ПОВТОРЮВАНІ НЕЗАЛЕЖНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ ЗА СХЕМОЮ БЕРНУЛЛІ

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p і q, то їх називають експериментами за схемою Бернуллі. У кожному експерименті випадкова подія з імовірністю p відбувається, а з імовірністю q — не відбувається, тобто $p + q = 1$.

Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі —2^n елементарних подій.

1. Формула Бернуллі

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з'явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться від m_i до m_j раз, обчислюється так:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \qquad (2)$$

Оскільки

$$P_n(0 \le m \le n) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1, \qquad (3)$$

дістанемо

$$P(0 \le m \le m_i) = 1 - \sum_{m=m_i+1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}; \qquad (4)$$

$$P(m_i \le m \le n) = 1 - \sum_{m=0}^{m_i-1} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (5)$$

Приклад 1. Робітник обслуговує шість верстатів-автоматів. Імовірність того, що протягом години верстат-автомат потребує уваги робітника, є величиною сталою і дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що за годину уваги робітника потребують: 1) три верстати; 2) від двох до п'яти верстатів; 3) принаймні один.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$; $n = 6$; $m = 3$; $2 \le m \le 5$; $1 \le m \le 6$.
Згідно з (1), (1), (4), дістаємо:

1) $P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6!}{3!\,3!}(0{,}6)^3(0{,}4)^3 = 20 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 = 0{,}27648$;

2) $P_6(2 \le m \le 5) = \sum_{m=2}^{5} C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^2 p^2 q^4 + C_6^3 p^3 q^3 + C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q =$

$$= 15\,(0{,}6)^2\,(0{,}4)^4 + 20\,(0{,}6)^3\,(0{,}4)^3 + 15\,(0{,}6)^4\,(0{,}4)^2 + 6\,(0{,}6)^5\,0{,}4 =$$
$$= 15 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}0256 + 20 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 + 15 \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}16 + 6 \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}4 =$$
$$= 0{,}13824 + 0{,}27648 + 0{,}31104 + 0{,}186624 = 0{,}902384;$$

3) $P_6(1 \le m \le 6) = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 p^0 q^6 = 1 - q_6 = 1 - (0{,}4)^6 = = 1 - 0{,}04096 = 0{,}995904$.

2. Найімовірніше число появи випадкової події (мода)

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число m_0, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ перевищує або в усякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

Приклад. Імовірність появи випадкової події A в кожному з $n = 8$ незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p = 0{,}5$ ($q = 1 - p = 0{,}5$). Обчислити ймовірності подій для $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Значення обчислених імовірностей наведено в таблиці:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_8(m) = \frac{C_8^m}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Із таблиці бачимо, що при $m = 4$ імовірність набуває найбільшого значення, а саме $P_8(4) = \frac{70}{256}$. Отже, найімовірніше число появи події є $m_0 = 4$.

Зауважимо, що для визначення найімовірнішого числа появи події немає потреби обчислювати ймовірності для різних можливих значень $m\ (0 \le m \le n)$.

Справді, запишемо формули для обчислення ймовірностей при значеннях $m = m_0$; $m = m_0 - 1$ та $m = m_0 + 1$ і розглянемо їх відношення:

$$\frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0-1)} \ge 1 \to \frac{C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}}{C_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1}} \ge 1 \to \frac{\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0}\ q^{nmo}}{\frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} P^{m_0-1}\ q^{n-m_0+1}} \ge 1 \to$$

$$\frac{\frac{p}{m_0}}{\frac{q}{n-m_0+1}} \ge 1 \to m_0 \le n\ p + p; \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0+1)} \ge 1 \to \frac{C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}}{C_n^{m_0+1}\ p^{m_0+1}\ q^{n-m_0-1}} \ge 1 \to$$

$$\to \frac{\frac{q}{n-m_0}}{\frac{p}{m_0+1}} \ge 1 \to m_0 \ge n\ p - q. \qquad \text{(б)}$$

Об'єднавши нерівності (а) і (б), дістанемо:

$$n\ p - q \le m_0 \le n\ p + p. \qquad (6)$$

Число m_0 називають також *модою*.

Приклад. У разі додержання певної технології 90% усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 200$; $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$.
Використовуючи подвійну нерівність (6), дістаємо:

$$n\ p - q \le m_0 \le n\ p + p \to$$

$$\to 200 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 200 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \to$$

$$\to 179{,}9 \le m_0 \le 180{,}9.$$

Отже, найімовірніше число виробів першого сорту серед 200 дорівнює 180.

Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m пов'язане з певними труднощами. Щоб уникнути їх, застосовують асимптотичні формули, що випливають з локальної та інтегральної теорем Муавра—Лапласа.

3. Локальна теорема

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p\,(0 < p < 1)$, то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A настане m раз, подається такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (7)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається *функцією Гаусса*. Функція Гаусса протабульована, і її значення наведено в дод. 1, де

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (8)$$

Тут x є рівномірно обмеженою величиною відносно n і m.

Доведення. Із (8) випливає, що

$$m = np + x\ \sqrt{npq}; \qquad (9)$$

$$n-m=nq-x\sqrt{npq}\,. \qquad (10)$$

Очевидно, що при $n\to\infty$ вирази (9), (10) прямують до нескінченності. Із (9), (10) маємо:

$$\frac{m}{np}=1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\,; \qquad (11)$$

$$\frac{n-m}{nq}=1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\,. \qquad (12)$$

Із (11), (12) випливає, що за досить великих значень n

$$m\approx np, \qquad n-m\approx nq. \qquad (13)$$

Для доведення теореми скористаємося формулою Стірлінга:

$$K!\;\approx\sqrt{2\pi\,k}\;\;k^k\,\mathrm{e}^{-k}\,. \qquad (14)$$

Використовуючи (14) для формули Бернуллі, дістаємо:

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}\,p^m q^{n-m}=\frac{\sqrt{2\pi n}\;\,n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m e^{-m}\sqrt{2\pi(n-m)}\;\,(n-m)^{n-m}e^{-n+m}}\,p^m q^{m-m}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\;\left(\frac{np}{m}\right)^m\;\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\;\left(\frac{m}{np}\right)^{-m}\left(\frac{n-m}{nq}\right)^{-(n-m)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\left(1+x\sqrt{\frac{2}{np}}\right)^{-m}\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-(n-m)}\;=\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\;\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\,A,$$

де $A=\left(1+x\sqrt{\dfrac{q}{np}}\right)^{-m}\left(1-x\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right)^{-(n-m)}.$ (15)

Коли $n\to\infty$, маємо:

$$\sqrt{\frac{n}{m\;(n-m)}}=\sqrt{\frac{n}{np\cdot nq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\,.$$

Для дослідження поводження A при $n\to\infty$ прологарифмуємо (15)

$$\ln A=-m\;\;\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)-(n-m)\;\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \qquad (16)$$

Розклавши логарифмічні функції у виразі (16) у ряд Тейлора і обмежившись двома членами ряду, скористаємося (9) і (10):

$$\ln A=-\,(np+x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}\,\frac{qx^2}{np}\right)-\left(nq-x\sqrt{npq}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}\,\frac{px^2}{nq}\right)=$$

$$=-x\,\sqrt{npq}+\frac{x^2}{2}\,q-x^2q+\frac{1}{2}\;\,\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}\,x^3+x\sqrt{npq}+\frac{x^2}{2}\,p-x^2\,p-\frac{1}{2}\;\,\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\,x^3=$$

$$=\frac{x^2}{2}(p+q)-x^2(p+q)+\frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}\,x^3-\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\,x^3\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}-\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)x^3.$$

При $n\to\infty$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\ln A=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}}-\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)x^3\right)=-\frac{x^2}{2}\to A=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\;\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,,$$

а для великих, хоча й обмежених значень n

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi\,(x)}{\sqrt{npq}}\,,$$

що й потрібно було довести.

Властивості функції Гаусса:

1) $\varphi(x)$ визначена на всій осі абсцис; $\varphi(x) > 0$;

2) $\varphi(x)$ є функцією парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$;

4) $\varphi'(x) = -x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; $\varphi'(0) = 0$;

$\varphi'(x)\big|_{x<0} > 0$; $\varphi'(x)\big|_{x>0} < 0$; отже, $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ — максимум функції Гаусса;

5) $\varphi''(x) = (x^2-1)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ $\varphi''(x)\big|_{x=\pm1} = 0$.

Таким чином, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ будуть точками перегину. При цьому $\varphi''(x)\big|_{x<-1} > 0$; $\varphi''(x)\big|_{-1<x<1} < 0$; $\varphi''(x)\big|_{x>1} > 0$.

Графік функції Гаусса зображено на рис. 1.

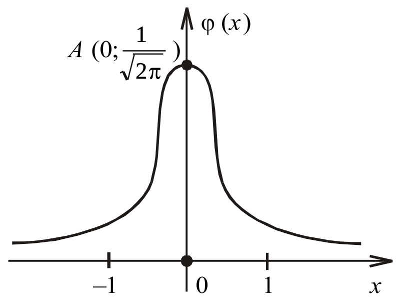

Рис. 1

Зауважимо, що розв'язуючи задачі, додержують такого правила:

$$\varphi(x)\big|_{x\ge4} \approx 0;\ \varphi(x)\big|_{x\le-4} \approx 0.$$

Отже, практично використовуються значення функції Гаусса для $x \in [-4;\ 4]$, що показано на графіку функції Гаусса (рис. 2).

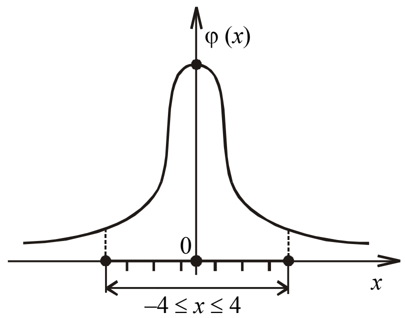

Рис. 2

Приклад. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.;

2) 300 шт.;

3) 320 шт.

Розв'язання. За умовою задачі маємо:

$n = 400$; $p = 0{,}75$; $q = 0{,}25$; $m = 290$; 300; 320.

1) $\sqrt{npq} = \sqrt{400\cdot0{,}75\cdot0{,}25} = \sqrt{75} \approx 8{,}7$; $np = 400\cdot0{,}75 = 300$;

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{290-300}{8{,}7} = -1{,}15;$$

$$P_{400}(290) \approx \frac{\varphi(-1{,}15)}{8{,}7} = \frac{\varphi(1{,}15)}{8{,}7} = \frac{0{,}2059}{8{,}7} \approx 0{,}0237\,;$$

2) $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{300-300}{8{,}7} = 0\,;$

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(0)}{8{,}7} = \frac{0{,}3989}{8{,}7} \approx 0{,}046\,;$$

3) $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{320-300}{8{,}7} = \dfrac{20}{8{,}7} \approx 2{,}3\,;$

$$P_{400}(320) \approx \frac{\varphi(2{,}3)}{8{,}7} \approx \frac{0{,}0283}{8{,}7} \approx 0{,}0033\,.$$

4. Інтегральна теорема

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p(0<p<1)$, то для великих значень n імовірність появи випадкової події від m_i до m_j раз обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m_n \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i)\,, \qquad (17)$$

де $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}}$, $x_i = \dfrac{m_i - mp}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}$ є функцією Лапласа, значення якої наведено в дод. 2.

Доведення. Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія відбудеться від m_i до m_j раз, обчислюється за формулою

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} P_n(m)\,.$$

Згідно з (7) для досить великого числа спроб n маємо наближену рівність:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \sum_{x_m = x_i}^{x_i} \varphi(x_m)\,\Delta x_m\,,$$

де

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,;\ \varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}\,.$$

Отже, можна записати:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x_m = x_i}^{x_j} \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}}\,. \qquad (18)$$

Тут (18) є інтегральною сумою, а тому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m_i \le m \le m_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \sum_{x_m=x_i}^{x_j} \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_i}^{x_j} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_i}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_j} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \Phi\left(x_j\right) - \Phi\left(x_i\right).$$

Для великих, але обмежених значень n дістанемо:
$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i)$, що й потрібно було довести.

Властивості функції Лапласа

1. $\Phi(x)$ визначена на всій осі абсцис.
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отже, $\Phi(x)$ є непарною функцією.
3. $\Phi(0) = 0$.
4. $\Phi(\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0{,}5$, оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ є інтегралом Пуассона.
5. $\Phi(-\Phi(-\infty) = -0{,}5$, як непарна функція.

6. $\Phi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}>0$, отже, Ф ($x$) є функцією неспадною.

7. $\Phi''(0) = 0$; $\quad \Phi''(x)\big|_{x<0}>0;\ \Phi''(x)\big|_{x<0}<0.$

Таким чином, $x = 0$ є точкою перегину.

Графік функції $\Phi(x)$ зображено на рис. 3

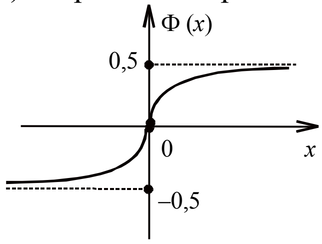

Рис. 3

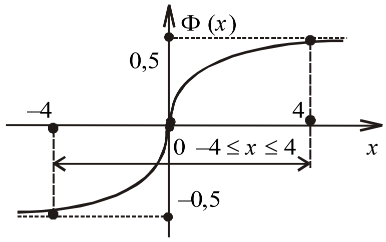

Рис. 4

Розв'язуючи задачі, додержують такого правила:

$\Phi(x)\big|_{x\geq 4}\approx 0{,}5$, $\qquad \Phi(x)\big|_{x\leq -4}\approx 0{,}5$.

Отже, практично функція Лапласа застосовується для значень $x\in[-4;4]$, що ілюструє рис. 4.

Приклад. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Імовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде: 1) від 720 до 780 шт.; 2) від 740 до 790 шт.?

Розв'язання. За умовою задачі:

$n=800$; $p=0{,}95$; $q=0{,}05$; $720\leq m\leq 780$; $740\leq m\leq 780$;

$\sqrt{npq}=\sqrt{800\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05}=\sqrt{38}\approx 6{,}2,\quad np=800\cdot 0{,}95=760$.

1) $x_j=\dfrac{m_j-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{780-760}{6{,}2}=\dfrac{20}{6{,}2}\approx 3{,}23$;

$x_i=\dfrac{m_i-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{720-760}{6{,}2}=-\dfrac{40}{6{,}2}\approx -6{,}5$;

$P_{800}(720\leq m\leq 780)\approx \Phi(3{,}23)-\Phi(-6{,}5)=\Phi(3{,}23)+\Phi(6{,}5)=$

$=0{,}49931+0{,}5=0{,}99931;$

2) $x_j=\dfrac{m_j-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{790-760}{6{,}2}\approx 4{,}84$;

$x_i=\dfrac{m_i-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{740-760}{6{,}2}=-\dfrac{20}{6{,}2}\approx -3{,}23$;

$P_{800}=(740\leq m\leq 790)\approx \Phi(4{,}84)-\Phi(-3{,}23)=\Phi(4{,}84)+\Phi(3{,}23)=$

$=0{,}5+0{,}499\cdot 31=0{,}99931.$

$P_{500}(390\leq m\leq 400)\approx \Phi(11{,}23)-\Phi(-1;1{,}12)=\Phi(11{,}23)+\Phi(1{,}12)=$

$=0{,}5+0{,}3686=0{,}8686.$

5. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність асимптотичних формул для великих значень n — числа повторних незалежних експериментів за схемою Бернуллі — знижується з наближенням p до нуля. Тому при $n\to\infty,\ p\to 0$ за умови $np = \lambda = \text{const}$ імовірність появи випадкової події m раз $(0\leq m\leq n)$ обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m)\approx \frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad (19)$$

яка називається *формулою Пуассона*.

Доведення. Оскільки $a = np$, то $p=\dfrac{a}{n},\quad q=1-p=1-\dfrac{a}{n}$.

Запишемо формулу Бернуллі у такому вигляді:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{A_n^m}{P_m}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=\frac{\lambda^m}{m!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-m+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Коли $n\to\infty$, дістаємо:

$$\lim_{n\infty}P_n(m)=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)=1;\quad\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=1.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

а для великих, але обмежених значень n маємо:

$P_n(m)\approx\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, що й потрібно було довести.

Із (19) випливає:

$$P_n(m_i\le m\le m_j)=\sum_{m=m_i}^{m_j}P_n(m)=\sum_{m=m_s}^{m_j}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda};\quad(20)$$

$$P_n(0\le m\le n)=\sum_{m=0}^{n}P_n(m)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\,e^{\lambda}=1.$$

І справді, це підтверджується ще й тим, що події $0\le m\le n$ утворюють повну групу.

Функція $P_n(m)$ визначається за таблицею, наведеною в дод. 3, за заданим m і обчисленим значенням $a = np$.

Приклад 1. Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю $p = 0{,}002$. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи; 2) від трьох до шести.

Розв'язання. За умовою задачі маємо $n = 1000$; $p = 0{,}002$; $m = 3$; $3\le m\le 6$. Оскільки n велике, а p мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо формули (19) і (20). Для цього обчислимо значення параметра $\lambda = np = 1000\cdot 0{,}002 = 2$.

1) $P_{1000}(3)\approx 0{,}18044$.

2) $P_{1000}(3\le m\le 6)=P_{1000}(3)+P_{1000}(4)+P_{1000}(5)+P_{1000}(6)=$

$=0{,}180447+0{,}168031+0{,}100819+0{,}050409+0{,}021604=0{,}52131.$