ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Закон розподілу ймовірностей як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри і називають *числовими характеристиками випадкових величин*.

1. Математичне сподівання

Однією з найчастіше застосовуваних на практиці характеристик є *математичне сподівання*.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі Ω, називається величина

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i \,. \qquad (75)$$

Якщо Ω — обмежена множина, то

$$M(X)=\sum_{s=1}^{n}x_i p_i \,. \qquad (76)$$

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X)=\int_{\Omega}x\, f(x)dx\,. \qquad (77)$$

Якщо $\Omega = (-\infty;\infty)$, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\, f(x)dx\,. \qquad (78)$$

Якщо $\Omega = [a; b]$, то

$$M(X)=\int_{a}^{в}x\, f(x)dx. \qquad (79)$$

2. Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C. \qquad (80)$$

Справді, сталу C можна розглядати як випадкову величину, що з імовірністю, яка дорівнює одиниці, набуває значення C, а тому $M(C) = C\cdot 1 = C.$

2. $$M(CX) = CM(X). \qquad (81)$$

Для дискретної випадкової величини згідно із (75) маємо

$$M(CX)=\sum_{i=1}^{k}Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{k}x_i p_i = CM(X)\,.$$

Для неперервної:

$$M(CX)=\int_{-\infty}^{\infty}Cxf(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx = CM(X).$$

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$M(AX+B)=AM(X)+B\,. \qquad (82)$$

Для дискретної випадкової величини:

$$M(AX+B)=\sum_{i=1}^{n}(Ax_i+B)p_i = A\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + B\sum_{i=1}^{n}p_i = AM(X)+B\,.$$

Для неперервної випадкової величини:

$$M(AX+B)=\int_{-\infty}^{\infty}(Ax+B)f(x)dx = A\int_{-\infty}^{\infty}x\, f(x)dx + B\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = AM(X)+B.$$

Якщо випадкова величина $X \in [a; b]$, то $M(X) \in [a; b]$, а саме: математичне сподівання випадкової величини має обов'язково міститься всередині інтервалу $[a; b]$, являючи собою центр розподілу цієї величини.

3. Мода та медіана випадкової величини

Модою (Мо) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

$$f(\text{Mo}) = \max.$$

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл імовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Ме) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій:

$$P(-\infty < X < \text{Me}) = P(\text{Me} < X < \infty) \to F(\text{Me}) - F(-\infty) = F(\infty) - F(\text{Me}) \to$$
$$\to F(\text{Me}) = 1 - F(\text{Me}) \to 2F(\text{Me}) = 1 \to$$
$$\to F(\text{Me}) = 0{,}5. \qquad (83)$$

Отже, медіану визначають із рівняння (83).

Ме можна знайти, скориставшись щільністю ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\text{Me}} f(x)dx = \int_{\text{Me}}^{\infty} f(x)dx, \qquad (84)$$

або при $X \in [a; b]$:

$$\int_{a}^{\text{Me}} f(x)dx = \int_{\text{Me}}^{e} f(x)dx\,. \qquad (85)$$

Отже, Ме — можливе значення випадкової величини X, причому таке, що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині $X = \text{Me}$, поділяє площу фігури, яка обмежена функцією $f(x)$, на дві рівні частини.

4. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Приклад. Закони розподілу випадкових величин X і Y задані таблицями:

x_i	– 0,5	– 0,1	0,1	0,5
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4

y_j	– 100	– 80	– 10	10	10	80
p_j	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$ і $M(Y)$.

Розв'язання.

$$M(X) = \sum_{s=1}^{4} x_i p_i = -0{,}5 \cdot 0{,}4 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 =$$
$$= -0{,}2 - 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}2 = 0;$$
$$M(Y) = \sum_{j=1}^{6} y_j p_j = -100 \cdot 0{,}1 - 80 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}2 + 80 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}1 =$$
$$= -10 - 16 - 2 + 2 + 16 + 10 = 0.$$

Отже, два закони розподілу мають однакові математичні сподівання, хоча можливі значення для випадкових величин X і Y істотно різні. Із наведеного прикладу бачимо, що в разі рівності математичних сподівань ($M(X)$ - $M(Y) = 0$) випадкові величини X і Y мають тенденцію до коливань відносно $M(X)$ та $M(Y)$, причому Y має більший розмах розсіювання відносно $M(Y)$, ніж випадкова величина X відносно $M(X)$. Тому математичне сподівання називають *центром розсіювання*. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають *дисперсією*.

Для визначення дисперсії розглядається відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання $(X - M(X))$

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини X завжди дорівнює нулю. Справді,

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0\,.$$

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \qquad (86)$$

Для дискретної випадкової величини X дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i; \qquad (87)$$

для неперервної

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx. \qquad (88)$$

Якщо $X \in [a; b]$,

то
$$D(X) = \int_{a}^{ъ} (x - M(X))^2 f(x) dx. \qquad (89)$$

5. Властивості дисперсії

1. Якщо C — стала величина, то

$$D(C) = 0. \qquad (90)$$

Справді

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$. (91)

Маємо:

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = M(C(X - M(X))^2 =$$
$$= C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X)$$

3. Якщо A і B — сталі величини, то

$$D(AX + B) = A^2 D(X). \qquad (92)$$

Адже

$$D(AX + B) = M(AX + B - M(AX + B))^2 = M(AX + B - AM(X) - B)^2 =$$
$$= M(AX - AM(X))^2 = A^2 M(X - M(X))^2 = A^2 D(X).$$

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \qquad (93)$$

Доведення. Згідно з (86) дістаємо:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M(M^2(X)) =$$
$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для дискретної випадкової величини X

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X); \qquad (94)$$

для неперервної

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X). \qquad (95)$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x) dx - M^2(X). \qquad (96)$$

Слід пам’ятати, що дисперсія не може бути від’ємною величиною $(D(X \geq 0))$.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання. Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \qquad (97)$$

6. Початкові та центральні моменти

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k) \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (98)$$

Коли $k=1$, $\nu_1 = M(X)$; коли $k = 2$, $\nu_2 = M(X^2)$ і т. д.

Для дискретної випадкової величини X

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i\,; \qquad (99)$$

для неперервної

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx\,. \qquad (100)$$

Якщо $X \in [a;\, b]$, то

$$\nu_k = \int_{0}^{d} x^k f(x)dx\,. \qquad (101)$$

Центральним моментом k-го порядку називається математичне сподівання від $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (102)$$

Коли $k=1$, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$;

коли $k = 2$, $\mu_2 = M(X - M(X)^2 = D(X)$;

коли $k = 3$, $\mu_3 = M(X - M(X))^3$;

коли $k = 4$, $\mu_4 = M(X - M(X))^4$.

Для дискретної випадкової величини

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i; \qquad (103)$$

для неперервної

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)dx. \qquad (104)$$

Якщо $X \in [a;\, b]$, то

$$\mu_k = \int_{a}^{b} (x - M(X))^k f(x)dx\,. \qquad (105)$$

7. Асиметрія і ексцес

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\mu_3 = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно $M(X)$. Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину — коефіцієнт асиметрії:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\,. \qquad (106)$$

Центральний момент четвертого порядку використовується для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність, або гостровершинність щільності ймовірності $f(x)$. Ексцес обчислюється за формулою

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (107)$$

Зауважимо, що число 3 віднімається ось чому. Для центрального закону розподілу, так званого нормального закону, виконується рівність:

$\frac{\mu_4}{\sigma_4} = 3.$ Отже, $Es = 0$.

Для наочності при різних значеннях As, Es графіки $f(x)$ зображені на рис. 57 і 58.

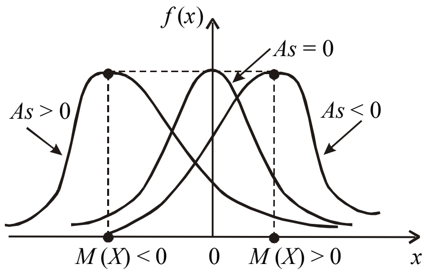

Рис. 57

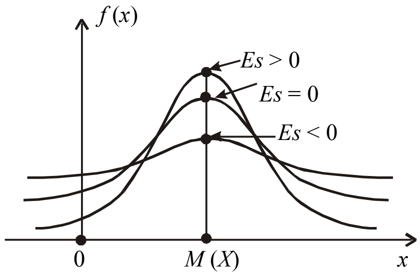

Рис. 58