ТЕМА 1. *ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ*

ЛЕКЦІЯ № 1

Визначений інтеграл. Потужним засобом досліджень у математиці, фізиці, механіці та інших дисциплінах є визначений інтеграл - одне з головних понять математичного аналізу. За допомогою визначеного інтеграла обчислюють площини, які обмежені кривими; довжини дуг; об'єми тіл; робота; швидкість; довжина шляху; моменти інерції та ін.

Обчислення площі криволінійної трапеції. Нехай на відрізку $[a;b]$ задано неперервну функцію $y = f(x)$ (рис. 1.1). Позначимо через m і M її найменше і найбільше значення на цьому відрізку. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками ділення $a = x_0$, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$, такими, що $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ і покладемо $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. Позначимо, далі, найменше й найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_1]$ через m_1 і M_1, на відрізку $[x_1, x_2]$ через m_2 і M_2,…, на відрізку $[x_{n-1}, x_n]$ через m_n і M_n.

Складемо суми: $\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$;

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i .$$

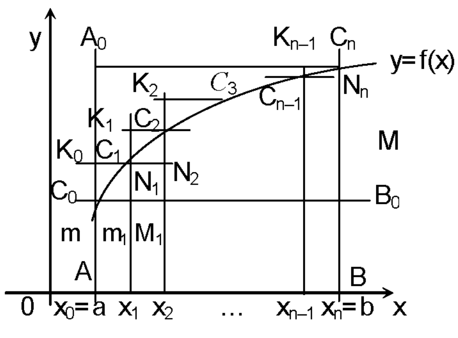


Рис. 1.1

Суму $\underline{S}_n$ називають нижньою інтегральною сумою, а суму $\overline{S}_n$ - верхньою інтегральною сумою.

Якщо $f(x) \geq 0$, то нижня інтегральна сума чисельно дорівнює площині вписаної ступінчастої фігури $AC_0N_1C_1N_2\ldots C_{n-1}N_nBA$, обмеженої вписаною ламаною, верхня інтегральна сума чисельно дорівнює площині описуваної ступінчастої фігури $AK_0C_1K_1\ldots C_nBA$, обмеженої описуваною ламаною.

Відзначимо деякі властивості верхньої і нижньої інтегральних сум:

- оскільки $m_i \le M_i$ для будь-якого $i = \overline{1,n}$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$ (знак рівності можливий тільки в разі $f(x) = \text{const.}$);
- оскільки $m_1 \ge m,\ m_2 \ge m, \ldots, m_n \ge m$, де m - найменше значення $f(x)$ на $[a;b]$, то $\underline{S}_n \ge m(b-a)$;
- оскільки $M_1 \le M,\ M_2 \le M, \ldots, M_n \le M$, де M - найбільше значення $f(x)$ на $[a;b]$, то $\overline{S}_n \le M(b-a)$.

Об'єднавши ці нерівності, маємо: $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$.

Якщо $f(x) \ge 0$, то остання нерівність має простий геометричний зміст. Так $m(b-a)$ і $M(b-a)$ відповідні площі вписаного і описуваного прямокутників AC_0B_0B і AA_0C_nB.

Продовжимо розгляд попереднього. У кожному з відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$, візьмемо точку, яку позначимо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (рис. 1.2), і обчислимо значення функції $f(\xi_1),\ f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$.

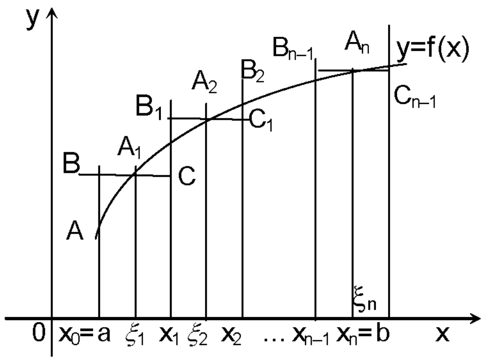


Рис. 1.2

Складемо суму :

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Оскільки при довільному ξ_i, яке належить відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, буде $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ і всі $\Delta x_i > 0$, то $m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$.

Отже, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, або $\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$.

Геометричний зміст останньої нерівності при $f(x) \ge 0$ полягає у тому, що фігура, площа якої дорівнює S_n, обмежена ламаною, яка міститься між вписаною і описуваною ламаними.

Сума S_n залежить від того, як поділено відрізок $[a;b]$ на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ і від того, як узято точку ξ_i у цьому відрізку.

Позначимо через Δx_i найбільшу з довжин відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,...,$[x_{n-1}, x_n]$. Розглянемо будь-яке ділення відрізка $[a,b]$ на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, де $i = \overline{1,n}$, такі, що $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у діленні прямує до нескінченності. Для кожного ділення, взявши відповідні значення ξ_i, можна скласти інтегральну суму

$$S_n^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \qquad (1.1)$$

Розглянемо деяку послідовність ділення відрізка $[a,b]$, у якій $\max \Delta x_i \to 0$, при цьому $n \to \infty$ і у кожному діленні беремо відповідні ξ_i. Припустимо, що ця впорядкована послідовність інтегральних сум S_n^* прямує до деякої границі: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n^* = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$.

<u>Визначений інтеграл.</u> Якщо при будь-яких діленнях відрізка $[a,b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок ξ_i на відрізках $[x_{i-1}, x_i]$ інтегральна сума (1.1) прямує до однієї і тієї ж границі S, то ця границя називається <u>визначеним інтегралом</u> від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1.2)$$

Таким чином: $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Числа a і b відповідно є нижня і верхня границі інтегралу, функція f(x) є підінтегральною функцією, f(x)dx - підінтегральним виразом, [a,b] є відрізок інтегрування, x - зміна інтегрування.

Отже, якщо для функції f(x) границя S існує, то функція є інтегрованою на відрізку [a,b].

Зауважимо, що нижня і верхня інтегральні суми є окремі випадки інтегральної суми (1.1), тому, якщо f(x) інтегрована, то нижня і верхня інтегральні суми прямують до тієї ж границі S, тому можемо записати: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx;$ $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Якщо побудувати графік підінтегральної функції y = f(x), то у разі f(x) $\geq$ 0 визначений інтеграл (1.2) буде чисельно дорівнювати площині криволінійної трапеції, обмеженої вказаною кривою, прямими $x = a$, x = b і віссю Ox.

Зауваження:

- визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \ldots = \int\limits_a^b f(z)dz;$$

- зміна місцями границь інтегрування змінює знак визначеного інтегралу на протилежний

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx;$$

- якщо a = b, то для будь-якої функції f(x) має місце

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0;$$

- безпосереднє обчислення визначеного інтегралу як границі інтегральної суми пов'язано з великими труднощами. Тому далі буде подано метод, відкритий Ньютоном і Лейбніцем, який використовує глибокий зв'язок між інтегруванням і диференціюванням.

ЛЕКЦІЯ № 2

Основні властивості визначеного інтегралу:

- сталий множник можна виносити за знак визначеного інтегралу:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, \text{ де } A = const;$$

- визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій. Так, у разі двох функцій:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx;$$

- якщо на відрізку $[a,b]$, де $a < b$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють нерівності $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

Доведення. Розглянемо різницю

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^n (\varphi(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i.$$

Тут кожна різниця $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \ge 0$, $\Delta x_i > 0$. Отже, кожен член суми додатний, додатна вся сума і додатна її границя, тобто

$$\int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx \ge 0, \text{ звідки}$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0, \text{ або } \int_a^b \varphi(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx;$$

- якщо m і M - найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і $a < b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доведення. За умовою $m \le f(x) \le M$. Інтегруємо цю нерівність:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx, \text{ але}$$

$$\int_a^b mdx = m(b-a), \quad \int_a^b Mdx = M(b-a).$$

Після підстановки цих рівностей у попередню нерівність маємо шукане;

- якщо функція f(x) неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка ξ, що буде правильною рівність

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi).$$

Цю властивість визначеного інтегралу іноді подають як теорему про його середнє значення.

<u>Доведення.</u> Нехай a < b. Якщо m і M найбільше і найменше значення функції f(x) на відрізку $[a,b]$, то на підставі властивості 4 маємо:

$$m\le 1/(b-a)\int_a^b f(x)dx\le M .$$

Звідси вираз, який розташовано всередині нерівності, буде дорівнювати μ. Тобто m ≤ μ ≤ M. Отже, при деякому значенні $\xi\in(a,b)$, будемо мати $\mu= f(\xi)$, або

$$\int_a^b f(x)dx= f(\xi)(b-a);$$

- для будь-яких трьох чисел a,b і c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують.

<u>Доведення</u> спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини.

<u>Обчислення визначеного інтегралу</u>. <u>Формула Ньютона-Лейбніца</u>. Нехай у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ нижня границя a стала, а верхня границя b буде змінюватись. Тоді буде змінюватися і значення інтегралу, тобто інтеграл є функцією верхньої границі:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt .$$

Якщо f(t) ≥ 0, то $\Phi(x)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aABx$ (рис. 1.3). Очевидно, що ця площа змінюється залежно від зміни x.

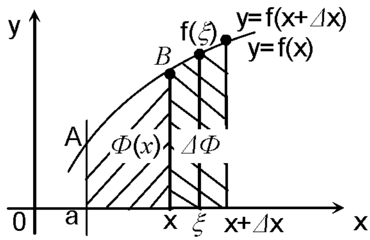


Рис. 1.3

Теорема. Похідна від $\Phi(x)$ по x дорівнює $f(x)$.

Доведення. Дамо аргументу x приріст Δx, тоді

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Приріст функції $\Phi(x)$ дорівнює: $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$

$$=\int_a^{x} f(t)dt+\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

До останнього інтегралу застосуємо теорему про його середнє значення: $\Delta\Phi=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$, де $x<\xi<x+\Delta x$.

Знайдемо відношення: $\Delta\Phi/\Delta x=f(\xi)\Delta x/\Delta x=f(\xi)$.

Отже, $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi/\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)$. Але $\xi\to x$ коли $\Delta x\to 0$, тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$. За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна. Таким чином, $\Phi'(x)=f(x)$.

Зауваження. З доведеної теореми виходить, що будь-яка неперервна функція має первісну.

Теорема. Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо $F(x)$ є будь-яка первісна від неперервної функції $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{1.3}$$

Доведення. Нехай $F(x)$ є деяка первісна від функції $f(x)$. Вище доведено, що функція $\int_a^x f(t)dt$ є також первісною від $f(x)$. Але дві первісні від однієї функції відрізняються на сталу величину C. Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \qquad (1.4)$$

Ця рівність є тотожність при відповідному C. Визначимо C, поклавши у (1.4) $x = a$, тоді: $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, або $0 = F(a) + C$ звідки $C = -F(a)$.

Отже, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Поклавши x = b, маємо формулу Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Повернувшися до змінної x в останньому виразі, маємо (1.3).

Якщо ввести позначення: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, то формулу (1.3) можна переписати так: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Знак $\Big|_a^b$ є знаком подвійної підстановки.

Формула (1.3) дає практично зручний метод обчислення визначених інтегралів у тому разі, коли відома первісна підінтегральної функції.

<u>Заміна змінної у визначеному інтегралі. Теорема.</u> Нехай дано визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція f(x) неперервна на відрізку $[a;b]$. Введемо нову змінну t за формулою $x = \varphi(t)$.

Якщо а) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; б) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$; в) $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1.4)$$

<u>Доведення</u>. Якщо F(x) є первісна для функції f(x), то визначений інтеграл, який стоїть ліворуч у (1.4), дає

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (1.5)$$

а визначний інтеграл, який стоїть праворуч у (1.4), дає

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (1.6)$$

З рівностей (1.5) і (1.6) прямує твердження (1.4) теореми.

Зауваження. При обчисленні визначеного інтегралу за формулою (1.4) не треба повертатися до попередньої змінної.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної: $x = r\sin t$, $dx = r\cos t dt$. Обчислимо нові границі: $x = 0$, коли $t = 0$; $x = r$, коли $t = \pi/2$.

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = r^2/2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = r^2/2(t + (\sin 2t)/2)\Big|_0^{\pi/2} = \pi r^2/4.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Нехай у визначеному інтегралі (1.2) підінтегральний вираз $f(x)dx$ можливо подати у вигляді $u d\upsilon$, де $u = u(x)$ і $\upsilon = \upsilon(x)$ - диференційовані функції від x. Тоді

$$(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon du. \quad (1.7)$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^e \ln x dx$.

Розв'язання. Тут $u = \ln x$; $\upsilon = x$.

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x dx/x = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

ЛЕКЦІЯ № 3

Геометричні застосування визначеного інтегралу

Обчислення площин:

- якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x) \geq 0$, то, як відомо з попереднього, площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює $S = \int_a^b f(x)dx$;

- якщо $f(x) \le 0$ на $[a,b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ теж від'ємний. За абсолютною величиною він дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції;

- якщо $f(x)$ скінченне число разів змінює знак на відрізку $[a,b]$, то треба знайти суму абсолютних значень інтегралів або обчислити інтеграл $S = \int_a^b |f(x)|dx$; (1.8)

<u>Приклад.</u> Обчислити площу S фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ і віссю Ox, коли $0 \le x \le 2\pi$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки $\sin x \ge 0$, коли $0 \le x \le \pi$, і $\sin x \le 0$, коли $\pi \le x \le 2\pi$ (рис. 1.4), тому

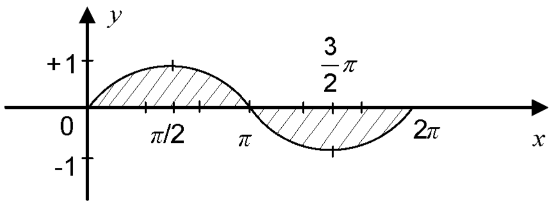


Рис. 1.4

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2\int_0^{\pi} \sin x dx = 2(-\cos x)\Big|_0^{\pi} =$$
$$= -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = 4 \text{ од.кв.}$$

<u>Площу</u> області, обмеженої кривими: $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$ і $x = b$; та за умови $y = f_1(x) \ge y = f_2(x)$, коли $a \le x \le b$, обчислюємо за формулою

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx. \qquad (1.9)$$

Інколи треба знаходити точки перетину кривих. Для цього розв'язуємо систему, яку складаємо з рівнянь кривих:

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=\sqrt{x}$ і $y=x^2$ (рис. 1.5).

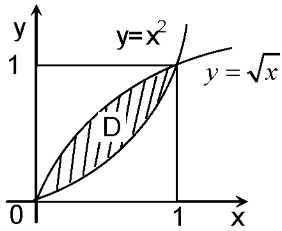


Рис. 1.5

Розв'язання. Знаходимо точки перетину кривих:

$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x^2. \end{cases}$ Звідси: $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$; $x^4-x=0$; $x(x^3-1)=0$.

Отже, $x_1=0$ і $x_2=1$.

Підставимо визначені величини у (1.9), маємо:

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=2/3x^{3/2}\Big|_0^1-1/3x^3\Big|_0^1=2/3-1/3=1/3 \text{ од}^2.$$

Площа криволінійної трапеції у випадках, коли крива має рівняння у параметричній формі: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, де $\alpha\le t\le\beta$ і $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Ці рівняння визначають деяку функцію у = f(x) на відрізку $[a, b]$ і, отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою (1.9). Зробимо заміну змінної у цьому інтегралі: $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$. Тоді $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$.

Отже, $$S=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (1.10)$$

Приклад. Обчислити площу області, обмеженої віссю *Ox* і однією аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Розв'язання. Тут $t\in[0,2\pi]$. За формулою (1.10) маємо

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=$$

$$= a^2\left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt\right) = a^2\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \right.$$

$$\left. + 1/2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = a^2\left(2\pi + 1/2 t\Big|_0^{2\pi} + 1/4 \sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = 3\pi a^2 \text{ од}^2.\right.$$

<u>Площа</u> <u>криволінійного сектора в полярних координатах</u>. Нехай в полярній системі координат маємо криву, яка визначена рівнянням $\rho = f(\theta)$, де $f(\theta)$ - неперервна функція, коли $\alpha \le \theta \le \beta$. Визначимо площу сектора *OAB*. обмеженого кривою $f(\theta)$ і радіус-векторами $\theta_0 = \alpha$ і $\theta_n = \beta$.

Розіб'ємо сектор *OAB* радіус-векторами $\alpha = \theta_0$, $\theta = \theta_1, \ldots$, $\theta = \theta_{n-1}$, $\theta_n = \beta$ на n-частин. Позначимо через $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, …, $\Delta\theta_n$ кути між проведеними радіус-векторами (рис. 1.6).

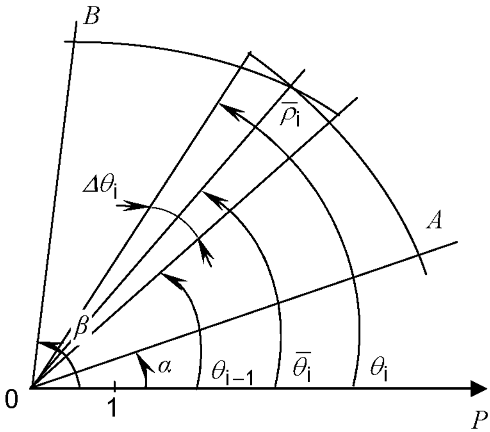


Рис. 1.6

Позначимо через ρ_i довжину радіус-вектора, який відповідає куту $\overline{\theta}_i$, де $\theta_{i-1} < \overline{\theta}_i < \theta_i$.

Розглянемо сектор кола з радіусом $\overline{\rho}_i$ і центральним кутом $\Delta\theta_i$. Його площа буде дорівнювати $\Delta S_i = 1/2\,\overline{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i$.

Сума $S_n = 1/2\sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i = 1/2\sum_{i=1}^{n} (f(\overline{\theta}_i))^2 \cdot \Delta\theta_i$ дає площу "ступінчастого" сектора.

Ця сума є інтегральною сумою для функції $\rho^2 = (f(\theta))^2$ на відрізку $[\alpha, \beta]$. Її границя, коли $\max \Delta\theta_i \to 0$ і $n \to \infty$, є визначений інтеграл, який дає площу сектора *OAB*. Отже,

$$S = 1/2\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta \text{ або } S = 1/2\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta . \qquad (1.11)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури (рис.1.7). Радіус-вектор описує область з площею, яка дорівнює чверті шуканої площі, якщо кут θ змінюється від 0 до $\pi/4$:

$$S/4 = 1/2\int_{0}^{\pi/4} \rho^2 d\theta = 1/2a^2 \int_{0}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = a^2/2(\sin 2\theta)/2\Big|_0^{\pi/4} = a^2/4 .$$

Отже, $S = a^2$ од.^{2}

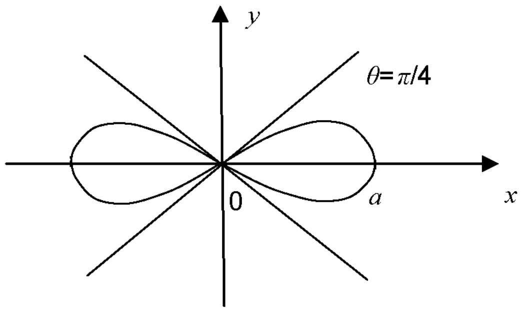


Рис. 1.7

Довжина дуги кривої. Довжина дуги гладкої кривої $y = f(x)$ у прямокутній системі координат. Вважаємо, що функція та її перша похідна неперервні на відрізку $[a, b]$.

Дуга $A\breve{B}$ розташована між лініями $x = a$ і $x = b$ (рис. 1.8).

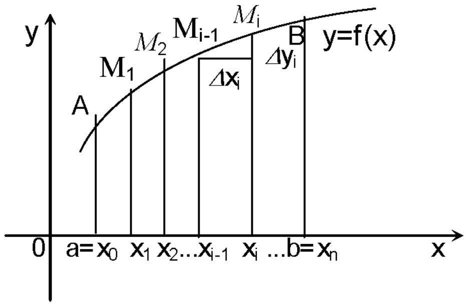


Рис. 1.8

Візьмемо на дузі AB точки $A, M_1, M_2, ..., B$ з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n = b$ і проведемо відрізки AM_1, $M_1 M_2, ..., M_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. Тоді маємо ламану AM_1, $M_2, ..., M_{n-1}B$, вписану у дугу $\breve{AB}$. Довжина ламаної дорівнює $L_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Довжиною L дуги $\breve{AB}$ називають ту границю, до якої прямує довжина вписаної ламаної, коли довжина її найбільшого відрізка прямує до нуля, а число n цих відрізків прямує до нескінченності:

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

Позначимо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + (\Delta y_i / \Delta x_i)^2}\, \Delta x_i .$$

За теоремою Лагранжа маємо

$\Delta y_i / \Delta x_i = (f(x_i) - f(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)$, де $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i .$$

За умовою, $f'(x)$ неперервна, отже, функція $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ теж неперервна. Тому існує границя написаної вище інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Маємо формулу для обчислення довжини дуги:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{або} \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx. \qquad (1.12)$$

ЛЕКЦІЯ № 4

Приклад. Визначити довжину кола $x^2 + y^2 = r^2$.

Розв'язання. Обчислимо четверту частину кола, яка розташована у першому квадранті. Рівняння кола тут має вигляд $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, відкіля $dy/dx = -x/(r^2 - x^2)^{1/2}$.

Отже, $(1/4)L = \int_0^r (1 + x^2/(r^2 - x^2))^{1/2} dx = \int_0^r r/(r^2 - x^2)^{1/2} dx =$

$$= r \arcsin(x/r)\Big|_0^r = r \arcsin 1 = r\pi/2.$$

Довжина всього кола $L = 2\pi \cdot r$.

Довжина дуги кривої, яка має рівняння у параметричній формі: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $\alpha \le t \le \beta$. Вважаємо, що ці функції та їх похідні неперервні у області визначення, причому $\varphi'(t) \ne 0$. У цьому разі подані рівняння визначають деяку неперервну функцію y = f(x), яка має неперервну похідну $dy/dx = \psi'(t)/\varphi'(t)$. Нехай $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тоді, зробивши у інтегралі (6.12) підстановку $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, маємо:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \qquad (1.13)$$

Приклад. Обчислити довжину астроїди: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. Зробимо рисунок лінії (рис. 1.9). Обчислюємо 1/4 довжини, тому що крива симетрична відносно обох вісей координат.

Знаходимо $dx/dt = -3a\cos^2 t \sin t$, $dy/dt = 3a\sin^2 t \cos t$. Параметр t буде змінюватись від 0 до 2π. Отже,

$$(1/4)L = \int_0^{\pi/2} (9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t)^{1/2}\cdot dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2} (\cos^2 t\sin^2 t)^{1/2}dt = 3a\int_0^{\pi/2} |\cos t\sin t|dt = 3/2a\ \sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 3a/2$$

Довжина астроїди $L = 4(3/2)a = 6a$.

<u>Довжина дуги кривої</u> у полярній системі координат. У полярних координатах маємо рівняння кривої $\rho = f(\theta)$, де ρ - полярний радіус, θ - полярний кут. Запишемо формули переходу від полярної до прямокутної системи координат: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Якщо замість ρ підставимо його вираз через θ, маємо рівняння $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$. Ці рівняння можна розглядати як параметричні і для обчислення довжини дуги застосувати формули (6.13). Для цього знайдемо похідні від x і y за параметром θ:

$dx/d\theta = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$, $dy/d\theta = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$.

Тоді $(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = (\rho')^2 + \rho^2$.

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\theta . \qquad (1.14)$$

<u>Приклад.</u> Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1+\cos\theta)$.

<u>Розв'язання.</u> Зробимо рисунок лінії (рис. 1.10). Лінія симетрична відносно осі *Ox*. Змінюючи полярний кут θ від 0 до π, маємо половину шуканої довжини. Тут $\rho' = -a\sin\theta$. Отже,

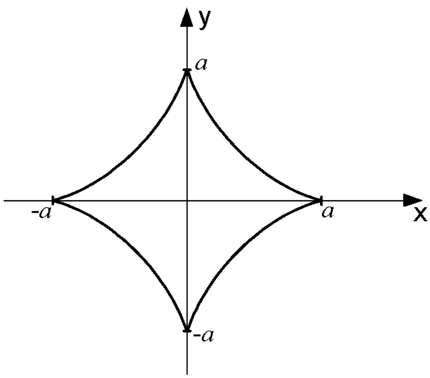


Рис. 1.9

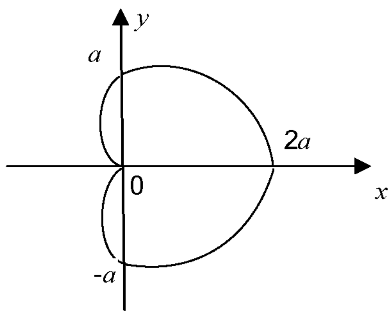


Рис. 1.10

$$L = 2\int_0^{\pi}(a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta)^{1/2}d\theta = 2a\int_0^{\pi}(2+2\cos\theta)^{1/2}d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos(\theta/2)d\theta = 8a\sin(\theta/2)\Big|_0^{\pi} = 8a\,.$$

<u>Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів</u>.

Нехай маємо деяке тіло Т. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі *Ox* (рис. 1.11). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від *x*: $S = S(x)$.

Припустимо, що $S(x)$ є неперервна функція від *x*, і визначимо об'єм тіла Т. Проведемо площини $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, ..., x = x_n = b$. Ці площини розіб'ють тіло на шари. У кожному проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку ξ_i і для кожного значення i = 1, 2, ... , n побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі *Ox*, а напрямна є контуром перерізу тіла *T* площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого елементарного циліндру з площею основи $S(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, і висотою Δx_i дорівнює $S(\xi_i)\Delta x_i$. Об'єм усіх циліндрів буде $V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$.

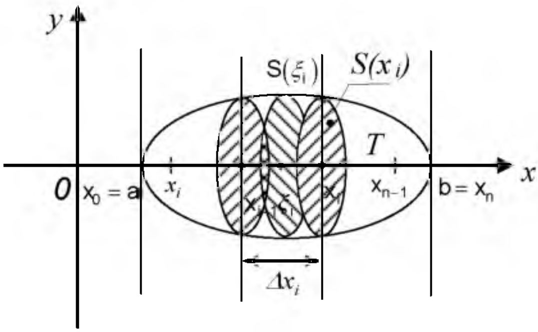


Рис. 1.11

Границя цієї суми (якщо вона існує), коли $\max\Delta x_i \to 0$ і $n \to \infty$ називається об'ємом даного тіла:

$$V = \lim_{n\to\infty \max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i .$$

Об'єм V являє собою, очевидно, інтегральну суму для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $a \le x \le b$, тому записана вище границя існує і дорівнює визначеному інтегралу:

$$V = \int_a^b S(x)dx . \qquad (1.15)$$

Приклад. Обчислити об'єм фігури, якщо $S(x) = x^2$, де $a \le x \le b$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (1.15), дістанемо

$$V = \int_a^b x^2 dx = 1/3x^3\Big|_a^b = (b^3 - a^3)/3 \text{ од}^3.$$

Об'єм тіла обертання. Якщо тіло утворене обертанням кривої f(x) навколо осі Ox. Площа кола $S = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$. Підставимо цей вираз у (1.15), маємо:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx . \qquad (1.16)$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням лінії $y = ae^{x/(2a)}$ навколо осі Ox, де $x \in [0; a]$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (1.16), маємо

$$V = \pi\int_0^a (ae^{x/2a})^2 dx = \pi a^2 \int_0^a e^{x/a}dx = \pi a^3 e^{x/a}\Big|_0^a = \pi a^3(e-1) \text{ од}^3.$$

Обчислення площі поверхні тіла обертання.

Нехай крива, яка задана на відрізку $[a, b]$ неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, обертається навколо осі Ox. Перетнемо поверхню обертання двома площинами, які проходять через точки x і $x + dx$, паралельно Oyz. Замінимо утворену між перерізами фігуру зрізаним конусом, твірна якого дорівнює $dl = \sqrt{1+(y')^2}dx$, а радіуси основ дорівнюють $f(x)$ та $f(x+dx)$. Якщо висота конуса dx досить мала, то площа dS бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса, тобто маємо диференціал площі:

$$dS = 2\pi f(x)\sqrt{1+(y')^2}dx$$

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \qquad (1.17)$$

<u>Приклад.</u> Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$, $0 \le x \le 4$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо $y = \sqrt{2x}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$; $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{1+2x}{2x}}$.

За формулою (6.17) знаходимо $S = 2\pi\int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{\frac{1+2x}{2x}}dx =$

$= 2\pi\int_0^4 \sqrt{1+2x}dx = \frac{2}{3}p(1+2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{52p}{3}$ од.кв.

ЛЕКЦІЯ № 5

Фізичні застосування визначеного інтегралу

<u>Обчислення роботи.</u>

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається уздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота A, виконана цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a; b]$, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (1.18)$$

<u>Приклад.</u> Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі вертикально вгору на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

<u>Розв'язання</u>. Згідно із законом Ньютона, сила F притягання тіла Землею дорівнює $F = \gamma\frac{mM}{x^2}$,

де M - маса Землі; γ - гравітаційна стала; x - відстань від центра тіла до центра Землі. Покладемо сталу $\gamma mM = k$, тоді $F(x) = kx^{-2}$, де $R \le x \le R +$ h. При $x = R$ сила $F(R)$ дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто $\frac{k}{R^2} = P$,

звідки $k = PR^2$, $F(x) = PR^2x^{-2}$. За формулою (1.18) маємо

$$A = PR^2\int_R^{R+h} x^{-2}dx = -PR^2x^{-1}\Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}.$$

Обчислення тиску рідини на вертикальну пластину. Тиск P рідини на занурену горизонтальну пластину визначають за законом Паскаля:

$$P = \gamma ghS, \tag{1.19}$$

де S – площа пластини; h - глибина занурення; γ - густина рідини і g - прискорення вільного падіння.

Якщо в рідину пластину занурити не горизонтально , то її різні точки лежатимуть на різних глибинах і формулою (1.19) користуватись не можна. Проте якщо пластина дуже мала, то всі її точки лежать на майже одній глибині занурення. Це дає змогу знайти диференціал тиску на елементарну площу пластини, а потім тиск на всю поверхню.

Приклад. Знайти тиск рідини на вертикально занурений в рідину півколо, діаметр якого дорівнює $2R$ і знаходиться на поверхні рідини.

Розв'язання. Нехай елементарна площа знаходиться на глибині x (рис. 6.12).

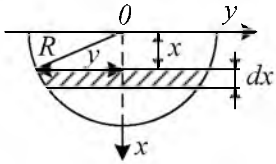


Рис. 6.12

Вважаючи її прямокутником з основою $2y$ і висотою dx, знайдемо за законом Паскаля диференціал тиску:

$$dP = \gamma gx2ydx = 2\gamma gx\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$ Отже,

$$P = 2\gamma g\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\frac{2}{3}\gamma g(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3 g\gamma.$$

Невласні інтеграли. Визначений інтеграл було введено на скінченному проміжку від неперервної обмеженої функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтегралу стає неприйнятним. Наприклад, коли нескінченний проміжок інтегрування або n частинних відрізків скінченної довжини інтегральна функція необмежена.

Узагальнюючи поняття визначеного інтегралу на ці випадки, приходимо до невласного інтегралу – інтегралу від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої інтегральної функції.

Невласні інтеграли першого роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ +\infty)$ і інтегрована на будь-якому відрізку $[a;\ b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{1.20}$$

її називають невласним інтегралом першого роду і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.21}$$

Таким чином, за означенням $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

У цьому випадку інтеграл (1.21) називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ - інтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$.

Якщо ж границя (1.20) не існує або нескінченна, то інтеграл (1.21) називається також невласним, але розбіжним, а функція $f(x)$ - не інтегрованою на $[a;+\infty)$.

Аналогічно визначається невласний інтеграл на проміжку $(-\infty; b]$: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{1.22}$$

де c - довільне дійсне число. Отже, інтеграл ліворуч у формулі (1.22) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч.

З наведеного прямує, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтегралу із змінною межею інтегрування.

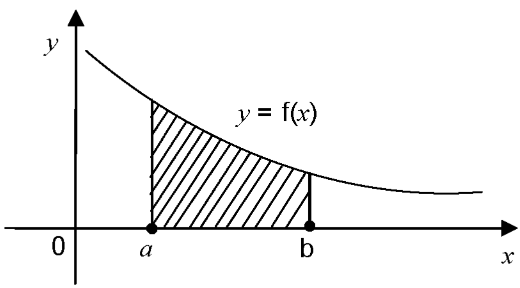


Рис. 1.13

Зауваження. Якщо функція f(x) неперервна і додатна на проміжку $[a;\ +\infty)$ і інтеграл (1.21) збігається, то природно вважати, що він відбиває площу необмеженої області (рис. 1.13).

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. За формулою (1.20) маємо

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\pi/4$.

Якщо достатньо знати, збіжний чи ні невласний інтеграл, застосовують наступні ознаки збіжності:

Ознака 1. Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції f (x) і g (x) неперервні і задовольняють умові $0\le f(x)\le g(x)$, то із збіжності

інтегралу
$$\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx \tag{1.23}$$

випливає збіжність інтегралу
$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx, \tag{1.24}$$

а із розбіжності інтегралу (1.24) випливає розбіжність інтегралу (1.23).

Наведена ознака має простий геометричний зміст. Якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області є також скінченне число; якщо площа меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^6+5}};\quad \int\limits_2^{+\infty}\frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}}dx.$$

Розв'язання. Оскільки для усіх $x\in[1;+\infty)$ $0<\frac{x}{\sqrt{x^6+5}}<\frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ збігається (перевірте самостійно), то за ознакою 1 даний інтеграл також збігається.

Другий інтеграл розбігається, бо для усіх $x\in[2;+\infty)$, маємо:

$\dfrac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$, а $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ є розбіжним (перевірте самостійно).

Ознака 2. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0<k<+\infty,\ \left(f(x)>0, g(x)>0\right),$$

то обидва інтеграли (1.23) і (1.24) або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Ця ознака іноді виявляється зручнішою, ніж ознака 1, бо не потребує перевірки нерівності $0\le f(x)\le g(x)$.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln((x^2+2)/(x^2+1))dx$.

Розв'язання. Оскільки $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ є збіжним і

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x^2+2)/(x^2+1))}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+1/(x^2+1)\right)}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(x^2+1)}{1/x^2} = 1,$$

то даний інтеграл також збігається.

ЛЕКЦІЯ № 6

В ознаках 1 і 2 розглядались невласні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива така ознака.

Ознака 3. Якщо інтеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty}\left|f(x)\right|dx \tag{1.25}$$

збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{1+3\sin x}{x^3}dx$.

Розв'язання. Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оскільки $\left|\dfrac{1+3\sin x}{x^3}\right|\le\dfrac{4}{x^3}$, а $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{4}{x^3}dx$ є збіжним і дорівнює 2 (перевірте самостійно), то даний інтеграл теж збігається.

Слід зауважити, що із збіжності інтегралу (1.24) не випливає, взагалі кажучи, збіжність інтегралу (1.25). Ця обставина виправдує такі означення. Якщо разом з інтегралом (1.24) збігається й інтеграл (1.25), то інтеграл (1.24) називають абсолютно збіжним, а функцію f(x) – абсолютно інтегровною на проміжку [a; $+\infty$).

Якщо інтеграл (1.24) збігається, а інтеграл (1.25) розбігається, то інтеграл (1.24) називають умовно (або неабсолютно) збіжним.

Тепер ознаку 3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збіжність інтегралу. Якщо ж невласний інтеграл збігається умовно, то застосовують більш глибокі ознаки збіжності.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{b^2+x^2}dx \quad (a;b \neq 0)$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{1}{b}\lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\Big|_0^a = \frac{\pi}{2b}, \quad \text{а} \quad 0 \le \left|\frac{\sin ax}{b^2+x^2}\right| \le \frac{1}{b^2+x^2},$$

то за ознакою 3 інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin ax}{b^2+x^2}\right| dx$ збігається.

Отже, збігається, причому абсолютно, і даний інтеграл, а функція $f(x) = \sin ax/(b^2+x^2)$ на проміжку $[0;\infty)$ є абсолютно інтегровною.

Невласні інтеграли другого роду. Нехай функція f (x) визначена на проміжку [a; b). Точку x = b назвемо особливою точкою, якщо f (x) $\to\infty$ при $x \to$ b – 0 (рис. 1.14).

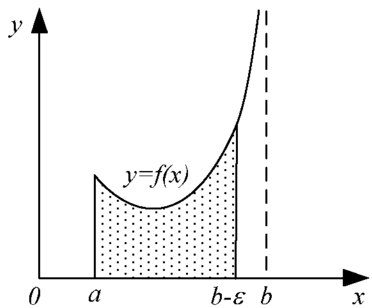


Рис. 1.14

Нехай функція f (x) інтегровна на відрізку $[a;\ b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b-\varepsilon > a$; тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{1.26}$$

її називають невласним інтегралом другого роду і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{1.27}$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (1.27) існує або збігається. Якщо ж границя (1.26) нескінченна або не існує, то інтеграл (1.27) також називають невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо $x = a$ - особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{1.28}$$

Якщо f (x) необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c\in(a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)dx$ і $\int_c^b f(x)dx$ за визначенням покладають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1.29}$$

Нарешті, якщо a та b - особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^d f(x)dx$ і $\int_d^b f(x)dx$ за визначенням покладають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx, \tag{1.30}$$

де d - довільна точка інтервалу $(a;\ b)$.

<u>Приклад.</u> Обчислити невласний інтеграл $\int_0^2 dx/\sqrt{4-x^2}$.

<u>Розв'язання</u>. $\int_0^2 dx/\sqrt{4-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} dx/\sqrt{4-x^2} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(x/2)\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin((2-\varepsilon)/2) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збіжний.

Зауваження. Ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду аналогічні розглянутим вище.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 dx/(\sqrt{x}+5x^4)$.

Розв'язання. Даний інтеграл збігається, бо для усіх $x \in (0;1]$ маємо $0 < 1/(\sqrt{x}+5x^4) < 1/\sqrt{x}$, а інтеграл $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ є збіжним (перевірте самостійно).

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 dx/\sin x$.

Розв'язання. Функції: $f(x) = 1/\sin x$ та $g(x) = 1/x$ мають особливість у точці $x = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x/\sin x = 1$, і інтеграл $\int_0^1 dx/x$ розбігається, то даний інтеграл також розбігається.

ТЕМА 2. ***ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ***

ЛЕКЦІЯ № 7

1. Поняття диференціального рівняння. Нехай функція $y = f(x)$ відтворює кількісний бік деякого явища. Розглядаючи його, не завжди можна безпосередньо встановити характер залежності y від x, але можна встановити залежність між величинами x і y й похідними від y по x: $y', y'', ..., y^{(n)}$, тобто написати диференціальне рівняння.

Приклад. З деякої висоти починає падати тіло, яке має масу m. Потрібно встановити, за яким законом буде змінюватися швидкість υ падіння цього тіла, якщо на нього, окрім сили тяжіння, впливає гальмуюча сила опору повітря, пропорційна швидкості (з коефіцієнтом пропорційності $k > 0$), тобто треба знайти $\upsilon = f(t)$.

Розв'язання. За другим законом Ньютона

$$m d\upsilon/dt = F,$$

де $d\upsilon/dt$ є прискорення рухомого тіла, а F - сила, діюча на тіло у напрямку руху. Ця сила складається з двох: сили тяжіння - mg і сили опору повітря - $k\upsilon$. Отже,

$$m d\upsilon/dt = mg - kv.$$

Склали рівність, яка зв'язує невідому функцію υ і її похідну $d\upsilon/dt$, тобто диференціальне рівняння відносно невідомої функції υ.

Визначення:

- рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ і її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$, називають диференціальним.

Символічно диференціальне рівняння можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Якщо шукана функція $y = f(x)$ є функція однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називають звичайним. Далі будемо займатися лише звичайними диференціальними рівняннями;

- порядок диференціального рівняння відповідає порядку найвищої похідної, яка є у рівнянні.

Приклад. Рівняння $y' - 2xy^2 + 5 = 0$, є диференціальним рівнянням першого порядку; рівняння $y'' + ky' - by = \sin x$ є диференціальним рівнянням другого порядку і т. д.;

- розв'язком або інтегралом диференціального рівняння є будь-яка функція $y = f(x)$, яка, будучи підставленою у початкове рівняння, перетворює його в тотожність.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння $y'x - x^2 - y = 0$.

Його розв'язком будуть усі функції $y = x^2 + Cx$, де C - довільна стала величина. Справді, диференціюючи функцію $y = x^2 + Cx$, знаходимо $y' = 2x + C$. Підставивши вирази y і y' у початкове рівняння, маємо тотожність $(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0$;

- загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку є функція $y = \varphi(x, C)$ або $\Phi(x, y, C) = 0$, яка задовольняє диференціальному рівнянню при будь-якому відомому значенні C;

- початкова умова $y = y_0$ при $x = x_0$, де (x_0, y_0) належить області визначення рівняння;

- частинним розв'язком є будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$ або $\Phi(x, y, C_0) = 0$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, якщо в останньому довільній сталій величині C надається відоме значення $C = C_0$, яке відповідає початковій умові.

Приклад. Для диференціального рівняння $dy/dx = -y/x$ загальним розв'язком буде функція $y = C/x$. (Перевірте самостійно). Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові: $y_0 = 1$, коли $x_0 = 2$. Підставимо ці значення у формулу $y = C_0/x$, маємо $1 = C_0/2$, або $C_0 = 2$. Отже, шуканим частинним розв'язком буде функція $y = 2/x$. Це є розв'язок так званої задачі Коші.

Теорема існування і єдності розв'язку. Якщо у рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $\partial f / \partial y$ неперервні у деякій області D на площині Oxy, якій належить довільна точка $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє початковій умові: $y = y_0$, коли $x = x_0$.

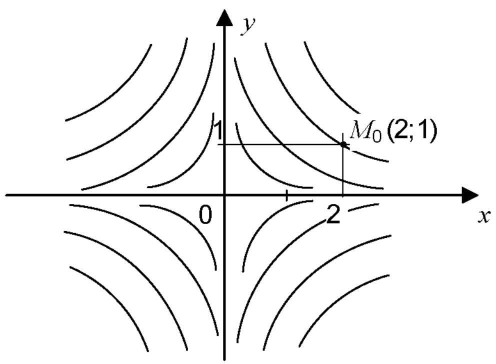


Рис. 2.1

Ця теорема за програмою подається без доведення. Розглянемо її геометричну ілюстрацію (рис. 2.1). В останньому прикладі загальний інтеграл $y = C/x$ геометрично зображується сімейством гіпербол, а частинний інтеграл, визначений початковою умовою, зображується однією з цих гіпербол, яка проходить через точку $M_0(2;1)$.

Диференціальні рівняння першого порядку:

- диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Щоб знайти розв'язок рівняння $y' = f(x)g(y)$, треба обидві його частини помножити (поділити) на такий вираз, щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна x, а в другу - тільки змінна y, а потім проінтегрувати обидві його частини.

Записавши задане рівняння у вигляді: $dy/dx = f(x)\cdot g(y)$, дістаємо $dy/g(y) = f(x)dx$ і $\int dy/g(y) = \int f(x)dx$.

Розв'язуючи рівняння з відокремлюваними змінними, треба пам'ятати, що від ділення обох частин рівняння на вираз, який містить x і y, можна "втратити" розв'язки, що перетворюють цей вираз у нуль.

Приклад. Розв'язати рівняння $xyy' + 1 = y$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $xy(dy/dx) = y - 1$. Послідовно поділивши обидві частини рівняння на $x(y-1)$ і помноживши на dx, дістанемо $y dy/(y-1) = dx/x$.
Змінні відокремлено. Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int y dy/(y-1) = \int dx/x; \quad \int dy + \int dy/(y-1) = \int dx/x;$$

$$y + \ln|y-1| = \ln|x| + \ln C; \quad (y-1)e^y = Cx.$$

Остання рівність, яка встановлює вигляд залежності між змінними x, y, і є загальним розв'язком диференціального рівняння.

Виконуючи ділення, припускали, що $x \neq 0$ і $y \neq 1$. Тобто могли "втратити" розв'язки $x = 0$ і $y = 1$. Підставляючи $x = 0$ і $y = 1$ у вихідне рівняння, переконуємось, що $y = 1$ є його розв'язком, а $x = 0$ ні.

Диференціальне рівняння $y' = f(ax + by + c)$, де a, b і c - дані числа, заміною $u = ax + by + c$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = (x+y)^2$.

Розв'язання. Покладемо $x + y = u$, тоді $u' = 1 + y'$ або $\frac{du}{dx} = 1 + u^2$, звідки $\frac{du}{1+u^2} = dx$. $\int \frac{du}{1+u^2} = \int dx$. $\operatorname{arctg} u = x + c$, тобто $\operatorname{arctg}(x+y) = x + c$;

- <u>однорідні диференціальні рівняння</u>. Диференціальні рівняння, які можна записати у вигляді $y' = f(y/x)$, називають однорідними. Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $y = tx$, де нову змінну t розглядають як функцію x.

<u>Приклад.</u> Розв'язати диференціальне рівняння

$$dy/dx = xy/(x^2 + y^2).$$

<u>Розв'язання.</u> Зробимо заміну $y = tx$, тоді $y' = t'x + t$. Підставимо у рівняння: $t'x + t = xtx/(x^2 + t^2x^2)$ або $t'x = t/(1+t^2) - t$.

Звідси $t'x = -t^3/(1+t^2)$. Розділимо змінні: $(1+t^2)dt/t^3 = -dx/x$.

Проінтегруємо обидві частини

$$\int dt/t^3 + \int dt/t = -\int dx/x; \quad -1/(2t^2) + \ln|t| = -\ln|x| + \ln C.$$

Повернемося до початкових змінних:

$$-1/2(x^2/y^2) + \ln|y/x| = -\ln|x| + \ln C;$$

після потенціювання $y/xe^{-x^2/(2y^2)} = C/x$. Якщо $x \neq 0$, то розв'язок даного диференціального рівняння можна записати у вигляді $y = Ce^{x^2/(2y^2)}$;

- <u>лінійні диференціальні рівняння.</u> Диференціальні рівняння першого порядку, які мають вигляд

$$dy/dx + P(x)y = Q(x),$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - відомі неперервні функції від x (або сталі), є лінійним відносно y і y'. Загальний розв'язок лінійного рівняння будемо шукати у вигляді додатку двох функцій від x: $y = u(x)\upsilon(x)$; $y' = u'\upsilon + \upsilon' u$.

Підставимо ці вирази у початкове рівняння, матимемо

$$u'\upsilon + \upsilon' u + Pu\upsilon = Q \text{ або } u(\upsilon' + P\upsilon) + \upsilon u' = Q.$$

Виберемо функцію υ такою, що $\upsilon' + P\upsilon = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи його, дістанемо $\upsilon = C_1 e^{-\int P dx}$.

Нехай $C_1 = 1$. Підставимо знайдену функцію у передостаннє рівняння (вважаючи, що $\upsilon' + \upsilon P = 0$), маємо: $\upsilon u' = Q$ або $du/dx = Q(x)/\upsilon(x)$, звідки $u = \int Q(x)dx/\upsilon(x) + C$.

Підставимо u і υ до шуканої функції y. Остаточно:

$$y = \upsilon(x) \cdot (\int Q(x)dx/\upsilon(x) + C).$$

<u>Приклад</u>. Розв'язати рівняння $dy/dx - 2y/(x+1) = (x+1)^3$, де

$x \neq -1$. Знайти частинне рішення за початковими умовами: $y_0 = 3$, коли $x_0 = 0$, тобто розв'язати задачу Коші.

Розв'язання. Нехай $y = u\upsilon$, тоді

$$dy/dx = u(d\upsilon/dx) + (du/dx)\upsilon.$$

Підставимо ці вирази у початкове рівняння, матимемо:

$$u(d\upsilon/dx) + (du/dx)\upsilon - 2u\upsilon/(x + 1) = (x + 1)^3, \text{ або}$$

$$u((d\upsilon/dx) - 2\upsilon/(x + 1)) + \upsilon(du/dx) = (x + 1)^3$$

Функцію υ визначимо з рівняння $d\upsilon/dx - 2\upsilon/(x + 1) = 0$.

Відокремлюємо змінні й інтегруємо його $\int d\upsilon/\upsilon = 2\int dx/(x+1)$, звідки

$$\ln|\upsilon| = 2\ln|x+1|, \text{ або } \upsilon = (x+1)^2.$$

Функцію u визначимо з рівняння

$$\upsilon du/dx = (x+1)^3, \text{ або } (x+1)^2 du/dx = (x+1)^3$$

$$\int du = \int (x+1)dx, \text{ звідки } u = 1/2(x+1)^2 + C.$$

Отже, загальний розв'язок початкового рівняння матиме вигляд

$$y = (x+1)^4/2 + C(x+1)^2.$$

Довільна стала частинного розв'язку, яка задовольняє початкової умові, знаходиться із загального розв'язку:

$$3 = (0+1)^4/2 + C(0+1)^2, \quad C = 5/2.$$

Отже, маємо шуканий частинний розв'язок:

$$y = (x+1)^4/2 + 5/2(x+1)^2.$$

ЛЕКЦІЯ № 8

Приклад. Розв'язати рівняння $m d\upsilon/dt = mg - k\upsilon$.

Розв'язання. Це рівняння було складено вище і є лінійним. Перепишемо його таким чином:

$$d\upsilon/dt + k\upsilon/m = g.$$

Нехай $\upsilon = x(t)y(t)$. Тоді $d\upsilon/dt = y\,dx/dt + x\,dy/dt$. Підставимо цю рівність у рівняння:

$$y dx/dt + x dy/dt + xyk/m = g, \text{ або}$$

$$x(dy/dt + ky/m) + y dx/dt = g.$$

Візьмемо функцію $y(t)$ таку, щоб $dy/dt + yk/m = 0$.

Звідси $dy/y = -kdt/m$, це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Інтегруємо його: $\ln|y| = -tk/m$. Виконаємо потенціювання $y = e^{-kt/m}$.

Тепер знайдемо $x(t)$: $e^{-kt/m}dx/dt = g$ або $dx = ge^{kt/m}dt$.

Інтегруємо: $x = g\int e^{kt/m}dt$; $x = e^{kt/m}gm/k + C$.

Остаточно: $\upsilon(t) = (e^{kt/m}gm/k + C)e^{-kt/m} = Ce^{-kt/m} + gm/k$.

Тут C - довільна стала, яку знаходимо за початкової умови: $\upsilon = \upsilon_0$, коли $t = 0$. Тоді $\upsilon_0 = C + gm/k$, $C = \upsilon_0 - gm/k$.

Шукану залежність $\upsilon(t)$ - швидкість вільно падаючого тіла, обчислюємо за формулою

$$\upsilon = (\upsilon_0 - mg/k)e^{-kt/m} + mg/k.$$

<u>Диференціальне рівняння в повних диференціалах</u>.

Рівняння виду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (2.1)

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо його частина, яка розташована ліворуч (2.1), є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (2.1) має вигляд $u(x,y) = C$, де C – довільна стала. Для того щоб рівняння (2.1) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (2.2)$$

З'ясуємо методику інтегрування рівнянь в повних диференціалах. Якщо для рівняння (2.1) умова (2.2) виконується, то невідома функція $u(x,y)$ задовольняє рівностям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y); \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \qquad (2.4)$$

Інтегруючи рівність (2.3) за змінною x, визначимо функцію $u(x,y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = F(x,y) + \varphi(y), \qquad (2.5)$$

де $F(x,y)$ - первісна функція для $P(x,y)$ за змінною x. Диференціюючи рівність (2.5) за змінною y і враховуючи (2.4), дістаємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}=Q(x,y). \qquad (2.6)$$

Приклад. Проінтегрувати рівняння

$$(3y^2+2xy+2x)dx+(6xy+x^2+3)dy=0.$$

Розв'язання. У даному випадку:

$$P(x,y)=3y^2+2xy+2x,\ Q(x,y)=6xy+x^2+3.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6y+2x$, то дане рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y^2+2xy+2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=6xy+x^2+3.$$

Інтегруючи перше рівняння за змінною x (вважаючи змінну y сталою), маємо

$$u(x,y)+\varphi(y)=\int(3y^2+2xy+2x)dx+\varphi(y)=3xy^2+x^2y+x^2+\varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ - довільна диференційовна функція від y.

Диференціюючи останню рівність за змінною y повинні (дивись (2.6)) мати $Q(x,y)$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2+x^2y+x^2+\varphi(y))=6xy+x^2+\frac{d\varphi}{dy}=Q(x,y);$$ отже,

$6xy+x^2+\frac{d\varphi}{dy}=6xy+x^2+3$, або $\frac{d\varphi}{dy}=3$; звідки $\varphi(y)=3y+C_1$, тому

$$u(x,y)=3xy^2+x^2y+x^2+3y+C_1.$$

Загальний інтеграл заданого рівняння виражається рівністю

$$3xy^2+x^2y+x^2+3y=C.$$

Диференціальні рівняння вищих порядків:

- диференціальне рівняння $y^{(n)}=f(x)$. (2.7)

Це найпростіше диференціальне рівняння n-го порядку. Знайдемо загальний інтеграл цього рівняння.

Інтегруємо за змінною x обидві частини рівняння (2.7), маючи на увазі, що $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$, тобто: $y^{(n-1)}=\int\limits_{x_0}^{x}f(x)dx+C_1$,

де x_0 - довільне фіксоване значення x, а C_1 - стала інтегрування.

Інтегруємо ще раз: $y^{(n-2)}=\int\limits_{x_0}^{x}(\int\limits_{x_0}^{x}f(x)dx)dx+C_1(x-x_0)+C_2$.

Продовжуючи далі (після n інтегрувань), запишемо остаточно вираз загального інтегралу:

$$y=C_1(x-x_0)^{n-1}/(n-1)!+C_2(x-x_0)^{n-2}/(n-2)!+...+C_n.$$

Щоб знайти частинне рішення диференціального рівняння (1.7), яке задовольняє початковим умовам (тобто розв'язати задачу Коші):

$$y\big|_{x=x_0}y_0;\quad y'\big|_{x=x_0}=y_0',...,y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

достатньо взяти $C_n=y_0$, $C_{n-1}=y_0',...,C_1=y_0^{(n-1)}$.

Приклад. Знайти загальний і частинний розв'язок рівняння $y''=\sin kx$, який задовольняє початковим умовам (задача Коші):

$$y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=1.$$

Розв'язання. $y'=\int\limits_0^x\sin kxdx+C_1=-(\cos kx-1)/k+C_1$,

$$y=-\int\limits_0^x((\cos kx-1)/k)dx+\int\limits_0^x C_1dx+C_2\text{, або}$$

$$y=(-\sin kx)/k^2+x/k+C_1x+C_2.$$

Щоб знайти частинний розв'язок, достатньо визначити відповідні значення C_1 і C_2.

З умови $y\big|_{x=0}=0$ знаходимо $C_2=0$.

З умови $y'\big|_{x=0}=1$ знаходимо $C_1=1$.

Отже, шуканий частинний розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y=-\sin kx/k^2+x(1/k+1);$$

- диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку: $d^2y/dx^2=f(x,dy/dx)$; (2.8)

$$d^2y/dx^2=f(y,dy/dx). \qquad (2.9)$$

Рівняння (2.8) має вираз, який не містить явно шуканої функції *y*. Рівняння (2.9) має вираз, який не містить явно незалежної змінної *x*. Послідовність розв'язку таких рівнянь розглянемо на прикладах.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку

$$d^2y/dx^2=1/a\sqrt{1+(dy/dx)^2}\text{, де } a\neq0.$$

Розв'язання. Це рівняння першого типу (2.8). Позначимо похідну: $dy/dx = p$, де $p = p(x)$. Тоді $d^2y/dx^2 = dp/dx$.

Підставимо ці вирази у початкове диференціальне рівняння. Воно перетвориться на диференціальне рівняння першого порядку відносно $p(x)$: $dp/dx = 1/a\sqrt{1+p^2}$, це є рівняння з відокремлюваними змінними: $dp/\sqrt{1+p^2} = dx/a$. Проінтегруємо його $\int dp/\sqrt{1+p^2} = 1/a\int dx$.

Після інтегрування, маємо: $\ln|p+\sqrt{1+p^2}| = x/a + C_1$, або

$$p+\sqrt{1+p^2} = \exp(x/a+C_1); \quad \sqrt{1+p^2} = \exp(x/a+C_1) - p;$$

$$1+p^2 = \exp 2(x/a+C_1) - 2p\exp(x/a+C_1) + p^2.$$

Звідси $p = (\exp 2(x/a+C_1) - 1)/(2\exp(x/a+C_1))$, або

$$p = 1/2(\exp(x/a+C_1) - \exp(-x/a-C_1)).$$

Останній вираз визначає гіперболічний синус:

$$p = \mathrm{sh}(x/a+C_1).$$

Але $p = dy/dx$, знову маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, тобто $dy/dx = \mathrm{sh}(x/a+C_1)$,

після інтегрування якого остаточно знаходимо шукану функцію

$$y = a\,\mathrm{ch}(x/a+C_1) + C_2.$$

ЛЕКЦІЯ № 9

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку $y^3y'y''+1=0$. Знайти частинний розв'язок за початковими умовами: $y(1)=1$; $y'(1)=\sqrt[3]{1,5}$, тобто розв'язати задачу Коші.

Розв'язання. Це рівняння (не містить явно зміну x) типу (2.9). Позначимо похідну: $dy/dx = p$, де $p = p(y)$,

тоді $d^2y/dx^2 = dp/dx$ або $(dp/dy)\cdot(dy/dx) = p(dp/dy)$.

Підставимо ці вирази у початкове диференціальне рівняння. Воно перетвориться на диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними $y^3p^2dp/dy+1=0$; відокремлюємо змінні: $p^2dp = -y^{-3}dy$, інтегруємо $\int p^2dp = -\int y^{-3}dy$.

Після інтегрування маємо $p^3/3 = 0,5/y^2 + C_1$, або $p = \sqrt[3]{1,5/y^2+3C_1}$.

Оскільки $p = y' = dy/dx$, останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$y' = (1{,}5/y^2 + 3C_1)^{1/3}.$$

За початковими умовами: $x = 1$; $y'(1) = \sqrt[3]{1{,}5}$. Отже,

$$\sqrt[3]{1{,}5} = \sqrt[3]{1{,}5 + 3C_1}.\ \text{Звідки}\ C_1 = 0.$$

Таким чином, знову маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$y' = (1{,}5y^{-2})^{1/3},$$

яке розв'язуємо за відомим методом:

$$dy = (1{,}5)^{1/3} y^{-2/3} dx; \quad \int y^{2/3} dy = (1{,}5)^{1/3} \int dx;$$

$$y^{2/3+1}/(2/3+1) = (1{,}5)^{1/3} x + C; \quad 3/5y^{5/3} = \sqrt[3]{1{,}5}x + C.$$

Довільну сталу C знаходимо за початковими умовами: $x = 1$; $y(1) = 1$. Отже, $3/5 = \sqrt[3]{1{,}5} + C$. Звідки $C = 3/5 - \sqrt[3]{1{,}5}$.

Остаточно маємо частинне рішення даного диференціального рівняння, яке відповідає початковим умовам, тобто розв'язали задачу Коші: $3/5y^{5/3} = (1{,}5)^{1/3}x + 3/5 - (1{,}5)^{1/3}$.

<u>Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами</u>:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{2.10}$$

де $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 - дійсні числа.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння є однорідним, а якщо $f(x) \neq 0$ - неоднорідним.

<u>Визначення.</u> Загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{2.11}$$

є функція $y = F(x, C_1, C_2)$, яка залежить від двох довільних сталих C_1 і C_2, і перетворює рівняння у тотожність при будь-яких значеннях цих сталих.

Розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння (1.11) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$.

Підставимо у рівняння (2.11): $y = e^{kx}$; $y' = ke^{kx}$ і $y'' = k^2 e^{kx}$. Дістанемо $(a_0 k^2 + a_1 k + a_2)e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{2.12}$$

Останнє рівняння називають характеристичним. Здобудемо його корені: $k_{1,2} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\right) / (2a_0)$.

Будь-яка функція $y_i = e^{k_i x}$, де k_i - корінь характеристичного рівняння (2.12), є розв'язком однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.11) залежить від дискримінанта $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ його характеристичного рівняння і записується таким чином:

якщо $D > 0$, то $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, де $k_1 \neq k_2$; k_1 і k_2 є R;

якщо $D = 0$, то $y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$, де $k_1 = k_2 = k$; k є R;

якщо $D < 0$, то $y = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)e^{\alpha x}$, де $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексні числа; α і β є R.

Приклад. Розв'язати рівняння:

1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 3) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання: 1) Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корені цього рівняння: $k_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1+8})/2$, $k_1 = 1$ і $k_2 = -2$.

Загальний розв'язок: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$;

2) Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 - 4k + 4 = 0, \text{ або } (k-2)^2 = 0.$$

Корені цього рівняння: $k_1 = k_2 = 2$.

Загальний розв'язок: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$;

3) Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Корені цього рівняння: $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$.

Загальний розв'язок: $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}$.

Приклад. Знайти загальний і частинний розв'язок (задача Коші) диференціального рівняння $y'' + 9y = 0$, який задовольняє початковим умовам:

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 3.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 9 = 0$. Знайдемо його корені: $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$. Запишемо загальний інтеграл: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. Далі будемо шукати його частинний розв'язок. Попередньо знайдемо похідну від загального рішення:

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x.$$

Сталі C_1 і C_2 визначаємо з системи рівнянь, яку формуємо шляхом підстановки початкових умов у загальний інтеграл і похідну від нього:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0; \\ 3 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0; \\ 3 = 3C_2;\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок даного диференціального рівняння (рішення задачі Коші) має вигляд: $y = \sin 3x$.

<u>Визначення.</u> Загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами (1.10) є сума будь-якого частинного розв'язку цього рівняння y^* і загального розв'язку $\overline{y}$ відповідного однорідного диференціального рівняння (1.11). Отже, $y = \overline{y} + y^*$ є загальним розв'язком диференціального рівняння (1.10).

Розглянемо такі неоднорідні рівняння, де

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}; \tag{2.13}$$

$$f(x) = (P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}. \tag{2.14}$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ є многочлени n - го і m- го степеня. Розглянемо (2.13).

Можливі такі частинні випадки:

а) число α не є коренем характеристичного рівняння (2.12). Тоді $y^* = R_n(x)e^{\alpha x}$, де $R_n(x)$ - многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами;

б) число α є однократним коренем характеристичного рівняння (2.12). Тоді $y^* = xR_n(x)e^{\alpha x}$;

в) число α є двократним коренем характеристичного рівняння (2.12). Тоді $y^* = x^2R_n(x)e^{\alpha x}$.

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = (10x - 7)e^x.$$

<u>Розв'язання</u>. Знайдемо загальний розв’язок $\overline{y}$ однорідного диференціального рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$. Складемо і розв’яжемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 7k + 6 = 0$; $k_1 = 1,\ k_2 = 6$. Отже, $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{6x}$. Тепер розглянемо початкове неоднорідне рівняння. Тут праворуч $f(x) = P_n(x)e^{1x}$. Число $\alpha = 1$ є коренем характеристичного рівняння і частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$y^* = x(Ax+B)e^x$, або $y^* = (Ax^2 + Bx)e^x$, що відповідає випадку б).

Знайдемо: $(y^*)' = (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x$;

$(y^*)'' = (Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)e^x$ і підставимо їх у початкове рівняння:

$$((Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) +$$
$$+6(x^2A + Bx))e^x = (10x - 7)e^x.$$

Після тотожних перетворень частини, яка стоїть ліворуч, і враховуючи, що $e^x \neq 0$, маємо: $-10Ax - 5B + 2A = 10x - 7$.

Складаємо систему лінійних рівнянь з тотожності многочленів:

$$\begin{cases} -10A = 10; \\ -5B + 2A = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1; \\ -5B - 2 = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1; \\ B = 1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд: $y^* = (-x+1)xe^x$.

Остаточно записуємо загальний розв'язок у вигляді: $y = \overline{y} + y_2^*$.

Тобто $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + x(1-x)e^x$.

ЛЕКЦІЯ № 10

Розглянемо (2.14). Можливі такі частинні випадки:

а) якщо число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y^* = (u(x)\cos\beta x + \upsilon(x)\sin\beta x)e^{\alpha x},$$

де $u(x)$ і $\upsilon(x)$ – повні многочлени з невідомими коефіцієнтами (містять всі степені x) степінь яких дорівнює найвищому степеню многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$;

б) якщо число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y^* = x(u(x)\cos\beta x + \upsilon(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

Зауваження. Частинний розв'язок y^* не змінює своєї форми, коли $f(x)$ має вигляд: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ або $f(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Якщо: $P_n(x) = M$, $Q_m(x) = N$ і $\alpha = 0$, $(M \text{ i } N \in R)$,

то частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$,

коли βi не є коренем характеристичного рівняння і $y^* = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, коли βi є коренем характеристичного рівняння. Тут A і B невідомі числа (коефіцієнти).

Приклад. Розв'язати рівняння $y''+y=25(x-1)e^{x}\cos x$.

Розв'язання. Розглянемо однорідне диференціальне рівняння $y''+y=0$. Його характеристичне рівняння $k^2+1=0$: $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Отже: $\beta = 1$; $\alpha = 0$. Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y''+y=0$, має вигляд

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^{*}=e^{x}((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x).$$

Знайдемо $(y^{*})'$ і $(y^{*})''$

$$(y^{*})'=e^{x}(((A+C)x+A+B+D)\cos x+(C+D-B+(C-A)x)\sin x);$$

$$(y^{*})''=2e^{x}(Cx+A+C+D)\cos x+(C-B-A-Ax)\sin x).$$

Підставимо ці вирази у початкове рівняння:

$$2e^{x}((Cx+A+C+D)\cos x+(C-Ax-B-A)\sin x)+$$

$$+e^{x}(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)=25(x-1)e^{x}\cos x. \quad e^{x}\neq 0.$$

З умови рівності коефіцієнтів, які відповідають $\cos x$ і $\sin x$ ліворуч і праворуч отриманої тотожності, маємо:

$$2(Cx+A+C+D)+(Ax+B)=25x-25;$$

$$2(C-Ax-B-A)+(Cx+D)=0.$$

Звідси (з рівності коефіцієнтів при відповідних степенях невідомого x), складаємо систему чотирьох рівнянь з чотирма шуканими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} 2C+A=25, \\ 2A+2C+2D+B=-25, \\ -2A+C=0, \\ 2C-2B-2A+D=0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \begin{cases} A+2C=25, \\ -2A+C=0 \Rightarrow A=5, C=10. \end{cases} \\ \begin{cases} 2B-D=10, \\ B+2D=-55 \Rightarrow B=-7, D=-24. \end{cases} \end{matrix}$$

Систему розв'язуємо за методом алгебраїчного складання.

Отже, $A = 5$, $B = -7$, $C = 10$, $D = -24$. Знайдений частинний розв'язок має вигляд: $y^{*}=e^{x}((5x-7)\cos x+(10x-24)\sin x)$.

Остаточно запишемо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{x}((5x-7)\cos x+(10x-24)\sin x).$$

Зауваження. Якщо зустрілося диференціальне рівняння типу

(2.10), яке не підпадає під розглянуті (2.13) або (2.14), то треба застосувати метод варіації довільних сталих.

<u>Метод варіації довільних сталих</u>. Нехай $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (2.11), відповідного неоднорідному диференціальному рівнянню (2.10).

Розглянемо функцію $y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$, (2.15)

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ невідомі функції від незалежної змінної, якими замінено C_1 і C_2 у загальному розв'язку $\overline{y}$. Метод варіації довільних сталих полягає у підборі в (2.15) невідомих функцій так, щоб $y(x)$ була розв'язком рівняння (2.10). Для цього знайдемо похідну: $y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x)$

і накладемо на $C_1(x)$ і $C_2(x)$ таку умову, щоб

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 . \qquad (2.16)$$

З урахуванням (2.16) $y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$.

Останню рівність диференціюємо: $y'' = C_1'(x) y_1'(x) +$
$+ C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x)$.

Вирази $y(x)$, $y'(x)$ і $y''(x)$ підставимо у (2.10):

$$C_1(x)\left(a_0 y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_2 y_1(x)\right) +$$
$$+ C_2(x)\left(a_0 y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_2 y_2(x)\right) +$$
$$+ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) .$$

Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є рішеннями однорідного диференціального рівняння (2.11), то з останнього маємо:

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) . \qquad (2.17)$$

Рівняння (2.16) і (2.17) об'єднуємо в систему двох рівнянь з двома невідомими: $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Після розв'язання системи отримаємо: $C_1'(x) = \varphi(x)$; $C_2'(x) = \psi(x)$, це диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Отже, $C_1(x) = \int \varphi(x) dx + C_1^*$, $C_2(x) = \int \psi(x) dx + C_2^*$.

Рішення (2.15) набере вигляду:

$$y(x) = y_1(x) \int \varphi(x) dx + y_2(x) \int \psi(x) dx + C_1^* y_1(x) + C_2^* y_2(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) .$$

Зірку до констант можна не писати, тобто , тут $\overline{y}(x)$ співпадає з загальним рішенням рівняння (2.11).

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку: $y''+4y=\cos^{-1}2x$.

<u>Розв'язок</u>. $y''+4y=0$; $k^2+4=0$; $k_{1,2}=\pm 2i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\overline{y}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x.$$

Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y=C_1(x)\sin 2x+C_2(x)\cos 2x$.

Для знаходження $C_1(x)$ і $C_2(x)$ за викладеною вище методикою складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin 2x+C_2'(x)\cos 2x=0, \\ C_1'(x)(\sin 2x)'+C_2'(x)(\cos 2x)'=\cos^{-1}2x. \end{cases}$$

Після диференціювання:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin 2x+C_2'(x)\cos 2x=0, \\ 2C_1'(x)\cos 2x-2C_2'(x)\sin 2x=\cos^{-1}2x. \end{cases}$$

Визначник цієї системи: $\Delta=\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}=-2$.

Тобто $\Delta\neq 0$. Система має єдиний розв'язок: $C_1'(x)=\dfrac{1}{2}$; $C_2'(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}2x$. Інтегруючи останнє, маємо: $C_1(x)=\int\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{x}{2}+C_1$; $C_2(x)=-\dfrac{1}{2}\int \mathrm{tg}2x dx=\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C_2$.

Отже, $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|$ – шуканий загальний розв'язок даного рівняння.

<u>Зауваження</u>. Метод варіації довільних сталих можна застосовувати для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, коли a_0, a_1 і a_2 є функціями від незалежної змінної.

<u>Система диференціальних рівнянь</u>. У багатьох науково-технічних задачах буває потрібно знати не одну, а відразу кілька невідомих функцій, які пов'язані між собою кількома

диференціальними рівняннями. Їх сукупність і утворює систему диференціальних рівнянь.

Розглянемо найпростішу нормальну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2). \end{cases}$$

Тут змінні x_1, x_2 є функціями від незалежної змінної t.

Для інтегрування системи застосуємо метод виключення змінної. Розглянемо це на прикладі.

Приклад. Розв'язати нормальну систему рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = -7x + y; \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 5y.$$

Розв'язання. Продиференціюємо за змінного t перше рівняння:

$$x'' = -7x' + y'.$$

Підставимо в це рівняння значення похідної y' із другого рівняння:

$$x'' = -7x' + (-2x - 5y).$$

Знайшовши з першого рівняння значення $y = x' + 7x$ і підставивши його в останнє рівняння, дістанемо: $x'' + 12x' + 37x = 0$.

Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $k^2 + 12k + 37 = 0$ має комплексно-спряжені корені: $k_{1,2} = -6 \pm i$.

Загальне рішення має вигляд: $x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$.

Оскільки $y = x' + 7x$, то $y = (e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t))' +$

$+ 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t)$.

Загальний розв'язок даної системи:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$

$$y = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t).$$

Для системи диференціальних рівнянь можна також розв'язувати задачу Коші. Тобто знаходити її частинний розв'язок за даними початковими умовами.

Зауваження. Тема диференціальних рівнянь не обмежується розглянутим вище. Ми її тільки злегка доторкнулися.

ЛЕКЦІЯ № 11

Комплексні числа. Один із способів побудови множини комплексних чисел полягає в тому, що множину дійсних чисел розширюють приєднанням до множини дійсних чисел нового числового об'єкта – кореня рівняння

$$x^2 + 1 = 0 .$$

Добута "розширена" множина має назву множина комплексних чисел.

<u>Аксіоматична побудова множини комплексних чисел.</u>

Комплексні числа не є числами в елементарному значенні цього слова, що застосовуються при підрахунках і вимірюваннях, а є математичними об'єктами, які визначаються поданими нижче властивостями.

Комплексне число позначають символом $a + bi$, де a і b - дійсні числа, які називають його дійсною і уявною частинами і позначають $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{i}m\ z$ відповідно, а символ i, визначений умовою $i^2 = -1$, називають уявною одиницею.

Звичайно комплексне число найчастіше позначають однією буквою: $z = a + bi$.

Комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються рівними, якщо рівні їхні дійсні $a_1 = a_2$ й уявні частини $b_1 = b_2$. Комплексне число $z = a + bi$ вважається рівним нулю, якщо його дійсна і уявна частини дорівнюють нулю ($a = b = 0$). Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ вважається таким, що збігається з дійсним числом a ($a + 0i = a$),а при $a = 0$ вважається суто уявним і позначається bi ($0 + bi = bi$).

<u>Сумою</u> комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є комплексне число z, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина - сумі уявних частин, тобто

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i .$$

Про число z кажуть, що його одержали внаслідок додавання комплексних чисел z_1, і z_2, і записують $z = z_1 + z_2$. Числа z_1 і z_2 називають доданками.

<u>Властивості операції додавання комплексних чисел:</u>

1) асоціативність: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

2) комутативність: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Комплексне число $-a - bi$ називається протилежним комплексному числу $a + bi$. Комплексне число, протилежне комплексному числу z, позначається $-z$. Сума комплексних чисел z і

$-z$ дорівнює нулю $(z+(-z)=0)$.

<u>Різниця</u> комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є комплексне число z таке, що утворено сумою числа z_1 і числа протилежного z_2:

$$z = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

тобто комплексним числом, дійсна і уявна частини якого дорівнюють відповідно різниці дійсних і уявних частин зменшуваного і від'ємника. Про число z кажуть, що його дістали внаслідок віднімання комплексного числа z_2 від комплексного числа z_1, і записують $z = z_1 - z_2$.

<u>Добутком</u> комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є комплексне число:

$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 +_1 a_2 b_1)i.$$

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок множення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують $z = z_1 z_2$. Числа z_1 і z_2 називають співмножниками.

<u>Властивості операції множення комплексних чисел:</u>

1) асоціативність: $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$;

2) комутативність: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

3) додавання і множення комплексних чисел зв'язані правилом, яке називається законом дистрибутивності множення відносно додавання: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

<u>Часткою</u> двох комплексних чисел z_1 і z_2 $(z_2 \neq 0)$ є таке комплексне число z, що $z_1 = z z_2$. Частку комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ обчислюють за формулою

$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2)/(a_2^2 + b_2^2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i/(a_2^2 + b_2^2).$$

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують $z = z_1 / z_2$.

Число $\sqrt{a^2 + b^2}$ називають <u>модулем</u> комплексного числа $z = a + bi$ і позначають $|z|$. Модулі двох будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 (для частки вважається, що $z_2 \neq 0$) задовольняють співвідношення

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, \quad |z^n| = |\bar{z}^n| = |\bar{z}|^n.$$

Комплексне число $a - bi$ називають комплексно спряженим з числом $z = a + bi$ і позначають $\bar{z}$.

Геометричне зображення комплексного числа. Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Можливість такого зображення ґрунтується на ототожненні множини комплексних чисел $a + bi$ на множині пар дійсних чисел (a,b), які в прямокутній системі координат Oxy можна трактувати як координати точок площини.

Далі, з кожною точкою A координатної площини Oxy можна зв'язати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці A.

Тобто кожне комплексне число $a + bi$ можна геометрично інтерпретувати як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами $(a;b)$ (рис.2.2). Координати вектора $\overrightarrow{OA}$ при цьому будуть такими ж, як і координати точки A, а саме $(a;b)$.

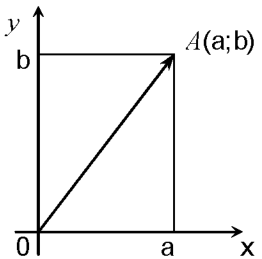


Рис. 2.2

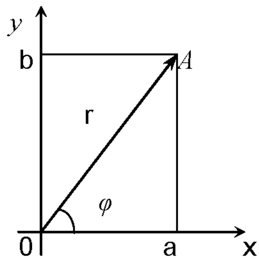


Рис. 2.3

Тригонометрична форма запису комплексного числа. Крім алгебраїчної форми запису комплексного числа застосовують також іншу, яка називається тригонометричною. Нехай комплексне число $z = a + bi \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами $(a;b)$ (рис. 2.3). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ буквою r: $r = |\overrightarrow{OA}|$,

а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox, - через φ (кут φ вважається виміряним у радіанах). Скориставшись визначеннями функцій $\sin\varphi = b/r$, $\cos\varphi = a/r$, комплексне число $z = a + bi$ можна записати у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.18}$$

де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут φ визначається з умов:

$$\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}; \quad \cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}; \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{2.19}$$

Вираз (2.18) має назву тригонометрична форма запису комплексного числа. Дійсне число r є модулем комплексного числа і позначається $|z|$, а кут φ, виміряний в радіанах, - його аргументом і позначається $Argz$.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його додатний; якщо ж $z = 0$, тобто $a = b = 0$, то й модуль його дорівнює нулю. Модуль будь-якого комплексного числа визначено однозначно.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (2.19) з точністю до кута, кратного 2π. Якщо $z = 0$, то $r = 0$ і аргумент комплексного числа, що дорівнює нулю, не визначено.

Звичайно для того, щоб уникнути неоднозначності, яка виникає при обчисленні аргументу комплексного числа, використовують поняття головного значення аргументу комплексного числа (позначення $\arg z$), вважаючи, що $\arg z \in (-\pi; \pi]$. Аргумент комплексного числа відповідає співвідношенню: $Argz = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$ (Z – множина цілих чисел).

Нехай z_1 і z_2 - два комплексні числа, що відмінні від нуля, записано в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

<u>Добутком</u> двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент - сумі аргументів співмножників:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

<u>Часткою</u> двох комплексних чисел z_1 і z_2, що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент – різниці їх аргументів:

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

<u>Натуральний степінь комплексного числа.</u> Степенем n комплексного числа z називається комплексне число w, знайдене внаслідок множення числа z самого на себе n разів: $w = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = z^n$.

За формулою Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

<u>Корінь n -го степеня з комплексного числа</u>. Коренем n -го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число w, n -й степінь якого дорівнює z: $w^n = z$.

Корінь n -го степеня з комплексного числа z позначається символом $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня з дійсного числа, корінь n - го степеня з комплексного числа визначається неоднозначно. Саме в множині комплексних чисел існує рівно n коренів n -го степеня з даного комплексного числа.

Усі корені n -го степеня з комплексного числа z, даного в тригонометричній формі, обчислюють за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos(\varphi + 2\pi k)/n + i\sin(\varphi + 2\pi k)/n),$$

де $k = 0,1,2,...,n-1$.

Геометрично всі корені n -го степеня з комплексного числа z зображуються точками, що лежать на колі з центром в початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнюють $2\pi/n$.

<u>Приклад.</u> Обчислити корені четвертого степеня з числа (–1).

<u>Розв'язання</u>. Число (–1) у тригонометричній формі можна записати так:

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Корені четвертого степеня з числа (–1) - це комплексні числа:

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}(\cos(\pi + 2\pi k)/4 + i\sin(\pi + 2\pi k)/4),$$

де $k = 0,1,2,3$. Тобто це комплексні числа :

$z_1 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2(1+i)$;

$z_2 = \cos(3p/4) + i\sin(3p/4) = \sqrt{2}/2(-1+i)$;

$z_3 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = \sqrt{2}/2(-1-i)$;

$z_4 = \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \sqrt{2}/2(1-i)$, які зображено на рис.2.4.

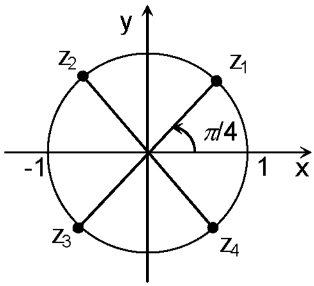


Рис. 2.4

Аналогічно у множині комплексних чисел можна обчислити корінь n-го степеня з будь-якого дійсного числа. При цьому хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

ТЕМА 3. *ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ*

ЛЕКЦІЯ № 12

У різних розділах математики, фізики та інших областях науки є співвідношення, у складі яких кілька змінних величин. Наприклад, об'єм циліндра обчислюють за формулою: $V = \pi R^2 \cdot H$, де R - радіус основи циліндра, H - його висота. Ця формула дає приклад числової функції двох змінних - радіуса основи і висоти циліндра.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда з ребрами, довжина яких дорівнюю: x, y і z, обчислюється за формулою $V = xyz$. Тут маємо функцію трьох змінних.

<u>Визначення функції двох незалежних змінних</u>. Змінна z є числовою функцією двох незалежних змінних x і y, заданою на множині впорядкованих пар чисел D, якщо кожній впорядкованій парі чисел $(x;y) \in D$ за деяким правилом (законом) ставиться у відповідність одне певне значення змінної z. Тобто $z = f(x,y)$.

Множина D впорядкованих пар чисел $(x;y)$ є областю визначення функції z, а множина усіх можливих значень змінної z є множиною значень функції.

Якщо для числової функції однієї змінної областю визначення є множина точок числової осі, то область визначення функції двох змінних є деяка множина точок числової площини.

Подібно до того як функцію $y = f(x)$ геометрично подавали власним графіком у прямокутній системі координат Oxy, функція двох змінних $z = f(x,y)$ у прямокутній просторовій системі координат $Oxyz$ задає множину точок, яка є своєрідним просторовим графіком функції $z = f(x,y)$, який звичайно називають поверхнею, а рівність $z = f(x,y)$ або $F(x,y,z) = 0$ - рівнянням поверхні.

Поверхні. Найпростішим прикладом поверхні є площина, яка в прямокутній просторовій системі координат визначається рівнянням: $Ax + By + Cz + D = 0$ де $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$. Ця поверхня розглянута в темі: «Аналітична геометрія у просторі».

Нижче розглянемо основні поверхні другого порядку, які найчастіше зустрічаються у різних практичних задачах фізики, механіки, архітектури та інших галузях науки і техніки.

<u>Визначення поверхні другого порядку.</u> Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

де принаймні один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля.

Поверхня другого порядку як геометричний об'єкт не змінюється, якщо від заданої прямокутної системи координат перейти до іншої.

Існує система координат, в якій загальне рівняння поверхні другого порядку має найпростіший (канонічний) вигляд.

До поверхонь другого порядку належать: циліндричні й конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

Циліндричні поверхні. Циліндричною поверхнею називають поверхню σ, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну) і паралельні заданій прямій.

Нехай задано рівняння $f(x, y) = 0$, яке в площині Oxy визначає деяку лінію L. Дане рівняння задовольняють також координати всіх тих точок простору, в яких дві перші координати x і y збігаються з координатами будь-якої точки лінії L, а третя координата z - довільна, тобто тих точок простору, які проектуються на площину Oxy в точки лінії L.

Всі такі точки лежать на прямій l, яка паралельна осі Oz і перетинає лінію L. Сукупність таких прямих і є циліндричною поверхнею σ.

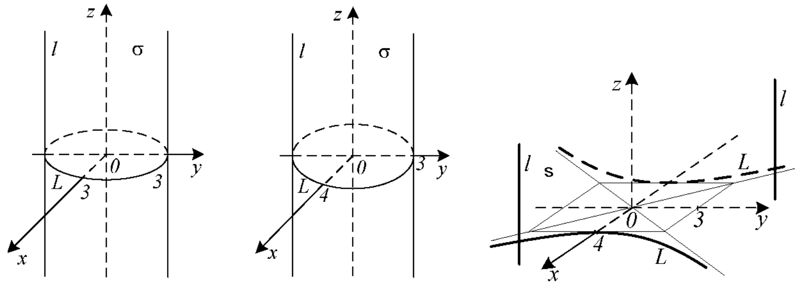
Якщо точка не лежить на поверхні σ, то вона не може проектуватися в точку лінії L, тобто координати такої точки рівняння $f(x, y) = 0$ не задовольняють.

Аналогічно рівняння $f(x, z) = 0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні вісі Oy; рівняння $f(y, z) = 0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Ox.

Приклади:

– поверхня σ, яка визначається рівнянням $x^2 + y^2 = 9$, є циліндричною і називається прямим круговим циліндром (рис. 3.1, а). Її твірні паралельні осі Oz, а напрямною лінією L в площині Oxy є коло;
– поверхня, яка визначається рівнянням $x^2 / 16 + y^2 / 9 = 1$ (лінія L), є циліндричною і називається еліптичним циліндром (рис. 3.1, б);

– поверхня, яка визначається рівнянням $x^2/16 - y^2/9 = 1$ (лінія L), називається гіперболічним циліндром (рис. 3.1, в).



а б в

Рис. 3.1

<u>Поверхні обертання</u>. Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої L навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої L, називають поверхнею обертання.

Щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити без зміни координату, яка відповідає осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий із знаком „плюс” або „мінус”.

<u>Приклад</u>. Знайти рівняння поверхні обертання еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$, $z = 0$ навколо осі Ox.

<u>Розв’язання</u>. У рівнянні еліпса треба залишити без зміни координату x, а замість координати y підставити в рівняння $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$:

$$x^2 + 4(y^2 + z^2) = 4 \text{ або } x^2/4 + y^2 + z^2 = 1.$$

Отримали еліпсоїд обертання.

<u>Конічні поверхні.</u> Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L. При цьому лінія L називається напрямною конічної поверхні; точка P – її вершиною; кожна з прямих l, які утворюють конічну поверхню, – твірною.

<u>Приклад</u>. Рівняння конічної поверхні (рис. 3.2), вершиною якої є точка O (0; 0; 0), а напрямною лінією L є еліпс $x^2/9 + z^2/4 = 1$, $y = 5$, має вигляд $x^2/9 + z^2/4 - y^2/25 = 0$.

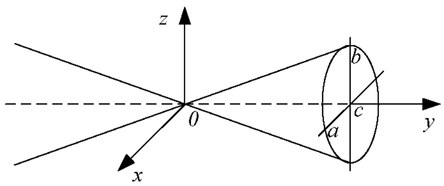


Рис. 3.2

<u>Сфера.</u> Сферою називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яку називають центром. Відрізок, що сполучає центр сфери з її довільною точкою, називається радіусом сфери.

<u>Еліпсоїд.</u> Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається канонічним рівнянням

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 + z^2 / c^2 = 1 .$$

Величини a, b, c називаються півосями еліпсоїда (рис. 3.3). Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то триосний еліпсоїд перетворюється в еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, – у сферу.

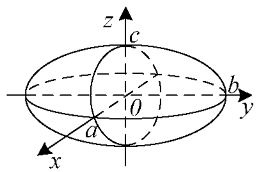


Рис. 3.3

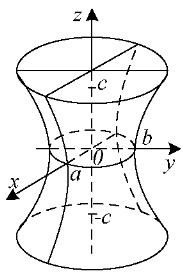


Рис. 3.4

<u>Однопорожнинний гіперболоїд.</u> Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається канонічним рівнянням

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 - z^2 / c^2 = 1 .$$

Величини a, b, c називаються його півосями (рис. 3.4).

<u>Двопорожнинний гіперболоїд.</u> Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається канонічним рівнянням

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 - z^2 / c^2 = -1 .$$

Величини a, b, c називаються його півосями (рис. 3.5).

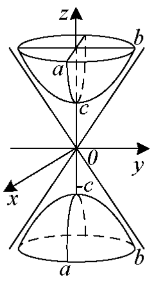


Рис. 3.5

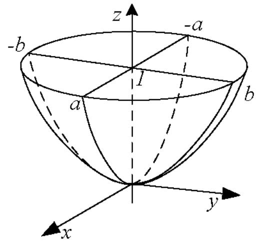


Рис. 3.6

Еліптичний параболоїд. Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається канонічним рівнянням

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = z .$$

Величини a і b називаються його півосями (рис. 3.6).

Гіперболічний параболоїд. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається канонічним рівнянням

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = z .$$

Ця поверхня має форму сідла (рис. 3.7). Величини a і b називаються його півосями.

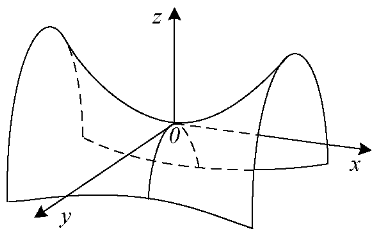


Рис. 3.7

Лінійчасті поверхні. Поверхні, твірні яких є прямі лінії, називаються лінійчастими. Такими поверхнями є циліндричні, конічні, однопорожнинні гіперболоїди й гіперболічні параболоїди.

ЛЕКЦІЯ № 13

Вище було розглянуто декілька поверхонь другого порядку. Усі вони є функціями двох незалежних змінних. Перейдемо до їх дослідження методами диференціального числення.

Основні поняття теорії функцій однієї змінної - такі, як границя функції, неперервність функції, диференційованість і ін.: - узагальнюються для функцій двох і більшого числа незалежних змінних.

Границя і неперервність функцій двох незалежних змінних. У прямокутній системі координат Oxy впорядкована пара чисел $(x;y)$ визначає точку. Множину усіх точок площини, координати яких $(x;y)$ задовольняють нерівність: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$ (3.1)

називають відкритим колом.

Множину усіх точок площини, координати яких задовольняють нерівність: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2$ (3.2)

називають ε- околом точки $M_0(x_0;y_0)$. Відстань будь-якої точки з ε - околу до точки $M_0(x_0;y_0)$ менша від $\varepsilon>0$.

Нехай D - деяка множина точок координатної площини Oxy. Точку $M_0(x_0;y_0)$ називають внутрішньою точкою цієї множини, якщо вона належить множині D разом з її ε - околом. Множину, яка складається тільки з внутрішніх точок, називають *відкритою областю*.

Точку $M_0(x_0;y_0)$ називають точкою згущення множини D, якщо в кожному її ε - околі міститься хоча б одна точка множини D, відмінна від точки M_0. Точки згущення відкритої області, які не належать їй, називаються межовими точками цієї області. Множина усіх межових точок області D утворює межу області.

Відкриту область разом з своєю межею називають *замкненою областю*. Так, межею відкритої області (3.1) є коло $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Нехай z = f(x,y) - деяка функція двох незалежних змінних, визначена на відкритій області D, і M(a,b) - точка цієї області.

Кажуть, що функція f(x,y) має границею число A, коли змінні x і y прямують відповідно до чисел a і b, якщо для будь-якого скільки завгодно малого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що нерівність $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ виконується для всіх значень x і y, які належать D і задовольняють нерівностям: $0<|x-a|<\delta$; $0<|y-b|<\delta$.

Кажуть, що функція f(x,y) неперервна у точці M (a,b), якщо виконується нерівність

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = f(a,b) \text{ або } \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b).$$

У іншому випадку кажуть, що функція f(x,y) у точці M має розрив.

<u>Приклад</u>. Функція $z = x^2 + y^2$ - неперервна у будь-якій області площини Oxy.

<u>Приклад.</u> Функція $z = (2y)/(x^2 + y^2)$ визначена усюди, крім точки $x = 0$; $y = 0$. У цій точці вона має розрив.

Розглянемо без доведення деякі важливі властивості функції двох змінних, неперервної у замкненій скінченній області. Ці властивості аналогічні властивостям неперервної на відрізку функції однієї змінної.

<u>Властивість 1</u>. Якщо функція $z = f(x,y)$ визначена і неперервна у замкненій скінченній області D, то знайдеться хоча б одна точка $N(x_0,y_0) \in D$ така, що для усіх інших точок області буде виконуватись нерівність: $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ і хоча б одна точка $P(x_1,y_1) \in D$ така, що для усіх інших точок області буде виконуватись нерівність $f(x_1,y_1) \leq f(x,y)$.

Значення функції $f(x_0,y_0) = M$ є найбільшим, а значення $f(x_1,y_1) = m$ - найменшим значенням функції f(x,y) у області D.

<u>Властивість 2</u>. Якщо функція f(x,y) неперервна у замкненій скінченній області D, а M і m - найбільше і найменше значення функції f(x,y) у цій області, то для будь-якого числа μ, яке $m < \mu < M$, знайдеться така точка $N^*(x^*,y^*) \in D$, що буде виконуватися рівність $f(x^*,y^*) = \mu$.

<u>Частинна похідна.</u> Нехай $z = f(x,y)$ - деяка функція двох змінних, визначена у відкритій області D, і нехай точка $M(x_0;y_0) \in D$ (рис. 2.8). Розглянемо лінію PS перетину поверхні $z = f(x,y)$ площиною $y = y_0$, яка паралельна площині Oxz. Оскільки у цій площині y має стале значення, то z вздовж кривої PS буде змінюватися від зміни x. Дамо незалежній змінній x приріст Δx; тоді z матиме приріст, який звуть частинним приростом z по x і позначають через $\Delta_x z$ (на рис. 2.8 це відрізок SS_1), так що: $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$. (3.3)

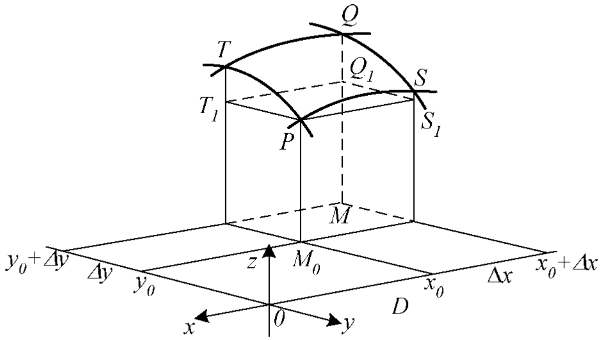


Рис. 3.8

Аналогічно, якщо x має стале значення, а y одержує приріст Δy ,то z матиме приріст, який називають частинним приростом z по y і позначають через $\Delta_y z$ (на рис.3.8 це відрізок TT_1):

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (3.4)$$

Приріст $\Delta_x z$ функція одержує "вздовж лінії" перетину поверхні $z = f(x,y)$ з площиною $x = x_0$, яка паралельна площині Oyz.

Якщо одночасно дамо аргументу x приріст Δx , а аргументу y приріст Δy , то z матиме приріст Δz, який називають повним приростом функції z:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (3.5)$$

На рис.3.8 це відрізок QQ_1. Треба зауважити, що, взагалі кажучи, повний приріст не дорівнює сумі частинних приростів, тобто $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Приклад. $z = xy$. Тут: $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x$,
$\Delta_y z = (y + \Delta y)x - xy = x\Delta y$, $\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$.

Якщо $x = 1$; $y = 2$; $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta y = 0{,}3$. Маємо: $\Delta z_x = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$; $\Delta_y z = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$; $\Delta x \cdot \Delta y = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$. $\Delta z = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}06 = 0{,}76$.

Тобто: $\Delta_x z = 0{,}4$; $\Delta_y z = 0{,}3$; $\Delta z = 0{,}76$, але $\Delta_x z + \Delta_y z = 0{,}7$.

Аналогічним чином визначають частинні й повні прирости функцій будь-якого числа змінних.

Складемо відношення $\Delta_x z$ до Δx , яке при фіксованих x_0 і y_0 є функцією приросту Δx. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0))/\Delta x,$$

то кажуть, що функція f(x,y) має частинну похідну за незалежною змінною x в точці $M\ (x_0,y_0)$, і записують $f'_x(x_0,y_0)$, або $z'_x\big|_M$, або $\partial z/\partial x\big|_M$, або $\partial f(x_0,y_0)/\partial x$.

Аналогічно, припустивши що $x = x_0$, можна розглянути границю

$$\lim_{\Delta y\to 0}(f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0))/\Delta y.$$

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція f(x,y) має частинну похідну за незалежною змінною y в точці $M\ (x_0,y_0)$. Цю частинну похідну позначають $f'_y(x_0,y_0)$, або $z'_y\big|_M$, або $\partial z/\partial y\big|_M$, або $\partial f(x_0,y_0)/\partial y$.

Кажуть, що функція має частинну похідну у відкритій області D, якщо вона має частинну похідну в кожній точці цієї області.

Частинну похідну функції трьох і більшого числа змінних обчислюють за тими самими правилами, що й звичайну похідну.

<u>Приклад.</u> Знайти $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, якщо $z=x^y\,(x>0)$.

<u>Розв'язання</u>. Частинну похідну за змінною x цієї функції обчислюють при y = const, тобто вона є похідною степеневої функції: $\partial z/\partial x = yx^{y-1}$.

Частинну похідну за змінною y цієї функції обчислюють при x = const, тобто вона є похідною показникової функції $\partial z/\partial y = x^y\cdot\ln x$.

<u>Повний диференціал</u>. З визначення повного приросту функції z = f(x,y) у точці $M_0(x_0,y_0)$ (3.5) маємо

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y). \tag{3.6}$$

Припустимо, що f(x,y) у довільній точці N (x,y), яка належить області D, має неперервні частинні похідні. З'ясуємо, який вираз має Δz через частинні похідні. Для цього у правій частині (3.6) додамо і віднімемо f(x,y + Δy):

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+$$
$$+(f(x,y+\Delta y)-f(x,y). \tag{3.7}$$

Вираз f(x,y + Δy) - f(x,y)) можна розглядати як різницю двох значень функції однієї змінної y (значення x залишається сталим). Застосовуючи до цієї різниці теорему Лагранжа, маємо

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y\,\partial f(x,y_1)/\partial y, \tag{3.8}$$

де y_1 розташовано між y і $y+\Delta y$. Так само

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\Delta x\partial f(x_1,y+\Delta y)/\partial x, \qquad (3.9)$$

де x_1 розташовано між x і $x+\Delta x$.

Одержані вирази (3.8) і (3.9) підставимо у (3.7), матимемо

$$\Delta z=\Delta x\partial f(x_1,y+\Delta y)/\partial x+\Delta y\partial f(x,y_1)/\partial y. \qquad (3.10)$$

За припущенням, що частинні похідні існують і неперервні, маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\partial f(x_1,y+\Delta y)/\partial x=\partial f(x,y)/\partial x, \qquad (3.11)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\partial f(x,y_1)/\partial y=\partial f(x,y)/\partial y \qquad (3.12)$$

(тому що x_1 і y_1 розташовані відповідно між x і $x+\Delta x$, y і $y+\Delta y$, то коли $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$ величини x_1 і y_1 прямують до x і y відповідно). За визначенням границі, рівності (3.11) і (3.12) можна переписати у вигляді

$$\partial f(x_1,y+\Delta y)/\partial x=\partial f(x,y)/\partial x+\gamma_1,$$

$$\partial f(x,y_1)/\partial y=\partial f(x,y)/\partial y+\gamma_2,$$

коли Δx і Δy прямують до нуля величини γ_1 і γ_2 теж прямують до нуля. Останнє дає можливість переписати вираз (3.10) у вигляді:

$$\Delta z=(\partial f(x,y)/\partial x)\Delta x+(\partial f(x,y)/\partial y)\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y. \qquad (3.13)$$

Сума останніх двох членів цієї рівності є нескінченно малою величиною. З рівності (3.13) випливає, що коли функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні в даній точці, то вона диференційована у цій точці і має повний диференціал: $dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$.

Рівність (3.13) можна переписати у вигляді $\Delta z=dz+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$ і з точністю до нескінченно малих вищого порядку маємо приблизну рівність $\Delta z\approx dz$. (3.14)

Прирости незалежних змінних Δx і Δy є диференціалами незалежних змінних x і y, які позначають відповідно через dx і dy. Тоді вираз повного диференціалу матиме вигляд

$$dz=(\partial f/\partial x)dx+(\partial f/\partial y)dy. \qquad (3.15)$$

ЛЕКЦІЯ № 14

Приклад. Знайти повний диференціал функції $z=\sin^2(xy)$.

<u>Розв'язання.</u> $dz=\frac{\partial}{\partial x}(\sin^2(xy))dx+\frac{\partial}{\partial y}(\sin^2(xy))dy=$

$$= y2\sin(xy)\cos(xy)dx + x2\sin(xy)\cos(xy)dy =$$
$$= (ydx + xdy)\sin(2xy).$$

Зауваження. Рівність (3.14) використовують для наближених обчислень значень функції $z = f(x,y)$. Для цього вираз (3.6) переписують у вигляді $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta z$, (3.16)

а потім, маючи на увазі (3.14), замість Δz підставимо у (3.16) вираз (3.15) і матимемо формулу для наближених обчислень:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y, \qquad (3.17)$$

яка має точність до нескінченно малих вищого порядку малості відносно Δx і Δy.

Приклад. Знайти наближене значення $(2{,}73)^{3{,}01}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = x^y$. Знайдемо її повний диференціал: $dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y$.

Тут: $x_0 = e$; $y_0 = 3$; $\Delta x = 0{,}01$ і $\Delta y = 0{,}01$. Обчислюємо повний диференціал: $dz = 3\cdot e^2 \cdot 0{,}01 + e^3 \cdot \ln e \cdot 0{,}01 = e^2(0{,}03 + 0{,}0272) =$
$= e^2 \cdot 0{,}0572 = 0{,}4232$.

Тоді, враховуючи, що $e \approx 2{,}72$, маємо: $(2{,}73)^{3{,}01} \approx$
$\approx e^3 + dz \approx 20{,}1236 + 0{,}4232 = 20{,}5468$.

Точний результат: 20,5518. Отже, похибка дорівнює близько 0,005.

Частинні похідні складної функції. Припустимо, що в рівнянні

$$z = F(u, \upsilon) \qquad (3.18)$$

змінні u і υ є неперервними функціями незалежних змінних x і y:

$$u = \varphi(x,y), \quad \upsilon = \psi(x,y). \qquad (3.19)$$

Звичайно, z можна подати й безпосередньо через x і y таким чином: $z = F(\varphi(x,y), \psi(x,y))$, (3.20)

але це може призвести до дуже складної функції.

Припустимо, що функції $F(u,\upsilon)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ мають неперервні частинні похідні за всіма своїми аргументами. Поставимо завдання: обчислити $\partial z/\partial y$ і $\partial z/\partial x$, відштовхуючись від рівнянь (3.18) і (3.19).

Дамо аргументу x приріст Δx, зберігаючи значення y незмінним. Тоді, враховуючи рівняння (3.19) змінні u і υ одержать прирости $\Delta_x u$ і $\Delta_x \upsilon$.

Але, якщо змінні u і υ одержать прирости $\Delta_x u$ і $\Delta_x \upsilon$, то функція $z = F(u,\upsilon)$ одержить приріст Δz, який обчислюють за формулою (3.13):

$$\Delta z = (\partial F / \partial u)\Delta_x u + (\partial F / \partial \upsilon)\Delta_x \upsilon + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x \upsilon .$$

Розділимо усі члени цієї рівності на Δx:

$$\Delta z / \Delta x = (\partial F / \partial u)\Delta_x u / \Delta x + (\partial F / \partial \upsilon)\Delta_x \upsilon / \Delta x + \gamma_1 \Delta_x u / \Delta x + \gamma_2 \Delta_x \upsilon / \Delta x .$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ і $\Delta_x \upsilon \to 0$ (u і υ неперервні). Тоді і $\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$. Зробивши граничний перехід, коли $\Delta x \to 0$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta z / \Delta x = \partial z / \partial x; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x u / \Delta x = \partial u / \partial x; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x \upsilon / \Delta x = \partial \upsilon / \partial x;$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = 0$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \gamma_2 = 0$ і, отже,

$$\partial z / \partial x = (\partial F / \partial u)(\partial u / \partial x) + (\partial F / \partial \upsilon)(\partial \upsilon / \partial x) . \qquad (3.21)$$

Аналогічні перетворення з аргументом y дає:

$$\partial z / \partial y = (\partial F / \partial u)(\partial u / \partial y) + (\partial F / \partial \upsilon)(\partial \upsilon / \partial y) . \qquad (3.22)$$

Для випадку більшого числа змінних формули (3.21) і (3.22) звичайним чином узагальнюють.

<u>Повна похідна.</u> Якщо маємо функцію $z = F(x,y,u,\upsilon)$, де y, u, і υ у свою чергу залежать від одного аргументу x:

$$y = f(x), \quad u = \varphi(x), \quad \upsilon = \psi(x),$$

то фактично z є функцією тільки однієї змінної x, можна ставити питання про визначення повної похідної dz/dx. Ця похідна обчислюється за формулою (3.21):

$$dz / dx = \partial z / \partial x + (\partial z / \partial y)(dy / dx) + (\partial z / \partial u)(du / dx) +$$
$$+ (\partial z / \partial \upsilon)(d\upsilon / dx) , \qquad (3.23)$$

де $\partial x / \partial x = 1$, а так як y, u і υ - є функції одного x, то частинні похідні перетворюються у звичайні. Остання формула має назву повної похідної.

<u>Приклад.</u> Знайти dz / dx, якщо: $z = x^2 + y^{1/2}$, $y = \sin x$.

Розв’язання. $\partial z / \partial x = 2x$, $\partial z / \partial y = 1/(2\sqrt{y})$, $\partial y / \partial x = \cos x$.

За формулою (3.23) маємо: $dz / dx = \partial z / \partial x + \partial z / \partial y \cdot dy / dx =$
$= 2x + 1/(2\sqrt{y})\cos x = 2x + \cos x / (2\sqrt{\sin x})$.

<u>Повний диференціал складної функції</u>.

Підставимо вирази (3.21) і (3.22) у формулу (3.15) повного диференціала. Маємо $dz = ((\partial F / \partial u)(\partial u / \partial x) + (\partial F / \partial \upsilon)(\partial \upsilon / \partial x) dx +$

$$+((\partial F/\partial u)(\partial u/\partial y)+(\partial F/\partial \upsilon)(\partial \upsilon/\partial y)dy.$$

Після відповідних перетворень:

$$dz=(\partial F/\partial u)((\partial u/\partial x)dx+(\partial u/\partial y)dy)+$$
$$+(\partial F/\partial v)((\partial v/\partial x)dx+(\partial v/\partial y)dy\cdot \qquad (3.24)$$

Але: $(\partial u/\partial x)dx+(\partial u/\partial y)dy=du$, $(\partial v/\partial x)dx+(\partial v/\partial y)dy=dv$. (3.25)

Рівність (3.24) з урахуванням рівностей (3.25) можна переписати так:

$$dz=(\partial F/\partial u)du+(\partial F/\partial v)dv \text{, або } dz=z'_u\cdot du+z'_v\cdot dv. \qquad (3.26)$$

Розглядаючи (3.15) і (3.26), можемо сказати, що вираз повного диференціала функції декількох змінних має той же вигляд, тобто форма диференціала інваріантна, чи є υ і u незалежними змінними або функціями незалежних змінних.

<u>Приклад.</u> Знайти повний диференціал складної функції:

$$z=u^2\upsilon^3 \text{ , де } u=x^2\sin y \text{ і } \upsilon=x^3e^y.$$

<u>Розв'язання</u>. За формулою (3.26) маємо

$$dz=2u\upsilon^3du+3u^2\upsilon^2d\upsilon=2u\upsilon^3(2x\sin y dx+x^2\cos y dy)+$$
$$+3u^2\upsilon^2(3x^2e^ydx+x^3e^ydy).$$

Останній вираз можна перетворити до вигляду

$$dz=x^{12}\sin ye^{3y}(13\sin y dx+x(2\cos y+3\sin y)dy).$$

<u>Похідна функції, заданої неявно</u>.

Розглянемо функцію F(x,y) = 0.

<u>Теорема.</u> Нехай функція y від x дана неявно і F(x,y), F'_x(x,y), F'_y(x,y) - неперервні функції у деякій області D; координати (x,y) довільної точки $M\in D$ задовольняють рівнянню F(x,y) = 0, крім того, у цій точці $F'_y(x,y)\neq 0$. Тоді: $y'_x=-F'_x(x,y)/F'_y(x,y)$.

<u>Доведення</u>. Нехай деякому значенню x відповідає значення функції y і при цьому F(x,y) = 0. Дамо незалежній змінній x приріст Δx. Функція y матиме приріст Δy, тобто значенню аргументу $\Delta x+x$ відповідає значення функції $\Delta y+y$. Оскільки F(x,y) = 0 будемо мати F($\Delta x+x$, $\Delta y+y$) = 0. Отже: F($\Delta x+x$, $\Delta y+y$) – F(x,y) = 0.

Зліва повний приріст функції двох змінних, який можна переписати так (див. вище): $(\partial F/\partial x)\Delta x+(\partial F/\partial y)\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y=0$,

де γ_1 і γ_2 прямують до нуля, коли Δx і Δy прямують до нуля. Розділимо останню рівність на Δx і обчислимо $\Delta x/\Delta y$:

$$\Delta y / \Delta x = -(\partial F / \partial x + \gamma_1)/(\partial F / \partial y + \gamma_2).$$

Спрямуємо Δx до нуля. Тоді, маючи на увазі, що при цьому γ_1 і γ_2 теж прямують до нуля і що $\partial F / \partial y \neq 0$, у границі матимемо:

$$y'_x = -(\partial F / \partial x)/(\partial F / \partial y). \qquad (3.27)$$

Отже, довели існування похідної y'_x від функції, заданої неявно, і знайшли формулу для її обчислення.

Приклад. Рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Тут $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$; $\partial F / \partial x = 2x$; $\partial F / \partial y = 2y$.
Отже, за формулою (3.27): $dy / dx = -2x / 2y = -x / y$.

Розглянемо функцію $F(x,y,z) = 0$. (3.28)

Якщо кожній парі чисел x і y у деякій області відповідає одне або декілька значень z, які задовольняють останнє рівняння, то воно неявно визначає одну або декілька однозначних функцій z від x і y.

Приклад. Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ неявно визначає дві неперервні функції z від x і y, які можна виразити явно, розв'язавши дане рівняння відносно z. Тобто маємо: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Знайдемо частинні похідні функції z по x і y, що визначається рівнянням (3.28). Коли шукаємо $\partial z / \partial x$, вважаємо y сталим. Тому тут можна застосувати формулу (3.27), якщо незалежною змінною вважати x, а функцією z. Отже: $z'_x = -(\partial F / \partial x)/(\partial F / \partial z)$. (3.29)

Так само знаходимо: $z'_y = -(\partial F / \partial y)/(\partial F / \partial z)$. (3.30)

Припускається, що $\partial F / \partial z \neq 0$.

Аналогічно визначаємо частинні похідні неявних функцій більшого числа змінних.

Приклад. Обчислити частинні похідні функції

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$$

Розв'язання. Тут: $F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5 = 0$;

$$\partial F / \partial x = 2xy; \quad \partial F / \partial y = x^2; \quad \partial F / \partial z = e^z + 1.$$

Отже: $\partial z / \partial x = -(2xy)/(e^z + 1)$, $\partial z / \partial y = -(x^2)/(e^z + 1)$.

ЛЕКЦІЯ № 15

Частинні похідні вищих порядків. Якщо функція $z = f(x,y)$ має в усіх точках деякої відкритої області D частинну похідну за однією із змінних, то ця похідна сама є функцією від цих змінних і може, в свою чергу, мати частинні похідні по цих змінних. Для даної функції $z = f(x,y)$ ці похідні є частинними похідними другого порядку.

Так, розглянемо границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0}(f'_x(x+\Delta x,y)- f'_x(x,y))/ \Delta x = f''_{xx}(x,y).$$

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція має другу частинну похідну за змінною *x*. Цю похідну позначають $f''_{xx}(x,y)$, або $\partial^2 f / \partial x^2$, або $\partial^2 z/ \partial x^2$, або z''_{xx}. Аналогічно визначають похідні f''_{yx}, f''_{xy}, f''_{yy}. Похідні f''_{xy} і f''_{yx} називають мішаними частинними похідними.

Похідні другого порядку можна знову диференціювати. Матимо частинні похідні третього порядку, їх буде, очевидно, вже вісім: $\partial^3 z/ \partial x^3$, $\partial^3 z/ \partial x\partial y^2$, $\partial^3 z/ \partial x\partial y\partial z$,….

Взагалі, частинна похідна *n*-го порядку є перша похідна від похідної (n-1)-го порядку.

Приклад. Обчислити $\partial^3 z/(\partial x^2\partial y)$, якщо $z=y^2e^x+x^2y^3+4$.

Розв'язання. Послідовно маємо:

$$\partial z/ \partial x = y^2e^x+2xy^3;\quad \partial^2 z/ \partial x^2 = y^2e^x+2y^3;\quad \partial^3 z/(\partial x^2\partial y)=2ye^x+6y^2.$$

Природно поставити запитання, чи залежить результат диференціювання від послідовності диференціювання по різних змінних, тобто чи будуть, наприклад, тотожньо рівними похідні $\partial^2 f/(\partial x\partial y)$ і $\partial^2 f/(\partial y\partial x)$. На це запитання відповідає теорема.

Теорема. Якщо функція $z = f(x,y)$ і її частинні похідні f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} визначені і неперервні в деякому околі і в самій точці $M(x,y)$, то в ній $\partial^2 f/(\partial x\partial y)=\partial^2 f/(\partial y\partial x)$.

Доведення. Розглянемо вираз

$$A=(f(x+\Delta x,y+\Delta y)- f(x+\Delta x,y))-(f(x,y+\Delta y)- f(x,y))..$$

Якщо введемо допоміжну функцію $\varphi(x)$, визначену рівністю

$$\varphi(x)= f(x,y+\Delta y)- f(x,y),$$

то A можна записати у вигляді: $A=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$.

Оскільки припустили, що f'_x визначена у околі точки $M(x,y)$, то, отже, $\varphi(x)$ диференційована на відрізку $[x, x+\Delta x]$; але тоді за теоремою Лагранжа маємо $A = \Delta x \varphi'(x_1)$, де x_1, знаходиться між x та $x+\Delta x$. Але $\varphi'(x_1) = f'_x(x_1, y+\Delta y) - f'_x(x_1, y)$.

Оскільки f''_{xy} визначена в околі точки $M(x,y)$, то f'_x диференційована на відрізку $[y, y+\Delta y]$, тому, застосувавши до останньої різниці знову теорему Лагранжа (по змінній y), матимемо

$$f'_x(x_1, y+\Delta y) - f'_x(x_1, y) = \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1),$$

де y_1 знаходиться між y і $y+\Delta y$.

Отже, початковий вираз A дорівнює: $A = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1)$. (3.31)

Якщо в початковому виразі A переставимо середні члени і виконаємо з цим виразом аналогічні перетворення, дістанемо

$$A = \Delta x \Delta y f''_{yx}(x_2, y_2), \tag{3.32}$$

де (x_2, y_2) деяка точка в околі точки $M(x,y)$.

Частини, які розташовані ліворуч у рівностях (3.31) і (3.32), дорівнюють A, отже, частини, які розташовані праворуч, теж дорівнюють A, тобто: $\Delta x \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1) = \Delta x \Delta y f''_{yx}(x_2, y_2)$,

звідки $f''_{xy}(x_1, y_1) = f''_{yx}(x_2, y_2)$.

Перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_1, y_1) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(x_2, y_2),$$

Оскільки похідні f''_{xy} і f''_{yx} неперервні у точці $M(x,y)$ і її околі, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_1, y_1) = f''_{xy}(x, y) \text{ і } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(x_2, y_2) = f''_{yx}(x, y).$$

Таким чином: $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, що і треба було довести.

Приклад. $z = e^x \sin y$. Довести $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Розв'язання. $\partial z / \partial x = e^x \sin y$; $\partial^2 z / \partial x \partial y = e^x \cos y$;

$$\partial z / \partial y = e^x \cos y; \quad \partial^2 z / \partial y \partial x = e^x \cos y.$$

Отже, $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Екстремум функції двох незалежних змінних. Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена у відкритій області D і точка $M(x_0, y_0) \in D$. Кажуть, що функція $f(x,y)$ має у точці M максимум (мінімум), якщо існує такий

ε окіл точки $M(x_0,y_0)$, що для усіх точок цього ε - околу виконується нерівність

$$f(x,y)<f(x_0,y_0) \qquad (f(x,y)>f(x_0,y_0)).$$

Максимум і мінімум функції називають екстремумами.

Дане вище визначення максимуму (мінімуму) функції можна перефразувати таким чином. Нехай $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$; тоді

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta f .$$

Якщо $\Delta f < 0$ ($\Delta f > 0$) для всіх достатньо малих приростів незалежних змінних, то функція $f(x,y)$ досягає у точці $M(x_0,y_0)$ максимуму (мінімуму).

Ці формулювання переносять без зміни на функції будь-якого числа змінних.

Необхідні умови існування екстремуму. Якщо в точці $M(x_0,y_0)$ функція $z = f(x,y)$ досягає екстремуму, то кожна частинна похідна першого порядку від z при цих значеннях аргументів дорівнює нулю, або не існує.

Точки, де $z'_x=0$ і $z'_y=0$ (або не існує), називаються критичними (стаціонарними) точками функції $z = f(x,y)$. Отже, координати критичних точок знаходимо із системи

$$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Достатні умови існування екстремуму. Нехай в області, яка містить критичну точку $M(x_0,y_0)$, функція $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}. Обчислимо їх, позначивши: $z''_{xx}(x_0,y_0)=A$; $z''_{xy}(x_0,y_0)=B$; $z''_{yy}(x_0,y_0)=C$.

Тоді функція у критичній точці має:

максимум, якщо $AC-B^2>0$ і $A<0$; (3.34)

мінімум, якщо $AC-B^2>0$ і $A>0$; (3.35)

ні максимум і ні мінімум, якщо $AC-B^2<0$; (3.36)

невизначеність (потрібні додаткові дослідження), якщо $AC-B^2=0$. (3.37)

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z=x^3+y^3-3xy$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки, використовуючи необхідні умови екстремуму:

$$\left.\begin{aligned}\partial z/\partial x = 3x^2 - 3y = 0,\\ \partial z/\partial y = 3y^2 - 3x = 0.\end{aligned}\right\}$$

Звідси маємо дві критичні точки: $M(1,1)$ і $N(0,0)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\partial^2 z/\partial x^2 = 6x\ ,\ \ \partial^2 z/\partial x\partial y = -3\ ,\ \ \partial^2 z/\partial y^2 = 6y\ .$$

Обчислимо ці похідні у першій критичній точці:

$$A = \partial^2 z/\partial x^2\Big|_M = 6\ ;\ \ B = \partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_M = -3\ ;\ C = \partial^2 z/\partial y^2\Big|_M = 6\ ;$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0\ ;\ A > 0.$$

За достатніми умовами (3.35) у точці M функція досягає мінімуму:

$$z(1,1) = 1 + 1 - 3 = -1\,.$$

Обчислимо у другій критичній точці частинні похідні другого порядку, маємо: $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$; $AC - B^2 = -9 < 0$.

Отже, за (3.36) у точці $N(0,0)$ функція не має екстремуму.

ЛЕКЦІЯ № 16

Найбільше й найменше значення функції.

Розглядаємо неперервну функцію $z = f(x, y)$ в замкненій і обмеженій області D. За аналогією з функцією однієї змінної вона в цій області досягає найбільшого і найменшого значень. Точки, які їм відповідають, можуть бути внутрішніми, або межовими. Щоб знайти їх, треба спочатку знайти всі стаціонарні точки, розв'язавши систему рівнянь (3.33) і обчислити значення функції в тих точках, які належать D. Потім досліджуємо функцію на екстремум на межі області D шляхом зведення даної функції до функції однієї з незалежних змінних. Серед здобутих значень даної функції всередині і на межі області D вибираємо найбільше і найменше значення.

Приклад. Дослідити на найбільше й найменше значення функцію $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ у замкненій області D, межа якої: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Розв'язання. Зробимо рисунок даної області (рис.3.9). З'ясуємо, чи є стаціонарні точки, які лежать усередині області D, тобто в межах ΔAOB. Маємо:

$$\left.\begin{aligned}z'_x = y + 3 = 0,\\ z'_y = x - 2y + 4 = 0.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}y = -3,\\ x = -10.\end{aligned}$$

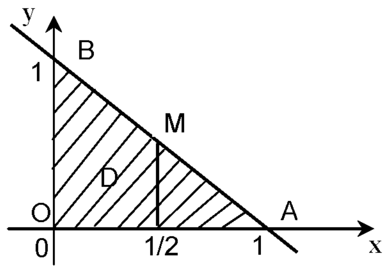


Рис. 3.9

Розв'язуючи систему рівнянь, знаходимо стаціонарну точку $M(-10, -3)$. Ця точка лежить за межами області D, отже, її не розглядаємо.

Досліджуємо функцію $z = f(x,y)$ на межі області D:

– на стороні OA ($y = 0$, $0 \le x \le 1$) функція $z = 3x$. Ця функція однієї змінної $z'_x = 3$, $z'_x \ne 0$, тому стаціонарних точок функція не має. У точках O і A відповідно $z(0,0) = 0$, $z(1,0) = 3$;

– на стороні OB ($x = 0$, $0 \le y \le 1$) функція $z = -y^2 + 4y$, $z'_y = -2y + 4$. Знаходимо стаціонарну точку з рівняння $-2y + 4 = 0$; маємо $y = 2$. Отже точка $M_1(0,2)$ не належить області D. Значення функції у точці $B(0,1)$: $z(0,1) = 3$;

– на стороні AB ($y = -x + 1$) функція $z = -2x^2 + 2x + 3$. Ця функція однієї змінної. $z'_x = -4x + 2$ і $z'_x = 0$, маємо $x = 1/2$, тобто стаціонарна точка $M(1/2,1/2)$ належить межі області D. Значення функції в ній $z(1/2,1/2) = 3{,}5$.

Порівнюючи всі обчислені значення функції, робимо висновок, що найбільшого значення функція досягає у точці M: $z|_M = z(1/2{,}1/2) = 3{,}5$, а найменшого у точці O: $z|_O = z(0{,}0) = 0$.

<u>Дотична площина і нормаль до поверхні</u>. Нехай задано поверхню функцією

$$F(x,y,z) = 0, \tag{3.38}$$

яка диференційована в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить цій поверхні, причому не всі частинні похідні в точці M_0 дорівнюють нулю, тобто $(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \ne 0$.

Розглянемо довільну криву L, яка проходить через точку M_0, лежить на поверхні (рис. 3.10) і задається рівняннями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, де точці M_0 відповідає параметр t_0.

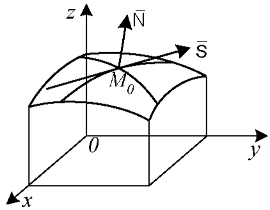


Рис. 3.10

Оскільки крива лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівняння

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \qquad (3.39)$$

Диференціюючи останню рівність, маємо:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \qquad (3.40)$$

Ця рівність показує, що вектори

$$\vec{n} = \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\} \text{ і } \vec{s} = \{x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)\}$$

ортогональні, причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої L у точці M_0.

Крім того, з рівності (3.40) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (3.38), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається дотичною площиною до поверхні в точці M_0.

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки ця площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, то її рівняння має вигляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \qquad (3.41)$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{n}$, то канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (3.42)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x,y)$, то, поклавши $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$, дістанемо:

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0),\; F'_y(M_0) = f'_x(x_0, y_0),\; F'_z(M_0) = -1,$$

тоді рівняння (3.41) і (3.42) наберуть вигляду:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \quad (3.43)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (3.44)$$

Зауваження 1. Ми розглянули випадок, коли функція $F(x,y,z) = 0$ диференційована в точці M_0 і $(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0$.

Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають особливою), то дотична та нормаль в такій точці можуть не існувати.

Зауваження 2. Якщо поверхня $F(x,y,z) = 0$ є поверхнею рівня для деякої функції $u = u(x,y,z)$, тобто $F(x,y,z) = u(x,y,z) - c = 0$, то вектор

$$\vec{n} = \{F''_x; F'_y; F'_z\} = \{u''_x; u'_y; u'_z\}$$

буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні рівня.

Приклад. Написати рівняння нормалі й дотичної площини до еліпсоїда $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в точці M_0 (1; 2; 3).

Розв'язання. Скористаємось рівняннями (3.41) і (3.42). Маємо:

$$F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 15 = 0;\; F'_x = 4x;\; F'_y = 2y;$$

$$F'_z = 2z;$$

$$F'_x(M_0) = 4;\; F'_y(M_0) = 4;\; F'_z(M_0) = 6.$$

Отже, шукані рівняння нормалі та дотичної площини мають відповідно вигляд

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6};\; 4(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0.$$

ТЕМА 4. ***КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ***

ЛЕКЦІЯ № 17

Подвійний інтеграл. Поняття подвійного інтегралу. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$. Вважатимемо, що межа області D складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких визначається функцією виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$.

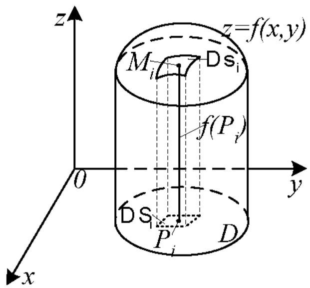


Рис. 4.1

Розіб'ємо область D на частини D_i (рис. 4.1), які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,2$ ..., n. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i;\eta_i)$ їй на поверхні відповідає точка $M(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i, \tag{4.1}$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ по області D. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ - найбільший з діаметрів областей D_i.

Якщо інтегральна сума (4.1) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається подвійним інтегралом і позначається одним з таких символів: $\iint\limits_D f(x, y)dS$ або $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Таким чином: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$. (4.2)

У цьому випадку функція $f(x,y)$ називається інтегровною; D - областю інтегрування; x, y - змінними інтегрування; dS (або $dxdy$) - елементом площі.

Достатня умова існування подвійного інтегралу.

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.

Доведення теореми виходить за межі програми, але скористаємося наступним. Порівнюючи визначення подвійного інтегралу (4.2) і визначення визначеного інтегралу $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, бачимо, що конструктивно ці означення цілком аналогічні: в обох випадках розглядається деяка функція f, але в першому випадку це функція однієї змінної, визначена на одновимірній області - відрізку $[a;\ b] \subset R_1$ а в другому - це функція двох змінних, визначена у двовимірній області $D \subset R_2$.

В обох випадках область визначення розбивають на частини, в кожній з яких беруть довільну точку і в ній знаходять значення функції. Після цього знайдене значення функції множимо на міру відповідної частини області визначення. У випадку однієї змінної такою мірою була довжина Δx_i відрізка $[x_i; x_{i+1}]$, а у випадку двох змінних - площа ΔS_i області $D_i \subset D$.

Наступні кроки знову однакові: утворюють інтегральні суми і знаходять їхні границі, коли міра частин області визначення прямує до нуля.

Властивості подвійного інтегралу:

– сталий множник можна виносити за знак подвійного інтегралу
$\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $C = const$;

– подвійний інтеграл від суми двох (скінченного числа) функцій дорівнює сумі двох (скінченного числа) подвійних інтегралів від цих функцій
$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$;

– якщо в області D функція $f(x,y) \geq 0$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$;

– якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ визначені в одній і тій самій області

D *і* $f(x,y) \geq g(x,y)$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ і $\iint\limits_D g(x,y)dxdy$;

– якщо область інтегрування функції $f(x,y)$ розбити на області D_1 і D_2 або на довільне скінченне число областей, які складають область D і які не мають спільних внутрішніх точок, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$;

– якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то $mS \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS$, де m і M - відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D;

– якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка $(x_0; y_0)$, що: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)S$.

Величину $f(x_0, y_0) = 1/S\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ називають середнім значенням функції $f(x,y)$ в області D.

<u>Обчислення подвійного інтегралу</u>. Обчислення подвійного інтегралу за формулою (4.2) як границі інтегральної суми, так само як і у випадку визначеного інтегралу, пов'язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтегралу зводять до обчислення так званого повторного інтегралу - двох звичайних визначених інтегралів.

Покажемо, як це робиться. Припустимо, що при $(x; y) \in D$ функція $f(x,y) \geq 0$. Тоді подвійний інтеграл виражає об'єм циліндричного тіла (рис. 4.2) з основою D, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y)$. Обчислимо цей об'єм за допомогою методу паралельних перерізів: $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, (4.3)

де $S(x)$ - площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x = a$ та $x = b$ - рівняння площин, які обмежують дане тіло. Перед тим, як обчислювати площу зробимо певні припущення відносно області D.

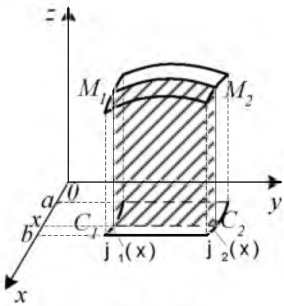


Рис. 4.2

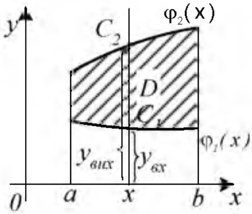


Рис. 4.3

Припустимо спочатку, що область інтегрування D обмежена двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$ і двома прямими $x=a$ та $x=b$, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ для всіх $x\in(a;b)$ (рис. 4.3).

Проведемо через точку $(x;\ 0)$, де $x\in(a;b)$, пряму, паралельну вісі Oy. Ця пряма перетинає криві $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ в точках C_1 і C_2, які називатимемо відповідно точкою входу в область D і точкою виходу з області D. Ординати цих точок позначимо відповідно $y_{вх}$ та $y_{вих}$, тоді $y_{вх}=\varphi_1(x)$, $y_{вих}=\varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається правильною в напрямі вісі Oy. Інакше кажучи, область D називається правильною в напрямі вісі Oy, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно вісі Oy, перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

Знайдемо тепер площу $S(x)$. Для цього проведемо через точку $(x;\ 0;\ 0)$ площину, перпендикулярну вісі Ox (рис. 4.2). У перерізі цієї площини і циліндричного тіла утворюється трапеція $C_1M_1M_2C_2$. Апліката $z=f(x,y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише y, причому y змінюється в межах від $y_{вх}=\varphi_1(x)$ до $y_{вих}=\varphi_2(x)$.

Площа $S(x)$ трапеції $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу: $S(x)=\int\limits_{y_{вх}}^{y_{вих}} z\,dy=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$. Підставивши знайдене значення $S(x)$ у формулу (4.3) враховуючи формулу (4.2), дістанемо:

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$, або в зручнішій формі:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (4.4)$$

Це і є шукана формула для обчислення подвійного інтеграла. Частина, яка стоїть праворуч у формулі (4.4) є повторний інтеграл. У повторному інтегралі інтегрування виконуємо спочатку по змінній y (при цьому змінна x вважається сталою), а потім по змінній x. Інтеграл по змінній y називають внутрішнім, а по змінній x - зовнішнім. У результаті обчислення внутрішнього інтегралу (в межах від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$) одержуємо певну функцію від однієї змінної x. Інтегруючи цю функцію в межах від a до b, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число - значення подвійного інтегралу.

ЛЕКЦІЯ № 18

Зауваження 1. Наведені геометричні міркування при одержанні формули (4.4) зроблені у випадку, коли $f(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in D$. Проте формула (4.4) залишається справедливою і в загальному випадку. Строге доведення цієї формули ми опускаємо.

Зауваження 2. Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ і двома прямими $y = c$, $y = d$ ($c < d$), причому $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ для всіх $y \in (c;d)$, тобто якщо область D правильна в напрямі осі Ox (рис. 4.4), то справедлива формула

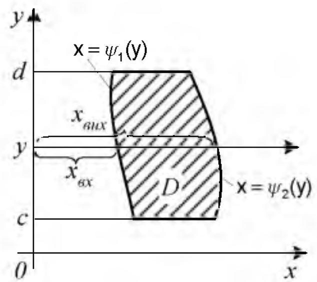


Рис. 4.4

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (4.5)$$

Тут внутрішнім є інтеграл по змінній x. Обчислюючи його в межах від $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, дістанемо значення подвійного інтегралу.

Зауваження 3. Якщо область D правильна в обох напрямах, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (4.4), так і за формулою (4.5). Результати матимемо однакові.

Зауваження 4. Якщо область не є правильною ні в напрямі осі Ox, ні в напрямі осі Oy (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше, ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі осі Ox чи вісі Oy.

Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних областях і додаючи результати (властивість адитивності), знаходимо шуканий подвійний інтеграл по області D.

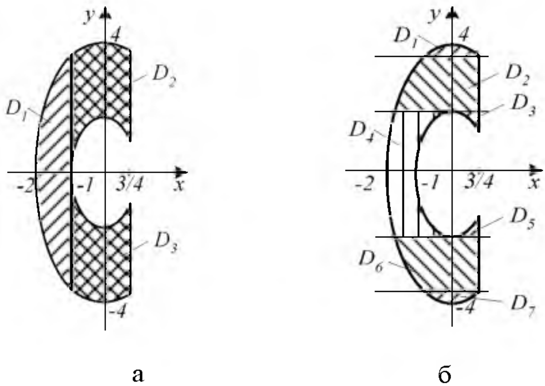


Рис. 4.5

<u>Приклад</u>. Область D обмежена еліпсами $x^2 + y^2/4 = 1$, $x^2/4 + y^2/16 = 1$ і прямою $x = 3/4$.

При інтегруванні в напрямі осі Oy область D складається з трьох частин (рис. 4.5, а).

При інтегруванні в напрямі осі Ox область D складається з семи частин (рис. 4.5, б).

Зауваження 5. Повторні інтеграли у формулах (4.4) і (4.5) називаються інтегралами з різним порядком інтегрування. Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно від формули (4.4) перейти до формули (4.5), або навпаки.

У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x,y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 6. Правильну в напрямі осі *Oy* або осі *Ox* область D позначаємо відповідно: $D:\{(\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$, або $D:\{(\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xy^2dxdy$, якщо область D міститься в першій чверті і обмежена лініями $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$.

Розв'язання.

Область інтегрування D зображено на рис. 4.6. Функція $f(x,y)=xy^2$ неперервна в даній області. Обчислення даного подвійного інтегралу можна виконати за формулою (4.4), так і за формулою (4.5).

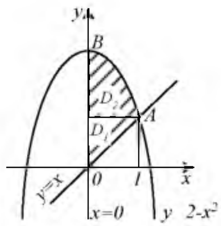


Рис. 4.6

Область D правильна в напрямі осі *Oy*, тобто

$$D:\{x\le y\le 2-x^2,\ 0\le x\le 1\},$$

тоді за формулою (4.4) маємо:

$$\iint\limits_D xy^2dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x^2} xy^2dy=\int\limits_0^1 x\frac{y^3}{3}\Big|_x^{2-x^2}dx=$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1(x(2-x^2)^3-x^4)dx=-\frac{1}{6}\int\limits_0^1(2-x^2)^3d(2-x^2)-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^4dx=\frac{67}{120}.$$

Обчислимо цей інтеграл іншим способом, користуючись формулою (4.5). Область D є правильною в напрямі осі *Ox*, але її треба розбивати на дві частини D_1 і D_2, оскільки лінія *OAB*, на якій містяться точки виходу з області, задається двома різними рівняннями:

$D_1:\{0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$; $D_2:\left\{0\le x\le \sqrt{2-y},\ 1\le y\le 2\right\}$. Отже, даний інтеграл дорівнюватиме сумі двох інтегралів:

$$\iint\limits_D xy^2dxdy=\iint\limits_{D_1} xy^2dxdy+\iint\limits_{D_2} xy^2dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y xy^2dx+\int_1^2 dy\int_x^{\sqrt{2-y}} xy^2dx=\int_0^1 y^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^y dy+$$

$$+\int_1^2 y^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2-y}}dy=\int_0^1\frac{y^4}{2}dy+\int_1^2\frac{(2-y)y^2}{2}dy=\frac{1}{10}+\frac{11}{24}=\frac{67}{120}.$$

Отримали той же результат. Очевидно, при обчисленні вихідного інтеграла у даному випадку вигідніше користуватися формулою (4.4).

<u>Приклад.</u> Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{e^y} f(x,y)dx.$$

<u>Розв'язання.</u> Тут потрібно перейти від обчислення повторного інтегралу за формулою (4.5) до обчислення даного інтегралу за формулою (4.4). За даним інтегралом знайдемо область D.

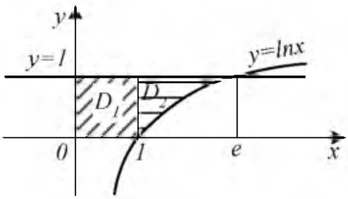


Рис. 4.7

Область інтегрування D обмежена лініями: $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=e^y$ або $y=\ln x$ (рис. 4.7). Якщо внутрішнє інтегрування провести по y, а зовнішнє – по x, то дану область D треба розглядати як правильну в напрямі осі Oy. Оскільки лінія, на якій містяться точки входу в область, дана двома різними рівняннями, то цю область треба розбити на дві частини D_1 і D_2.

Маємо: $D_1:\{0\le y\le 1,\ 0\le x\le 1\}$; $D_2:\{\ln x\le y\le 1,\ 1\le x\le e\}$.

Даний інтеграл дорівнюватиме сумі двох інтегралів:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy+\int_1^e dx\int_{\ln x}^1 f(x,y)dy.$$

ЛЕКЦІЯ № 19

Заміна змінних у подвійному інтегралі. Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D і існує інтеграл: $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Припустимо, що за допомогою формул

$$x = x(u,\upsilon), \quad y = y(u,\upsilon) \tag{4.6}$$

ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та υ. Вважатимемо, що з формул (4.6) однозначно можна визначити u та υ:

$$u = u(x,y), \quad \upsilon = \upsilon(x,y). \tag{4.7}$$

Згідно з формулами (4.7), кожній точці $M(x;y) \in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u;\upsilon)$ на координатній площині з координатами u і υ. Нехай множина всіх точок $M^*(u;\upsilon)$ утворює обмежену замкнену область D^*. Формули (4.6) називаються формулами перетворення координат, а формули (4.7) - формулами оберненого перетворення.

Теорема. Якщо перетворення (4.7) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (4.6) мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник:

$$J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}, \tag{4.8}$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv. \tag{4.9}$$

Функціональний визначник (4.8) називається визначником Якобі або якобіаном.

Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (4.6), ми маємо елемент площі $dxdy$ в координатах x, y замінити елементом площі $\left|J(u,\upsilon)\right|du d\upsilon$ в координатах u, υ і стару область інтегрування D замінити відповідною їй новою областю D^*.

Подвійний інтеграл у полярних координатах. Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за відомими формулами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Обчислимо якобіан: $\partial x/\partial\rho = \partial(\rho\cos\varphi)/\partial\rho = \cos\varphi$; $\partial x/\partial\varphi = \partial(\rho\cos\varphi)/\partial\varphi = -\rho\sin\varphi$;

$\partial y / \partial \rho = \partial(\rho \sin\varphi) / \partial \rho = \sin\varphi$; $\partial y / \partial \varphi = \partial(\rho \sin\varphi) / \partial \varphi = \rho \cos\varphi$.

Знайдені частинні і похідні підставимо у визначник:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho .$$

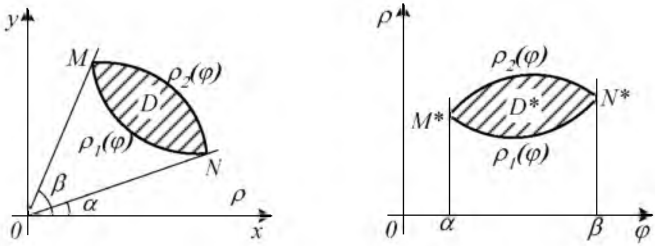
Отже, формула (4.9) набирає вигляду

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi . \qquad (4.10)$$

Тут область D дана в декартовій системі координат *Oxy*, а відповідна їй область D^* – у полярній системі координат.

Зауваження 1. У багатьох випадках формулу (4.10) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області D містить суму $x^2 + y^2$, оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 .$$



а б

Рис. 4.8

Зауваження 2. Якщо область D (рис. 4.8, а) обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та $\beta (\alpha < \beta)$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$, то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta)$ (рис. 4.8, б). Тому формулу (3.10) можна записати у вигляді

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho . \quad (4.11)$$

Зауваження 3. Якщо область D охоплює початок координат, тобто точка *O* (0; 0) є внутрішньою точкою області D, то (4.10) можна записати у вигляді:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\,, \quad (4.12)$$

де $\rho(\varphi)$ - полярне рівняння межі області D^*.

<u>Приклад.</u> Обчислити інтеграл $\iint_D (6x-3y)dxdy$, якщо область D - паралелограм, обмежений прямими: $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$ (рис. 4.9).

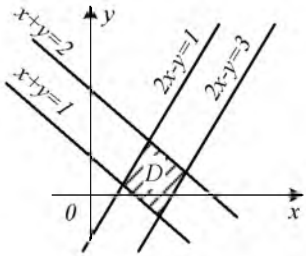


Рис. 4.9

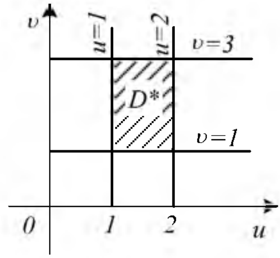


Рис. 4.10

<u>Розв'язання.</u> Безпосереднє обчислення цього інтегралу надто громіздке, тому що як в напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy область D треба розбити на три області і обчислити три подвійних інтегралу.

Виконаємо таку заміну змінних: $x+y=u$, $2x-y=\upsilon$, тоді прямі $x+y=1$ та $x+y=2$ в системі Oxy переходять в прямі $u=1$ та $u=2$ в системі $Ou\upsilon$ (рис. 4.10), а прямі $2x-y=1$ та $2x-y=3$ відповідно в прямі $\upsilon=1$ та $\upsilon=3$. Таким чином, область D (паралелограм) переходить у системі $Ou\upsilon$ у прямокутник D^*. Далі маємо:

$\begin{cases} x+y=u, \\ 2x-y=\upsilon. \end{cases}$ Розв'яжемо цю систему відносно x і y: $\begin{cases} x=(u+\upsilon)/3 \\ y=(2u-\upsilon)/3 \end{cases}$.

Обчислимо частинні похідні і сформуємо за формулою (4.8) якобіан:

$$J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -1/3\,, \quad |J(u,\upsilon)| = 1/3\,.$$

За формулою (4.9) обчислимо даний інтеграл у новій системі координат: $\iint_D (6x-3y)dxdy = \iint_{D^*}\left(6\cdot\frac{1}{3}(u+v) - 3\cdot\frac{1}{3}(2u-v)\right)\frac{1}{3}dudv =$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 3u\,du = u\Big|_1^2 \cdot (u^2/2)\Big|_1^3 = (2-1)\cdot(9-1)/2 = 4.$$

Приклад. Обчислити $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, якщо D - коло радіуса $R=2$ з центром у початку координат.

Розв'язання. Оскільки межа області D в полярній системі координат задається рівнянням $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4$ або $\rho=2$, то за формулою (4.12) маємо:

$$\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi}\left(-\int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\,d(4-\rho^2)/2 = \pi(-2(4-\rho^2)^{3/2}/3\Big|_0^2\right) = -16\pi/3.$$

Приклад. Обчислити $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо область D обмежена колами: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ (рис. 4.11).

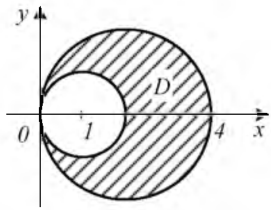


Рис. 4.11

Розв'язання. Знайдемо рівняння межі області D в полярних координатах: $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, звідси $\rho=2\cos\varphi$ - полярне рівняння малого кола; аналогічно знаходимо, що $\rho=4\cos\varphi$ є полярне рівняння великого кола. Кут φ змінюється у межах від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Змінна ρ змінюється у межі від $2\cos\varphi$ до $4\cos\varphi$. Отже, за формулою (4.11) маємо:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (64\cos^3\varphi - 8\cos^3\varphi)d\varphi = \frac{56}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{56}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) = \frac{56}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{224}{9}.$$

ЛЕКЦІЯ № 20

Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії.

Площа плоскої фігури. Якщо в площині *Oxy* задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D, то площу S цієї фігури знаходимо за формулою: $S = \iint_D dxdy$. (4.13)

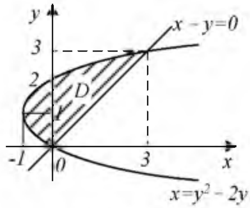


Рис. 4.12

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y$, $x - y = 0$ (рис. 4.12).

Розв'язання. Знайдемо ординати точок перетину даних ліній:

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи дає: $y_1 = 0$, $y_2 = 3$.

За формулою (4.13) знаходимо:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dy \int_{y^2-2y}^{y} dx = \int_0^3 (y - y^2 + 2y)dy = \int_0^3 (3y - y^2)dy = 4,5.$$

Об'єм тіла. Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy, а зверху - поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна і невід'ємна в області D, знаходиться за формулою

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (4.14)$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $y = x^2$ і площинами: $z = 0$, $z = 2 - y$ (рис. 4.13, а).

Розв'язання. Областю D тут є параболічний сегмент (рис.4.13,б), тому $D: \{x^2 \le y \le 2;\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}$. За формулою (4.14):

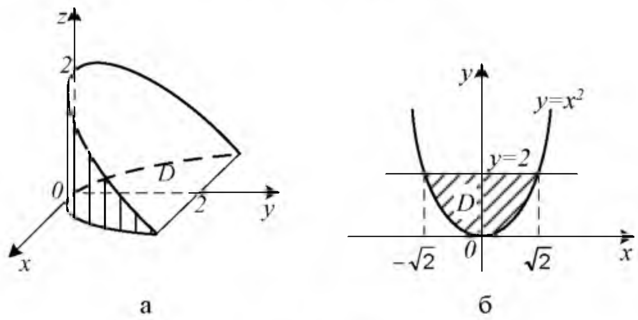


Рис. 4.13

$$V = \iint_D f(x,y)dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2} (2 - y)dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{2} dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2 \right) dx = \frac{32\sqrt{2}}{15}.$$

Площа поверхні. Якщо поверхня σ, задана рівнянням $z = f(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D і функції: $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q поверхні σ знаходять за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\, dxdy. \qquad (4.15)$$

Доведення. Повторимо все те, що робилось при визначенні подвійного інтегралу. Додамо до рис. 3.1. наступне. У точці M_i (рис.

4.14) проведемо дотичну площину Π_i і нормаль $\overline{N_i}$, яким відповідають рівняння (3.43) і (3.44).

На площині Π_i виділимо ту частину, площа її $\Delta\delta_i$, яка проектується на площину Oxy в область ΔS_i. Складемо з них суму: $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\delta_i$. Границю цієї суми, коли найбільший з діаметрів (це величина λ) областей ΔS_i прямує до нуля, а число n цих областей прямує до нескінченності, назвемо площею поверхні $z = f(x,y)$. Тобто

$$Q = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta\delta_i . \tag{4.16}$$

Обчислимо цю границю. Оскільки $\Delta\delta_i$ проектується в ΔS_i, то $\Delta S_i = \Delta\delta_i \cos\gamma_i$, де γ_i кут між $\overline{N_i}$ і ортом $\overline{\kappa}$ (рис. 4.14). Отже, $\Delta\delta_i = \Delta S_i / \cos\gamma_i$ косинус кута між векторами обчислюється за формулою: $\cos\gamma_i = (\overline{N_i}\cdot\overline{\kappa}) / \left|\overline{N_i}\right|\cdot\left|\overline{\kappa}\right|$. Вектор $\overline{N_i}$ має за формулою (3.43) координати: $(f'_x(P_i), f'_y(P_i) - 1)$, а вектор $\overline{\kappa} = (0,0,1)$. Виконавши обчислення, маємо $\cos\gamma_i = 1/\sqrt{f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2 + 1}$ і відповідно: $\Delta\delta_i = \sqrt{f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2 + 1}\ \Delta S_i$.

Останній вираз підставимо у (4.16), зробимо граничний перехід і дістанемо формулу (4.15).

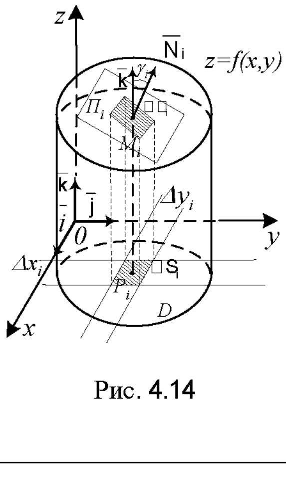
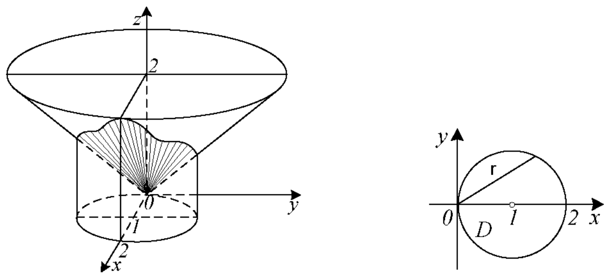


Рис. 4.14

Приклад. Знайти частину площі конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2-2x=0$ (рис. 4.15, а).



а б

Рис. 4.15

Розв'язання. За рівнянням конуса знаходимо частинні похідні:

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Областю інтегрування D тут є коло $x^2+y^2-2x=0$, або $(x-1)^2+y^2=1$ (рис. 4.15,б). За формулою (4.15) площа поверхні дорівнює:

$$Q=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy=\sqrt{2}S=\sqrt{2}\pi,$$

де $S=\pi$ - площа кола радіуса 1. Дійсно, перейшовши у останньому інтегралі до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Маємо: $Q=\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}\rho d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos2\varphi)d\varphi=\pi\sqrt{2}.$$

ЛЕКЦІЯ № 21

Застосування подвійного інтегралу до задач механіки.

Статичні моменти. Центр маси пластини. Нехай матеріальна пластина в площині Oxy має форму області D; густина пластини в точці M (x; y) дорівнює $\gamma=(x,y)$, де $\gamma=(x,y)$ - неперервна функція в області D. Розіб'ємо область D на частини $D_i(i=1,2,...,n)$, виберемо в кожній з них довільну точку $R_i(x_i;h_i)$ і наближено вважатимемо, що маса Δm_i частини D_i дорівнює $\gamma(\xi_i;\eta_i)\ \Delta S_i$, де ΔS_i - площа області D_i. Коли вважати, що кожна з цих мас зосереджена в точці $R_i(x_i;h_i)\in D$, то пластину можна розглядати як систему цих матеріальних точок. Якщо складемо їх, то отримаємо масу пластини: $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$.

Відомо, що статичний момент матеріальної точки відносно деякої вісі дорівнює добутку її маси на відстань до цієї осі. Отже, виконаємо наступне. Домножимо кожну з елементарних мас на відповідну координату, складемо їх і отримаємо статичні моменти пластин: $M_y\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$; $M_x\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ відносно осі Oy й осі Ox відповідно.

Щоб знайти точні значення сформованих інтегральних сум, перейдемо в них до границі при $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d(D_i)\to 0$. Інтегральні суми перейдуть у відповідні подвійні інтеграли:

$$m=\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy\,; \tag{4.17}$$

$$M_y=\iint\limits_{D}x\gamma(x,y)dxdy;\quad M_x=\iint\limits_{D}y\gamma(x,y)dxdy. \tag{4.18}$$

Враховуючи формули (4.17) і (4.18), координати центра мас знаходимо за формулами: $x_c=M_y/m$; $y_c=M_x/m$.

Якщо пластина однорідна, то $\gamma(x,y)=\gamma_0$.

Моменти інерції пластини. Відомо, що момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї і тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Отже, моменти інерції пластини відносно осі Oy й осі Ox

наближено визначатимуться за формулами

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \ ; \ I_x \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \ .$$

Перейшовши до границі в кожній із сум при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n,} d(D_i) \underset{n \to \infty}{\to} 0$, дістанемо точні формули для обчислення моментів інерції розглядуваної пластини відносно координатних осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x, y) dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x, y) dxdy. \qquad (4.19)$$

Знайдемо момент інерції I_0 пластини відносно початку координат. Враховуючи, що момент інерції матеріальної точки $(x; y)$ з масою m відносно початку координат дорівнює $m\ (x^2 + y^2)$, аналогічно одержуємо, що

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dxdy \cdot \qquad (4.20)$$

Приклад. Знайти масу пластини D, обмеженої лініями $y = 0$, $x + y = 2$, $y = x^2$, якщо густина пластини в кожній точці $(x; y)$ дорівнює $\gamma(x, y) = y^2 x$ (рис. 4.16).

Розв'язання. Оскільки $D: \left\{ \sqrt{y} \le x \le 2 - y, \ \ 0 \le y \le 1 \right\}$, то за формулою (4.17) маємо

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y) dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} xy^2 dx = \int\limits_0^1 y^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{(2-y)^2 y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) dy = \int\limits_0^1 \left(2y^2 - \frac{5}{2} y^3 + \frac{y^4}{2} \right) dy = \frac{17}{120}.$$

Приклад. Знайти центр маси однорідної пластини $(\gamma = 1)$, обмеженої кривою $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ і віссю Ox (рис. 4.17).

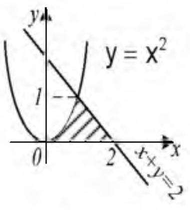


Рис. 4.16

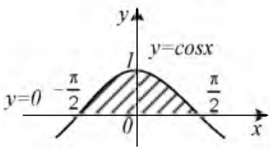


Рис. 4.17

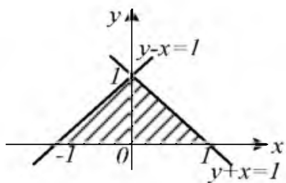


Рис. 4.18

Розв'язання. Внаслідок симетрії пластини відносно осі Oy

маємо $x_c = 0$. Для знаходження y_c скористаємось другою з формул (4.18). В даному разі $D:\left\{0 \le y \le \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$, тому маємо

$$M_x = \iint_D y\gamma(x,y)dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} ydy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4};$$

$$m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\pi}{8}.$$

Отже, центр маси даної пластини міститься у точці з координатами $(0;\frac{\pi}{8})$.

Приклад. Знайти момент інерції i_x, пластини D, обмеженої прямими $y = 0$, $x + y = 1$, $y - x = 1$, якщо густина в кожній точці пластини дорівнює ординаті цієї точки (рис. 4.18).

Розв'язання. Оскільки $D:\{y-1 \le x \le 1-y,\ 0 \le y \le 1\}$, $\gamma(x,y) = y$, то за першою з формул (4.19) маємо

$$I_x = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} y^3 dx = \int_0^1 y^3 x \Big|_{y-1}^{1-y} dy = \int_0^1 (y^3 - y^4 - y^4 + y^3)dy =$$

$$= \int_0^1 (2y^3 - 2y^4)dy = 2(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5})\Big|_0^1 = 2(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 0{,}1.$$

Потрійний інтеграл. Визначення. Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена в деякій тривимірній замкненій обмеженій області G. Розіб'ємо її на n довільних частин з об'ємами $V_i, (i = \overline{1,n})$. Множину цих частин назвемо n-м розбиттям. Нехай $\lambda_n = \max d_i$. В кожній з довільних частин візьмемо навмання точку $N_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо суму

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta V_i. \qquad (4.21)$$

Її називають інтегральною сумою для даної функції в області G, складеної для її n-го розбиття і даного вибору точок $N_i \in \Delta V_i, (i = \overline{1,n})$.

Границя відповідної інтегральної суми при прямуванні до нуля найбільшого з діаметрів λ_n елементарних областей ΔV_i, якщо вона не залежить від способу розбиття області G на елементарні підобласті і вибору в них точок N, називається *потрійним інтегралом* і позначається символом

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\lambda_n \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i . \qquad (4.22)$$

Властивості потрійного інтегралу співпадають з розглянутими вище властивостями визначеного інтегралу й подвійного інтеграла. Має місто і теорема існування потрійного інтегралу. Її розглядати не будемо.

Якщо у (4.22) покласти $f(x,y,z) = 1$, тоді із визначення потрійного інтегралу дістанемо формулу для обчислення об'єму тіла G:

$$V_G = \iiint\limits_G dxdydz . \qquad (4.23)$$

Потрійний інтеграл (4.22) можна тлумачити, як кількість деякої фізичної величини, розподіленої в області G.

Наприклад, в області G розподілена речовина з густиною $\gamma(N)$, тоді наближена маса елемента ΔV_i дорівнює $\Delta m_i \approx \gamma(N_i)\Delta V_i$, а маса всього тіла, якому відповідає область G, $m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Після граничного переходу отримаємо точне значення величини m:

$$m = \iiint\limits_G \gamma(n)dV = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz . \qquad (4.24)$$

ЛЕКЦІЯ № 22

Обчислення потрійного інтегралу. Нехай область G розташована у тривимірній прямокутній системі координат. Вона обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, а з бічних сторін циліндричною поверхнею, і нехай проекція області G на площину *Oxy* утворює область D (рис. 4.19), в якій визначені й неперервні функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$.

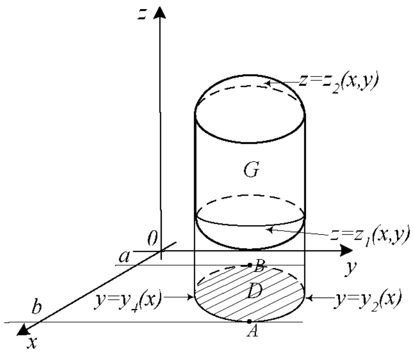


Рис. 4.19

Припустимо, що область G правильна у всіх напрямках. Тобто довільна пряма перетинає її межу не більш ніж у двох точках. Наприклад, прямі паралельні осі Oz, тоді має місце формула:

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iint_D dS \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (4.25)$$

Якщо при цьому область D обмежена лініями: $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$, тоді, при переході від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо формулу

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (4.26)$$

Згідно з цією формулою, обчислення потрійного інтегралу зводиться до послідовного інтегрування по кожній із змінних x, y і z окремо, але спочатку за змінною z, потім за змінною y і зовнішній інтеграл за змінною x. Порядок інтегрування може бути і іншим. Це залежить від розташування області G у просторі Oxyz і її форми.

Наприклад, G є прямокутний паралелепіпед з гранями: $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = h$ і $z = H$, тоді у (4.26) межі інтегрування будуть сталими:

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_h^H f(x,y,z)dz. \qquad (4.27)$$

У цьому випадку інтегрування можна проводити в будь-якому порядку. Якщо область G неправильна, тоді її треба розбити на декілька правильних підобластей. Обчислити інтеграли і результати додати. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz$, де G – куб, обмежений площинами: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Розв'язання. За формулою (4.27) маємо:

$$\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^1 y^2dy\int\limits_0^1 z^3dz=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^1 y^2\frac{z^3}{4}\Big|_0^1 dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^1 y^2dy=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 dx=\frac{1}{12}\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{12}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_G (x+y+z)dV$, де G – піраміда, обмежена площинами: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання. Тут: $z_2=0$ і $z_2=1-x-y$; $y_1=0$ і $y_2=1-x$. Отже, за формулою (4.26) маємо:

$$\iiint\limits_G (x+y+z)dV=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(xz+yz+\frac{z^2}{2})\Big|_0^{1-x-y}dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x+y-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2})dy=$$

$$=\int\limits_0^1((x+y)^2/2-(x+y)^3/3-(1-x-y)^3/6\Big|_0^{1-x})dx=$$

$$=\int\limits_0^1(1/6-x^2/2+x^3/3+(1-x)^3/6)dx=$$

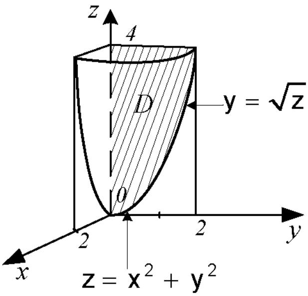
$$=(x/6-x^3/6+x^4/12-(1-x)^4/24)\Big|_0^1=1/6-1/6+1/12+1/24=1/8.$$

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_G 2xdV$, де G обмежена площинами: $x=0$, $y=0$, $z=4$ і параболоїдом $z=x^2+y^2$.

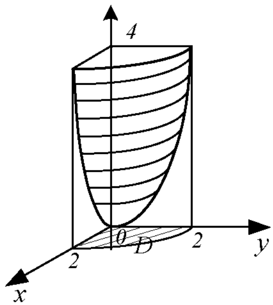
Розв'язання. Зобразимо дану область (рис. 4.20, а) і спроектуємо її на площину yOz. Межі інтегрування: $0\le z\le 4$; $0\le y\le\sqrt{z}$. За формулою (4.26) маємо:

$$\iiint\limits_G 2xdV=2\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{\sqrt{z}} dy\int\limits_0^{\sqrt{z-y^2}} xdx=\int\limits_0^4 dz\int\limits_0^{\sqrt{z}} x^2\Big|_0^{\sqrt{z-y^2}}dy=$$

$$=\int_0^4 dz\int_0^{\sqrt{z}}(z-y^2)dy=\int_0^4 (zy-y^3/3)\Big|_0^{\sqrt{z}}dz=\frac{2}{3}\int_0^4 z^{3/2}dz=\frac{4}{15}z^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\frac{128}{15}$$



а



б

Рис. 4.20

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G zdV$, де G – верхня півкуля $x^2+y^2+z^2=R^2$.

<u>Розв'язання</u>. У площині xOy областю D є коло $x^2+y^2\le R^2$. За формулою (4.26) маємо:

$$\iiint\limits_G zdV=\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}zdz=\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}z^2/2\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dy=$$

$$=\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(R^2-x^2-y^2)/2dy=\int_{-R}^{R}((R^2-x^2)y-y^3/3)/2\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

$=\frac{2}{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{3/2}dx=I$. Робимо заміну змінної: $x=R\sin t$; $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $dx=R\cos tdt$. Отже, $I=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R^2-R^2\sin^2 t)^{3/2}R\cos tdt=$

$$=\frac{2}{3}R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{2}{3}R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3+4\cos 2t+\cos 4t)/8dt=$$

$$=\frac{R^4}{12}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{R^4}{12}\cdot 3\pi=\frac{\pi R^4}{4}.$$

<u>Заміна змінних у потрійному інтегралі</u>. Нехай обмежена, правильна, замкнена область G простору (x,y,z) взаємно однозначно відображається на область G^* простору (u,v,w) за допомогою неперервних диференційованих функцій: $x=x(u,v,w)$; $y=y(u,v,w)$ і $z=z(u,v,w)$ і якобіана відображення $I(u,v,w)$ відмінного від нуля. Тобто

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}\neq 0, \qquad (4.28)$$

матимемо формулу заміни змінних у потрібному інтегралі:

$$\iiint\limits_{Ст} f(x,y,z)dV =$$

$$=\iiint\limits_{G} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|I)(u,v,w)\right|dudvdw. \qquad (4.29)$$

Змінні u,v,w називають криволінійними координатами точки (x,y,z), а вираз $\left|I(u,v,w)\right|dudvdw$ – елементом об'єму у криволінійному просторі.

При розв'язанні інженерних задач найпоширенішим є використання циліндричних і сферичних криволінійних координат. Розглянемо їх.

Циліндричні координати. Точка $M(x,y,z)$ прямокутної системи координат в циліндричних координатах визначається за формулами: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $z=z$. Тут: $0\le\rho\le\infty$; $0\le\varphi<2\pi$; $\infty<z<\infty$ (див. рис. 4.21).

Сферичні координати. Точка $M(x,y,z)$ прямокутної системи координат у сферичних координатах визначається за формулами: $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$; $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$; $z=\rho\cos\theta$, де $0\le\rho<\infty$; $0\le\varphi<2\pi$; $0\le\theta\le\pi$ (див. рис. 4.22).

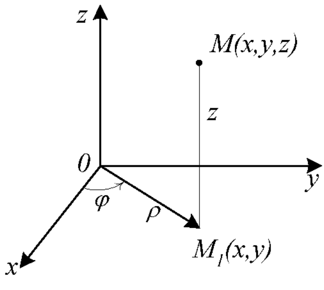
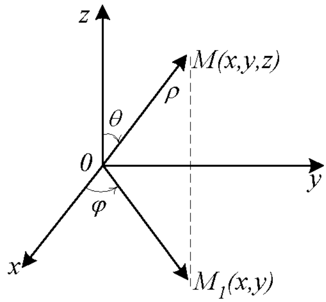


Рис. 4.21



Рим. 4.22

Обчислення потрійного інтегралу в циліндричних або сферичних координатах рекомендується проводити, якщо область G обмежена циліндричними або сферичними поверхнями. У цьому випадку повторний інтеграл у формулах (4.29) матиме сталі границі інтегрування, що значно спрощує їх обчислення.

ЛЕКЦІЯ № 23

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_{G} 2x\,dxdydz$, де G – обмежена площинами: $x=0$, $y=0$, $z=4$ і параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$, використовуючи циліндричну систему координат.

Розв’язання. Обчислимо якобіан відображення прямокутної системи координат у циліндричну:

$$I(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\,;\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz\,. \quad (4.30)$$

Тут: $x'_\rho=\cos\varphi$; $y'_\rho=\sin\varphi$; $z'_\rho=0$; $x'_\varphi=-\rho\sin\varphi$; $y'_\varphi=\rho\cos\varphi$; $z'_\varphi=0$; $x'_z=0$; $y'_z=0$; $z'_z=1$. $|I|=\rho\neq 0$.

Оскільки область G проектується в область D на площину Oxy (рис. 4.20, б) у чверть кола $x^2+y^2=4$, то координата φ змінюється в межах від 0 до $\pi/2$, координата ρ – від 0 до 2. Область G обмежена знизу параболоїдом, а зверху – площиною, тому $z_1=\rho^2$ і $z_2=4$. Підставимо знайдене у (4.29) і з урахуванням (4.30) отримаємо:

$$\iiint_G 2x\,dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{z}d\rho\int_{\rho^2}^{4}2\rho^2\cos\varphi dz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{z}\rho^2(\cos\varphi)z\Big|_{\rho^2}^{4}d\rho=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^{2}\rho^2(4-\rho^2)d\rho=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi(4\rho^3/3-\rho^5/5)\Big|_0^2 d\varphi=$$

$$=64\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=128/15\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}=128/15.$$

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint_G x^2y^2dxdydz$, де G – область, обмежена параболоїдом $z=x^2+y^2$, циліндром $x^2+y^2=4$ і координатною площиною $z=0$.

<u>Розв'язання</u>. Область G проектується на площину xOy в область D (рис. 4.23), яка являє собою коло, радіус якого одиниця.

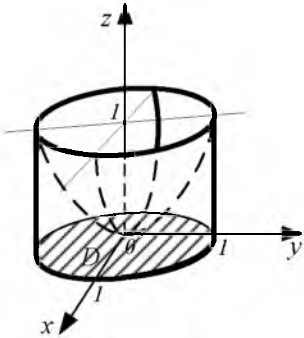


Рис. 4.23

Тому даний інтеграл доцільно обчислювати в циліндричній системі координат. За формулами (4.29) і (4.30) маємо:

$$\iiint_G x^2y^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2}\rho^5d\rho\int_0^{\rho^2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi\int_0^{2}\rho^5 z\Big|_0^{\rho^2}d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi\int_0^{1}\rho^7 d\rho=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\frac{\rho^8}{8}\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{2^8}{2^5}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi=4\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=$$

$$=4\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=8\pi .$$

<u>Приклад</u>. Обчислити $\iiint\limits_G xyz^2 dxdydz$, де G – область, обмежена частиною сфери $x^2+y^2+z^2=4$, розташованою у першому октанту.

<u>Розв'язання</u>. У даному випадку перейдемо до сферичної системи координат. Якобіан відображення прямокутної системи координат у сферичну має вигляд:

$$I(\rho,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta . \qquad (4.31)$$

$$dxdydz=\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi d\rho .$$

Тут: $x'_\rho=\sin\theta\cos\varphi$; $x'_\theta=\rho\cos\theta\cos\varphi$; $x'_\varphi=-\rho\sin\theta\sin\varphi$; $y'_\rho=\sin\theta\sin\varphi$; $y'_\theta=\rho\cos\theta\sin\varphi$; $y'_\varphi=\rho\sin\theta\cos\varphi$; $z'_\rho=\cos\theta$; $z'_\theta=-\rho\sin\theta$; $z'_\varphi=0$. У даному прикладі межі інтегрування за новими змінними такі: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; $0\le\rho\le 2$. Отже

$$\iiint\limits_G xyz^2 dxdydz=\iiint\limits_{G^*}\rho\sin\theta\cos\varphi\,\rho\sin\theta\sin\varphi\,\rho^2\cos^2\theta\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^2\rho^6 d\rho=$$

$$=\frac{1}{4}\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{7}\rho^7\Bigg|_0^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta d\cos\theta=$$

$$=-\frac{2^7}{28}\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{32}{7}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{64}{105} .$$

Загальну рекомендацію щодо застосування тієї чи іншої системи координат дати складно. Це залежить як від області інтегрування, так і від вигляду підінтегральної функції.

Деякі застосування потрійних інтегралів.

Обчислення об'єму. Як було встановлено вище, об'єм V області G може бути обчислений за допомогою потрійного інтегралу за формулою (4.23). Ця формула більш універсальна, ніж відповідна формула, яка виражає об'єм тіла за допомогою подвійного інтегралу.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=6-x^2-y^2$.

Розв'язання. Перша поверхня є круговий конус з віссю обертання Oz. Друга поверхня є параболоїд обертання навколо вісі Oz. Ці поверхні перетинаються по лінії $x^2+y^2=4$*, яка проектується на площину xOy в область D (рис. 4.24). Оскільки область D є коло, то інтегрування виконуємо в циліндричній системі координат:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_\rho^{6-\rho^2}dz=\varphi\Big|_0^{2\pi}\int_0^2\rho z\Big|_\rho^{6-\rho^2}d\rho=$$

$$=2\pi\int_0^2\rho(6-\rho^2-\rho)d\rho=2\pi\left(\frac{6\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^2=$$

$$=2\pi\left(12-4-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}\pi .$$

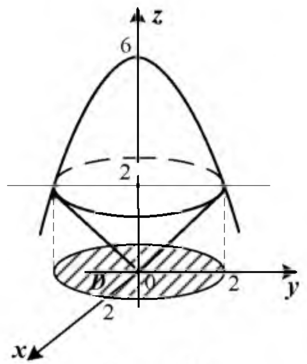


Рис. 4.24

*Лінія перетину поверхонь знаходиться з системи:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 6 - x^2 - y^2. \end{cases}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 6 - x^2 - y^2. \quad \sqrt{x^2 + y^2} = t; \quad t \ge 0; \quad t = 6 - t^2;$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}; \quad t_1 = 2; \quad t_2 = -3.$$ Отже, $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$; $x^2 + y^2 = 4$.

ЛЕКЦІЯ № 24

<u>Задачі механіки</u>. Нехай речовину неперервно розподілено в тривимірній області G з густиною $\gamma(x,y,z) = \gamma(N)$. Розділемо G на елементарні частини. Маса відповідної елементарної частини дорівнює $dm = \gamma dV$, де $dV = dxdydz$ – елемент об’єму в декартовій системі координат. Елементарні статичні моменти відносно координатних площин визначаються рівностями

$$dM_{xy} = zdm; \; dM_{yz} = xdm; \; dM_{xz} = ydm.$$

Після граничного переходу маса і статичні моменти тіла, якому відповідає область G, визначаються відповідними формулами:

$$m = \iiint\limits_{Ст} \gamma dV; \; M_{xy} = \iiint\limits_{Ст} z\gamma dV; \; M_{yz} = \iiint\limits_{Ст} x\gamma dV; \; M_{xz} = \iiint\limits_{Ст} y\gamma dV. \quad (4.34)$$

Координати центра маси (x_c, y_c, z_c) тіла задовольняють співвідношення

$$x_c = M_{yz} / m, \; y_c M_{xz} / m, \; z_c = M_{xy} / m, \quad (4.35)$$

згідно з визначенням цього поняття.

Елементарні моменти інерції відносно координатних осей дорівнюють:

$$dI_x = (y^2 + z^2)dm; \; dI_y = (x^2 + z^2)dm; \; dI_z = (x^2 + y^2)dm,$$

де $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $x^2 + y^2$ – квадрати віддалей точки $N(x,y,z)$ від відповідної вісі Ox, Oy, Oz. Згідно з визначенням, моментом інерції системи точок відносно осі називають суму добутків мас цих точок на квадрати їх віддалі до осі. Отже, моменти інерції всього тіла дорівнюють:

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\gamma dV; \quad I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\gamma dV; \; I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\gamma dV. \; (4.36)$$

Момент інерції тіла відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma dV. \quad (4.37)$$

Приклад. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $2z = x^2 + y^2$ і кулею $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Розв'язання. Маємо тіло обертання навколо осі Oz (рис. 4.25). Тіло однорідне, тому візьмемо $\gamma(x, y, z) = 1$. Оскільки вісь Oz є віссю симетрії тіла, то $x_c = y_c = 0$. Отже, шуканою є величина z_c.

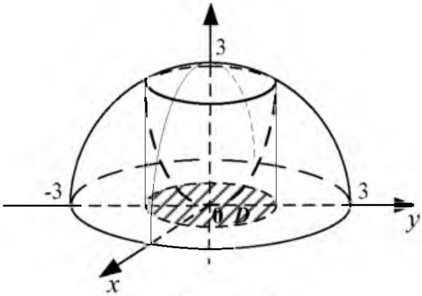


Рис. 4.25

Але спочатку знайдемо проекцію лінію перетину даних поверхонь з системи:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2z. \end{cases} \qquad 2z + z^2 = 3; \qquad z^2 + 2z - 3 = 0;$$

$$z_{1.2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2; \; z_1 = 1; \; z_2 = -3.$$

З другого рівняння виходить, що $z \geq 0$. Отже, лінія перетину даних поверхонь є коло $x^2 + y^2 = 2$, яке проектується на площину xOy в область інтегрування D з межами: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$; $-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$. Оскільки тіло має осьову симетрію, то розглянемо її четверту частину, розташовану у першому октанті. За формулою (4.34) маємо: $m = \iiint\limits_G dV = 4 \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dz =$

$$= 4 \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\sqrt{3 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dy = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (\rho\sqrt{3 - \rho^2} - \rho^3 / 3) d\rho =$$

$$= -2\pi((3 - \rho^2)^{3/2} / 3 + \rho^4 / 8) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(\sqrt{3} - 5/6).$$ У повторному

інтегралі перейшли до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $dxdy=\rho d\rho d\varphi$. Цей перехід виконайте самостійно.

За формулою (4.35) обчислимо аналогічно статичний момент:

$$M_{xy}=\iiint\limits_G zdV=4\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}dy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}}z\,dz=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}z^2\Big|_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}}dy=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left(3-(x^2+y^2)-\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right)dy=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}(3y-x^2y-y^3/3-(x^4y+2x^2y^3/3+y^5/5))\Big|_0^{\sqrt{2-x^2}}dx=$$

$$=\frac{4}{15}\int_0^{\sqrt{2}}(16-6x^2-x^4)\sqrt{2-x^2}dx=I\,.$$

У останньому інтегралі зробимо заміну змінної: $x=\sqrt{2}\sin t$, $dx=\sqrt{2}\cos tdt$, де $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Отримаємо: $I=\frac{4}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16-12\sin^2t-4\sin^4t)2\cos^2tdt=$

$$=\frac{4}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16-6(1-\cos 2t)-(1-\cos 2t)^2(1+\cos 2t)dt=\frac{5}{3}\pi\,.$$

Інтегрування тригонометричного виразу у останньому інтегралі виконайте самостійно. За формулою (4.35) обчислюємо: $z_c=M_{xy}/m=\frac{5}{3}\pi/(2\pi(\sqrt{3}-5/6))=5/(6\sqrt{3}-5)$. Центр маси даного тіла міститься у точці $(0;0;5/(6\sqrt{3}-5))$.

<u>Приклад</u>. Знайти момент інерції однорідного $(\gamma=1)$ циліндричного тіла, висота якого H, а радіус основи R, відносно вісі, яка є діаметром основи циліндра.

<u>Розв'язання</u>. Нехай вісь Oz напрямлена вздовж вісі циліндра; основа циліндра лежить у площині $Oxy(z=0)$ і центр основи

збігається з початком координат (рис. 4.26). Момент інерції тіла будемо шукати відносно осі Oy .

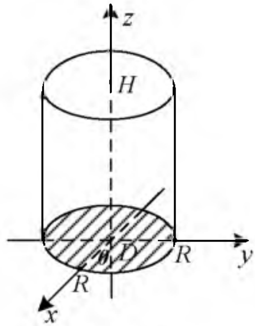


Рис. 3.26

Скористаємося формулою (4.36). Область D являє собою коло $x^2+y^2=R^2$.

Отже, $I_y=\iiint\limits_G(x^2+z^2)dV=4\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int\limits_0^H(x^2+z^2)dz=$

$$=4\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(x^2z+z^3/3)\Big|_0^H dy=4H\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}(x^2+H^2/3)dx=I\ .$$

Зробимо заміну змінної: $x=R\sin t$; $dx=R\cos tdt$, де $t\in[0;\pi/2]$.

$$I=4HR^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(R^2\sin^2 t+H^2/3)dt=HR^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt+\frac{4}{3}H^3R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt$$

$$=\frac{HR^4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt+\frac{4}{3}H^3R^2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{HR^4}{2}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{4}{3}H^3R^2\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{HR^4}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}H^3R^2\pi=(3R^2+4H^2)\pi R^2H/12.$$

Отже, момент інерції даного тіла відносно осі Oy, яка є діаметром основи циліндра, дорівнює $(3R^2+4H^2)\pi R^2H/12$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Физматгиз, 1959. - 432 с.
2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. - М.: Физматгиз, 1961. - 300 с.
3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Физматгиз, 1963. - 748 с.
4. Цубербиллер О.М. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Физматгиз, 1966. - 336 с.
5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Для ВТУЗОВ - М.: "Наука", 1973. - 720 с.
6. Російсько-український словник. – К.: "Радянська школа", 1979. - 1012 с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: "Наука", 1985. - 384 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1, ч.2: Учебное пособие для втузов. - М.: «Наука», 1985. – С. 430, 560.
9. Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів. – К.: "Вища школа", 1988. - 414 с.
10. Вища математика. Основні розділи. Книга 1. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1995. – 372 с.
11. Вища математика. Спеціальні розділи. Книга 2. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1996. – 336 с.
12. Печеніжський Ю.Є., Станішевський С.О., Тихонович О.Ю. Посібник для розв'язування задач з вищої математики. – Х.: ХНАМГ, 2003. – 125 с.
13. Станішевський С.О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
14. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: „Вид-во А.С.К.”, 2003. – 648 с.
15. Короткий російсько-український математичний словник. Печеніжський Ю.Є., Колосов А.І., Станішевський С.О. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 100 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

***МОДУЛЬ* 2**

Напрям підготовки 6.060101

Автор: Степан Олександрович Станішевський

Редактор: *М.З. Аляб'єв*

План 2009, поз. 68Л

Підп. до друку 25.04.2009 р.
Папір офісний
Тираж 100 прим.
Замовл. №

Формат 60х84 1/16
Умовн.-друк. арк. 4,7
Друк на ризографі

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12