Залежні та не незалежні події, умовні ймовірності

Означення 1. *Випадкові події A та B називають* ***залежними****, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події.*

Якщо ймовірність появи однієї події не залежить від появи або непояви другої, то такі події називають ***незалежними.***

Означення 2. Ймовірність події *B*, обчислена при умові появи події *A*, називають умовною ймовірністю події *B* і позначають $P(B\backslash A)$ *або* $P_A(B)$.

Приклад 1. В урні 10 куль: 3 білих і 7 чорних. Навмання беруть дві кулі. Нехай подія *A* – взята біла куля; подія *B* – взята чорна куля.

Якщо кулю, яку взяли першою, повертають до урни, то ймовірність появи другої кулі не залежить від того, яка взята перша куля.

Якщо перша куля не повертається до урни, то ймовірність другої події залежить від результату першого випробування.

Якщо першою взяли білу кулю, то в урні залишилося 2 білих кулі та 7 чорних, тому $P_A(B)=\frac{7}{9}$.

Якщо першою взяли чорну кулю, то в урні залишилося 3 білих кулі та 6 чорних куль, тому $P_A(B)=\frac{6}{9}=\frac{1}{3}$.

Отже, ймовірність події B залежить від появи або непояви події A.

Зауваження. *Якщо події A та B незалежні, то умовна ймовірність дорівнює безумовній ймовірності, тобто* $P_A(B)=P(B)$

Множення ймовірностей

Теорема 1. *Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A та B дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій та умовної ймовірності другої події при умові, що перша подія з'явилась. Тобто виконується рівність:*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A) \qquad (1)$$

Доведення: Нехай появі події A сприяють m_1 наслідків, а появі події B – m_2 наслідків. Усіх можливих наслідків n, а події A·B будуть сприяти т наслідків. Тоді згідно класичного означення ймовірностей маємо: $P(A\cdot B)=\frac{m}{n}$, $P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P_A(B)=\frac{m}{m_1}$. Оскільки $\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{m}{m_1}$, то отримаємо $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$. Аналогічно доводимо, що $P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)$. Що й треба було довести.

Співвідношення ***(**1**)*** називають ***формулою множення імовірностей залежних випадкових подій.***

Наслідок. У випадку незалежних випадкових подій A *та* B формула (1) приймає вигляд

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (2)$$

і називається ***формулою множення імовірностей незалежних подій.***

У випадку скінченої кількості незалежних випадкових подій формула (1) приймає,наприклад, такий вигляд: $P\left(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(A_2\right)\cdot\ldots\cdot P_{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}}\left(A_n\right)$

У випадку скінченої кількості незалежних випадкових подій формула (2) приймає вигляд:

$$P\left(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n\right).$$

Приклад 2. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта — браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) *A* — три деталі виявляться стандартними;
2) *B* — дві стандартні й одна бракована.

Розв'язання. Нехай A_i – поява стандартної, $\overline{A_i}$ – бракованої деталі при i-му вийманні. Тоді маємо: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$.

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ є залежними, то:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{9}{15}\,\frac{8}{14}\,\frac{7}{13} = \frac{12}{65};$$

$$P(B) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)\right) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= \frac{9}{15}\,\frac{8}{14}\,\frac{6}{13} + \frac{9}{15}\,\frac{6}{14}\,\frac{8}{13} + \frac{6}{15}\,\frac{9}{14}\,\frac{8}{13} = \frac{216}{455}.$$

Ймовірність появи хоча б однієї випадкової події

Нехай є n сумісних випадкових подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що з'явиться хоча б одна з цих подій. Тоді подія $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}$ полягає в тому, що жодна з подій A_i не з'явиться. Події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу подій, тому $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$ звідси маємо: $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

Отже, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}\right)$ (3)

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ є незалежними випадковими подіями, то формула (3) має вигляд:

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot ... \cdot P\left(\overline{A_n}\right) \qquad (4)$$

Якщо $P\left(A_i\right) = p = const$, то $P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - p = q = const$.

Тоді формула (4) має вигляд

$$P\left(A\right) = 1 - q^n. \qquad (5)$$

Приклад 3. Прилад складається з чотирьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,95. Для другого, третього і четвертого елементів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,9; 0,85; 0,8.

Яка ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу не вийде хоча б один елемент?

Розв'язання. Нехай p_1 = 0,95 — імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого, третього та четвертого елементів ця ймовірність становитиме відповідно p_2 = 0,9; p_3 = 0,85; p_4 = 0,8. Імовірність того, що ці елементи вийдуть із ладу, дорівнюватиме відповідно:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$; $q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

На підставі (4) маємо:

$$P(A) = 1 - q_1\, q_2\, q_3\, q_4 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}00015 = 0{,}99985.$$

Приклад 4. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз?

Розв'язання. Імовірність того, що при одному підкиданні з'явиться цифра 3, дорівнює $p = \frac{1}{6}$.

Тоді $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Згідно з (5) дістанемо:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

Формула повної ймовірності

Теорема 2. *Якщо випадкова подія A може з'явитись лише сумісно з однією із несумісних між собою* подій $H_1, H_2, ..., H_n$, *що утворюють повну групу, то ймовірність події A обчислюється за* *формулою:* $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}(A)$ (6)

Доведення. За умовою теореми поява події А означає появу однієї з подій $AH_1,\ AH_2,\ldots,AH_n$, тобто

$$A=AH_1\cup AH_2\cup\ldots\cup AH_n.$$

Події $H_1,H_2,...,H_n$ несумісні, тому й події $AH_1,\ AH_2,\ldots,AH_n$ також несумісні. Згідно з теоремою додавання імовірностей несумісних подій маємо

$$P(A)=P\left(AH_1\cup AH_2\cup\ldots\cup AH_n\right)=\sum_{i=1}^{n} P\left(AH_i\right) \qquad (7)$$

Події А та H_i залежні, тому для обчислення $P\left(AH_i\right)$ можна використати теорему множення імовірностей залежних подій, тобто $P\left(AH_i\right)=P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}(A)$ (8)

Підставимо (8) у формулу (7) і одержимо рівність (6), яку треба було довести.

Формулу (6) *називають* **формулою повної імовірності.**

Приклад 5. У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти ймовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика стандартна.

Розв'язання. Позначимо такі події: *А* – з першого ящика взято стандартну деталь; H_1 – з другого ящика переклали до першого стандартну деталь; H_2 – з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь.

Згідно з умовою задачі, з першого ящика можна взяти деталь лише після того, як здійсниться подія H_1 або подія H_2.

Події H_1 та H_2 несумісні, а подія *А* може з'явитись лише сумісно з однією із них. Тому для знаходження імовірності події *А* можна використати формулу повної ймовірності (6), яка у даному випадку прийме вигляд

$$P\left(A\right) = P\left(H_1\right)P_{H_1}\left(A\right)+P\left(H_2\right)P_{H_2}\left(A\right) \qquad \mathbf{(9)}$$

Знайдемо потрібні імовірності:

$$P\left(H_1\right)=\frac{9}{10}, \qquad P\left(H_2\right)=\frac{1}{10}, \qquad P_{H_1}\left(A\right)=\frac{16}{21}, \qquad P_{H2}\left(A\right)=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}.$$

Підставимо ці значення у формулу (9) і одержимо

$$P(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{16}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{7}=\frac{53}{270}.$$

Формули Байєса.

В умовах Теореми 2 невідомо, з якою подією із несумісних подій $H_1,H_2,...,H_n$ з'явиться подія ***А*.** Тому кожну з подій $H_1,H_2,...,H_n$ можна вважати гіпотезою. Тоді $P_A(H_i)$ – ймовірність *i-тої* гіпотези.

Якщо випробування проведено і в результаті його подія *А* з'явилась, то умовна ймовірність $P_A(H_i)$ може не дорівнювати $P\left(H_i\right)$. Порівняння ймовірностей $P\left(H_i\right)$ та $P_A(H_i)$ дозволяє переоцінити ймовірність гіпотези при умові, що подія *А* з'явилася.

Для одержання умовної ймовірності використовуємо теорему множення імовірностей залежних подій:

$$P\left(AH_i\right)=P\left(H_i\right)P_{H_i}\left(A\right)=P(A)P_A\left(H_i\right).$$

Звідси отримаємо: $P_A\left(H_i\right)=\dfrac{P\left(H_i\right)P_{H_i}(A)}{P(A)}$ (10)

Підставимо у формулу (10) замість *P(A)* її значення з формули повної ймовірності. Одержимо

$$P_A\left(H_i\right)=\frac{P\left(H_i\right)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P\left(H_i\right)\cdot P_{H_i}(A)},\ i=1,2,...,\ n \qquad (11)$$

Формули (6) називають ***формулами Байеса.*** Вони дозволяють переоцінювати імовірності гіпотез. Це важливо при контролі або ревізіях.

Приклад 6. Деталі, виготовлені цехом заводу, попадають для перевірки їх стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь буде признана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці признана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Розв'язання. Позначимо такі події: А – придатна деталь признана стандартною; H_1 – деталь перевіряв перший контролер; H_2 – деталь перевіряв другий контролер. За умовою прикладу

$$P\left(H_1\right)\ =\ 0,6;\quad P\left(H_2\right)\ =\ 0,4;\qquad P_{H_1}\left(A\right)\ =\ 0,94;\ P_{H_2}\left(A\right)\ =0,98.$$

За формулою Байєса (11) при *i* = 1 одержимо

$$P_A\left(H_1\right)=\frac{P\left(H_1\right)P_{H_1}(A)}{P\left(H_1\right)P_{H_1}\left(A\right)+P\left(H_2\right)P_{H_2}\left(A\right)}=\frac{0,6\cdot 0,94}{0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98}=0,59$$

Відмітимо, що до появи події А ймовірність $P(\ \mathrm{H}_1)\ =\ 0,6$, а після появи події А ймовірність перевірки деталі першим контролером $P_A(H_1)\ =\ 0,59$ поменшала.