ОДНОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Поняття події в теорії ймовірностей являє собою абстрактну модель певної якісної ознаки, що відбиває лише два альтернативні судження: є подія (відбулася) або немає (не відбулася). Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уведення такого нового поняття, як випадкова величина — абстрактної моделі кількісної ознаки.

1. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закони розподілу їх імовірностей

Розглянемо такий простір елементарних подій, в якому кожній елементарній події $\omega_i \in \Omega$ відповідає одне і лише одне число *x* або набір чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, тобто на множині Ω визначена певна функція $\alpha(\omega_i)$, яка кожній елементарній події ω_i ставить у відповідність певний елемент одновимірного простору R_1 або *n*-вимірного простору R_n.

Цю функцію називають *випадковою величиною*. У разі, коли $\alpha(\omega_i)$ відображає множину Ω на одновимірний простір R_1, випадкову величину називають *одновимірною*. Якщо відображення здійснюється на R_n, то випадкову величину називають *n*-вимірною (системою *n* випадкових величин або *n*-вимірним випадковим вектором).

Схематично одновимірну випадкову величину унаочнює рис. 19.

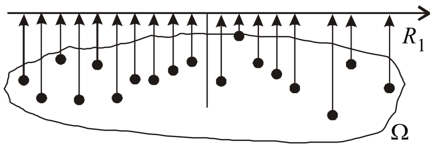

Рис. 19

Отже, величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають *дискретною*. У противному разі її називають *неперервною*.

> **Приклад 1.** Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Навмання беруть одне число. Елементарними подіями будуть такі: поява одного з чисел $\alpha(\omega_i) = 1, 2, 3, \ldots, 10$ з певною ймовірністю. Множина можливих значень $\alpha(\omega_i)$ є дискретною, а тому й випадкова величина — поява одного з чисел множини Ω — буде дискретною.

> **Приклад 2.** Вимірюється сила струму за допомогою амперметра. Результати вимірювання, як правило, округлюють до найближчої поділки на шкалі для вимірювання сили струму. Похибка вимірювання, що виникає внаслідок округлення, являє собою неперервну випадкову величину.

Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту *X, Y, Z, ...* або малими грецькими буквами $\xi, \eta, \theta, \ldots,$ а їх можливі значення — малими *x; y; z, ...* . У подальшому використовуватимемо латинські букви.

Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й указати, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Співвідношення, що встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають *законом розподілу випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини *X*, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм імовірностей:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	……	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	…..	p_k

Оскільки випадкові події ($X = x_j$) і ($X = x_m$) є між собою несумісними (($X = x_i$) ∩ ($X = x_m$) = ∅, $i \neq m$; i, m = 1, 2, …, k) і утворюють повну групу $\left(\bigcup_{j=1}^{k} (X = x_j) = '\Omega \right)$, то необхідною є така умова:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{k} p_i = 1. \qquad (61)$$

Рівність (61) називають *умовою нормування* для дискретної випадкової величини X. Наведену таблицю називають *рядом розподілу*.

Приклад 3. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = x_i$	–4	1	2	5	9
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,1	0,5	p_4	0,2

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$.

Розв'язання. Згідно з умовою нормування (61) маємо:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \to 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + p_4 + 0{,}2 = 1 \to p_4 = 0{,}1.$$

Закон розподілу ймовірностей можна унаочнити графічно.

Для цього візьмемо систему координат $p_i O x_i$, відклавши на осі абсцис можливі значення випадкової величини x_i, а на осі ординат — імовірності p_i цих можливих значень. Точки з координатами (x_i; p_i) послідовно сполучимо відрізками прямої. Утворену при цьому фігуру називають імовірнісним многокутником.

Приклад 4. За заданим у табличній формі законом розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_i$	–2,5	1	3,5	5	6,5	8
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

побудувати ймовірнісний многокутник.

Розв'язання. Імовірнісний многокутник зображено на рис. 20

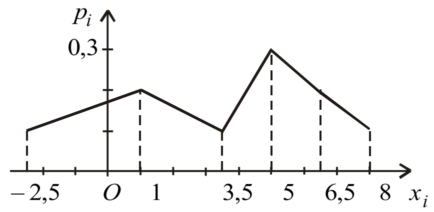

Рис. 20

Сума ординат імовірнісного многокутника завжди дорівнює одиниці.

2. Функція розподілу ймовірностей (інтегральна функція) та її властивості

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме: як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x) \qquad (62)$$

Цю функцію можна тлумачити так: унаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, меншого за x .

Наприклад, $F(5) = P(X < 5)$ означає, що в результаті експерименту випадкова величина X (дискретна чи неперервна) може набути значення, яке міститься ліворуч від $x = 5$, що ілюструє рис. 21.

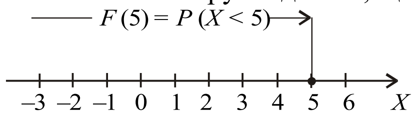

Рис. 21

Розглянемо властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Доведення. Позначимо відповідно A, B, C події ($X < x_2$), ($X < x_1$) і $(x_1 \le X \le x_2)$. Випадкові події B і C є несумісними ($A \cap C = \varnothing$) (рис. 22).

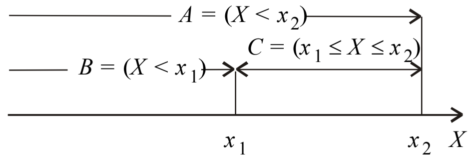

Рис. 22

Тоді подію A можна записати так: $A = B \cup C$ ($A = B + C$).

За формулою додавання для несумісних випадкових подій маємо:

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) \text{ або } P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X \le x_2). \qquad (63)$$

Звідси на підставі означення інтегральної функції $F(x)$, дістаємо

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X \le x_2)$$

або $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X \le x_2) \ge 0.$ (64)

Отже, $F(x_2) - F(x_1) \ge 0 \to F(x_2) \ge F(x_1).$

Із другої властивості $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (65)$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

І справді, поклавши в (65) $\alpha = x_i$, $\beta = x_i + \Delta x$, дістанемо $P(x_1 < X < x_i + \Delta x) = F(x_i + \Delta x) - F(x_i)$.

Коли $\Delta x \to 0$, маємо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} P(x_i < X < x_i + \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(F(x_i + \Delta x) - F(x_i)\right)$. (66)

Оскільки при $\Delta x \to 0$ $X = x_i$, то $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i) = 0$, що й потрібно було довести.

Отже, для неперервної випадкової величини X справджуються такі рівності:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta). \qquad (67)$$

3. Якщо $X \in]-\infty; \infty[$, виконуються два подані далі співвідношення.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

Оскільки подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від $-\infty$. А така подія є неможливою ($\varnothing$).

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

Подія $X < \infty$ полягає в тому, що випадкова величина X набуває числового значення, яке міститься ліворуч від $+\infty$. Ця подія є вірогідною (Ω), оскільки будь-яке число $X = x < \infty$.

Із цих двох співвідношень випливає висновок: якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку $[a; b]$, то

$$F(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \le a;$$

$$F(x) = 1 \quad \text{для} \quad x > b. \qquad (68)$$

Приклад 5. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;

2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0{,}1$;

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4$;

5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$;

6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) + P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.

Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 23.

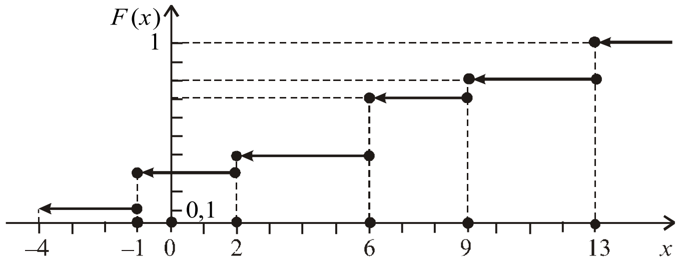

Рис. 24

Приклад 6. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \dfrac{(x+3)^2}{49}, & -3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Побудувати графік функції $F(x)$ і обчислити $P(-1 < X < 2)$.

Розв'язання. $F(x)$ графічно зображено на рис. 25.

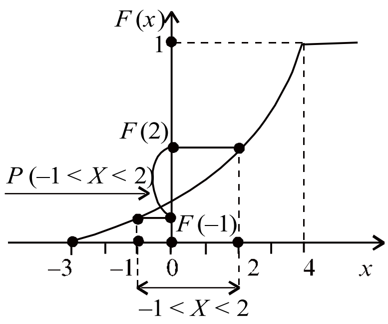

Рис. 25

Використовуючи (65), обчислимо :

$$P(-1 < X < 2) = F(2) - F(-1) = \left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=2} - \left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=-1} = \frac{25}{49} - \frac{4}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

3. Щільність імовірностей (диференціальна функція) *f*(*x*) і її властивості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \qquad (69)$$

звідки $dF(x) = f(x)dx$.

Оскільки $P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) \approx dF(x) = f(x)dx,$ то добуток $f(x)dx$ — ймовірність того, що випадкова величина X міститиметься у проміжку $[x, x+dx]$, де $dx = \Delta x$.

Геометрично на графіку щільності ймовірності $f(x)dx$ відповідає площа прямокутника з основою dx і висотою $f(x)$ (рис. 27а).

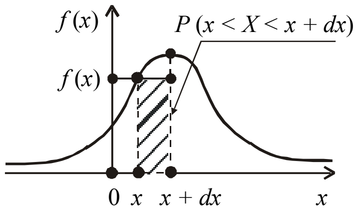

Рис. 27а

Властивості *f*(*x*)

1. $f(x) \ge 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1. \qquad (70)$$

Доведення.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(x)\,|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку $[a; b]$, то умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{a}^{в} f(x)dx = 1. \qquad (71)$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (72)$$

Доведення. За властивістю функції розподілу ймовірностей (67)

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Залежність (72) можна подати так: $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dF(x) = F(x)\,|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha).$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (73)$$

Доведення. $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} dF(x) = F(x)|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x)$.

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу [a; b], то

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx. \qquad (74)$$

Приклад 7. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0 < X < 2)$, скориставшись (65) і (72).

Розв'язання.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{3}{64}(x+1)^2, & -1 < x \le 3; \\ 0, & x < 3. \end{cases}$$

Графіки функцій $F(x)$, $f(x)$ зображено відповідно на рис. 27б і 28.

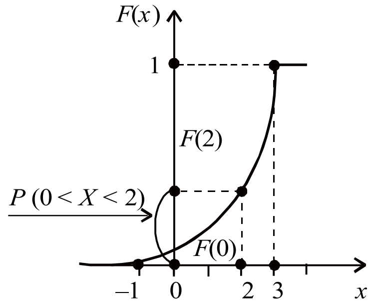

Рис. 27б

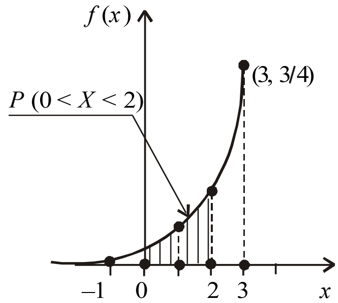

Рис. 28

Імовірність події $0 < X < 2$ обчислимо за (65):

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32};$$

далі згідно із (72) маємо

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{64}(x+1)^2 dx = \frac{3}{64}\int_0^2 (x+1)^2 dx = \frac{3}{64}\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}.$$

Приклад 8. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Згідно із (74) маємо:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{2}\sin dx = \frac{1}{2}\int_0^x \sin dx = \frac{1}{2}(-\cos x|_0^x) = \frac{1}{2}(-\cos x + 1) = \frac{1-\cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 29 і 30.

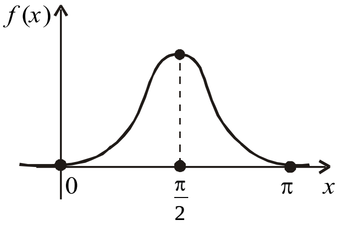

Рис. 29

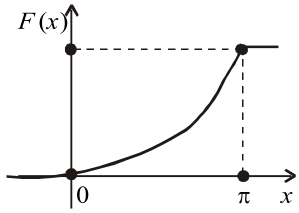

Рис. 30

Імовірність події $\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{2}$ можна обчислити згідно з (65) або (72). Застосуємо формулу (72):

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$