ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Усі процеси, що відбуваються у природі чи людському суспільстві, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Для того щоб вивчити ці процеси і надалі керувати ними, необхідно з'ясувати, яку роль у досліджуваному процесі відіграє кожний фактор окремо. Наприклад, у разі вивчення руху тіла слід з'ясувати, які сили спричинюють його рух, а які гальмують; яким чином саме рухоме тіло впливає на ті сили, що діють на нього. Досліджуючи процес зміни курсу деякої валюти, скажімо гривні, потрібно з'ясувати вплив багатьох економічних і соціальних факторів як внутрішніх, так і зовнішніх, що можуть істотно змінювати курс національної валюти щодо долара, німецької марки і т. ін.

Усі зазначені фактори необхідно подати з допомогою певних кількісних оцінок, а далі — скористатися відповідними математичними методами. Отже, щоб мати змогу застосувати математичні методи з метою вивчення взаємодії тих чи інших факторів, слід уміти виражати дію кожного з них кількісно.

Щоб дістати потрібні числові дані, необхідно провести серію спостережень. Отже, спостереження є найважливішою ланкою будь-якого експерименту. Слід, проте, ураховувати, що жодний найретельніше підготовлений експеримент не дозволяє виокремити саме той фактор, який для нас головний. Адже в здійснюваному експерименті ми не в змозі вилучити численні зайві фактори, які нас не цікавлять. Так, вивчаючи падіння тіла, ми не уникнемо дії на нього сил, зумовлених обертанням Земної кулі. Коли ж ідеться про хімічні реакції, нам ніколи не доведеться стикатися з чистими елементами. А досліджуючи вплив на врожайність тієї чи іншої культури внесеного в ґрунт добрива, ми не можемо знехтувати впливом інших факторів (опади, середня весняна температура, економічний стан регіону і т. ін.), які безпосередньо впливають на остаточний наслідок експерименту — урожайність.

Отже, кожне спостереження дає нам лише наслідок взаємодії основного фактора, який нас цікавить, з багатьма сторонніми, другорядними. Деякі з них потрібно й можна враховувати в дослідженнях. Урахування ж решти факторів або в принципі неможливе, або недоцільне з якихось міркувань. Тому за реальних умов під час дослідження будь-якого процесу застосовують метод його формалізації, беручи до уваги лише ті фактори, які істотно впливають на зазначений процес.

Водночас усі ті фактори, якими експериментатор нехтує, загалом відбиваються на наслідках експерименту, надаючи їм неоднозначності.

Так настають непередбачені наперед події, котрі називають *випадковими*. Випадкові події в масі спостережень підпорядковані, як з'ясували дослідники, певним характерним лише для них невипадковим законам.

Математична наука, що вивчає закономірності масових подій, називається *теорією ймовірностей*.

Науку, що використовує теорію ймовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експерименту, називають *математичною статистикою*.

Зауважимо, що нині існує тенденція до появи нових економічних дисциплін, таких як «Економетрія», «Теорія ризику», «Теорія надійності», «Інформатика» і т. ін., котрі тісно пов'язані з теорією ймовірностей. Своїм виникненням ці дисципліни завдячують саме теорії ймовірностей. Отже, теорію ймовірностей можна розглядати як об'єднання певної кількості різнорідних і доволі розвинених дисциплін, кожна з яких зокрема і всі вони разом мають стати науковим багажем кожного економічно освіченого спеціаліста.

Послідовність операцій, виконуваних з додержанням певного комплексу умов, називають *експериментом* (дослідом, спробою). Наслідок будь-якого експерименту називають *подією*.

Експеримент не обов'язково має виконувати людина. Він може здійснюватися незалежно від неї, скажімо комп'ютером. Людина в такому разі є спостерігачем, котрий фіксує наслідок експерименту — подію.

Класифікація подій. Події поділяються на *вірогідні*, *неможливі* та *випадкові*.

Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається *вірогідною*. Вірогідна подія позначається символом Ω («омега»).

Наведемо приклади вірогідних подій.

Приклад 1

1. У земних умовах вода, нагріта до температури 100 °С, набуває стану кипіння.
2. Якщо в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10, то кулька, навмання взята із цієї урни, має номер, що міститься в межах від 1 до 10.

Подія називається неможливою, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ (порожня множина).

Приклад 2

1. В урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10. Навмання береться одна кулька. Поява кульки з номером 12 буде подією неможливою.
2. Якщо на дослідній ділянці посіяти 100 зернин ячменю, то подія, котра полягає в тому, що на момент збирання врожаю на цій ділянці з'явиться колосок пшениці, є неможливою.

Подія називається *випадковою*, якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі.

Випадкові події позначають символами A, B, C, … або $A_1, A_2, A_3,…, A_k$; $B_1, B_2, …, B_n$.

Отже, випадкові події пов'язані експериментами, наслідки яких є неоднозначними.

1. Прості та складені випадкові події.Простір елементарних подій

Теорія ймовірностей як один із розділів математики досліджує певний вид математичних моделей — моделі випадкових подій, а не самі такі події.

Математичні моделі, як відомо, відбивають найістотніші властивості досліджуваних об'єктів, абстрагуючись від неістотних.

Для математичного опису випадкових подій — наслідків експерименту — застосовують такі точні поняття: *прості (елементарні)* та *складені випадкові події*, *простір елементарних подій*.

Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), називається *простою (елементарною) випадковою подією*.

Елементарні події позначаються ω_i (i = 1, 2, 3,…) і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії, не поділяються на простіші складові.

Приклад 1. Монету підкидають один раз. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Можливі такі елементарні випадкові події:

ω_1 = г (монета випаде гербом);

ω_2 = ц (монета випаде цифрою).

Приклад 2. Монету підкидають тричі. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Триразове підкидання монети — це одна спроба. Елементарними випадковими подіями будуть:

ω_1 = ггг (тричі випаде герб);

ω_2 = ццц (тричі випаде цифра);

$$\left.\begin{array}{l}\omega_3 = \text{ггц}\\ \omega_4 = \text{гцг}\\ \omega_5 = \text{цгг}\end{array}\right\}\text{(герб випаде двічі);}$$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_6 = \text{гцц}\\ \omega_7 = \text{цгц}\\ \omega_8 = \text{ццг}\end{array}\right\}\text{(герб випаде один раз).}$$

Отже, цьому експерименту відповідають вісім елементарних подій.

Приклад 3. Задано множину чисел Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Навмання із цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події: 1) з'явиться число, кратне 2; 2) число кратне 3; 3) число, кратне 5. Ці випадкові події будуть складеними. Позначимо їх відповідно A, B, C. Тоді A = = {2, 4, 6, 8, 10, 12}; B = {3, 6, 9, 12}; C = {5, 10,}.

Елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, $\omega_j \in B$, $\omega_k \in C$, які належать відповідно складеним випадковим подіям A, B, C, тобто є елементами цих множин, називають *елементарними подіями, які сприяють появі* кожної із зазначених подій унаслідок проведення експерименту (ω_i сприяють появі події A, ω_j — події B, ω_k — події C).

Кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може відбутися (настати) внаслідок його проведення: $\omega_i \in \Omega$. Множину називають *простором елементарних подій*.

Простір елементарних подій може бути як дискретним, так і неперервним. Якщо множина є зчисленною (зліченною), тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати (кожній елементарній події поставити у відповідність один і тільки один елемент нескінченної послідовності натуральних чисел 1, 2, 3, …), то простір елементарних подій називають *дискретним*. Він може бути обмеженим і необмеженим.

У противному разі (тобто коли кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число) простір елементарних подій називають *неперервним*.

У розглянутих раніше прикладах простори елементарних подій були дискретними.

Приклади неперервних (недискретних) просторів елементарних подій дістанемо, розглянувши:

1) розміри однотипних деталей (діаметр, довжина), що їх виготовляє робітник або верстат-автомат;

2) покази приладів, що вимірюють масу, силу струму, напругу, опір і т. ін.

Отже, поняття елементарної події, простору елементарних подій є основними в теорії ймовірностей, як точка та пряма в аксіоматично побудованій евклідовій геометрії. Сама природа елементарних подій у теорії ймовірностей при цьому неістотна.

Простір елементарних подій є математичною моделлю певного ідеалізованого експерименту в тому розумінні, що будь-який можливий його наслідок описується однією і лише однією елементарною подією — наслідком експерименту.

Мовою теорії множин випадкова подія А означується як довільна непорожня підмножина множини Ω ($A \subset \Omega$).

2. Операції над подіями

Додавання. *Сумою двох подій A і B* називається така подія $C = A \bigcup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B. Подію $A \bigcup B$ схематично зображено на рис. 1 заштрихованою областю.

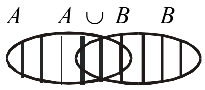

Рис. 1

Операція $A \bigcup B$ називається *об’єднанням* цих подій.

Множення. *Добутком двох подій A і B* називається така подія $C = A \bigcap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Операція $A \bigcap B$ називається *перерізом* цих подій (рис. 2).

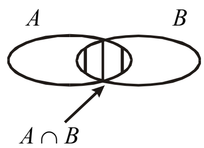

Рис. 2

Віднімання. *Різницею двох подій A і B* називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події А і одночасним ненастанням події В (рис. 3).

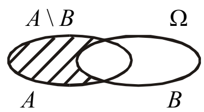

Рис. 3

Приклад. Задано множину цілих чисел Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}. Навмання з неї беруть одне число.

Побудувати випадкові події: 1) A — узяте число кратне 2; 2) B — кратне 3.

Визначити $A \bigcup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Розв’язання. 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо:

$A \bigcup B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} $\bigcup$ {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15};

$A \cap B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} $\cap$ {3, 6, 9, 12, 15} = {6, 12};

$A \setminus B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} \ {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 4, 8, 10, 14}.

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними*.

Якщо $A \cap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають *несумісними*.

Повна група подій. Протилежні події. Якщо $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots \ldots \bigcup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то такі випадкові події утворюють *повну групу*, а саме: внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

Приклад. При одноразовому підкиданні грального кубика обов'язково з'явиться одна із цифр, що є на його гранях, а саме: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$, $A_5 = 5$, $A_6 = 6$. Отже, випадкові події A_i ($i = \overline{1,6}$) утворюють повну групу: $\bigcup\limits_{i=1}^{6} A_i = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають *протилежними*.

Подія, яка протилежна A, позначається $\overline{A}$. Протилежні події у просторі елементарних подій ілюструє рис. 4. Він унаочнює також співвідношення: $A \bigcup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

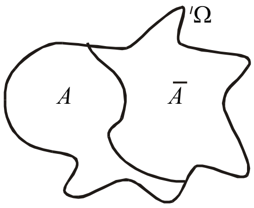

Рис. 4

Випадкові події A, B, C ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підлягають таким законам:

1. $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$.
2. $A \bigcup B = B \bigcup A$.
3. $A \bigcap B = B \bigcap A$.

Комутативний закон для операцій додавання та множення.

4. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$.
5. $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$.

Асоціативний закон для операцій додавання та множення.

6. $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$. Перший дистрибутивний закон.
7. $(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$. Другий дистрибутивний закон.
8. $A \bigcup \Omega = \Omega$.
9. $A \bigcap \Omega = A$.
10. $A \bigcup \varnothing = A$.
11. $A \bigcap \varnothing = \varnothing$.
12. $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
13. $\overline{\Omega} = \varnothing$.
14. $\overline{\varnothing} = \Omega$.
15. $A \bigcup (A \bigcap \overline{B}) = A$; $B = B \bigcup (B \bigcap \overline{A})$.
16. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.
17. $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для дискретного простору Ω перші два твердження можна записати так: 1) $\omega_i \bigcap \omega_j = \varnothing$, $i \neq j$; 2) $\bigcup\limits_{i=1} \omega_i = \Omega$.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події, що є числом такої ж природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

3. Класичне означення ймовірності

Імовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \leq m \leq \leq n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0$ ($m = 0$);

Для вірогідної події $P(\Omega) = 1$ ($m = n$).

Отже, для довільної випадкової події

$$0 < P(A) < 1. \qquad (2)$$

Приклад 1. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту:

$$n = 15.$$

Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти ($m = 9$). Згідно з (1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

4. Аксіоми теорії ймовірностей та їх наслідки

Загалом функції дійсних змінних бувають визначеними не на всій множині дійсних чисел, а лише на певній її підмножині, яку називають областю визначення функції.

Імовірність також не завжди можна визначити для будь-яких підмножин множини Ω (простору елементарних подій). Тому доводиться обмежуватися певним класом підмножин, до якого висуваються вимоги замкненості відносно операцій додавання, множення та віднімання.

Нехай задано довільний простір елементарних подій — множину Ω і Θ — деяка система випадкових подій.

Система подій називається *алгеброю подій*, якщо:

1. $\Omega \in \Theta$.

2. Із того, що $A \in \Theta$, $B \in \Theta$, випливає: що $A \bigcap B \in \Theta$, $A \bigcup B \in \Theta$, $A \setminus B \in \Theta$.

Із тверджень 1 і 2 дістаємо, що $\varnothing = \Omega \setminus \Omega$, а отже, $\varnothing \subset \Theta$. Найменшою системою, яка буде алгеброю подій, є $\Theta = (\varnothing, \Omega)$. Якщо Ω — обмежена множина, то система Θ також буде обмеженою. Якщо множина містить n елементів, то кількість усіх підмножин буде 2^n.

Якщо Ω є неперервною множиною, то система Θ утворюється квадровними підмножинами множини Ω, які також утворюють алгебру подій.

Числова функція P, що визначена на системі подій Θ, називається ймовірностю, якщо:

1. Θ є алгеброю подій.

2. Для будь-якого $A \subset \Theta$ існує $P(A) \geq 0$.

3. $P(\Omega) = 1$.

4. Якщо A і B є несумісними ($A \bigcap B = \varnothing$), то

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B). \qquad (6)$$

Для розв'язування задач з нескінченними послідовностями подій, наведені аксіоми необхідно доповнити аксіомою неперервності.

5. Для будь-якої спадної послідовності $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ подій із Θ, такої, що $\bigcap\limits_{n=1} A_i = \varnothing$, випливає рівність

$$\lim P\left(\bigcap_{n=1} A_n\right) = 0 .$$

Трійка (Θ, Ω, P), де Θ є алгеброю подій і P задовольняє аксіоми 1—5, називається простором імовірностей.

Приклад. Задано множину цілих чисел Ω = {1, 2, …, 30}. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що воно виявиться кратним 5 або 7?

Розв'язання. Простір Ω містить n = 30 елементарних подій.
Позначимо через A подію, що полягає в появі числа, кратного 5, а через B у появі числа, кратного 7. Тоді дістанемо:

$$A = (5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30),\ \ m_1 = 6\ ;$$

$$B = (7,\ 14,\ 21,\ 28),\ \ m_2 = 4\ ;$$

$$A \cap B = \varnothing.$$

Згідно з (6) маємо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{6}{30} + \frac{4}{10} = \frac{1}{3}\ .$$

Наслідки аксіом

1. Якщо випадкові події A_1, A_2, A_3, … A_n є несумісними попарно, то

$$P\left(\bigcup_{i-1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (7)$$

2. Якщо випадкові події A_1, A_2, A_3, … A_n утворюють повну групу, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1\ . \qquad (8)$$

Із рівності $A \cup \overline{A}$ = Ω і аксіом 3, 4 випливає, що

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) \rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (9)$$

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (10)$$

Справді:

$$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A}),\ \text{то}\ \ P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap \overline{A})) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$$
$$(A \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing). \qquad (11)$$

Оскільки
$B = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ і при цьому $(B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \varnothing$, то

$$P(B) = P(A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) \rightarrow$$
$$\rightarrow P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B).$$

Отже,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

3. Формула додавання для n сумісних випадкових подій має такий вигляд:

$$P\left(\bigcup_{i-1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i-1}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i-1}^{n-1} \sum_{k=j-1}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \ldots = (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \qquad (12)$$

Наприклад, для трьох сумісних випадкових подій формулу (12) можна записати так:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C). \qquad (13)$$

4. Якщо випадкова подія A сприяє появі $B\left(A \subset B\right)$, то

$$P\left(A\right) \le P\left(B\right). \qquad (14)$$

Приклад 1. В урні містяться 30 однакових кульок, які пронумеровані від 1 до 30. Навмання із урни беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться кратним 3 або 5?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій множини Ω $n = 30$.

Позначимо через $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ ($m_1 = 10$) — появу кульки з номером, кратним 3, а через $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ ($m_2 = 6$) — появу кульки із номером, кратним 5.

$A \cap B = (15, 30)$ $(m_3 = 2)$ є подіями сумісними.

Згідно з (10) дістанемо

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) =$$
$$= \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \cdot$$

5. Геометрична ймовірність

Класичне означення ймовірності придатне лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних елементарних подій, тобто коли множина Ω (простір елементарних подій) обмежена.

Якщо множина Ω є неперервною і квадровною, то для обчислення ймовірності A ($A \subset \Omega$) використовується геометрична ймовірність

$$P\left(A\right) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \qquad (15)$$

Якщо множина Ω вимірюється в лінійних одиницях, то P (A) дорівнюватиме відношенню довжини, якщо Ω вимірюється у квадратних одиницях, то P (A) дорівнюватиме відношенню площ, і т. ін.

Приклад 1. По трубопроводу довжиною 2 км між пунктами A і B перекачують нафту. Яка ймовірність того, що пошкодження через певний час роботи трубопроводу станеться на ділянці довжиною 100 м.

Розв'язання. Простір елементарних подій $\Omega = \{0 \le l \le 2\,км\}$, тоді $A = \{0 \le l \le 0{,}1 \text{ км}\}$ ($A \subset \Omega$).

Згідно з (12) маємо:

$$P\left(A\right) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{l_1}{l} = \frac{0{,}1}{2} = \frac{1}{20}.$$