Інтегрування раціональних дробів

План

1. **Поняття многочлена та раціонального дробу.**
2. **Елементарні дроби та методи їх інтегрування.**
3. **Інтегрування дробово-раціональних функцій.**

1. Поняття многочлена та раціонального дробу.

Многочленом $n-$го степеня або раціональною функцією називається вираз: $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, якщо $a_n\neq 0$, де n – деяке натуральне число, $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ – довільні дійсні числа.

Числа $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ називаються коефіцієнтами многочлена $P_n(x)$. Причому a_n називається старшим коефіцієнтом, a_0 називається вільним коефіцієнтом або вільним членом многочлена $P_n(x)$.

Теорема 1: Кожен многочлен $P_n(x)$ $n-$го степеня можна подати у вигляді скінченного числа множників вигляду: $x-a,(x-a)^k,x^2+px+q,\left(x^2+px+q\right)^k$, де квадратний тричлен x^2+px+q такий, що його дискримінант $D=p^2-4q<0$.

Дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається раціональним, якщо його чисельник $P_n(x)$ та знаменник $Q_m(x)$ є многочлени $n-$го та $m-$го степеня відповідно. Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь його чисельника n менший від степеня знаменника m. У протилежному випадку дріб називається неправильним.

Теорема 2: Сума правильних раціональних дробів є правильним раціональним дробом, а будь-який неправильний дріб є сумою многочлена і правильного дробу.

2. Елементарні дроби та методи їх інтегрування.

Найпростішими або елементарними раціональними дробами I, II, III та IV називають правильні дроби вигляду:

I. $\dfrac{A}{x-a}$

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k\geq 2,$ ціле додатне число).

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\left(D=\dfrac{p}{4}-q<0\right).$

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,($k\geq 2,$ ціле додатне число і $D=\dfrac{p}{4}-q<0$).

Теорема 3: Кожен правильний раціональний дріб є сумою скінченного числа найпростіших раціональних дробів.

Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтеграли від найпростіших раціональних дробів I-го та II-го типів знаходять методом безпосереднього інтегрування.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$ (1.1)

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^R}dx=A\int(x-a)^{-R}dx=A\frac{(x-a)^{-R+1}}{-R+1}+C=\frac{A}{(-R+1)(x-a)^{R-1}}$ (1.2)

III. При інтегруванні найпростішого дробу III – го типу необхідно зробити підстановку $x+\dfrac{p}{2}=t$.

IV. Інтеграл від найпростішого дробу IV-го типу шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого дробу типу III.

3. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

З теореми 3 випливає, що інтеграл від дробово-раціональної функції $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, де $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильний раціональний дріб, завжди можна звести до інтегрування найпростіших раціональних дробів. Для цього дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ потрібно подати у вигляді суми найпростіших раціональних дробів. Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$. Можливі наступні випадки:

1. Корені знаменника тільки дійсні та різні числа, тобто
$Q_m(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m).$

В цьому випадку правильний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів 1-го типу:

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m}$, де $A_1, A_2, \ldots, A_m$ - невизначені коефіцієнти. Щоб знайти числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ потрібно виконати такі перетворення:

а) праву частину останньої рівності зводять до спільного знаменника;

б) прирівнюють чисельники лівої і правої частини, отриманої рівності дробів. В результаті отримаємо рівняння:

$$P_n(x) = A_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_m) + A_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_m) + \ldots + A_m(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{m-1})$$

в) надають змінній x довільних n різних значень. В результаті з останньої рівності отримаємо систему n лінійних рівнянь з невідомими $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Розв'язавши цю систему знайдемо потрібний розклад для дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Доцільно брати $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_m$.

2. Корені знаменника тільки дійсні числа, причому деякі з них кратні. Розглянемо спочатку окремий випадок. Нехай $Q_m(x) = (x-a)^m$. Тоді $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_m}{(x-a)^m}$.

Де невизначені коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$ знаходяться так, як і першому випадку.

Якщо $Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_i)^{k_i}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = m$, то

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}} + \frac{A_1^{(i)}}{x-a_i} + \ldots + \frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x-a_i)^{k_i}}.$$

3. Знаменник має комплексні різні корені. Тобто
$Q_m(x) = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)\ldots(x^2 + p_ix + q_i).$

В цьому випадку дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів III-го типу:

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + p_2x + q_2} + \ldots + \frac{A_ix + B_i}{x^2 + p_ix + q_i}$, де $A_1, A_2, \ldots, A_i, B_1, B_2, \ldots, B_i$ невизначені коефіцієнти, які шукаємо, як і першому випадку.