Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Інтеграли вигляду $\int \sin Rx \cos lx dx$; $\int \cos Rx \cos lx dx$; $\int \sin Rx \sin lx dx$.

Інтеграли вигляду $\int \sin Rx \cos lx dx$; $\int \cos Rx \cos lx dx$; $\int \sin Rx \sin lx dx$, де l і R - дійсні числа, $l \neq R$, знаходиться за допомогою формул:

$$\sin Rx \cos lx = \frac{1}{2}(\sin(R-l)x + \sin(R+l)x)$$

$$\cos Rx \cos lx = 12(\cos(R-l)x + \cos(R+l)x)$$

$$\sin Rx \sin lx = \frac{1}{2}(\cos(R-l)x - \cos(R+l)x)$$

Наприклад, знайти інтеграли:

$$\int \sin 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int(\sin(3-7)x + \sin(3+7)x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin(-4x) + \sin 10x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin 4x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{4}\int \sin 4x 4dx + \frac{1}{2}\frac{1}{10}\int \sin 10x 10dx = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C$$

$$\int \sin 2x \sin\frac{2x}{3}dx = \frac{1}{2}\int(cos(2x - \frac{2x}{3}) - \cos(2x + \frac{2x}{3}))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos\frac{4x}{3}dx - \frac{1}{2}\int \cos\frac{8x}{3}dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\int \cos\frac{4x}{3}\frac{4}{3}dx -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{3}{8}\int \cos\frac{8x}{3}\frac{8}{3}dx = \frac{3}{8}\sin\frac{4}{3}x - \frac{3}{16}\sin\frac{8}{3}x + C$$

2. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Розглянемо інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Запис $R(\sin x, \cos x)$ означає, що над синусом і косинусом проводяться тільки раціональні операції: додавання та віднімання, множення на сталі величини, піднесення до цілого степеня як додатного, так і від'ємного, ділення. Іншими словами, під символом $R(\sin x, \cos x)$ необхідно розуміти раціональну функцію синуса та косинуса.

Такі інтеграли приводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргументу t підстановкою, яку називають універсальною:

$tg\frac{x}{2} = t$, $(-\pi < x < \pi)$, тоді $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

Однак саме внаслідок універсальності ця підстановка часто приводить до складних інтегралів. Більш зручні наступні підстановки:

а) $u = \cos x$, якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

б) $u = \sin x$, якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

в) $u = tgx$, якщо $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

Наприклад, $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$

Розв'язок. Використаємо універсальну тригонометричну підстановку $t = tg\frac{x}{2}$. Звідки $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}--\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2+4t-1}=2\int \frac{dt}{(t+2)^2-5}=2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right|+C==\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+C$$

3. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x\cos^n xdx$

I. Нехай хоча б один з показників степеня є непарне число. Нехай $n=2k+1$. В такому випадку підінтегральний вираз можна перетворити так:

$$\sin^m x\cos^n xdx=\sin^m x\cos^{2k+1} xdx=\sin^m x\cos^{2k} x\cos xdx=$$
$$=\sin^m x(\cos^2 x)^k\cos xdx=\sin^m x(1-\sin^2 x)^k\cos xdx.$$

Застосуємо підстановку $\sin x=u,\ \ \cos xdx=du$.

I. Інтегральний вираз прийме вигляд $u^m(1-u^2)^k du$. Питання зводиться до інтегрування суми степеневих функцій.

Наприклад, $\int \sin^5 x\cos^4 xdx$.

Розв'язок.

$$\int \sin^5 x\cos^4 xdx=\int \sin^4 x\sin x\cos^4 xdx=\int (\sin^2 x)^2\sin x\cos^4 xdx=\int (1-\cos^2 x)^2\cos^4 x\sin xdx$$

Введемо підстановку: $\cos x=u$; $-\sin xdx=du$; $\sin xdx=-du.$

$$\int (1-\cos^2 x)^2\cos^4 x\sin xdx=\int (1-u^2)^2u^4(-du)=$$
$$=-\int (1-2u^2+u^4)u^4du=-\int u^4du+2\int u^6du-\int u^8du=$$
$$=-\frac{u^5}{5}+2\frac{u^7}{7}-\frac{u^9}{9}+C=-\frac{\sin^5 x}{5}+\frac{2\sin^7 x}{7}-\frac{\sin^9 x}{9}+C.$$

II. Якщо m і n - обидва показники степенем парні числа. Із тригонометрії відомо, що $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

Застосування цих формул дозволяє понизити степінь підінтегральної функції в розглядуваних інтегралах.

Наприклад, $\int \sin^4 xdx$.

Розв'язок.

$$\int \sin^4 xdx=\int (\sin^2 x)^2dx=\int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2dx=\int \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2xdx+\frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int 12(1+\cos 4x)dx=$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int \cos 4xdx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C=$$
$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

4. Інтеграли вигляду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$

Інтеграли вигляду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ де R – раціональна функція над $\sin^2 x$ та $\cos^2 x$. В такому випадку необхідно застосувати підстановку

$$tgx = z; \quad \sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}; \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

Наприклад, $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$

Розв'язок.

$$\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{4 - 3\frac{1}{1+z^2} + 5\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{4 + 4z^2 - 3 + 5z^2}{1+z^2}} =$$

$$= \int \frac{dz}{9z^2 + 1} = \frac{1}{3} arctg 3z + C = \frac{1}{3} arctg(3tgx) + C.$$

5. Інтеграли вигляду $\int R(tgx,\ ctgx)dx$

Інтеграли вигляду $\int R(tgx,\ ctgx)dx$ де R- раціональна функція над tgx та $ctgx$. Даний інтеграл за допомогою підстановки:

$$tgx = z; \quad ctgx = \frac{1}{z}; \quad dx = \frac{dz}{1+z^2},$$

зводиться до інтегралу від дробово-раціональної функції.

Наприклад, $\int tg^5 x dx$

Розв'язок.

$$\int tg^5 x dx = \int z^5 \cdot \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{z^5 dz}{1+z^2};$$

$$\int \frac{z^5 dz}{1+z^2} = \int (z^3 - z + \frac{z}{z^2+1})dz = \int z^3 dz - \int z dz + \int \frac{z}{z^2+1} dz =$$

$$= \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right| + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|tg^2 x + 1\right| + C =$$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли.

$\int \sin 6x \cos x dx.$ $\qquad$ $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx.$

$\int \sin 3x \sin 5x dx.$ $\qquad$ $\int \sin^3 x dx.$

$\int \cos^5 x dx.$ $\qquad$ $\int \sin^2 \frac{x}{4} dx.$