресурса (функция спроса на капитал) $P(K)$ является убывающей функцией, то есть с увеличением количества ресурса на рынке цена на него падает (рынок насыщаем, что возможно в условиях конкуренции), тогда уравнение (8.5) принимает вид

$$\dot{K} = lP(K)K \quad (8.8)$$

и называется **дифференциальным уравнением роста капитала в условиях конкуренции**. Состояниями равновесия дифференциального уравнения (8.8) являются решение $K(t) = 0$ и решение $K(t) = K_p$, определяемая из $P(K_p) = 0$. Можно доказать, что состояние равновесия $K(t) = 0$ является неустойчивым, а $K(t) = K_p$ – устойчивым асимптотически.

Пример. Пусть $P(K) = a - bK$ ($a > 0$, $b > 0$), тогда уравнение (8.8) принимает вид $\dot{K} = l(a - bK)K$. Решая его, получим общее решение $K = \frac{a}{b + aCe^{-alt}}$ и решение задачи Коши с начальным условием $K(0) = K_0$: $K(t) = \frac{aK_0}{bK_0 + (a - bK_0)e^{-alt}}$.

Состояниями равновесия уравнения $\dot{K} = l(a - bK)K$, определяемыми из условия

$\dot{K} = 0$, являются прямые $K(t) = 0$ и $K(t) = \frac{a}{b}$.

Поведение траекторий уравнения $\dot{K} = l(a - bK)K$ при $l = 0,03$, $a = 3$, $b = 2$ и различных начальных условиях показано на рис. 8.4. Заметим, что если $K_0 > \frac{a}{b}$, то состояние равновесия $K(t) = \frac{a}{b}$ достигается в результате экономического спада, а если

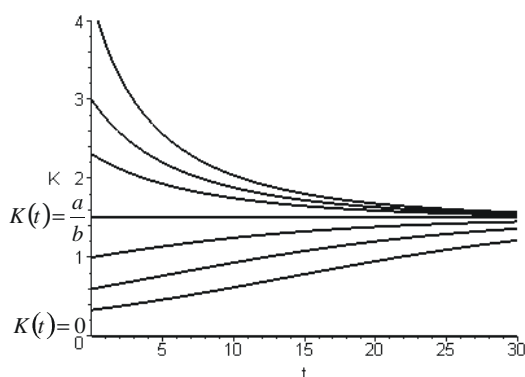


Рис. 8.4

$K_0 < \frac{a}{b}$, то – в результате экономического роста.

8.3. Классическая модель экономического роста и ее модификации

Классическая модель экономического роста описывает динамику валового национального дохода и строится при следующих предположениях:

1. Национальный доход распределяется между потреблением и инвестициями в соответствии с балансовым уравнением (8.1): $X = S + I$. Государственные расходы не выделяются.

2. Инвестиции мгновенно поступают в прирост национального дохода (инвестиционный лаг равен нулю) и расходуются только на производство (выбытия денежных средств нет).

3. Расширение производства обеспечивает прирост национального дохода. Скорость роста национального дохода полагается пропорциональной количеству инвестиций: $\dot{X} = mI$.

4. Экономика считается закрытой (чистый экспорт равен нулю).

5. Затраты труда постоянны во времени или выпуск не зависит от затрат труда, поскольку труд не является дефицитным ресурсом.

6. Научно-технический прогресс не учитывается.

7. Общее потребление S предполагается заданным экзогенно.

Рассматриваются два варианта модели: $S = const$ (потребление постоянно) и $S = S_0 e^{rt}$ (потребление растет с постоянным темпом $r > 0$).

Подставляя X из (8.1) в $\dot{X} = mI$, получаем дифференциальное уравнение *классической модели экономического роста*

$$\dot{X} = mX - mS. \quad (8.9)$$

Если $S = const$, то уравнение (8.9) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, для которого решением задачи Коши при начальном условии $X(0) = X_0$ является функция

$$X(t) = (X_0 - S)e^{mt} + S. \quad (8.10)$$

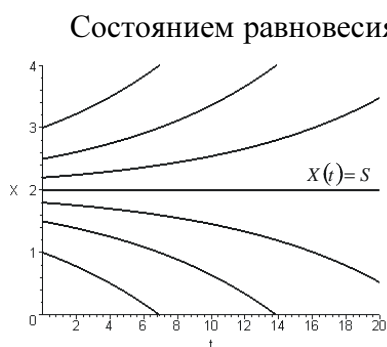


Рис. 8.5

Состоянием равновесия уравнения (8.10) является решение $X(t) = S$. Так как функция $(X_0 - S)e^{mt}$ при $m > 0$ и $X_0 > S$ является строго возрастающей функцией, а при $m > 0$ и $X_0 < S$ – строго убывающей, то траектории уравнения (8.10) удаляются от прямой $X(t) = S$ с течением времени. Состояние равновесия $X(t) = S$ не является устойчивым. Поведение траекторий уравнения (8.9) при $m = 0,1$, $S = 2$ и различных начальных условиях показано на рис. 8.5.

Темп прироста национального дохода в модели (8.9) в момент времени t имеет вид $x(t) = m\left(1 - \frac{S}{X(t)}\right)$. При этом $x(0) = m\left(1 - \frac{S}{X_0}\right)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} m\left(1 - \frac{S}{X(t)}\right) = m$.

Заметим, что если $X_0 < S$, то в силу убывания функции (8.10) при всех $t > 0$ темп прироста $x(t) = m\left(1 - \frac{S}{X(t)}\right) < 0$ и наблюдается экономический спад, а если $X_0 > S$, то в силу возрастания функции (8.10) при всех $t > 0$ темп прироста $x(t) = m\left(1 - \frac{S}{X(t)}\right) > 0$ и наблюдается экономический рост.

Если $S = S_0 e^{rt}$, то уравнение (8.9) также представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, для которого решением задачи Коши при $r \neq m$ и начальном условии $X(0) = X_0$ является функция

$$X(t) = \left(X_0 - \frac{mS_0}{m-r} \right) e^{mt} + \frac{mS_0}{m-r} e^{rt}. \quad (8.11)$$

Состояния равновесия уравнения (8.10) расположены на линии $X(t) = S_0 e^{rt}$, не являющейся решением этого уравнения. Следовательно, модель (8.10) в случае потребления, растущего с постоянным темпом, не имеет состояния равновесия. Приведем анализ поведения траекторий системы.

При $r > m$ потребление будет составлять подавляющую часть национального дохода. При этом условии в формуле (8.11) величина $\frac{mS_0}{m-r} < 0$, в результате чего второе слагаемое является отрицательным, будет убывать быстрее, чем первое (положительное) слагаемое и, в конце концов, сделает отрицательным национальный доход, что равносильно кризису экономики. Траектории (8.11) будут пересекать линию $X(t) = S_0 e^{rt}$, удаляясь от нее. Поведение траекторий уравнения (8.10) при $r = 0,8$, $m = 0,7$, $S_0 = 4$ и различных X_0 показано на рис. 8.6, а). При $r = m$ решение уравнения (8.10) имеет вид $X(t) = (X_0 - mS_0 t) e^{mt}$. Поведение траекторий аналогично случаю $r > m$.

При $r < m$ многое зависит от соотношения между r и темпом прироста национального дохода в начальный момент времени $x(0) = m \left(1 - \frac{S_0}{X_0} \right)$. Если

$r > m \left(1 - \frac{S_0}{X_0} \right)$, то требуемый темп прироста слишком высок для экономики.

Первое слагаемое решения (8.11) отрицательно и растет быстрее, чем второе (положительное), что приводит к экономическому спаду и кризису экономики.

При $r < m \left(1 - \frac{S_0}{X_0} \right)$ национальный доход растет, но при этом происходит «накопление ради накопления», так как потребление растет с заданным темпом r , а национальный доход – с возрастающим темпом $x(t) = m \left(1 - \frac{S_0}{X(t)} \right)$.

Если $r = m \left(1 - \frac{S_0}{X_0} \right)$ (темп прироста национального дохода равен темпу

прироста потребления), решение (8.11) принимает вид $X(t) = X_0 e^{mt}$. Национальный доход возрастает пропорционально потреблению. В этом случае классическую модель экономического роста называют **моделью Харрода–Домара**. Поведение траекторий уравнения (8.10) при $r = 0,14$, $m = 0,7$, $S_0 = 4$ и различных X_0 показано на рис. 8.6, б).

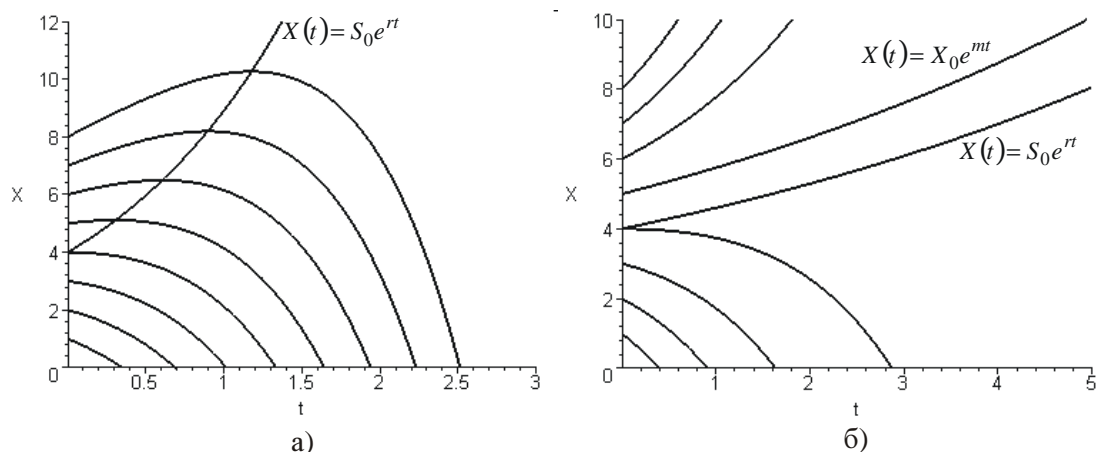


Рис. 8.6

8.4. Динамическая модель Кейнса

Динамическая модель Кейнса рассматривается как некоторое усовершенствование классической модели экономического роста и строится при следующих предположениях:

1. Национальный доход распределяется между потреблением и инвестициями в соответствии с балансовым уравнением (8.1): $X = S + I$.

2. Инвестиции мгновенно поступают в прирост национального дохода (инвестиционный лаг равен нулю) и расходуются только на производство (выбытия денежных средств нет).

3. Расширение производства обеспечивает прирост национального дохода. Скорость роста национального дохода полагается пропорциональной количеству инвестиций: $\dot{X} = mI$.

4. Экономика считается закрытой (чистый экспорт равен нулю).

5. Затраты труда постоянны во времени или выпуск не зависит от затрат труда, поскольку труд не является дефицитным ресурсом.

6. Научно-технический прогресс не учитывается.

7. Общее потребление S состоит из внутреннего потребления части национального дохода в народном хозяйстве (производственного потребления) aX , конечного потребления Y и государственных расходов G : $S = aX + Y + G$, где $a \in (0; 1)$ – коэффициент прямых затрат (коэффициент склонности к потреблению).

8. Величины G , Y , a , m предполагаются заданными экзогенно (в установившемся режиме их можно считать постоянными, в общем случае они зависят от времени) и являются характеристиками функционирования и развития данного государства.

Подставляя $S = aX + Y + G$ и $\dot{X} = mI$ в $X = S + I + G$, получаем дифференциальное уравнение **балансовой модели Кейнса для экономического роста**

$$\dot{X} = m(1 - a)X - m(Y + G). \quad (8.12)$$

Уравнение (8.12) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Его состояние равновесия, определяемое условием $\dot{X} = 0$, имеет вид $X(t) = \frac{Y+G}{1-a}$ и является частным решением уравнения (8.12). Решением задачи Коши уравнения (8.12) с начальным условием $X(0) = X_0$ является функция

$X(t) = \frac{Y+G}{1-a} + \left(X_0 - \frac{Y+G}{1-a}\right)e^{m(1-a)t}$, вид которой аналогичен функции (8.10) (интегральные кривые аналогичны представленным на рис. 8.5). Следовательно, состояние равновесия $X_p = \frac{Y+G}{1-a}$ дифференциального уравнения (8.12) не является устойчивым.

8.5. Неоклассическая модель роста капитала

Рассмотренные в пункте 8.2 модели роста капитала часто называют *классическими*. При их построении основными являлись предположения о том, что инвестиции расходуются только на расширение производства (выбытия денежных средств нет) и о том, что производственная функция линейна, а затраты труда либо постоянны во времени, либо не влияют на выпуск продукции (труд не является дефицитным ресурсом). Неоклассическая модель экономического роста учитывает выбытие денежных средств и дефицитность ресурса труда и строится при следующих предположениях:

1. Часть национального дохода идет на инвестиции в производство; балансовое уравнение имеет вид $I = lX$. Общее потребление не выделяется.

2. Инвестиции мгновенно поступают в прирост национального дохода (инвестиционный лаг равен нулю) и расходуются на расширение производства (увеличение производственных фондов) и амортизацию (ремонт и замену оборудования), то есть $I = \dot{K} + \mu K$, где μ – норма амортизации.

4. Экономика считается закрытой (чистый экспорт равен нулю).

5. Валовой выпуск (национальный доход) определяется ценой товара P и производственной функцией от капитала K и труда L : $X = PF(K, L)$.

6. Производственная функция $F(K, L)$ является однородной функцией первого порядка, то есть для любого числа z справедливо равенство $F(zK, zL) = zF(K, L)$.

7. Весь произведенный продукт реализуется полностью (рынок не насыщаем), цена единицы продукта постоянна $P = const$.

8. Научно-технический прогресс не учитывается.

9. Имеет место естественный прирост во времени трудовых ресурсов с постоянным темпом v (то есть скорость роста ресурса труда пропорциональна количеству ресурса): $\dot{L} = vL$, (где $v \in (-1; 1)$ – темп изменения числа занятых в производстве).

Подставляя $I = \dot{K} + \mu K$ и $X = PF(K, L)$ в $I = lX$, учитывая $\dot{L} = vL$, получаем систему дифференциальных уравнений, называемую *неоклассической моделью роста капитала*

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + lPF(K, L), \\ \dot{L} = vL. \end{cases} \quad (8.13)$$

С использованием понятия *фондовооруженности* $k = \frac{K}{L}$ система (8.13) может быть преобразована к одному нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка, описывающему динамику фондовооруженности. Действительно, так как $k = \frac{K}{L}$, то $K = kL$, а $\dot{K} = \dot{k}L + k\dot{L}$. Подставляя в последнее равенство выражения для \dot{K} и \dot{L} из системы (8.13), деля обе части равенства на L и выполняя алгебраические преобразования, получим уравнение

$$\dot{k} + (v + \mu)k = lP\bar{F}(k), \quad (8.14)$$

где $\bar{F}(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(k, 1)$.

Производственной функцией, удовлетворяющей предположению 6, является производственная функция Кобба–Дугласа $F(K, L) = bK^\alpha L^{1-\alpha}$. Подставив ее в уравнение (8.14), получим

$$\dot{k} + (v + \mu)k = lbPk^\alpha, \quad (8.15)$$

которое является уравнением Бернулли. Решением задачи Коши уравнения (8.15) с начальным условием $k(0) = k_0$ – функция

$$k(t) = (1-\alpha)\sqrt[\alpha]{\frac{lbP}{v+\mu}} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{lbP}{v+\mu}\right)e^{-(1-\alpha)(v+\mu)t}. \quad (8.16)$$

Состояниями равновесия (и частными решениями) уравнения (8.15) являются прямые $k(t) = 0$ и $k(t) = (1-\alpha)\sqrt[\alpha]{\frac{lbP}{v+\mu}}$. Доказано, что если $v + \mu > 0$, то состояние равновесия $k(t) = 0$ неустойчиво, а состояние равновесия $k(t) = (1-\alpha)\sqrt[\alpha]{\frac{lbP}{v+\mu}}$ устойчиво асимптотически. Поведение траекторий дифференциального уравнения (8.15) при $l = 0,1$, $b = 2$, $P = 1$, $v = 0,3$, $\mu = 0,2$, $\alpha = 0,4$ и различных k_0 показано на рис. 8.7.

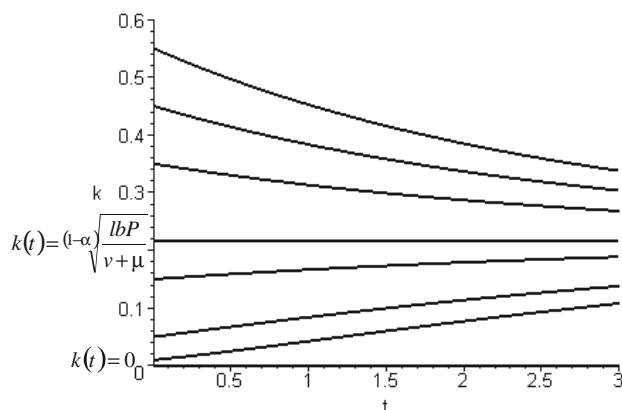


Рис. 8.7

8.6. Модель Р. Солоу

В отличие от неоклассической модели роста капитала модель Р. Солоу построена с учетом общего потребления и влияния научно-технического прогресса на экономический рост. Поэтому вместо предположения 1 пункта 8.5 используется следующее предположение:

1. Национальный доход распределяется между потреблением и инвестициями в соответствии с балансовым уравнением (8.1): $X = S + I$. Государственные расходы не выделяются. Доля инвестиций в национальном доходе составляет величину l , следовательно, доля общего потребления составляет величину $(1-l)$.

Вместо предположения 8 предыдущего пункта используется следующее:

8. Трудосберегающий научно-технический прогресс имеет темп g (то есть число единиц труда с постоянной эффективностью в расчете на одного работающего растет с постоянным темпом g).

Предположения 2–7 и 9 пункта 8.5 не меняются. Исходя из этих предположений, получаем дифференциальное уравнение, описывающее динамику роста ресурса труда: $\dot{L} = (v + g)L$.

Подставляя $I = \dot{K} + \mu K$ и $X = PF(K, L)$ в (8.1), учитывая, что $S = (1-l)X$, получаем систему дифференциальных уравнений *модели роста капитала Р. Солоу*

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + lPF(K, L), \\ \dot{L} = (v + g)L. \end{cases} \quad (8.17)$$

Система (8.17) отличается от системы (8.15) только коэффициентом при L во втором уравнении. Следовательно, поиск ее состояний равновесия и исследование их на устойчивость проводится аналогично исследованию пункта 8.5, причем можно показать, что поведение траекторий модели Р. Солоу аналогично поведению траекторий неоклассической модели (рис. 8.7). Однако, если при составлении первого уравнения системы не использовать условия $S = (1-l)X$, то получится так называемая *оптимизационная модель Р. Солоу* вида

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + PF(K, L) + S, \\ \dot{L} = (v + g)L, \end{cases} \quad (8.18)$$

которая позволяет решать задачу максимизации уровня потребления на некотором множестве устойчивых траекторий. Кроме этого модели (8.17) и (8.18) допускают обобщение на случай нелинейных производственных функций (не обязательно однородных первой степени).

Теоретический материал: [1, гл. 12], [2, гл. 11], [3, гл. 9], [4, темы 19, 20], [7, гл. 12], [8, гл. 3, 4], [11, гл. 20], [14, гл. 3], [15], [19, гл. 22].

Часть II

Задачи для организации самостоятельной и исследовательской работы студентов

1. Модель линейного межотраслевого баланса

Экономическая система состоит из n отраслей. Матрица прямых затрат и вектор конечного потребления имеют вид $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $P = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$.

- 1) Выяснить, является ли матрица A продуктивной.
- 2) Найти матрицу полных затрат.
- 3) Найти вектор валового выпуска X двумя способами (с помощью матрицы полных затрат и методом Гаусса). Выполнить проверку.

№ вар.	данные		№ вар.	данные	
	A	P		A	P
1.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,25 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 160 \\ 221 \\ 251 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 160 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 160 \\ 150 \\ 230 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 160 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 150 \\ 190 \\ 245 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,01 & 0,11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 310 \\ 210 \\ 190 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 310 \\ 210 \\ 190 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 160 \\ 221 \\ 251 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 260 \\ 382 \\ 310 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 260 \\ 382 \\ 310 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 260 \\ 380 \\ 320 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 275 \\ 380 \\ 326 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 315 \\ 410 \\ 355 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 329 \\ 429 \\ 361 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 320 \\ 410 \\ 350 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 251 \\ 210 \\ 250 \end{pmatrix}$

№ вар.	данные		№ вар.	данные	
	A	У		A	У
19	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 251 \\ 210 \\ 250 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 265 \\ 220 \\ 255 \end{pmatrix}$

2. Модель международной торговли

Структурная матрица торговли n стран имеет вид $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Найти национальные торговые бюджеты стран, удовлетворяющие условию сбалансированной бездефицитной торговли. При решении использовать метод Гаусса для решения систем линейных уравнений. Выполнить проверку.

№ вар.	данные	№ вар.	данные	№ вар.	данные
	A		A		A
1.	$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,3 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$	5.	$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0,9 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$	9.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,25 & 0,75 & 0,3 \\ 0,45 & 0,15 & 0,1 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,35 & 0,33 \\ 0,25 & 0,35 & 0,33 \\ 0,25 & 0,3 & 0,34 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,2 \\ 0,35 & 0,35 & 0,25 \\ 0,15 & 0,4 & 0,55 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,25 & 0,2 & 0,4 \\ 0,15 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$		

3. Моделирование однократных финансовых операций

Нечетные варианты

При рождении внука дедушка положил в банк на t лет под p % годовых некоторую сумму K_0 . Какой будет сумма вклада через T лет, если проценты начисляются m раз в год? Если $m \neq 1$ найти соответствующую годовую эффективную ставку процента. Какой будет сумма вклада через T лет, если проценты начисляются с силой роста $\delta = p$ % ?

Четные варианты

Темп инфляции составляет $p\%$ в месяц. На сколько уменьшится первоначальная сумма K_0 через время T ? Найти абсолютную погрешность вычислений по точной и приближенной формулам и эффективную годовую процентную ставку.

№ вар.	данные				№ вар.	данные		
	$p\%$	K_0 , тыс. руб.	m	T лет		$p\%$	K_0 , тыс. руб.	T лет
1.	7,75	10	1	4	2.	1	11	1
3.	4	100	3	2	4.	2	25	3
5.	5	50	4	1	6.	3	500	0,5
7.	1,5	15	12	3	8.	2,5	800	0,25
9.	2,5	3	6	3	10.	4	30	5
11.	6	7	3	1	12.	6	25	4
13.	5	20	2	1,5	14.	8	35	2
15.	6,5	15	4	2	16.	3	40	2,5
17.	5,75	5	2	0,5	18.	2	20	3
19.	7	300	1	2	20.	0,6	15	3,5
21.	9,5	70	4	2	22.	0,2	50	5
23.	10	30	2	3	24.	0,3	40	4

4. Финансовые ренты

Описать ренту в терминах финансовой математики, указать ее параметры. Определить коэффициенты наращения и приведения ренты. Выполнить задание, указанное в условии задачи.

№ вар.	Условие задачи
1.	В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
2.	В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Проценты начисляются ежемесячно. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
3.	В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
4.	В фонд ежегодно в начале года поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5 % годовых. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
5.	В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Выплаты производятся в конце квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
6.	Предприятие планирует провести замену оборудования через 4 года. Для этого ему потребуется 20 млн руб. Какую сумму требуется вносить

	ежегодно в банк, чтобы накопить указанную сумму при условии, что банк предлагает ставку 9 % годовых с ежеквартальной капитализацией?
№ вар.	Условие задачи
7.	В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Выплаты производятся в конце каждого месяца, проценты начисляются ежемесячно. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
8.	В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5 % годовых. Выплаты производятся в начале каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
9.	В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5 % годовых. Выплаты производятся в начале месяца, проценты начисляются ежемесячно. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
10.	В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Выплаты осуществляются в конце каждого квартала. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
11.	В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Выплаты осуществляются в конце каждого месяца. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
12.	В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Выплаты производятся в начале каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
13.	В фонд ежегодно в начале года поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5 % годовых. Проценты начисляются ежемесячно. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
14.	В фонд ежегодно в начале года поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5 % годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Определить фонда на конец срока и его современную стоимость.
15.	В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5 % годовых. Выплаты осуществляются в начале каждого квартала. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.
16.	Для проведения замены оборудования предприятию необходимо за 5 лет накопить 5 млн руб. Ежеквартально оно может вносить в банк для этой цели 50 тыс. руб. на специальный счет. Под какую ставку сложных процентов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?
17.	Для проведения замены оборудования предприятию необходимо накопить 10 млн руб. Ежегодно оно может вносить в банк для этой цели 100 тыс. руб. на специальный счет. Банк предлагает ставку 9,5 % годовых. Через сколько

	лет на счете окажется требуемая сумма?
18.	Для проведения замены оборудования предприятию необходимо накопить 30 млн руб. Ежемесячно оно может вносить в банк для этой цели 100 тыс. руб. на специальный счет. Банк предлагает ставку 8 % годовых. Через сколько лет на счете окажется требуемая сумма?
№ вар.	Условие задачи
19.	Предприятие планирует провести замену оборудования через 4 года. Для этого ему потребуется 20 млн руб. Какую сумму требуется вносить ежегодно в банк, чтобы накопить указанную сумму при условии, что банк предлагает ставку 8 % годовых с ежемесячной капитализацией?
20.	Для проведения замены оборудования предприятию необходимо за 6 лет накопить 10 млн руб. Ежегодно оно может вносить в банк для этой цели 100 тыс. руб. на специальный счет. Под какую ставку сложных процентов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?

5. Моделирование потребительского спроса

Дана функция полезности от двух благ $u(Q_1, Q_2)$. Цены благ равны соответственно $P_1 = 10$ денежных единиц, $P_2 = 2$ денежные единицы, доход потребителя ограничен величиной $I = 60$ денежных единиц.

1. Найти оптимальное распределение благ Q_1 и Q_2 и соответствующую им полезность (сделать чертеж).
2. Получить общий вид функций потребительского спроса, а также:
 - а) прямые функции спроса на блага Q_1 и Q_2 в зависимости от цен;
 - б) перекрестные функции спроса на блага Q_1 и Q_2 в зависимости от цен;
 - в) функции спроса на блага Q_1, Q_2 в зависимости от дохода потребителя.
3. Провести исследование однофакторных функций спроса, построить схематично их графики. Выяснить:
 - а) к какому типу принадлежат блага Q_1 и Q_2 ;
 - б) какой именно товар они могут представлять (продукт питания, одежду, бытовую технику и т.п)?
4. Найти частичные коэффициенты эластичности общих функций потребительского спроса на блага Q_1, Q_2 по всем действующим факторам.
5. Рассчитать эффекты замены при наличии компенсации для благ Q_1 и Q_2 . Оценить блага Q_1 и Q_2 с точки зрения их взаимозаменяемости или взаимодополняемости.

№ вар.	Функция полезности	№ вар.	Функция полезности
	$u(Q_1, Q_2)$		$u(Q_1, Q_2)$
1.	$u(Q_1, Q_2) = 2 \ln(Q_1 - 3) + 5 \ln(Q_2 - 6)$	2.	$u(Q_1, Q_2) = Q_1 Q_2$
3.	$u(Q_1, Q_2) = 5(Q_1 - 3) + 2(Q_2 - 10)$	4.	$u = \frac{Q_1 Q_2^2}{(Q_1 + 2)^3}$
5.	$u(Q_1, Q_2) = 10 \log_3(Q_1 - 2) + 5 \log_3 Q_2$	6.	$u(Q_1, Q_2) = Q_1^{1/2} Q_2^{2/3}$

7.	$u(Q_1, Q_2) = 4(Q_1 - 6) + (Q_2 - 8)$	8.	$u = \frac{Q_2 Q_1^2}{(Q_2 + 2)^3}$
9.	$u(Q_1, Q_2) = 3 \lg Q_1 + 5 \lg Q_2$	10.	$u(Q_1, Q_2) = Q_1^{1/2} Q_2^{1/4}$
11.	$u(Q_1, Q_2) = (Q_1 - 1)^{1/4} (Q_2 - 3)^{3/4}$	12.	$u(Q_1, Q_2) = Q_1^{1/2} Q_2^{1/2}$
№ вар.	Функция полезности $u(Q_1, Q_2)$	№ вар.	Функция полезности $u(Q_1, Q_2)$
13.	$u(Q_1, Q_2) = 2 \log_2 (Q_1 - 16) + \log_2 (Q_2 - 8)$	14.	$u = \frac{Q_1 Q_2^3}{(Q_1 + 3)^4}$
15.	$u(Q_1, Q_2) = -5(Q_1 - 4)^2 - (Q_2 - 20)^2$	16.	$u = \frac{Q_1^4}{Q_2^3 (Q_1 - 3)}$
17.	$u(Q_1, Q_2) = (Q_1 - 2)^{1/4} (Q_2 - 5)^{1/4}$	18.	$u(Q_1, Q_2) = Q_1 Q_2^2$
19.	$u = \frac{Q_1^3 Q_2^2}{(Q_1 + 2)^5}$	20.	$u = \frac{Q_1^4 Q_2^{-2}}{(Q_1 - 2)^2}$

6. Простейшая модель рыночного равновесия

Пусть опытным путем установлены функции спроса и предложения от цены товара P : $D(P)$, $S = S(P)$. Найти:

- 1) равновесную цену;
- 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене;
- 3) изменение спроса (в процентах) и изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на a %;
- 4) выяснить двумя способами (графически и с использованием эластичности), является ли данная паутинообразная модель «скручивающейся».

№ вар.	данные			№ вар.	данные		
	$D = D(P)$	$S = S(P)$	a %		$D(P)$	$S = S(P)$	a %
1.	$D = 30 - 0,9P$	$S = 16 + 1,2P$	25	2.	$D = 10 - 2P$	$S = 1 + 4P$	4
3.	$D = 9 - P$	$S = 1 + P$	10	4.	$D = 13 - 5P$	$S = 5 + 11P$	3,5
5.	$D(P) = 7 - p$	$S(P) = p + 1$	5	6.	$D = 8 - 2P$	$S = 2 + 6P$	1,5
7.	$D(P) = \frac{p+8}{p+2}$	$S(P) = p + 0,5$	5	8.	$D(P) = \frac{p+10}{p+1}$	$S(P) = p^2$	2,5
9.	$D(P) = \frac{1}{p^2}$	$S(P) = p^2$	3	10.	$D(P) = \frac{1}{p}$	$S(P) = p^2$	11
11.	$D(P) = \frac{1}{p^{0,5}}$	$S(P) = p^{0,4}$	3	12.	$D(P) = \frac{1}{p^2}$	$S(P) = p^3$	7,5
13.	$D = 19 - 2P$	$S = 3 + 2P$	11	14.	$D = 10 - 3P$	$S = 2 + 6P$	4,5
15.	$D = 11 - 3P$	$S = 3 + P$	8	16.	$D(P) = \frac{3}{p}$	$S(P) = 27p$	3

17.	$D = 15 - 3P$	$S = 1 + 4P$	6	18.	$D(P) = \frac{48}{p}$	$S(P) = 3p$	5
19.	$D = 23 - 3P$	$S = 5 + 6P$	1,5	20.	$D(P) = \frac{32}{p}$	$S(P) = 8p$	5,5

7. Предельные показатели в экономике и оптимизация производства

Производитель реализует свою продукцию по цене $P(Q) = p - cQ$ за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $C(Q) = aQ + \lambda Q^3$ ($a < p$, $\lambda > 0$). Найти:

1) оптимальный для производителя объем выпуска продукции Q_0 и соответствующую ему прибыль: а) при отсутствии налогообложения; б) при налоге β на единицу продукции; в случае б) найти максимально возможную ставку налога на прибыль;

2) средние и предельные издержки при уровне выпуска Q_0 ;

3) среднюю и предельную выручку при уровне выпуска Q_0 ;

4) определить, какой тип экономической структуры (монополии или совершенной конкуренции) имеет место в данной задаче.

№ вар.	данные					№ вар.	данные				
	p	c	a	λ	β		p	c	a	λ	β
1.	100	3	30	0,03	5	2.	340	0	200	0,06	50
3.	100	2,75	20	0,04	10	4.	150	0	50	0,007	55
5.	200	5	20	0,04	20	6.	250	0	8	0,04	50
7.	300	15	25	0,06	38	8.	500	0	340	0,05	100
9.	220	15	40	0,06	20	10.	450	0	150	0,03	120
11.	400	20	50	0,005	20	12.	15	0	7,5	0,003	3
13.	400	25	80	0,02	45	14.	22	0	7,5	0,004	8
15.	350	10	100	0,02	45	16.	25	0	10	0,002	8
17.	420	18	160	0,2	60	18.	40	0	11	0,008	16
19.	380	8	160	0,009	56	20.	50	0	15	0,0075	25

8. Оценка равномерности распределения доходов в обществе

Найти индекс Джини, если реальная функция Лоренца имеет вид $y = f(x)$.
Выполнить чертеж.

№ вар.	данные	№ вар.	данные	№ вар.	данные	№ вар.	данные
1.	$y = \sqrt{x^3}$	2.	$y = x^2$	3.	$y = x^3$	4.	$y = \sqrt[3]{x^4}$
5.	$y = \sqrt{x^5}$	6.	$y = \sqrt{x^9}$	7.	$y = \sqrt[4]{x^9}$	8.	$y = \sqrt[3]{x^5}$
9.	$y = x^9$	10.	$y = x^4$	11.	$y = x^{7/5}$	12.	$y = \frac{1}{2}(x^2 + x^3)$
13.	$y = x^7$	14.	$y = x^6$	15.	$y = x^5$	16.	$y = x^{10}$

17.	$y = x^{7/2}$	18.	$y = x^{7/3}$	19.	$y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$	20.	$y = x^{7/4}$
-----	---------------	-----	---------------	-----	--------------------------	-----	---------------

9. Оценка эффективности потока платежей

Первоначальные базовые капиталовложения по инвестиционному проекту составили a млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на b млн руб. Определить:

- 1) NPV за T лет при процентной ставке p % годовых по дискретной и непрерывной формулам;
- 2) максимально возможное значение NPV по непрерывной формуле;
- 3) период окупаемости инвестиций.

№ вар.	данные				№ вар.	данные			
	a , млн руб.	b , млн руб.	t лет	p %		a , млн руб.	b , млн руб.	t лет	p %
1.	11	2	2	7	2.	15	5	5	7
3.	15	1	3	5	4.	14	4	7	4
5.	12	3	5	8	6.	17	2	4	6
7.	10	1	4	9	8.	11	5	3	3
9.	18	4	7	7	10.	16	2	2	3
11.	13	2	3	6	12.	13	1	3	5
13.	14	5	4	2	14.	11	6	4	7
15.	20	4	3	5	16.	12	2	5	3
17.	16	6	6	9	18.	10	4	8	4
19.	11	1	2	4	20.	14	2	7	8

10. Динамическая модель рыночного равновесия

Зависимости спроса и предложения от времени заданы соотношениями $D(t) = d_1 P'' + d_2 P' + d_3 P + d_4$, $S(t) = s_1 P'' + s_2 P' + s_3 P + s_4$, где d_i и s_i ($i = \overline{1, 4}$) – вещественные числа. В начальный момент времени $t = 0$ цена составляла величину P_0 условных денежных единиц, а скорость изменения цены имела значение P_1 условных денежных единиц в единицу времени. Найти равновесную цену P_p и динамику цены $P(t)$ на товар. Выяснить, какое состояние описывает полученное решение: состояние устойчивого равновесия, состояние неустойчивого равновесия, состояние паники на рынке?

№ вар.	данные									
	d_1	d_2	d_3	d_4	s_1	s_2	s_3	s_4	P_0	P_1
1.	2	4	7	13	1	2	7	13	11	4
2.	1	4	-3	10	2	2	-3	10	3	8
3.	2	-2	6	1	1	1	4	1	3	4
4.	-2	-2	6	2	-1	1	4	1	3	3
5.	4	1	2	-3	3	-3	2	-3	5	-2
6.	4	1	8	11	3	3	8	11	5	6
7.	2	3	3	3	1	3	-1	-1	4	2
8.	2	2	1	9	1	2	5	9	8	4

9.	2	3	5	3	1	2	5	5	10	1
10.	2	2	6	5	1	3	6	3	10	5
11.	2	7	1	6	1	7	5	2	7	4
12.	2	2	1	26	1	2	5	2	14	8
13.	2	1	3	4	1	4	2	5	3	6
14.	-2	1	3	4	-1	3	2	5	12	-11
15.	2	4	3	4	1	1	2	5	12	-33
№	данные									
вар.	d_1	d_2	d_3	d_4	s_1	s_2	s_3	s_4	P_0	P_1
16.	4	1	2	1	3	3	3	2	1,5	5
17.	4	3	2	4	3	1	3	2	1,5	1
18.	4	5	2	2	3	1	3	1	3	1
19.	2	4	6	10	1	2	3	10	4	4
20.	3	-1	-2	18	4	1	3	3	4	1

11. Максимизация прибыли предприятия

Производственная функция некоторого предприятия имеет вид $Q = \gamma K^\alpha L^\beta$, цена единицы продукции P денежных единиц, функция издержек линейна, стоимость аренды единицы производственных фондов w_K денежных единиц, ставка заработной платы w_L денежных единиц на человека. Найти:

1. Оптимальное распределение ресурсов и соответствующую ему прибыль от производства одного вида продукции в долгосрочном периоде, если предприятие может неограниченно увеличивать затраты ресурсов.
2. Оптимальное распределение ресурсов и соответствующую ему прибыль от производства одного вида продукции в долгосрочном периоде, если затраты ресурсов ограничены величиной C_0 денежных единиц.
3. Функции спроса на ресурсы, функцию предложения выпуска.
4. Уравнение линии долговременного развития фирмы.
5. Предельную норму замены одного ресурса другим.
6. Рыночную цену единицы продукции.

№	данные						
вар.	w_K	w_L	C_0	P	γ	α	β
1.	2	3	6	8	1	0,5	0,5
2.	2	2	5	7	2	0,4	0,6
3.	3	2	6	7	3	0,5	0,4
4.	4	1	6	10	3	0,3	0,6
5.	1	4	6	9	4	0,7	0,3
6.	2	2	6	8	4	0,5	0,2
7.	3	2	7	12	5	0,2	0,5
8.	1	2	4	9	2	0,3	0,5
9.	3	3	6	5	2	0,6	0,3
10.	2	9	12	10	3	0,6	0,6
11.	4	2	8	5	4	0,5	0,6
12.	2	4	8	6	3	0,6	0,5
13.	3	3	8	6	2	0,6	0,6
14.	4	4	10	5	6	0,4	0,4

15.	2	5	7	5	2	0,7	0,5
16.	5	4	10	6	2	0,5	0,7
17.	1	4	6	6	3	2	4
18.	4	1	6	5	4	1	2
19.	3	1	4	4	4	0,1	1,5
20.	1	3	5	4	3	3	3

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Высшая математика для экономистов [Текст] : учеб. для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н.Ш. Кремера. – 2 изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 1999.
2. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М. : Дело, 2002.
3. Красс, М.С. Математика для экономистов [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005.
4. Математика [Текст] : практикум / сост. Е.Ю. Лискина ; Ряз. гос. пед. ун-т им. С.А. Есенина. – Рязань, 2004. – Ч. 1.

Дополнительная

5. Ведина, О.И. Математика для экономистов [Текст] : учеб. / О.И. Ведина, В.К. Десницкая, Г.Б. Варфоломеева ; под ред. А.А. Гриба. – СПб. : Лань, 2004.
6. Григулецкий, В.Г. Высшая математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.Г. Григулецкий, З.В. Яценко. – Ростов н/Д : Феникс, 2004.
7. Замков, О.О. Математические методы в экономике [Текст] : учеб. / О.О. Замков, А.В. Толстомятенко, Ю.Н. Черемных. – М. : Дело и сервис, 1998.
8. Клименко, Ю.И. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи [Текст] : учеб. для вузов / Ю.И. Клименко. – М. : Экзамен, 2005.
9. Колемаев, В.А. Математическая экономика [Текст] / В.А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
10. Красс, М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели [Текст] : учеб. / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М. : Финансы и статистика, 2007.
11. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей [Текст] : учеб. / М.С. Красс. – М. : Дело, 2002.
12. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. для вузов / Н.Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
13. Кузнецов, Б.Т. Математические методы финансового анализа [Текст] / Б.Т. Кузнецов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006.
14. Кундышева, Е.С. Математическое моделирование в экономике [Текст] / Е.С. Кундышева. – М. : Дашков и К^о, 2004.
15. Пинегина, М.В. Математические методы и модели в экономике [Текст] : учеб. пособие / М.В. Пинегина. – М. : Экзамен, 2002.
16. Практикум по высшей математике для экономистов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
17. Сборник задач и упражнений по высшей математике: математическое программирование [Текст] : учеб. пособие / А.В. Кузнецов [и др.] ; под ред. А.В. Кузнецова, Р.А. Рутковского. – Минск : Высш. шк., 2002.
18. Четыркин, Е.М. Финансовая математика [Текст] : учеб. / Е.М. Четыркин. – М. : Дело, 2005.
19. Шикин, Е.В. Математические методы и модели в управлении [Текст] : учеб. пособие / Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М. : Дело, 2002.
20. Экономико-математические методы и прикладные модели [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.В. Федосеев [и др.] ; под ред. В.В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2002.

Учебное издание

Лискина Екатерина Юрьевна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ

Учебное пособие

Редактор *Н.В. Смурова*
Технический редактор *Е.Ю. Лискина*

Подписано в печать 09.10.09. Поз. № 62. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/8.
Гарнитура Times New Roman. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 12,78. Уч.-изд. л. 7,3. Тираж 250 экз. Заказ №

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46

Редакционно-издательский центр РГУ имени С.А. Есенина
390023, г. Рязань, ул. Урицкого, 22