Richard P. Runyon

NONPARAMETRIC STATISTICS

A Contemporary Approach

Addison-Wesley Publishing Company

Р. Рунион

СПРАВОЧНИК ПО НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Современный подход

Перевод с английского Е. З. ДЕМИДЕНКО
Предисловие Ю. Н. ТЮРИНА

Москва «Финансы и статистика» 1982

ББК 22.172
Р86

Р $\frac{0702000000^{*}\text{-}012}{010(01)\text{-}82}$ 39-81

* Второй индекс 1702060000.

© 1977 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts USA

© Перевод на русский язык, предисловие, предметный указатель, «Финансы и статистика», 1982

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая читателю книга Р. Руниона «Справочник по непараметрической статистике» посвящена непараметрическим методам, популярность которых среди исследователей постоянно возрастает. Это объясняется широкой областью их применения, устойчивостью выводов, простотой математических средств. Непараметрические методы в настоящее время составляют сложившуюся систему обработки данных, по своим возможностям сопоставимую с гауссовской.

В математической статистике можно выделить два подхода к решению одних и тех же задач. Эти подходы обусловили возникновение двух больших групп методов, в определенной мере противостоящих и конкурирующих.

Одна группа включает методы обработки, основанные на предпосылке, что наблюдения имеют закон распределения, принадлежащий к тому или иному параметрическому семейству — гауссовскому, показательному и т. п. Наиболее важным для приложений является гауссовское семейство. В течение долгого времени статистическая техника, базирующаяся на предположении нормальности, была основной в обработке реальных данных.

Исторически случилось так, что первой была построена именно гауссовская статистика. По-видимому, это объясняется тем, что основными потребителями математической статистики в прошлом были такие дисциплины, как астрономия или геодезия, где было достигнуто высокое качество измерений. Ошибки в измерениях имели ясно выраженное нормальное распределение.

Другая группа методов не предполагает использование какого-либо параметрического семейства, поэтому их называют непараметрическими. Эти методы основаны на более фундаментальных свойствах случайных величин (например, непрерывности распределения) и часто могут применяться для обработки данных, не обладающих количественной природой.

С постепенным переходом многих других наук на количественную основу появилась потребность в обработке данных, не имеющих гауссовского характера. В частности, таковы многие задачи экономики, психологии, социологии, биологии и т. д. К подобным данным трудно подобрать подходящее параметрическое семейство. К тому же выводы обычно надо делать по малым выборкам. Если априори закон распределения неизвестен, то по такой выборке тип закона установить невозможно. В этих условиях непараметрические методы оказываются незаменимыми.

Непараметрические методы начали развиваться значительно позднее, чем гауссовские, в основном в послевоенные годы. Их возможности интенсивно расширялись. Сейчас значительная доля той статистической техники, которая составляет гауссовскую линейную модель, имеет непараметрические эквиваленты.

Непараметрические методы обладают рядом преимуществ перед гауссовскими. Основные из них — более широкое поле приложений, меньшая чувствительность к «засорениям» статистических данных, к влиянию грубых ошибок, попавших в статистический материал. В настоящее время поиски устойчивых правил, т. е. способов обработки, результаты которой мало чувствительны к «засорениям», составляют одно из важных направлений теории. Математические средства в непараметрической статистике намного проще тех, что необходимы в гауссовской статистике.

Может показаться, что при сравнении параметрических и непараметрических методов все преимущества на стороне последних. Однако это не так. Гауссовские методы там, где они применимы, дают более точные результаты, и поэтому забвение им не грозит. Это особенно касается малых выборок. В случае больших выборок преимущества точных (гауссовских) методов, как показывают исследования, часто невелики, если, конечно, применение их вообще оправдано.

В настоящее время ощущается острый недостаток в литературе, посвященной непараметрическим методам, которая была бы адресована широкому кругу читателей. Книга Р. Руниона относится как раз к таким изданиям. Она поможет читателям с минимальной математической подготовкой разрешать некоторые статистические проблемы непараметрическими методами.

Выбранный автором стиль своеобразен: книга представляет собой собрание проработанных примеров применения непараметрических методов. Основное внимание уделено вычислительной стороне. Решение задач разделено на отдельные шаги. Параллельно тем примерам, которые разбирает автор, в каждом разделе читатель получает статистические данные, которые он должен обрабатывать самостоятельно по той же схеме, шаг за шагом. Есть и другие упражнения, закрепляющие вычислительные навыки.

Книга снабжена набором таблиц, необходимость в которых может возникнуть при применении описанных в ней приемов[1].

Подзаголовок книги «Современный подход» отчасти может быть объяснен принципом расположения материала по мере увеличения силы используемой шкалы, в которой он измерен, — от номинальной шкалы к порядковой и далее к интервальной и абсолютной.

Понятие «шкала» для данной книги не является принципиально важным, но, поскольку автор к нему часто обращается, о нем стоит сказать несколько слов.

Начнем с привычной шкалы термометра или какого-нибудь другого измерительного прибора. По положению столбика ртути можно узнавать температуру, по положению стрелки прибора — какую-то измеряемую характеристику физического объекта. Результатом измерения является число. Такое число, как характеристика системы,

[1] Читателю можно рекомендовать также: Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., Наука, 1965.

в более сложных ситуациях может быть получено и каким-либо косвенным образом.

В математическом смысле шкалой называют правило, по которому состояния системы характеризуются числами. Итак, шкала — это переход от физического (или другого) объекта к числу. В данном смысле шкалой будет любая календарная система — моменту времени приписывается определенная дата. Шкалу представляет собой и принятая в школе система оценок, выставляемых ученикам в зависимости от их успехов.

Упомянутые шкалы — длин, температур, времени, успехов — различаются не только по содержанию. Между ними есть и важные формальные различия.

Как уже было сказано, результатом измерения в любой шкале является число. С числами же можно проводить арифметические и другие операции. Результаты некоторых операций имеют содержательный смысл и истолковываются в рамках данной шкалы. Допустим, что мы измеряем длины предметов. Если x и y — длины отрезков a и b, то $x + y$ — длина отрезка, полученного приставлением a к b, $|x - y|$ — разница длин отрезков, xy — площадь прямоугольника, образованного этими отрезками, и т. п. Однако x^y или, например, $\log x$ для нас не имеют содержательного толкования.

Если же x и y — две календарные даты, причем $x > y$, то $x - y$ имеет смысл — это время, прошедшее от одного события до другого. Однако $x + y$, xy, x/y и т. п. содержательного смысла лишены.

Для показателей по шкале успехов еще меньше осмысленных соотношений: осмысленно их можно лишь сравнивать по величине, т. е. из соотношения отметок $x < y$ для учеников a и b можно лишь заключить, что a учится хуже, чем b. Если же $y - x = 1$, то утверждение «успехи b на 1 выше, чем успехи a» не объясняет, каково различие между ними. Шкала успехов служит примером порядковой шкалы.

Выделяют еще номинальную шкалу, где числа служат всего лишь для различения отдельных возможностей, как бы для их названия. Никаких содержательных соотношений, кроме $x = y$ и $x \neq y$, между такими числами нет. Конечно, выбор чисел (т. е. номинальной шкалы) вместо реальных имен или других способов идентификации не обязателен.

При работе с книгой Р. Руниона читателю следует иметь в виду, что предложение автора (раздел 6.1) обрабатывать результаты испытаний Бернулли с несколькими исходами с помощью критерия Смирнова дает так называемую консервативную процедуру. Ее реальный уровеиь значимости, будучи ниже назначенного, остается неизвестным. Он тем ближе к номинальному, чем больше число исходов в одном испытании.

Автор выбрал рецептурный стиль изложения. Это позволяет ему сообщить довольно много сведений, хотя некоторые принципиальные вопросы при этом остались в тени. Например, соображениям, на основании которых для данной задачи выбран именно этот статистический критерий, внимания не уделяется. Поэтому читатель, встретившись в своей деятельности с той или иной проблемой, должен найти ей аналогичную, рассмотренную в книге.

Проверка статистических гипотез непараметрическими методами составляет основное содержание книги. Необходимо отметить, что проверка гипотезы, в частности нулевой, как правило, лишь начало статистического исследования. После того, как нулевая гипотеза отвергнута, иадо делать более содержательные выводы из статистического материала, в частности проводить точечное и интервальиое оценивание. Непараметрические методы дают и такие возможности.

Книга Р. Руниона — одно из первых на русском языке подробных руководств по непараметрическим методам, рассчитанное на экономистов, статистиков, социологов и т. д. Она будет доступна читателям с элементарной математической подготовкой, проявляющим интерес к математической статистике или сталкивающимся с ней в своей работе. Книга расширит возможности исследователей и поможет им использовать адекватные статистические средства.

Ю. Н. ТЮРИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — третья из серии моих книг, посвященных различным аспектам современного статистического анализа. Подзаголовок «Современный подход» приводится с целью подчеркнуть два важных обстоятельства, которые в ней обсуждаются: 1) пригодность статистических методов для широкого спектра современных дисциплин; 2) возможность получить достаточно глубокое представление о сущности предмета и овладеть соответствующими вычислительными методами без привлечения множества сложных формул и изощренных математических доказательств.

Данная книга отражает накопленный автором многолетний опыт преподавательской работы и составления руководств по статистике. Она является попыткой представить авторское понимание реализации процесса обучения в той области, к которой многие студенты относятся со смешанным чувством трепета и опасения. В этом отношении уместно указать на несколько особенностей книги.

1. Расположение материала позволяет студентам проследить шаг за шагом решение конкретной статистической задачи и тут же использовать полученные знания для выполнения серии упражнений по рассматриваемому вопросу. Как известно, немедленное повторение значительно улучшает процесс усвоения и запоминания материала.

2. Кроме того, студенты могут проверить правильность своих ответов, сверив их с решениями, которые даются в конце книги. Там, где это необходимо, решения представлены достаточно подробно, что позволит студентам обнаружить причину ошибки, если их ответы расходятся с приведенными в тексте. В книге содержится несколько сот упражнений и ответов на них.

3. В работе неоднократно встречаются повторения. Например, критерий χ^2 впервые упоминается в гл. 3 как приближенный критерий для биномиальной переменной. Впоследствии он повторяется в гл. 5 и 8 при описании критерия значимости изменений Макнимара и критерия знаков.

4. Поскольку повторение нарочито «встроено» в текст, отдельные главы могут рассматриваться как самостоятельные разделы. Эта особенность делает книгу ценной не только как пособие, но и как справочник по вычислительным методам. Например, если исследователь хочет, чтобы его помощник воспользовался критерием рандомизации в случае с однородными группами, то он может обратить его внимание на гл. 11.

5. При подборе таблиц, включенных в приложение, большое внимание уделялось тому, чтобы сделать их более удобными (например, путем приведения по мере возможности односторонних и двусторонних критических значений) при одновременном уменьшении вероятности ошибки. Кроме того, несколько таблиц были построены спе-

циально для этой книги, например табл. А и В, в которых содержатся односторонние критические значения биномиальной переменной для различных значений P и Q при N, изменяющихся от 2 до 49.

6. Наконец, при изложении процедуры вычисления тестовой статистики особое внимание уделялось описанию различных способов проверки правильности вычислений.

Книга имеет несколько назначений. Она может служить пособием при начальном изучении теории статистического вывода. Хотя основной упор сделан на описании вычислительных процедур, в приводимых для их иллюстрации примерах и упражнениях содержится большое количество понятийного материала. Благодаря «блочному» характеру построения книги она полезна при самостоятельном изучении, что в настоящее время достаточно широко распространено. Для таких курсов предлагаемый набор тестов будет особенно полезным, поскольку каждая глава книги включает отдельное описание не менее двух альтернативных форм проверки статистических гипотез.

Книга может служить также вспомогательным пособием в дополнение к основным учебникам. Как показывает опыт автора, студенты часто чувствуют себя неуверенно, поскольку их неумение вычислить значение определенной статистики отрицательно сказывается на процессе содержательного усвоения материала. При использовании студентами этой книги в качестве вспомогательного пособия преподаватель может посвящать время аудиторных занятий изучению наиболее важных теоретических аспектов статистического анализа.

Настоящая книга хорошо согласуется с существующей литературой по статистике, поскольку она охватывает большую часть затрагиваемых авторами тем с привлечением минимального количества вычислительных формул.

Туксон, Аризона, *Р. П. РУНИОН*
март 1977 г.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В традиционном курсе по теории статистического вывода основное внимание уделяется критериям значимости, для которых базовой моделью служит кривая нормального распределения. Примерами подобных *параметрических критериев значимости* являются t-отношение Стьюдента и дисперсионный анализ (ANOVA).

Вместе с тем следует отметить, что существует большое количество данных, либо вообще не поддающихся анализу с помощью кривой нормального распределения, либо не удовлетворяющих основным предпосылкам, необходимым для ее использования. Рассмотрим, например, результаты опросов общественного мнения, когда ответы чаще всего имеют форму «да» или «нет». Полученные с их помощью сведения представляются в виде таблиц, в которых содержатся данные о количестве положительных и отрицательных ответов. Статистические методы, связанные с нормальным распределением, не подходят для работы с полученными подобным образом данными. Поэтому в последние годы появились многочисленные непараметрические критерии, которые оказываются полезными в тех случаях, когда применение «нормальных» статистических методов либо сомнительно, либо неуместно.

Поскольку непараметрические критерии значимости не требуют предварительных предположений относительно вида исходного распределения, их обычно называют критериями значимости, не зависимыми от распределения.

Цели главы

1. Познакомиться со способами определения вероятности.

2. Узнать, как использовать биномиальное распределение для вычисления вероятности наступления различных событий.

3. Установить различие между односторонними и двусторонними значениями вероятности.

4. Познакомиться с понятием «выборочное распределение».

5. Научиться строить выборочное распределение двузначных генеральных совокупностей.

6. Выяснить, как выборочное распределение используется для вычисления значений вероятности различных событий.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ КАК ОТНОШЕНИЯ

Наиболее распространенным способом определения вероятности является выражение ее в виде отношения. Это отношение может изменяться от 0 до 1, причем при $p = 0$ вероятность наступления рассматриваемого события равна нулю; наоборот, при $p = 1$ данное событие произойдет обязательно.

Примеры

а) Если $p = 0,50$, то событие может произойти в 50 случаях из 100 (или в одном случае из двух).

б) Если $p = 0,95$, то событие может произойти в 95 случаях из 100.

в) Если $p = 0,25$, то наступление события возможно в 25 случаях из 100 (или в одном случае из четырех).

Вероятность может быть представлена и как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к общему числу возможных исходов:

$$p_A = \frac{\text{число исходов, благоприятствующих событию } A}{\begin{array}{l}\text{число исходов,}\\ \text{благоприятствующих}\\ \text{событию } A\end{array} + \begin{array}{l}\text{число исходов,}\\ \text{не благоприятствующих}\\ \text{событию } A\end{array}}.$$

Примеры

а) Если определить выпадение орла как событие A, а выпадение решки — как событие не A, то вероятность выпадения орла при одном подбрасывании монеты составит:

$$p_A = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

б) Если определить выпадение 2 очков при одном подбрасывании игральной кости как событие A, а выпадение 1, 3, 4, 5 и 6 очков — как событие не A, то вероятность выпадения 2 очков составит:

$$p_A = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}.$$

Упражнения

1. Объясните, что означает равенство $p = 0,05$.
2. Объясните, что означает равенство $p = 0,01$.
3. Найдите значение p при условии, что событие может произойти в 40 случаях из 100.
4. Какова вероятность наступления события, если известно, что оно может произойти в 75 случаях из 100?

Из колоды игральных карт в 52 листа наугад выбирается одна карта. Какова вероятность того, что она окажется:

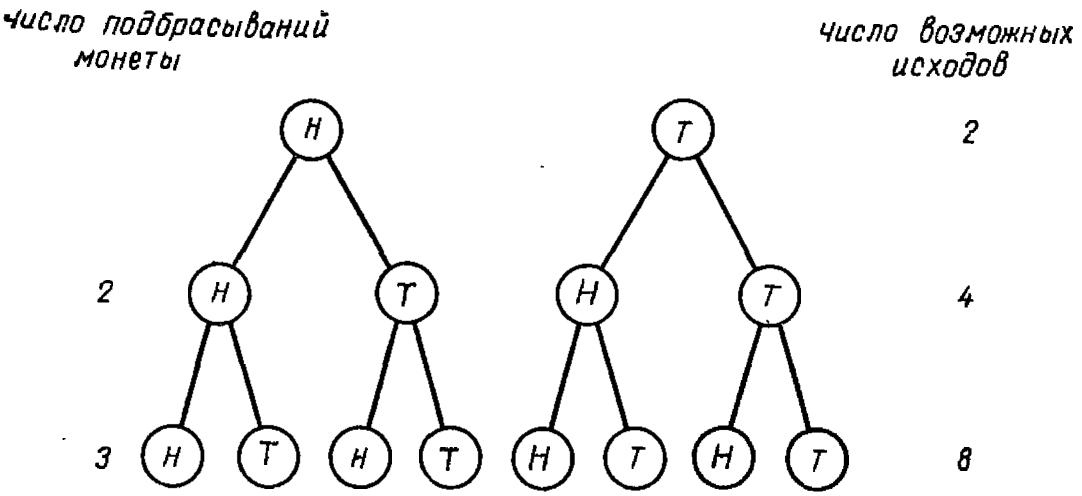
5. Тузом пик?
6. Просто тузом?
7. Картой трефовой масти?
8. Картой черной масти?
9. Девяткой красной масти?
10. Картой старше десятки (туз считается старшей картой)?

Полный перебор двузначных событий

Многие совокупности, с которыми исследователю приходится иметь дело, состоят из элементов двух типов, например, «да—нет», «мужской—женский», «орел—решка», «верный—неверный» и т. д. Такие совокупности называются дихотомическими или двузначными. Возможные результаты экспериментов, проводимых на двузначных совокупностях, часто могут быть получены путем перебора, а вероятности различных исходов могут быть заранее вычислены.

Пример

Представьте себе, что вы участвуете в эксперименте с подбрасыванием монеты. При подбрасывании монеты один раз возможны два исхода: выпадение орла и выпадение решки. Оба исхода равновероятны, т. е. p_H (вероятность выпадения орла) $= p_T$ (вероятность выпадения решки)[1] $= \frac{1}{2}$. При подбрасывании монеты дважды возможны четыре исхода: два орла, орел и решка, решка и орел, две решки. Если не учитывать последовательность выпадений орла и решки, то все возможные результаты эксперимента могут быть описаны следующим образом: существует только один способ получить два орла, два способа получить орел и решку и один способ получить две решки. Эти результаты представлены на следующей схеме:



Если при первом подбрасывании монеты выпадает орел, то при втором может выпасть либо орел, либо решка. Если и при втором подбрасывании выпадет орел, то при третьем может выпасть либо орел, либо решка. Рассматривая каждый из этих вариантов, можно перечислить все 8 возможных исходов:

HHH HHT HTH HTT THH THT TTH TTT

Заметьте, что существует только один способ получить все три орла (*HHH*), три способа получить два орла и одну решку (*HHT*, *HTH*,

---

[1] *H* — первая буква английского слова «Head» (орел), а *T* — слова «Tail» (решка). — *Примеч. пер.*

ТНН), три способа получить один орел и две решки (*НТТ*, *ТНТ*, *ТТН*) и один способ получить все три решки (*ТТТ*).

Теперь можно построить распределение частот возможных результатов. По данным о трех подбрасываниях монеты ($N = 3$) мы получаем следующее распределение:

Возможный результат	f
Три орла	1
Два орла	3
Один орел	3
Ни одного орла	1
Σ	8

Разделив частоту каждого возможного результата на общее число возможных результатов, мы получаем следующее распределение вероятностей:

Возможный результат (x)	f	p_x
Три орла	1	0,125
Два орла	3	0,375
Один орел	3	0,375
Ни одного орла	1	0,125
Σ	8	1,000

Теперь мы можем отвечать на вопросы, касающиеся вероятностей различных исходов.

Примеры

а) Какова вероятность выпадения двух и более орлов при трех подбрасываниях монеты?

$$p_{x \geqslant 2} = p_{x=2} + p_{x=3} = 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5.$$

б) Какова вероятность выпадения трех и более орлов при трех подбрасываниях монеты?

$$p_{x \geqslant 3} = p_{x=3} = 0{,}125.$$

Упражнения

11. Трех человек попросили ответить в форме «да» или «нет» на некоторый вопрос. Перечислите все возможные результаты.

12. У игрального кубика 6 граней (шестизначная переменная), которые пронумерованы от 1 до 6. Кубик подбрасывается 2 раза. Перечислите все возможные результаты (под результатом здесь понимается сумма цифр на выпавших сторонах кубика).

13. Постройте распределение частот возможных результатов, полученных в упражнении 11.

14. Постройте распределение частот возможных результатов, полученных в упражнении 12.

15. Постройте распределение вероятностей, используя распределение частот из упражнения 13.

16. Постройте распределение вероятностей, используя распределение частот из упражнения 14.

В соответствии с распределением вероятностей, полученным в упражнении 16, ответьте на следующие вопросы:

17. Какова вероятность получения суммы, равной 10 и более очкам?
18. Какова вероятность получения суммы, равной 3 и менее очкам?
19. Какова вероятность получения суммы в 11 и более очков?
20. Какова вероятность получения суммы, равной 4 и менее очкам?
21. Какова вероятность получения суммы, равной 2 и менее очкам?

Односторонние и двусторонние значения вероятности

В приведенных примерах значения вероятности были получены при рассмотрении только одного конца распределения. При этом задавались вопросы следующего типа: «Какова вероятность выпадения двух или более орлов при трех подбрасываниях монеты?». В теории статистического вывода часто возникает необходимость найти значение вероятности, которое учитывало бы оба конца распределения, т. е. определить вероятность того, что результат эксперимента будет больше одного или меньше другого заранее выбранного значения.

Примеры

а) Рассмотрим результат, выражающийся в выпадении трех и более орлов или связанный с выпадением k и менее орлов, причем $p_{x\geqslant 3} = p_{x\leqslant k}$[1]. Необходимо определить вероятность подобного результата при трех подбрасываниях монеты. Поскольку отсутствие орлов (выпадение 3 решек) столь же маловероятно, как и выпадение 3 орлов, общая вероятность определяется путем суммирования вероятностей на каждом из концов распределения:

$$p_{x=3 \text{ или } x=0} = p_{x=3} + p_{x=0} = 0,125 + 0,125 = 0,25.$$

б) Игральный кубик подбрасывается 2 раза. Какова вероятность того, что сумма цифр на выпавших сторонах его будет столь же редкой, как и сумма в 3 и менее очка? Поскольку сумма в 11 или 12 очков столь же маловероятна, как и сумма, равная 3 или 2 очкам, двустороннее значение вероятности составит:

$$p_{x\leqslant 3 \text{ или } x\geqslant 11} = p_{x=3} + p_{x=2} + p_{x=11} + p_{x=12} =$$
$$= 0,0556 + 0,0278 + 0,0556 + 0,0278 = 0,1668.$$

Упражнения

Используя распределение вероятностей, построенное в упражнении 16, ответьте на следующие вопросы:

22. Какова вероятность получения результата, столь же редкого, как и выпадение суммы в 5 и менее очков?

---

[1] В дальнейшем подобный результат будем называть столь же редким, как и выпадение n и более орлов (в данном случае $n = 3$). — *Примеч. пер.*

23. Какова вероятность получения результата, столь же редкого, как и выпадение суммы в 12 очков?

24. Какова вероятность получения результата, столь же редкого, как и выпадение суммы в 9 и более очков?

25. Какова вероятность получения результата, столь же редкого, как и выпадение суммы в 6 и менее очков?

1.2. ВЫБОРОЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Одним из основных понятий теории статистического вывода (как параметрической, так и непараметрической) является понятие выборочного распределения. *Выборочное распределение — это теоретическое распределение вероятностей возможных значений некоторой выборочной статистики, которое получилось бы в том случае, если бы мы смогли извлечь все возможные выборки определенного объема из данной генеральной совокупности.*

В выборочном распределении содержатся теоретические значения вероятностей, по отношению к которым можно проверять предположения относительно различных выборочных статистик. Когда мы получили распределение вероятностей выпадения орлов при трех подбрасываниях монеты, мы фактически построили выборочное распределение двузначной переменной при $N = 3$. Вспомните, что с помощью этого распределения были выражены вероятности различных результатов (один орел, два орла и т. д.).

Приведем выборочное распределение дихотомической (биномиальной) переменной при $N = 12$ и $P = Q = \frac{1}{2}$[1]:

Число орлов (x)	f	p_x	Число орлов (x)	f	p_x
12	1	0,0002	5	792	0,1934
11	12	0,0029	4	495	0,1208
10	66	0,0161	3	220	0,0537
9	220	0,0537	2	66	0,0161
8	495	0,1208	1	12	0,0029
7	792	0,1934	0	1	0,0002
6	924	0,2256	Σ	4 096	0,9998*

* Разница в 0,0002 связана с ошибкой округления.

Теперь сформулируем проблему следующим образом: представьте, что у вас имеются результаты эксперимента, в котором использовалась дихотомическая переменная; вам надо решить, *вероятно ли*, что этот результат был получен на основе генеральной совокупности, выборочное распределение которой приведено выше (т. е. совокупности, для которой $P = Q = \frac{1}{2}$).

Чтобы облегчить процесс принятия решений, сформулируем контрольное правило:

[1] P и Q — вероятность появления отдельных значений переменной при $N = 1$. — *Примеч. пер.*

а) Если рассматриваемое событие (или событие, еще менее вероятное) будет происходить не чаще чем в 5% всех возможных случаев, то мы сделаем вывод о том, что данный результат *не был* получен исходя из совокупности в 12 подбрасываний монеты. Будем называть этот вывод *отклоняющим* решением.

б) Если же рассматриваемое событие (или событие, еще менее вероятное) будет происходить чаще чем в 5% случаев, мы допустим возможность получения такого результата на основе описанной выше совокупности. Подобный вывод в дальнейшем будем называть *принимающим* решением.

Заметьте, что *принимающее* решение не равносильно утверждению о том, что данное событие или результат были получены на основе известной совокупности. Оно просто указывает на достаточно большую вероятность правильности подобного утверждения.

Примеры

а) Вероятно ли, что результат, выражающийся в выпадении трех и менее орлов, был получен исходя из совокупности в 12 подбрасываний монеты?

$$p_{x \leqslant 3} = p_{x=3} + p_{x=2} + p_{x=1} + p_{x=0} = 0{,}0537 + 0{,}0161 + 0{,}0029 + 0{,}0002 = 0{,}0729.$$

Поскольку $p_{x \leqslant 3}$ больше 0,05, мы выбираем *принимающее* решение.

б) Вероятно ли выпадение 11 и более орлов при 12 подбрасываниях монеты?

$$p_{x \geqslant 11} = p_{x=11} + p_{x=12} = 0{,}0029 + 0{,}0002 = 0{,}0031.$$

Поскольку $p_{x \geqslant 11}$ меньше 0,05, мы принимаем *отклоняющее* решение.

В соответствии с нашим правилом мы делаем вывод о малой вероятности результата, связанного с выпадением 11 орлов при 12 подбрасываниях «правильной» монеты (т. е. монеты, для которой $P = Q = \frac{1}{2}$).

Упражнения

На основе выборочного распределения биномиальной совокупности при $N = 12$ и $P = Q = \frac{1}{2}$ определите, каким должно быть решение — отклоняющим или принимающим — при ответе на следующие вопросы:

26. Вероятно ли, что результат, столь же редкий, как и выпадение 3 и менее орлов, был получен на основе совокупности в 12 подбрасываний монеты?

27. Вероятно ли получение результата, столь же редкого, как и выпадение 10 и более орлов, при 12 подбрасываниях монеты?

28. Вероятно ли выпадение 3 и менее орлов при 12 подбрасываниях монеты?

29. Вероятно ли, что результат, столь же редкий, как и выпадение 9 и более орлов, был получен на основе совокупности в 12 подбрасываний монеты?

Проверка статистических гипотез. Уровень значимости

Зная выборочное распределение статистики, мы можем рассматривать одни события как обычные, другие — как сравнительно редкие, третьи — как исключительные. Теория вероятностей дает основу для таких суждений. Более того, если мы считаем наступление события (например, результата эксперимента) исключительным явлением, то можно сделать вывод, что причиной наступления редкого или исключительного события являются неслучайные факторы (например, влияние экспериментальной переменной). Доказательство для подобного вывода также дает теория вероятностей.

В предыдущем разделе мы фактически применяли одно из общепринятых пороговых значений, предназначенных для выявления действия неслучайных факторов (при принятии отклоняющих решений). Это пороговое значение называется *уровнем значимости, равным 0,05*. Когда отклоняющее решение принимается при таком уровне значимости, результат эксперимента считают статистически значимым на 5%-ном уровне.

Если некоторое событие (или событие, еще менее вероятное) происходит не чаще чем в 5% всех возможных исходов, мы считаем себя вправе утверждать, что результаты эксперимента обусловлены действием неслучайных факторов.

Многие ученые предпочитают *использовать уровень значимости, равный 0,01* или *1%-ный уровень значимости*. Если некоторое событие (или событие, еще менее вероятное) происходит не чаще чем в 1% всех возможных исходов, мы утверждаем, что результаты эксперимента обусловлены неслучайными факторами. Подобные результаты эксперимента принято считать статистически значимыми на 1%-ном уровне.

Примеры

а) Если исследователь использует 5%-ный уровень значимости, а вероятность, связанная с результатом эксперимента, равна 0,03, то он приписывает этот результат действию неслучайных факторов.

б) Если для оценки того же результата исследователь использовал бы 1%-ный уровень значимости, то он не стал бы связывать его с действием неслучайных факторов, т. е. выбрал бы *принимающее* решение.

Уровень значимости, устанавливаемый исследователем для принятия *отклоняющего* решения, называется *α-уровнем*. При 1%-ном уровне значимости $\alpha = 0{,}01$, при 5%-ном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Упражнения

В приведенных упражнениях заданы уровень значимости и p-значение, соответствующее результату эксперимента. Установите, какое решение следует выбрать — *отклоняющее* или *принимающее*.

30. Уровень значимости 0,05; $p = 0{,}65$.
31. Уровень значимости 0,01; $p = 0{,}009$.
32. Уровень значимости 0,01; $p = 0{,}025$.
33. Уровень значимости 0,05; $p = 0{,}025$.
34. Уровень значимости 0,01; $p = 0{,}10$.
35. Уровень значимости 0,05; $p = 0{,}49$.
36. Уровень значимости 0,05; $p = 0{,}049$.
37. Уровень значимости 0,01; $p = 0{,}012$.
38. Определите значение α при условии, что исследователь пользуется 1%-ным уровнем значимости.
39. Определите значение α при условии, что исследователь пользуется 5%-ным уровнем значимости.

Проверка статистических гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы

Прежде чем приступить к проведению эксперимента, исследователь выдвигает две взаимоисключающие гипотезы. Одна из них является статистической гипотезой, которую исследователь обычно предполагает отклонить; она называется *нулевой гипотезой* (H_0). В нулевой гипотезе выдвигаются различные предположения относительно значений одного или нескольких параметров исходной совокупности. Например, в генеральной совокупности доля лиц, которые дают положительный ответ на определенный вопрос, равна 0,5, или доли женщин и мужчин, отвечающих положительно на этот вопрос, равны между собой.

Примеры

а) При проверке «правильности» монеты нулевая гипотеза выглядит следующим образом:

H_0: монета сбалансирована, т. е. $p_H = p_T = \frac{1}{2}$, где p_H — вероятность выпадения орла; p_T — вероятность выпадения решки.

б) Проводится эксперимент с целью определить возможность появления нежелательных побочных эффектов при приеме некоторого лекарства. Для этого одна группа пациентов (X_1) принимает лекарство, а вторая группа (X_2) — плацебо[1].

H_0: доля лиц, ощущающих нежелательные побочные эффекты после приема лекарства, совпадает с долей лиц, ощущающих те же эффекты после приема плацебо, т. е.

$$P_1 = P_2,$$

где P_1 — доля генеральной совокупности, представленной выборкой X_1; P_2 — доля генеральной совокупности, представленной выборкой X_2.

Альтернативная гипотеза (H_1) фактически отрицает нулевую гипотезу. Если в нулевой гипотезе утверждается, что между долями совокупностей, из которых были извлечены две выборки, различия не существует, то альтернативная гипотеза утверждает, что такое различие есть. В альтернативной гипотезе обычно содержатся выдвигаемые исследователем предположения.

Примеры

Для случая а) из предыдущего примера:

H_1: монета не сбалансирована, т. е. $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$.

Для случая б) из предыдущего примера:

H_1: лекарство воздействует на зависимую переменную, т. е. $P_1 \neq P_2$ или $P_1 - P_2 \neq 0$.

Упражнения

40. Исследователь хочет выяснить, можно ли доказать наличие дискриминации со стороны предпринимателя при найме рабочей силы. С этой целью уста

[1] Безвредное лекарство, не оказывающее фармакологического действия. — *Примеч. пер.*

новлены доля мужчин и доля женщин среди претендентов, получивших определенную должность. Сформулируйте нулевую гипотезу.

41. При конструировании приборной доски нового самолета рассматривается возможность использования двух типов циферблатов: круглых и прямоугольных. Были проведены эксперименты с двумя группами лиц, каждая из которых работала за приборной доской с определенным типом циферблатов. В каждой группе установлена доля лиц, совершивших ошибки во время работы. Сформулируйте нулевую гипотезу.

42. Сформулируйте H_1 для случая из упражнения 40.

43. Сформулируйте H_1 для ситуации, описанной в упражнении 41.

Направленные и ненаправленые гипотезы

Иногда исследователь выдвигает достаточно детализированную теорию или собирает достаточное количество данных, которые позволяют предсказать в альтернативной гипотезе направление различия. В таком случае в альтернативной гипотезе содержится утверждение о предполагаемом направлении этого различия.

Пример

Исследователь предполагает, что некоторое лекарство приводит к большей доле нежелательных побочных эффектов. Группа X_1 принимает лекарство, а группа X_2 — плацебо. Альтернативная гипотеза будет следующей:

H_1: $P_1 > P_2$, т. е. в генеральной совокупности доля нежелательных побочных эффектов больше при приеме лекарства, чем при приеме плацебо.

Если альтернативная гипотеза направленная, то такой же будет и нулевая гипотеза. Для рассмотренного примера нулевая гипотеза будет следующей:

H_0: $P_1 \leqslant P_2$, т. е. доля нежелательных побочных эффектов при приеме лекарства не превосходит доли тех же эффектов при приеме плацебо.

Направленные альтернативные гипотезы проверяются с помощью односторонних критериев значимости, а для проверки ненаправленных альтернативных гипотез применяются двусторонние критерии.

Примеры

а) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний и одностороннее p-значение рассматриваемого события равно 0,05, то мы принимаем H_0, поскольку двустороннее p-значение равно 0,10 и превосходит $\alpha = 0{,}05$.

б) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний и одностороннее p-значение рассматриваемого события равно 0,05, то мы отклоняем H_0, поскольку одностороннее p-значение равно α. Следовательно, принимается H_1.

в) Если $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний и одностороннее p-значение рассматриваемого события равно 0,004, то мы отклоняем H_0, поскольку двустороннее p-значение, равное 0,008, меньше α. Следовательно, принимается H_1.

Упражнения

44. Сформулируйте H_0 и H_1 для упражнения 40. Исследователь предполагает, что доля мужчин, получивших предложеиие занять определенную должность, превосходит долю женщин, получивших аиалогичное предложение.

45. Сформулируйте H_0 и H_1 для упражиения 41. Исследователь предполагает, что использование прямоугольных циферблатов приводит к большей доле ошибок.

Заданы α и p-значение, соответствующие результатам эксперимента; необходимо решить, следует ли отклонить H_0:

46. $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний, $p = 0{,}007$ (одностороннее).
47. $\alpha = 0{,}01$, критерий одиосторонний, $p = 0{,}009$ (одностороиее).
48. $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний, $p = 0{,}03$ (одностороннее).
49. $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний, $p = 0{,}04$ (двустороиее).
50. $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний, $p = 0{,}01$ (одностороннее).
51. $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний, $p = 0{,}02$ (одиостороннее).
52. $\alpha = 0{,}05$, критерий одностороиний, $p = 0{,}06$ (одностороннее).
53. $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний, $p = 0{,}008$ (двустороннее).

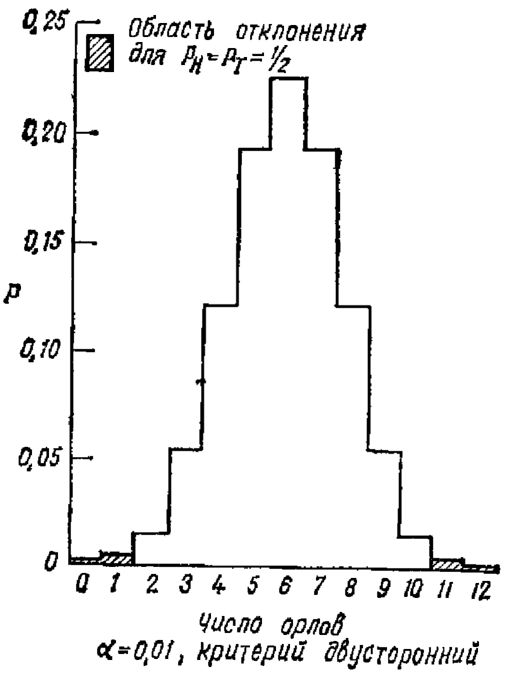
Понятие критического значения

Большая часть таблиц, применяемых исследователями и статистиками, не содержит данных о значениях вероятности для тех выборочных распределений, к которым они обращаются. Чаще всего эти таблицы позволяют найти *критические значения*, определяющие *область отклонения* гипотезы при различных уровнях α. Область отклонения состоит из *тех значений статистики, которые приводят к отклонению нулевой гипотезы.*

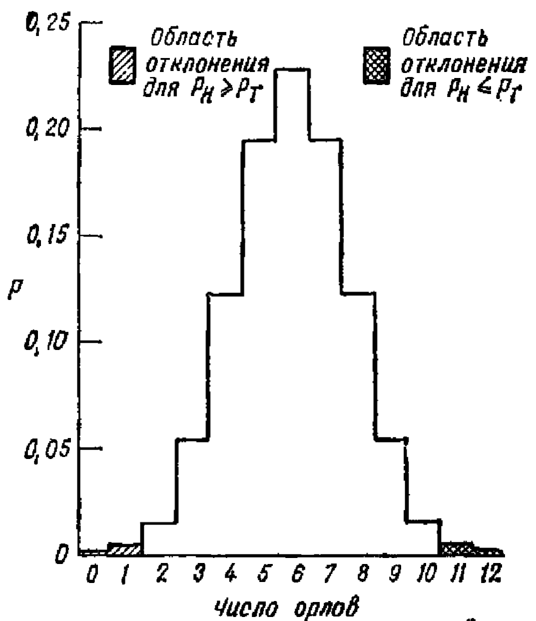
Для иллюстрации приводятся четыре гистограммы, где показаны области отклонения H_0 для биномиальной переменной при $N = 12$ и $P_H = P_T = \frac{1}{2}$.

Примеры

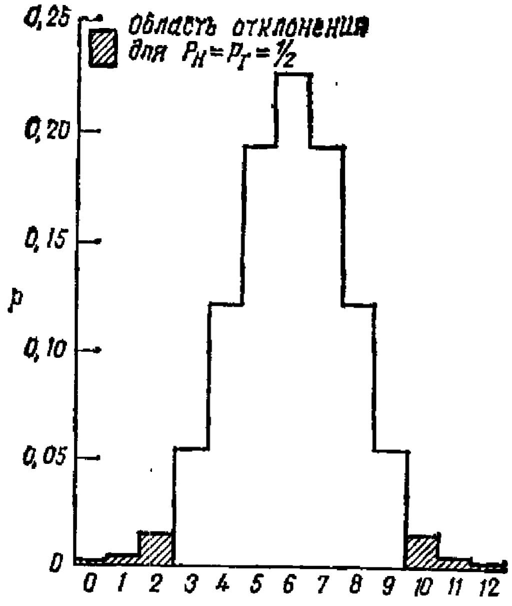
а) Если H_0: $P_H = P_T = \frac{1}{2}$, H_1: $P_H \neq P_T \neq \frac{1}{2}$, $N = 12$, $\alpha = 0{,}05$ и $x \leqslant 2$ или $x \geqslant 10$, то H_0 отклоняется.



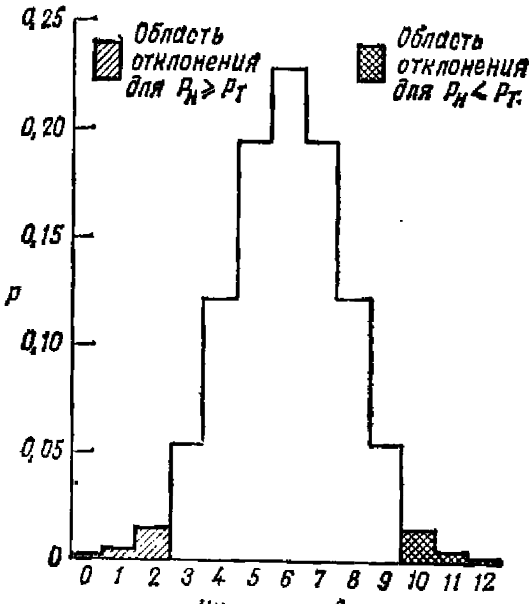
$\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний



$\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний



$\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний



$\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний

б) Если H_0: $P_H \leqslant P_T$, H_1: $P_H > P_T$, $N = 12$, $\alpha = 0{,}01$ и $x \geqslant 11$, то H_0 отклоняется.

Критические значения статистики x (или $N - x$, если $N - x > x$) содержатся в табл. А для случаев, когда $5 \leqslant N \leqslant 50$ и $P = Q = \frac{1}{2}$.

Пример

Против фирмы выдвинуто обвинение в дискриминации женщин при приеме на работу. Изучение документов фирмы показало, что за ряд последних лет на определенную должность было получено одинаковое количество заявок как от мужчин, так и от женщин. Всего на эту должность было принято 19 мужчин и 6 женщин.

Дано: $H_0: P = Q = \frac{1}{2}$;

$H_1: P \neq Q \neq \frac{1}{2}$;

$N = 25, \; x = 19, \; \alpha = 0{,}05$.

Обращение к табл. А при $\alpha = 0{,}05$ (критерий двусторонний) и $N = 25$ показывает, что необходимое для отклонения H_0 значение x должно быть больше или равно 18. Поскольку наблюдаемое значение x больше 18 ($x = 19$), мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Таким образом, выясняется, что преобладание мужчин среди получивших работу претендентов является значимым.

Упражнения

В каждом из следующих упражнений заданы H_0, H_1, α-уровень и x. Укажите, лежит ли значение x внутри критической области.

54. H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$, H_1: $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$, $\alpha = 0{,}01$, $N = 16$, $x = 12$.

55. H_0: $P \leqslant Q$, H_1: $P > Q$, $\alpha = 0{,}05$, $N = 23$, $x = 19$.

56. H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$, H_1: $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$, $\alpha = 0{,}01$, $N = 45$, $x = 31$.

57. H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$, H_1: $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$, $\alpha = 0{,}05$, $N = 36$, $x = 30$.

58. H_0: $P \leqslant Q$, H_1: $P > Q$, $\alpha = 0{,}01$, $N = 49$, $x = 34$.

Контрольные вопросы к главе 1

1. В каких границах изменяется вероятность: а) — 1 и 1; б) 0 и 1; в) 0,5 и 1; г) 0 и — 1?

2. Если p-значение равно 1, то это означает, что событие: а) несомненно произойдет; б) может произойти в одном случае из 100; в) вряд ли произойдет; г) несомненно не произойдет.

3. Если событие может произойти в 28 случаях из 100, то связанная с ним вероятность равна: а) 2,80; б) 28,00; в) 0,028; г) 0,28.

4. Если $p = 0,6$, то событие может произойти: а) в 60 случаях из 100; б) в 60 случаях из 1000; в) в 6 случаях из 100; г) в 6 случаях из 1000.

5. Если событию A благоприятствует 70 исходов и не благоприятствует 140, то p_A равно: а) 0,70; б) 0,50; в) 0,67; г) 0,33.

6. Если число исходов, благоприятствующих событию A, равно 50, а число исходов, благоприятствующих событию не A, равно 25, то p_A составит: а) 2,00; б) 1,00; в) 0,67; г) 0,33.

7. Если число исходов, благоприятствующих событию A, равно 60, а число исходов, благоприятствующих событию не A, составляет 90, то $p_{\text{не } A}$ равно: а) 1,50; б) 0,67; в) 0,60; г) 0,40.

8. Если четырех человек попросить ответить в форме «да» или «нет» на некоторый вопрос, то общее количество возможных результатов будет равно: а) 4; б) 8; в) 16; г) 12.

Вопросы 9—12 основываются на следующей таблице, в которой показано распределение вероятностей возможных результатов при пяти подбрасываниях сбалансированной монеты:

Возможные результаты (x)	f	p_x
Пять орлов	1	0,03
Четыре орла	5	0,16
Три орла	10	0,31
Два орла	10	0,31
Один орел	5	0,16
Ни одного орла	1	0,03
Σ	32	1,00

9. Вероятность выпадения четырех и более орлов при пяти подбрасываниях монеты равна: а) 0,16; б) 0,19; в) 0,32; г) 0,38.

10. Вероятность того, что при 5 подбрасываниях монеты не выпадет ни одного орла, равна: а) 0,03; б) 0,00; в) 0,06; г) 0,19.

11. Вероятность получения результата, столь же редкого, как и выпадение четырех и более орлов, равна: а) 0,16; б) 0,19; в) 0,32; г) 0,38.

12. Вероятность получения результата, столь же редкого, как и выпадение пяти орлов, равна: а) 0,06; б) 1,00; в) 0,03; г) 0,97.

Вопросы 13—20 основываются на следующем выборочном распределении дихотомической переменной, для которой $P = Q = \frac{1}{2}$:

Число событий для P-значения (x)	p_x	Число событий для P-значения (x)	p_x
13	0,0001	6	0,2095
12	0,0016	5	0,1571
11	0,0095	4	0,0873
10	0,0349	3	0,0349
9	0,0873	2	0,0095
8	0,1571	1	0,0016
7	0,2095	0	0,0001

13. Какое из перечисленных значений x приводит к принятию *отклоняющего решения* при $\alpha = 0{,}05$ и одностороннем критерии: а) $x = 10$; б) $x = 9$; в) $x = 4$; г) $x = 5$?

14. На основе какого из приведенных значений x можно принять *отклоняющее решение* при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии: а) $x = 2$; б) $x = 10$; в) $x = 12$; г) $x = 11$?

15. Какое из следующих значений x ведет к принятию *отклоняющего решения* при $\alpha = 0{,}01$ и одностороннем критерии: а) $x = 11$; б) $x = 12$; в) $x = 2$; г) $x = 10$?

16. Какое из следующих значений x ведет к принятию *отклоняющего решения* при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии: а) $x = 12$; б) $x = 11$; в) $x = 3$; г) $x = 4$?

17. Какое из следующих значений x приведет к выбору *принимающего решения* в случае проверки H_0: $P \leqslant Q$ и H_1: $P > Q$ при $\alpha = 0{,}05$ и одностороннем критерии: а) $x = 13$; б) $x = 12$; в) $x = 10$; г) $x = 3$?

18. Какое из перечисленных значений x приводит к выбору *принимающего решения* в случае проверки H_0: $P = Q$ и H_1: $P \neq Q$ при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии: а) $x = 13$; б) $x = 0$; в) $x = 11$; г) $x = 12$?

19. Критические значения при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии определяются условиями: а) $x \geqslant 12$, $x \leqslant 1$; б) $x \geqslant 11$, $x \leqslant 2$; в) $x \geqslant 12$, $x \leqslant 2$; г) $x \geqslant 10$, $x \leqslant 3$.

20. Критическое значение в случае проверки гипотезы H_1: $P > Q$ при $\alpha = 0{,}01$ и одностороннем критерии определяется условием: а) $x \geqslant 12$; б) $x \leqslant 3$; в) $x \geqslant 11$; г) $x \leqslant 2$.

Практическое задание

21. Задано распределение частот дихотомической переменной, для которой $P = Q = \frac{1}{2}$:

Число событий для P-значения (x)	f	p_x	Число событий для P-значения (x)	f	p_x
14	1		6	3 003	
13	14		5	2 002	
12	91		4	1 001	
11	364		3	364	
10	1 001		2	91	
9	2 002		1	14	
8	3 003		0	1	
7	3 432		Σ	16 384	

На основе этих данных необходимо построить распределение вероятностей (с точностью до четырех десятичных знаков) и ответить на следующие вопросы:

а) найдите критическое значение для проверки H_1: $P > Q$ при $\alpha = 0{,}05$;
б) найдите критическое значение для проверки H_1: $P \neq Q$ при $\alpha = 0{,}05$;
в) найдите критическое значение для проверки H_1: $P < Q$ при $\alpha = 0{,}05$;
г) найдите критическое значение для проверки H_1: $P > Q$ при $\alpha = 0{,}01$;
д) найдите критическое значение для проверки H_1: $P \neq Q$ при $\alpha = 0{,}01$;
е) найдите критическое значение для проверки H_1: $P < Q$ при $\alpha = 0{,}01$.

Глава 2

МОЩНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ *

Еще десять лет назад внимание большинства исследователей было сосредоточено на одном типе ошибки, возможной при принятии статистических решений, а именно ошибки, состоящей в ложном отклонении верной нулевой гипотезы. Поэтому значение α-уровня, определяющее степень риска совершить ошибку подобного типа, задается обычно достаточно малым, равным 0,05 или 0,01. Ошибка, связанная с ложным отклонением верной нулевой гипотезы, называется ошибкой I рода или ошибкой α-типа. Существует и другой тип ошибки, интерес к которой за последнее время значительно возрос. Это ошибка II рода, или ошибка β-типа, которая имеет место всякий раз, когда мы принимаем ложную нулевую гипотезу. Если вероятность совершить ошибку I рода устанавливается достаточно легко — она равна α, то для ошибки II рода ее необходимо специально вычислять. В данной главе мы рассмотрим способы вычисления вероятности ошибки II рода (β-типа), а также выясним, как эта вероятность связана со статистической мощностью критерия.

В непараметрической статистике важную роль играют понятия «мощность» и «эффективность». Это связано с тем, что непараметрические критерии обычно используются вместо параметрических. Если соблюдаются основные предпосылки использования параметрического критерия, то в результате подобной замены может увеличиться вероятность ошибки II рода, поскольку параметрические критерии в большинстве случаев более мощные, чем их непараметрические аналоги.

В этой главе мы обсудим способы вычисления вероятности ошибки II рода, используя биномиальное выборочное распределение для иллюстрации процедуры расчетов. Также будет рассмотрено важное понятие эффективности критерия и показано, как можно увеличить мощность непараметрического критерия до уровня, равного мощности аналогичного параметрического критерия.

Цели главы

1. Определить различие между ошибками I рода (α-типа) и II рода (β-типа).

2. Выяснить, при каких обстоятельствах могут возникнуть ошибки каждого типа.

3. Познакомиться с понятием мощности статистического критерия.

4. Познакомиться с понятием эффективности критерия.

5. Узнать, как можно увеличить мощность непараметрического критерия.

---

* Все таблицы, приведенные в данной главе, взяты из «Tables of the Binomial Probability Distribution», Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics, Series 6 (corrected 1954 edition).

Существуют два типа статистических решений, которые можно принять при проверке гипотез: отклонить H_0 в том случае, когда вероятность интересующего нас события не превосходит приемлемого α-уровня (обычно при $p \leqslant 0{,}01$ или $p \leqslant 0{,}05$); принять H_0, если вероятность интересующего нас события превышает α. С каждым из этих решений связан определенный риск совершить ошибку.

Если мы отклоняем H_0 (т. е. считаем H_0 ложной) в то время, как в действительности H_0 верна, то мы совершаем ошибку, состоящую в неправильном отклонении нулевой гипотезы. Этот тип ошибки называется ошибкой I рода или ошибкой α-типа.

Если же мы принимаем H_0 (т. е. не соглашаемся с альтернативной гипотезой) в то время, как в действительности H_0 является ложной, то мы совершаем ошибку, которая заключается в неправильном принятии нулевой гипотезы. Подобного типа ошибка называется ошибкой II рода или ошибкой β-типа.

Примеры

а) H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}03$, значение двустороннее. Статистическое решение: H_0 является ложной. Фактический статус H_0: верная.

Ошибка: I рода, отклонение верной H_0.

б) H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}04$, значение двустороннее. Статистическое решение: H_0 является ложной. Фактический статус H_0: ложная.

Ошибка: ошибки не было. Поскольку H_0 является ложной, статистическое решение было принято правильно.

в) H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}10$, значение двустороннее. Статистическое решение: H_0 принимается. Фактический статус H_0: ложная.

Ошибка: II рода, принятие ложной H_0.

г) H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}006$, значение двустороннее. Статистическое решение: H_0 отклоняется. Фактический статус H_0: ложная.

Ошибка: ошибки не было, поскольку принято статистическое решение об отклонении действительно ложной H_0.

Ошибка I рода (α-типа) может быть сделана только тогда, когда H_0 верна, поскольку по определению этот тип ошибки связан с неверным отклонением истинной нулевой гипотезы.

Пример

Если $\alpha = 0{,}01$, вероятность совершения ошибки I рода равна 0,01.

Ошибка II рода (β-типа) может быть сделана только тогда, когда H_0 является ложной, поскольку по определению этот тип ошибки связан с неверным принятием ложной H_0. Вероятность совершить ошибку II рода может быть получена только путем вычисления.

Упражнения

Для каждого из упражнений 1—5 заданы H_0, α, полученное значение p, а также известен истинный статус H_0. Выясните, была ли сделана ошибка при принятии статистического решения. Если да, укажите тип ошибки.

1. H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний. Известно, что $p = 0{,}008$, значение одностороннее (в ожидаемом направлении). Фактический статус H_0: верная.

2. H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}08$, значение двустороннее. Фактический статус H_0: верная.

3. H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}06$, значение двустороннее. Фактический статус H_0: ложная.

4. H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}03$, значение двустороннее. Фактический статус H_0: ложная.

5. H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}005$, значение двустороннее. Фактический статус H_0: ложная.

6. Чему равна вероятность совершить ошибку I рода, если $\alpha = 0{,}05$?

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ II РОДА

В процессе вычисления ошибки II рода выделяются два основных шага: а) определение критического значения, необходимого для отклонения H_0 при «нулевом» распределении, и б) определение вероятности появления критического значения (или значения, еще менее вероятного) при «истинном» выборочном распределении статистики.

Для иллюстрации вычисления вероятности ошибки II рода воспользуемся данными одной выборки из двузначной (биномиальной) совокупности. Будем предполагать, что нам известны «истинные» значения вероятностей P и Q для генеральной совокупности. Тогда вероятность выбора неверного решения (принятия ложной нулевой гипотезы, ошибка II рода) будем вычислять путем оценивания ее относительно нулевого распределения.

Дано:

$$P = 0{,}50,\ Q = 0{,}50,\ N = 14,\ H_0\text{: } P \leqslant 0{,}30,\ Q \geqslant 0{,}70,$$
$$H_1\text{: } P > 0{,}30,\ Q < 0{,}70,\ \alpha = 0{,}05,\ \text{критерий односторонний.}$$

На практике, когда истинное распределение неизвестно, вероятность ошибки II рода можно оценить путем принятия определенных предположений, основывающихся на выборочной статистике. Однако рассмотрение подобной процедуры выходит за пределы данной книги.

Определение критического значения, необходимого для отклонения H_0 при нулевом распределении

Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): выборка была извлечена из генеральной совокупности, для которой $P \leqslant 0{,}30$ и $Q \geqslant 0{,}70$.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): выборка была извлечена из генеральной совокупности, для которой $P > 0{,}30$ и $Q < 0{,}70$.

в) *Статистический критерий*: биномиальный критерий.

Таблица 2.1. Накопленные биномиальные вероятности, связанные с различными значениями x (число событий для P-значения) при $P=0,30$ и $P=0,50$, $N=14$ (данные таблицы округлены до четвертого знака после запятой)

	x	Нулевое распределение, $P=0,30$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0,50$, Σp_x	
	14	0,0000	0,0001	
	13	0,0000	0,0009	
	12	0,0000	0,0065	
	11	0,0002	0,0287	
	10	0,0017	0,0898	
	9	0,0083	0,2120	
Критическое значение при H_0 →	8	0,0315	0,3953	← Вероятность правильного решения
	7	0,0933	0,6047	Область ошибки II рода
	6	0,2195	0,7880	
	5	0,4158	0,9102	
	4	0,6448	0,9713	
	3	0,8392	0,9935	
	2	0,9525	0,9991	
	1	0,9932	0,9999	
	0	1,0000	1,0000	

г) *Выборочное распределение*: биномиальное распределение, у которого $N = 14$, $P = 0,30$ для нулевого распределения и $P = 0,50$ для истинного распределения.

д) *Критическое значение*: в табл. 2.1 содержатся накопленные вероятности (накопление идет от $x = 14$ к $x = 0$), соответствующие различным значениям x при $P = 0,30$ и $P = 0,50$, причем эти значения являются односторонними; обратившись к нулевому распределению ($P = 0,30$), мы обнаруживаем, что результату $x \geqslant 8$ соответствует вероятность, равная 0,0315.

Определение вероятности появления критического значения при истинном выборочном распределении статистики

Вспомним, что $x = 8$ — критическое значение для отклонения H_0 при нулевом распределении, в котором $P = 0,30$ и $N = 14$. Любое значение, равное или большее 8, приводит к отклонению H_0 и принятию H_1. Рассмотрев столбец для $P = 0,50$ при $x = 8$, мы находим вероятность появления этого значения при *истинном* распределении. Значение $p = 0,3953$ свидетельствует о том, что примерно в 40% случаев принимается правильное решение (т. е. отклоняется ложная H_0). Вычитая это значение из 1, находим вероятность ошибки II рода, или ошибки β-типа, которая равна 0,6047. Отсюда видно, что примерно в 60% случаев мы не сможем принять правильного решения.

Упражнения

В упражнениях 7—10 используются следующие данные: $P = 0,50$, $Q = 0,50$, $N = 14$; H_0: $P \leqslant 0,20$, $Q \geqslant 0,80$; H_1: $P > 0,20$, $Q < 0,80$; $\alpha = 0,05$, критерий односторонний.

x	Нулевое распределение, $P=0,20$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0,50$, Σp_x	x	Нулевое распределение, $P=0,20$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0,50$, Σp_x
14	0,0000	0,0001	6	0,0439	0,7880
13	0,0000	0,0009	5	0,1298	0,9102
12	0,0000	0,0065	4	0,3018	0,9713
11	0,0000	0,0287	3	0,5519	0,9935
10	0,0000	0,0898	2	0,8021	0,9991
9	0,0004	0,2120	1	0,9560	0,9999
8	0,0024	0,3953	0	1,0000	1,0000
7	0,0116	0,6047			

7. Запишите задачу в формальном статистическом виде.
8. Найдите критическое значение для отклонения H_0 при нулевом распределении.
9. Определите вероятность появления критического значения при истинном распределении.
10. Найдите вероятность совершить ошибку II рода (β-типа).

2.3. ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ

При вычислении вероятности совершить ошибку II рода была определена вероятность решения, связанного с принятием ложной нулевой гипотезы. Вычитая эту β-вероятность из единицы, мы устанавливаем мощность критерия. Мощность определяется как вероятность принятия правильного решения при ложной H_0, т. е. как вероятность отклонения ложной нулевой гипотезы. В предыдущем примере, для которого β-вероятность оказалась равной 0,6047, мощность критерия составит:

$$\text{мощность} = 1 - \beta = 1 - 0{,}6047 = 0{,}3953.$$

Как было отмечено, мощность критерия сообщает нам значение вероятности того, что будет принято правильное решение, т. е. отклонена ложная H_0. В данном примере эта вероятность равна примерно 0,40.

Упражнение

11. Вычислите мощность критерия, используемого в упражнениях 7—10.

2.4. УВЕЛИЧЕНИЕ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЯ

Мощность критерия зависит от целого ряда факторов, в том числе от объема выборки, α-уровня, направленности H_0 и H_1, а также от надежности экспериментальных методов и измерительных приборов. Далее мы рассмотрим, как объем выборки и α-уровень влияют на мощность критерия.

Объем выборки и мощность критерия

В предыдущем примере для случая $N = 14$ мощность критерия оказалась равной 0,3953. При $N = 20$ мы получаем выборочное распределение, приведенное в табл. 2.2 для $P = 0{,}30$ и $P = 0{,}50$.

Таблица 2.2. Накопленные биномиальные вероятности, соответствующие различным значениям x (число событий для P-значения) при $P=0{,}30$, $P=0{,}50$, $N=20$ (данные таблицы округлены до четвертого знака после запятой)

x	$P=0{,}30$, Σp_x	$P=0{,}50$, Σp_x
20	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000
18	0,0000	0,0002
17	0,0000	0,0013
16	0,0000	0,0059
15	0,0000	0,0207
14	0,0003	0,0577
13	0,0013	0,1316
Критическ е значение при $\alpha=0{,}01 \rightarrow$ 12	0,0051	0,2517
11	0,0171	0,4119
Критическое значение при $\alpha=0{,}05 \rightarrow$ 10	0,0480	0,5881
9	0,1133	0,7483
8	0,2277	0,8684
7	0,3920	0,9423
6	0,5836	0,9793
5	0,7650	0,9941
4	0,8929	0,9987
3	0,9645	0,9998
2	0,9924	1,0000
1	0,9992	1,0000
0	1,0000	1,0000

Критическое значение при нулевом распределении для $\alpha = 0{,}05$ оказывается равным 10, а вероятность появления этого значения при *истинном* распределении равна 0,5881. Это и есть мощность критерия. Обратите внимание, в этом случае критерий является гораздо более мощным, чем при $N = 14$. Если бы мы использовали $N = 40$, то мощность критерия составила бы 0,7852.

α-уровень и мощность критерия

Обратившись вновь к табл. 2.2, мы находим, что $x = 12$ представляет собой критическое значение при $\alpha = 0{,}01$. Вероятность появления этого значения при *истинном* распределении равна 0,2517. Таким образом, мощность критерия увеличивается вместе с увеличением α-уровня. Другими словами, при ложной H_0 $\alpha = 0{,}10$ обеспечивает более мощный критерий, чем $\alpha = 0{,}05$; в свою очередь, $\alpha = 0{,}05$ обеспечивает большую мощность критерия, чем $\alpha = 0{,}01$.

Упражнения

12. Для рассмотренного примера мощность критерия оказалась равной 0,5881. Чему равна β-вероятность?

13. На основе данных об объемах выборки и мощности критерия постройте график мощности критерия как функции от N ($N = 14$, $N = 20$, $N = 40$).

14. Сформулируйте общий вывод о влиянии объема выборки на мощность критерия.

15. Чему равна β-вероятность, если $N = 20$, $\alpha = 0{,}01$ и мощность критерия составляет 0,2517?

2.5. МОЩНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Во введении к этой главе мы отмечали, что если справедливы исходные предпосылки, то при любом N параметрические критерии более мощные, чем их непараметрические аналоги. Однако, поскольку мы располагаем возможностью увеличить мощность с помощью увеличения N, непараметрический критерий можно сделать столь же мощным, как и параметрический, при использовании выборок с большим объемом. Таким образом, критерий A может быть более мощным, чем критерий B, при одинаковых значениях N, но критерий B может стать столь же мощным, как и критерий A, если N равно, скажем, 40 в отличие от $N = 30$ для критерия A.

Понятие эффективности связано с увеличением объема выборки, при котором один критерий становится столь же мощным, как и другой. Предположим, что критерий B равен по мощности критерию A в том случае, если значения N равны для них соответственно 40 и 20. Обозначим через N_b значение N; необходимое для получения одинаковой мощности критериев B и A, если известно, что критерий A используется при $N = N_a$. Тогда эффективность критерия B может быть установлена следующим образом:

$$\text{эффективность критерия } B = \frac{N_a}{N_b} = \frac{20}{40} = 0{,}5.$$

Таким образом, мощность критерия B относительно мощности критерия A составляет 0,5, поэтому для получения одинаковой мощности нам придется дважды применять критерий B на каждое использование критерия A.

Пример

Если эффективность критерия B равна 0,20 и $N_a = 10$, то какое значение N_b необходимо для получения одинаковой мощности?

$$N_b = \frac{N_a}{\text{эффективность критерия } B} = \frac{10}{0{,}20} = 50.$$

Упражнение

В каждом из упражнений 16—20 задана эффективиость критерия B относительно эффективности критерия A, а также приводится значение N для критерия A. Определите, какое значение необходимо использовать для критерия B, чтобы добиться одинаковой мощности (округлите до целого числа).

16. Эффективность критерия $B = 0{,}40$, $N_a = 20$.
17. Эффективность критерия $B = 0{,}75$, $N_a = 18$.
18. Эффективность критерия $B = 0{,}90$, $N_a = 18$.
19. Эффективность критерия $B = 0{,}35$, $N_a = 27$.
20. Эффективность критерия $B = 0{,}80$, $N_a = 24$.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Дано: H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Известно, что $p = 0{,}04$, значение двустороннее. Фактический статус H_0: ложная.

а) Мы принимаем H_0 и совершаем ошибку II рода.
б) Мы отклоняем H_0 и совершаем ошибку I рода.
в) Мы принимаем H_0 и выбираем правильное решение.
г) Мы отклоняем H_0 и принимаем правильное решение.

2. Дано: H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Полученное двустороннее значение $p = 0{,}10$. Фактический статус H_0: ложная.

а) Мы принимаем H_0 и совершаем ошибку II рода.
б) Мы отклоняем H_0 и совершаем ошибку I рода.
в) Мы принимаем H_0 и выбираем правильное решение.
г) Мы отклоняем H_0 и прнннмаем правильное решение.

3. Дано: H_0: $P \geqslant Q$, $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний. Полученное одностороннее значение $p = 0{,}03$ и соответствует ожидаемому направлению. Фактический статус H_0: верная.

а) Мы принимаем H_0 и совершаем ошибку II рода.
б) Мы отклоняем H_0 и совершаем ошибку I рода.
в) Мы принимаем H_0 и получаем правильное решение.
г) Мы отклоняем H_0 и прииимаем правильное решение.

4. Дано: H_0: $P = Q$, $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний. Полученное двустороннее значение $p = 0{,}009$. Фактический статус H_0: верная.

а) Мы принимаем H_0 и совершаем ошибку II рода.
б) Мы отклоняем H_0 и совершаем ошибку I рода.
в) Мы принимаем H_0 и получаем правильное решение.
г) Мы отклоняем H_0 и принимаем правильное решение.

5. При $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии вероятность совершить ошибку II рода будет равна: а) 0,01; б) 0,02; в) 0,99; г) информации недостаточно.

6. При β-вероятности, равной 0,46, мощность критерия составит: а) 0,46; б) 0,54; в) 0,05; г) нельзя ответить, не зная α-уровня.

Вопросы 7—10 основываются на следующих нулевом и истинном распределениях дихотомической переменной:

x	Нулевое распределение, $P=0{,}20$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0{,}50$, Σp_x	x	Нулевое распределение, $P=0{,}20$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0{,}50$, Σp_x
14	0,0000	0,0001	7	0,0116	0,6047
13	0,0000	0,0009	6	0,0439	0,7880
12	0,0000	0,0065	5	0,1298	0,9102
11	0,0000	0,0287	4	0,3018	0,9713
10	0,0000	0,0898	3	0,5519	0,9935
9	0,0004	0,2120	2	0,8021	0,9991
8	0,0024	0,3953	1	0,9560	0,9999
			0	1,0000	1,0000

7. В нулевом распределении критическое значение x при $\alpha = 0{,}05$ будет равно: а) $x = 6$; б) $x = 11$; в) $x = 8$; г) $x = 7$.

8. Мощность критерия при $\alpha = 0{,}05$ (двустороннее значение) составит: а) 0,6047; б) 0,2120; в) 0,7880; г) 0,9102.

9. В нулевом распределении критическое значение x при $\alpha = 0{,}01$ будет равно: а) $x = 7$; б) $x = 8$; в) $x = 6$; г) $x = 9$.

10. Мощность критерия при $\alpha = 0{,}01$ (одностороннее значение) составит: а) 0,6047; б) 0,3953; в) 0,2120; г) 0,7880.

11. Если эффективность критерия B равна 0,60 и $N_a = 30$, то значение N_b, необходимое для получения одинаковой мощности критериев A и B, будет равно: а) 50; б) 18; в) 48; г) 30.

12. Если эффективность критерия B равна 0,90 и $N_a = 20$, то значение N_b, необходимое для получения одинаковой мощности критериев A и B, будет равно: а) 90; б) 38; в) 18; г) 22.

Практические задания

Далее приведены нулевое и истинное распределения дихотомической переменной при $N = 10$, 14 и 20. Вопросы 13—19 основываются на этих распределениях:

Критерий A, $N=10$, x	Нулевое распределение, $P=0{,}25$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0{,}50$, Σp_x	Критерий A, $N=10$, x	Нулевое распределение, $P=0{,}25$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0{,}50$, Σp_x
10	0,0000	0,0010	5	0,0781	0,6230
9	0,0000	0,0107	4	0,2241	0,8281
8	0,0004	0,0547	3	0,4744	0,9453
7	0,0035	0,1719	2	0,7560	0,9893
6	0,0197	0,3770	1	0,9437	0,9990
			0	1,0000	1,0000

Критерий B, $N=14$, x	Нулевое распределение, $P=0{,}25$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0{,}50$, Σp_x
14	0,0000	0,0001
13	0,0000	0,0009
12	0,0000	0,0065
11	0,0000	0,0287
10	0,0003	0,0898
9	0,0022	0,2120
8	0,0103	0,3953
7	0,0383	0,6047
6	0,1117	0,7880
5	0,2585	0,9102
4	0,4787	0,9713
3	0,7189	0,9935
2	0,8990	0,9991
1	0,9822	0,9999
0	1,0000	1,0000

Критерий C, $N=20$, x	Нулевое распределение, $P=0{,}25$, Σp_x	Истинное распределение, $P=0{,}50$, Σp_x
20	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000
18	0,0000	0,0002
17	0,0000	0,0013
16	0,0000	0,0059
15	0,0000	0,0207
14	0,0000	0,0577
13	0,0002	0,1316
12	0,0009	0,2517
11	0,0039	0,4119
10	0,0139	0,5881
9	0,0409	0,7483
8	0,1018	0,8684
7	0,2142	0,9423
6	0,3828	0,9793
5	0,5852	0,9941
4	0,7748	0,9987
3	0,9087	0,9998
2	0,9757	1,0000
1	0,9968	1,0000
0	1,0000	1,0000

13. Определите мощность критерия *A* при H_0: $P \leqslant Q$ и $\alpha = 0{,}05$, используя нулевое и истинное распределения его статистики.

14. При тех же условиях определите мощность критерия *A* для случая $\alpha = 0{,}01$.

15. Определите мощность критерия *B* при H_0: $P \leqslant Q$ и $\alpha = 0{,}05$, используя нулевое и истинное распределения его статистики.

16. При тех же условиях определите мощность критерия *B* в случае $\alpha = 0{,}01$.

17. Определите мощность критерия *C* при H_0: $P \leqslant Q$ и $\alpha = 0{,}05$, используя нулевое и истинное распределения его статистики.

18. При тех же условиях определите мощность критерия *C* в случае $\alpha = 0{,}01$.

19. Постройте график мощности критерия как функции от объема выборки и α-уровня. Сформулируйте общий вывод о влиянии объема выборки и α-уровня на мощность критерия.

Часть первая
НОМИНАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ ИЗМЕРЕНИЯ

В первой части этой книги исследуются непараметрические критерии, используемые при низших шкалах измерения — номинальных шкалах. Номинальные шкалы основываются на качественных переменных, главная особенность которых заключается в том, что различие между ними не поддается количественному измерению. Эти переменные классифицируются в соответствии с определяющими их различие признаками, а не в зависимости от степени, в которой они наделены заданным свойством. В противоположность этому количественными считаются такие переменные, различие между которыми выражается в том, *насколько* отличаются друг от друга индивидуумы, объекты или события, обладающие каким-либо свойством.

Некоторыми наиболее общими примерами номинальных шкал или категорий служат цвет, марка автомобиля, пол (мужской или женский), тип строительного материала, классификации растений и животных и т. п.

Соответствующие номинальным шкалам данные состоят из наблюдаемых значений частот или табличных сведений о числе появлений каждой из разновидностей изучаемой переменной. Такие данные имеют несколько эквивалентных названий: *частотные данные*, *перечисленные данные*, *атрибутные данные*, *вариантные данные*. Единственными математическими связями, уместными по отношению к номинальным шкалам, являются тождество (=) и различие (≠). Наконец, для характеристики номинальных данных наиболее часто используются такие дескриптивные статистики, как пропорция и процентное отношение.

Глава 3

НОМИНАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ. СЛУЧАЙ С ОДНОЙ ВЫБОРКОЙ

При проведении многих исследований мы извлекаем одну выборку из некоторой генеральной совокупности и исследуем вопросы, касающиеся «соответствия» выборочной статистики некоторому известному или гипотетическому значению параметра генеральной совокупности. В качестве примера рассмотрим выборку, состоящую из лиц, которых попросили ответить на некоторый вопрос в форме «да» или «нет». Допустим, что в этой выборке доля положительных ответов составила 0,47. Можно ли при этом утверждать, что выборка была извлечена из совокупности, в которой истинная доля положительных ответов равна 0,50? Случай с одной выборкой отличается от случаев с двумя или несколькими выборками тем, что в последних обычно рассматриваются вопросы типа «Вероятно ли, что две (или более) выборки были извлечены из одной и той же генеральной совокупности?»

В этой главе мы рассматриваем: а) дихотомические (или двузначные) переменные и б) многозначные переменные.

Цели главы

1. Узнать, как применяются таблицы биномиальной переменной для проверки H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$ при $N \leqslant 50$.

2. Узнать, как применяются таблицы биномиальной переменной для проверки нулевых гипотез, касающихся различных значений P и Q при $N \leqslant 49$.

3. Выяснить, как используется критерий χ^2 при проверке нулевых гипотез относительно двузначных переменных при $N > 50$.

4. Выяснить, как используется критерий χ^2 при проверке нулевых гипотез относительно многозначных переменных.

3.1. ДВУЗНАЧНЫЕ ГЕНЕРАЛЬНЫЕ СОВОКУПНОСТИ

Биномиальный критерий при $P = Q = \frac{1}{2}$

При оценке выборки из двузначной совокупности наиболее часто выдвигается нулевая гипотеза о том, что $P = Q = \frac{1}{2}$. В табл. A приводятся односторонние и двусторонние критические значения при $\alpha = 0{,}05$ и $0{,}01$ для N, изменящегося от 5 до 50.

Пример

В колледже проводятся выборы президента студенческого совета, причем на этот пост претендуют два кандидата. Как показало неофициальное голосование, проведенное среди 46 случайно отобранных избирателей, 34 человека отдали предпочтение кандидату A, а 12 человек — кандидату B. Можно ли предположить, что эта выборка была извлечена из совокупности, у которой $P = Q = \frac{1}{2}$?

Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): $P = Q = \frac{1}{2}$. Доля избирателей, предпочитающих кандидата A (P), равна доле предпочитающих кандидата B (Q).

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$. Доля избирателей, предпочитающих кандидата A, не равна доле предпочитающих кандидата B.

в) *Статистический критерий*: поскольку мы сравниваем частоты ответов, соответствующих двузначной совокупности, подходящей тестовой статистикой является биномиальная.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$.

д) *Выборочное распределение*: биномиальное распределение при $P = Q = \frac{1}{2}$ и $N = 46$.

е) *Критическое значение*: обратившись к табл. А при $\alpha = 0{,}01$, двустороннем критерии и $N = 46$, мы обнаруживаем, что требуемые для отклонения H_0 значения x определяются из условия: x (или $N - x$) $\geqslant 33$.

Решение. Поскольку наблюдаемое значение x, равное 34, превышает критическое значение, мы отклоняем H_0. Таким образом, выясняется, что больше половины избирателей предпочитают кандидата A и в случае немедленного проведения выборов можно ожидать его победы.

Упражнения

1. Предположим, что на основе наблюдений за длительный период времени было выяснено, что вероятность простудиться в течение одного года равна 0,5. Группе из 35 человек было прописано лекарство, которое, как ожидалось, сможет предохранить от простуды. В течение года после приема лекарства были получены следующие результаты:

Число простудившихся	Число избежавших простуды	N
12	23	35.

Используя $\alpha = 0{,}01$ при двустороннем критерии, проверьте H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$.

В упражнениях 2—5 укажите, следует принять или отклонить H_0:

2. H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$, $N = 27$, $\alpha = 0{,}05$, $x = 18$.
3. H_0: $P \leqslant Q$, H_1: $P > Q$, $\alpha = 0{,}05$, $N = 15$, $x = 11$.
4. H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$, $N = 43$, $\alpha = 0{,}01$, $x = 35$.
5. H_0: $P \geqslant Q$, H_1: $P < Q$, $N = 42$, $\alpha = 0{,}01$, $N - x = 27$.

Биномиальный критерий при $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$

В некоторых случаях предполагаемая доля генеральной совокупности соответствует значению, не совпадающему с 0,5. Особенно часто это встречается в таких областях, как медицина, где вероятность заразиться многими болезнями меньше 0,5, а также при проверке качества продукции, где доля бракованных изделий обычно бывает достаточно малой.

Пример

В процессе промышленного производства могут создаваться партии деталей, состоящих из нескольких тысяч отдельных предметов. Если доля бракованных деталей незначительно превышает 0,10, то вся партия признается годной. Если же доля брака (P) существенно больше

0,10, то бракуется вся партия. Случайная выборка деталей из данной партии привела к следующим результатам:

Бракованные детали	Годные детали	Итого
4	44	48

Формальная постановка задачи:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): $P \leqslant 0{,}10$, $Q \geqslant 0{,}90$.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): $P > 0{,}10$, $Q < 0{,}90$.

в) *Статистический критерий*: биномиальный.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, одностороннее значение.

д) *Критическое значение*: в табл. В приводятся односторонние критические значения, соответствующие различным значениям P из интервала [0,01; 0,50]. Обратившись к этой таблице при $P = 0{,}10$, $Q = 0{,}90$ и $N = 48$, мы выясняем, что необходимые для отклонения H_0 значения x определяются условием $x \geqslant 9$.

Решение. Поскольку наблюдаемое значение x, равное 4, меньше критического значения, мы принимаем H_0. Доля брака оказывается недостаточно большой, чтобы можно было забраковать всю партию.

Упражнеиия

6. Ученый провел пять независимых исследований с целью определнть влияние экспериментальной переменной на критериальную задачу. В двух из пяти случаев исследования привели к одинаковым результатам, статистически значимым при $\alpha = 0{,}01$. Определите, является ли число оказавшихся статистически значимыми исследований большим, чем можно было ожидать при их случайном пронсхождении. Используйте $\alpha = 0{,}01$.

7. Для определенной болезнн доля выздоравливающнх при отсутствии лечения равна 0,15. Выборке из 37 пациентов было прописано новое терапевтическое средство, применение которого прнвело к следующим результатам:

Число выздоровевших пациентов	Число не выздоровевших пациентов	Итого
15	22	37

Используя $\alpha = 0{,}01$, оцените эффективность нового средства.

В упражнениях 8—11 укажнте, следует принять или отклонить H_0.

8. H_0: $P \leqslant 0{,}30$, $N = 20$, $x = 8$, $\alpha = 0{,}05$.

9. H_0: $P \leqslant 0{,}05$, $N = 10$, $x = 4$, $\alpha = 0{,}01$.

10. H_0: $P \leqslant 0{,}40$, $N = 31$, $x = 15$, $\alpha = 0{,}05$.

11. H_0: $P \leqslant 0{,}20$, $N = 15$, $x = 6$, $\alpha = 0{,}05$.

Критерий χ^2 при N, превышающем 50

Табл. А и В содержат критические значения только для случаев, когда N меньше или равно 50. Если же N превышает 50, то с помощью критерия χ^2 может быть получена хорошая аппроксимация биномиального критерия для всех значений P и Q.

В случае двузначной совокупности тестовая статистика, χ^2, определяется следующим образом:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{2}\frac{(|f_o-f_e|-0,5)^2}{f_e},$$

где f_o — наблюдаемая частота; f_e — ожидаемая частота (в случае выполнения H_0); $|f_o-f_e|$ — абсолютное значение разности между f_o и f_e; $\sum_{i=1}^{2}$ указывает на необходимость просуммировать это отношение по обоим значениям.

В табл. С приводятся двусторонние критические значения для отклонения H_0 при различных уровнях α. Для всех значений k (число возможных значений в исходной совокупности) существуют отдельные распределения χ^2, каждое из которых приводится в зависимости от числа степеней свободы (df). В случае одной выборки $\mathrm{df}=k-1$; таким образом, при двузначной совокупности ($k=2$) $\mathrm{df}=2-1=1$.

При заданных α и df для отклонения H_0 необходимо, чтобы наблюдаемое значение χ^2 было больше или равно критическому значению.

Примеры

а) $\chi^2=1{,}973$, $\mathrm{df}=1$, $\alpha=0{,}05$. Обратившись к табл. С при $\alpha=0{,}05$ и $\mathrm{df}=1$, находим, что критическое значение для отклонения H_0 равно 3,841; H_0 принимается.

б) $\chi^2=4{,}653$, $\mathrm{df}=3$, $\alpha=0{,}01$. Обратившись к табл. С при $\alpha=0{,}01$ и $\mathrm{df}=3$, находим, что необходимое для отклонения H_0 критическое значение χ^2 равно 11,341; H_0 принимается.

Пример использования критерия χ^2.

Дано:

$$H_0\colon\ P\leqslant 0{,}25,\ \ Q\geqslant 0{,}75;$$
$$H_1\colon\ P>0{,}25,\ \ Q<0{,}75;$$
$$N=60,\ \alpha=0{,}05.$$

	P-значение	Q-значение	N
Наблюдаемая частота, f_0	24	36	60

Шаг 1. Существуют две ожидаемые частоты, по одной для каждого значения дихотомической переменной. Ожидаемая частота для P-значения (f_{ep}) вычисляется путем умножения N на P (доля, предполагаемая при выполнении H_0):

$$f_{ep}=N\cdot P=60\cdot 0{,}25=15.$$

Шаг 2. Вычитанием находим ожидаемую частоту для Q-значения (f_{eq}):

$$f_{eq} = N - f_{ep} = 60 - 15 = 45.$$

Шаг 3. Для каждого значения находим $|f_o - f_e|$ путем вычитания f_e из соответствующей наблюдаемой частоты.

	P-значение	Q-значение	Итого
f_o	24	36	60
f_e	15	45	60
$\lvert f_o - f_e \rvert$	9	9	

Шаг 4. Вычитаем 0,5 из каждой абсолютной величины $|f_o - f_e|$. Этот шаг называется поправкой на непрерывность. *Он требуется только в том случае, когда число степеней свободы равно 1*, и предназначен для корректировки несоответствия между дискретным биномиальным распределением и непрерывным распределением χ^2.

	P-значение	Q-значение
f_o	24	36
f_e	15	45
$\lvert f_o - f_e \rvert$	9	9
$\lvert f_o - f_e \rvert - 0{,}5$	8,5	8,5

Шаг 5. Возводим в квадрат каждое из выражений $|f_o - f_e| - 0{,}5$, затем делим полученные значения на соответствующие f_e и, суммируя, получаем χ^2:

$$\chi^2 = \sum \frac{(|f_o - f_e| - 0{,}5)^2}{f_e} = \frac{(8{,}5)^2}{15} + \frac{(8{,}5)^2}{45} = 6{,}422.$$

Решение. Поскольку расчетное значение χ^2 превышает табличное значение, равное 3,841, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Выборка была извлечена из совокупности, для которой $P > 0{,}25$.

Упражнения

12. Определите df, если известно, что $k = 8$.
13. Определите df, если известно, что $k = 4$.
14. Определите df, если известно, что $k = 3$.
15. Определите df, если известно, что $k = 7$.

В упражнениях 16—19 необходимо принять решение об отклонении или принятии H_0.

16. $\chi^2 = 6{,}931$, $\mathrm{df} = 2$, $\alpha = 0{,}01$.
17. $\chi^2 = 3{,}941$, $\mathrm{df} = 1$, $\alpha = 0{,}05$.
18. $\chi^2 = 18{,}492$, $\mathrm{df} = 6$, $\alpha = 0{,}01$.
19. $\chi^2 = 7{,}423$, $\mathrm{df} = 1$, $\alpha = 0{,}01$.

20. H_0: $P \leqslant 0{,}30$, $N = 55$. Определите f_{ep}.
21. H_0: $P \leqslant 0{,}40$, $N = 67$. Определите f_{ep}.
22. H_0: $P = 0{,}50$, $N = 74$. Определите f_{ep}.
23. H_0: $P \leqslant 0{,}10$, $N = 88$. Определите f_{ep}.
24. Найдите f_{eq}, соответствующую данным упражнения 20.
25. Найдите f_{eq}, соответствующую данным упражнения 21.
26. Найдите f_{eq}, соответствующую данным упражнения 22.
27. Найдите f_{eq}, соответствующую данным упражнения 23.
28. Известно, что наблюдаемая частота равна 25 для P-значения и 30 — для Q-значения. По данным из упражнений 20 и 24 определите $|f_0 - f_e|$ для каждого из значений.
29. Известно, что наблюдаемая частота равна 34 для P-значения и 33 — для Q-значения. По данным из упражнений 21 и 25 определите $|f_0 - f_e|$ для каждого из значений.
30. Известно, что наблюдаемая частота равна 45 для P-значения и 29 — для Q-значения. Найдите $|f_0 - f_e|$ для каждого из значений по данным из упражнений 22 и 26.
31. Известно, что наблюдаемая частота равна 20 для P-значения и 68 — для Q-значения. На основе данных из упражнений 23 и 27 найдите $|f_0 - f_e|$ для каждого из значений.
32. Определите χ^2 для упражнения 28 и примите статистическое решение.
33. Определите χ^2 для упражнения 29 и примите статистическое решение.
34. Определите χ^2 для упражнения 30 и примите статистическое решение.
35. Определите χ^2 для упражнения 31 и примите статистическое решение.

3.2. МНОГОЗНАЧНЫЕ ГЕНЕРАЛЬНЫЕ СОВОКУПНОСТИ

Существует множество ситуаций, когда имеются сведения о частотах для нескольких значений качественной переменной, например число субъектов, предпочитающих определенный цвет или марку автомобиля; число пациентов, ощущающих улучшение или выздоровевших при различных способах лечения; распределение физических характеристик при генетическом исследовании и т. п.

Критерием значимости, подходящим для многозначных переменных, является критерий χ^2. При этом тестовая характеристика, χ^2, определяется следующим образом:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e},$$

где f_o — наблюдаемая частота данного значения; f_e — ожидаемая частота этого же значения; $\sum\limits_{i=1}^{k}$ указывает на необходимость просуммировать это отношение по всем k значениям.

Обратите внимание, что поскольку $k > 2$, $\mathrm{df} > 1$. Поэтому *при использовании критерия χ^2 с многозначными переменными поправки на непрерывность не требуется.*

Пример

К 160 покупателям, представляющим собой выборку из некоторой совокупности, обратились с просьбой попробовать 4 вида каши для завтрака, приготовленной из круп A, B, C и D. В качестве вознаграждения за участие в этом мероприятии покупателям дали по ящику той крупы, которая им больше всего понравилась. Полученные результаты выглядят следующим образом:

	A	B	C	D	Итого
f_0	30	55	27	48	160

Необходимо проверить H_0: $P_A = P_B = P_C = P_D = 0{,}25$. Используется $\alpha = 0{,}01$.

Шаг 1. Находим ожидаемую частоту для каждой крупы путем умножения P на N:

$$f_e = 0{,}25 \cdot 160 = 40.$$

Шаг 2. Для каждого значения получаем $(f_o - f_e)$ путем вычитания частоты f_e из соответствующей ей частоты f_o:

	A	B	C	D	Итого
f_o	30	55	27	48	160
f_e	40	40	40	40	160
$f_o - f_e$	−10	15	−13	8	

Для проверки правильности расчетов находим $\Sigma\,(f_o - f_e)$. Эта сумма должна быть равна нулю. В данном примере $\Sigma\,(f_o - f_e) = -10 + 15 - 13 + 8 = 0$.

Шаг 3. Возводим в квадрат каждую из величин $(f_o - f_e)$, затем делим на соответствующее f_e и полученные значения суммируем:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(-10)^2}{40} + \frac{15^2}{40} + \frac{(-13)^2}{40} + \frac{8^2}{40} = \frac{558}{40} = 13{,}95.$$

Шаг 4. Находим число степеней свободы:

$$\mathrm{df} = k - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Шаг 5. Определяем критическое значение при данных α-уровне и числе степеней свободы.

Обращение к табл. С при $\alpha = 0{,}01$ и $\mathrm{df} = 3$ показывает, что требуемые для отклонения H_0 значения χ^2 соответствуют условию $\chi^2 \geqslant 11{,}341$.

Решение. Поскольку расчетное значение χ^2 превышает критическое значение, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Таким образом, степени предпочтения покупателями разных видов круп не совпадают.

Упражнения

В упражнениях 36—40 используется следующий пример. Игрок проверяет «правильность» кубика. С этой целью он подбрасывает кубик 180 раз и получает следующие результаты:

	1	2	3	4	5	6
f_o	26	35	39	28	22	30

Проверьте H_0: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}$ при $\alpha = 0{,}01$.

36. Найдите ожидаемую частоту для каждого значения переменной.

37. Определите значение каждого из выражений $(f_o - f_e)$ и проверьте правильность расчетов.

38. Найдите значение χ^2.

39. Определите число степеней свободы.

40. Определите критическое значение χ^2 и примите статистическое решение.

Контрольные вопросы к главе 3

1. Если заданы H_0: $P \leqslant 0{,}50$, $N = 24$ и $x = 17$, то мы принимаем следующее статистическое решение.
а) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний;
б) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний;
в) принимаем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний;
г) не принимаем ни одного из этих решений.

2. Если заданы H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$, $N = 15$ и $x = 12$, то мы принимаем следующее статистическое решение:
а) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний;
б) принимаем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний;
в) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний;
г) не принимаем ни одного из этих решений.

3. Если заданы H_0: $P \leqslant 0{,}20$, H_1: $P > 0{,}20$, $N = 19$ и $x = 8$, то мы принимаем следующее статистическое решение:
а) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний;
б) принимаем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний;
в) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний;
г) не принимаем ни одного из этих решений.

4. Если заданы H_0: $P \leqslant 0{,}40$, H_1: $P > 0{,}40$, $N = 15$ и $x = 11$, то мы принимаем следующее статистическое решение:
а) принимаем H_0 при $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний;
б) принимаем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний;
в) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}01$, критерий односторонний;
г) не принимаем ни одного из этих решений.

5. Дано: $N = 60$, $P = 0{,}45$, $Q = 0{,}55$; f_{ep} равна: а) 30; б) 33; в) 45; г) 27.

6. Дано: $N = 80$, $P = 0{,}70$, $Q = 0{,}30$; f_{ep} равна: а) 24; б) 56; в) 30; г) 70.

7. Дано: $f_{op} = 25$, $f_{ep} = 15$ и $f_{oq} = 35$, $f_{eq} = 45$; значение выражения $\Sigma \frac{(|f_o - f_e| - 0{,}5)^2}{f_e}$ будет равно: а) 6,22; б) 8,03; в) 8,68; г) 10,04.

8. На основе заданных $\chi^2 = 5{,}064$ и $df = 1$ мы принимаем следующее статистическое решение:
а) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}05$, но принимаем при $\alpha = 0{,}01$;
б) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}01$;
в) принимаем H_0 при $\alpha = 0{,}05$;
г) отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}01$, но принимаем при $\alpha = 0{,}05$.

9. Если $df = 6$, то k равно: а) 5; б) 6; в) 7; г) 8.

Вопросы 10—12 основываются на результатах, приводимых в следующей таблице:

	A	B	C	D	N
f_o	16	24	10	20	70

Нулевая гипотеза состоит в том, что $P_A = P_B = P_C = P_D$.

10. Ожидаемая частота для C-значения равна: а) 7; б) 17,5; в) 10; г) 35.

11. Число степеней свободы составляет: а) 70; б) 4; в) 69; г) 3.

12. Если значения отношения $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ равны соответственно 0,129, 2,414, 3,214 и 8,929, то χ^2 составит: а) 13,14; б) 10,53; в) 14,69; г) 4,02.

Практические задания

13. Далее приводятся значения N, x и α. Нулевая гипотеза (для всех случаев) состоит в том, что $P = Q = \frac{1}{2}$. Определите, следует принять или отклонить H_0.

а) $N = 22$, $x = 15$, $\alpha = 0{,}05$.
б) $N = 49$, $x = 37$, $\alpha = 0{,}01$.
в) $N = 12$, $x = 9$, $\alpha = 0{,}01$.
г) $N = 37$, $x = 24$, $\alpha = 0{,}05$.
д) $N = 44$, $x = 34$, $\alpha = 0{,}05$.

14. Для всех приведенных здесь случаев H_0: $P \leqslant 0{,}50$ и H_1: $P > 0{,}50$. Заданы значения N, x и α. Определите, следует принять или отклонить H_0.

а) $N = 27$, $x = 17$, $\alpha = 0{,}05$.
б) $N = 46$, $x = 40$, $\alpha = 0{,}01$.
в) $N = 13$, $x = 10$, $\alpha = 0{,}05$.
г) $N = 21$, $x = 15$, $\alpha = 0{,}01$.
д) $N = 34$, $x = 21$, $\alpha = 0{,}01$.

15. Получены следующие результаты:

	P	Q
f_0	42	55

Проверьте H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$, используя $\alpha = 0{,}05$.

16. Получены следующие результаты:

	A	B	C	D
f_0	12	17	29	15

Проверьте $H_0 : P_A = P_B = P_C = P_D$, используя $\alpha = 0{,}01$.

Глава 4

НОМИНАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ. НЕЗАВИСИМЫЕ ВЫБОРКИ

В этой главе мы рассмотрим критерии значимости для номинально измеряемых переменных, в которых сравниваются частотные данные двух и более независимых выборок.

Цели главы

1. Выяснить, как номинальные данные представляются в виде матрицы 2 × 2.

2. Узнать, как вычисляются значения вероятностей при малом числе наблюдений (критерий точной вероятности Фишера).

3. Познакомиться с критерием χ^2 для проверки независимости при достаточно больших объемах выборок.

4. Выяснить, как вычисляется и интерпретируется критерий χ^2 в случае нескольких выборок.

4.1. ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ СОПРЯЖЕННОСТИ ПРИЗНАКОВ 2×2

В качестве типичного примера можно рассмотреть ситуацию, когда две группы субъектов сравниваются в зависимости от относительной частоты, с которой их ответы соответствуют каждому из значений дихотомической переменной. Например, мужчин и женщин можно сравнить с точки зрения их отношения к смертным приговорам (одобрение или неодобрение). Зарегистрированные кандидаты от Демократической и Республиканской партий могут сравниваться в зависимости от того, высказывают ли они одобрение или возражают против определенного законодательства, социальной политики и т. д.

Пример

Предположим, что 9 демократов и 9 республиканцев были опрошены для выяснения их отношения к определенному законодательству (одобрение или неодобрение). Оказалось, что 7 республиканцев возражают против этого законодательства, в то время как двое одобряют его. Однако со стороны демократов 8 человек высказались в поддержку законодательства и только один возражал против него. Эти данные можно поместить в следующую таблицу сопряженности признаков 2 × 2:

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за
Демократы	1	8
Республиканцы	7	2

Часто возникает необходимость сослаться на одну или несколько клеток таблицы сопряженности признаков. Поэтому принято обозначать каждую клетку и каждое итоговое значение следующим образом:

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за	Итоги по строкам
Демократы	A	B	$A+B$
Республиканцы	C	D	$C+D$
Итоги по столбцам	$A+C$	$B+D$	

Упражнения

Поместите приведенные данные в таблицы сопряженности признаков 2×2.

1. Две группы лиц, находящихся соответственно на частной и государственной службе, были опрошены с целью выяснения их отношения к праву государственных служащих на забастовку (одобрение или неодобрение). Результаты были следующими: 7 государственных служащих высказались одобрительно, 1 — против, 2 человека, находящиеся на частной службе, высказались одобрительно, 6 — против.

2. Двум группам студентов соответственно I и IV курсов был задан вопрос, одобряют ли они принятие опасных для жизни мер при лечении пациентов, которые, судя по заключению врачей, находятся в критическом состоянии. За принятие подобных мер высказались 5 студентов I курса, тогда как 11 были против. Из 12 студентов IV курса 10 человек были за и 2 — против.

В упражнениях 3—5 впишите в соответствующие места пропущенные буквы-идентификаторы.

3.

A	—	$A+B$
C	D	$C+D$
$A+C$	$\_+D$	

4.

—	B	$\_+B$
—	D	$C+\_$
$\_+\_$	$B+D$	

5.

A	—	$A+\_$
—	D	$\_+D$
$A+\_$	$\_+\_$	

4.2. КРИТЕРИЙ ТОЧНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ФИШЕРА

Критерий Фишера позволяет получить точные значения вероятности событий, столь же или еще менее вероятных, чем те, которые в действительности наблюдались. Этот критерий особенно полезен при малых значениях N. Однако в общем случае связанные с ним вычислительные процедуры являются достаточно сложными и трудоемкими. Поэтому при рассмотрении критерия Фишера мы ограничиваемся изучением процедуры использования таблицы критических значений D (или C). Табл. D может быть использована при N[1], не превышающем 30, однако при этом ни одна из сумм по строкам ($A + B$ и $C + D$) не должна превышать 15.

Пример

При подсчете голосов в группе из 9 республиканцев и 9 демократов было обнаружено, что 7 республиканцев возражают против определенного законодательства и двое одобряют его. Наоборот, 8 демократов одобрили законодательство и только один высказался против него.

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за	Итоги по строкам
Демократы	1 A	8 B	$A+B=9$
Республиканцы	7 C	2 D	$C+D=9$
Итоги по столбцам	$A+C=8$	$B+D=10$	$N=18$

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): в генеральной совокупности доли демократов и республиканцев, одобряющих законодательство, совпадают.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): в генеральной совокупности доли демократов и республиканцев, одобряющих законодательство, не совпадают.

в) *Статистический критерий*: поскольку данные представляют собой наблюдаемые значения частот и $N \leqslant 30$, подходящим критерием будет критерий точной вероятности Фишера.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

д) *Критическое значение*: мы оставим его неопределенным до тех пор, пока не рассмотрим процедуру использования табл. D.

Шаг 2. Находим значение $A + B$ в табл. D в столбце «Суммы по строкам». Для данной задачи находим $A + B = 9$.

Шаг 3. В этой же секции находим значение $C + D$. В секции для $A + B = 9$ находим $C + D = 9$.

[1] Под N в данном случае понимается суммарный объем обеих выборок. — *Примеч. пер.*

Шаг 4. В столбце «B (или A)» приводится несколько различных значений B. Если ни одно из них не соответствует наблюдаемому значению B, воспользуемся вместо него значением A. Для данной задачи $B = 8$.

Шаг 5. Теперь находим в таблице критическое значение D, определяющее границу значимости при выбранном α. Если наблюдаемое значение D меньше или равно критическому значению, H_0 отклоняется. (В случае использования A на шаге 4 нужно заменить на шаге 5 D на C).

В данной задаче при $A + B = 9$, $C + D = 9$ и $B = 8$ мы находим, что значения D, определяемые условием $D \leqslant 3$, являются значимыми при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии. Обратившись к полученной ранее таблице сопряженности принаков 2×2, выясняем, что наблюдаемое значение частоты для клетки D равно 2. Поскольку наблюдаемое значение D меньше 3, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Бывают случаи, когда $N \leqslant 30$, но одна из сумм по строкам превышает 15. Однако если при этом обе суммы по столбцам ($A + C$ и $B + D$) не превышают 15, то данные могут быть приведены к виду, позволяющему воспользоваться табл. D.

Пример

Исходные данные:

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за	Суммы по строкам
Студенты I курса	11 A	5 B	$A+B=16$
Студенты IV курса	2 C	10 D	$C+D=12$
Суммы по столбцам	13	15	$N=28$

Преобразованные данные:

	Студенты I курса	Студенты IV курса	Суммы по строкам
Высказавшиеся за	5 A	10 B	$A+B=15$
Высказавшиеся против	11 C	2 D	$C+D=13$
Суммы по столбцам	16	12	$N=28$

Обратившись к табл. D при $A + B = 15$, $C + D = 13$ и $B = 10$, мы находим, что необходимые для отклонения H_0 при $\alpha=0,05$ значения D определяются из условия $D \leqslant 2$. Поскольку наблюдаемое значение D равно 2, H_0 отклоняется.

Упражнения

Упражнения 6 — 10 основываются на данных из упражнения 1. Соответствующая таблица сопряженности признаков 2×2:

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за	Итоги по строкам
Находящиеся на частной службе	1 A	7 B	$A+B=8$
Государственные служащие	6 C	2 D	$C+D=8$
Итоги по столбцам	$A+C=7$	$B+D=9$	$N=16$

6. Запишите задачу в формальном статистическом виде, используя $\alpha = 0,01$ при двустороннем критерии.

7. Найдите в табл. D значение $A + B$.

8. Найдите в табл. D значение $C + D$.

9. Найдите в табл. D значение B (или A) при соответствующем значении $C + D$.

10. Определите критическое значение D (или C) и сделайте соответствующий вывод.

11. Преобразуйте следующие данные таким образом, чтобы можно было воспользоваться табл. D:

	+	–	Итого
Группа I	13	4	$A+B=17$
Группа II	2	11	$C+D=13$
Итого	15	15	$N=30$

12. На основе данных из упражнения 11 проверьте H_0: в генеральной совокупности доля субъектов из группы II, которые отреагировали положительно, равна доле субъектов из группы I, также реагировавших положительно. Используйте $\alpha = 0,01$, критерий двусторонний.

4.3. КРИТЕРИЙ χ^2 ДЛЯ ПРОВЕРКИ НЕЗАВИСИМОСТИ НОМИНАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Критерий χ^2 используется в тех же случаях, когда применяется критерий точной вероятности Фишера. В отличие от критерия Фишера, критерий χ^2 является приближенным, причем приближение к точным вероятностям Фишера улучшается по мере увеличения N. Поэтому критерий χ^2 рекомендуется для тех случаев, когда N превышает 30. При этом, однако, существует одно исключение: критерий χ^2 не следует использовать, если ожидаемая частота f_e оказывается меньше 5 хотя бы в одной из клеток.

Пример

Для того чтобы одновременно проиллюстрировать вычисление статистики χ^2 и показать тесную согласованность критерия χ^2 с критерием Фишера при N, приближающемся к 30, мы воспользуемся данными из упражнения 2. Напомним, что, по условию упражнения, 5 из 16 студентов I курса ответили на вопрос положительно, 10 из 12 студентов IV курса также дали положительный ответ, а все остальные студенты высказались против.

H_0: $P_1 = P_4$, т. е. доли генеральной совокупности для студентов I и IV курсов, отвечающих положительно, совпадают.

H_1: $P_1 \neq P_4$, т. е. доли генеральной совокупности для студентов I и IV курсов, отвечающих положительно, не совпадают.

$\alpha = 0{,}05$, $N = 28$.

	Студенты I курса	Студенты IV курса	Итоги по строкам
Высказавшиеся за	5 A	10 B	$A+B=15$
Высказавшиеся против	11 C	2 D	$C+D=13$
Итоги по столбцам	16	12	28

Используя $\alpha = 0{,}05$ при двустороннем критерии, необходимо проверить нулевую гипотезу о том, что студенты I и IV курсов представляют общую генеральную совокупность с точки зрения доли отвечающих на вопрос положительно.

Формула для вычисления χ^2 в случае, когда у двух переменных имеются по два значения, выглядит следующим образом:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(|f_o - f_e| - 0{,}5)^2}{f_e},$$

где $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}$ указывает на необходимость просуммировать это отношение по строкам и по столбцам. Перед возведением в квадрат из абсолютной величины разности между каждой наблюдаемой и соответствующей ей ожидаемой частотой вычитается 0,5 (поправка на непрерывность).

Шаг 1. Находим ожидаемые частоты для каждой клетки. Значения ожидаемых частот могут быть найдены с помощью формул:

$$\text{клетка } A=\frac{(A+B)\ (A+C)}{N}=\frac{15\cdot 16}{28}=8{,}57;$$

$$\text{клетка } B=\frac{(A+B)\ (B+D)}{N}=\frac{15\cdot 12}{28}=6{,}43;$$

$$\text{клетка } C=\frac{(C+D)\ (A+C)}{N}=\frac{13\cdot 16}{28}=7{,}43;$$

$$\text{клетка } D=\frac{(C+D)\ (B+D)}{N}=\frac{13\cdot 12}{28}=5{,}57.$$

Для проверки просуммируем ожидаемые частоты, полученная сумма должна равняться N. В данном примере $8{,}57+6{,}43+7{,}43+5{,}57 = 28$.

Шаг 2. Находим абсолютную величину разности между наблюдаемой и ожидаемой частотой для каждой клетки:

Клетка	Наблюдаемая частота	Ожидаемая частота	$\lvert f_o - f_e\rvert$
A	5	8,57	3,57
B	10	6,43	3,57
C	11	7,43	3,57
D	2	5,57	3,57

Шаг 3. Вычитаем 0,5 из каждого значения $\lvert f_o - f_e\rvert$ и полученные результаты возводим в квадрат:

Клетка	$\lvert f_o-f_e\rvert-0{,}5$	$(\lvert f_o-f_e\rvert-0{,}5)^2$
A	3,07	9,42
B	3,07	9,42
C	3,07	9,42
D	3,07	9,42

Шаг 4. Делим каждое из значений $(\lvert f_o - f_e\rvert - 0{,}5)^2$ на соответствующую ему ожидаемую частоту (f_e) и, просуммировав, получаем χ^2:

Клетка	$(\|f_o - f_e\| - 0,5)^2$	f_e	$\frac{(\|f_o - f_e\| - 0,5)^2}{f_e}$
A	9,42	8,57	1,10
B	9,42	6,43	1,47
C	9,42	7,43	1,27
D	9,42	5,57	1,69
			$\sum \frac{(\|f_o - f_e\| - 0,5)^2}{f_e} = 5,53$

Шаг 5. Находим число степеней свободы. Для случая с двумя выборками $df = (c - 1)(r - 1)$, где c — число столбцов; r — число строк. В данном примере $df = (2 - 1) \cdot (2 - 1) = 1$.

Шаг 6. Находим критическое значение χ^2 при заданном α-уровне. Если расчетное значение χ^2 больше или равно этому значению, то H_0 отклоняется.

Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0,05$ и $df = 1$ равно 3,841. Поскольку расчетное значение χ^2, равное 5,53, превышает критическое, то мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Упражнения

В упражнениях 13—18 мы воспользуемся данными из упражнения 11, применяя $\alpha = 0,01$.

13. Найдите ожидаемую частоту для каждой клетки. (*Замечание.* Чтобы воспользоваться критерием χ^2, данные не нужно преобразовывать.)

14. Найдите абсолютное значение разности между наблюдаемой и ожидаемой частотой для каждой клетки.

15. Для каждой клетки найдите $|f_o - f_e| - 0,5$ и возведите полученные значения в квадрат.

16. Рассчитайте значение χ^2.

17. Найдите df.

18. Найдите критическое значение χ^2 и сделайте статистический вывод, соответствующий полученным результатам.

4.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИТЕРИЯ χ^2 В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ВЫБОРОК

До сих пор мы рассматривали в данной главе способы применения критерия Фишера и критерия χ^2 для проверки статистической значимости частотных данных в тех случаях, когда каждая из двух номинальных переменных имеет по два значения. В этом параграфе будет рассмотрено использование критерия χ^2 в более общих ситуациях, когда одна или обе переменные имеют более чем по два значения. Поскольку при нескольких выборках $df > 1$, поправка на непрерывность не требуется и формула для вычисления χ^2 принимает вид:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e},$$

где $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}$ указывает на необходимость просуммировать это отношение по всем строкам и столбцам.

Пример

Было проведено исследование с целью определить предпочтительность нескольких типов упаковки жареного картофеля. Для этого было опрошено 300 женщин, выбранных из разных по уровню дохода групп населения. Полученные результаты выглядят следующим образом:

Предпочтительный тип упаковки	Группа с высоким доходом	Группа со средним доходом	Группа с низким доходом	Итоги по строкам
Металлическая фольга	15 A	27 B	55 C	97 $A+B+C$
Непромокаемая бумага	25 D	33 E	40 F	98 $D+E+F$
Целлофан	40 G	40 H	25 I	105 $G+H+I$
Итоги по столбцам	80 $A+D+G$	100 $B+E+H$	120 $C+F+I$	300

H_0: в исходной совокупности доли предпочитающих каждый из типов упаковки одинаковы для всех групп с различным уровнем дохода.

H_1: в исходной совокупности доли предпочитающих каждый из типов упаковки неодинаковы для различных по уровню дохода групп.

Используется $\alpha = 0{,}01$.

Шаг 1. Находим ожидаемую частоту для каждой клетки. Она может быть получена путем перемножения итоговых частот столбца и строки, в которых находится данная клетка, и последующим делением полученного произведения на N. Таким образом, ожидаемая частота для каждой клетки составит:

$$\text{клетка } A=\frac{(A+B+C)\,(A+D+G)}{N}=\frac{7\,760}{300}=25{,}87$$

$$\text{клетка } B=\frac{(A+B+C)\,(B+E+H)}{N}=\frac{9\,700}{300}=32{,}33$$

$$\text{клетка } C=\frac{(A+B+C)\,(C+F+I)}{N}=\frac{11\,640}{300}=38{,}80$$

$$\text{клетка } D=\frac{(D+E+F)\,(A+D+G)}{N}=\frac{7\,840}{300}=26{,}13$$

$$\text{клетка } E=\frac{(D+E+F)\,(B+E+H)}{N}=\frac{9\,800}{300}=32{,}67$$

$$\text{клетка } F=\frac{(D+E+F)\,(C+F+I)}{N}=\frac{11\,760}{300}=39{,}20$$

$$\text{клетка } G = \frac{(G+H+I)(A+D+G)}{N} = \frac{8\,400}{300} = 28{,}00$$

$$\text{клетка } H = \frac{(G+H+I)(B+E+H)}{N} = \frac{10\,500}{300} = 35{,}00$$

$$\text{клетка } I = \frac{(G+H+I)(C+F+I)}{N} = \frac{12\,600}{300} = 42{,}00$$

$$\sum f_e = 300{,}00$$

Для проверки просуммируем все ожидаемые частоты. С учетом возможной ошибки округления эта сумма должна быть равна N.

Шаг 2. Вычитаем каждую частоту f_e из соответствующей ей f_o и возводим полученные результаты в квадрат:

Клетка	f_o	f_e	f_o-f_e	$(f_o-f_e)^2$
A	15	25,87	—10,87	118,16
B	27	32,33	—5,33	28,41
C	55	38,80	16,20	262,44
D	25	26,13	—1,13	1,28
E	33	32,67	0,33	0,11
F	40	39,20	0,80	0,64
G	40	28,00	12,00	144,00
H	40	35,00	5,00	25,00
I	25	42,00	—17,00	289,00
			$\sum (f_o-f_e)=0{,}00$	

Проверка: сумма всех чисел в столбце $(f_o - f_e)$ должна равняться нулю (с учетом возможной ошибки округления).

Шаг 3. Делим каждое из значений $(f_o - f_e)^2$ на соответствующую f_e и, просуммировав результаты, получаем χ^2:

Клетка	f_e	$(f_o-f_e)^2$	$\frac{(f_o-f_e)^2}{f_e}$
A	25,87	118,16	4,57
B	32,33	28,41	0,88
C	38,80	262,44	6,76
D	26,13	1,28	0,05
E	32,67	0,11	0,00
F	39,20	0,64	0,02
G	28,00	144,00	5,14
H	35,00	25,00	1,40
I	42,00	289,00	6,88
		$\chi^2=\sum \frac{(f_o-f_e)^2}{f_e}=25{,}70$	

Шаг 4. Находим df:

$$df = (r - 1)(c - 1),$$

где r — число строк; c — число столбцов. В данном примере df = $= (3 - 1) \cdot (3 - 1) = 4$.

Шаг 5. Находим критическое значение χ^2 при заданном α-уровне. Если расчетное значение χ^2 превышает критическое или равно ему, H_0 отклоняется.

Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}01$ и $df = 4$ составляет 13,277. Поскольку расчетное значение χ^2, равное 25,70, превышает критическое, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Упражнения

В упражнениях 19—23 используются следующие данные:

Группа	X	Y	Итоги по строкам
1	21 *A*	38 *B*	59
2	32 *C*	29 *D*	61
3	36 *E*	25 *F*	61
4	41 *G*	23 *H*	64
Итоги по столбцам	130	115	245

Проверьте H_0, используя $\alpha = 0{,}01$.

19. Найдите ожидаемую частоту для каждой клетки.
20. Найдите все значения $(f_o - f_e)^2$.
21. Найдите χ^2.
22. Найдите df.
23. Найдите критическое значение χ^2 и сделайте статистический вывод, соответствующий полученным результатам.

Контрольные вопросы к главе 4

Вопросы 1—4 основываются на следующей таблице сопряженности признаков 2×2:

	Да	Нет
Группа *A*	10	4
Группа *B*	3	8

1. Сумма $A+B$ равна: а) 11; б) 13; в) 14; г) 12.
2. Сумма $C+D$ равна: а) 13; б) 11; в) 12; г) 14.
3. В клетке B находится значение: а) 3; б) 10; в) 8; г) 4.
4. В клетке D находится значение: а) 10; б) 4; в) 3; г) 8.
5. Если $A+B=14$, $C+D=9$, $B=11$, то при $\alpha=0{,}01$ и двустороннем критерии критическое значение составит: а) 4; б) 3; в) 2; г) 1.
6. Если $A+B=12$, $C+D=4$, $B=11$, $\alpha=0{,}01$ (критерий односторонний) и $D=1$, то: а) мы находим, что критическое значение D равно 1, и отклоняем H_0; б) мы находим, что критическое значение D равно 0, и отклоняем H_0; в) мы находим, что критическое значение D равно 1, и принимаем H_0; г) мы находим, что критическое значение D равно 0, и принимаем H_0.

Вопросы 7—10 основываются на следующей таблице сопряженности признаков 2 × 2:

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за
Группа A	20	27
Группа B	12	36

7. Ожидаемая частота в клетке C равна: а) 31,83; б) 31,17; в) 16,17; г) 15,83.
8. Разность $|f_o-f_e|$ для клетки D равна: а) 9,22; б) 6,22; в) 11,17, г) 4,17.
9. Величина $(|f_o-f_e|-0{,}5)^2/f_e$ для клетки A равна: а) 1,10; б) 0,85; в) 0,87; г) 0,82.
10. Число степеней свободы равно: а) 1; б) 94; в) 3; г) 2.

Вопросы 11—14 основываются на следующих частотных данных:

Группа	X_1	X_2	X_3
1	16	20	34
2	25	21	22
3	32	18	14

11. Число степеней свободы равно: а) 6; б) 9; в) 8; г) 4.
12. В группе 2 ожидаемое число выбравших решение X_3 составит: а) 23,56; б) 24,26; в) 22,18; г) 23,13.
13. Известно, что ожидаемые частоты для клеток G и H равны 23,13 и 18,69 соответственно. Чему равна ожидаемая частота для клетки I: а) 23,13; б) 19,87; в) 22,18; г) 24,57?
14. Итоговая сумма $D+E+F$ равна: а) 70; б) 73; в) 68; г) 59.

Практические задаиия

15. Имеются следущие данные:

	Да	Нет
Группа *A*	10	4
Группа *B*	3	8

H_0: для всей совокупности лиц из группы *B* доля отвечающих «да» меньше или равна доле отвечающих «да» в группе *A*;

H_1: для всей совокупности лиц из группы *B* доля отвечающих «да» больше соответствующей доли для группы *A*.

Проверьте H_0, используя $\alpha = 0{,}05$.

16. Имеются следующие данные:

	Высказавшиеся за	Высказавшиеся против
Группа *A*	20	27
Группа *B*	12	36

H_0: для всей совокупиости лиц из группы *A* доля выступающих «за» равна аналогичной доле для всех лиц из группы *B*.

H_1: для всей совокупности лиц из группы *A* доля выступающих «за» отличается от аналогичной доли в группе *B*.

Проверьте H_0, используя $\alpha = 0{,}01$.

17. Имеются следующие данные:

Группа	X_1	X_2	X_3
1	16	20	34
2	25	21	22
3	32	18	14

H_0: в генеральной совокупности доли выбирающих каждое из решений одинаковы во всех трех группах.

H_1: в генеральной совокупности доли выбирающих каждое из решений различаются по всем трем группам.

Проверьте H_0, используи $\alpha = 0{,}01$.

Глава 5

НОМИНАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ. СВЯЗАННЫЕ ВЫБОРКИ

В типичном исследовании, включающем по два и более условия, субъекты распределяются по экспериментальным условиям случайным образом, а для сравнения групп используются некоторые характеристики результатов эксперимента. Однако иногда субъекты из различных групп не являются независимыми, они скорее связаны друг с другом. Простейшим примером связанных выборок может служить план, в котором одни и те же субъекты испытываются как до воздействия экспериментальной переменной, так и после него. Наибольший интерес представляет *изменение* от «до» к «после». При использовании плана «до — после» нас может интересовать оценка воздействия широкого круга переменных, например влияние пропаганды на общественное мнение, воздействие различных методов обучения на качество выполнения заданий, изменение уровня преступности в результате изменения условий наказания.

В этой главе мы рассмотрим планы со связанными выборками, которые включают по две и более выборки.

Цели главы

1. Выяснить, как нужно представлять данные в виде таблицы сопряженности признаков типа «до—после».
2. Узнать, как используется критерий Макнимара для оценки изменений от «до» к «после» в случае, если: а) число изменений меньше или равно 50, б) число изменений превышает 50.
3. Выяснить, как вычисляется и интерпретируется Q-критерий Кокрена при использовании более двух связанных выборок.

5.1. КРИТЕРИЙ ЗНАЧИМОСТИ ИЗМЕНЕНИЙ МАКНИМАРА

Представление данных типа «до — после» в таблицу 2×2

При проведении мероприятий по схеме «до—после» ответы обычно связаны с дихотомическими категориями типа «да—нет», «за—против», «положительный—отрицательный» и т. д. При этом принято обозначать отрицательный ответ (нет, против) знаком минус, а положительный ответ — знаком плюс.

Пример

Была предпринята попытка оценить эффективность публичных выступлений кандидата на выборную должность. С этой целью группе из 60 человек до и после его речи был задан вопрос: «Если бы выборы проводились сейчас, стали бы вы голосовать за кандидата X?». Полученные результаты выглядят следующим образом:

S	До	После	S	До	После	S	До	После	S	До	После
1	+	+	16	+	—	31	+	+	46	+	+
2	+	+	17	—	+	32	—	—	47	—	+
3	+	—	18	—	+	33	+	+	48	—	—
4	—	+	19	+	+	34	—	—	49	—	+
5	—	+	20	—	—	35	+	+	50	+	+
6	—	—	21	—	+	36	—	—	51	—	—
7	+	+	22	+	+	37	+	+	52	—	+
8	—	+	23	—	—	38	—	+	53	+	+
9	+	+	24	+	+	39	+	+	54	—	—
10	—	+	25	—	—	40	—	—	55	+	+
11	—	—	26	+	+	41	+	+	56	—	—
12	+	+	27	—	—	42	—	—	57	—	—
13	—	+	28	+	+	43	+	+	58	—	—
14	+	+	29	—	—	44	—	—	59	+	+
15	—	+	30	+	+	45	+	+	60	—	—

В этой таблице (++) обозначает благоприятный ответ как до, так и после речи; (— —) означает отрицательный ответ в обоих случаях; (+ —) — изменение благоприятного ответа на неблагоприятный; (— +) — изменение неблагоприятного ответа на благоприятный. Частота каждого из этих результатов может быть записана в таблицу 2 × 2 следующим образом:

		После		
		—	+	
До	+	2 *A*	25 *B*	$A+B=27$
	—	20 *C*	13 *D*	$C+D=33$
	Сумма ответов «после»	$A+C=22$	$B+D=38$	$N=60$

Обратите внимание, что в клетках *A* и *D* представлены изменения от «до» к «после», причем в клетке *A* — изменение благоприятных ответов на неблагоприятные, а в клетке *D* — изменение неблагоприятных ответов на благоприятные. Именно на эти две клетки обращают особое внимание при работе с критерием Макнимара. При этом типичная ненаправленная нулевая гипотеза состоит в том, что в генеральной совокупности доля тех, кто изменяет благоприятный ответ на неблагоприятный, равна доле изменяющих неблагоприятный ответ на благоприятный.

Использование биномиального распределения для проверки значимости изменений при $N \leqslant 50$

Биномиальное выборочное распределение (см. гл. 3) может быть использовано для проверки значимости изменений. Прн этом объем выборки (N) определяется как сумма частот в диагональных клетках A и D. Поскольку в данном примере изменили свои ответы в общей сложности 15 человек, то $N = 15$.

Запишем проблему в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): $P = Q = \frac{1}{2}$, т. е. в генеральной совокупности доля изменений, представленных в клетке A, равна доле изменений, отраженных в клетке D.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$.

в) *Статистический критерий*: используется критерий Макнимара, поскольку мы имеем дело с данными типа «до—после», которые соответствуют номинальной классификации.

г) *Выборочное распределение*: интересующие нас ответы типа «до—после» принадлежат к двум категориям: (— +) и (+ —). Поскольку $N \leqslant 50$, для проверки значимости различия можно воспользоваться табл. А (критические значения биномиальной переменной).

д) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

е) *Критическое значение*: обращение к табл. А показывает, что при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии требуемые для отклонения H_0 значения x определяются из условий $x \geqslant 13$ или $N - x \geqslant 13$.

Решение. Так как наблюдаемое значение x равно 13, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Выступление кандидата было эффективным, поскольку привело к значимо большему количеству положительных изменений по сравнению с отрицательными.

Упражнения

Упражнения 1—7 основываются на следующих данных:

S	До	После	S	До	После	S	До	После	S	До	После
1	+	—	10	—	+	19	—	+	28	+	—
2	—	—	11	—	—	20	+	—	29	+	—
3	+	+	12	+	—	21	+	+	30	—	—
4	+	—	13	+	—	22	+	+	31	+	+
5	—	—	14	—	—	23	+	—	32	—	—
6	+	+	15	+	+	24	+	+	33	+	—
7	+	—	16	+	+	25	+	—	34	—	—
8	—	+	17	+	—	26	—	—	35	+	—
9	+	—	18	+	+	27	+	+	36	+	+

1. Поместите данные в таблицу 2×2.
2. Сколько человек изменили благоприятные ответы на неблагоприятные?
3. Сколько человек изменили неблагоприятные ответы на благоприятные?
4. Сколько ответов оказалось отрицательными в обоих случаях?

5. Сколько ответов оказалось положительными в обоих случаях?
6. Чему равно N?
7. На основе приведенных выше данных запишите задачу в формальном статистическом виде и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам. Используйте $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

Использоваиие критерия χ^2 для проверки значимости изменений при $N>50$

Точно так же, как и в случае, когда критерий χ^2 применяется для получения хорошей аппроксимации биномиального критерия при N, приближающемся или превосходящем 50, критерий χ^2 может быть использован в критерии Макнимара, когда N (сумма частот в клетках A и D) превышает 50.

Пример

Получены следующие результаты:

После

		−	+	Итого
До	+	36 A	40 B	76
	−	48 C	22 D	70
	Итого	84	62	146

$$H_0\colon\ P = Q = \frac{1}{2},\quad \alpha = 0{,}01,\quad N = 58.$$

Формула для χ^2, приведенная в гл. 3, может применяться для проверки значимости изменений в клетках A и D. Однако для критерия Макнимара возможен упрощенный способ расчета χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(|A-D|-1)^2}{A+D},\quad \mathrm{df} = 1,$$

где $|A-D|$ — абсолютное значение разности между частотами клеток A и D, а единица вычитается для поправки на непрерывность. В данном примере

$$\chi^2 = \frac{(|36-22|-1)^2}{36+22} = \frac{(14-1)^2}{58} = \frac{(13)^2}{58} = 2{,}91.$$

Из табл. С мы находим, что критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}01$ и $df = 1$ равно 6,635. Поскольку расчетное значение χ^2 меньше критического, мы принимаем H_0.

Упражнения

Упражнения 8—9 основываются на следующей таблнце данных:

	—	+
+	28	107
—	92	46

8. Найдите значение χ^2.

9. Найдите критическое значение χ^2 и сделайте вывод на основе полученных данных. Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

5.2. СЛУЧАЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ВЫБОРКАМИ. Q-КРИТЕРИЙ КОКРЕНА

В некоторых случаях отдельная группа субъектов может быть подвергнута более чем двум различным экспериментальным воздействиям или условиям, причем выясняются их ответы, соответствующие каждому виду обработки. Если критериальная мера носит двузначный характер («да—нет», «за—против», «поддержать—отклонить»), то подходящим критерием значимости будет Q-критерий Кокрена. Q-критерий Кокрена также может быть использован, когда группы однородных субъектов подвергаются более чем двум экспериментальным воздействиям и их ответы носят двухвариантный характер. Для иллюстраций применения Q-критерия Кокрена мы воспользуемся планом с сопоставимыми выборками.

Пример

Среди 60 человек был проведен анкетный опрос с целью выяснить степень их либеральности или консервативности. На основе этого опроса было сформировано 15 однородных групп по 4 человека в каждой. Затем эти группы были поставлены в следующие 4 условия: X_1 — сообщаются аргументы только в поддержку некоторого законодательства; X_2 — сообщаются аргументы только против законодательства; X_3 — сообщаются сбалансированные аргументы с общей рекомендацией против законодательства; X_4 — сообщаются сбалансированные аргументы с общей рекомендацией в поддержку законодательства.

Для каждого из условий отвечающие указали, выступают они в поддержку законодательства или протнв него, причем полученные результаты выглядят следующим образом (0 означает отрицательный ответ, 1 — положительный):

Однородные группы	Условия			
	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	0	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	0	1
4	0	0	0	0
5	1	0	1	1
6	0	1	0	1
7	1	1	0	1
8	1	0	0	1
9	0	1	1	0
10	0	0	0	1
11	1	1	0	1
12	1	1	1	0
13	0	0	0	1
14	1	0	0	1
15	1	1	1	1
	$\Sigma X_1=7$	$\Sigma X_2=8$	$\Sigma X_3=4$	$\Sigma X_4=11$

Нулевая гипотеза заключается в том, что в генеральной совокупности доли всех экспериментальных условий одинаковы.

В альтернативной гипотезе утверждается, что доли условий в генеральной совокупности различны. Если H_0 отклоняется, то мы можем заключить, что экспериментальные условия вызывают у отвечающих различное отношение к законодательству.

При проверке H_0 мы воспользуемся $\alpha = 0{,}01$. Формула для вычисления Q выглядит так:

$$Q=\frac{(k-1)\,[k\Sigma\,(\Sigma X)^2-(\Sigma X_T)^2]}{k\Sigma\,(\Sigma X_R)-\Sigma\,(\Sigma X_R^2)},$$

где k — число условий;

$(\Sigma X_T)^2 = (\Sigma X_1 + \Sigma X_2 + \Sigma X_3 + \Sigma X_k)^2$;

$\Sigma\,(\Sigma X)^2 = (\Sigma X_1)^2 + (\Sigma X_2)^2 + (\Sigma X_3)^2 + (\Sigma X_k)^2$;

$\Sigma\,(\Sigma X_R)$ — сумма итоговых значений по строкам;

$\Sigma\,(\Sigma X_R^2)$ — сумма квадратов итоговых значений по строкам.

Шаг 1. Находим сумму для каждого условия (ΣX_1, ΣX_2, ΣX_3, ΣX_4). В данной задаче $\Sigma X_1 = 7$, $\Sigma X_2 = 8$, $\Sigma X_3 = 4$, $\Sigma X_4 = 11$.

Шаг 2. Просуммируем значения в каждой строке и получим ΣX_R, возведем их в квадрат и получим ΣX_R^2. Просуммировав значения в обоих столбцах, получим $\Sigma\,(\Sigma X_R)$ и $\Sigma\,(\Sigma X_R^2)$. Для проверки можно воспользоваться тем, что сумма $\Sigma\,(\Sigma X_R)$ должна равняться $\Sigma X_1 + \Sigma X_2 + \Sigma X_3 + \Sigma X_4$.

Однородные группы	X_1	X_2	X_3	X_4	ΣX_R	ΣX_R^2
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	2	4
3	0	1	0	1	2	4
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	1	3	9
6	0	1	0	1	2	4
7	1	1	0	1	3	9
8	1	0	0	1	2	4
9	0	1	1	0	2	4
10	0	0	0	1	1	1
11	1	1	0	1	3	9
12	1	1	1	0	3	9
13	0	0	0	1	1	1
14	1	0	0	1	2	4
15	1	1	1	1	4	16
$\Sigma X =$	7	8	4	11	$\Sigma(\Sigma X_R)=30$	$\Sigma(\Sigma X_R^2)=78$

Шаг 3. Подставляем в формулу для Q численные значения и производим вычисления:

$$Q=\frac{(k-1)\,[k\Sigma(\Sigma X)^2-(\Sigma X_T)^2]}{k\Sigma(\Sigma X_R)-\Sigma(\Sigma X_R^2)}=\frac{3\,[4\,(7^2+8^2+4^2+11^2)-30^2]}{40\cdot 30-78}=$$

$$=\frac{3\cdot(4\cdot 250-900)}{120-78}=\frac{3\cdot(1\,000-900)}{42}=\frac{300}{42}=7{,}143.$$

Шаг 4. Находим df. df $= k-1$. Для данной задачи df $= 4-1 = 3$.

Шаг 5. Находим критическое значение Q. Поскольку Q имеет такое же распределение, как и χ^2, находим значение χ^2 при заданных α-уровне и df. Для данной задачи из табл. С находим, что при $\alpha = 0{,}01$ и df $= 3$ критическое значение χ^2 равно 11,341.

Решение. Поскольку расчетное значение χ^2 не достигает критического, мы не можем отклонить H_0.

Упражнения

В упражнениях 10—14 используются следующие данные:

Однородные группы	X_1	X_2	X_3	Однородные группы	X_1	X_2	X_3
1	0	0	1	6	1	0	0
2	0	1	0	7	1	1	1
3	0	0	1	8	0	0	1
4	0	0	1	9	0	1	1
5	0	1	1	10	1	1	1
				11	0	1	0

10. Найдите сумму для каждого условия.

11. Вычислите ΣX_R и ΣX_R^2 и найдите $\Sigma (\Sigma X_R)$ и $\Sigma (\Sigma X_R^2)$.

12. Найдите Q.

13. Найдите df.

14. Найдите критическое значение Q (χ^2) и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

Контрольные вопросы к главе 5

Вопросы 1—5 основываются на следующей таблице 2 × 2:

		После	
		—	+
До	+	20	3
	—	15	8

1. Число лиц, давших одинаковые ответы как до, так и после, равно: а) 28; б) 15; в) 3; г) 18.

2. Число лиц, изменивших свои ответы, равно: а) 8; б) 18; в) 28; г) 20.

3. Какое из следующих утверждений верно:

а) субъекты были равномерио распределены до, но существеиио склонялись к положительному ответу после;

б) субъекты были равномерно распределены до, но существенно склонялись к отрицательиому ответу после;

в) субъекты существенно склонялись к положительному ответу как до, так и после;

г) субъекты существенно склонялись к отрицательному ответу как до, так и после?

4. N равно: а) 43; б) 18; в) 35; г) 28.

5. Используя $\alpha = 0{,}05$ при двустороннем критерии, мы можем прийти к выводу: а) крнтическое значение $x = 20$; H_0 отклоняется;

б) критнческое значение $x = 20$; H_0 принимается.

в) критическое значение $x = 14$; H_0 отклоняется;

г) критическое значение $x = 14$; H_0 принимается.

Вопросы 6—8 основываются на следующих данных:

		После	
		—	+
До	+	22	60
	—	54	32

6. Число изменивших отрицательный ответ на положительный равно: а) 16; б) 22; в) 60; г) 32.

7. Величнна $(|A - D| - 1)^2$ равна: а) 81; б) 121; в) 25; г) 99.

8. Число степеней свободы равно: а) 167; б) 53; в) 3; г) 1.

Вопросы 9—12 основываются на следующих данных:

Однородные группы	Условия		
	X_1	X_2	X_3
1	0	0	1
2	0	1	1
3	0	1	1
4	1	1	1
5	0	0	1

9. k равно: а) 5; б) 4; в) 3; г) 2.
10. $\Sigma\,(\Sigma X)^2$ равно: а) 35; б) 81; в) 19; г) 75.
11. $\Sigma\,(\Sigma X_R^2)$ равно: а) 35; б) 81; в) 19; г) 75.
12. $\Sigma\,(\Sigma X_R)$ равно: а) 1; б) 3; в) 5; г) 9.

Практические задания

13. Поместите приведенные данные в таблицу 2 × 2 и проверьте H_0: число переходов от отрицательных к положительным ответам совпадает с числом переходов от положительных ответов к отрицательным. Используйте $\alpha = 0{,}05$.

S	До	После	S	До	После	S	До	После	S	До	После
1	+	+	11	—	—	21	+	+	31	—	—
2	—	+	12	—	+	22	—	+	32	—	+
3	+	—	13	+	—	23	—	—	33	+	+
4	—	+	14	+	+	24	+	—	34	—	—
5	+	—	15	+	+	25	+	+	35	+	+
6	+	+	16	—	+	26	+	+	36	—	+
7	—	+	17	+	+	27	+	—	37	—	—
8	—	—	18	+	+	28	+	+	38	+	+
9	+	+	19	—	+	29	—	+	39	—	+
10	—	—	20	—	—	30	—	+	40	+	+

14. Используя приведенные данные, проверьте нулевую гипотезу: число переходов от отрицательных к положительным ответам меньше или равно числу переходов от положительных ответов к отрицательным. Используйте $\alpha = 0{,}01$.

		После	
		—	+
До	+	14	48
	—	24	38

15. Используя приведенные данные, проверьте нулевую гипотезу: в генеральной совокупности доли всех экспериментальных условий одинаковы. Используйте $\alpha = 0{,}01$.

Однородные группы	Условия				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	0	1	0	1	1
2	0	0	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1
5	1	1	1	1	1
6	0	0	1	0	0
7	0	0	0	1	1
8	1	1	1	1	1
9	0	1	1	1	1
10	0	1	0	0	1

Часть вторая

ПОРЯДКОВЫЕ ШКАЛЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Во второй части книги рассматриваются непараметрические критерии, применяемые в случае порядковых шкал измерения. Как и номинальные шкалы, порядковые измерения основываются на качественных переменных. Однако в отличие от номинальных шкал порядковые шкалы соответствуют таким качественным переменным, для которых характерна некоторая упорядоченность, направленность или степень важности.

Порядковые отношения обычно выражаются с помощью рангов. При сравнении характерных свойств объектов, событий или людей мы часто бываем не в состоянии точно определить количественные различия между ними. Однако зачастую мы можем установить порядковые отношения, например событие A занимает высшее положение по отношению к рассматриваемому свойству, событие B является вторым по значению и т. д. В дополнение к тождеству и различию для порядковых шкал используются математические связи типа «больше, чем» ($>$) и «меньше, чем» ($<$). Неравенство $a > b$ может означать: a важнее b, выше рангом, чем b, престижнее b, привлекательнее b и т. д. В свою очередь, $a < b$ может означать: a меньше b, ниже рангом, чем b, менее престижно, чем b, и т. д.

Глава 6

ПОРЯДКОВЫЕ ШКАЛЫ. СЛУЧАЙ С ОДНОЙ ВЫБОРКОЙ

Случай с одной выборкой наиболее часто связан с рассмотрением вопросов «согласия» (goodness-of-fit). При этом полученные на основе одиночной выборки наблюдения сравниваются с теоретическими значениями, определенными при условии справедливости нулевой гипотезы. В этой главе мы рассмотрим два критерия, которые подходят для порядковых шкал и используются при одной выборке.

Цели главы

1. Выяснить, как вычисляется и интерпретируется критерий Колмогорова—Смирнова для одной выборки.

2. Узнать, как проверяются гипотезы, касающиеся *последовательности* наблюдаемых событий.

6.1. КРИТЕРИИ КОЛМОГОРОВА—СМИРНОВА ДЛЯ ОДНОЙ ВЫБОРКИ

При малом объеме выборки ($N \leqslant 35$)

Критерий Колмогорова—Смирнова применяется с наибольшей эффективностью, когда есть основание предположить, что частоты каждого из порядковых значений будут располагаться не случайным образом, а в соответствии с некоторой предсказуемой схемой. Например, если бы нам надо было зафиксировать число побед на каждой из беговых дорожек стадиона, то мы могли бы ожидать большую частоту побед на дорожках с меньшими порядковыми номерами. (Поскольку они находятся ближе к внутренней бровке, для достижения финишной черты по ним в общей сложности пробегают меньшее расстояние.)

Процедура, связанная с вычислением тестовой статистики D, требует накапливания частот по всем порядковым значениям. Затем сравниваются два распределения накопленных частот — теоретическое распределение, имеющее место при справедливой H_0, и наблюдаемое распределение.

Гипотетический пример

Группа исследователей выдвинула гипотезу о том, что индивидуумы с ярко выраженными взаимными антипатиями будут чувствовать себя спокойно только тогда, когда они будут находиться на определенном расстоянии друг от друга. Для проверки этой гипотезы провели опрос группы из 35 человек, про напряженные взаимоотношения между которыми было заранее известно. Им было предложено взглянуть на пять фотографий и выбрать из них одну наиболее привлекательную. На фотографиях были изображены два человека, находящиеся на разных расстояниях друг от друга; во всех прочих отношениях фотографии были идентичны. Результаты оказались следующими:

	Расстояние					N
	наибольшее 1	2	3	4	наименьшее 5	
f_0	9	11	8	4	3	35

$H_0: P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 0{,}2$. В генеральной совокупности доля предпочитающих каждую фотографию одинакова.

$H_1: P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_4 \neq P_5 \neq 0{,}2$.

$\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

Шаг 1. Для каждого расстояния находим ожидаемую частоту f_e путем умножения N на долю, ожидаемую в каждом случае при справедливой нулевой гипотезе. В данном примере $H_0: P = 0{,}2$; поэтому $f_e = 35 \cdot 0{,}2 = 7$.

	Расстояние					Итого
	1	2	3	4	5	
f_0	9	11	8	4	3	35
f_e	7	7	7	7	7	35

Шаг 2. Выражаем каждую наблюдаемую и каждую ожидаемую частоту в виде отношения:

$$\frac{\text{частота клетки}}{N}.$$

	Расстояние				
	1	2	3	4	5
Наблюдаемое отношение	9/35	11/35	8/35	4/35	3/35
Ожидаемое отношение	7/35	7/35	7/35	7/35	7/35

Шаг 3. Вычисляем накопленные значения наблюдаемых и ожидаемых отношений путем их суммирования слева направо (суммирование справа налево также приводит к статистике D):

	Расстояние				
	1	2	3	4	5
Накопленное наблюдаемое отношение	9/35	20/35	28/35	32/35	35/35
Накопленное ожидаемое отношение	7/35	14/35	21/35	28/35	35/35

Шаг 4. Находим абсолютные значения разности между накопленными наблюдаемыми отношениями и накопленными ожидаемыми отношениями:

	Расстояние				
	1	2	3	4	5
Накопленное наблюдаемое отношение	9/35	20/35	28/35	32/35	35/35
Накопленное ожидаемое отношение	7/35	14/35	21/35	28/35	35/35
Абсолютное значение разности	2/35	6/35	7/35	4/35	0/35

Шаг 5. Находим наибольшее отношение[1] и выражаем его в виде десятичной дроби. Полученное значение соответствует тестовой статистике D. В данном примере наибольшее отношение равно 7/35. Выразив его в виде десятичной дроби, получаем $D = 0{,}2$.

Шаг 6. В табл. Е (критические значения D в критерии Колмогорова—Смирнова для одной выборки) находим критическое значение D при $N = 35$ и $\alpha = 0{,}01$. Если наблюдаемое значение D *больше* или *равно* критическому значению, H_0 отклоняется.

Решение. В данном примере критическое значение равно 0,27. Поскольку наблюдаемое значение D меньше критического, H_0 принимается.

При большом объеме выборки ($N > 35$)

Процедура определения D при N, превышающем 35, в точности совпадает с описанной процедурой. Изменение требуется только на шаге 6 — при определении критического значения D. Для случая, когда N превышает 35, в табл. Е приведена формула для приближенного расчета D (значения двусторонние) при нескольких различных α-уровнях.

Пример

Дано: $N = 140$. Необходимо найти критическое значение D при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии.

$$D = \frac{1{,}36}{\sqrt{140}} = 0{,}115.$$

Любое наблюдаемое значение D, которое равно этому значению или превышает его, будет значимым при $\alpha = 0{,}05$ в случае $N = 140$.

Упражнения

Упражнения 1—5 основываются на следующих данных:

	Порядковая позиция						N
	1	2	3	4	5	6	
f_0	2	5	9	7	4	3	30

$H_0: P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}$.

$H_1: P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_4 \neq P_5 \neq P_6 \neq \frac{1}{6}$.

$\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

1. Определите ожидаемую частоту для каждой клетки.
2. Выразите каждую наблюдаемую и ожидаемую частоту в виде отношения.
3. Вычислите накопленные значения ожидаемых и наблюдаемых частот.
4. Найдите абсолютное значение разности между накопленными ожидаемыми и накопленными наблюдаемыми отношениями.
5. Найдите критическое значение D и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

[1] Среди абсолютных значений разности. — *Примеч. пер.*

6. Найдите критическое значение D при $N = 43$ и $\alpha = 0{,}05$.
7. Найдите критическое значение D при $N = 43$ и $\alpha = 0{,}01$.
8. Найдите критическое значение D при $N = 92$ и $\alpha = 0{,}01$.
9. Найдите критическое значение D при $N = 71$ и $\alpha = 0{,}05$.

6.2. КРИТЕРИЙ СЕРИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ВЫБОРКИ

При малых объемах выборки ($n_1 \leqslant 20$ и $n_2 \leqslant 20$)

Бóльшая часть статистических критериев предназначена для проверки гипотез относительно параметров генеральной совокупности, таких, как среднее значение, медиана, доля, корреляция. Однако в последнее время появились статистические критерии для проверки гипотезы о том, что выборка была извлечена из генеральной совокупности случайным образом. Один их таких критериев — критерий серий для одной выборки.

Предположим, что имеются три знака + и три знака —. Они могут быть расположены в различном порядке и поэтому на их основе можно получить несколько различных последовательностей, например: + + + — — —, + — + — + —, — — + + — + и т. д. Серией называется ряд одинаковых символов, либо ограниченных с обеих сторон другими символами, либо не имеющих других символов на концах ряда.

Примеры

а) В последовательности + + + — — — представлены две серии: + + + и — — —.

б) В последовательности Н Т Н Н Т Т представлены четыре серии: Н, Т, НН, ТТ.

в) В последовательности 0 1 0 1 0 1 содержится шесть серий: 0, 1, 0, 1, 0, 1.

Упражнения

В упражнениях 10—14 укажите число серий.

10. + + — + + — — + —.
11. Н Н Н Н Т Т Т Н Т.
12. 0 1 1 1 1 0 1 0 0.
13. R L L R L R L R.
14. — — + — — + + + +.

Пример

Очередь состоит из лиц разного возраста. Исследователь замечает, что распределение людей младшего и старшего возраста в этой очереди не выглядит случайным, поскольку люди разного возраста стоят группами по несколько человек. В очереди наблюдается такая последовательность лиц старшего (1) и младшего (0) возраста: 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0.

Необходимо определить, вероятно ли, что эта последовательность была извлечена из совокупности случайных последовательностей. Воспользуемся $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): порядок расположения лиц старшего и младшего возраста случайный.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): порядок расположения лиц младшего и старшего возраста неслучаен.

в) *Статистический критерий*: поскольку мы рассматриваем вопрос о случайности расположения объектов в отдельной выборке, подходящим критерием будет критерий серий для одной выборки.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

д) *Выборочное распределение*: в табл. F содержатся критические значения R для $n_1 \leqslant 20$ и $n_2 \leqslant 20$ при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии.

е) *Критическое значение*: см. шаг 4.

Шаг 2. Определяем n_1 и n_2[1]. Для данной задачи $n_1 = 10$, $n_2 = 12$.

Шаг 3. Подчеркиваем в выборочной последовательности каждую серию и подсчитываем общее количество серий (R). В данной задаче число серий (R) равно 7: $\underline{000}\ \underline{11111}\ \underline{0}\ \underline{111}\ \underline{000}\ \underline{1111}\ \underline{000}$.

Шаг 4. Определяем из табл. F критическое значение R (число серий) при $n_1 = 10$ и $n_2 = 12$. (*Замечание*. Последовательность может оказаться неслучайной в силу того, что в ней содержится *слишком мало* или *слишком много* серий. Поэтому в каждой клетке табл. F находятся два критических значения, причем H_0 отклоняется в том случае, если R меньше либо равно верхнему значению или же больше либо равно нижнему значению соответствующей клетки.)

Обращение к табл. F при $n_1 = 10$ и $n_2 = 12$ показывает, что критическими значениями являются $R \leqslant 7$ или $R \geqslant 17$. Поскольку наблюдаемое значение R равно нижнему критическому значению, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Последовательность лиц старшего и младшего возраста в очереди неслучайна.

Упражнения

Упражнения 15—18 основываются на следующих данных. В очереди за билетами на стадион наблюдается последовательность мужчин (M) и женщин (F): M F F M M F M M M F F M F M F M M. Используя $\alpha = 0{,}05$ при двустороннем критерии, проверьте гипотезу о случайности расположения мужчин и женщин.

15. Запишите задачу в формальном статистическом виде.
16. Определите значение n для каждой группы.
17. Определите число серий в выборке.
18. Определите критическое значение и сделайте статистический вывод, соответствующий полученным результатам.

При больших объемах выборки (n_1 или n_2 больше 20)

В случае когда либо n_1, либо n_2, либо оба значения больше 20, выборочное распределение R может быть аппроксимировано с помощью нормальной кривой. Формула для z выглядит так:

$$z = \frac{R - \left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1\right)}{\sqrt{\dfrac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2\ (n_1+n_2-1)}}}.$$

[1] n_1 и n_2 — число появлений каждого из символов последовательности. — *Примеч. пер.*

Пример

У одного из посетителей казино в Лас-Вегасе возникло подозрение, что у рулетки, за которой он проиграл свои деньги, черные (В) и красные (R) поля появляются не в случайном порядке. Он зафиксировал 60 успешных исходов и получил следующие результаты:

B R R R B R B R R B B B R R R R R B B R B B B R B R
B B B B R R R B R R R R R B B B R R B R B R B R R R R
B R B B B R

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): последовательность красных и черных полей случайна.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): последовательность красных и черных полей неслучайна.

в) *Статистический критерий*: поскольку n_1 и n_2 превышают 20, R аппроксимируется с помощью нормальной кривой.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

д) *Выборочное распределение*: при больших выборках распределение z примерно соответствует нормальному. Поэтому в качестве подходящего выборочного распределения используется нормальная кривая (см. табл. G).

е) *Критическое значение*: при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии значения статистики z, необходимые для значимости, определяются условием $|z| \geqslant 2{,}58$.

Шаг 2. Определяем n_1 и n_2. Предположим, что в данной задаче n_1 — число черных, а n_2 — число красных полей. Тогда $n_1 = 27$, $n_2 = 33$.

Шаг 3. Подчеркиваем каждую серию выборки и подсчитываем общее количество серий. Для данной задачи R равно 30:

B R R R B R B R R B B B R R R R R B B R B B B R B R
B B B B R R R B R R R R R B B B R R B R B R B R R R R
B R B B B R

Шаг 4. Подставляем значения R, n_1 и n_2 в формулу для z и производим вычисления:

$$z = \frac{R - \left(\dfrac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1\right)}{\sqrt{\dfrac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}} = \frac{30 - \left(\dfrac{2 \cdot 27 \cdot 33}{60} + 1\right)}{\sqrt{\dfrac{2 \cdot 27 \cdot 33\,(2 \cdot 27 \cdot 33 - 27 - 33)}{60^2 \cdot (27 + 33 - 1)}}} =$$

$$= \frac{30 - \left(\dfrac{1\,782}{60} + 1\right)}{\sqrt{\dfrac{1\,782 \cdot (1\,782 - 60)}{3\,600 \cdot 59}}} = \frac{-0{,}7}{\sqrt{14{,}45}} = \frac{-0{,}7}{3{,}80} = -0{,}18.$$

Решение. Поскольку наблюдаемое значение z не достигает критического значения, необходимого для отклонения H_0, мы принимаем H_0.

Упражнения

Упражнения 19—22 основываются на следующих исходных данных. При исследовании согласованности общественного мнения была опрошена группа людей, причем каждый из отвечавших мог слышать только предыдущий ответ. Последовательность полученных положительных (+) и отрнцательных (—) ответов такова:

+ + + + + + — — — + + + — — — — + — + — —
— — — — + + + + — — — — — + + + — + + + + —

n_1 — число плюсов, n_2 — число минусов, $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

19. Запишите задачу в формальном статистическом виде.

20. Определите n_1 и n_2.

21. Найдите R.

22. Подставьте найденные значения в формулу для вычисления z и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

Контрольные вопросы к главе 6

Вопросы 1—5 основываются на данных из таблицы:

	Расстояние					
	1	2	3	4	5	6
f_o	19	15	11	7	6	2

1. Ожидаемая частота для каждой из клеток равна: а) 10; б) 6; в) 12 г) 60.

2. Накопленная ожидаемая частота в клетке 5 равна: а) 20; б) 58; в) 60; г) 50.

3. Накопленная наблюдаемая частота для клетки 3 равна: а) 30; б) 36; в) 45; г) 26.

4. Наибольшая разность между накопленным наблюдаемым отношением и соответствующим накопленным ожидаемым отношением достигается в клетке: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

5. Выраженное в виде десятичной дроби абсолютное значение разности между накопленным наблюдаемым и накопленным ожидаемым отношениями для клетки 5 равно: а) 0,013; б) 0,133; в) 0,167; г) 0,017.

6. Дано: $D = 0{,}462$, $N = 8$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

а) Наблюдаемое D превышает критическое значение D; мы принимаем H_0.
б) Наблюдаемое D превышает критическое значение; мы отклоняем H_0.
в) Наблюдаемое D меньше критического значения; мы отклоняем H_0.
г) Наблюдаемое D меньше критического значения; мы принимаем H_0.

Вопросы 7—8 основаны на следующей последовательности данных:

R R L R R R R L R L L L L L R L R R R R L L L L L L R R R

7. Если n_1 — число элементов типа R и n_2 — число элементов типа L, то n_1 и n_2 равны соответственно: а) 14 и 15; б) 11 и 11; в) 15 и 15; г) 15 и 14.

8. Число серий равно: в) 11; б) 10; в) 12; г) 14.

9. Критические значения R для $n_1 = 16$ и $n_2 = 12$ при $\alpha = 0{,}05$ равны: а) 8 и 21; б) 9 и 20; в) 9 и 21; г) 10 и 20.

10. Если наблюдаемое значение R равно 12, $n_1 = 15$, $n_2 = 18$, $\alpha = 0{,}05$, то:

а) R превышает нижнее критнческое значение; H_0 отклоняется.
б) R меньше верхнего критического значения; H_0 отклоняется.
в) R превышает нижнее критическое значение; H_0 принимается.
г) R превышает верхнее критическое значение; H_0 принимается.

Практические задания

11. Задана таблица данных:

	Порядковая позиция						
	1	2	3	4	5	6	7
f_0	6	9	14	16	19	25	30

Проверьте нулевую гипотезу о том, что доли генеральной совокупности для каждой из порядковых позиций одинаковы. Используйте $\alpha = 0{,}05$.

12. Задана последовательность событий:

0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0

Проверьте нулевую гипотезу о том, что эта последовательность была отобрана из совокупностн случайных последовательностей. Используйте $\alpha = 0{,}05$; n_1 — число нулей, n_2 — число единиц.

Глава 7

ПОРЯДКОВЫЕ ШКАЛЫ. НЕЗАВИСИМЫЕ ВЫБОРКИ

В этой главе мы рассмотрим непараметрические критерии значимости, используемые в порядковых шкалах. В частности, мы обсудим те статистические критерии, которые предназначены для проверки гипотез относительно медиан, средних значений и различий в распределении.

Цели главы

1. Узнать, как применять медианный критерий для проверки гипотез, касающихся медианы.
2. Познакомиться с применением U-критерия Манна—Уитни при исследовании гипотез относительно различий в средних значениях.
3. Научиться пользоваться критерием Вальда—Вольфовица при исследовании гипотез о различиях в распределении.
4. Выяснить, как медианный критерий применяется для проверки гипотез в случае нескольких выборок.
5. Познакомиться с использованием критерия множественных сравнений Уилкоксона как способом оценки статистической значимости всевозможных пар воздействий.

7.1. СЛУЧАЙ С ДВУМЯ ВЫБОРКАМИ

Медианный критерий

Медианный критерий предназначен для проверки нулевой гипотезы о том, отобраны ли два экспериментальных условия или две исследуемые группы из генеральных совокупностей с одинаковыми медианами. При работе с медианным критерием необходимо, чтобы отметки соответствовали порядковой шкале или более высоким шкалам.

Вкратце процедуру применения этого критерия можно описать следующим образом: все отметки, независимо от условий, располагаются в возрастающем или убывающем порядке; находится общая медиана; для каждого условия определяется число отметок, находящихся выше или ниже общей медианы; эти данные помещаются в таблицу сопряженности признаков 2 × 2 и тем самым становится возможным оценить статистическую значимость полученных результатов с помощью критерия Фишера или критерия χ^2 для двух выборок.

Гипотетический пример

Предположим, что перед началом игры двум группам детей дошкольного возраста показали два мультипликационных фильма. Одна группа (условие А) просмотрела фильм, содержание которого было с ярко выраженными агрессивными элементами; второй группе (условие В) был показан фильм без каких-либо агрессивных элементов. После просмотра фильмов каждый ребенок некоторое время играл отдельно от своих товарищей, причем опытные наблюдатели зарегистрировали количество поступков агрессивного характера, совершенных ребенком по отношению к его игрушкам в течение этого периода. Отметкой для каждого ребенка в данном случае является общее число совершенных им подобных поступков, которые, однако, различаются по характеру и по силе. Поэтому исследователи сочли более правильным рассматривать эти отметки только как относительную меру агрессивности (порядковая шкала), нежели как соответствующие действительной количественной шкале. По этой причине был выбран медианный критерий. Полученные результаты были следующими:

Условие			
А	В	А	В
26	16	18	11
22	10	29	7
19	8	17	13
21	13	11	9
14	19	34	21

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): не существует различия между медианами для отметок об агрессивности детей после просмотра мультипликационных фильмов.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): существует различие между медианами для отметок об агрессивности детей после просмотра мультипликационных фильмов.

в) *Статистический критерий*: поскольку данные представлены в виде таблицы сопряженности признаков 2 × 2, а значения n_1 и n_2 не превышают 15, подходящим критерием будет критерий Фишера.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

д) *Критическое значение*: критическое значение D будет установлено только после определения значений $A + B$, $C + D$ и B.

Шаг 2. Объединяем вместе отметки для обеих групп и располагаем их в убывающем порядке, сохраняя при этом соответствие между отдельными отметками и связанными с ними экспериментальными условиями:

Отметка	Условие	Отметка	Условие
34	A	16	B
29	A	14	A
26	A	13	B
22	A	13	B
21	A	11	B
21	B	11	A
19	B	10	B
19	A	9	B
18	A	8	B
17	A	7	B

Шаг 3. Находим медианную отметку. Это можно сделать путем отсчета $\frac{n_1 + n_2 + 1}{2}$-й отметки сверху. Для рассматриваемого примера $\frac{n_1 + n_2 + 1}{2} = 10{,}5$. Медиана, находящаяся посредине между 10-й и 11-й отметками, равна 16,5. В случае когда $n_1 + n_2$ представляет собой нечетное число, медианой будет одна из наблюдаемых отметок.

Шаг 4. Помещаем данные в таблицу сопряженности признаков 2×2, в которой приводятся по два значения для каждой переменной: а) группа I по сравнению с группой II (условие А по сравнению с условием В) и т. д. и б) число случаев, когда отметка превышает медиану, по сравнению с числом случаев, когда отметка меньше медианы либо равна ей. В данном примере подсчитываем число отметок в группе А, которые превышают медиану, и помещаем это число в клетку *A*. Далее подсчитываем число превышающих медиану отметок для группы В и помещаем его в клетку *B*; затем находим для групп А и В число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей, и помещаем найденные значения в клетки *C* и *D* соответственно. В результате получаем следующую таблицу 2×2:

	Группа А	Группа В	Итого
Число отметок, превышающих медиану	8 *A*	2 *B*	10
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	2 *C*	8 *D*	10
Итого	10	10	20

Шаг 5. Если $n_1 \leqslant 15$ и $n_2 \leqslant 15$, то воспользуемся точным критерием Фишера (см. гл. 4). Если же n_1 или n_2 превышает 15, то применим приближенный критерий χ^2 (см. гл. 4). Поскольку $n_1 = 10$ и $n_2 = 10$, мы выбираем критерий Фишера. Повторим вкратце основные этапы этой процедуры.

а) Находим значение $A + B$ в табл. D в столбце «Суммы по строкам». Для данной задачи $A + B = 10$.

б) В той же секции таблицы ищем значение $C + D$. Для данной задачи мы находим $C + D = 10$ в секции $A + B = 10$.

В столбце «B (или A)» ищем значение наблюдаемой частоты для клетки B. В данной задаче наблюдаемое значение B равно 2. Поскольку в столбце это значение отсутствует, мы ищем в нем значение A. Находим $A = 8$. Из табл. D видно, что в случае $A + B = 10$, $C + D = 10$, $A = 8$ критическое значение C при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии равно 1.

Решение. Поскольку наблюдаемое значение C превышает критическое значение, H_0 принимается.

Шаг 5а. Если n_1 или n_2 больше 15, то используем критерий χ^2. Повторим вкратце связанную с этим процедуру:

а) Находим ожидаемую частоту для каждой клетки:

клетка $A = \dfrac{(A+B)\cdot(A+C)}{N}$; клетка $B = \dfrac{(A+B)\cdot(B+D)}{N}$;

клетка $C = \dfrac{(C+D)\cdot(A+C)}{N}$; клетка $D = \dfrac{(C+D)\cdot(B+D)}{N}$.

б) Находим абсолютное значение разности между наблюдаемой частотой для каждой клетки и соответствующей ожидаемой частотой.

в) Вычитаем 0,5 из каждого абсолютного значения и полученные результаты возводим в квадрат.

г) Делим каждое из выражений $(|f_0 - f_e| - 0{,}5)^2$ на соответствующую ему ожидаемую частоту f_e, и, суммируя полученные значения, получаем χ^2.

д) Находим в табл. С критическое значение χ^2 при заданном α-уровне и одной степени свободы. Если расчетное значение χ^2 превышает табличное, H_0 отклоняется.

Упражнения

Упражнения 1—5 основываются на следующих данных:

Условие			
A	B	A	B
86	41	109	10
42	20	93	67
59	16	66	21
11	35	72	14
23	8	18	19
105	29	20	9
			5

«Отметками» здесь являются оценки административных способностей двух групп людей, получивших разные типы подготовки в процессе обучения навыкам административной работы. $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

1. Запишите задачу в формальном статистическом виде.
2. Объедините все отметки и расположите их в соответствии с требованием, описанным на шаге 2.
3. Найдите медианную отметку.
4. Поместите данные в таблицу 2×2.
5. Найдите критическое значение D (или C) и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.
6. Основываясь на приведенных данных, определите, значимо ли различие между группами 1 и 2. Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

	Группа 1	Группа 2	Итого
Число отметок, превышающих медиану	18	8	
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	8	18	
Итого			

U-критерий Манна — Уитни

Медианный критерий недобирает статистическую мощность (т. е. способность к отклонению ложной нулевой гипотезы) в том смысле, что он не полностью использует информацию, присущую порядковым шкалам. Действительно, медианный критерий фактически сводит порядковую шкалу к двузначной номинальной шкале. В противоположность этому U-критерий Манна—Уитни использует всю информацию, свойственную порядковым шкалам, и поэтому является одним из наиболее мощных статистических критериев, применяемых для оценки различий между центральными параметрами.

Пример

Для сравнения U-критерия Манна—Уитни с медианным критерием мы проиллюстрируем вычисление статистики U на примере того же гипотетического исследования, которое было описано выше.

Условие			
A	B	A	B
26	16	18	11
22	10	29	7
19	8	17	13
21	13	11	9
14	19	34	21

Формула для расчета U выглядит следующим образом:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

или

$$U' = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2,$$

R_1 — сумма рангов, относящихся к группе с объемом выборки n_1; R_2 — сумма рангов, относящихся к группе с объемом выборки n_2.

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): не существует различия между медианами для отметок об агрессивности детей после просмотра мультипликационных фильмов.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): существует различие между медианами для отметок об агрессивности детей после просмотра мультипликационных фильмов.

в) *Статистический критерий*: данные представлены в форме отметок, которые могут быть упорядочены с помощью соизмерений типа «больше, чем», «меньше, чем». Для таких данных подходит U-критерий Манна—Уитни.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

д) *Критическое значение*: критическое значение будет определено в процессе вычисления U-статистики Манна—Уитни.

Шаг 2. Объединяем вместе отметки для обеих групп и располагаем их в убывающем порядке, сохраняя при этом соответетствие между отдельными отметками и связанными с ними экспериментальными условиями:

Отметка	Условие	Отметка	Условие
34	A	16	B
29	A	14	A
26	A	13	B
22	A	13	B
21	A	11	B
21	B	11	A
19	B	10	B
19	A	9	B
18	A	8	B
17	A	7	B

Шаг 3. Каждой отметке полученного ряда присваиваем ранг. В случае совпадения отметок им приписывается среднее значение тех рангов, которые были бы присвоены каждой из отметок при отсутствии совпадения. Например, две отметки 21 делят между собой ранги 5 и 6. Каждой из них присваиваем ранг, равный $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$. (Обратите внимание, что последний ранг должен равняться $n_1 + n_2$. Этим можно воспользоваться для проверки правильности ранжирования.)

Отметка	Ранг	Условие	Отметка	Ранг	Условие
34	1	A	16	11	B
29	2	A	14	12	A
26	3	A	13	13,5	B
22	4	A	13	13,5	B
21	5,5	A	11	15,5	B
21	5,5	B	11	15,5	A
19	7,5	B	10	17	B
19	7,5	A	9	18	B
18	9	A	8	19	B
17	10	A	7	20	B

Шаг 4. Отделяем условия одно от другого и находим сумму рангов для каждого из них.

A	B	A	B
1	5,5	9	17
2	7,5	10	18
3	11	12	19
4	13,5	15,5	20
5,5	13,5		
7,5	15,5	$R_1=69{,}5$	$R_2=140{,}5$

Для проверки точности вычислений можно воспользоваться соотношением $R_1 + R_2 = \frac{N}{2}(1 + N)$. В данном примере $R_1 + R_2 = 210$. Проверяем: $\frac{N}{2}(1 + N) = 10 \cdot 21 = 210$.

Шаг 5. Подставляем найденные значения в формулу для расчета U и производим вычисления:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = 100 + \frac{110}{2} - 69{,}5 = 155 - 69{,}5 = 85{,}5.$$

Шаг 6. Обратившись к табл. H_3 ($\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний) для случая $n_1 = 10$ и $n_2 = 10$, мы находим, что требуемое для отклонения H_0 значение U должно быть меньше или равно 23 или больше 77.

Решение. Поскольку расчетное U, равное 85,5, превышает критическое значение (77), мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Обратите внимание, что наш результат не совпадает с тем, который был получен при использовании медианного критерия; это свидетельствует о большей мощности критерия Манна—Уитни.

Шаг 7. Для проверки вычисляем U' и подставляем его значение в формулу:

$$U = n_1 n_2 - U';$$

$$U' = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - 140{,}5 = 100 + 55 - 140{,}5 = 14{,}5;$$

$$U = 100 - 14{,}5 = 85{,}5.$$

Поскольку полученный результат совпадает с ранее вычисленным значением U, мы удостоверяемся в правильности наших расчетов.

Упражнения

В упражнениях 7—13 используются те же исходные данные, что и в упражнениях 1—6. Здесь эти данные воспроизводятся вторично:

Условие			
A	B	A	B
86	41	109	10
42	20	93	67
59	16	66	21
11	35	72	14
23	8	18	19
105	29	20	9
			5

В качестве «отметок» выступают оценки административных способностей двух групп людей, получивших разные типы подготовки в процессе обучения навыкам административной работы $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

7. Запишите задачу в формальном статистическом виде.
8. Объедииите вместе отметки для обеих групп и расположите их в убывающем порядке.
9. Присвойте ранг каждой из отметок полученного ряда.
10. Найдите R_1 и R_2 и проверьте правильность вычислений.
11. Подставьте полученные значения в формулу и произведите вычисления.
12. Найдите критическое значение U и примите статистическое решение.
13. Проверьте правильность предыдущих вычислений.

Критерий серий Вальда — Вольфовица

Наиболее часто в нулевой гипотезе формулируются утверждения относительно конкретного параметра или параметров, например среднего значения, медианы, стандартного отклонения, дисперсии. Однако в некоторых случаях нас интересуют более общие нулевые гипотезы, касающиеся *любых* различий между генеральными совокупностями. Критерий серий Вальда—Вольфовица является чувствительным по отношению к целому ряду различий, включая различия в медианах, мерах изменчивости и асимметрии.

При небольших объемах выборок ($n_1 \leqslant 20$ *и* $n_2 \leqslant 20$). Воспользуемся теми же данными, которые приводились в этой главе для иллюстрации применения медианного критерия и U-критерия Манна—Уитни.

Шаг 1. Объединяем отметки для обеих групп и располагаем их в возрастающем или убывающем порядке:

Отметка	Условие	Отметка	Условие
34	A	16	B
29	A	14	A
26	A	13	B
22	A	13	B
21	A	11	B
21	B	11	A
19	B	10	B
19	A	9	B
18	A	8	B
17	A	7	B

Шаг 2. Располагаем идентификаторы каждого из условий в горизонтальном положении, подчеркиваем каждую серию в получившейся объединенной выборке и подсчитываем общее число серий:

A A A A A B B A A A B A B B B A B B B B

В данном примере можно выделить 8 серий ($R = 8$). Существует, однако, проблема, связанная с наличием совпадений. Если совпадают между собой отметки для одного и того же условия, то последовательность остается без изменений, но если совпадают отметки для разных условий, то возможно получение более чем одной последовательности. В этом случае рекомендуется определить путем перебора *все возможные* последовательности и найти число серий для каждой из них. Если все они окажутся статистически значимыми, то H_0 может быть отклонена.

Далее перечислены все возможные для данного примера последовательности и приведены соответствующие каждой из них значения R:

A A A A A B B A A A B A B B B A B B B B, $R = 8$;
A A A A A B A B A A B A B B B A B B B B, $R = 10$;
A A A A A B B A A A B A B B A B B B B B, $R = 8$;
A A A A A B A B A A B A B B A B B B B B, $R = 10$;
A A A A B A B A A A B A B B B A B B B B, $R = 10$;
A A A A B A A B A A B A B B B A B B B B, $R = 10$;
A A A A B B B A A A B A B B A B B B B B, $R = 8$;
A A A A B B A B A A B A B B A B B B B B, $R = 10$.

Шаг 3. Определяем из табл. F критическое значение R (число серий) для $n_1 = 10$ и $n_2 = 10$. При использовании критерия серий для двух выборок нас интересует только нижнее значение R, соответствующее различным значениям n_1 и n_2. Находим, что H_0 отклоняется при

$R \leqslant 6$. Поскольку ни одно из наблюдаемых значений R не попадает в область отклонения нулевой гипотезы, мы принимаем H_0.

Замечание. В случае когда одни значения R значимы, а другие нет, не существует достаточно удовлетворительного способа прийти к статистическому решению. Один предложенный метод заключается в нахождении значений вероятности (p-значений), ассоциируемых с каждым R, и дальнейшем определении среднего значения p. Если оно окажется меньшим, чем α, или равным ему, то H_0 будет отклонена.

Упражнения

В упражнениях 14—16 используются те же исходные данные, что и в упражнениях 1—13.

Условие			
А	В	А	В
86	41	109	10
42	20	93	67
59	16	66	21
11	35	72	14
23	8	18	19
105	29	20	9
			5

14. Объедините отметки и расположите их в убывающем порядке.
15. Найдите R.
16. Найдите критическое значение R и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

При больших объемах выборок ($n_1 > 20$ *и/или* $n_2 > 20$). Поскольку табличные значения критерия серий не выходят за пределы n_1 или $n_2 = 20$, всякий раз, когда объем выборки для какой-либо из групп превышает 20, можно применить альтернативную процедуру. При этом значение вероятности для R может быть аппроксимировано с помощью z-преобразования, причем z интерпретируется как переменная стандартного нормального распределения. z-преобразование имеет вид:

$$z = \frac{\left| R - \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1 \right) \right| - 0{,}5}{\sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}},$$

где 0,5 вычитается из абсолютной величины числителя для поправки на непрерывность.

Пример

Предположим, что в процессе обучения навыкам административной работы две группы людей получили два разных типа подготовки. После обучения способность к административной деятельности каждого человека была индивидуально проверена в различных жизненных ситуациях, причем эксперты, оценивавшие их действия, не были осведомлены о специфике подготовки. Оценки выглядят следующим образом:

Группа А	Группа В	Группа А	Группа В
49	16	22	7
35	31	39	41
26	10	8	5
59	60	50	28
35	13	67	16
58	7	54	9
14	20	19	
29	36	29	
17	18	93	
11	12	109	
37	55	95	

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): оценки способностей к административной работе, полученные в обеих группах, были отобраны из общей генеральной совокупности.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): оценки способностей к административной работе, полученные в обеих группах, не были отобраны из общей генеральной совокупности.

в) *Статистический критерий*: поскольку исходные данные являются порядковыми и нас интересуют *любые различия*, которые могли возникнуть в результате разных типов подготовки, воспользуемся критерием серий Вальда—Вольфовица. Однако поскольку $n_1 > 20$, мы применим z-статистику.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0,05$, критерий двусторонний.

д) *Выборочное распределение*: нормальное.

е) *Критическое значение*: критическое значение z при $\alpha = 0,05$ и двустороннем критерии равно $\pm 1,96$. Если расчетное значение z больше либо равно 1,96 или меньше либо равно —1,96, то H_0 отклоняется.

Шаг 2. Объединяем отметки для обеих групп и располагаем их в убывающем порядке, сохраняя при этом соответствие между отдельными отметками и экспериментальными условиями, при которых они были получены:

Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие
109	A	49	A	28	B	13	B
95	A	41	B	26	A	12	B
93	A	39	A	22	A	11	A
67	A	37	A	20	B	10	B
60	B	36	B	19	A	9	B
59	A	35	A	18	B	8	A
58	A	35	A	17	A	7	B
55	B	31	B	16	B	7	B
54	A	29	A	16	B	5	B
50	A	29	A	14	A		

Шаг 3. Располагаем идентификаторы каждого из условий в горизонтальном положении, подчеркиваем каждую серию в получившейся объединенной выборке и подсчитываем общее число серий:

A A A A B A A B A A A B A B A A B A A

B A A B A B A B B A B B A B B A B B B,

$$R = 24.$$

Шаг 4. Подставляем значения R_1, n_1 и n_2 в формулу для расчета z:

$$z = \frac{\left|24 - \left(\frac{2\cdot 22\cdot 17}{22+17} + 1\right)\right| - 0{,}5}{\sqrt{\frac{2\cdot 22\cdot 17\cdot(2\cdot 22\cdot 17 - 22 - 17)}{(22+17)^2\,(22+17-1)}}} = \frac{|24 - 16{,}27| - 0{,}5}{\sqrt{\frac{748\cdot(748-49)}{49^2\cdot 48}}} = \frac{7{,}23}{\sqrt{4{,}54}} =$$

$$= 3{,}39.$$

Решение. Поскольку расчетное значение z превышает 1,96, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Два разных типа подготовки административных работников приводят к различным уровням выполнения ими своих обязанностей.

Упражнения

Упражнения 17—20 основываются на следующих данных:

A	B	A	B	A	B	A	B
8	45	36	99	31	7	10	
6	16	10	88	5	119	18	
9	33	49	62	20	104	25	
14	26	93	53	17	101	5	
27	79	22	44	29	95	3	
11	109	19	57	13	70		

17. Запишите задачу в формальном статистическом виде. Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

18. Объедините отметки для обеих групп в соответствии с требованиями шага 2.

19. Расположите идентификаторы условий в горизонтальном положении и определите число серий.

20. Найдите z и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

7.2. СЛУЧАЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ВЫБОРКАМИ

Медианный критерий

Применение медианного критерия, описанного в данной главе, может быть распространено на случаи, когда имеется k независимых групп. При этом проверяется нулевая гипотеза о том, что все группы были отобраны из генеральных совокупностей с одинаковыми медианами. Вычислительная процедура включает определение общей для всех групп медианы, построение таблицы $2 \times k$ на основе найденных для каждой группы данных о числе отметок, превышающих медиану, и числе отметок, меньших либо равных ей, применение критерия χ^2 к полученной таблице частот $2 \times k$.

Гипотетический пример

Четыре группы людей обучались в разных условиях, прежде чем им было предложено решить ряд задач, требовавших, как утверждалось, творческого мышления. Экспертам, не знакомым с условиями подготовки отдельных лиц, предложили оценить найденные решения с точки зрения их «творческого характера». В результате четыре группы получили следующие «отметки»:

Условие			
I	II	III	IV
97	44	8	46
51	98	27	90
79	58	17	75
68	40	41	81
60	45	57	93
79	49	37	81
77	71	21	83
42	94	13	99
33	74	9	70
36	76	82	65
42	67	7	53

Поскольку в отметках представлены мнения экспертов, а не объективные измерения, было признано считать их относящимися в лучшем случае к порядковой шкале. Необходимо проверить нулевую гипотезу о том, что все четыре группы были отобраны из генеральной совокупности с одинаковыми медианами, используя при этом $\alpha = 0{,}05$ (критерий двусторонний).

Шаг 1. Объединяем отметки для четырех групп и располагаем их в возрастающем или убывающем порядке, сохраняя при этом соответствие между отдельными отметками и связанными с ними экспериментальными условиями:

Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие
99	IV	79	I	58	II	49	II
98	II	77	I	57	III	37	III
97	I	76	II	53	IV	36	I
94	II	75	IV	51	I	33	I
93	IV	74	II	49	II	27	III
90	IV	71	II	46	IV	21	III
83	IV	70	IV	45	II	17	III
82	III	68	I	44	II	13	III
81	IV	67	II	42	I	9	III
81	IV	65	IV	42	I	8	III
79	I	60	I	41	III	7	III

Шаг 2. Находим медиану. Это может быть сделано путем отсчета $(N+1)/2$-й отметки сверху ($N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$). Для данной задачи $N = 44$. Поэтому $\frac{N+1}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$. Медиана, находящаяся посередине между 22-й и 23-й отметками, равна 59.

Шаг 3. Помещаем данные в таблицу $2 \times k$, записывая в нее частоты отметок, которые превышают медиану в каждом из экспериментальных условий, а также частоты отметок, находящихся ниже медианы или совпадающих с ней в каждом из экспериментальных условий. Для данной задачи получаем следующую таблицу:

	Условие I	Условие II	Условие III	Условие IV	Итого
Число случаев, когда отметка превышает медиану	6 A	6 B	1 C	9 D	$A+B+C+D=22$
Число случаев, когда отметка меньше, чем медиана, либо равна ей	5 E	5 F	10 G	2 H	$E+F+G+H=22$
Итого	$A+E=11$	$B+F=11$	$C+G=11$	$D+H=11$	44

Шаг 4. Применяем критерий χ^2 к частотным данным из приведенной таблицы $2 \times k$:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e},$$

где $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c}$ указывает на необходимость просуммировать это отношение как по строкам, так и по столбцам. (*Замечание*. Когда $\mathrm{df} > 1$, ожидаемая частота в 80% клеток должна быть больше либо равна 5, и ни одна из ожидаемых частот не должна быть меньше 1.)

а) Находим ожидаемую частоту для каждой клетки с помощью следующих формул:

$$\text{клетка } A = \frac{(A+B+C+D)(A+E)}{N} = 5{,}50;$$

$$\text{клетка } B = \frac{(A+B+C+D)(B+F)}{N} = 5{,}50;$$

$$\text{клетка } C = \frac{(A+B+C+D)(C+G)}{N} = 5{,}50;$$

$$\text{клетка } D = \frac{(A+B+C+D)(D+H)}{N} = 5{,}50;$$

$$\text{клетка } E = \frac{(E+F+G+H)(A+E)}{N} = 5{,}50;$$

клетка $F = \frac{(E+F+G+H)(B+F)}{N} = 5{,}50;$

клетка $G = \frac{(E+F+G+H)(C+G)}{N} = 5{,}50;$

клетка $H = \frac{(E+F+G+H)(D+H)}{N} = 5{,}50.$

б) Находим разность между наблюдаемой и ожидаемой частотой для каждой клетки:

Клетка	f_o	f_e	f_o-f_e
A	6	5,50	0,50
B	6	5,50	0,50
C	1	5,50	—4,50
D	9	5,50	3,50
E	5	5,50	—0,50
F	5	5,50	—0,50
G	10	5,50	4,50
H	2	5,50	—3,50
			$\Sigma\ (f_o-f_e)=0{,}00$

Для проверки правильности вычислений можно воспользоваться тем, что $\Sigma\ (f_o - f_e)$ должна равняться нулю.

в) Возводим в квадрат каждое значение $(f_o - f_e)$, затем делим на соответствующую ожидаемую частоту (f_e) и, просуммировав, получаем χ^2:

Клетка	$(f_o-f_e)^2$	f_e	$\frac{(f_o-f_e)^2}{f_e}$
A	0,25	5,50	0,05
B	0,25	5,50	0,05
C	20,25	5,50	3,68
D	12,25	5,50	2,28
E	0,25	5,50	0,05
F	0,25	5,50	0,05
G	20,25	5,50	3,68
H	12,25	5,50	2,28
			$\chi^2=12{,}12$

г) Находим число степеней свободы. Для случая с несколькими выборками

$$\mathrm{df} = (c-1)(r-1),$$

где c — число столбцов; r — число строк. Для данной задачи

$$\mathrm{df} = (4-1)(2-1) = 3.$$

д) Находим критическое значение χ^2 при данном α-уровне. Если расчетное значение χ^2 равно критическому или превышает его, то H_0 отклоняется. Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}05$ и df = 3 равно 7,815. Так как $\chi^2 = 12{,}12$ превышает это значение, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Поскольку медианы генеральных совокупностей не совпадают, наблюдаемые различия приписываются влиянию экспериментальных условий.

Упражнения

Упражнения 21—28 основываются на следующих данных:

Условие					
I	II	III	I	II	III
34	45	59	69	95	54
16	68	79	36	58	75
33	20	59	17	22	25
5	41	82	46	29	57
20	49	60	39	76	81
74	88	94	26	45	
48	75	92	13		

21. Расположите отметки в убывающем порядке.
22. Найдите медиану.
23. Поместите данные в таблицу $2 \times k$.
24. Найдите ожидаемую частоту для каждой клетки.
25. Найдите каждое из значений $(f_0 - f_e)$.
26. Вычислите χ^2.
27. Найдите df.
28. Найдите критическое значение χ^2 и сформулируйте статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

Однофакторный анализ с помощью рангов по Уилкоксону, критерий множественных сравнений

Если подтверждается предположение о том, что множество отметок соответствует по крайней мере порядковому измерению, то в качестве более мощной альтернативы медианного критерия выступает критерий Уилкоксона[1]. Однако в отличие от медианного критерия однофакторный анализ с помощью рангов по Уилкоксону не обеспечивает полной проверки значимости по всем группам. Критерий Уилкоксона скорее позволяет проверить статистическую значимость попарных сравнений между экспериментальными группами в тех случаях, когда k изменяется от 3 до 10. Одно ограничение заключается в том, что значения n должны быть одинаковыми для всех условий.

Процедура применения критерия включает объединение всех отметок, ранжирование их в направлении от низших к высшим, разде-

[1] Критерий Уилкоксона с точки зрения проверки статистических гипотез эквивалентен критерию Манна—Уитни (см. с. 79). — *Примеч. пер.*

ление их по условиям, определение суммы рангов для каждого условия и построение матрицы попарных разностей сумм рангов. Затем обращаются к табл. I для определения критической разности сумм, определяющей границы значимости при различных значениях *n* и *k*.

Пример

Воспользуемся данными, с помощью которых мы иллюстрировали применение медианного критерия:

Условие			
I	II	III	IV
97	44	8	46
51	98	27	90
79	58	17	75
68	40	41	81
60	45	57	93
79	49	37	81
77	71	21	83
42	94	13	99
33	74	9	70
36	76	82	65
42	67	7	53

$\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

Шаг 1. Объединяем отметки для четырех групп и располагаем их в возрастающем порядке, сохраняя при этом соответствие между отдельными отметками и связанными с ними экспериментальными условиями.

Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие
7	III	45	II	76	II
8	III	46	IV	77	I
9	III	49	II	79	I
13	III	51	I	79	I
17	III	53	IV	81	IV
21	III	57	III	81	IV
27	III	58	II	82	III
33	I	60	I	83	IV
36	I	65	IV	90	IV
37	IV	67	II	93	IV
40	II	68	I	94	II
41	III	70	IV	97	I
42	I	71	II	98	II
42	I	74	II	99	IV
44	II	75	IV		

Шаг 2. Ранжируем по порядку все отметки, начиная с самых низких и кончая высокими, сохраняя при этом идентификаторы экспериментальных условий для каждой отметки:

Ранг	Условие	Ранг	Условие	Ранг	Условие
1	III	16	II	31	II
2	III	17	IV	32	I
3	III	18	II	33,5	I
4	III	19	I	33,5	I
5	III	20	IV	35,5	IV
6	III	21	III	35,5	IV
7	III	22	II	37	III
8	I	23	I	38	IV
9	I	24	IV	39	IV
10	III	25	II	40	IV
11	II	26	I	41	II
12	IV	27	IV	42	I
13,5	I	28	II	43	II
13,5	I	29	II	44	IV
15	II	30	IV		

Замечание. В случае совпадения отметок им приписывается среднее значение связанных рангов. Например, в приведенной на шаге 1 таблице имеются две отметки 42, которые делят номера 13 и 14. Присвоенный каждой из них ранг составит $(13 + 14)/2 = 13{,}5$.

Шаг 3. Перегруппируем данные в отдельные столбцы (по одному для каждого условия), в которых запишем ранги соответствующих этим условиям отметок:

I	II	III	IV
8	11	1	17
9	15	2	20
13,5	16	3	24
13,5	18	4	27
19	22	5	30
23	25	6	35,5
26	28	7	35,5
32	29	10	38
33,5	31	12	39
33,5	41	21	40
42	43	37	44
$\Sigma R_1=253$	$\Sigma R_2=279$	$\Sigma R_3=108$	$\Sigma R_4=350$

Для проверки правильности вычислений найдем сумму всех рангов. Она должна равняться

$$\frac{kN}{2}(1+kN).$$

Для данной задачи

$$\frac{kN}{2}(1+kN)=990$$

и

$$(\Sigma R_1 + \Sigma R_2 + \Sigma R_3 + \Sigma R_4) = 990.$$

Шаг 4. Представляем суммы рангов и разности между этими суммами в виде матрицы, в которой эти суммы расположены в порядке убывания:

	IV 350	II 279	I 253	III 108
IV 350	—	71	97	242
II 279	—	—	26	171
I 253	—	—	—	145
III 108	—	—	—	—

Шаг 5. Для определения критического значения разности сумм обращаемся к табл. I при имеющихся n (число отметок в каждой из экспериментальных групп) и k и заданном α-уровне. Если какая-нибудь из наблюдаемых разностей превышает критическое значение или равна ему, то H_0 отклоняется. Для данной задачи критическая разность сумм при $n = 11$, $k = 4$ и $\alpha = 0{,}05$ (критерий двусторонний) равна 155. Обратившись вновь к нашей матрице, мы обнаруживаем, что статистически значимыми при $\alpha = 0{,}05$ являются следующие сравнения: условие III в сравнении с условием IV и условие II в сравнении с условием III.

Упражнения

Упражнения 29—33 основываются на следующих данных:

I	II	III	I	II	III
34	45	59	48	75	92
16	68	79	69	95	54
33	20	59	36	58	75
5	41	82	17	22	25
20	49	60	46	29	57
74	88	94	39	76	81

Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

29. Объедините отметки и расположите их в убывающем порядке.

30. Проранжируйте по порядку все отметки, начиная с низких и кончая высокими.

31. Перегруппируйте данные в столбцы по условиям и запишите в них ранги отметок, соответствующих этим условиям.

32. Постройте матрицу сумм рангов, в которой представлены разности между этими суммами.

33. Найдите критическую разность сумм и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

Контрольные вопросы к главе 7

1. Задана последовательность отметок: 26, 19, 18, 15, 12, 10, 9, 4, 2, 1; медиана равна: а) 11; б) 10; в) 12; г) 10,5.

Вопросы 2 и 3 основываются на следующей таблице 2×2:

	Группа А	Группа В
Число отметок, превышающих медиану	14	5
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	6	13

2. Значения n для групп А и В равны соответственно: а) 19 и 19; б) 14 и 6; в) 5 и 13; г) 20 и 18.

3. $A + B$, $C + D$ и B равны соответственно: а) 19, 19, 14; б) 20, 18, 5; в) 19, 19, 5; г) 20, 18, 14.

4. Дано: $A + B = 15$, $C + D = 14$, $B = 10$, $D = 3$; $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний:

а) наблюдаемое D превышает критическое значение D, H_0 отклоняется;

б) наблюдаемое D меньше критического значения D либо равно ему, H_0 принимается;

в) наблюдаемое D превышает критическое значение D, H_0 принимается;

г) наблюдаемое D меньше критического значения D либо равно ему, H_0 отклоняется.

5. Имеется следующее множество оценок: 5, 9, 14, 3, 12, 16, 19. Ранг оценки 16 (ранжирование проводится от высоких оценок к низким) составит: а) 3; б) 4; в) 5; г) 2.

6. Имеется последовательность оценок: 20, 19, 18, 18, 18, 16, 15, 13. Ранг любой из оценок 18 (ранжирование проводится от высоких оценок к низким) составит: а) 4; б) 3; в) 3,5; г) 5.

7. Дано: $U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1$ и $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $R_1 = 15$; значение U равно: а) 60; б) 25; в) 40; г) 15.

8. Дано: $U = 20$, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$; $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний;

а) наблюдаемое U меньше нижнего критического значения, H_0 принимается;

б) наблюдаемое U больше нижнего критического значения, H_0 отклоняется;

в) наблюдаемое U меньше нижнего критического значения, H_0 отклоняется;

г) наблюдаемое U больше нижнего критического значения, H_0 принимается.

9. Критерий Вальда—Вольфовица был применен для выяснения вопроса о том, различаются ли между собой два распределения. Результаты были следующие: $n_1 = 13$, $n_2 = 13$, $R = 22$; $\alpha = 0{,}05$;

а) наблюдаемое R превышает критическое значение, H_0 отклоняется;

б) наблюдаемое R меньше критического значения, H_0 отклоняется;

в) наблюдаемое R меньше критического значения, H_0 принимается;

г) наблюдаемое R превышает критическое значение, H_0 принимается.

Вопросы 10 и 11 основываются на следующей таблице:

	Условие I	Условие II	Условие III	Условие IV
Число отметок, превышающих медиану	10	8	4	2
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	3	5	9	11

10. Ожидаемая частота для клетки C равна: а) 6,5; б) 6; в) 7; г) 26.
11. Ожидаемая частота для клетки E равна: а) 3; б) 6,5; в) 6; г) 7.
12. Если $\chi^2 = 14{,}32$, $df = 3$ и $\alpha = 0{,}01$, то:
а) расчетное значение χ^2 меньше критического, H_0 отклоняется;
б) расчетное значение χ^2 больше критического, H_0 принимается;
в) расчетное значение χ^2 больше критического, H_0 отклоняется;
г) расчетное значение χ^2 меньше критического, H_0 принимается.
Вопросы 13 и 14 основываются на следующей матрице сумм:

	IV 620	III 450	I 400	II 360
IV 620				
III 450				
I 400				
II 360				

13. Абсолютные значения разности сумм между условиями IV и II и условиями III и I равны соответственно: а) 260 и 50; б) 220 и 90; в) 260 и 90; г) 220 и 50.

14. Критическая разность сумм при $\alpha = 0{,}05$ (критерий двусторонний) и $N = 15$ равна: а) 169; б) 298; в) 210; г) 246.

15. Если имеется шесть условий, то общее число возможных вариантов парных сравнений равно: а) 6; б) 30; в) 15; г) 240.

Практические задания

16. Используя следующие данные, проверьте H_0: доля случаев превышения медианы одинакова для генеральных совокупностей, представленных группами А и В. Используйте $\alpha = 0{,}01$.

	Группа А	Группа В
Число отметок, превышающих медиану	18	30
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	34	16

17. Приведенные оценки получены двумя группами лиц за решение задачи, требующей творческого мышления. Используя $\alpha=0{,}01$, проверьте H_0: $\mu_1=\mu_2$.

Обученная группа	Контрольная группа	Обученная группа	Контрольная группа
10	20		
17	25	10	15
13	18	11	18
10	24	13	16
15	18	11	

18. Две группы людей были обучены навыкам административной работы. Позже эксперты оценили поведение этих людей в условиях искусственно созданных ситуаций, которые требовали принятия решений. Используя критерий Вальда—Вольфовица, установите, существует ли какое-либо различие между двумя распределениями. Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

Условие А	Условие В	Условие А	Условие В
80	70	37	23
73	66	32	21
71	58	31	16
68	53	26	13
65	40	20	11
63	29	15	5
44	25		

19. Приведенные оценки получены четырьмя группами лиц за выполнение учебного задания. Установите, какие из попарных сравнений имеют значимое различие (если таковые вообще имеются). Используйте $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

A	B	C	D
65	60	47	53
63	54	41	35
57	50	40	31
48	39	36	28
42	30	32	18
37	22	21	13
29	20	14	9
27	15	12	5

Глава 8

ПОРЯДКОВЫЕ ШКАЛЫ. СВЯЗАННЫЕ ВЫБОРКИ

В гл. 5 мы рассмотрели критерии значимости, предполагающие использование выборок с номинально измеряемыми переменными. Напомним, что в плане со связанными выборками субъекты распределяются по экспериментальным условиям не случайным образом. Наоборот, либо одни и те же субъекты (или события) измеряются как до воздействия экспериментальной переменной, так и после него, либо формируются однородные группы из числа тех субъектов (или событий), которые являются подобными с точки зрения признака, связанного с критериальной задачей.

В этой главе мы рассмотрим критерии значимости для связанных выборок, когда переменные соответствуют порядковой шкале.

Цели главы

1. Выяснить, как применяется критерий знаков при двух выборках.
2. Узнать, как используется знаково-ранговый критерий Уилкоксона при выполнении предположения о том, что разности между отметками могут быть разумно ранжированы.

3. Познакомиться с расчетами и интерпретацией результатов двухфакторного дисперсионного анализа по Фридману при нескольких выборках.

8.1. СЛУЧАЙ С ДВУМЯ ВЫБОРКАМИ

Критерий знаков

При $n_1 = n_2 \leqslant 50$. Если измерения основываются на переменной, которую в конечном счете можно считать непрерывной, и если разности между отметками внутри однородных пар могут быть упорядочены с помощью выражений «больше, чем» или «меньше, чем», то критерий знаков является наиболее простым из пригодных для таких ситуаций критериев значимости.

Вкратце процедура применения критерия знаков включает вычитание отметки каждого субъекта, соответствующего данному условию, из отметки его напарника, относящегося к другому условию, причем фиксируется только знак полученной разности (+ или —), а также проверку нулевой гипотезы о том, что вероятность знака + (P) равна вероятности знака —(Q), т. е. $P = Q = \frac{1}{2}$. Если $n_1 = n_2 \leqslant 50$, то для проверки H_0 может быть использована табл. А (биномиальные вероятности). Если же $n_1 = n_2 > 50$, то можно воспользоваться критерием χ^2.

Гипотетический пример

Группа из 34 человек была разбита на 17 однородных пар на основе отметок, полученных ими при проверке степени уверенности в себе. Затем одна группа (экспериментальная) прошла курс подготовки одновременно с выработкой навыков уверенного поведения, в то время как другая группа (контрольная) прошла этот курс в том же объеме, но приобретение подобных навыков не предусматривалось. Впоследствии обе группы прошли испытание в условиях нескольких искусственно созданных ситуаций, причем оценивавшие их эксперты не были осведомлены о том, кто получил экспериментальную подготовку. Результаты оказались следующими:

Однородные пары	Экспериментальная группа X_1	Контрольная группа X_2	Однородные пары	Экспериментальная группа X_1	Контрольная группа X_2
1	89	73	10	55	50
2	83	77	11	54	46
3	80	58	12	50	38
4	72	77	13	42	47
5	77	70	14	48	40
6	74	62	15	44	43
7	69	67	16	38	29
8	65	68	17	36	25
9	60	44			

Требуется проверить значимость, используя $\alpha = 0{,}01$, при двустороннем критерии.

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): в генеральной совокупности доля лиц из экспериментальной группы, получающих более высокие отметки по сравнению с подобранными для них контрольными напарниками, равна доле лиц из экспериментальной группы, которые получают оценки ниже, чем их контрольные напарники $\left(P = Q = \frac{1}{2}\right)$.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): в генеральной совокупности доля положительных разностей не совпадает с долей отрицательных разностей $\left(P \neq Q \neq \frac{1}{2}\right)$.

в) *Статистический критерий*: отметки позволяют делать утверждения, касающиеся отношений типа «больше чем» и «меньше чем» (+ и —). Поскольку план связан с однородными парами, критерий знаков является подходящим статистическим инструментом для проверки H_0.

г) *Выборочное распределение*: поскольку N (число пар) не превышает 50, то для проверки H_0 можно воспользоваться табличными значениями биномиальной переменной.

д) *Критическое значение*: из табл. А видно, что при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии значимость имеет место при условии, что $x \geqslant 14$.

Шаг 2. Сравниваем между собой отметки в пределах каждой пары. Если первая отметка пары превышает вторую, присваиваем этой паре знак +. Если первая отметка меньше второй, присваиваем знак —. В данной задаче 14 разностей являются положительными и 3 — отрицательными.

Однородные пары	X_1	X_2	Знак	Однородные пары	X_1	X_2	Знак
1	89	73	+	10	55	50	+
2	83	77	+	11	54	46	+
3	80	58	+	12	50	38	+
4	72	77	—	13	42	47	—
5	77	70	+	14	48	40	+
6	74	62	+	15	44	43	+
7	69	67	+	16	38	29	+
8	65	68	—	17	36	25	+
9	60	44	+				

Шаг 3. В табл. А находим критическое значение x при выбранном значении α и N. Мы видим, что для $N = 17$ при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии x должен быть больше или равен 14. Поскольку наблюдаемое значение x равно критическому значению, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Упражнения

Упражнения 1—3 основываются на следующих данных:

Пара	X_1	X_2	Пара	X_1	X_2
1	25	21	7	17	14
2	24	19	8	16	15
3	22	20	9	15	12
4	21	15	10	14	6
5	19	14	11	13	7
6	18	20	12	12	14

1. Запишите задачу в формальном статистическом виде. Используйте $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний;
2. Определите количество знаков + и количество знаков —;
3. Примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

При $N > 50$. Когда N превышает 50, биномиальные значения могут быть аппроксимированы с помощью критерия χ^2. При этом шаг 1 и шаг 2 совпадают с описанными выше. На шаге 3 используется двузначная таблица, в которой записываются частоты знаков + и — (см. гл. 3, раздел «Критерий χ^2 при N, превышающем 50»).

Пример

При исследовании 75 однородных пар было определено количество знаков + и —, в результате чего была получена следующая таблица:

	Знак изменения		N
	+	—	
f_o	22	53	75

Используется $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

Шаги 1 и 2. Аналогичны описанным выше.

Шаг 3. Находим ожидаемую частоту знака + путем вычисления произведения $P \cdot N$ и ожидаемую частоту знака — путем вычисления произведения $Q \cdot N$:

$$f_{e+} = 0{,}5 \cdot 75 = 37{,}5;$$
$$f_{e-} = 0{,}5 \cdot 75 = 37{,}5.$$

Шаг 4. Подставляем эти значения в формулу:

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(|f_o - f_e| - 0{,}5)^2}{f_e} = \frac{(|22 - 37{,}5| - 0{,}5)^2}{37{,}5} + \frac{(|53 - 37{,}5| - 0{,}5)^2}{37{,}5} =$$
$$= \frac{15^2 + 15^2}{37{,}5} = 12{,}00; \quad \mathrm{df} = 1.$$

В критерии знаков число степеней свободы всегда равно 1, поскольку число рассматриваемых факторов всегда равно 2.

Шаг 5. Находим критическое значение χ^2 при df = 1 и выбранном α-уровне. В данной задаче значение χ^2, необходимое для значимости при $\alpha = 0,01$ и df = 1, равно 6,635. Поскольку расчетное значение χ^2 превышает этот уровень, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Упражнения

Упражнения 4—6 основываются на следующей таблице:

	+	−	N
f_o	36	58	94

Используется $\alpha = 0,01$, критерий двусторонний.

4. Найдите ожидаемую частоту для каждой клетки.
5. Найдите χ^2.
6. Примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

Знаково-ранговый критерий Уилкоксона

Если можно с уверенностью предположить, что разность между отметками соответствует порядковой шкале, то в качестве мощной альтернативы критерия знаков может быть использован критерий Уилкоксона.

Пример

Для иллюстрации вычисления T-статистики критерия Уилкоксона мы обратимся к тем же данным, что и при обсуждении критерия знаков:

Однородные пары	X_1	X_2	Однородные пары	X_1	X_2
1	89	73	10	55	50
2	83	77	11	54	46
3	80	58	12	50	38
4	72	77	13	42	47
5	77	70	14	48	40
6	74	62	15	44	43
7	69	67	16	38	29
8	65	68	17	36	25
9	60	44			

Используется $\alpha = 0,01$, критерий двусторонний.

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): средние значения генеральных совокупностей, из которых были извлечены обе выборки, совпадают: $\mu_1 = \mu_2$.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): средние значения генеральных совокупностей не совпадают, т. е. $\mu_1 \neq \mu_2$.

в) *Статистический критерий*: поскольку данные состоят из сопоставимых отметок, разности между которыми соответствуют порядковой шкале, подходящим критерием будет знаково-ранговый критерий Уилкоксона для однородных пар.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

д) *Выборочное распределение*: критические значения тестовой статистики T представлены в табл. J.

е) *Критическое значение*: при $N = 17$ и $\alpha = 0{,}01$ (критерий двусторонний) значимость будет иметь место при T, меньшем или равном 23.

Шаг 2. Находим разность между каждой парой отметок, вычитая вторую отметку из первой:

Однородные пары	X_1	X_2	Разность	Однородные пары	X_1	X_2	Разность
1	89	73	16	10	55	50	5
2	83	77	6	11	54	46	8
3	80	58	22	12	50	38	12
4	72	77	—5	13	42	47	—5
5	77	70	7	14	48	40	8
6	74	62	12	15	44	43	1
7	69	67	2	16	38	29	9
8	65	68	—3	17	36	25	11
9	60	44	16				

Шаг 3. Не обращая внимание на знак каждой разности, ранжируем их по порядку от наименьшей к наибольшей. (*Замечание*. В случае когда две парные отметки совпадают, разность равна нулю. Эта нулевая разность не учитывается при присваивании рангов, а значение N, проверяемое по таблице, состоит из числа только ненулевых разностей между отметками. Таким образом, если имеется 20 пар и в двух из них отметки совпадают, то $N = 18$.)

Однородные пары	X_1	X_2	Разность	Ранг
1	89	73	16	15,5
2	83	77	6	7
3	80	58	22	17
4	72	77	—5	(—)5
5	77	70	7	8
6	74	62	12	13,5
7	69	67	2	2
8	65	68	—3	(—)3
9	60	44	16	15,5
10	55	50	5	5
11	54	46	8	9,5
12	50	38	12	13,5
13	42	47	—5	(—)5
14	48	40	8	9,5
15	44	43	1	1
16	38	29	9	11
17	36	25	11	12

Шаг 4. Суммируем отдельно положительные и отрицательные ранги. Значение T равно меньшей по абсолютной величине сумме рангов. В рассматриваемом примере сумма рангов со знаком — равна 13, а сумма рангов со знаком + равна 140. Таким образом, T равно 13. Для проверки можно воспользоваться тем, что сумма абсолютных значений обеих сумм должна равняться $\frac{N}{2}(1+N)$. Для данной задачи: $\frac{17}{2}\cdot 18 = 153$ и $140 + 13 = 153$.

Шаг 5. Сравниваем найденное T с критическим значением T из табл. J и принимаем соответствующее статистическое решение. Критическое значение T при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии меньше или равно 23. Поскольку найденное значение T (равное 13) меньше 23, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Упражнения

В упражнениях 7—11 используются следующие данные:

Однородные пары	X_1	X_2	Однородные пары	X_1	X_2
1	25	21	7	17	14
2	24	19	8	16	15
3	22	20	9	15	12
4	21	15	10	14	6
5	19	14	11	13	7
6	18	20	12	12	14

$\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

7. Запишите задачу в формальном статистическом виде.
8. Найдите разность между отметками в пределах каждой пары.
9. Проранжируйте разности между отметками, не обращая внимания иа их знак.
10. Найдите T и проверьте правильность вычислений.
11. Примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

8.2. СЛУЧАЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ВЫБОРКАМИ. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ПО ФРИДМАНУ

Хотя принято считать, что критерий Фридмана используется в двухфакторном дисперсионном анализе, он фактически применяется при однофакторном дисперсионном анализе, в котором вторая переменная представляет собой однородные группы или повторные измерения, связанные с одним и тем же индивидуумом (событием). В действительности критерий Фридмана является порядковым аналогом параметрического критерия для рандомизированного блочного плана*.

При применении критерия Фридмана столбцы таблицы данных отражают различные уровни обработки или различные значения экспериментальной переменной, а строки соответствуют группам однородных

* Runyon R. P. Inferential Statistics: A Contemporary Approach. Addison-Wesley, 1977, Chapter 9.

субъектов (или повторным измерениям для одного и того же субъекта). Строки могут также состоять из значений вспомогательной переменной (которая сама по себе не оценивается, а служит для контроля), такой, например, как время дня или месяц года.

С помощью критерия Фридмана мы проверяем нулевую гипотезу о том, что различные методы обработки практически дают одинаковые результаты. Процедура состоит из упорядочения (ранжирования) отметок в каждой строке, суммирования полученных рангов по каждому из столбцов и вычисления тестовой статистики χ_r^2:

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_{i=1}^{k} (\Sigma R_i)^2}{Nk(k+1)} - 3N(k+1),$$

где N — число однородных групп, т. е. число строк; k — число экспериментальных условий, т. е. число столбцов; ΣR_i — сумма рангов для i-го условия; $\Sigma(\Sigma R_i)^2$ указывает на необходимость суммирования рангов по каждому условию, возведения в квадрат полученных сумм и последующего суммирования этих квадратов по всем k условиям.

Табл. К содержит точные значения вероятностей для случаев, когда $k = 3$ и N изменяется от 2 до 9, а также когда $k = 4$ и N изменяется от 2 до 4. Статистика χ_r^2 имеет такое же распределение, как и χ^2 при $k - 1$ степенях свободы.

Гипотетический пример

На основе отметок, полученных при проверке степени уверенности в себе, из 32 человек были сгруппированы 8 однородных блоков по четыре человека. Затем 4 человека в блоке были случайным образом отнесены к четырем экспериментальным условиям, каждое из которых предусматривало различные типы обучения навыкам уверенного поведения. Впоследствии для всех было проведено испытание в условиях нескольких искусственно созданных ситуаций, и каждый человек получил оценку в зависимости от степени уверенности его поведения, причем оценивавшие эксперты не были осведомлены об условиях эксперимента. Результаты оказались следующими:

Блок	Условие			
	X_1	X_2	X_3	X_4
1	78	92	84	87
2	63	71	69	76
3	58	3	70	67
4	52	57	65	70
5	55	58	62	78
6	38	47	49	56
7	44	41	48	50
8	30	38	35	41

Используется $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): отметки, соответствующие четырем типам экспериментальной обработки, были извлечены из общей генеральной совокупности.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): отметки в экспериментальных группах не были извлечены из общей генеральной совокупности.

в) *Статистический критерий*: поскольку предполагается, что отметки экспертов соответствуют порядковому измерению, и поскольку все лица сгруппированы в однородные блоки, подходящим критерием является критерий двухфакториого дисперсионного анализа по Фридману.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, $N = 8$ (количество блоков).

д) *Выборочное распределение*: точные значения вероятностей приведены в табл. К для случаев, когда $k = 3$ и $2 \leqslant N \leqslant 9$ и когда $k = 4$ и $2 \leqslant N \leqslant 4$. Для больших значений k и N можно воспользоваться тем, что статистика χ_r^2 распределена так же, как и χ^2 при $\mathrm{df} = k - 1$.

е) *Критическое значение*: при $\alpha = 0{,}01$ и $\mathrm{df} = 3$ значение χ^2, требуемое для отклонения H_0, равио 11,341. Если расчетное χ_r^2 больше этого значения или равно ему, то H_0 отклоняется.

Шаг 2. Ранжируем по порядку отметки в каждом блоке в направлении от наименьших к наибольшим, т. е. наименьшая отметка получает ранг 1, следующая по величине — ранг 2 и т. д.

Блок	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1	4	2	3
2	1	4	3	2
3	1	2	4	3
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	2	1	3	4
8	1	3	2	4
	$\sum R_1 = 9$	$\sum R_2 = 20$	$\sum R_3 = 23$	$\sum R_4 = 28$

Шаг 3. Суммируем ранги в каждом столбце и полученные суммы возводим в квадрат:

$$\Sigma R_1 = 9, \quad (\Sigma R_1)^2 = 81;$$
$$\Sigma R_2 = 20, \quad (\Sigma R_2)^2 = 400;$$
$$\Sigma R_3 = 23, \quad (\Sigma R_3)^2 = 529;$$
$$\Sigma R_4 = 28, \quad (\Sigma R_4)^2 = 784.$$

Для проверки точности вычислений можно воспользоваться тем, что сумма рангов должна равняться $N\left[\frac{k}{2}(k+1)\right]$. В данной задаче $8 \cdot 2 \cdot 5 = 80$ и $\Sigma R_1 + \Sigma R_2 + \Sigma R_3 + \Sigma R_4 = 80$.

Шаг 4. Подставляем различные значения в формулу для χ_r^2 и производим вычисления:

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_{i=1}^{k} (\Sigma R_i)^2}{Nk(k+1)} - 3N(k+1) = \frac{12(81+400+529+784)}{8 \cdot 4 \cdot 5} - 3 \cdot 8 \cdot 5 =$$

$$= \frac{12 \cdot 1\,794}{160} - 120 = 134{,}55 - 120 = 14{,}55.$$

Решение. Поскольку расчетное значение χ_r^2 превышает критическое, равное 11,341, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1; различные экспериментальные обработки приводят к различным оценкам степени уверенности в себе.

Упражнения

Упражнения 12—15 основываются на следующих оценках, сделанных группой экспертов:

Блок	X_1	X_2	X_3
1	15	12	11
2	19	15	13
3	23	18	15
4	20	22	21
5	25	18	17
6	27	22	24

Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

12. Запишите задачу в формальном статистическом виде.

13. Проранжируйте по порядку отметки в пределах каждого блока.

14. Просуммируйте ранги и возведите полученные значения в квадрат. Проверьте также точность вычислений.

15. Подставьте значения в формулу для χ_r^2 и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

Контрольные вопросы к главе 8

Вопросы 1—3 основываются на следующих парах отметок:

Пара	X_1	X_2	Пара	X_1	X_2
1	43	41	7	18	15
2	40	35	8	16	10
3	37	32	9	14	12
4	30	26	10	12	6
5	24	28	11	10	5
6	20	19	12	4	4

1. Число знаков — равно: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.

2. Если бы число знаков — было равно 4 и число знаков + было равно 8 и если $H_0 : P = Q = \frac{1}{2}$, то:

а) $x = 4$ больше или равен критическому значению при $\alpha = 0{,}05$, H_0 отклоняется;
б) $x = 4$ меньше критического значения при $\alpha = 0{,}05$, H_0 принимается;
в) $x = 4$ меньше критического значения при $\alpha = 0{,}05$, H_0 отклоняется;
г) $x = 4$ больше или равен критическому значению при $\alpha = 0{,}05$, H_0 принимается.

3. Число знаков + равно: а) 10; б) 11; в) 12; г) 8.

4. Если $N = 49$, имеется 40 знаков + и $\alpha = 0{,}01$ при двустороннем критерии, то:
а) x больше или равен критическому значению, H_0 отклоняется;
б) x больше или равен критическому значению, H_0 принимается;
в) x меньше критического значения, H_0 отклоняется;
г) x меньше критического значения, H_0 принимается.

Вопросы 5—6 основываются на следующей таблице:

	+	—	N
f_o	60	49	109

5. При нулевой гипотезе H_0: $P = Q = \frac{1}{2}$ ожидаемая частота положительных разностей составит: а) 60; б) 80,5; в) 54,5; г) 50.

6. Если $\chi^2 = 0{,}92$ при $\mathrm{df} = 1$ и $\alpha = 0{,}05$, то:
а) расчетное значение χ^2 превышает критическое значение, H_0 отклоняется;
б) расчетное значение χ^2 меньше критического значения, H_0 принимается;
в) расчетное значение χ^2 меньше критического значения, H_0 отклоняется;
г) расчетное значение χ^2 больше критического значения, H_0 принимается.

Вопросы 7—8 основываются на следующих парных отметках:

Пара	X_1	X_2	Разность
1	55	47	8
2	52	49	3
3	47	42	5
4	41	34	7
5	36	39	—3
6	33	28	5
7	30	30	0
8	25	21	4
9	20	11	9

7. N равно: а) 9; б) 18; в) 8; г) 16.

8. T равно: а) 1,5; б) 3; в) 1; г) 2.

9. Если $T = 63$, $N = 24$ и $\alpha = 0{,}01$ при двустороннем критерии, то:
а) расчетное значение T больше критического значения, H_0 отклоняется;
б) расчетное значение T меньше критического значения, H_0 принимается;
в) расчетное значение T меньше критического значения, H_0 отклоняется;
г) расчетное значение T больше критического значения, H_0 принимается.

10. Задано $k = 4$, $N = 3$, $\chi_r^2 = 8{,}2$ и $\alpha = 0{,}01$ при двустороннем критерии:
а) наблюдаемое значение p меньше α, H_0 отклоняется;
б) наблюдаемое значение p больше или равно α, H_0 отклоняется;
в) наблюдаемое значение p меньше α, H_0 принимается;
г) наблюдаемое значение p больше или равно α, H_0 принимается.

Практические задания

11. Основываясь на приведенной таблице данных, проверьте $H_0 : P = Q = \frac{1}{2}$. Используйте $\alpha = 0,05$, критерий двусторонний.

	+	−	N
f_o	60	49	109

12. Основываясь на приведенной таблице данных, проверьте H_0: выборки были извлечены из генеральных совокупностей с одинаковыми средними значениями. Используйте $\alpha = 0,05$, критерий двусторонний.

Пара	X_1	X_2	Пара	X_1	X_2
1	43	41	7	18	15
2	40	35	8	16	10
3	37	32	9	14	12
4	30	26	10	12	6
5	24	28	11	10	5
6	20	19	12	4	4

13. Основываясь на приведенных данных, проверьте H_0: отметки в трех экспериментальных группах были отобраны из общей генеральной совокупности. Используйте $\alpha = 0,01$, критерий двусторонний.

Блок	X_1	X_2	X_3	Блок	X_1	X_2	X_3
1	85	92	87	6	66	72	68
2	83	90	84	7	63	67	65
3	78	85	86	8	61	60	63
4	76	78	72	9	51	58	54
5	70	74	72				

Часть третья

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ШКАЛЫ

В третьей части книги рассматриваются критерии значимости, основывающиеся на интервальных и относительных шкалах. В отличие от номинальных и порядковых шкал интервальные и относительные шкалы являются истинными количественными шкалами и поэтому для соответствующих им чисел имеют смысл операции сложения, вычитания, умножения и деления. Основная особенность интервальных и относительных шкал заключается в том, что равенство двух разностей по количеству масштабных единиц означает и их равенство между собой. Например, разность между 98 и 94 метрами совпадает с разностью между 20 и 16 метрами и т. д. В противоположность этому разность между рангами 1 и 3 на порядковой шкале может и не совпадать с разностью между рангами 4 и 6 на этой же шкале.

Интервальные и относительные шкалы различаются только с точки зрения местонахождения нулевой отметки. Для относительной шкалы равное нулю значение свидетельствует об отсутствии рассматриваемого свойства, например на шкале весов нуль означает отсутствие веса, а на метрической шкале расстояний нуль означает отсутствие длины. На интервальной шкале положение нулевой отметки не означает отсутствия рассматриваемого свойства; например, 0° по шкале Фаренгейта и по шкале Цельсия не означает отсутствия теплоты, поскольку возможны температуры ниже нуля.

Наиболее часто параметрические критерии значимости (t-отношение Стьюдента и критерии дисперсионного анализа) применяются в том случае, когда переменные соответствуют интервальной или еще более высокой шкале. Однако такие критерии всегда основываются на предположении о нормальном распределении исходных совокупностей. Вместе с тем иногда исследователь имеет основание сомневаться в обоснованности этого предположения. В таких ситуациях он должен рассматривать в качестве приемлемых альтернатив непараметрические критерии значимости, описанные в этой главе.

Глава 9

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ. СЛУЧАЙ С ОДНОЙ ВЫБОРКОЙ

В некоторых случаях мы располагаем набором отметок и на этой основе хотим проверить нулевую гипотезу о том, что данная выборка была извлечена из совокупности с заданным средним значением. Если

N относительно мало и мы сомневаемся в обоснованности предположения о нормальном распределении исходной совокупности, то при одной выборке удобно воспользоваться критерием рандомизации. Единственным фактором, ограничивающим использование этого критерия при больших объемах выборки, является трудоемкость вычислительной работы. При применеиии интервальных шкал для критерия рандомизации невозможно построить таблицы, поэтому выборочное распределение каждый раз должно быть получено путем перебора всех возможных исходов.

Цели главы

1. Понять, как с помощью перебора находится вероятность получения исхода, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый исход.

2. Выяснить, как проверяются нулевые гипотезы о средних значениях генеральной совокупности в случае одной выборки.

9.1. КРИТЕРИЙ РАНДОМИЗАЦИИ

Перебор возможных исходов. Простая иллюстрация

Представьте, что у нас имеется набор из следующих четырех отметок: 98, 102, 104, 107 и мы хотим проверить нулевую гипотезу о том, что эта выборка извлечена из генеральной совокупности, среднее значение которой равно 100. Воспользуемся символом μ_0 для обозначения предполагаемого в нулевой гипотезе среднего значения.

Шаг 1. Вычитаем из каждой отметки μ_0 и получаем разностные отметки:

X	μ_0	$X-\mu_0$
98	100	−2
104	100	4
105	100	5
107	100	7

Шаг 2. Находим сумму разностных отметок: $-2+4+5+7=14$.

Шаг 3. Находим общее число возможных исходов путем возведения 2 в степень N (2^N). Для данной задачи $N=4$. Поэтому $2^N = 2^4 = 16$.

Шаг 4. Перечисляем все возможные исходы, которые приводят к получению суммы, равной наблюдаемой сумме или превышающей ее. В данном примере к получению суммы, большей либо равной 14, приводят следующие исходы: $-2+4+5+7=14$; $2+4+5+7=18$.

Шаг 5. Определяем вероятность получения исхода, столь же или еще более редкого, чем наблюдаемый. Это достигается путем деления количества исходов, найденных на шаге 4, на 2^N (шаг 3). В данной задаче $p_{\Sigma X \geqslant 14} = \frac{2}{16} = 0{,}125$.

Это одностороннее p-значение — вероятность того, что сумма будет равна или превысит 14. Для получения двустороннего p-значения (вероятности того, что сумма будет либо больше или равна 14, либо меньше или равна —14) необходимо просто удвоить числитель указанной выше дроби и разделить его на 2^N:

$$p_{\Sigma X \geqslant 14 \text{ или } \leqslant -14} = \frac{4}{16} = 0{,}25.$$

Упражнения

Упражнения 1—6 основываются на следующих отметках: 8, 12, 15. H_0: $\mu_0 = 9$.

1. Вычтите μ_0 из каждой отметки.
2. Найдите сумму разностных отметок.
3. Найдите общее число возможных исходов.
4. Перечислите все возможные исходы, которые приводят к получению суммы, равной наблюдаемой сумме или превышающей ее.
5. Найдите вероятность получения исхода, столь же или еще более редкого, чем наблюдаемый.
6. Найдите двустороннюю вероятность получения исхода, столь же или еще более редкого, чем наблюдаемый.

Проверка нулевой гипотезы

В рассмотренном выше примере выбранное значение N оказалось слишком малым, чтобы можно было проверить нулевую гипотезу при α-уровне, меньшем или равном 0,05. Даже если бы сумма равнялась ± 18, наименьшее одностороннее p-значение было бы равно $1/16 \approx 0{,}06$. В действительности минимальное значение N, позволяющее отклонить H_0, следующее: при $\alpha = 0{,}05$ и одностороннем критерии оно равно 5; при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии оно равно 6; при $\alpha = 0{,}01$ и одностороннем критерии оно равно 7; при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии оно равно 8.

Задан следующий набор отметок: 19, 17 , 15, 13, 12, 11, 10, 8, 7. H_0: $\mu_0 = 9$; H_1: $\mu_0 \neq 9$; $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): $\mu_0 = 9$.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): $\mu_0 \neq 9$.

в) *Статистический критерий*: поскольку данные состоят из отметок, соответствующих по крайней мере интервальному измерению, и поскольку имеются серьезные сомнения относительно того, что исходное распределение отметок является нормальным, то подходящим статистическим критерием будет критерий рандомизации (для случая с одной выборкой).

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

д) *Критическое значение*: критическое значение не используется, поскольку путем перебора мы получим точное значение вероятности.

Шаг 2. Вычитаем из каждой отметки μ_0 и получаем разностные отметки:

X	μ_0	$X-\mu_0$	X	μ_0	$X-\mu_0$
19	9	10	11	9	2
17	9	8	10	9	1
15	9	6	8	9	—1
13	9	4	7	9	—2
12	9	3			
					$\sum(X-\mu_0)=31$

Шаг 3. Находим сумму разностных отметок. В данной задаче $\Sigma\ (X - \mu_0) = 31$.

Шаг 4. Находим общее число возможных исходов путем возведения 2 в степень N (2^N). В данной задаче $N = 9$. Поэтому $2^N = 2^9 = 512$.

Шаг 5. Перечисляем все возможные исходы, которые приводят к получению суммы, равной наблюдаемой сумме или превышающей ее:

$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 - 1 - 2 = 31;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 - 2 = 33;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 - 1 + 2 = 35;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 = 37;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 - 1 - 1 + 2 = 33;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 - 2 + 1 + 1 + 2 = 35;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 - 2 - 1 + 1 + 2 = 31;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 - 2 + 1 - 1 + 2 = 31;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 - 1 + 1 + 2 = 35;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 - 1 + 1 - 2 = 31;$$
$$10 + 8 + 6 + 4 - 3 + 2 + 1 + 1 + 2 = 31.$$

Общее число исходов, для которых $\Sigma\ (X - \mu_0) \geqslant 31$, равно 11.

Шаг 6. Определяем вероятность получения исхода, столь же или еще более редкого, чем наблюдаемый. Это достигается путем деления итогового значения, полученного на шаге 5, на 2^N (шаг 4):

$$p_{\Sigma X \geqslant 31} = \frac{11}{512} = 0{,}02.$$

Это одностороннее значение. Для получения двустороннего значения удваиваем числитель приведенной дроби:

$$p_{\Sigma X \geqslant 31 \text{ или } \leqslant -31} = \frac{22}{512} = 0{,}04.$$

Поскольку $p < 0{,}05$, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Выборка была извлечена из генеральной совокупности, у которой $\mu_0 \neq 9$.

Упражнения

Упражнения 7—11 основываются на следующем наборе отметок: 62, 59, 57, 55, 53, 53, 48, 47; $H_0 : \mu_0 = 50$, $H_1 : \mu_0 \neq 50$, $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний

7. Запишите задачу в формальном статистическом виде.
8. Вычтите μ_0 из каждой отметки.
9. Найдите $\Sigma\ (X - \mu_0)$.
10. Найдите общее число возможных исходов.
11. Перечислите все возможные исходы, которые приводят к получению суммы, равной наблюдаемой сумме или превышающей ее.
12. Найдите p-значение.
13. Найдите двустороннее p-значение и примите статистическое решение, соответствующее полученным результатам.

Определение порогового значения

Перебор всех возможных исходов может оказаться исключительно трудоемким и утомительным занятием, особенно когда H_0 верна. Это связано с тем, что в данном случае достаточно много комбинаций будут удовлетворять требованию, заключающемуся в том, чтобы они являлись по крайней мере столь же маловероятными, как и наблюдаемый результат. В целях экономии времени и сил рекомендуется умножить α-уровень на 2^N для определения максимального числа сумм (превышающих наблюдаемую сумму или равных ей), которое позволит отклонить H_0.

Как только это число (пороговое значение) будет достигнуто (в случае, когда H_0 не может быть отклонена), перебор различных исходов можно прекратить. Мы убеждаемся в том, что результат не является статистически значимым.

Примеры

а) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний и $N = 10$, то максимально допустимое число сумм, равных или еще менее вероятных, чем наблюдаемая сумма, составит $2^N \cdot 0{,}05 = 1024 \cdot 0{,}05 = 51{,}2$. Поскольку мы рассматриваем только один конец распределения, а H_0 является двусторонней, разделим это значение пополам и получим 25,6. Поэтому как только мы перечислим 26 случаев, вычисления можно прекратить, поскольку интересующее нас p-значение уже превысило α.

б) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний и $N = 8$, мы получаем: $2^N \cdot 0{,}05 = 256 \cdot 0{,}05 = 12{,}8$. Это значение мы уже не делим пополам, поскольку наша гипотеза односторонняя и рассматривается только один конец распределения. Как только мы обнаружим 13 исходов, еще менее вероятных, чем наблюдаемый, вычисления можно прекратить.

Упражнения

14. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}05$, $N = 9$ и H_0 является направленной.
15. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}01$, $N = 9$ и H_0 является направленной.
16. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}01$, $N = 11$ и H_0 является ненаправленной.
17. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}05$, $N = 9$ и H_0 является ненаправленной.

Контрольные вопросы к главе 9

Вопросы 1—2 основываются на следующих данных: $X_1 = 59$, $X_2 = 57$, $X_3 = 54$, $X_4 = 52$, $X_5 = 47$, $X_6 = 42$. $H_0 : \mu = \mu_0 = 50$.

1. Сумма разностных отметок равна: а) 33; б) 289; в) —12; г) 11.
2. Общее число возможных исходов: а) 32; б) 16; в) 64; г) 128.
3. Если общее число возможных исходов 4096, причем 102 из них являются столь же или еще менее вероятными, чем наблюдаемый исход (двусторонний), и $\alpha = 0{,}05$ при двустороннем критерии, то:
а) p меньше α, H_0 принимается;
б) p больше α, H_0 отклоняется;
в) p больше α, H_0 принимается;
г) p меньше α, H_0 отклоняется.
4. Если общее число возможных исходов 2048, из которых 53 являются столь же или еще менее вероятными, чем наблюдаемый исход (одвосторонний), и $\alpha = 0{,}05$ при одностороннем критерии, то:
а) p меньше α, H_0 принимается;
б) p больше α, H_0 отклоняется;
в) p больше α, H_0 принимается;
г) p меньше α, H_0 отклоняется.
5. Заданы следующие разностные отметки: 10, 6, 3, —2, —1; число способов получить сумму, большую или равную 16, составляет: а) 4; б) 5; в) 3; г) 2.
6. Если имеется 512 возможных исходов, $\alpha = 0{,}05$ и H_0 является направленной, то перебор может быть прекращен, как только найдено следующее количество сумм, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемая сумма: а) 25; б) 26; в) 13; г) 12.
7. Если $\alpha = 0{,}05$, H_0 является направленной, $N = 5$ и мы принимаем во внимание только один конец распределения, то пороговое значение равно: а) 2; б) 1; в) 0; г) 4.
8. Если $\alpha = 0{,}01$, H_0 является ненаправленной, $N = 11$ и мы принимаем во внимание только один конец распределения, то пороговое значение равно: а) 11; б) 22; в) 20; г) 10.

Практическое задание

9. При следующем наборе отметок:

X	X
114	103
112	102
110	97
108	95

проверьте H_0: $\mu = \mu_0 = 100$. Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

Глава 10

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ. НЕЗАВИСИМЫЕ ВЫБОРКИ

В гл. 9 мы рассматривали критерий рандомизации в случае одной выборки. Однако критерий рандомизации можно успешно применять и при двух выборках, если N достаточно мало и мы сомневаемся в обоснованности предположения о нормальном распределении исходной совокупности. Фактором, затрудняющим использование критерия рандомизации при больших объемах выборок, является значительный объем связанной с ним вычислительной работы. Поскольку при количественных переменных для критерия рандомизации невозможно построить таблицы, значения вероятностей должны быть получены путем перебора различных возможных исходов.

Цели главы

1. Выяснить, как определяется общее число возможных комбинаций при различных значениях n_1 и n_2.

2. Понять, как с помощью перебора находится вероятность получения исхода, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый исход.

3. Познакомиться со способом проверки нулевых гипотез о средних значениях генеральных совокупностей при двух выборках.

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕГО ЧИСЛА ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ n_1 И n_2

Представьте, что мы получили следующие отметки для условий А и В:

А	В
2	5
6	9
	10

При применении критерия рандомизации эти численные значения, или отметки, интерпретируются в нулевой гипотезе так, *как будто они были случайным образом отнесены к двум экспериментальным условиям.* При этом рассматриваются следующие вопросы:

1. Каково общее число возможных способов распределения этих чисел по двум экспериментальным группам?

2. Сколько из этих способов приводят к получению результата, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый результат? Значение вероятности представляет собой отношение ответа на второй вопрос к ответу на первый.

Пример

Если имеются 126 возможных исходов, причем только 8 из них приводят к получению результата, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый, то вероятность будет равна:

$$p = \frac{\text{число исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый}}{\text{общее число возможных исходов}} =$$

$$= \frac{8}{126} \approx 0{,}06.$$

Общее число возможных исходов может быть найдено с помощью формулы:

$$\text{число возможных исходов} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\, n_2!},$$

где ! (факториал) указывает на необходимость перемножить все целые числа от 1 до n.

Пример

Если $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, то

$$\text{число возможных исходов} = \frac{(3+2)!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 10.$$

Для вашего удобства автором была построена табл. L, в которой содержатся данные об общем числе возможных исходов для случаев, когда n_1 и n_2 изменяются от 2 до 10.

Пример

Если $n_1 = 10$ и $n_2 = 9$, то мы ищем в табл. L значение на пересечении 10-го столбца и 9-й строки и обнаруживаем, что число возможных исходов равно 92 378.

Упражнения

1. Найдите значение p, если общее число возможных исходов равно 70, причем 4 из них столь же или еще менее вероятные, чем наблюдаемый исход.

2. Найдите значение p, если общее число возможных исходов равно 252, а число исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый, равно 10.

В упражнениях 3—6 найдите общее число возможных исходов при указанных значениях n_1 и n_2.

3. $n_1 = 4$, $n_2 = 4$.
4. $n_1 = 3$, $n_2 = 5$.
5. $n_1 = 6$, $n_2 = 6$.
6. $n_1 = 2$, $n_2 = 5$.

В упражнениях 7—9 воспользуйтесь табл. L для определения общего числа возможных исходов при заданных значениях n_1 и n_2:

7. $n_1 = 10$, $n_2 = 10$.
8. $n_1 = 8$, $n_2 = 7$.
9. $n_1 = 5$, $n_2 = 10$.

10.2. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ИСХОДОВ, СТОЛЬ ЖЕ ИЛИ ЕЩЕ МЕНЕЕ ВЕРОЯТНЫХ, ЧЕМ НАБЛЮДАЕМЫЙ ИСХОД

Перечисление различных исходов может оказаться достаточно утомительным занятием, но при систематическом подходе выявить возможные исходы относительно просто. Для этого существует несколько процедур. Далее описана процедура, которую автор считает наиболее удобной.

Пример

Воспользуемся ранее приведенными данными:

A	B
2	5
6	9
	10

Шаг 1. Находим сумму для каждого условия. В данной задаче $\Sigma A = 8$ и $\Sigma B = 24$.

Шаг 2. Обратимся к условию с меньшей суммой. Перечисляем все комбинации наблюдаемых отметок, которые приводят к получению суммы, не превышающей этой меньшей суммы. В данной задаче $\Sigma A = 2 + 6 = 8$ и $2 + 5 = 7$. Других комбинаций отметок, которые привели бы к получению суммы, меньшей или равной 8, не существует.

Шаг 3. Находим вероятность получения суммы, меньшей или равной минимальной из наблюдаемых сумм:

$$p_{\Sigma A \leqslant 8} = \frac{2}{\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}} = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

Это односторонняя вероятность наступления события, столь же или еще более редкого, чем получение суммы в 8 очков. Для определения двусторонней вероятности наступления подобного события (т. е. события, при котором условие B может иметь меньшую сумму) необходимо удвоить одностороннее значение вероятности. Таким образом, вероятность наступления события, столь же редкого, как и наблюдаемый результат, равна 0,4.

Упражнения

Упражнения 10—12 основываются на следующих данных:

A	B
4	5
9	11
12	17

10. Найдите сумму для каждого условия.

11. Перечислите все комбинации, которые приводят к получению суммы, не превышающей меньшей из наблюдаемых сумм.

12. Найдите двустороннюю вероятность получения суммы, которая меньше или равна минимальной из наблюдаемых сумм.

Гипотетический пример

Две группы лиц участвуют в исследовании, предпринятом для оценки влияния некоторого лекарства на время реакции. Поскольку совокупность отметок, отражающих время реакции, очевидно, имеет положительную асимметрию (наименьшей возможной отметкой является нуль, а на верхнем конце распределения не существует аналогичного предела), в качестве альтернативы параметрическому t-отношению Стьюдента был выбран критерий рандомизации. Используется $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. Результаты выглядят следующим образом:

A	B
0,18	0,41
0,27	0,38
0,19	0,73
0,36	0,49
0,43	0,58
$\Sigma A=1{,}43$	$\Sigma B=2{,}59$

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): средние значения времени реакции для совокупностей, из которых были извлечены обе выборки, совпадают.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): в рассматриваемых совокупностях средние значения времени реакции не совпадают.

в) *Статистический критерий*: поскольку исходные совокупности отметок не являются нормально распределенными и отметки соответствуют относительной шкале, подходящим критерием значимости является критерий рандомизации для независимых выборок.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

д) *Выборочное распределение*: общее число возможных исходов при двух группах, для которых $n_1 = 5$ и $n_2 = 5$.

Шаг 2. Находим сумму для каждого условия. В данной задаче $\Sigma A = 1{,}43$ и $\Sigma B = 2{,}59$.

Шаг 3. Обращаемся к условию с меньшей суммой. Перечисляем все комбинации наблюдаемых отметок, которые приводят к получению суммы, не превышающей меньшую сумму. Для данной задачи эти исходы выглядят следующим образом:

$$0{,}18 + 0{,}27 + 0{,}19 + 0{,}36 + 0{,}43 = 1{,}43;$$

$$0{,}18 + 0{,}27 + 0{,}19 + 0{,}36 + 0{,}41 = 1{,}41;$$

$$0{,}18 + 0{,}27 + 0{,}19 + 0{,}36 + 0{,}38 = 1{,}38;$$

$$0{,}18 + 0{,}27 + 0{,}19 + 0{,}41 + 0{,}38 = 1{,}43.$$

Шаг 4. Находим вероятность получения суммы, не превосходящей меньшую из наблюдаемых сумм. Для данной задачи

$$p_{\Sigma A \leqslant 1{,}43} = \frac{4}{\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}} = \frac{4}{\dfrac{10!}{5!\,5!}} = \frac{4}{252} \approx 0{,}02.$$

Двустороннее значение вероятности равно $8/252 \approx 0{,}03$. В силу этого мы отклоняем H_0 при $\alpha = 0{,}05$ и принимаем H_1.

Упражнения

Упражнения 13—16 основываются на наборе даных:

А	В	А	В
19	28	18	26
14	17	11	16
13	34	5	20

Отметки соответствуют по уровню интервальным шкалам, но исходные распределения не являются нормальными.

13. Запишите задачу в формальном статистическом виде. Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

14. Найдите сумму для каждого условия.

15. Перечислите все комбинации наблюдаемых отметок, которые приводят к получению суммы, не превосходящей меньшую из наблюдаемых сумм.

16. Найдите вероятность получения суммы, меньшей или равной минимальной из наблюдаемых сумм, и сделайте вывод, соответствующий полученным результатам.

Определение порогового значения

Перебор различных значений может оказаться исключительно долгим и сложным процессом, особенно когда H_0 верна. Это связано с тем, что достаточно много комбинаций будут удовлетворять требованию, заключающемуся в том, чтобы они являлись по крайней мере столь же маловероятными, как и наблюдаемый результат. Для экономии времени и сил рекомендуется умножить α-уровень на

$$\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}$$

и определить таким образом максимальное число сумм (превышающих наблюдаемую сумму или равных ей), которое позволит отклонить H_0.

Как только это число (пороговое значение) будет достигнуто (в случае, когда H_0 не может быть отклонена), перебор различных исходов можно прекратить. Мы убеждаемся в том, что результат не является статистически значимым.

Примеры

а) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний, $n_1 = 4$ и $n_2 = 6$, то максимально допустимое число сумм, равных или менее вероятных, чем наблюдаемая сумма, составит:

$$\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}\cdot 0{,}05 = 210\cdot 0{,}05 = 10{,}5.$$

Поскольку мы рассматриваем только один конец распределения и H_0 двусторонняя, делим это значение пополам и получаем 5,25. Как только мы перечислим 6 случаев, вычисления можно прекратить, так как интересующее нас p-значение уже превысило α.

б) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний, $n_1 = 6$ и $n_2 = 5$, то получаем

$$\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}\cdot 0{,}05 = 462\cdot 0{,}05 = 23{,}1.$$

Это значение уже не делим пополам, поскольку гипотеза односторонняя и мы рассматриваем только один конец распределения. Как только будут обнаружены 24 исхода, еще менее вероятных, чем наблюдаемый, вычисления можно прекратить.

Упражнения

17. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}05$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$ и H_0 направленная.

18. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}01$, $n_1 = 5$, $n_2 = 7$ и H_0 направленная.

19. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}01$, $n_1 = 8$, $n_2 = 6$ и H_0 ненаправленная.

20. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}05$, $n_1 = 4$, $n_2 = 7$ и H_0 ненаправленная.

Контрольные вопросы к главе 10

1. Если имеются 1024 возможных исхода и 24 (двустороннее значение) из них приводят к результату, столь же или еще менее вероятному, чем наблюдаемый, то вероятность равна: а) 0,23; б) 0,02; в) 0,24; г) 0,04.

2. Если $n_1 = 7$ и $n_2 = 5$, то число возможных исходов равно: а) 35; б) 11; в) 792; г) 5544.

3. Если $n_1 = 9$ и $n_2 = 4$, то число возможных исходов равно: а) 715; б) б) 2002; в) 495; г) 220.

Вопросы 4—6 основываются на следующей таблице данных:

X_1	X_2
16	9
14	5
12	3
10	2
4	2
2	1

4. ΣX_1 и ΣX_2 равны соответственно: а) 21,56; б) 58,22; в) 56,22; г) 54,21.

5. Общее число различных возможных исходов равно: а) 210; б) 1716; в) 463; г) 924.

6. Какой из наборов отметок представляет менее вероятный исход по отношению к X_2, чем наблюдаемый исход: а) 9, 5, 3, 2, 2, 2; б) 10, 5, 3, 2, 2, 1; в) 10, 4, 2, 2, 2, 1; г) 12, 4, 3, 2, 1?

7. Если $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний, $n_1 = 6$, $n_2 = 5$ и мы рассматриваем только один конец распределения, то пороговое значение равно: а) 12; б) 24; в) 47; г) 23.

8. Если $\alpha = 0{,}0{,}5$ критерий односторонний, $n_1 = 8$, $n_2 = 8$ и мы рассматриваем только один конец распределения, то пороговое значение равно: а) 644; б) 161; в) 320; г) 322.

Практическое задание

9. Примените критерий рандомизации к приведенной таблице данных:

X_1	X_2
35	28
32	25
30	20
29	18
24	16
23	14

Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.

Глава 11

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ШКАЛЫ. СВЯЗАННЫЕ ВЫБОРКИ

В гл. 9 мы рассмотрели критерий рандомизации в случае одной выборки. Процедура применения критерия рандомизации при связанных выборках соответствует той, которая использовалась при одной выборке. Единственное различие заключается в следующем: если при одной выборке мы вычитали предполагаемое в H_0 среднее значение из каждой отметки, то при связанных выборках вторая отметка каждой из однородных пар вычитается из соответствующей ей первой отметки. Кроме этого момента вычислительные процедуры идентичны.

Цели главы

1. Понять, как с помощью перебора находится вероятность получения исхода, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый исход.

2. Выяснить, как проверяются нулевые гипотезы, касающиеся различий между средними значениями генеральных совокупностей, при связанных выборках.

11.1. КРИТЕРИЙ РАНДОМИЗАЦИИ

Вкратце процедура включает вычитание второй отметки каждой однородной пары из соответствующей ей первой отметки, определение алгебраической суммы найденных разностных отметок, перечисление всех исходов, которые приводят к получению результата, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый результат, деление полученной величины на 2^N для определения одностороннего значения вероятности. Двустороннее значение вероятности может быть получено путем удваивания одностороннего значения.

Пример

Известны следующие отметки, полученные для каждой однородной пары лиц вслед за воздействием экспериментальной переменной (группа X_1) и выступающие в качестве контрольной переменной (группа X_2):

Пара	X_1	X_2	Пара	X_1	X_2
1	48	39	6	24	23
2	44	40	7	20	13
3	36	30	8	17	18
4	32	34	9	15	6
5	29	18			

Используя $\alpha = 0{,}01$ при двустороннем критерии, необходимо оценить результат эксперимента.

Шаг 1. Запишем задачу в формальном статистическом виде:

а) *Нулевая гипотеза* (H_0): $\mu_1 = \mu_2$.

б) *Альтернативная гипотеза* (H_1): $\mu_1 \neq \mu_2$.

в) *Статистический критерий*: поскольку данные состоят из отметок, соответствующих интервальному измерению, и имеются серьезные сомнения относительно нормальности исходного распределения отметок, подходящим статистическим критерием является критерий рандомизации для связанных выборок.

г) *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний.

д) *Критическое значение*: критическое значение не используется, поскольку с помощью перебора мы получим точное значение вероятности.

Шаг 2. Вычитаем вторую отметку каждой однородной пары из соответствующей ей первой отметки и получаем столбец разностей:

Пара	X_1	X_2	Разность
1	48	39	9
2	44	40	4
3	36	30	6
4	32	34	—2
5	29	18	11
6	24	23	1
7	20	13	7
8	17	18	—1
9	15	6	9
			$\Sigma D = 44$

Шаг 3. Находим сумму разностных отметок. В данной задаче эта сумма равна 44.

Шаг 4. Находим общее число возможных исходов путем возведения 2 в степень N (2^N). В данной задаче N (число пар) равно 9, поэтому $2^N = 2^9 = 512$.

Шаг 5. Перечисляем все возможные исходы, которые приводят к получению суммы, равной наблюдаемой сумме или превышающей ее. Для данной задачи эти исходы будут следующими:

$$9 + 4 + 6 - 2 + 11 + 1 + 7 - 1 + 9 = 44;$$
$$9 + 4 + 6 + 2 + 11 + 1 + 7 - 1 + 9 = 48;$$
$$9 + 4 + 6 + 2 + 11 + 1 + 7 + 1 + 9 = 50;$$
$$9 + 4 + 6 - 2 + 11 - 1 + 7 + 1 + 9 = 48;$$
$$9 + 4 + 6 + 2 + 11 - 1 + 7 - 1 + 9 = 46;$$
$$9 + 4 + 6 - 2 + 11 + 1 + 7 + 1 + 9 = 46;$$
$$9 + 4 + 6 + 2 + 11 - 1 + 7 + 1 + 9 = 48.$$

В общей сложности имеется 7 исходов, которые приводят к получению сумм, больших или равных 44. С учетом другого конца распределения (т. е. с учетом сумм, не превышающих —44) имеется 14 исходов, которые приводят к получению сумм, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемая.

Шаг 6. Определяем вероятность получения исхода, столь же редкого, как и наблюдаемый исход, путем деления итогового значения, полученного на шаге 5, на 2^N (шаг 4). В данной задаче нас интересует двустороннее p-значение. Поэтому

$$p_{\Sigma X \geqslant 44 \text{ или } \leqslant -44} = \frac{14}{512} \approx 0{,}03.$$

Решение. Поскольку полученное значение p больше $\alpha = 0{,}01$, мы принимаем H_0.

Упражнения

Упражнения 1—6 основываются на следующих данных об однородных парах:

Пара	X_1	X_2	Пара	X_1	X_2
1	87	80	5	70	76
2	94	73	6	60	45
3	82	77	7	53	50
4	74	63	8	40	28

Исходная совокупность вряд ли является нормальной.

1. Запишете задачу в формальном статистическом виде. Используйте $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний.
2. Найдите разностные отметки.
3. Найдите сумму разностных отметок.
4. Найдите общее число возможных исходов.
5. Перечислите все возможные исходы, которые приводят к получению суммы, столь же или еще менее вероятной, чем наблюдаемая сумма, и найдите их общее количество, учитыная оба конца распределения.
6. Определите вероятность получения исхода, столь же редкого, как и наблюдаемый исход, и сделайте вывод, соответствующий полученным результатам.

Определение порогового значения

Перебор различных исходов может оказаться исключительно долгим и трудным процессом, особенно когда H_0 верна. Это связано с тем, что в этом случае достаточно много комбинаций будут удовлетворять необходимому требованию, т. е. будут по крайней мере столь же мало вероятными, как и наблюдаемый результат.

Для экономии времени и сил рекомендуется умножить α-уровень на 2^N и определить таким образом максимальное число сумм (превышающих наблюдаемую сумму или равных ей), которое позволит отклонить H_0.

Как только это число (пороговое значение) будет достигнуто (в случае, когда H_0 не может быть отклонена), перебор различных исходов можно прекратить. Мы убеждаемся в том, что результат не является статистически значимым.

Примеры

а) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний и $N = 10$, то максимально допустимое число сумм, равных или менее вероятных, чем наблюдаемая сумма, составит: $2^N \cdot 0{,}05 = 1024 \cdot 0{,}05 = 51{,}2$. Поскольку мы рассматриваем только один конец распределения и H_0 двусторонняя, делим это значение пополам и получаем 25,6. Как только мы перечислим 26 случаев, вычисления можно прекратить, потому что интересующее нас p-значение уже превысило α.

б) Если $\alpha = 0{,}05$, критерий односторонний и $N = 8$, мы получаем: $2^N \cdot 0{,}05 = 256 \cdot 0{,}05 = 12{,}8$. Это значение не делим пополам, так как наша гипотеза односторонняя и мы рассматриваем только один конец распределения. Как только мы обнаружим 13 исходов, еще менее вероятных, чем наблюдаемый, можно прекратить вычисления.

Упражнения

7. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}01$, $N = 11$ и H_0 ненаправленная.
8. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}05$, $N = 10$ и H_0 ненаправленная.
9. Найдите пороговое значение, если $\alpha = 0{,}01$, $N = 12$ и H_0 направленная.

11.2. БОЛЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ N

Как было отмечено, при больших N вычисления становятся трудоемкими и подверженными большому количеству ошибок. Например, при $N = 12$ выборочное распределение содержит 4096 различных возможных исходов.

Знаково-ранговый критерий Уилкоксона для однородных пар (см. гл. 8) фактически является критерием рандомизации, примененным к рангам, причем по мере возрастания N он все ближе приближается по мощности к критерию рандомизации. Поэтому при N, заключающемся в пределах от 12 до 25, рекомендуется критерий Уилкоксона.

При больших значениях N можно обратиться к центральной предельной теореме, которая гласит: «Если случайные выборки с фиксированным объемом (N) извлекаются из *любой* генеральной совокупности (независимо от формы ее распределения), то по мере возрастания N распределение выборочных средних приближается к нормальному, причем общая средняя приближается при этом к μ, дисперсия выборочных средних ($\sigma_{\bar{X}}^2$) равняется σ^2/N, а стандартная ошибка ($\sigma_{\bar{X}}$) составляет $\sigma/\sqrt{N}$». Поэтому в большинстве случаев, когда N превышает 25, допустимо применение параметрического t-критерия.

Контрольные вопросы к главе 11

Вопросы 1—3 основываются на следующих парных отметках: 16 и14; 13 и 9; 12 и 7; 10 и 5; 6 и 9; 5 и 2; 3 и 3.

1. Сумма разностных отметок равна: а) 22; б) 19; в) 20; г) 16.

2. Общее число возможных исходов равно: а) 4096; б) 64; в) 128; г) 1024.

3. N равно: а) 14; б) 7; в) 12; г) 6.

4. Если общее число возможных исходов равно 2048, из которых 130 столь же или еще менее вероятные, чем наблюдаемый исход (значение двустороннее), и $\alpha = 0,05$ при двустороннем критерии, то:

а) p меньше α, H_0 принимается;
б) p больше α, H_0 отклоняется;
в) p больше α, H_0 принимается;
г) p меньше α, H_0 отклоняется.

5. Если общее число возможных исходов равно 512, из которых 23 столь же или еще менее вероятные, чем наблюдаемый исход (одностороннее значение), и $\alpha = 0,05$ при одностороннем критерии, то:

а) p меньше α, H_0 принимается;
б) p больше α, H_0 отклоняется;
в) p больше α, H_0 принимается;
г) p меньше α, H_0 отклоняется.

6. Заданы следующие разностные отметки: —8, —5, —3, 2, 1; число способов получить сумму, меньшую или равную —13, составляет: а) 0; б) 3; в) 4; г) 2.

7. Если имеется 4096 возможных исходов, $\alpha = 0,01$ и H_0 направленная, то перебор может быть прекращен после того, как найдено следующее количество сумм, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемая: а) 41; б) 410; в) 21; г) 205.

8. Если $\alpha = 0,05$, H_0 ненаправленная, $N = 7$ и мы принимаем во внимание только один конец распределения, то пороговое значеиие равно: а) 2; б) 1; в) 4; г) 3.

9. Если $\alpha = 0,01$, H_0 направленная, $N = 10$ и мы принимаем во внимаиие только один конец распределения, то пороговое значение равно: а) 6; б) 5; в) 10; г) 11.

10. Заданы следующие разностные отметки: —3, 9, 5, 7, —2, 4, исход, еще менее вероятный, будет следующим: а) —3, 9, 5, 7, —2, 4; б) —3, 9, 5, 7, 2, 4; в) —3, —9, 5, 7, 2, 4; г) —3, 9, 5, 7, 2, —4.

Практическое задание

11. Приведены парные отметки для лиц, которые были проверены в различных экспериментальных условиях. Используя критерий рандомизации, проверьте H_0: $\mu_1 = \mu_2$ при $\alpha = 0,01$.

Пара	X_1	X_2	Пара	X_1	X_2
1	79	70	5	52	55
2	74	72	6	40	32
3	70	60	7	27	25
4	63	64	8	20	12

ПРИЛОЖЕНИЕ

Автор выражает свою признательность перечисленным авторам и издателям за разрешение воспроизвести или воспользоваться следующими таблицами:

Таблица C — Table III in: F i s h e r R. A. and Y a t e s F. Methods for Research Workers. Edinburgh, Oliver and Boyd, Ltd., 1950*.

Таблица D — S i e g e l S. Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences. New York, McGraw-Hill, 1956; F i n n e y D. J. The Fisher—Yates test of significance in 2 × 2 contingency table. Biometrika, **35**, 1948, p. 149—154.

Таблица E — S i e g e l S. Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences. New York, McGraw-Hill, 1956; M a s s e y F. J., Jr. The Kolmogorov—Smirnov test for goodness of fit. J. Amer. Statist. Assn., **46**, 1951, p. 70.

Таблица F — S w e d F. S. and E i s e n h a r t C. Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives. Ann. Math. Statist., **14**, 1943, p. 83—86.

Таблица H — M a n n H. B. and W h i t n e y D. R. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. Ann. Math. Statist., **18**, 1947, p. 52—54; A u b l e D. Extended tables for the Mann—Whitney statistic. Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University, **1**, № 2, 1953.

Таблица J — W i l c o x o n F., K a t t i S. and W i l c o x R. A. Critical Values and Probability Levels for the Wilcoxon Rank Sum Test and the Wilcoxon Signed Rank Test. New York. American Cyanamid Co., 1963; W i l c o x o n F. and W i l c o x R. A. Some Rapid Approximate Statistics Procedures. New York, Lederle Laboratories, 1964.

Таблица K — S i e g e l S. Nonparametrics Statistics for the Behavioral Sciences. New York, McGraw-Hill, 1956; F r i e d m a n M. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. J. Amer. Statist. Assn., **32**, 1937, p. 688—689.

Таблица M — E d w a r d s A. L. Statistical Analysis. 3rd. ed. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969; D u n l a p J. W. and K u r t z A. K. Handbook of Statistical Nomographs, Tables and Formulas. New York, World Book Co., 1932.

ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

---

* Эта таблица совпадает с таблицей III из книги: Ф и ш е р Р. А. Статистические методы для исследователей. М., Госстатиздат, 1958.—*Примеч. пер.*

Таблица E. Критические значения D в критерии Колмогорова — Смирнова для одной выборки (двусторонние). Для отклонения H_0 при данном α-уровне необходимо, чтобы наблюдаемое D было равным критическому значению или превышало его (с. 141).

Таблица F. Критические значения R в критерии серий.

Каждая клетка таблицы содержит по два значения для данных n_1 и n_2. Если R меньше верхнего значения либо равно ему или же больше нижнего значения соответствующей клетки либо равно ему, то последовательность неслучайна при $\alpha = 0{,}05$ (двусторонний критерий) или $\alpha = 0{,}025$ (односторонний критерий). Прочерк означает невозможность принятия решения при указанных значениях n_1 и n_2 (с. 142).

Таблица G. Процент площади под стандартной нормальной кривой, соответствующий данному z, и высота ординаты в точке z (с. 143—156).

Таблица H_1. Критические значения U и U' для одностороннего критерия при $\alpha = 0{,}005$ или для двустороннего критерия при $\alpha = 0{,}01$. При любых заданных n_1 и n_2 для значимости необходимо, чтобы наблюдаемое U было меньше верхнего значения, приведенного в таблице, или равно ему; наблюдаемое U' должно быть больше нижнего значения, приведенного в таблице, или равно ему (с. 157).

Таблица H_2. Критические значения U и U' для одностороннего критерия при $\alpha = 0{,}01$ или для двустороннего критерия при $\alpha = 0{,}02$. При любых заданных n_1 и n_2 для значимости необходимо, чтобы наблюдаемое U было меньше верхнего значения, приведенного в таблице, или равно ему; наблюдаемое U' должно быть больше нижнего значения, приведенного в таблице, или равно ему (с. 158).

Таблица H_3. Критические значения U и U' для одностороннего критерия при $\alpha = 0{,}025$ или для двустороннего критерия при $\alpha = 0{,}05$. При любых заданных n_1 и n_2 для значимости необходимо, чтобы наблюдаемое U было меньше верхнего значения, приведенного в таблице, или равно ему; наблюдаемое U' должно быть больше нижнего значения, приведенного в таблице, или равно ему (с. 159).

Таблица H_4. Критические значения U и U' для одностороннего критерия при $\alpha = 0{,}05$ или для двустороннего критерия при $\alpha = 0{,}10$. При любых заданных n_1 и n_2 для значимости необходимо, чтобы наблюдаемое U было меньше верхнего значения, приведенного в таблице, или равно ему; наблюдаемое U' должно быть больше нижнего значения, приведенного в таблице, или равно ему (с. 160).

Таблица I. Критические разности в критерии множественных сравнений Уилкоксона, используемые при сравнении всех возможных пар воздействий для $N = 3, 4, \ldots, 25$ и $k = 3, 4, \ldots, 10$. Наблюдаемая разность сумм значима при заданном α-уровне, если она равняется табличному значению или превышает его. Значения, напечатанные светлым шрифтом, соответствуют $\alpha = 0{,}05$. Для значений, выделенных жирным шрифтом, $\alpha = 0{,}01$. Все значения двусторонние (с. 161).

Таблица J. Критические значения T. Символ T обозначает меньшую сумму рангов, соответствующих разностям с одинаковыми знаками. Для любого данного N (число ранжированных разностей) наблюдаемое T значимо при выбранном α-уровне в том случае, если оно меньше значения, приведенного в таблице, или равно ему (с. 162).

Таблица K. Вероятности, соответствующие наблюдаемым значениям χ^2_r в двухфакторном дисперсионном анализе по Фридману с помощью рангов (с. 163—164).

Таблица L. Общее число возможных исходов для различных значений n_1 и n_2 в критерии рандомизации для независимых выборок (с. 164).

Таблица M. Квадраты, квадратные корни и обратные величины чисел от 1 до 1000 (с. 165—170).

Таблица А.

N	односторонний критерий 0,05	0,01	двусторонний критерий 0,05	0,01
5	5	—	—	—
6	6	—	6	—
7	7	7	7	—
8	7	8	8	—
9	8	9	8	9
10	9	10	9	10
11	9	10	10	11
12	10	11	10	11
13	10	12	11	12
14	11	12	12	13
15	12	13	12	13
16	12	14	13	14
17	13	14	13	15
18	13	15	14	15
19	14	15	15	16
20	15	16	15	17
21	15	17	16	17
22	16	17	17	18
23	16	18	17	19
24	17	19	18	19
25	18	19	18	20
26	18	20	19	20
27	19	20	20	21
28	19	21	20	22
29	20	22	21	22
30	20	22	21	23
31	21	23	22	24
32	22	24	23	24
33	22	24	23	25
34	23	25	24	25
35	23	25	24	26
36	24	26	25	27
37	24	27	25	27
38	25	27	26	28
39	26	28	27	28
40	26	28	27	29
41	27	29	28	30
42	27	29	28	30
43	28	30	29	31
44	28	31	29	31
45	29	31	30	32
46	30	32	31	33
47	30	32	31	33
48	31	33	32	34
49	31	34	32	35
50	32	34	33	35

Таблица В.

N \ P	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25
Q	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83	0,82	0,81	0,80	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75
2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	—	—	—
	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	—	—	—	—
4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
7	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	1	4	4	4	5	5	5
	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
8	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
9	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6
10	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6
	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
11	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
12	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7
	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8
13	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7
	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8
14	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9
15	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8
	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9
16	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8
	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9
17	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8
	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10
18	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9
	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10
19	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9
	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10
20	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9
	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	11
21	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10
	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	11
22	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10
	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	11	11
23	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10
	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12

Таблица В (продолжение)

0,26 0,74	0,27 0,73	0,28 0,72	0,29 0,71	0,30 0,70	0,31 0,69	0,32 0,68	0,33 0,67	0,34 0,66	0,35 0,65	0,36 0,64	0,37 0,63	0,38 0,62	0,39 0,61	0,40 0,68	0,41 0,59	0,42 0,58	0,43 0,57	0,44 0,56	0,45 0,55	0,46 0,54	0,47 0,53	0,48 0,52	0,49 0,51	0,50 0,50
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	—	—	—	—
4	4	4	4	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	—	—	—	—
5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9
6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9
7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10
6	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9
7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10
7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10
8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11
7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10
8	8	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	12
7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12
8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12
9	9	9	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	13	13	13
8	8	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12
9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13	14	14	14	14
8	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13
10	10	10	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14
9	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	13
10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	14	15	15
9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	13	14	14	14
11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	15
10	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15
11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	16	16	16	16
10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15
11	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	16	16	17	17
10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	15	16	16
12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
11	11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	16	16
12	12	13	13	13	13	14	14	14	15	15	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18

Таблица В (продолжение)

N	P 0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25
	Q 0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83	0,82	0,81	0,80	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75
24	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11
	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12
25	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12	13
26	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11
	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13
27	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12
	3	4	4	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	13
28	2	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12
	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13	14
29	2	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12
	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14
30	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	13
	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14	14
31	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	11	12	12	12	13
	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14	14	15
32	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12	13	13
	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15	15
33	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13
	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14	15	15	15
34	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	14
	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16
35	2	3	4	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14
	3	4	5	6	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15	15	16	16
36	3	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13	13	14	14	14
	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15	16	16
37	3	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15
	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15	15	16	16	17
38	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15
	3	4	5	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
39	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	14	15	15
	3	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
40	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16
	3	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18
41	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15	16
	3	4	5	6	7	8	8	9	9	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18
42	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16
	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18
43	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17
	3	5	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18	19
44	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17
	3	5	5	6	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19
45	3	4	4	5	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	15	15	16	16	17	17
	4	5	6	6	7	8	9	9	10	11	11	12	13	13	14	14	15	15	16	17	17	18	18	19	19

Таблица B (продолжение)

0,26 0,74	0,27 0,73	0,28 0,72	0,29 0,71	0,30 0,70	0,31 0,69	0,32 0,68	0,33 0,67	0,34 0,66	0,35 0,65	0,36 0,64	0,37 0,63	0,38 0,62	0,39 0,61	0,40 0,60	0,41 0,59	0,42 0,58	0,43 0,57	0,44 0,56	0,45 0,55	0,46 0,54	0,47 0,53	0,48 0,52	0,49 0,51	0,50 0,50
11	11	11	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17
13	**13**	**13**	**13**	**14**	**14**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**18**	**19**
11	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	18
13	**13**	**13**	**14**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**19**
12	12	12	12	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18
13	**14**	**14**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**
12	12	12	13	13	13	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18	18	19
14	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**20**
12	13	13	13	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17	18	18	18	18	19	19	19
14	**14**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**
13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18	18	18	19	19	19	20	20
14	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**21**	**22**
13	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20	20
15	**15**	**15**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**21**	**22**	**22**	**22**
13	14	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20	20	21	21
15	**15**	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**22**	**22**	**22**	**23**	**23**
14	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20	21	21	21	22
15	**16**	**16**	**16**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**22**	**22**	**22**	**22**	**23**	**23**	**24**
14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18	19	19	19	20	20	20	21	21	21	22	22	22
16	**16**	**16**	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**22**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**
14	15	15	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20	21	21	21	22	22	22	23
16	**16**	**17**	**17**	**17**	**18**	**18**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**22**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**24**	**25**
14	15	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	21	21	21	22	22	22	23	23	23
16	**17**	**17**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**24**	**25**	**25**	**25**
15	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	21	22	22	22	23	23	24	24
17	**17**	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**25**	**26**	**26**
15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	22	23	23	23	24	24	24
17	**18**	**18**	**18**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**22**	**23**	**23**	**24**	**24**	**24**	**25**	**25**	**25**	**26**	**26**	**27**
15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	22	23	23	24	24	24	25	25
17	**18**	**18**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**24**	**25**	**25**	**26**	**26**	**26**	**27**	**27**
16	16	17	17	17	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26
18	**18**	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**25**	**26**	**26**	**27**	**27**	**27**	**28**
16	17	17	17	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23	23	24	24	25	25	25	26	26
18	**19**	**19**	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**26**	**26**	**26**	**27**	**27**	**28**	**28**	**28**
16	17	17	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23	23	24	24	25	25	26	26	26	27
18	**19**	**19**	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**26**	**26**	**26**	**27**	**27**	**28**	**28**	**28**	**29**
17	17	18	18	19	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	23	24	24	25	25	26	26	26	27	27
19	**19**	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**26**	**26**	**27**	**27**	**27**	**28**	**28**	**29**	**29**	**29**
17	18	18	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26	26	27	27	27	28
19	**20**	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**26**	**26**	**27**	**27**	**28**	**28**	**28**	**29**	**29**	**30**	**30**
17	18	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	28
19	**20**	**21**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**26**	**26**	**27**	**27**	**28**	**28**	**28**	**29**	**29**	**30**	**30**	**31**
18	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29
20	**20**	**21**	**21**	**22**	**22**	**23**	**23**	**24**	**24**	**25**	**25**	**26**	**26**	**27**	**27**	**28**	**28**	**29**	**29**	**29**	**30**	**30**	**31**	**31**

Таблица В (продолжение)

N	P 0,01 Q 0,99	0,02 0,98	0,03 0,97	0,04 0,96	0,05 0,95	0,06 0,94	0,07 0,93	0,08 0,92	0,09 0,91	0,10 0,98	0,11 0,89	0,12 0,88	0,13 0,87	0,14 0,86	0,15 0,85	0,16 0,84	0,17 0,83	0,18 0,82	0,19 0,81	0,20 0,80	0,21 0,79	0,22 0,78	0,23 0,77	0,24 0,76	0,25 0,75
46	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
	4	5	6	6	7	8	9	9	10	11	11	12	13	13	14	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20
47	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	14	15	15	16	16	17	17	18
	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	15	16	17	17	18	18	19	19	20
48	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15	16	16	17	18	18
	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	17	18	19	19	20	20
49	3	4	5	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18
	4	5	6	7	8	8	9	10	11	11	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18	19	19	20	21

Таблица В (продолжение)

0,26 0,74	0,27 0,73	0,28 0,72	0,29 0,71	0,30 0,70	0,31 0,69	0,32 0,68	0,33 0,67	0,34 0,66	0,35 0,65	0,36 0,64	0,37 0,63	0,38 0,62	0,39 0,61	0,40 0,60	0,41 0,59	0,42 0,58	0,43 0,57	0,44 0,56	0,45 0,55	0,46 0,54	0,47 0,53	0,48 0,52	0,49 0,51	0,50 0,50
18	18	19	20	20	21	21	22	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30
20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30	30	31	31	32
18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30
21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31	31	31	32	32
19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31
21	21	22	22	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31	31	32	32	33	33
19	19	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27	20	28	29	29	30	30	31	31
21	22	22	23	23	24	24	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31	31	32	32	33	33	34

Таблица С.

Число степеней свободы df	P=0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14.611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Таблица D.

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=3$	$C+D=3$	3	0	—	—	—
$A+B=4$	$C+D=4$	4	0	0	—	—
	$C+D=3$	4	0	—	—	—
$A+B=5$	$C+D=5$	5	1	1	0	0
		4	0	0	—	—
	$C+D=4$	5	1	0	0	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=3$	5	0	0	—	—
	$C+D=2$	5	0	—	—	—
$A+B=6$	$C+D=6$	6	2	1	1	0
		5	1	0	0	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=5$	6	1	0	0	0
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=4$	6	1	0	0	0
		5	0	0	—	—
	$C+D=3$	6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=2$	6	0	—	—	—
$A+B=7$	$C+D=7$	7	3	2	1	1
		6	1	1	0	0
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=6$	7	2	2	1	1
		6	1	0	0	0
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=5$	7	2	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=4$	7	1	1	0	0
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=3$	7	0	0	0	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=2$	7	0	—	—	—

Сумма по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=8$	$C+D=8$	8	4	3	2	2
		7	2	2	1	0
		6	1	1	0	0
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=7$	8	3	2	2	1
		7	2	1	1	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
	$C+D=6$	8	2	2	1	1
		7	1	1	0	0
		6	0	0	0	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=5$	8	2	1	1	0
		7	1	0	0	0
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=4$	8	1	1	0	0
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=3$	8	0	0	0	—
		7	0	0	—	—
	$C+D=2$	8	0	0	—	—
$A+B=9$	$C+D=9$	9	5	4	3	3
		8	3	3	2	1
		7	2	1	1	0
		6	1	1	0	0
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=8$	9	4	3	3	2
		8	3	2	1	1
		7	2	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
	$C+D=7$	9	3	3	2	2
		8	2	2	1	0
		7	1	1	0	0
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—

Таблица D (продолжение)

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости			
			0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=9$	$C+D=6$	9	3	2	1	1
		8	2	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=5$	9	2	1	1	1
		8	1	1	0	0
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=4$	9	1	1	0	0
		8	0	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=3$	9	1	0	0	0
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	$C+D=2$	9	0	0	—	—
$A+B=10$	$C+D=10$	10	6	5	4	3
		9	4	3	3	2
		8	3	2	1	1
		7	2	1	1	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=9$	10	5	4	3	3
		9	4	3	2	2
		8	2	2	1	1
		7	1	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
	$C+D=8$	10	4	4	3	2
		9	3	2	2	1
		8	2	1	1	0
		7	1	1	0	0
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=7$	10	3	3	2	2
		9	2	2	1	1
		8	1	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости			
			0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=10$	$C+D=6$	10	3	2	2	1
		9	2	1	1	0
		8	1	1	0	0
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=5$	10	2	2	1	1
		9	1	1	0	0
		8	1	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=4$	10	1	1	0	0
		9	1	0	0	0
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	$C+D=3$	10	1	0	0	0
		9	0	0	—	—
		8	0	—	—	—
	$C+D=2$	10	0	0	—	—
		9	0	—	—	—
$A+B=11$	$C+D=11$	11	7	6	5	4
		10	5	4	3	3
		9	4	3	2	2
		8	3	2	1	1
		7	2	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=10$	11	6	5	4	4
		10	4	4	3	2
		9	3	3	2	1
		8	2	2	1	0
		7	1	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=9$	11	5	4	4	3
		10	4	3	2	2
		9	3	2	1	1
		8	2	1	1	0
		7	1	1	0	0
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—

Таблица D (продолжение)

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=11$	$C+D=8$	11	4	4	3	3
		10	3	3	2	1
		9	2	2	1	1
		8	1	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=7$	11	4	3	2	2
		10	3	2	1	1
		9	2	1	1	0
		8	1	1	0	0
		7	0	0	—	—
		6	0	0	—	—
	$C+D=6$	11	3	2	2	1
		10	2	1	1	0
		9	1	1	0	0
		8	1	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=5$	11	2	2	1	1
		10	1	1	0	0
		9	1	0	0	0
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	$C+D=4$	11	1	1	1	0
		10	1	0	0	0
		9	0	0	—	—
		8	0	—	—	—
	$C+D=3$	11	1	0	0	0
		10	0	0	—	—
		9	0	—	—	—
	$C+D=2$	11	0	0	—	—
		10	0	—	—	—
$A+B=12$	$C+D=12$	12	8	7	6	5
		11	6	5	4	4
		10	5	4	3	2
		9	4	3	2	1
		8	3	2	1	1
		7	2	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=12$	$C+D=11$	12	7	6	5	5
		11	5	5	4	3
		10	4	3	2	2
		9	3	2	2	1
		8	2	1	1	0
		7	1	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
	$C+D=10$	12	6	5	5	4
		11	5	4	3	3
		10	4	3	2	2
		9	3	2	1	1
		8	2	1	0	0
		7	1	0	0	0
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=9$	12	5	5	4	3
		11	4	3	3	2
		10	3	2	2	1
		9	2	2	1	0
		8	1	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=8$	12	5	4	3	3
		11	3	3	2	2
		10	2	2	1	1
		9	2	1	1	0
		8	1	1	0	0
		7	0	0	—	—
		6	0	0	—	—
	$C+D=7$	12	4	3	3	2
		11	3	2	2	1
		10	2	1	1	0
		9	1	1	0	0
		8	1	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—

Таблица D (продолжение)

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=12$	$C+D=6$	12	3	3	2	2
		11	2	2	1	1
		10	1	1	0	0
		9	1	0	0	0
		8	0	0	—	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=5$	12	2	2	1	1
		11	1	1	1	0
		10	1	0	0	0
		9	0	0	0	—
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	$C+D=4$	12	2	1	1	0
		11	1	0	0	0
		10	0	0	0	—
		9	0	0	—	—
		8	0	—	—	—
	$C+D=3$	12	1	0	0	0
		11	0	0	0	—
		10	0	0	—	—
		9	0	—	—	—
	$C+D=2$	12	0	0	—	—
		11	0	—	—	—
$A+B=13$	$C+D=13$	13	9	8	7	6
		12	7	6	5	4
		11	6	5	4	3
		10	4	4	3	2
		9	3	3	2	1
		8	2	2	1	0
		7	2	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=12$	13	8	7	6	5
		12	6	5	5	4
		11	5	4	3	3
		10	4	3	2	2
		9	3	2	1	1
		8	2	1	1	0
		7	1	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=13$	$C+D=11$	13	7	6	5	5
		12	6	5	4	3
		11	4	4	3	2
		10	3	3	2	1
		9	3	2	1	1
		8	2	1	0	0
		7	1	0	0	0
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=10$	13	6	6	5	4
		12	5	4	3	3
		11	4	3	2	2
		10	3	2	1	1
		9	2	1	1	0
		8	1	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=9$	13	5	5	4	4
		12	4	4	3	2
		11	3	3	2	1
		10	2	2	1	1
		9	2	1	0	0
		8	1	1	0	0
		7	0	0	—	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=8$	13	5	4	3	3
		12	4	3	2	2
		11	3	2	1	1
		10	2	1	1	0
		9	1	1	0	0
		8	1	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=7$	13	4	3	3	2
		12	3	2	2	1
		11	2	2	1	1
		10	1	1	0	0
		9	1	0	0	0
		8	0	0	—	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—

Таблица D (продолжение)

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=13$	$C+D=6$	13	3	3	2	2
		12	2	2	1	1
		11	2	1	1	0
		10	1	1	0	0
		9	1	0	0	—
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	$C+D=5$	13	2	2	1	1
		12	2	1	1	0
		11	1	1	0	0
		10	1	0	0	—
		9	0	0	—	—
		8	0	—	—	—
	$C+D=4$	13	2	1	1	0
		12	1	1	0	0
		11	0	0	0	—
		10	0	0	—	—
		9	0	—	—	—
	$C+D=3$	13	1	1	0	0
		12	0	0	0	—
		11	0	0	—	—
		10	0	—	—	—
	$C+D=2$	13	0	0	0	—
		12	0	—	—	—
$A+B=14$	$C+D=14$	14	10	9	8	7
		13	8	7	6	5
		12	6	6	5	4
		11	5	4	3	3
		10	4	3	2	2
		9	3	2	2	1
		8	2	2	1	0
		7	1	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=14$	$C+D=13$	14	9	8	7	6
		13	7	6	5	5
		12	6	5	4	3
		11	5	4	3	2
		10	4	3	2	2
		9	3	2	1	1
		8	2	1	1	0
		7	1	1	0	0
		6	1	0	—	—
		5	0	0	—	—
	$C+D=12$	14	8	7	6	6
		13	6	6	5	4
		12	5	4	4	3
		11	4	3	3	2
		10	3	3	2	1
		9	2	2	1	1
		8	2	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=11$	14	7	6	6	5
		13	6	5	4	4
		12	5	4	3	3
		11	4	3	2	2
		10	3	2	1	1
		9	2	1	1	0
		8	1	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	$C+D=10$	14	6	6	5	4
		13	5	4	4	3
		12	4	3	3	2
		11	3	3	2	1
		10	2	2	1	1
		9	2	1	0	0
		8	1	1	0	0
		7	0	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—

Таблица D (продолжение)

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=14$	$C+D=9$	14	6	5	4	4
		13	4	4	3	3
		12	3	3	2	2
		11	3	2	1	1
		10	2	1	1	0
		9	1	1	0	0
		8	1	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=8$	14	5	4	4	3
		13	4	3	2	2
		12	3	2	2	1
		11	2	2	1	1
		10	2	1	0	0
		9	1	0	0	0
		8	0	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	$C+D=7$	14	4	3	3	2
		13	3	2	2	1
		12	2	2	1	1
		11	2	1	1	0
		10	1	1	0	0
		9	1	0	0	—
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	$C+D=6$	14	3	3	2	2
		13	2	2	1	1
		12	2	1	1	0
		11	1	1	0	0
		10	1	0	0	—
		9	0	0	—	—
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	$C+D=5$	14	2	2	1	1
		13	2	1	1	0
		12	1	1	0	0
		11	1	0	0	0
		10	0	0	—	—
		9	0	0	—	—
		8	0	—	—	—

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
$A+B=14$	$C+D=4$	14	2	1	1	1
		13	1	1	0	0
		12	1	0	0	0
		11	0	0	—	—
		10	0	0	—	—
		9	0	—	—	—
	$C+D=3$	14	1	1	0	0
		13	0	0	0	—
		12	0	0	—	—
		11	0	—	—	—
	$C+D=2$	14	0	0	0	—
		13	0	0	—	—
		12	0	—	—	—
$A+B=15$	$C+D=15$	15	11	10	9	8
		14	9	8	7	6
		13	7	6	5	5
		12	6	5	4	4
		11	5	4	3	3
		10	4	3	2	2
		9	3	2	1	1
		8	2	1	1	0
		7	1	1	0	0
		6	1	0	0	—
		5	0	0	—	—
		4	0	—	—	—
	$C+D=14$	15	10	9	8	7
		14	8	7	6	6
		13	7	6	5	4
		12	6	5	4	3
		11	5	4	3	2
		10	4	3	2	1
		9	3	2	1	1
		8	2	1	1	0
		7	1	1	0	0
		6	1	0	—	—
		5	0	—	—	—

Таблица D (продолжение)

Суммы по строкам A + B	Суммы по строкам C + D	B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
A + B = 15	C + D = 13	15	9	8	7	7
		14	7	7	6	5
		13	6	5	4	4
		12	5	4	3	3
		11	4	3	2	2
		10	3	2	2	1
		9	2	2	1	0
		8	2	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	C + D = 12	15	8	7	7	6
		14	7	6	5	4
		13	6	5	4	3
		12	5	4	3	2
		11	4	3	2	2
		10	3	2	1	1
		9	2	1	1	0
		8	1	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	C + D = 11	15	7	7	6	5
		14	6	5	4	4
		13	5	4	3	3
		12	4	3	2	2
		11	3	2	2	1
		10	2	2	1	1
		9	2	1	0	0
		8	1	1	0	0
		7	1	0	0	—
		6	0	0	—	—
		5	0	—	—	—
	C + D = 10	15	6	6	5	5
		14	5	5	4	3
		13	4	4	3	2
		12	3	3	2	2
		11	3	2	1	1
		10	2	1	1	0
		9	1	1	0	0
		8	1	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—

Суммы по строкам A + B	Суммы по строкам C + D	B (или A)*	Уровень значимости 0,05	0,025	0,01	0,005
A + B = 15	C + D = 9	15	6	5	4	4
		14	5	4	3	3
		13	4	3	2	2
		12	3	2	2	1
		11	2	2	1	1
		10	2	1	0	0
		9	1	1	0	0
		8	1	0	0	—
		7	0	0	—	—
		6	0	—	—	—
	C + D = 8	15	5	4	4	3
		14	4	3	3	2
		13	3	2	2	1
		12	2	2	1	1
		11	2	1	1	0
		10	1	1	0	0
		9	1	0	0	—
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
		6	0	—	—	—
	C + D = 7	15	4	4	3	3
		14	3	3	2	2
		13	2	2	1	1
		12	2	1	1	0
		11	1	1	0	0
		10	1	0	0	0
		9	0	0	—	—
		8	0	0	—	—
		7	0	—	—	—
	C + D = 6	15	3	3	2	2
		14	2	2	1	1
		13	2	1	1	0
		12	1	1	0	0
		11	1	0	0	0
		10	0	0	0	—
		9	0	0	—	—
		8	0	—	—	—
	C + D = 5	15	2	2	2	1
		14	2	1	1	1
		13	1	1	0	0
		12	1	0	0	0
		11	0	0	0	—
		10	0	0	—	—
		9	0	—	—	—

Таблица D (продолжение)

Суммы по строкам		B (или A)*	Уровень значимости			
			0,05	0,025	0,01	0,005
$A + B = 15$	$C + D = 4$	15	2	1	1	1
		14	1	1	0	0
		13	1	0	0	0
		12	0	0	0	—
		11	0	0	—	—
		10	0	—	—	—
	$C + D = 3$	15	1	1	0	0
		14	0	0	0	0
		13	0	0	—	—
		12	0	0	—	—
		11	0	—	—	—
	$C + D = 2$	15	0	0	0	—
		14	0	0	—	—
		13	0	—	—	—

* Если в среднем столбце находятся значения B, то уровни значимости приводятся для D. Если вместо B используется A, то уровни значимости приводятся для C.

Таблица E.

Объем выборки (N)	Уровень значимости для $D = \text{maximum}\,\lvert F_0(X) - S_N(X)\rvert$				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,19	0,21	0,23	0,27
свыше 35	$\frac{1,07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

Таблица F

n_1/n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
	—	—	—	9	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	—	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
	—	—	9	10	10	11	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
	—	—	9	10	11	12	12	13	13	13	13	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
	—	—	—	11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15	—	—	—	—	—
8	—	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
	—	—	—	11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9	—	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
	—	—	—	—	13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10	—	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
	—	—	—	—	13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11	—	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
	—	—	—	—	13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
	—	—	—	—	13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
	—	—	—	—	—	15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
	—	—	—	—	—	15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
	—	—	—	—	—	15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
	—	—	—	—	—	—	17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
	—	—	—	—	—	—	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
	—	—	—	—	—	—	17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
	—	—	—	—	—	—	17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14
	—	—	—	—	—	—	17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

Таблица G.

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
−3,70	00,01	49,99	00,01	0,0004
−3,60	00,02	49,98	00,02	0,0006
−3,50	00,02	49,98	00,02	0,0009
−3,40	00,03	49,97	00,03	0,0012
−3,30	00,05	49,95	00,05	0,0017
−3,25	00,06	49,95	00,06	0,0020
−3,24	00,06	49,94	00,06	0,0021
−3,23	00,06	49,94	00,06	0,0022
−3,22	00,06	49,94	00,06	0,0022
−3,21	00,07	49,93	00,07	0,0023
−3,20	00,07	49,93	00,07	0,0024
−3,19	00,07	49,93	00,07	0,0025
−3,18	00,07	49,93	00,07	0,0025
−3,17	00,08	49,92	00,08	0,0026
−3,16	00,08	49,92	00,08	0,0027
−3,15	00,08	49,92	00,08	0,0028
−3,14	00,08	49,92	00,08	0,0029
−3,13	00,09	49,91	00,09	0,0030
−3,12	00,09	49,91	00,09	0,0031
−3,11	00,09	49,91	00,09	0,0032
−3,10	00,10	49,90	00,10	0,0033
−3,09	00,10	49,90	00,10	0,0034
−3,08	00,10	49,90	00,10	0,0035
−3,07	00,11	49,89	00,11	0,0036
−3,06	00,11	49,89	00,11	0,0037
−3,05	00,11	49,89	00,11	0,0038
−3,04	00,12	49,88	00,12	0,0039
−3,03	00,12	49,88	00,12	0,0040
−3,02	00,13	49,87	00,13	0,0042
−3,01	00,13	49,87	00,13	0,0043
−3,00	00,13	49,87	00,13	0,0044
−2,99	00,14	49,86	00,14	0,0046
−2,98	00,14	49,86	00,14	0,0047
−2,97	00,15	49,85	00,15	0,0048
−2,96	00,15	49,85	00,15	0,0050
−2,95	00,16	49,84	00,16	0,0051
−2,94	00,16	49,84	00,16	0,0053
−2,93	00,17	49,83	00,17	0,0055
−2,92	00,18	49,82	00,18	0,0056
−2,91	00,18	49,82	00,18	0,0058
−2,90	00,19	49,81	00,19	0,0060
−2,89	00,19	49,81	00,19	0,0061
−2,88	00,20	49,80	00,20	0,0063
−2,87	00,21	49,79	00,21	0,0065
−2,86	00,21	49,79	00,21	0,0067
−2,85	00,22	49,78	00,22	0,0069
−2,84	00,23	49,77	00,23	0,0071
−2,83	00,23	49,77	00,23	0,0073
−2,82	00,24	49,76	00,24	0,0075
−2,81	00,25	49,75	00,25	0,0077

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z^1	D Высота ординаты в точке z
−2,80	00,26	49,74	00,26	0,0079
−2,79	00,26	49,74	00,26	0,0081
−2,78	00,27	49,73	00,27	0,0084
−2,77	00,28	49,72	00,28	0,0086
−2,76	00,29	49,71	00,29	0,0088
−2,75	00,30	49,70	00,30	0,0091
−2,74	00,31	49,69	00,31	0,0093
−2,73	00,32	49,68	00,32	0,0096
−2,72	00,33	49,67	00,33	0,0099
−2,71	00,34	49,66	00,34	0,0101
−2,70	00,35	49,65	00,35	0,0104
−2,69	00,36	49,64	00,36	0,0107
−2,68	00,37	49,63	00,37	0,0110
−2,67	00,38	49,62	00,38	0,0113
−2,66	00,39	49,61	00,39	0,0116
−2,65	00,40	49,60	00,40	0,0119
−2,64	00,41	49,59	00,41	0,0122
−2,63	00,43	49,57	00,43	0,0126
−2,62	00,44	49,56	00,44	0,0129
−2,61	00,45	49,55	00,45	0,0132
−2,60	00,47	49,53	00,47	0,0136
−2,59	00,48	49,52	00,48	0,0139
−2,58	00,49	49,51	00,49	0,0143
−2,57	00,51	49,49	00,51	0,0147
−2,56	00,52	49,48	00,52	0,0151
−2,55	00,54	49,46	00,54	0,0154
−2,54	00,55	49,45	00,55	0,0158
−2,53	00,57	49,43	00,57	0,0163
−2,52	00,59	49,41	00,59	0,0167
−2,51	00,60	49,40	00,60	0,0171
−2,50	00,62	49,38	00,62	0,0175
−2,49	00,64	49,36	00,64	0,0180
−2,48	00,66	49,34	00,66	0,0184
−2,47	00,68	49,32	00,68	0,0189
−2,46	00,69	49,31	00,69	0,0194
−2,45	00,71	49,29	00,71	0,0198
−2,44	00,73	49,27	00,73	0,0203
−2,43	00,75	49,25	00,75	0,0208
−2,42	00,78	49,22	00,78	0,0213
−2,41	00,80	49,20	00,80	0,0219
−2,40	00,82	49,18	00,82	0,0224
−2,39	00,84	49,16	00,84	0,0229
−2,38	00,87	49,13	00,87	0,0235
−2,37	00,89	49,11	00,89	0,0241
−2,36	00,91	49,09	00,91	0,0246
−2,35	00,94	49,06	00,94	0,0252
−2,34	00,96	49,04	00,96	0,0258
−2,33	00,99	49,01	00,99	0,0264
−2,32	01,02	48,98	01,02	0,0270
−2,31	01,04	48,96	01,04	0,0277

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
−2,30	01,07	48,93	01,07	0,0283
−2,29	01,10	48,90	01,10	0,0290
−2,28	01,13	48,87	01,13	0,0297
−2,27	01,16	48,84	01,16	0,0303
−2,26	01,19	48,81	01,19	0,0310
−2,25	01,22	48,78	01,22	0,0317
−2,24	01,25	48,75	01,25	0,0325
−2,23	01,29	48,71	01,29	0,0332
−2,22	01,32	48,68	01,32	0,0339
−2,21	01,36	48,64	01,36	0,0347
−2,20	01,39	48,61	01,39	0,0355
−2,19	01,43	48,57	01,43	0,0363
−2,18	01,46	48,54	01,46	0,0371
−2,17	01,50	48,50	01,50	0,0379
−2,16	01,54	48,46	01,54	0,0387
−2,15	01,58	48,42	01,58	0,0396
−2,14	01,62	48,38	01,62	0,0404
−2,13	01,66	48,34	01,66	0,0413
−2,12	01,70	48,30	01,70	0,0422
−2,11	01,74	48,26	01,74	0,0431
−2,10	01,79	48,21	01,79	0,0440
−2,09	01,83	48,17	01,83	0,0449
−2,08	01,88	48,12	01,88	0,0459
−2,07	01,92	48,08	01,92	0,0468
−2,06	01,97	48,03	01,97	0,0478
−2,05	02,02	47,98	02,02	0,0488
−2,04	02,07	47,93	02,07	0,0498
−2,03	02,12	47,88	02,12	0,0508
−2,02	02,17	47,83	02,17	0,0519
−2,01	02,22	47,78	02,22	0,0529
−2,00	02,28	47,72	02,28	0,0540
−1,99	02,33	47,67	02,33	0,0551
−1,98	02,39	47,61	02,39	0,0562
−1,97	02,44	47,56	02,44	0,0573
−1,96	02,50	47,50	02,50	0,0584
−1,95	02,56	47,44	02,56	0,0596
−1,94	02,62	47,38	02,62	0,0608
−1,93	02,68	47,32	02,68	0,0620
−1,92	02,74	47,26	02,74	0,0632
−1,91	02,81	47,19	02,81	0,0644
−1,90	02,87	47,13	02,87	0,0656
−1,89	02,94	47,06	02,94	0,0669
−1,88	03,01	46,99	03,01	0,0681
−1,87	03,07	46,93	03,07	0,0694
−1,86	03,14	46,86	03,14	0,0707
−1,85	03,22	46,78	03,22	0,0721
−1,84	03,29	46,71	03,29	0,0734
−1,83	03,36	46,64	03,36	0,0748
−1,82	03,44	46,56	03,44	0,0761
−1,81	03,51	46,49	03,51	0,0775

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
−1,80	03,59	46,41	03,59	0,0790
−1,79	03,67	46,33	03,67	0,0804
−1,78	03,75	46,25	03,75	0,0818
−1,77	03,84	46,16	03,84	0,0833
−1,76	03,92	46,08	03,92	0,0848
−1,75	04,01	45,99	04,01	0,0863
−1,74	04,09	45,91	04,09	0,0878
−1,73	04,18	45,82	04,18	0,0893
−1,72	04,27	45,73	04,27	0,0909
−1,71	04,36	45,64	04,36	0,0925
−1,70	04,46	45,54	04,46	0,0940
−1,69	04,55	45,45	04,55	0,0957
−1,68	04,65	45,35	04,65	0,0973
−1,67	04,75	45,25	04,75	0,0989
−1,66	04,85	45,15	04,85	0,1006
−1,65	04,95	45,05	04,95	0,1023
−1,64	05,05	44,95	05,05	0,1040
−1,63	05,16	44,84	05,16	0,1057
−1,62	05,26	44,74	05,26	0,1074
−1,61	05,37	44,63	05,37	0,1092
−1,60	05,48	44,52	05,48	0,1109
−1,59	05,59	44,41	05,59	0,1127
−1,58	05,71	44,29	05,71	0,1145
−1,57	05,82	44,18	05,82	0,1163
−1,56	05,94	44,06	05,94	0,1182
−1,55	06,06	43,94	06,06	0,1200
−1,54	06,18	43,82	06,18	0,1219
−1,53	06,30	43,70	06,30	0,1238
−1,52	06,43	43,57	06,43	0,1257
−1,51	06,55	43,45	06,55	0,1276
−1,50	06,68	43,32	06,68	0,1295
−1,49	06,81	43,19	06,81	0,1315
−1,48	06,94	43,06	06,94	0,1334
−1,47	07,08	42,92	07,08	0,1354
−1,46	07,21	42,79	07,21	0,1374
−1,45	07,35	42,65	07,35	0,1394
−1,44	07,49	42,51	07,49	0,1415
−1,43	07,64	42,36	07,64	0,1435
−1,42	07,78	42,22	07,78	0,1456
−1,41	07,93	42,07	07,93	0,1476
−1,40	08,08	41,92	08,08	0,1497
−1,39	08,23	41,77	08,23	0,1518
−1,38	08,38	41,62	08,38	0,1539
−1,37	08,53	41,47	08,53	0,1561
−1,36	08,69	41,31	08,69	0,1582
−1,35	08,85	41,15	08,85	0,1604
−1,34	09,01	40,99	09,01	0,1626
−1,33	09,18	40,82	09,18	0,1647
−1,32	09,34	40,66	09,34	0,1669
−1,31	09,51	40,49	09,51	0,1691

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
-1,30	09,68	40,32	09,68	0,1714
-1,29	09,85	40,15	09,85	0,1736
-1,28	10,03	39,96	10,03	0,1758
-1,27	10,20	39,80	10,20	0,1781
-1,26	10,38	39,62	10,38	0,1804
-1,25	10,56	39,44	10,56	0,1826
-1,24	10,75	39,25	10,75	0,1849
-1,23	10,93	39,07	10,93	0,1872
-1,22	11,12	38,88	11,12	0,1895
-1,21	11,31	38,69	11,31	0,1919
-1,20	11,51	38,49	11,51	0,1942
-1,19	11,70	38,30	11,70	0,1965
-1,18	11,90	38,10	11,90	0,1989
-1,17	12,10	37,90	12,10	0,2012
-1,16	12,30	37,70	12,30	0,2036
-1,15	12,51	37,49	12,51	0,2059
-1,14	12,71	37,29	12,71	0,2083
-1,13	12,92	37,08	12,92	0,2107
-1,12	13,14	36,86	13,14	0,2131
-1,11	13,35	36,65	13,35	0,2155
-1,10	13,57	36,43	13,57	0,2179
-1,09	13,79	36,21	13,79	0,2203
-1,08	14,01	35,99	14,01	0,2227
-1,07	14,23	35,77	14,23	0,2251
-1,06	14,46	35,54	14,46	0,2275
-1,05	14,69	35,31	14,69	0,2299
-1,04	14,92	35,08	14,92	0,2323
-1,03	15,15	34,85	15,15	0,2347
-1,02	15,39	34,61	15,39	0,2371
-1,01	15,62	34,38	15,62	0,2396
-1,00	15,87	34,13	15,87	0,2420
-0,99	16,11	33,89	16,11	0,2444
-0,98	16,35	33,65	16,35	0,2468
-0,97	16,60	33,40	16,60	0,2492
-0,96	16,85	33,15	16,85	0,2516
-0,95	17,11	32,89	17,11	0,2541
-0,94	17,36	32,64	17,36	0,2565
-0,93	17,62	32,38	17,62	0,2589
-0,92	17,88	32,12	17,88	0,2613
-0,91	18,14	31,86	18,14	0,2637
-0,90	18,41	31,59	18,41	0,2661
-0,89	18,67	31,33	18,67	0,2685
-0,88	18,94	31,06	18,94	0,2709
-0,87	19,22	30,78	19,22	0,2732
-0,86	19,49	30,51	19,49	0,2756
-0,85	19,77	30,23	19,77	0,2780
-0,84	20,05	29,95	20,05	0,2803
-0,83	20,33	29,67	20,33	0,2827
-0,82	20,61	29,39	20,61	0,2850
-0,81	20,90	29,10	20,90	0,2874

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
−0,80	21,19	28,81	21,19	0,2897
−0,79	21,48	28,52	21,48	0,2920
−0,78	21,77	28,23	21,77	0,2943
−0,77	22,06	27,94	22,06	0,2966
−0,76	22,36	27,64	22,36	0,2989
−0,75	22,66	27,34	22,66	0,3011
−0,74	22,96	27,04	22,96	0,3034
−0,73	23,27	26,73	23,27	0,3056
−0,72	23,58	26,42	23,58	0,3079
−0,71	23,89	26,11	23,89	0,3101
−0,70	24,20	25,80	24,20	0,3123
−0,69	24,51	25,49	24,51	0,3144
−0,68	24,83	25,17	24,83	0,3166
−0,67	25,14	24,86	25,14	0,3187
−0,66	25,46	24,54	25,46	0,3209
−0,65	25,78	24,22	25,78	0,3230
−0,64	26,11	23,89	26,11	0,3251
−0,63	26,43	23,56	26,43	0,3271
−0,62	26,76	23,24	26,76	0,3292
−0,61	27,09	22,91	27,09	0,3312
−0,60	27,43	22,57	27,43	0,3332
−0,59	27,76	22,24	27,76	0,3352
−0,58	28,10	21,90	28,10	0,3372
−0,57	28,43	21,57	28,43	0,3391
−0,56	28,77	21,23	28,77	0,3410
−0,55	29,12	20,88	29,12	0,3429
−0,54	29,46	20,54	29,46	0,3448
−0,53	29,81	20,19	29,81	0,3467
−0,52	30,15	19,85	30,15	0,3485
−0,51	30,50	19,50	30,50	0,3503
−0,50	30,85	19,15	30,85	0,3521
−0,49	31,21	18,79	31,21	0,3538
−0,48	31,56	18,44	31,56	0,3555
−0,47	31,92	18,08	31,92	0,3572
−0,46	32,28	17,72	32,28	0,3589
−0,45	32,64	17,36	32,64	0,3605
−0,44	33,00	17,00	33,00	0,3621
−0,43	33,36	16,64	33,36	0,3637
−0,42	33,72	16,28	33,72	0,3653
−0,41	34,09	15,91	34,09	0,3668
−0,40	34,46	15,54	34,46	0,3683
−0,39	34,83	15,17	34,83	0,3697
−0,38	35,20	14,80	35,20	0,3712
−0,37	35,57	14,43	35,57	0,3725
−0,36	35,94	14,06	35,94	0,3739
−0,35	36,32	13,68	36,32	0,3752
−0,34	36,69	13,31	36,69	0,3765
−0,33	37,07	12,93	37,07	0,3778
−0,32	37,45	12,55	37,45	0,3790
−0,31	37,83	12,17	37,83	0,3802

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z[1]	(D) Высота ординаты в точке z
−0,30	38,21	11,79	38,21	0,3814
−0,29	38,59	11,41	38,59	0,3825
−0,28	38,97	11,03	38,97	0,3836
−0,27	39,36	10,64	39,36	0,3847
−0,26	39,74	10,26	39,74	0,3857
−0,25	40,13	09,87	40,13	0,3867
−0,24	40,52	09,48	40,52	0,3876
−0,23	40,90	09,10	40,90	0,3885
−0,22	41,29	08,71	41,29	0,3894
−0,21	41,68	08,32	41,68	0,3902
−0,20	42,07	07,93	42,07	0,3910
−0,19	42,47	07,53	42,47	0,3918
−0,18	44,86	07,14	42,86	0,3925
−0,17	43,25	06,75	43,25	0,3932
−0,16	43,64	06,36	43,64	0,3939
−0,15	44,04	05,96	44,04	0,3945
−0,14	44,43	05,57	44,43	0,3951
−0,13	44,83	05,17	44,83	0,3956
−0,12	45,22	04,78	45,22	0,3961
−0,11	45,62	04,38	45,62	0,3965
−0,10	46,02	03,98	46,02	0,3970
−0,09	46,41	03,59	46,41	0,3973
−0,08	46,81	03,19	46,81	0,3977
−0,07	47,21	02,79	47,21	0,3980
−0,06	47,61	02,39	47,61	0,3982
−0,05	48,01	01,99	48,01	0,3984
−0,04	48,40	01,60	48,40	0,3986
−0,03	48,80	01,20	48,80	0,3988
−0,02	49,20	00,80	49,20	0,3989
−0,01	49,60	00,40	49,60	0,3989
0,00	50,00	00,00	50,00	0,3989
0,01	50,40	00,40	49,60	0,3989
0,02	50,80	00,80	49,20	0,3989
0,03	51,20	01,20	48,80	0,3988
0,04	51,60	01,60	48,40	0,3986
0,05	51,99	01,99	48,01	0,3984
0,06	52,39	02,39	47,61	0,3982
0,07	52,79	02,79	47,21	0,3980
0,08	53,19	03,19	46,81	0,3977
0,09	53,59	03,59	46,41	0,3973
0,10	53,98	03,98	46,02	0,3970
0,11	54,38	04,38	45,62	0,3965
0,12	54,78	04,78	45,22	0,3961
0,13	55,17	05,17	44,83	0,3956
0,14	55,57	05,57	44,43	0,3951
0,15	55,96	05,96	44,04	0,3945
0,16	56,36	06,36	43,64	0,3939
0,17	56,75	06,75	43,25	0,3932
0,18	57,14	07,14	42,86	0,3925
0,19	57,53	07,53	42,47	0,3918

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
0,20	57,93	07,93	42,07	0,3910
0,21	58,32	08,32	41,68	0,3902
0,22	58,71	08,71	41,29	0,3894
0,23	59,10	09,10	40,90	0,3885
0,24	59,48	09,48	40,52	0,3876
0,25	59,87	09,87	40,13	0,3867
0,26	60,26	10,26	39,74	0,3857
0,27	60,64	10,64	39,36	0,3847
0,28	61,03	11,03	38,97	0,3836
0,29	61,41	11,41	38,59	0,3825
0,30	61,79	11,79	38,21	0,3814
0,31	62,17	12,17	37,83	0,3802
0,32	62,55	12,55	37,45	0,3790
0,33	62,93	12,93	37,07	0,3778
0,34	63,31	13,31	36,69	0,3765
0,35	63,68	13,68	36,32	0,3752
0,36	64,06	14,06	35,94	0,3739
0,37	64,43	14,43	35,57	0,3725
0,38	64,80	14,80	35,20	0,3712
0,39	65,17	15,17	34,83	0,3697
0,40	65,54	15,54	34,46	0,3683
0,41	65,91	15,91	34,09	0,3668
0,42	66,28	16,28	33,72	0,3653
0,43	66,64	16,64	33,36	0,3637
0,44	67,00	17,00	33,00	0,3621
0,45	67,36	17,36	32,64	0,3605
0,46	67,72	17,72	32,28	0,3589
0,47	68,08	18,08	31,92	0,3572
0,48	68,44	18,44	31,56	0,3555
0,49	68,79	18,79	31,21	0,3538
0,50	69,15	19,15	30,85	0,3521
0,51	69,50	19,50	30,50	0,3503
0,52	69,85	19,85	30,15	0,3485
0,53	70,19	20,19	29,81	0,3467
0,54	70,54	20,54	29,46	0,3448
0,55	70,88	20,88	29,12	0,3429
0,56	71,23	21,23	28,77	0,3410
0,57	71,57	21,57	28,43	0,3391
0,58	71,90	21,90	28,10	0,3372
0,59	72,24	22,24	27,76	0,3352
0,60	72,57	22,57	27,43	0,3332
0,61	72,91	22,91	27,09	0,3312
0,62	73,24	23,24	26,76	0,3292
0,63	73,57	23,57	26,43	0,3271
0,64	73,89	23,89	26,11	0,3251
0,65	74,22	24,22	25,78	0,3230
0,66	74,54	24,54	25,46	0,3209
0,67	74,86	24,86	25,14	0,3187
0,68	75,17	25,17	24,83	0,3166
0,69	75,49	25,49	24,51	0,3144

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
0,70	75,80	25,80	24,20	0,3123
0,71	76,11	26,11	23,89	0,3101
0,72	76,42	26,42	23,58	0,3079
0,73	76,73	26,73	23,27	0,3056
0,74	77,04	27,04	22,96	0,3034
0,75	77,34	27,34	22,66	0,3011
0,76	77,64	27,64	22,36	0,2989
0,77	77,94	27,94	22,06	0,2966
0,78	78,23	28,23	21,77	0,2943
0,79	78,52	28,52	21,48	0,2920
0,80	78,81	28,81	21,19	0,2897
0,81	79,10	29,10	20,90	0,2874
0,82	79,39	29,39	20,61	0,2850
0,83	79,67	29,67	20,33	0,2827
0,84	79,95	29,95	20,05	0,2803
0,85	80,23	30,23	19,77	0,2780
0,86	80,51	30,51	19,49	0,2756
0,87	80,78	30,78	19,22	0,2732
0,88	81,06	31,06	18,94	0,2709
0,89	81,33	31,33	18,67	0,2685
0,90	81,59	31,59	18,41	0,2661
0,91	81,86	31,86	18,14	0,2637
0,92	82,12	32,12	17,88	0,2613
0,93	82,38	32,38	17,62	0,2589
0,94	82,64	32,64	17,36	0,2565
0,95	82,89	32,89	17,11	0,2541
0,96	83,15	33,15	16,85	0,2516
0,97	83,40	33,40	16,60	0,2492
0,98	83,65	33,65	16,35	0,2468
0,99	83,89	33,80	16,11	0,2444
1,00	84,13	34,13	15,87	0,2420
1,01	84,38	34,38	15,62	0,2396
1,02	84,61	34,61	15,39	0,2371
1,03	84,85	34,85	15,15	0,2347
1,04	85,08	35,08	14,92	0,2323
1,05	85,31	35,31	14,69	0,2299
1,06	85,54	35,54	14,46	0,2275
1,07	85,77	35,77	14,23	0,2251
1,08	85,99	35,99	14,01	0,2227
1,09	86,21	36,21	13,79	0,2203
1,10	86,43	36,43	13,57	0,2179
1,11	86,65	36,65	13,35	0,2155
1,12	86,86	36,86	13,14	0,2131
1,13	87,08	37,08	12,92	0,2107
1,14	87,29	37,29	12,71	0,2083
1,15	87,49	37,49	12,51	0,2059
1,16	87,70	37,70	12,30	0,2036
1,17	87,90	37,90	12,10	0,2012
1,18	88,10	38,10	11,90	0,1989
1,19	88,30	38,30	11,70	0,1965

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z!	(D) Высота ординаты в точке z
1,20	88,49	38,49	11,51	0,1942
1,21	88,69	38,69	11,31	0,1919
1,22	88,88	38,88	11,12	0,1895
1,23	89,07	39,07	10,93	0,1872
1,24	89,25	39,25	10,75	0,1849
1,25	89,44	39,44	10,56	0,1826
1,26	89,62	39,62	10,38	0,1804
1,27	89,80	39,80	10,20	0,1781
1,28	89,97	39,97	10,03	0,1758
1,29	90,15	40,15	09,85	0,1736
1,30	90,32	40,32	09,68	0,1714
1,31	90,49	40,49	09,51	0,1691
1,32	90,66	40,66	09,34	0,1669
1,33	90,82	40,82	09,18	0,1647
1,34	90,99	40,99	09,01	0,1626
1,35	91,15	41,15	08,85	0,1604
1,36	91,31	41,31	08,69	0,1582
1,37	91,47	41,47	08,53	0,1561
1,38	91,62	41,62	08,38	0,1539
1,39	91,77	41,77	08,23	0,1518
1,40	91,92	41,92	08,08	0,1497
1,41	92,07	42,07	07,93	0,1476
1,42	92,22	42,22	07,78	0,1456
1,43	92,36	42,36	07,64	0,1435
1,44	92,51	42,51	07,49	0,1415
1,45	92,65	42,65	07,35	0,1394
1,46	92,79	42,79	07,21	0,1374
1,47	92,92	42,92	07,08	0,1354
1,48	93,06	43,06	06,94	0,1334
1,49	93,19	43,19	06,81	0,1315
1,50	93,32	43,32	06,68	0,1295
1,51	93,45	43,45	06,55	0,1276
1,52	93,57	43,57	06,43	0,1257
1,53	93,70	43,70	06,30	0,1238
1,54	93,82	43,82	06,18	0,1219
1,55	93,94	43,94	06,06	0,1200
1,56	94,06	44,06	05,94	0,1182
1,57	94,18	44,18	05,82	0,1163
1,58	94,29	44,29	05,71	0,1145
1,59	94,41	44,41	05,59	0,1127
1,60	94,52	44,52	05,48	0,1109
1,61	94,63	44,63	05,37	0,1092
1,62	94,74	44,74	05,26	0,1074
1,63	94,84	44,84	05,16	0,1057
1,64	94,95	44,95	05,05	0,1040
1,65	95,05	45,05	04,95	0,1023
1,66	95,15	45,15	04,85	0,1006
1,67	95,25	45,25	04,75	0,0989
1,68	95,35	45,35	04,65	0,0973
1,69	95,45	45,45	04,55	0,0957

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z'	(D) Высота ординаты в точке z
1,70	95,54	45,54	04,46	0,0940
1,71	95,64	45,64	04,36	0,0925
1,72	95,73	45,73	04,27	0,0909
1,73	95,82	45,82	04,18	0,0893
1,74	95,91	45,91	04,09	0,0878
1,75	95,99	45,99	04,01	0,0863
1,76	96,08	46,08	03,92	0,0848
1,77	96,16	46,16	03,84	0,0833
1,78	96,25	46,25	03,75	0,0818
1,79	96,33	46,33	03,67	0,0804
1,80	96,41	46,41	03,59	0,0790
1,81	96,49	46,49	03,51	0,0775
1,82	96,56	46,56	03,44	0,0761
1,83	96,64	46,64	03,36	0,0748
1,84	96,71	46,71	03,29	0,0734
1,85	96,78	46,78	03,22	0,0721
1,86	96,86	46,86	03,14	0,0707
1,87	96,93	46,93	03,07	0,0694
1,88	96,99	46,99	03,01	0,0681
1,89	97,06	47,06	02,94	0,0669
1,90	97,13	47,13	02,87	0,0656
1,91	97,19	47,19	02,81	0,0644
1,92	97,26	47,26	02,74	0,0632
1,93	97,32	47,32	02,68	0,0620
1,94	97,38	47,38	02,62	0,0608
1,95	97,44	47,44	02,56	0,0596
1,96	97,50	47,50	02,50	0,0584
1,97	97,56	47,56	02,44	0,0573
1,98	97,61	47,61	02,39	0,0562
1,99	97,67	47,67	02,33	0,0551
2,00	97,72	47,72	02,28	0,0540
2,01	97,78	47,78	02,22	0,0529
2,02	97,83	47,83	02,17	0,0519
2,03	97,88	47,88	02,12	0,0508
2,04	97,93	47,93	02,07	0,0498
2,05	97,98	47,98	02,02	0,0488
2,06	98,03	48,03	01,97	0,0478
2,07	98,08	48,08	01,92	0,0468
2,08	98,12	48,12	01,88	0,0459
2,09	98,17	48,17	01,83	0,0449
2,10	98,21	48,21	01,79	0,0440
2,11	98,26	48,26	01,74	0,0431
2,12	98,30	48,30	01,70	0,0422
2,13	98,34	48,34	01,66	0,0413
2,14	98,38	48,38	01,62	0,0404
2,15	98,42	48,42	01,58	0,0396
2,16	98,46	48,46	01,54	0,0387
2,17	98,50	48,50	01,50	0,0379
2,18	98,54	48,54	01,46	0,0371
2,19	98,57	48,57	01,43	0,0363

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от *z*	(B) Процент площади между средним значением и *z*	(C) Процент площади за *z*[1]	(D) Высота ординаты в точке *z*
2,20	98,61	48,61	01,39	0,0355
2,21	98,64	48,64	01,36	0,0347
2,22	98,68	48,68	01,32	0,0339
2,23	98,71	48,71	01,29	0,0332
2,24	98,75	48,75	01,25	0,0325
2,25	98,78	48,78	01,22	0,0317
2,26	98,81	48,81	01,19	0,0310
2,27	98,84	48,84	01,16	0,0303
2,28	98,87	48,87	01,13	0,0297
2,29	98,90	48,90	01,10	0,0290
2,30	98,93	48,93	01,07	0,0283
2,31	98,96	48,96	01,04	0,0277
2,32	98,98	48,98	01,02	0,0270
2,33	99,01	49,01	00,99	0,0264
2,34	99,04	49,04	00,96	0,0258
2,35	99,06	49,06	00,94	0,0252
2,36	99,09	49,09	00,91	0,0246
2,37	99,11	49,11	00,89	0,0241
2,38	99,13	49,13	00,87	0,0235
2,39	99,16	49,16	00,84	0,0229
2,40	99,18	49,18	00,82	0,0224
2,41	99,20	49,20	00,80	0,0219
2,42	99,22	49,22	00,78	0,0213
2,43	99,25	49,25	00,75	0,0208
2,44	99,27	49,27	00,73	0,0203
2,45	99,29	49,29	00,71	0,0198
2,46	99,31	49,31	00,69	0,0194
2,47	99,32	49,32	00,68	0,0189
2,48	99,34	49,34	00,66	0,0184
2,49	99,36	49,36	00,64	0,0180
2,50	99,38	49,38	00,62	0,0175
2,51	99,40	49,40	00,60	0,0171
2,52	99,41	49,41	00,59	0,0167
2,53	99,43	49,43	00,57	0,0163
2,54	99,45	49,45	00,55	0,0158
2,55	99,46	49,46	00,54	0,0154
2,56	99,48	49,48	00,52	0,0151
2,57	99,49	49,49	00,51	0,0147
2,58	99,51	49,51	00,49	0,0143
2,59	99,52	49,52	00,48	0,0139
2,60	99,53	49,53	00,47	0,0136
2,61	99,55	49,55	00,45	0,0132
2,62	99,56	49,56	00,44	0,0129
2,63	99,57	49,57	00,43	0,0126
2,64	99,59	49,59	00,41	0,0122
2,65	99,60	49,60	00,40	0,0119
2,66	99,61	49,61	00,39	0,0116
2,67	99,62	49,62	00,38	0,0113
2,68	99,63	49,63	00,37	0,0110
2,69	99,64	49,64	00,36	0,0107

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z	(D) Высота ординаты в точке z
2,70	99,65	49,65	00,35	0,0104
2,71	99,66	49,66	00,34	0,0101
2,72	99,67	49,67	00,33	0,0099
2,73	99,68	49,68	00,32	0,0096
2,74	99,69	49,69	00,31	0,0093
2,75	99,70	49,70	00,30	0,0091
2,76	99,71	49,71	00,29	0,0088
2,77	99,72	49,72	00,28	0,0086
2,78	99,73	49,73	00,27	0,0084
2,79	99,74	49,74	00,26	0,0081
2,80	99,74	49,74	00,26	0,0079
2,81	99,75	49,75	00,25	0,0077
2,82	99,76	49,76	00,24	0,0075
2,83	99,77	49,77	00,23	0,0073
2,84	99,77	49,77	00,23	0,0071
2,85	99,78	49,78	00,22	0,0069
2,86	99,79	49,79	00,21	0,0067
2,87	99,79	49,79	00,21	0,0065
2,88	99,80	49,80	00,20	0,0063
2,89	99,81	49,81	00,19	0,0061
2,90	99,81	49,81	00,19	0,0060
2,91	99,82	49,82	00,18	0,0058
2,92	99,82	49,82	00,18	0,0056
2,93	99,83	49,83	00,17	0,0055
2,94	99,84	49,84	00,16	0,0053
2,95	99,84	49,84	00,16	0,0051
2,96	99,85	49,85	00,15	0,0051
2,97	99,85	49,85	00,15	0,0048
2,98	99,86	49,86	00,14	0,0047
2,99	99,86	49,86	00,14	0,0046
3,00	99,87	49,87	00,13	0,0044
3,01	99,87	49,87	00,13	0,0043
3,02	99,87	49,87	00,13	0,0042
3,03	99,88	49,88	00,12	0,0040
3,04	99,88	49,88	00,12	0,0039
3,05	99,89	49,89	00,11	0,0038
3,06	99,89	49,89	00,11	0,0037
3,07	99,89	49,89	00,11	0,0036
3,08	99,90	49,90	00,10	0,0035
3,09	99,90	49,90	00,10	0,0034
3,10	99,90	49,90	00,10	0,0033
3,11	99,91	49,91	00,09	0,0032
3,12	99,91	49,91	00,09	0,0031
3,13	99,91	49,91	00,09	0,0030
3,14	99,92	49,92	00,08	0,0029
3,15	99,92	49,92	00,08	0,0028
3,16	99,92	49,92	00,08	0,0027
3,17	99,92	49,92	00,08	0,0026
3,18	99,93	49,93	00,07	0,0025
3,19	99,93	49,93	00,07	0,0025

Таблица G (продолжение)

z	(A) Процент площади слева от z	(B) Процент площади между средним значением и z	(C) Процент площади за z[1]	(D) Высота ординаты в точке z
3,20	99,93	49,93	00,07	0,0024
3,21	99,93	49,93	00,07	0,0023
3,22	99,94	49,94	00,06	0,0022
3,23	99,94	49,94	00,06	0,0022
3,24	99,94	49,94	00,06	0,0021
3,30	99,95	49,95	00,05	0,0017
3,40	99,97	49,97	00,03	0,0012
3,50	99,98	49,98	00,02	0,0009
3,60	99,98	49,98	00,02	0,0006
3,70	99,99	49,99	00,01	0,0004

[1] Процент площади, находящейся слева от z при $z \leqslant 0$ и находящейся справа от z при $z > 0$. — *Примеч. пер.*

Таблица H_1.

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0 38	0 40
3	--	--	--	--	--	--	--	--	0 27	0 30	0 33	1 35	1 38	1 41	2 43	2 46	2 49	2 52	3 54	3 57
4	--	--	--	--	--	0 24	0 28	1 31	1 35	2 38	2 42	3 45	3 49	4 52	5 55	5 59	6 62	6 66	7 69	8 72
5	--	--	--	--	0 25	1 29	1 34	2 38	3 42	4 46	5 50	6 54	7 58	7 63	8 67	9 71	10 75	11 79	12 83	13 87
6	--	--	--	0 24	1 29	2 34	3 39	4 44	5 49	6 54	7 59	9 63	10 68	11 73	12 78	13 83	15 87	16 92	17 97	18 102
7	--	--	--	0 28	1 34	3 39	4 45	6 50	7 56	9 61	10 67	12 72	13 78	15 83	16 89	18 94	19 100	21 105	22 111	24 116
8	--	--	--	1 31	2 38	4 44	6 50	7 57	9 63	11 69	13 75	15 81	17 87	18 94	20 100	22 106	24 112	26 118	28 124	30 130
9	--	--	0 27	1 35	3 42	5 49	7 56	9 63	11 70	13 77	16 83	18 90	20 97	22 104	24 111	27 117	29 124	31 131	33 138	36 144
10	--	--	0 30	2 38	4 46	6 54	9 61	11 69	13 77	16 84	18 92	21 99	24 106	26 114	29 121	31 129	34 136	37 143	39 151	42 158
11	--	--	0 33	2 42	5 50	7 59	10 67	13 75	16 83	18 92	21 100	24 108	27 116	30 124	33 132	36 140	39 148	42 156	45 164	48 172
12	--	--	1 35	3 45	6 54	9 63	12 72	15 81	18 90	21 99	24 108	27 117	31 125	34 134	37 143	41 151	44 160	47 169	51 177	54 186
13	--	--	1 38	3 49	7 58	10 68	13 78	17 87	20 97	24 106	27 116	31 125	34 125	38 144	42 153	45 163	49 172	53 181	56 191	60 200
14	--	--	1 41	4 52	7 63	11 73	15 83	18 94	22 104	26 114	30 124	34 134	38 144	42 154	46 164	50 174	54 184	58 194	63 203	67 213
15	--	--	2 43	5 55	8 67	12 78	16 89	20 100	24 111	29 121	33 132	37 143	42 153	46 164	51 174	55 185	60 195	64 206	69 216	73 227
16	--	--	2 46	5 59	9 71	13 83	18 94	22 106	27 117	31 129	36 140	41 151	45 163	50 174	55 185	60 196	65 207	70 218	74 230	79 241
17	--	--	2 49	6 62	10 75	15 87	19 100	24 112	29 124	34 148	39 148	44 160	49 172	54 184	60 195	65 207	70 219	75 231	81 242	86 254
18	--	--	2 52	6 66	11 79	16 92	21 105	26 118	31 131	37 143	42 156	47 169	53 181	58 194	64 206	70 218	75 231	81 243	87 255	92 268
19	--	0 38	3 54	7 69	12 83	17 97	22 111	28 124	33 138	39 151	45 164	51 177	56 191	63 203	69 216	74 230	81 242	87 255	93 268	99 281
20	--	0 40	3 57	8 72	13 87	18 102	24 116	30 130	36 144	42 158	48 172	54 186	60 200	67 213	73 227	79 241	86 254	92 268	99 281	105 295

(Прочерки в таблице указывают на невозможность принятия решения при установленном уровне значимости.)

Таблица H_2.

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0 / 26	0 / 28	0 / 30	0 / 32	0 / 34	0 / 36	1 / 37	1 / 39
3	--	--	--	--	--	--	0 / 21	0 / 24	1 / 26	1 / 29	1 / 32	2 / 34	2 / 37	2 / 40	3 / 42	3 / 45	4 / 47	4 / 50	4 / 52	5 / 55
4	--	--	--	--	0 / 20	1 / 23	1 / 27	2 / 30	3 / 33	3 / 37	4 / 40	5 / 43	5 / 47	6 / 50	7 / 53	7 / 57	8 / 60	9 / 63	9 / 67	10 / 70
5	--	--	--	0 / 20	1 / 24	2 / 28	3 / 32	4 / 36	5 / 40	6 / 44	7 / 48	8 / 52	9 / 56	10 / 60	11 / 64	12 / 68	13 / 72	14 / 76	15 / 80	16 / 84
6	--	--	--	1 / 23	2 / 28	3 / 33	4 / 38	6 / 42	7 / 47	8 / 52	9 / 57	11 / 61	12 / 66	13 / 71	15 / 75	16 / 80	18 / 84	19 / 89	20 / 94	22 / 98
7	--	--	0 / 21	1 / 27	3 / 32	4 / 38	6 / 43	7 / 49	9 / 54	11 / 59	12 / 65	14 / 70	16 / 75	17 / 81	19 / 86	21 / 91	23 / 96	24 / 102	26 / 107	28 / 112
8	--	--	0 / 24	2 / 30	4 / 36	6 / 42	7 / 49	9 / 55	11 / 61	13 / 67	15 / 73	17 / 79	20 / 84	22 / 90	24 / 96	26 / 102	28 / 108	30 / 114	32 / 120	34 / 126
9	--	--	1 / 26	3 / 33	5 / 40	7 / 47	9 / 54	11 / 61	14 / 67	16 / 74	18 / 81	21 / 87	23 / 94	26 / 100	28 / 107	31 / 113	33 / 120	36 / 126	38 / 133	40 / 140
10	--	--	1 / 29	3 / 37	6 / 44	8 / 52	11 / 59	13 / 67	16 / 74	19 / 81	22 / 88	24 / 96	27 / 103	30 / 110	33 / 117	36 / 124	38 / 132	41 / 139	44 / 146	47 / 153
11	--	--	1 / 32	4 / 40	7 / 48	9 / 57	12 / 65	15 / 73	18 / 81	22 / 88	25 / 96	28 / 104	31 / 112	34 / 120	37 / 128	41 / 135	44 / 143	47 / 151	50 / 159	53 / 167
12	--	--	2 / 34	5 / 43	8 / 52	11 / 61	14 / 70	17 / 79	21 / 87	24 / 96	28 / 104	31 / 113	35 / 121	38 / 130	42 / 138	46 / 146	49 / 155	53 / 163	56 / 172	60 / 180
13	--	0 / 26	2 / 37	5 / 47	9 / 56	12 / 66	16 / 75	20 / 84	23 / 94	27 / 103	31 / 112	35 / 121	39 / 130	43 / 139	47 / 148	51 / 157	55 / 166	59 / 175	63 / 184	67 / 193
14	--	0 / 28	2 / 40	6 / 50	10 / 60	13 / 71	17 / 81	22 / 90	26 / 100	30 / 110	34 / 120	38 / 130	43 / 139	47 / 149	51 / 159	56 / 168	60 / 178	65 / 187	69 / 197	73 / 207
15	--	0 / 30	3 / 42	7 / 53	11 / 64	15 / 75	19 / 86	24 / 96	28 / 107	33 / 117	37 / 128	42 / 138	47 / 148	51 / 159	56 / 169	61 / 179	66 / 189	70 / 200	75 / 210	80 / 220
16	--	0 / 32	3 / 45	7 / 57	12 / 68	16 / 80	21 / 91	26 / 102	31 / 113	36 / 124	41 / 135	46 / 146	51 / 157	56 / 168	61 / 179	66 / 190	71 / 201	76 / 212	82 / 222	87 / 233
17	--	0 / 34	4 / 47	8 / 60	13 / 72	18 / 84	23 / 96	28 / 108	33 / 120	38 / 132	44 / 143	49 / 155	55 / 166	60 / 178	66 / 189	71 / 201	77 / 212	82 / 224	88 / 234	93 / 247
18	--	0 / 36	4 / 50	9 / 63	14 / 76	19 / 89	24 / 102	30 / 114	36 / 126	41 / 139	47 / 151	53 / 163	59 / 175	65 / 187	70 / 200	76 / 212	82 / 224	88 / 236	94 / 248	100 / 260
19	--	1 / 37	4 / 53	9 / 67	15 / 80	20 / 94	26 / 107	32 / 120	38 / 133	44 / 146	50 / 159	56 / 172	63 / 184	69 / 197	75 / 210	82 / 222	88 / 235	94 / 248	101 / 260	107 / 273
20	--	1 / 39	5 / 55	10 / 70	16 / 84	22 / 98	28 / 112	34 / 126	40 / 140	47 / 153	53 / 167	60 / 180	67 / 193	73 / 207	80 / 220	87 / 233	93 / 247	100 / 260	107 / 273	114 / 286

(Прочерки в таблице указывают на невозможность принятия решения при установленном уровне значимости.)

Таблица H_3

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
2	--	--	--	--	--	--	--	0 16	0 18	0 20	0 22	1 23	1 25	1 27	1 29	1 31	2 32	2 34	2 36	2 38
3	--	--	--	--	0 15	1 17	1 20	2 22	2 25	3 27	3 30	4 32	4 35	5 37	5 40	6 42	6 45	7 47	7 50	8 52
4	--	--	--	0 16	1 19	2 22	3 25	4 28	4 32	5 35	6 38	7 41	8 44	9 47	10 50	11 53	11 57	12 60	13 63	13 67
5	--	--	0 15	1 19	2 23	3 27	5 30	6 34	7 38	8 42	9 46	11 49	12 53	13 57	14 61	15 65	17 68	18 72	19 76	20 80
6	--	--	1 17	2 22	3 27	5 31	6 36	8 40	10 44	11 49	13 53	14 58	16 62	17 67	19 71	21 75	22 80	24 84	25 89	27 93
7	--	--	1 20	3 25	5 30	6 36	8 41	10 46	12 51	14 56	16 61	18 66	20 71	22 76	24 81	26 86	28 91	30 96	32 101	34 106
8	--	0 16	2 22	4 28	6 34	8 40	10 46	13 51	15 57	17 63	19 69	22 74	24 80	26 86	29 91	31 97	34 102	36 108	38 114	41 119
9	--	0 18	2 25	4 32	7 38	10 44	12 51	15 57	17 64	20 70	23 76	26 82	28 89	31 95	34 101	37 107	39 114	42 120	45 126	48 132
10	--	0 20	3 27	5 35	8 42	11 49	14 56	17 63	20 70	23 77	26 84	29 91	33 97	36 104	39 111	42 118	45 125	48 132	52 138	55 145
11	--	0 22	3 30	6 38	9 46	13 53	16 61	19 69	23 76	26 84	30 91	33 99	37 106	40 114	44 121	47 129	51 136	55 143	58 151	62 158
12	--	1 23	4 32	7 41	11 49	14 58	18 66	22 74	26 82	29 91	33 99	37 107	41 115	45 123	49 131	53 139	57 147	61 155	65 163	69 171
13	--	1 25	4 35	8 44	12 53	16 62	20 71	24 80	28 89	33 97	37 106	41 115	45 124	50 132	54 141	59 149	63 158	67 167	72 175	76 184
14	--	1 27	5 37	9 47	13 51	17 67	22 76	26 86	31 95	36 104	40 114	45 123	50 132	55 141	59 151	64 160	67 171	74 178	78 188	83 197
15	--	1 29	5 40	10 50	14 61	19 71	24 81	29 91	34 101	39 111	44 121	49 131	54 141	59 151	64 161	70 170	75 180	80 190	85 200	90 210
16	--	1 31	6 42	11 53	15 65	21 75	26 86	31 97	37 107	42 118	47 129	53 139	59 149	64 160	70 170	75 181	81 191	86 202	92 212	98 222
17	--	2 32	6 45	11 57	17 68	22 80	28 91	34 102	39 114	45 125	51 136	57 147	63 158	67 171	75 180	81 191	87 202	93 213	99 224	105 235
18	--	2 34	7 47	12 60	18 72	24 84	30 96	36 108	42 120	48 132	55 143	61 155	67 167	74 178	80 190	86 202	93 213	99 225	106 236	112 248
19	--	2 36	7 50	13 63	19 76	25 89	32 101	38 114	45 126	52 138	58 151	65 163	72 175	78 188	85 200	92 212	99 224	106 236	113 248	119 261
20	--	2 38	8 52	13 67	20 80	27 93	34 106	41 119	48 132	55 145	62 158	69 171	76 184	83 197	90 210	98 222	105 235	112 248	119 261	127 273

(Прочерки в таблице указывают на невозможность принятия решения при установленном уровне значимости.)

Таблица H_4.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0 / 19	0 / 20
2	--	--	--	--	0 / 10	0 / 12	0 / 14	1 / 15	1 / 17	1 / 19	1 / 21	2 / 22	2 / 24	2 / 26	3 / 27	3 / 29	3 / 31	4 / 32	4 / 34	4 / 36
3	--	--	0 / 9	0 / 12	1 / 14	2 / 16	2 / 19	3 / 21	3 / 24	4 / 26	5 / 28	5 / 31	6 / 33	7 / 35	7 / 38	8 / 40	9 / 42	9 / 45	10 / 47	11 / 49
4	--	--	0 / 12	1 / 15	2 / 18	3 / 21	4 / 24	5 / 27	6 / 30	7 / 33	8 / 36	9 / 39	10 / 42	11 / 45	12 / 48	14 / 50	15 / 53	16 / 56	17 / 59	18 / 62
5	--	0 / 10	1 / 14	2 / 18	4 / 21	5 / 25	6 / 29	8 / 32	9 / 36	11 / 39	12 / 43	13 / 47	15 / 50	16 / 54	18 / 57	19 / 61	20 / 65	22 / 68	23 / 72	25 / 75
6	--	0 / 12	2 / 16	3 / 21	5 / 25	7 / 29	8 / 34	10 / 38	12 / 42	14 / 46	16 / 50	17 / 55	19 / 59	21 / 63	23 / 67	25 / 71	26 / 76	28 / 80	30 / 84	32 / 88
7	--	0 / 14	2 / 19	4 / 24	6 / 29	8 / 34	11 / 38	13 / 43	15 / 48	17 / 53	19 / 58	21 / 63	24 / 67	26 / 72	28 / 77	30 / 82	33 / 86	35 / 91	37 / 96	39 / 101
8	--	1 / 15	3 / 21	5 / 27	8 / 32	10 / 38	13 / 43	15 / 49	18 / 54	20 / 60	23 / 65	26 / 70	28 / 76	31 / 81	33 / 87	36 / 92	39 / 97	41 / 103	44 / 108	47 / 113
9	--	1 / 17	3 / 24	6 / 30	9 / 36	12 / 42	15 / 48	18 / 54	21 / 60	24 / 66	27 / 72	30 / 78	33 / 84	36 / 90	39 / 96	42 / 102	45 / 108	48 / 114	51 / 120	54 / 126
10	--	1 / 19	4 / 26	7 / 33	11 / 39	14 / 46	17 / 53	20 / 60	24 / 66	27 / 73	31 / 79	34 / 86	37 / 93	41 / 99	44 / 106	48 / 112	51 / 119	55 / 125	58 / 132	62 / 138
11	--	1 / 21	5 / 28	8 / 36	12 / 43	16 / 50	19 / 58	23 / 65	27 / 72	31 / 79	34 / 87	38 / 94	42 / 101	46 / 108	50 / 115	54 / 122	57 / 130	61 / 137	65 / 144	69 / 151
12	--	2 / 22	5 / 31	9 / 39	13 / 47	17 / 55	21 / 63	26 / 70	30 / 78	34 / 86	38 / 94	42 / 102	47 / 109	51 / 117	55 / 125	60 / 132	64 / 140	68 / 148	72 / 156	77 / 163
13	--	2 / 24	6 / 33	10 / 42	15 / 50	19 / 59	24 / 67	28 / 76	33 / 84	37 / 93	42 / 101	47 / 109	51 / 118	56 / 126	61 / 134	65 / 143	70 / 151	75 / 159	80 / 167	84 / 176
14	--	2 / 26	7 / 35	11 / 45	16 / 54	21 / 63	26 / 72	31 / 81	36 / 90	41 / 99	46 / 108	51 / 117	56 / 126	61 / 135	66 / 144	71 / 153	77 / 161	82 / 170	87 / 179	92 / 188
15	--	3 / 27	7 / 38	12 / 48	18 / 57	23 / 67	28 / 77	33 / 87	39 / 96	44 / 106	50 / 115	55 / 125	61 / 134	66 / 144	72 / 153	77 / 163	83 / 172	88 / 182	94 / 191	100 / 200
16	--	3 / 29	8 / 40	14 / 50	19 / 61	25 / 71	30 / 82	36 / 92	42 / 102	48 / 112	54 / 122	60 / 132	65 / 143	71 / 153	77 / 163	83 / 173	89 / 183	95 / 193	101 / 203	107 / 213
17	--	3 / 31	9 / 42	15 / 53	20 / 65	26 / 76	33 / 86	39 / 97	45 / 108	51 / 119	57 / 130	64 / 140	70 / 151	77 / 161	83 / 172	89 / 183	96 / 193	102 / 204	109 / 214	115 / 225
18	--	4 / 32	9 / 45	16 / 56	22 / 68	28 / 80	35 / 91	41 / 103	48 / 114	55 / 123	61 / 137	68 / 148	75 / 159	82 / 170	88 / 182	95 / 193	102 / 204	109 / 215	116 / 226	123 / 237
19	0 / 19	4 / 34	10 / 47	17 / 59	23 / 72	30 / 84	37 / 96	44 / 108	51 / 120	58 / 132	65 / 144	72 / 156	80 / 167	87 / 179	94 / 191	101 / 203	109 / 214	116 / 226	123 / 238	130 / 250
20	0 / 20	4 / 36	11 / 49	18 / 62	25 / 75	32 / 88	39 / 101	47 / 113	54 / 126	62 / 138	69 / 151	77 / 163	84 / 176	92 / 188	100 / 200	107 / 213	115 / 225	123 / 237	130 / 250	138 / 262

(Прочерки в таблице указывают на невозможность принятия решения при установленном уровне значимости.)

Таблица 1.

N	k (число условий)							
	3	4	5	6	7	8	9	10
3	15	23	30	37	45	52	60	68
	17	**27**	**36**	**44**	**52**	**61**	**70**	**79**
4	24	35	46	57	69	80	92	105
	27	**42**	**54**	**67**	**80**	**94**	**107**	**121**
5	33	48	63	79	96	112	129	146
	39	**58**	**76**	**94**	**112**	**130**	**149**	**168**
6	43	63	83	104	125	147	169	191
	51	**76**	**99**	**123**	**147**	**171**	**196**	**221**
7	54	79	105	131	158	185	213	241
	68	**96**	**125**	**154**	**185**	**215**	**246**	**278**
8	66	96	128	160	192	226	260	294
	82	**117**	**152**	**188**	**225**	**263**	**301**	**339**
9	79	115	152	190	229	269	310	351
	98	**139**	**181**	**225**	**268**	**313**	**358**	**404**
10	92	134	178	223	268	315	362	410
	115	**163**	**212**	**263**	**314**	**366**	**420**	**473**
11	106	155	205	257	309	363	418	473
	132	**188**	**245**	**303**	**362**	**423**	**484**	**546**
12	121	176	233	292	352	414	476	539
	150	**214**	**278**	**345**	**413**	**481**	**551**	**621**
13	136	199	263	329	397	466	537	608
	169	**241**	**314**	**389**	**465**	**542**	**621**	**700**
14	152	222	294	368	444	521	599	679
	189	**269**	**351**	**434**	**519**	**606**	**694**	**783**
15	169	246	326	408	492	577	665	753
	210	**298**	**389**	**481**	**576**	**672**	**769**	**868**
16	186	271	359	449	542	636	732	829
	231	**328**	**428**	**530**	**634**	**740**	**847**	**956**
17	203	296	393	492	593	696	802	908
	253	**359**	**468**	**580**	**694**	**810**	**928**	**1047**
18	221	323	428	536	646	759	873	989
	275	**391**	**510**	**632**	**756**	**883**	**1011**	**1140**
19	240	350	464	581	700	822	947	1072
	298	**424**	**553**	**685**	**820**	**957**	**1096**	**1236**
20	259	378	501	627	756	888	1022	1158
	322	**458**	**597**	**740**	**886**	**1033**	**1183**	**1335**
21	278	406	538	674	814	955	1100	1246
	346	**492**	**642**	**796**	**953**	**1112**	**1273**	**1436**
22	298	435	577	723	872	1024	1179	1336
	371	**528**	**689**	**853**	**1021**	**1192**	**1365**	**1540**
23	319	465	617	773	932	1095	1260	1428
	396	**564**	**736**	**912**	**1092**	**1274**	**1459**	**1646**
24	340	496	657	824	994	1167	1343	1522
	422	**601**	**784**	**972**	**1163**	**1358**	**1555**	**1754**
25	361	527	699	875	1056	1240	1428	1618
	449	**639**	**834**	**1033**	**1237**	**1443**	**1653**	**1865**

Таблица J.

N	Уровень значимости для одностороннего критерия			
	0,05	0,025	0,01	0,005
	Уровень значимости для двустороннего критерия			
N	0,10	0,05	0,02	0,01
5	0	--	--	--
6	2	0	--	--
7	3	2	0	--
8	5	3	1	0
9	8	5	3	1
10	10	8	5	3
11	13	10	7	5
12	17	13	9	7
13	21	17	12	9
14	25	21	15	12
15	30	25	19	15
16	35	29	23	19
17	41	34	27	23
18	47	40	32	27
19	53	46	37	32
20	60	52	43	37
21	67	58	49	42
22	75	65	55	48
23	83	73	62	54
24	91	81	69	61
25	100	89	76	68
26	110	98	84	75
27	119	107	92	83
28	130	116	101	91
29	140	126	110	100
30	151	137	120	109
31	163	147	130	118
32	175	159	140	128
33	187	170	151	138
34	200	182	162	148
35	213	195	173	159
36	227	208	185	171
37	241	221	198	182
38	256	235	211	194
39	271	249	224	207
40	286	264	238	220
41	302	279	252	233
42	319	294	266	247
43	336	310	281	261
44	353	327	296	276
45	371	343	312	291
46	389	361	328	307
47	407	378	345	322
48	426	396	362	339
49	446	415	379	355
50	466	434	397	373

(Можно обнаружить небольшие различия между критическими значениями, приведенными в данной таблице и в таблице 2 из вышедшего в 1964 г. повторного издания книги: Wilcoxon F. and Wilcox R. A. Some Rapid Approximate Statistical Procedures. New York, Lederle Laboratories, 1964. Эти различия связаны с тем, что упомянутые авторы выбирают в качестве критического значение, ближайшее к данному уровню значимости, причем иногда превышающее его. Например, для $N=8$ $P(T=3)=0{,}0390$ (значение двустороннее) и $P(T=4)=$ $=0{,}0546$ (значение двустороннее). Уилкоксон и Уилкокс выбирают в качестве критического значения при 5%-ном уровне значимости (критерий двусторонний) $T=4$, в то время как в табл. J отражен более консервативный подход, когда в качестве критического значения при данном уровне значимости выбирается $T=3$.)

Таблица K.

$k = 3$

$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$		$N = 5$	
χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p
0	1,000	0,000	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000
1	0,833	0,667	0,944	0,5	0,931	0,4	0,954
3	0,500	2,000	0,528	1,5	0,653	1,2	0,691
4	0,167	2,667	0,361	2,0	0,431	1,6	0,522
		4,667	0,194	3,5	0,273	2,8	0,367
		6,000	0,028	4,5	0,125	3,6	0,182
				6,0	0,069	4,8	0,124
				6,5	0,042	5,2	0,093
				8,0	0,0046	6,4	0,039
						7,6	0,024
						8,4	0,0085
						10,0	0,00077

$N = 6$		$N = 7$		$N = 8$		$N = 9$	
χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p
0,00	1,000	0,000	1,000	0,00	1,000	0,000	1,000
0,33	0,956	0,286	0,964	0,25	0,967	0,222	0,971
1,00	0,740	0,857	0,768	0,75	0,794	0,667	0,814
1,33	0,570	1,143	0,620	1,00	0,654	0,889	0,865
2,33	0,430	2,000	0,486	1,75	0,531	1,556	0,569
3,00	0,252	2,571	0,305	2,25	0,355	2,000	0,398
4,00	0,184	3,429	0,237	3,00	0,285	2,667	0,328
4,33	0,142	3,714	0,192	3,25	0,236	2,889	0,278
5,33	0,072	4,571	0,112	4,00	0,149	3,556	0,187
6,33	0,052	5,429	0,085	4,75	0,120	4,222	0,154
7,00	0,029	6,000	0,052	5,25	0,079	4,667	0,107
8,33	0,012	7,143	0,027	6,25	0,047	5,556	0,069
9,00	0,0081	7,714	0,021	6,75	0,038	6,000	0,057
9,33	0,0055	8,000	0,016	7,00	0,030	6,222	0,048
10,33	0,0017	8,857	0,0084	7,75	0,018	6,889	0,031
12,00	0,00013	10,286	0,0036	9,00	0,0099	8,000	0,019
		10,571	0,0027	9,25	0,0080	8,222	0,016
		11,143	0,0012	9,75	0,0048	8,667	0,010
		12,286	0,00032	10,75	0,0024	9,556	0,0060
		14,000	0,000021	12,00	0,0011	10,667	0,0035
				12,25	0,00086	10,889	0,0029
				13,00	0,00026	11,556	0,0013
				14,25	0,000061	12,667	0,00066
				16,00	0,0000036	13,556	0,00035
						14,000	0,00020
						14,222	0,000097
						14,889	0,000054
						16,222	0,000011
						18,000	0,0000006

Таблица K (продолжение)

$k = 4$

$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$			
χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p	χ_r^2	p
0,0	1,000	0,2	1,000	0,0	1,000	5,7	0,141
0,6	0,958	0,6	0,958	0,3	0,992	6,0	0,105
1,2	0,834	1,0	0,910	0,6	0,928	6,3	0,094
1,8	0,792	1,8	0,727	0,9	0,900	6,6	0,077
2,4	0,625	2,2	0,608	1,2	0,800	6,9	0,068
3,0	0,542	2,6	0,524	1,5	0,754	7,2	0,054
3,6	0,458	3,4	0,446	1,8	0,677	7,5	0,052
4,2	0,375	3,8	0,342	2,1	0,649	7,8	0,036
4,8	0,208	4,2	0,300	2,4	0,524	8,1	0,033
5,4	0,167	5,0	0,207	2,7	0,508	8,4	0,019
6,0	0,042	5,4	0,175	3,0	0,432	8,7	0,014
		5,8	0,148	3,3	0,389	9,3	0,012
		6,6	0,075	3,6	0,355	9,6	0,0069
		7,0	0,054	3,9	0,324	9,9	0,0062
		7,4	0,033	4,5	0,242	10,2	0,0027
		8,2	0,017	4,8	0,200	10,8	0,0016
		9,0	0,0017	5,1	0,190	11,1	0,00094
				5,4	0,158	12,0	0,000072

Таблица L.

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_2									
2	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	10	20	35	56	84	120	165	220	286
4	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
5	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
6	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
7	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
8	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
9	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
10	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Таблица М.

N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N	N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N	N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N
1	1	1,0000	1,000000	61	3721	7,8102	0,016393	121	14641	11,0000	0,00826446
2	4	1,4142	0,500000	62	3844	7,8740	0,016129	122	14884	11,0454	0,00819672
3	9	1,7321	0,333333	63	3969	7,9373	0,015873	123	15129	11,0905	0,00813008
4	16	2,0000	0,250000	64	4096	8,0000	0,015625	124	15376	11,1355	0,00800452
5	25	2,2361	0,200000	65	4225	8,0623	0,015385	125	15625	11,1803	0,00800000
6	36	2,4495	0,166667	66	4356	8,1240	0,015152	126	15376	11,2250	0,00793651
7	49	2,6458	0,142857	67	4489	8,1854	0,014925	127	16129	11,2694	0,00787402
8	64	2,8284	0,125000	68	4624	8,2462	0,014706	128	16384	11,3137	0,00781250
9	81	3,0000	0,111111	69	4761	8,3066	0,014493	129	16641	11,3578	0,00775194
10	100	3,1623	0,100000	70	4900	8,3666	0,014286	130	16900	11,4018	0,00769231
11	121	3,3166	0,090909	71	5041	8,4261	0,014085	131	17161	11,4455	0,00763359
12	144	3,4641	0,083333	72	5184	8,4853	0,013889	132	17424	11,4891	0,00757576
13	169	3,6056	0,076923	73	5329	8,5440	0,013699	133	17689	11,5326	0,00751880
14	196	3,7417	0,071429	74	5476	8,6023	0,013514	134	17956	11,5758	0,00746269
15	225	3,8730	0,066667	75	5625	8,6603	0,013333	135	18225	11,6190	0,00740741
16	256	4,0000	0,062500	76	5776	8,7178	0,013158	136	18496	11,6619	0,00735294
17	289	4,1231	0,058824	77	5929	8,7750	0,012987	137	18769	11,7047	0,00729927
18	324	4,2426	0,055556	78	6084	8,8318	0,012821	138	19044	11,7473	0,00724638
19	361	4,3589	0,052632	79	6241	8,8882	0,012658	139	19321	11,7898	0,00719424
20	400	4,4721	0,050000	80	6400	8,9443	0,012500	140	19600	11,8322	0,00714286
21	441	4,5826	0,047619	81	6561	9,0000	0,012346	141	19881	11,8743	0,00709220
22	484	4,6904	0,045455	82	6724	9,0554	0,012195	142	20164	11,9164	0,00704225
23	529	4,7958	0,043478	83	6889	9,1104	0,012048	143	20449	11,9583	0,00699301
24	576	4,8990	0,041667	84	7056	9,1652	0,011905	144	20736	12,0000	0,00694444
25	625	5,0000	0,040000	85	7225	9,2195	0,011765	145	21025	12,0416	0,00689655
26	676	5,0990	0,038462	86	7396	9,2736	0,011628	146	21316	12,0830	0,00684932
27	729	5,1962	0,037037	87	7569	9,3274	0,011494	147	21609	12,1244	0,00680272
28	784	5,2915	0,035714	88	7744	9,3808	0,011364	148	21904	12,1655	0,00675676
29	841	5,3852	0,034483	89	7921	9,4340	0,011236	149	22201	12,2066	0,00671141
30	900	5,4772	0,033333	90	8100	9,4868	0,011111	150	22500	12,2474	0,00666667
31	961	5,5678	0,032258	91	8281	9,5394	0,010989	151	22801	12,2882	0,00662252
32	1024	5,6569	0,031250	92	8464	9,5917	0,010870	152	23104	12,3288	0,00657895
33	1089	5,7446	0,030303	93	8649	9,6437	0,010753	153	23409	12,3693	0,00653595
34	1156	5,8310	0,029412	94	8836	9,6954	0,010638	154	23716	12,4097	0,00649351
35	1225	5,9161	0,028571	95	9025	9,7468	0,010526	155	24025	12,4499	0,00645161
36	1296	6,0000	0,027778	96	9216	9,7980	0,010417	156	24336	12,4900	0,00641026
37	1369	6,0828	0,027027	97	9409	9,8489	0,010309	157	24649	12,5300	0,00636943
38	1444	6,1644	0,026316	98	9604	9,8995	0,010204	158	24964	12,5698	0,00632911
39	1521	6,2450	0,025641	99	9801	9,9499	0,010101	159	25281	12,6095	0,00628931
40	1600	6,3246	0,025000	100	10000	10,0000	0,010000	160	25600	12,6491	0,00625000
41	1681	6,4031	0,024390	101	10201	10,0499	0,00990099	161	25921	12,6886	0,00621118
42	1764	6,4807	0,023810	102	10404	10,0995	0,00980392	162	26244	12,7279	0,00617284
43	1849	6,5574	0,023256	103	10609	10,1489	0,00970874	163	26569	12,7671	0,00613497
44	1936	6,6332	0,022727	104	10816	10,1980	0,00961538	164	26896	12,8062	0,00609756
45	2025	6,7082	0,022222	105	11025	10,2470	0,00952381	165	27225	12,8452	0,00606061
46	2116	6,7823	0,021739	106	11236	10,2956	0,00943396	166	27556	12,8841	0,00602410
47	2209	6,8557	0,021277	107	11449	10,3441	0,00934579	167	27889	12,9228	0,00598802
48	2304	6,9282	0,020833	108	11664	10,3923	0,00925926	168	28224	12,9615	0,00595238
49	2401	7,0000	0,020408	109	11881	10,4403	0,00917431	169	28561	13,0000	0,00591716
50	2500	7,0711	0,020000	110	12100	10,4881	0,00909091	170	28900	13,0384	0,00588235
51	2601	7,1414	0,019608	111	12321	10,5357	0,00900901	171	29241	13,0767	0,00584795
52	2704	7,2111	0,019231	112	12544	10,5830	0,00892857	172	29584	13,1149	0,00581395
53	2809	7,2801	0,018868	113	12769	10,6301	0,00884956	173	29929	13,1529	0,00578035
54	2916	7,3485	0,018519	114	12996	10,6771	0,00877193	174	30276	13,1909	0,00574713
55	3025	7,4162	0,018182	115	13225	10,7238	0,00869565	175	30625	13,2288	0,00571429
56	3136	7,4833	0,017857	116	13456	10,7703	0,00862069	176	30976	13,2665	0,00568182
57	3249	7,5498	0,017544	117	13689	10,8167	0,00854701	177	31329	13,3041	0,00564972
58	3364	7,6158	0,017241	118	13924	10,8628	0,00847458	178	31684	13,3417	0,00561798
59	3481	7,6811	0,016949	119	14161	10,9087	0,00840336	179	32041	13,3791	0,00558659
60	3600	7,7460	0,016667	120	14400	10,9545	0,00833333	180	32400	13,4164	0,00555556

Таблица М (продолжение)

N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N	N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N	N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N
181	32761	13,4536	0,00552486	241	58081	15,5242	0,00414938	301	90601	17,3494	0,00332226
182	33124	13,4907	0,00549451	242	58564	15,5563	0,00413223	302	91204	17,3781	0,00331126
183	33489	13,5277	0,00546448	243	59049	15,5885	0,00411523	303	91809	17,4069	0,00330033
184	33856	13,5647	0,00543478	244	59536	15,6205	0,00409836	304	92416	17,4356	0,00328047
185	34225	13,6015	0,00540541	245	60025	15,6525	0,00408163	305	93025	17,4642	0,00328947
186	34596	13,6382	0,00537634	246	60516	15,6844	0,00406504	306	93636	17,4929	0,00326797
187	34969	13,6748	0,00534759	247	61009	15,7162	0,00404858	307	94249	17,5214	0,00325733
188	35344	13,7113	0,00531915	248	61504	15,7480	0,00403226	308	94864	17,5499	0,00321675
189	35721	13,7477	0,00529101	249	62001	15,7797	0,00401606	309	95481	17,5784	0,00323625
190	36100	13,7840	0,00526316	250	62500	15,8114	0,00400000	310	96100	17,6068	0,00322581
191	36481	13,8203	0,00523560	251	63001	15,8430	0,00398406	311	96721	17,6352	0,00321543
192	36864	13,8564	0,00520833	252	63504	15,8745	0,00396825	312	97344	17,6635	0,00320513
193	37249	13,8924	0,00518135	253	64009	15,9060	0,00395257	313	97969	17,6918	0,00319489
194	37636	13,9284	0,00515464	254	64516	15,9374	0,00393701	314	98596	17,7200	0,00318471
195	38025	13,9642	0,00512821	255	65025	15,9687	0,00392157	315	99225	17,7482	0,00317460
196	38416	14,0000	0,00510204	256	65536	16,0000	0,00390625	316	99856	17,7764	0,00316456
197	38809	14,0357	0,00507614	257	66049	16,0312	0,00389105	317	100489	17,8045	0,00315457
198	39204	14,0712	0,00505051	258	66564	16,0624	0,00387597	318	101124	17,8326	0,00314465
199	39601	14,1067	0,00502513	259	67081	16,0935	0,00386100	319	101761	17,8606	0,00313480
200	40000	14,1421	0,00500000	260	67600	16,1245	0,00384615	320	102400	17,8885	0,00312500
201	40401	14,1774	0,00497512	261	68121	16,1555	0,00383142	321	103041	17,9165	0,00311526
202	40804	14,2127	0,00495050	262	68644	16,1864	0,00381679	322	103684	17,9444	0,00310559
203	41209	14,2478	0,00492611	263	69169	16,2173	0,00380228	323	104329	17,9722	0,00309598
204	41616	14,2829	0,00490196	264	69696	16,2481	0,00378788	324	104976	18,0000	0,00308642
205	42025	14,3178	0,00487805	265	70225	16,2788	0,00377358	325	105625	18,0278	0,00307692
206	42436	14,3527	0,00485437	266	70756	16,3095	0,00375940	326	106276	18,0555	0,00306748
207	42849	14,3875	0,00483092	267	71289	16,3401	0,00374532	327	106929	18,0831	0,00305810
208	43264	14,4222	0,00480769	268	71824	16,3707	0,00373134	328	107584	18,1108	0,00304878
209	43681	14,4568	0,00478469	269	72361	16,4012	0,00371747	329	108241	18,1384	0,00303951
210	44100	14,4914	0,00476190	270	72900	16,4317	0,00370370	330	108900	18,1659	0,00303030
211	44521	14,5258	0,00473934	271	73441	16,4621	0,00369004	331	109561	18,1934	0,00302115
212	44944	14,5602	0,00471698	272	73984	16,4924	0,00367647	332	110224	18,2209	0,00301205
213	45369	14,5945	0,00469484	273	74529	16,5227	0,00366300	333	110889	18,2483	0,00300300
214	45796	14,6287	0,00467290	274	75076	16,5529	0,00364964	334	111556	18,2757	0,00299401
215	46225	14,6629	0,00465116	275	75625	16,5831	0,00363636	335	112225	18,3030	0,00298507
216	46656	14,6969	0,00462963	276	76176	16,6132	0,00362319	336	112896	18,3303	0,00297619
217	47089	14,7309	0,00460829	277	76729	16,6433	0,00361011	337	113569	18,3576	0,00296736
218	47524	14,7648	0,00458716	278	77284	16,6733	0,00359712	338	114244	18,3848	0,00295858
219	47961	14,7986	0,00456621	279	77841	16,7033	0,00358423	339	114921	18,4120	0,00294985
220	48400	14,8324	0,00454545	280	78400	16,7332	0,00357143	340	115600	18,4391	0,00294118
221	48841	14,8661	0,00452489	281	78961	16,7631	0,00355872	341	116281	18,4662	0,00293255
222	49284	14,8997	0,00450450	282	79524	16,7929	0,00354610	342	116964	18,4932	0,00292398
223	49729	14,9332	0,00448430	283	80089	16,8226	0,00353357	343	117649	18,5203	0,00291545
224	50176	14,9666	0,00446429	284	80656	16,8523	0,00352113	344	118336	18,5472	0,00290698
225	50625	15,0000	0,00444444	285	81225	16,8819	0,00350877	345	119025	18,5742	0,00289855
226	51076	15,0333	0,00442478	286	81796	16,9115	0,00349650	346	119716	18,6011	0,00289017
227	51529	15,0665	0,00440529	287	82369	16,9411	0,00348432	347	120409	18,6279	0,00288184
228	51984	15,0997	0,00438596	288	82944	16,9706	0,00347222	348	121104	18,6548	0,00287356
229	52441	15,1327	0,00436681	289	83521	17,0000	0,00346021	349	121801	18,6815	0,00286533
230	52900	15,1658	0,00434783	290	84100	17,0294	0,00344828	350	122500	18,7083	0,00285714
231	53361	15,1987	0,00432900	291	84681	17,0587	0,00343643	351	123201	18,7350	0,00284900
232	53824	15,2315	0,00431034	292	85264	17,0880	0,00342466	352	123904	18,7617	0,00284091
233	54289	15,2643	0,00429185	293	85849	17,1172	0,00341297	353	124609	18,7883	0,00283286
234	54756	15,2971	0,00427350	294	86436	17,1464	0,00340136	354	125316	18,8149	0,00282486
235	55225	15,3297	0,00425532	295	87025	17,1756	0,00338983	355	126025	18,8414	0,00281690
236	55696	15,3623	0,00423729	296	87616	17,2047	0,00337838	356	126736	18,8680	0,00280899
237	56169	15,3948	0,00421941	297	88209	17,2337	0,00336700	357	127449	18,8944	0,00280112
238	56644	15,4272	0,00420168	298	88804	17,2627	0,00335570	358	128164	18,9209	0,00279330
239	57121	15,4596	0,00418410	299	89401	17,2916	0,00334448	359	128881	18,9473	0,00278552
240	57600	15,4919	0,00416667	300	90000	17,3205	0,00333333	360	129600	18,9737	0,00277778

N	N²	√N	1/N	N	N²	√N	1/N	N	N²	√N	1/N
361	130321	19,0000	0,00277008	421	177241	20,5183	0,00237530	481	231361	21,9317	0,00207900
362	131044	19,0263	0,00276243	422	178084	20,5426	0,00236967	482	232324	21,9545	0,00207469
363	131769	19,0526	0,00275482	423	178929	20,5670	0,00236407	483	233289	21,9773	0,00207039
364	132496	19,0788	0,00274725	424	179776	20,5913	0,00235849	484	234256	22,0000	0,00206612
365	133225	19,1050	0,00273973	425	180625	20,6155	0,00235294	485	235225	22,0227	0,00206186
366	133956	19,1311	0,00273224	426	181476	20,6398	0,00234742	486	236196	22,0454	0,00205761
367	134689	19,1572	0,00272480	427	182329	20,6640	0,00234192	487	237169	22,0681	0,00205339
368	135424	19,1833	0,00271739	428	183184	20,6882	0,00233645	488	238144	22,0907	0,00204918
369	136161	19,2094	0,00271003	429	184041	20,7123	0,00233100	489	239121	22,1133	0,00204499
370	136900	19,2354	0,00270270	430	184900	20,7364	0,00232558	490	240100	22,1359	0,00204082
371	137641	19,2614	0,00269542	431	185761	20,7605	0,00232019	491	241081	22,1585	0,00203666
372	138384	19,2873	0,00268817	432	186624	20,7846	0,00231481	492	242064	22,1811	0,00203252
373	139129	19,3132	0,00268097	433	187489	20,8087	0,00230947	493	243049	22,2036	0,00202840
374	139876	19,3391	0,00267380	434	188356	20,8327	0,00230415	494	244036	22,2261	0,00202429
375	140625	19,3649	0,00266667	435	189225	20,8567	0,00229885	495	245025	22,2486	0,00202020
376	141376	19,3907	0,00265957	436	190096	20,8806	0,00229358	496	246016	22,2711	0,00201613
377	142129	19,4165	0,00265252	437	190969	20,9045	0,00228833	497	247009	22,2935	0,00201207
378	142884	19,4422	0,00264550	438	191844	20,9284	0,00228311	498	248004	22,3159	0,00200803
379	143641	19,4679	0,00263852	439	192721	20,9523	0,00227790	499	249001	22,3383	0,00200401
380	144400	19,4936	0,00263158	440	193600	20,9762	0,00227273	500	250000	22,3607	0,00200000
381	145161	19,5192	0,00262467	441	194481	21,0000	0,00226757	501	251001	22,3830	0,00199601
382	145924	19,5448	0,00261780	442	195364	21,0238	0,00226244	502	252004	22,4054	0,00199203
383	146689	19,5704	0,00261097	443	196249	21,0476	0,00225734	503	253009	22,4277	0,00198807
384	147456	19,5959	0,00260417	444	197136	21,0713	0,00225225	504	254016	22,4499	0,00198413
385	148225	19,6214	0,00259740	445	198025	21,0950	0,00224719	505	255025	22,4722	0,00198020
386	148996	19,6469	0,00259067	446	198916	21,1187	0,00224215	506	256036	22,4944	0,00197628
387	149769	19,6723	0,00258398	447	199809	21,1424	0,00223714	507	257049	22,5167	0,00197239
388	150544	19,6977	0,00257732	448	200704	21,1660	0,00223214	508	258064	22,5389	0,00196850
389	151321	19,7231	0,00257069	449	201601	21,1896	0,00222717	509	259081	22,5610	0,00196464
390	152100	19,7484	0,00256410	450	202500	21,2132	0,00222222	510	260100	22,5832	0,00196078
391	152881	19,7737	0,00255754	451	203401	21,2368	0,00221729	511	261121	22,6053	0,00195695
392	153664	19,7990	0,00255102	452	204304	21,2603	0,00221239	512	262144	22,6274	0,00195312
393	154449	19,8242	0,00254453	453	205209	21,2838	0,00220751	513	263169	22,6495	0,00194932
394	155236	19,8494	0,00253807	454	206116	21,3073	0,00220264	514	264196	22,6716	0,00194553
395	156025	19,8746	0,00253165	455	207025	21,3307	0,00219870	515	265225	22,6936	0,00194175
396	156816	19,8997	0,00252525	456	207936	21,3542	0,00219298	516	266256	22,7156	0,00193798
397	157609	19,9249	0,00251889	457	208849	21,3776	0,00218818	517	267289	22,7376	0,00193424
398	158404	19,9499	0,00251256	458	209764	21,4009	0,00218341	518	268324	22,7596	0,00193050
399	159201	19,9750	0,00250627	459	210681	21,4243	0,00217865	519	269361	22,7816	0,00192678
400	160000	20,0000	0,00250000	460	211600	21,4476	0,00217391	520	270400	22,8035	0,00192308
401	160801	20,0250	0,00249377	461	212521	21,4709	0,00216920	521	271441	22,8254	0,00191939
402	161604	20,0499	0,00248756	462	213444	21,4942	0,00216450	522	272484	22,8473	0,00191571
403	162409	20,0749	0,00248139	463	214369	21,5174	0,00215983	523	273529	22,8692	0,00191205
404	163216	20,0998	0,00247525	464	215296	21,5407	0,00215517	524	274576	22,8910	0,00190840
405	164025	20,1246	0,00246914	465	216225	21,5639	0,00215054	525	275625	22,9129	0,00190476
406	164836	20,1494	0,00246305	466	217156	21,5870	0,00214592	526	276676	22,9347	0,00190114
407	165649	20,1742	0,00245700	467	218089	21,6102	0,00214133	527	277729	22,9565	0,00189753
408	166464	20,1990	0,00245098	468	219024	21,6333	0,00213675	528	278784	22,9783	0,00189394
409	167281	20,2237	0,00244499	469	219961	21,6564	0,00213220	529	279841	23,0000	0,00189036
410	168100	20,2485	0,00243902	470	220900	21,6795	0,00212766	530	280900	23,0217	0,00188679
411	168921	20,2731	0,00243309	471	221841	21,7025	0,00212314	531	281961	23,0434	0,00188324
412	169744	20,2978	0,00242718	472	222784	21,7256	0,00211864	532	283024	23,0651	0,00187970
413	170569	20,3224	0,00242131	473	223729	21,7486	0,00211416	533	284089	23,0868	0,00187617
414	171396	20,3470	0,00241546	474	224676	21,7715	0,00210970	534	285156	23,1084	0,00187266
415	172225	20,3715	0,00240964	475	225625	21,7945	0,00210526	535	286225	23,1301	0,00186916
416	173056	20,3961	0,00240385	476	226576	21,8174	0,00210084	536	287296	23,1517	0,00186567
417	173889	20,4206	0,00239808	477	227529	21,8403	0,00209644	537	288369	23,1733	0,00186220
418	174724	20,4450	0,00239234	478	228484	21,8632	0,00209205	538	289444	23,1948	0,00185874
419	175561	20,4695	0,00238663	479	229441	21,8861	0,00208768	539	290521	23,2164	0,00185529
420	176400	20,4939	0,00238095	480	230400	21,9089	0,00208333	540	291600	23,2379	0,00185185

Таблица М (продолжение)

N	N²	√N	1/N	N	N²	√N	1/N	N	N²	√N	1/N
541	292681	23,2594	0,00184843	601	361201	24,5153	0,00166389	661	436921	25,7099	0,00151286
542	293764	23,2809	0,00184502	602	302404	24,5357	0,00166113	662	438244	25,7294	0,00151057
543	294849	23,3024	0,00184162	603	363609	24,5561	0,00165837	663	439569	25,7488	0,00150830
544	295936	23,3238	0,00183824	604	364816	24,5764	0,00165563	664	440896	25,7682	0,00150602
545	297025	23,3452	0,00183486	605	366025	24,5967	0,00165289	665	442225	25,7876	0,00150376
546	298116	23,3666	0,00183150	606	367236	24,6171	0,00165017	666	443556	25,8070	0,00150150
547	299209	23,3880	0,00182815	607	368449	24,6374	0,00164745	667	444889	25,8263	0,00149925
548	300304	23,4094	0,00182482	608	369664	24,6577	0,00164474	668	446224	25,8457	0,00149701
549	301401	23,4307	0,00182149	609	370881	24,6779	0,00164204	669	447561	25,8650	0,00149477
550	302500	23,4521	0,00181818	610	372100	24,6982	0,00163934	670	448900	25,8844	0,00149254
551	303601	23,4734	0,00181488	611	373321	24,7164	0,00163666	671	450241	25,9037	0,00149031
552	304704	23,4947	0,00181159	612	374544	24,7386	0,00163399	672	451584	25,9230	0,00148810
553	305809	23,5160	0,00180832	613	375769	24,7588	0,00163132	673	452929	25,9422	0,00148588
554	306916	23,5372	0,00180505	614	376996	24,7790	0,00162866	674	454276	25,9615	0,00148368
555	308025	23,5584	0,00180180	615	378225	24,7992	0,00162602	675	455625	25,9808	0,00148148
556	309136	23,5797	0,00179856	616	379456	24,8193	0,00162338	676	456976	26,0000	0,00147929
557	310249	23,6008	0,00179533	617	380689	24,8395	0,00162075	677	458329	26,0192	0,00147710
558	311364	23,6220	0,00179211	618	381924	24,8596	0,00161812	678	459684	26,0384	0,00147493
559	312481	23,6432	0,00178891	619	383161	24,8797	0,00161551	679	461041	26,0576	0,00147275
560	313600	23,6643	0,00178571	620	384400	24,8998	0,00161290	680	462400	26,0768	0,00147059
561	314721	23,6854	0,00178253	621	385641	24,9199	0,00161031	681	463761	26,0960	0,00146843
562	315844	23,7065	0,00177936	622	386884	24,9399	0,00160772	682	465124	26,1151	0,00146628
563	316969	23,7276	0,00177620	623	388129	24,9600	0,00160514	683	466489	26,1343	0,00146413
564	318096	23,7487	0,00177305	624	389376	24,9800	0,00160256	684	467856	26,1534	0,00146199
565	319225	23,7697	0,00176991	625	390625	25,0000	0,00160000	685	469225	26,1725	0,00145985
566	320356	23,7908	0,00176678	626	391876	25,0200	0,00159744	686	470596	26,1916	0,00145773
567	321489	23,8118	0,00176367	627	393129	25,0400	0,00159490	687	471969	26,2107	0,00145560
568	322624	23,8328	0,00176056	628	394384	25,0599	0,00159236	688	473344	26,2298	0,00145349
569	323761	23,8537	0,00175747	629	395641	25,0799	0,00158983	689	474721	26,2488	0,00145138
570	324900	23,8747	0,00175439	630	396900	25,0998	0,00158730	690	476100	26,2679	0,00144928
571	326041	23,8956	0,00175131	631	398161	25,1197	0,00158479	691	477481	26,2869	0,00144718
572	327184	23,9165	0,00164825	632	399424	25,1396	0,00158228	692	478864	26,3059	0,00144509
573	328329	23,9374	0,00174520	633	400689	25,1595	0,00157978	693	480249	26,3249	0,00144300
574	329476	23,9583	0,00174216	634	401956	25,1794	0,00157729	694	481636	26,3439	0,00144092
575	330625	23,9792	0,00173913	635	403225	25,1992	0,00157480	695	483025	26,3629	0,00143885
576	331776	24,0000	0,00173611	636	404496	25,2190	0,00157233	696	484416	26,3818	0,00143678
577	332929	24,0208	0,00173310	637	405769	25,2389	0,00156986	697	485809	26,4008	0,00143472
578	334084	24,0416	0,00173010	638	407044	25,2587	0,00156740	698	487204	26,4197	0,00143266
579	335241	24,0624	0,00172712	639	408321	25,2784	0,00156495	699	488601	26,4386	0,00143062
580	336400	24,0832	0,00172414	640	409600	25,2982	0,00156250	700	490000	26,4575	0,00142857
581	337561	24,1039	0,00172117	641	410881	25,3180	0,00156006	701	491401	26,4764	0,00142653
582	338724	24,1247	0,00171821	642	412164	25,3377	0,00155763	702	492804	26,4953	0,00142450
583	339889	24,1454	0,00171527	643	413449	25,3574	0,00155521	703	494209	26,5141	0,00142248
584	341056	24,1661	0,00171233	644	414736	25,3772	0,00155280	704	495616	26,5330	0,00142045
585	342225	24,1868	0,00170940	645	416025	25,3969	0,00155039	705	497025	26,5518	0,00141844
586	343396	24,2074	0,00170648	646	417316	25,4165	0,00154799	706	498436	26,5707	0,00141643
587	344569	24,2281	0,00170358	647	418609	25,4362	0,00154560	707	499849	26,5895	0,00141443
588	345744	24,2487	0,00170068	648	419904	25,4558	0,00154321	708	501264	26,6083	0,00141243
589	346921	24,2693	0,00169779	649	421201	25,4755	0,00154083	709	502681	26,6271	0,00141044
590	348100	24,2899	0,00169492	650	422500	25,4951	0,00153846	710	504100	26,6458	0,00140845
591	349281	24,3105	0,00169205	651	423801	25,5147	0,00153610	711	505521	26,6646	0,00140647
592	350464	24,3311	0,00168919	652	425104	25,5343	0,00153374	712	506944	26,6833	0,00140449
593	351649	24,3516	0,00168634	653	426409	25,5539	0,00153139	713	508369	26,7021	0,00140252
594	352836	24,3721	0,00168350	654	427716	25,5734	0,00152905	714	509796	26,7208	0,00140056
595	354025	24,3926	0,00168067	655	429025	25,5930	0,00152672	715	511225	26,7395	0,00139860
596	355216	24,4131	0,00167785	656	430336	25,6125	0,00152439	716	512656	26,7582	0,00139665
597	356409	24,4336	0,00167504	657	431649	25,6320	0,00152207	717	514089	26,7769	0,00139470
598	357604	24,4540	0,00167224	658	432964	25,6515	0,00151976	718	515524	26,7955	0,00139276
599	358801	24,4745	0,00166945	659	434281	25,6710	0,00151745	719	516961	26,8142	0,00139082
600	360000	24,4949	0,00166667	660	435600	25,6905	0,00151515	720	518400	26,8328	0,00138889

Таблица М (продолжение)

N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N	N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N	N	N^2	$\sqrt{N}$	1/N
721	519841	26,8514	0,00138696	781	609961	27,9464	0,00128041	841	707281	29,0000	0,00118906
722	521284	26,8701	0,00138504	782	611524	27,9643	0,00127877	842	708964	29,0172	0,00118765
723	522729	26,8887	0,00138313	783	613089	27,9821	0,00127714	843	710649	29,0345	0,00118624
724	524176	26,9072	0,00138122	784	614656	28,0000	0,00127551	844	712336	29,0517	0,00118483
725	525625	26,9258	0,00137931	785	616225	28,0179	0,00127389	845	714025	29,0689	0,00118343
726	527076	26,9444	0,00137741	786	617796	28,0357	0,00127226	846	715716	29,0861	0,00118203
727	528529	26,9629	0,00137552	787	619369	28,0535	0,00127065	847	717409	29,1033	0,00118064
728	529984	26,9815	0,00137363	788	620944	28,0713	0,00126904	848	719104	29,1204	0,00117925
729	531441	27,0000	0,00137174	789	622521	28,0891	0,00126743	849	720801	29,1376	0,00117786
730	532900	27,0185	0,00136986	790	624100	28,1069	0,00126582	850	722500	29,1548	0,00117647
731	534361	27,0370	0,00136799	791	625681	28,1247	0,00126422	851	724201	29,1719	0,00117509
732	535824	27,0555	0,00136612	792	627264	28,1425	0,00126263	852	725904	29,1890	0,00117371
733	537289	27,0740	0,00136426	793	628849	28,1603	0,00126103	853	727609	29,2062	0,00117233
734	538756	27,0924	0,00136240	794	630436	28,1780	0,00125945	854	729316	29,2233	0,00117096
735	540225	27,1109	0,00136054	795	632025	28,1957	0,00125786	855	731025	29,2404	0,00116959
736	541696	27,1293	0,00135870	796	633616	28,2135	0,00125628	856	732736	29,2575	0,00116822
737	543169	27,1477	0,00135685	797	635209	28,2312	0,00125471	857	734449	29,2746	0,00116686
738	544644	27,1662	0,00135501	798	636804	28,2489	0,00125313	858	736164	29,2916	0,00116550
739	546121	27,1846	0,00135318	799	638401	28,2666	0,00125156	859	737881	29,3087	0,00116414
740	547600	27,2029	0,00135135	800	640000	28,2843	0,00125000	860	739600	29,3258	0,00116279
741	549081	27,2213	0,00134953	801	641601	28,3019	0,00124844	861	741321	29,3428	0,00116144
742	550564	27,2397	0,00134771	802	643204	28,3196	0,00124688	862	743044	29,3598	0,00116009
743	552049	27,2580	0,00134590	803	644809	28,3373	0,00124533	863	744769	29,3769	0,00115875
744	553536	27,2764	0,00134409	804	646416	28,3549	0,00124378	864	746496	29,3939	0,00115741
745	555025	27,2947	0,00134228	805	648025	28,3725	0,00124224	865	748225	29,4109	0,00115607
746	556516	27,3130	0,00134048	806	649636	28,3901	0,00124069	866	749956	29,4279	0,00115473
747	558009	27,3313	0,00133869	807	651249	28,4077	0,00123916	867	751689	29,4449	0,00115340
748	559504	27,3496	0,00133690	808	625864	28,4253	0,00123762	868	753424	29,4618	0,00115207
749	561001	27,3679	0,00133511	809	654481	28,4429	0,00123609	869	755161	29,4788	0,00115075
750	562500	27,3861	0,00133333	810	656100	28,4605	0,00123457	870	756900	29,4958	0,00114943
751	564001	27,4044	0,00133156	811	657721	28,4781	0,00123305	871	758641	29,5127	0,00114811
752	565504	27,4226	0,00132979	812	659344	28,4956	0,00123153	872	760384	29,5296	0,00114679
753	567009	27,4408	0,00132802	813	660969	28,5132	0,00123001	873	762129	29,5466	0,00114548
754	568516	27,4591	0,00132626	814	662596	28,5307	0,00122850	874	763876	29,5635	0,00114416
755	570025	27,4773	0,00132450	815	664225	28,5482	0,00122699	875	765625	29,5804	0,00114286
756	571536	27,4955	0,00132275	816	665856	28,5657	0,00122549	876	767376	29,5973	0,00114155
757	573049	27,5136	0,00132100	817	667489	28,5832	0,00122399	877	769129	29,6142	0,00114025
758	574564	27,5318	0,00131926	818	669124	28,6007	0,00122249	878	770884	29,6311	0,00113895
759	576081	27,5500	0,00131752	819	670761	28,6182	0,00122100	879	772641	29,6479	0,00113766
760	577600	27,5681	0,00131579	820	672400	28,6356	0,00121951	880	774400	29,6848	0,00113636
761	579121	27,5862	0,00131406	821	674041	28,6531	0,00121803	881	776161	29,6816	0,00113507
762	580644	27,6043	0,00131234	822	675684	28,6705	0,00121655	882	777924	29,6985	0,00113379
763	582169	27,6225	0,00131062	823	677329	28,6880	0,00121507	883	779689	29,7153	0,00113250
764	583696	27,6405	0,00130890	824	678976	28,7054	0,00121359	884	781456	29,7321	0,00113122
765	585225	27,6586	0,00130719	825	680625	28,7228	0,00121212	885	783225	29,7489	0,00112994
766	586756	27,6767	0,00130548	826	682276	28,7402	0,00121065	886	784996	29,7658	0,00112867
767	588289	27,6948	0,00130378	827	683929	28,7576	0,00120919	887	786769	29,7825	0,00112740
768	589824	27,7128	0,00130208	828	685584	28,7750	0,00120773	888	788544	29,7993	0,00112613
769	591361	27,7308	0,00130039	829	687241	28,7924	0,00120627	889	790321	29,8161	0,00112486
770	592900	27,7489	0,00129870	830	688900	28,8097	0,00120482	890	792100	29,8329	0,00112360
771	594441	27,7669	0,00129702	831	690561	28,8271	0,00120337	891	793881	29,8496	0,00112233
772	595984	27,7849	0,00129534	832	692224	28,8444	0,00120192	892	795664	29,8664	0,00112108
773	597529	27,8029	0,00129366	833	693889	28,8617	0,00120048	893	797449	29,8831	0,00111982
774	599076	27,8209	0,00129199	834	695556	28,8791	0,00119904	894	799236	29,8998	0,00111857
775	600625	27,8388	0,00129032	835	697225	28,8964	0,00119760	895	801025	29,9166	0,00111732
776	602176	27,8568	0,00128866	836	698896	28,9137	0,00119617	896	802816	29,9333	0,00111607
777	603729	27,8747	0,00128700	837	700569	28,9310	0,00119474	897	804609	29,9500	0,00111483
778	605284	27,8927	0,00128535	838	702244	28,9482	0,00119332	898	806404	29,9666	0,00111359
779	606841	27,9106	0,00128370	839	703921	28,9655	0,00119190	899	808201	29,9833	0,00111235
780	608400	27,9285	0,00128205	840	705600	28,9828	0,00119048	900	810000	30,0000	0,00111111

Таблица М (продолжение)

N	N²	√N	1/N	N	N²	√N	1/N	N	N²	√N	1/N
901	811801	30,0167	0,00110988	936	876096	30,5941	0,00106838	971	942841	31,1609	0,00102987
902	813604	30,0333	0,00110865	937	877969	30,6105	0,00106724	972	944784	31,1769	0,00102881
903	815409	30,0500	0,00110742	938	879844	30,6268	0,00106610	973	946729	31,1929	0,00102775
904	817216	30,0666	0,00110619	939	881721	30,6431	0,00106496	974	948676	31,2090	0,00102669
905	819025	30,0832	0,00110497	940	883600	30,6594	0,00106383	975	950625	31,2250	0,00102564
906	820836	30,0998	0,00110375	941	885481	30,6757	0,00106270	976	952576	31,2410	0,00102459
907	822649	30,1164	0,00110254	942	887364	30,6920	0,00106157	977	954529	31,2570	0,00102354
908	824464	30,1330	0,00110132	943	889249	30,7083	0,00106045	978	956484	31,2730	0,00102249
909	826281	30,1496	0,00110011	944	891136	30,7246	0,00105932	979	958441	31,2890	0,00102145
910	828100	30,1662	0,00109890	945	893025	30,7409	0,00105820	980	960400	31,3050	0,00102041
911	829921	30,1828	0,00109769	946	894916	30,7571	0,00105708	981	962361	31,3209	0,00101937
912	831744	30,1993	0,00109649	947	896809	30,7734	0,00105597	982	964324	31,3369	0,00101833
913	833569	30,2159	0,00109529	948	898704	30,7896	0,00105485	983	966289	31,3528	0,00101729
914	835396	30,2324	0,00109409	949	900601	30,8058	0,00105374	984	968256	31,3688	0,00101626
915	837225	30,2490	0,00109290	950	902500	30,8221	0,00105263	985	970225	31,3847	0,00101523
916	839056	30,2655	0,00109170	951	904401	30,8383	0,00105152	986	972196	31,4006	0,00101420
917	840889	30,2620	0,00109051	952	906304	30,8545	0,00105042	987	974169	31,4166	0,00101317
918	842724	30,2985	0,00108932	953	908209	30,8707	0,00104932	988	976144	31,4325	0,00101215
919	844561	30,3150	0,00108814	954	910116	30,8869	0,00104822	989	978121	31,4484	0,00101112
920	846400	30,3315	0,00108696	955	912025	30,9031	0,00104712	990	980100	31,4643	0,00101010
921	848241	30,3480	0,00108578	956	913936	30,9192	0,00104603	991	982081	31,4802	0,00100908
922	850084	30,3645	0,00108460	957	915849	30,9354	0,00104493	992	984064	31,4960	0,00100806
923	851929	30,3809	0,00108342	958	917764	30,9516	0,00104384	993	986049	31,5119	0,00100705
924	853776	30,3974	0,00108225	959	919681	30,9677	0,00104275	994	988036	31,5278	0,00100604
925	855625	30,4138	0,00108108	960	921600	30,9839	0,00104167	995	990025	31,5436	0,00100503
926	857476	30,4302	0,00107991	961	923521	31,0000	0,00104058	996	992016	31,5595	0,00100402
927	859329	30,4467	0,00107875	962	925444	31,0161	0,00103950	997	994009	31,5753	0,00103842
928	861184	30,4631	0,00107759	963	927369	31,0322	0,00103842	998	996004	31,5911	0,00100200
929	863041	30,4795	0,00107643	964	929296	31,0483	0,00103734	999	998001	31,6070	0,00100100
930	864900	30,4959	0,00107527	965	931225	31,0644	0,00103627	1000	1000000	31,6228	0,00100000
931	866761	30,5123	0,00107411	966	933156	31,0805	0,00103520				
932	868624	30,5287	0,00107296	967	935089	31,0966	0,00103413				
933	870489	30,5450	0,00107181	968	937024	31,1127	0,00103306				
934	872356	30,5614	0,00107066	969	938961	31,1288	0,00103199				
935	874225	30,5778	0,00106952	970	940900	31,1448	0,00103093				

ОТВЕТЫ

Глава 1

Упражнения

1. Если $p = 0{,}05$, то событие может произойти в 5 случаях из 100 (или в 1 из 20). **2.** Если $p = 0{,}01$, то событие может произойти в 1 случае из 100. **3.** $p = 0{,}40$. **4.** $p = 0{,}75$. **5.** 1/52. **6.** 4/52, или 1/13. **7.** 13/52, или 1/4. **8.** 26/52, или 1/2. **9.** 2/52, или 1/26, **10.** 16/52, или 4/13.

11, 13, 15.

Возможный исход	f	p_x
Три ответа «да»	1	0,125
Два ответа «да»	3	0,375
Один ответ «да»	3	0,375
Ни одного ответа «да»	1	0,125
	8	1,000

12, 14, 16.

Возможный исход (сумма выпавших очков)	f	p_x	Возможный исход (сумма выпавших очков)	f	p_x
12	1	0,0278	6	5	0,1389
11	2	0,0556	5	4	0,1111
10	3	0,0833	4	3	0,0833
9	4	0,1111	3	2	0,0556
8	5	0,1389	2	1	0,0278
7	6	0,1667	Σ	36	1,0001*

* Отклонение 0,0001 объясняется ошибками округления.

17. $p_{x \geqslant 10} = 0{,}1667$. **18.** $p_{x \leqslant 3} = 0{,}0834$. **19.** $p_{x \geqslant 11} = 0{,}0834$. **20.** $p_{x \leqslant 4} = 0{,}1667$. **21.** $p_{x \geqslant 2} = 0{,}0278$. **22.** $p_{x \leqslant 5 \text{ или } x \geqslant 9} = 0{,}5556$. **23.** $p_{x \geqslant 12 \text{ или } x \leqslant 2} = 0{,}0556$. **24.** $p_{x \geqslant 9 \text{ или } x \leqslant 5} = 0{,}5556$. **25.** $p_{x \leqslant 6 \text{ или } x \geqslant 8} = 0{,}8333$. **26.** Принимающее решение, так как $p > 0{,}05$. **27.** Принимающее решение, поскольку $p > 0{,}05$. **28.** Принимающее решеиие, поскольку $p > 0{,}05$. **29.** Принимающее решение, поскольку $p > 0{,}05$. **30.** Принимающее решение. **31.** Отклоняющее решение. **32.** Прииимающее решение. **33.** Отклоняющее решение. **34.** Принимающее решение. **35.** Прииимающее решение. **36.** Отклоняющее решение. **37.** Принимающее решение. **38.** $\alpha = 0{,}01$. **39.** $\alpha = 0{,}05$. **40.** $P = Q = \frac{1}{2}$, где P — доля женщин, а Q — доля мужчин. **41.** $P = Q = \frac{1}{2}$, где P — доля лиц, совершающих ошибки при использовании круглых циферблатов; Q — доля лиц, совершающих ошибки при использовании прямоугольных циферблатов. **42.** $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$. **43.** $P \neq Q \neq \frac{1}{2}$. **44.** $H_0 : P \leqslant Q$, $H_1 : P > Q$. **45.** $H_0 : P \geqslant Q$, $H_1 : P < Q$. **46.** Принимающее решение. **47.** Отклоняющее решеиие. **48.** Принимающее решение. **49.** Отклоняющее решение. **50.** Отклоняющее решение. **51.** Принимающее решение. **52.** Принимающее решение. **53.** Отклоняющее решение. **54.** Вне критической области; принимающее решение. **55.** Внутри критической области; H_0 отклоияется. **56.** Вне критической области; принимающее решение. **57.** Виутри критической области; H_0 отклоняется. **58.** Внутри критической области для одностороннего критерия; H_0 отклоняется.

Контрольные вопросы

1. б. 2. а. 3. г. 4. а. 5. г. 6. в. 7. в. 8. в. 9. б. 10. а. 11. г. 12. а. 13. а. 14. в. 15. б. 16. а. 17. г. 18. в. 19. б. 20. а.

21.

Число событий для P-значения (x)	p_x	Число событий для P-значения (x)	p_x	Число событий для P-значения (x)	p_x
14	0,0000	9	0,1222	4	0, 611
13	0,0009	8	0,1833	3	0,0222
12	0,0056	7	0,2095	2	0,0056
11	0,0222	6	0,1833	1	0,0009
10	0,0611	5	0,1222	0	0,0000

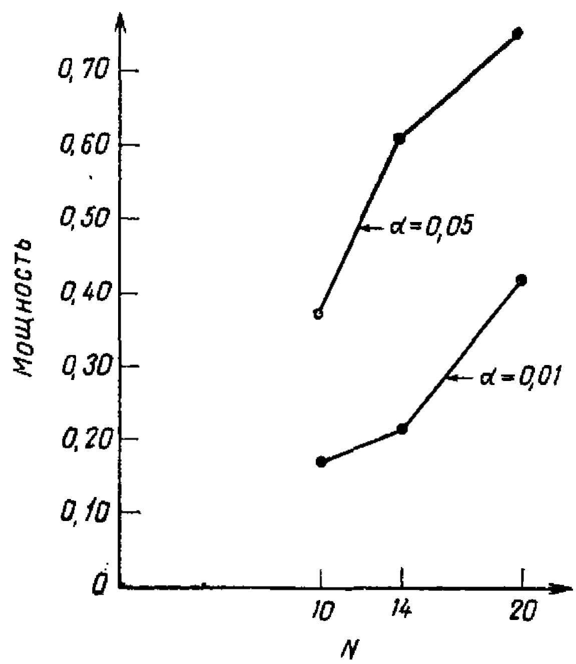
а) $x=11$; б) $x=12$ и $x=2$; в) $x=2$;
г) $x=12$; д) $x=13$ и $x=1$; е) $x=2$.

Глава 2

Упражнения

1. На основе имеющихся данных H_0 следует отклонить. Однако, поскольку H_0 верная, мы совершаем ошибку I рода (или α-типа). 2. На основе имеющихся данных H_0 следует принять. Поскольку H_0 верная, мы принимаем правильное решение. 3. Мы принимаем H_0, которая является ложной. В силу этого мы совершаем ошибку II рода (или β-типа). 4. Мы отклоняем H_0. Поскольку H_0 ложная, нами принято правильное решение. 5. Мы отклоняем H_0. Поскольку H_0 ложная, нами принято правильное решение. 6. Вероятность совершить ошибку I рода равна α. В данном случае $\alpha = 0{,}05$. 7. а) *Нулевая гипотеза* (H_0): $P \leqslant 0{,}20$; $Q \geqslant 0{,}80$. б) *Альтернативная гипотеза* (H_1) : $P > 0{,}20$; $Q < 0{,}80$. в) *Статистический критерий*: биномиальный. г) *Выборочное распределение*: биномиальное распределение при $N = 14$ и $P = 0{,}20$ для нулевого распределения и $P=0{,}50$ для истинного распределения. 8. *Критическое значение*: в таблице, находящейся перед упражнением 7, приведены накопленные вероятности, соответствующие различным значениям x при $P=0{,}20$ и $P=0{,}50$. Эти значения являются односторонними. Обратившись к нулевому распределению ($P=0{,}20$), мы обнаруживаем, что значению $x=6$ соответствует вероятность, равная 0,0439. 9. $p = 0{,}7880$. 10. $\beta = 0{,}2120$. 11. Мощность критерия $= 0{,}7880$. 12 $\beta = 0{,}4119$. 14. При любом заданном значении P и Q мощность критерия увеличивается при увеличении N. 15. $\beta=0{,}7483$. 16. $N_b=50$. 17. $N_b=24$. 18. $N_b = 20$. 19. $N_b = 77$. 20. $N_b = 30$.

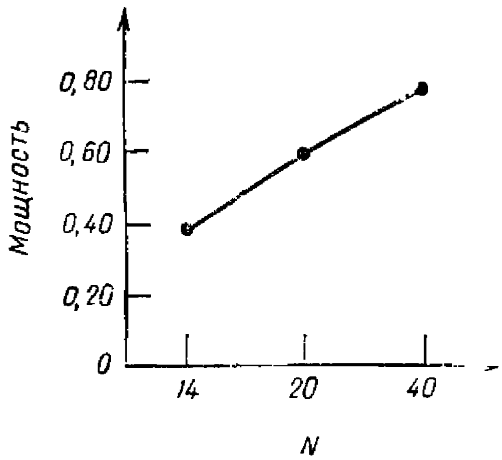
13.



Мощность критерия как функция α-уровня и N

Контрольные вопросы

1. г. 2. а. 3. в. 4. б. 5. г. 6. б. 7. а. 8. в. 9. б. 10. б. 11. а. 12. г. 13. Критическое значение x при нулевом распределении и $\alpha = 0{,}05$ равно 6. Соответствующее значение вероятности при истинном распределении равно 0,377. Таким образом, мощность критерия составляет 0,377. 14. Критическое значение x при нулевом распределении и $\alpha = 0{,}01$ равно 7. Мощность критерия равна 0,1719. 15. Критическое значение x при нулевом распределении и $\alpha = 0{,}05$ равно 7. Мощность критерия равна 0,6047. 16. Критическое значение x при нулевом распределении и $\alpha = 0{,}01$ равно 9. Мощность критерия равна 0,2120. 17. Критическое значение x при нулевом распределении и $\alpha = 0{,}05$ равно 9. Мощность критерия равна 0,7483. 18. Критическое значение x при нулевом распределении и $\alpha = 0{,}01$ равно 11. Мощность критерия равна 0,4119. 19. *Общий вывод.* При ложной H_0 мощность критерия увеличивается по мере увеличения α-уровня и N.



Глава 3

Упражнения

1. H_0 принимается. Наблюдаемое значение x меньше критического значения, равного 26. 2. Критическое значение равно 19. H_0 принимается. 3. Критическое значение равно 12. H_0 принимается. 4. Критическое значение равно 31. H_0 отклоняется. 5. Критическое значение равно 29. H_0 принимается. 6. Критическое значение равно 2. H_0 отклоняется. 7. Критическое значение равно 12. H_0 отклоняется. 8. Критическое значение равно 10. H_0 принимается. 9. Критическое значение равно 3. H_0 отклоняется. 10. Критическое значение равно 18. H_0 принимается. 11. Критическое значение равно 7. H_0 принимается. 12. df = 7. 13. df = 3. 14. df = 2. 15. df = 6. 16. Критическое значение равно 4,21. H_0 принимается. 17. Критическое значение равно 3,841. H_0 отклоняется. 18. Критическое значение равно 16,812. H_0 отклоняется. 19. Критическое значение равно 6,635. H_0 отклоняется. 20. $f_{ep} = 16{,}5$. 21. $f_{ep} = 26{,}8$. 22. $f_{ep} = 37{,}0$. 23. $f_{ep} = 8{,}8$. 24. $f_{eq} = 55 - 16{,}5 = 38{,}5$. 25. $f_{eq} = 67 - 26{,}8 = 40{,}2$. 26. $f_{eq} = 74 - 37 = 37$. 27. $f_{eq} = 88 - 8{,}8 = 79{,}2$. 28. $|f_o - f_e| = 8{,}5$. 29. $|f_o - f_e| = 7{,}2$. 30. $|f_o - f_e| = 8{,}0$. 31. $|f_o - f_e| = 11{,}2$. 32. $\chi^2 = \frac{(8{,}0)^2}{16{,}5} + \frac{(8{,}0)^2}{38{,}5} = 5{,}541$. 33. $\chi^2 = \frac{(6{,}7)^2}{26{,}8} + \frac{(6{,}7)^2}{40{,}2} = 2{,}792$. 34. $\chi^2 = \frac{(7{,}5)^2}{37} + \frac{(7{,}5)^2}{37} = 3{,}041$. 35. $\chi^2 = \frac{(10{,}7)^2}{8{,}8} + \frac{(10{,}7)^2}{79{,}2} = 14{,}456$. 36. $f_e = 1/6 \cdot 180 = 30$.

37.

	1	2	3	4	5	6
f_o	26	35	39	28	22	30
f_e	30	30	30	30	30	30
$f_o - f_e$	—4	5	9	—2	—8	0

$$\Sigma\,(f_0 - f_e) = -4 + 5 + 9 - 2 - 8 + 0 = -14 + 14 = 0.$$

38. $\chi^2 = \dfrac{(-4)^2 + (5)^2 + (9)^2 + (-2)^2 + (-8)^2 + (0)^2}{30} = 6{,}333$. **39.** $\mathrm{df} = k - 1 = 5$. **40.** Критическое значенне равно 11,07. Поскольку расчетное значение χ^2 не достигает критнческого, мы принимаем H_0.

Контрольные вопросы

1. а. **2.** б. **3.** в. **4.** в. **5.** г. **6.** а. **7.** б. **8.** а. **9.** в. **10.** б. **11.** г. **12.** в. **13.** Все приведенные ответы получены с помощью двусторонних критериев значнмостн: а) принимается; б) отклоняется; в) прннимается; г) принимается; д) отклоняется. **14.** Все приведенные ответы получены с помощью одностороннмх критериев значимости: а) принимается; б) отклоняется; в) отклоняется; г) прннимается; д) принимается. **15.** $\chi^2 = 1{,}485$, $\mathrm{df} = 1$, H_0 принимается. **16.** $\chi^2 = 8{,}337$, $\mathrm{df} = 3$, H_0 принимается.

Глава 4

Упражнения

1.

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за
Находящиеся на частной службе	1	7
Государственные служащие	6	2

2.

	Высказавшиеся против	Высказавшиеся за
Студенты I курса	11	5
Студенты IV курса	2	10

3.

A	$\underline{B}$	$A+B$
C	D	$C+D$
$A+C$	$\underline{B}+D$	

4.

A	$\underline{B}$	$\underline{A}+B$
$\underline{C}$	D	$C+\underline{D}$
$\underline{A}+\underline{C}$	$B+D$	

5.

A	$\underline{B}$	$A+B$
$\underline{C}$	D	$\underline{C}+D$
$A+\underline{C}$	$\underline{B}+\underline{D}$	

6. *Нулевая гипотеза* (H_0): в генеральной совокупности доли государственных служащих и находящихся на частной службе, одобряющих право на забастовку, совпадают. *Альтернативная гипотеза* (H_1): в генеральной совокупности доли государственных служащих и находящихся на частной службе, одобряющих право на забастовку, не совпадают. *Статистический критерий*: поскольку данные состоят из наблюдаемых частот для значений двух переменных и $N \leqslant 30$, подходящим критерием является критерий точной вероятности Фишера. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний. *Критическое значение*: $D \leqslant 1$. **7, 8, 9.** Ответа не требуется. **10.** $D \leqslant 1$. Поскольку $D = 2$ больше критического значения, мы принимаем H_0.

11.

	Группа I	Группа II	
+	13	2	$A+B=15$
—	4	11	$C+D=15$
	17	13	

12. $C \leqslant 5$ при $\alpha = 0{,}01$. Поскольку наблюдаемое значение C меньше критического, мы отклоняем H_0.

13.

	+	—	
Группа I	13	4	17
Группа II	2	11	13
	15	15	30

Клетка	f_e
A	$\frac{17 \cdot 15}{30} = 8{,}5$
B	$\frac{17 \cdot 15}{30} = 8{,}5$
C	$\frac{13 \cdot 15}{30} = 6{,}5$
D	$\frac{13 \cdot 15}{30} = 6{,}5$

14.

Клетка	f_o	f_e	$\lvert f_o - f_e \rvert$
A	13	8,5	4,5
B	4	8,5	4,5
C	2	6,5	4,5
D	11	6,5	4,5

15.

Клетка	$\lvert f_o - f_e \rvert - 0{,}5$	$(\lvert f_o - f_e \rvert - 0{,}5)^2$
A	4,00	16,0
B	4,00	16,0
C	4,00	16,0
D	4,00	16,0

16.

Клетка	f_e	$(\lvert f_o-f_e\rvert-0,5)^2$	$\frac{(\lvert f_o-f_e\rvert-0,5)^2}{f_e}$
A	8,5	16,00	1,88
B	8,5	16,00	1,88
C	6,5	16,00	2,46
D	6,5	16,00	2,46
			$\chi^2=8,68$

17. $df = (r-1)(c-1) = 1$. **18.** Критическое значение $\chi^2 = 6,64$. Поскольку полученное значение $\chi^2 = 8,68$ превышает критическое, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

19. Клетка

$$A \qquad \frac{(A+B)(A+C+E+G)}{N}=\frac{59\cdot 130}{245}=31,31$$

$$B \qquad \frac{(A+B)(B+D+F+H)}{N}=\frac{59\cdot 115}{245}=27,69$$

$$C \qquad \frac{(C+D)(A+C+E+G)}{N}=\frac{61\cdot 130}{245}=32,37$$

$$D \qquad \frac{(C+D)(B+D+F+H)}{N}=\frac{61\cdot 115}{245}=28,63$$

$$E \qquad \frac{(E+F)(A+C+E+G)}{N}=\frac{61\cdot 130}{245}=32,37$$

$$F \qquad \frac{(E+F)(B+D+F+H)}{N}=\frac{61\cdot 115}{245}=28,63$$

$$G \qquad \frac{(G+H)(A+C+E+G)}{N}=\frac{64\cdot 130}{245}=33,96$$

$$H \qquad \frac{(G+H)(B+D+F+H)}{N}=\frac{64\cdot 115}{245}=30,04$$

$$\Sigma=245,00$$

20, 21.

Клетка	f_o	f_e	f_o-f_e	$(f_o-f_e)^2$	$\frac{(f_o-f_e)^2}{f_e}$
A	21	31,31	−10,31	106,30	3,40
B	38	27,69	10,31	106,30	3,84
C	32	32,37	− 0,37	0,14	0,00
D	29	28,63	0,37	0,14	0,00
E	36	32,37	3,63	13,18	0,41
F	25	28,63	− 3,63	13,18	0,46
G	41	33,96	7,04	49,56	1,46
H	23	30,04	− 7,04	49,56	1,65
				$\Sigma\lvert f_o-f_e\rvert=0,00$	$\chi^2=11,22$

22. $df = (r-1)(c-1) = 3 \cdot 1 = 3$. 23. Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}01$ и $df = 3$ равняется 11,341. Поскольку наблюдаемое значение χ^2 не превышает критического, мы не можем отклонить H_0.

Контрольные вопросы

1. в. 2. б. 3. г. 4. г. 5. г. 6. а. 7. в. 8. г. 9. б. 10. а. 11. г. 12. а. 13. в. 14. в. 15. $A+B=14$ и $C+D=11$. Поскольку для $B=4$ нет табличных значений, мы используем $A=10$. Критическое значение C при $\alpha=0{,}05$ и одностороннем критерии равно 3. Поскольку наблюдаемое значение C не превышает этот уровень, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

16. $$\chi^2 = \frac{(3,67)^2}{15,83} + \frac{(3,67)^2}{31,17} + \frac{(3,67)^2}{16,17} + \frac{(3,67)^2}{31,83} = 0,85+0,43+0,83+0,42 = 2,53.$$

Критическое значение χ^2 при $\alpha=0{,}01$ и одной степени свободы равно 6,635. Поскольку расчетное значение χ^2 не превышает этот уровень, мы принимаем H_0.

17. $$\chi^2 = \frac{(-9,29)^2}{25,29} + \frac{(-0,45)^2}{20,45} + \frac{(9,74)^2}{24,26} + \frac{(0,43)^2}{24,57} + \frac{(1,13)^2}{19,87} +$$
$$+ \frac{(-1,56)^2}{23,56} + \frac{(8,87)^2}{23,13} + \frac{(-0,69)^2}{18,69} + \frac{(-8,18)^2}{22,18} = 3,41+0,01+3,91+$$
$$+0,01+0,06+0,10+3,40+0,03+3,02 = 13,95; \quad df = 4.$$

Критическое значение χ^2 при $\alpha=0{,}01$ и четырех степенях свободы равно 13,277. Поскольку расчетное значение χ^2 превышает этот уровень, мы можем отклонить H_0 и принять H_1.

Глава 5

Упражнения

1.

		После		
		−	+	
До	+	14	10	24
	−	9	3	12
		23	13	36

2. 14. 3. 3. 4. 9. 5. 10. 6. 17. 7. *Нулевая гипотеза* $(H_0): P = Q = \frac{1}{2}$. *Альтернативная гипотеза* $(H_1): P \neq Q \neq \frac{1}{2}$: *Статистический критерий*: критерий Макнимара. *Выборочное распределение*: биномиальное распределение при $N = 17$. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний. *Критическое значение*: в табл. А находим, что при $\alpha = 0{,}01$, двустороннем критерии и $N = 17$ значимость имеет место при x или $(N-x) \geqslant 14$. Поскольку наблюдаемое значение $x = 14$, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. Экспериментальные условия приводят к существенно большей доле отрицательных изменений по сравнению с положительными. 8. $\chi^2 = \frac{(|28-46|-1)^2}{28+46} = \frac{(18-1)^2}{74} = 3{,}91$. 9. Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}05$ и $df = 1$ равно 3,841. Поскольку расчетное значение χ^2 превышает этот уровень, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

10—14.

Однородные группы	X_1	X_2	X_3	ΣX_R	ΣX_R^2
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	1
5	0	1	1	2	4
6	1	0	0	1	1
7	1	1	1	3	9
8	0	0	1	1	1
9	0	1	1	2	4
10	0	1	1	3	9
11	1	1	0	1	1
	3	6	8	$\Sigma(\Sigma X_R)=17$	$\Sigma(\Sigma X_R^2)=33$

11. $\Sigma X_1 = 3$, $\Sigma X_2 = 6$, $\Sigma X_3 = 8$, $\Sigma(\Sigma X_R) = 17$, $\Sigma(\Sigma X_R^2) = 33$. **12.** $Q = \frac{2\,[3\,(3^2+6^2+8^2)-17^2]}{3\cdot 30-33} = \frac{2\,(327-289)}{90-33} = \frac{76}{57} = 1{,}33$. **13.** $\mathrm{df} = 3-1 = 2$. **14.** При $\alpha = 0{,}01$ и $\mathrm{df} = 2$ критическое значение χ^2 равно 9,210. Поскольку найденное значение $Q(\chi^2)$ не превышает этого уровня, мы принимаем H_0.

Контрольные вопросы

1.г. **2.**в. **3.**б. **4.**г. **5.**а. **6.**г. **7.**а. **8.**г. **9.**в. **10.**а. **11.**в. **12.**г.

13.

После

		−	+	
До	+	5	15	20
	−	8	12	20
		13	27	

Критическое значение x при $\alpha=0{,}05$, одностороннем критерии и $N=17$ равно 13. Поскольку найденное значение x (12) не превышает этого уровня, мы принимаем H_0.

14. $\chi^2 = \frac{(|14-38|-1)^2}{52} = 10{,}17$. Критическое значение χ^2 при $\alpha=0{,}01$ и $\mathrm{df}=1$ равно 6,635. Поскольку расчетное значение χ^2 превышает этот уровень, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. **15.** $\Sigma(\Sigma X)^2 = 226$, $\Sigma(\Sigma X_R) = 32$, $\Sigma(\Sigma X_R^2) = 122$, $\Sigma(X_T)^2 = 1024$, $k=5$.

$$Q = \frac{5-1\cdot(5\cdot 226-1\,024)}{5\cdot 32-122} = \frac{424}{38} = 11{,}16,\ \mathrm{df}=4.$$

Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}01$ и $\mathrm{df} = 4$ равно 13,277. Поскольку полученное значение Q (χ^2) не превышает этого уровня, мы принимаем H_0.

Глава 6

Упражнения

1.

	Порядковая позиция						Итого
	1	2	3	4	5	6	
f_o	1	5	10	7	4	3	30
f_e	5	5	5	5	5	5	30

2.

	1	2	3	4	5	6
f_o	1/30	5/30	10/30	7/30	4/30	3/30
f_e	5/30	5/30	5/30	5/30	5/30	5/30

3—4.

	1	2	3	4	5	6
Накопленные наблюдаемые отношения	1/30	6/30	16/30	23/30	27/30	30/30
Накопленные ожидаемые отношения	5/30	10/30	15/30	20/30	25/30	30/30
Абсолютное значение разности	4/30	4/30	1/30	3/30	2/30	0/30

5. $D = 0{,}133$. Поскольку наблюдаемое D не превышает критического значения, равного 0,290, мы принимаем H_0. **6.** Критическое значение D равно $1{,}36/\sqrt{43} = 0{,}207$. **7.** Критическое значение D равно $1{,}63/\sqrt{43} = 0{,}249$. **8.** Критическое значение D равно $1{,}63/\sqrt{92} = 0{,}170$. **9.** Критическое значение D равно $1{,}36/\sqrt{71} = 0{,}161$. **10.** $R = 6$. **11.** $R = 4$. **12.** $R = 5$. **13.** $R = 7$. **14.** $R = 4$. **15.** *Нулевая гипотеза* (H_0): последовательность мужчин и женщин случайная. *Альтернативная гипотеза* (H_1): последовательность мужчин и женщин не случайная. *Статистический критерий*: критерий серий для одной выборки. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. *Выборочное распределение*: в табл. F содержатся критические значения R для n_1 и $n_2 \leqslant 20$ при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии. *Критическое значение*: см. ответ к упражнению 18. **16.** $n_1 = 10$ (мужчины), $n_2 = 7$ (женщины). **17.** $R = 11$. **18.** Критические значения: $R \leqslant 5$ или $R \geqslant 14$. Поскольку наблюдаемое R находится между критическими значениями, мы принимаем H_0. **19.** *Нулевая гипотеза* (H_0): последовательность положительных и отрицательных ответов случайная. *Альтернативная гипотеза* (H_1): последовательность положительных и отрицательных ответов не случайная. *Статистический критерий*: поскольку n_1 и n_2 превышают 20, используется аппроксимация R с помощью нормальной кривой. *Выборочное распределение*: нормальное (см. табл. G). *Критическое значение*: $z = \pm 2{,}58$ при $\alpha = 0{,}01$ и двустороннем критерии. **20.** $n_1 = 22$, $n_2 = 21$. **21.** $R = 14$.

22. $$z = \frac{14 - \left(\frac{924}{43} + 1\right)}{\sqrt{\frac{924\,(924 - 43)}{60^2 \cdot 42}}} = \frac{-7{,}49}{2{,}32} = -3{,}23.$$

Поскольку полученное z превышает критическое значение, мы отклоняем H_0. Порядок следования ответов не является случайным, т. е. выясняется, что на ответы субъектов оказывает влияние предыдущий ответ.

Контрольные вопросы

1. а. 2. г. 3. в. 4. в. 5. б. 6. г. 7. г. 8. а. 9. в. 10. в.

11.

	Порядковая позиция						
	1	2	3	4	5	6	7
Накопленные наблюдаемые отношения	6/119	15/119	29/119	45/119	64/119	89/119	119/119
Накопленные ожидаемые отношения	17/119	34/119	51/119	68/119	85/119	102/119	119/119
Абсолютное значение разности	11/119	19/119	22/119	23/119	21/119	13/119	0/119

Находим, что наибольшим отношением является 23/119. Выразив его в виде десятичной дроби, получаем 0,193. Поскольку N превышает 35, для определения критического значения D при $\alpha = 0{,}05$ мы воспользуемся формулой: $D = \frac{1{,}36}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}36}{\sqrt{119}} = 0{,}125$. Поскольку полученное D превышает критическое значение D при $\alpha = 0{,}05$, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. **12.** n_1 (число нулей) $= 19$, n_2 (число единиц) $= 23$, $R = 27$,

$$z = \frac{R - \left(\frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1\right)}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}} = \frac{27 - 21{,}81}{\sqrt{\frac{874(874-42)}{42^2 \cdot 41}}} =$$

$$= \frac{5.19}{\sqrt{\frac{727\,168}{72\,324}}} = \frac{5{,}19}{3{,}17} = 1{,}64.$$

Поскольку критическое значение z при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии равного 1,96, мы принимаем H_0.

Глава 7

Упражнения

1. *Нулевая гипотеза* (H_0): не существует различия между оценками административных способностей людей, получивших два разных типа подготовки. *Альтернативная гипотеза* (H_1): существует различие между оценками административных способностей людей, получивших два разных типа подготовки. *Статистический критерий*: данные представлены в виде таблицы 2×2. Поскольку n_1 и n_2 не превышают 20, подходящим критерием является критерий точной

вероятности Фишера. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний. *Критическое значение*: критическое значение D будет установлено только после определения значений $A+B$, $C+D$ и B.

2.

Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие
109	A	41	B	16	B
105	A	35	B	14	B
93	A	29	B	11	A
86	A	23	A	10	B
72	A	21	A	9	B
67	B	20	B	8	B
66	A	20	A	5	B
59	A	19	B		
42	A	18	A		

3. Медианой является (26/2)-я или 13-я отметка, которая равна 23.

4.

	Группа A	Группа B	Итого
Число отметок, превышающих медиану	8	4	12
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	4	9	13
Итого	12	13	25

Поскольку табл. D позволяет получить критические значения D только если $A+B \geqslant C+D$, мы должны преобразовать приведенную выше таблицу 2×2 таким образом, чтобы $A+B=13$ и $C+D=12$.

	Группа A	Группа B	Итого
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	4	9	13
Число отметок, превышающих медиану	8	4	12
Итого	12	13	25

5. $A+B=13$, $C+D=12$. Табл. D показывает, что при $A+B=13$, $C+D=12$ и $B=9$ для отклонения H_0 D должно быть меньше или равно 1. Поскольку наблюдаемое D превышает критическое значение, мы принимаем H_0.

6.

Клетка	f_o	f_e	$\lvert f_o-f_e\rvert-0,5$	$(\lvert f_o-f_e\rvert-0,5)^2$	$(\lvert f_o-f_e\rvert-0,5)^2/f_e$
A	18	13	4,5	20,25	1,558
B	8	13	4,5	20,25	1,558
C	8	13	4,5	20,25	1,558
D	18	13	4,5	20,25	1,558
					6,232

$$\chi^2 = 6{,}232,\ df = 1.$$

Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}01$ и $df = 1$ равно 6,635. Поскольку расчетное значение χ^2 не превышает этого уровня, мы принимаем H_0.

7. *Нулевая гипотеза* (H_0): средние оценки административных способностей людей, получивших два различных типа подготовки, отобраны из одной генеральной совокупности. *Альтернативная гипотеза* (H_1): средние оценки административных способностей людей, получивших два различных типа подготовки, не были отобраны из одной генеральной совокупности. *Статистический критерий*: поскольку данные соответствуют порядковой шкале или более высоким шкалам, подходящим критерием является U-критерий Манна—Уитни. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}01$, критерий двусторонний. *Критическое значение*: из табл. Н видно, что в случае $n_1 = 12$, $n_2 = 13$, $\alpha = 0{,}01$ при двустороннем критерии значимость имеет место при $U \leqslant 31$ или $U \geqslant 125$.

8,9.

Отметка	Условие	Ранг	Отметка	Условие	Ранг
109	A	1	21	B	14
105	A	2	20	B	15,5
93	A	3	20	A	15,5
86	A	4	19	B	17
72	A	5	18	A	18
67	B	6	16	B	19
66	A	7	14	B	20
59	A	8	11	A	21
42	A	9	10	B	22
41	B	10	9	B	23
35	B	11	8	B	24
29	B	12	5	B	25
23	A	13			

10.

A	B	A	B
1	6	9	19
2	10	13	20
3	11	15,5	22
4	12	18	23
5	14	21	24
7	15,5		25
8	17		

$R_1=106{,}5$; $R_2=218{,}5$. *Проверка*: $\frac{N}{2}(1+N) = 12{,}5\cdot 26 = 325$, $R_1+R_2=325$.

11. $U = 12 \cdot 13 + \frac{12 \cdot 13}{2} - 106{,}5 = 127{,}5$. **12.** Поскольку $U \geqslant 125$ значимо при 1%-ном уровне и наблюдаемое U превышает это значение, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. **13.** $U' = 12 \cdot 13 + \frac{13 \cdot 14}{2} - 218{,}5 = 28{,}5$; $U = n_1 n_2 - U' = 156 - 28{,}5 = 127{,}5$.

14, 15. А А А А А В А А А В В В А В В А В А В В А В В В В, $R = 12$;
А А А А А В А А А В В В А В А В В А В В А В В В В, $R = 12$.

16. Критическое значение R при $\alpha = 0{,}05$ в случае $n_1 = 12$ и $n_2 = 13$ равно 8. Поскольку $R = 12$ превышает это значение, мы принимаем H_0. **17.** *Нулевая гипотеза* (H_0): оценки обеих групп были отобраны из одной генеральной совокупности. *Альтернативная гипотеза* (H_1): оценки обеих групп не были отобраны из одной генеральной совокупности. *Статистический критерий*: данные являются порядковыми и нас интересуют любые различия, которые могли возникнуть в результате влияния экспериментальных условий. Поэтому подходящим будет критерий Вальда—Вольфовица. Однако поскольку $n > 20$, мы воспользуемся z-статистикой. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. *Выборочное распределение*: нормальное. *Критическое значение*: критическое значение z при $\alpha = 0{,}05$ и двустороннем критерии равно $|\pm 1{,}96|$. Если наблюдаемое значение z по абсолютной величине больше или равно 1,96, то H_0 отклоняется.

18.

Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие
119	В	45	В	16	В
109	В	44	В	14	А
104	В	36	А	13	А
101	В	34	В	11	А
99	В	31	А	10	А
95	В	29	А	10	А
93	А	27	А	9	А
88	В	26	В	8	А
79	В	25	А	7	В
70	В	22	А	6	А
62	В	20	А	5	А
57	В	19	А	5	А
53	В	18	А	3	А
49	А	17	А		

$n_1 = 23$ $n_2 = 18$

19. В В В В В В А В В В В В В А В В А В А А А В А А А А А А А
В А А А А, $R = 12$.

$$20.\quad |z| = \frac{\left|12 - \frac{2 \cdot 23 \cdot 18}{28 + 18} + 1\right| - 0{,}5}{\sqrt{\frac{2 \cdot 23 \cdot 18(2 \cdot 23 \cdot 18 - 23 - 18)}{(23 + 18)^2 (23 + 18 - 1)}}} = \frac{9{,}70}{\sqrt{\frac{828 \cdot 787}{1\,681 \cdot 40}}} = \frac{9{,}70}{\sqrt{\frac{651\,636}{67\,240}}} = $$

$$= \frac{9{,}70}{3{,}11} = 3{,}19.$$

Поскольку наблюдаемое z больше 1,96, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

21.

Отметка	Условие	Отметка	Условие	Отметка	Условие
95	II	59	III	33	I
94	III	59	III	29	II
92	III	58	II	26	I
88	II	57	III	25	III
82	III	54	III	22	II
81	III	49	II	20	II
79	III	48	I	20	I
76	II	46	I	17	I
75	II	45	II	16	I
75	III	45	II	13	I
74	I	41	II	5	I
69	I	39	I		
68	II	36	I		
60	III	34	I		

22. Медиана соответствует 20-й строке и равна 49.

23.

	I	II	III	Итого
Число отметок, превышающих медиану	2	6	11	19
Число отметок, меньших, чем медиана, либо равных ей	12	7	1	20
Итого	14	13	12	39

24—26.

Клетка	f_o	f_e	f_o-f_e	$(f_o-f_e)^2$	$(f_o-f_e)^2/f_e$
A	2	6,82	—4,82	23,23	3,41
B	6	6,33	—0,33	0,11	0,02
C	11	5,85	5,15	26,56	4,53
D	12	7,18	4,82	23,23	3,24
E	7	6,67	0,33	0,11	0,02
F	1	6,15	—5,15	26,56	4,54
			$\Sigma \mid f_o - f_e \mid = 0{,}00$		15,76

$$\chi^2 = 15{,}76$$

27. $df = 2$. 28. Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}05$ равно 5,991. Поскольку наблюдаемое значение χ^2 превышает этот уровень, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

29, 30.

Отметка	Условие	Ранг	Отметка	Условие	Ранг	Отметка	Условие	Ранг
95	II	1	68	II	13	39	I	25
94	III	2	60	III	14	36	I	26
92	III	3	59	III	15,5	34	I	27
88	II	4	59	IV	15,5	33	I	28
82	III	5	58	II	17	29	II	29
81	III	6	57	III	18	25	III	30
79	III	7	54	III	19	22	II	31
76	II	8	49	II	20	20	II	32,5
75	II	9,5	48	I	21	20	I	32,5
75	III	9,5	46	I	22	17	I	34
74	I	11	45	II	23	16	I	35
69	I	12	41	II	24	5	I	36

31.

I	II	III	I	II	III
11	1	2	28	23	15,5
12	4	3	32,5	24	15,5
21	8	5	34	29	18
22	9,5	6	35	31	19
25	13	7	36	32,5	30
26	17	9,5			
27	20	14	$\sum R_1=309{,}5$	$\sum R_2=212{,}0$	$\sum R_3=144{,}5$

32.

	I 309,5	II 212,0	III 144,5
I 309,5	—	97,5	165
II 212,0	—	—	67,5
III 144,5	—	—	—

33. Обратившись к табл. I при $n = 12$ и $k = 3$ в случае $\alpha = 0{,}05$ при двустороннем критерии, мы находим, что критическое значение разности равно 121. Следовательно, при $\alpha = 0{,}05$ значимой будет только разность между I и III условиями.

Контрольные вопросы

1. а. 2. г. 3. в. 4. г. 5. г. 6. а. 7. б. 8. в. 9. г. 10. б. 11. г. 12. в. 13. а. 14. г. 15. в.

16.

Клетка	f_o	f_e	$(\|f_o-f_e\|-0{,}5)$	$(\|f_o-f_e\|-0{,}5)^2$	$(\|f_o-f_e\|-0{,}5)^2/f_e$
A	18	25,47	6,97	48,58	1,907
B	30	22,53	6,97	48,58	2,156
C	34	26,53	6,97	48,58	1,831
D	16	23,47	6,97	48,58	2,069
					$\chi^2=7{,}963$

Критическое значение χ^2 при $\alpha = 0{,}01$ и df = 1 равно 6,635. Поскольку расчетное значение χ^2 превышает этот уровень, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

17.

Ранг обученной группы	Ранг контрольной группы	Ранг обученной группы	Ранг контрольной группы
2,0	15,0	2,0	8,5
11,0	17,0	4,5	13,0
6,5	13,0	6,5	10,0
2,0	16,0	4,5	
8,5	13,0		
		$R_1=47{,}5$	$R_2=105{,}5$

Проверка: $R_1+R_2=153$, $\frac{N}{2}(1+N)=153$, $U=72+\frac{90}{2}-47{,}5=69{,}5$.

Верхнее критическое значение при $\alpha = 0{,}01$ в случае $n_1 = 9$ и $n_2 = 8$ равно 63. Поскольку наблюдаемое U превышает это значение, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

18. А А А В А В А В В А В А А А В А В В А В А В В В, $R = 16$.

Критическое значение R при $\alpha = 0{,}05$, $n_1 = 13$ и $n_2 = 13$ равно 20. Поскольку R меньше этого значения, оно лежит внутри критической области. Поэтому мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

19.

A	B	C	D
1	3	9	6
2	5	11	16
4	7	12	18
8	13	15	21
10	19	17	26
14	23	24	29
20	25	28	31
22	27	30	32
$\sum R_A=81$	$\sum R_B=122$	$\sum R_C=146$	$\sum R_D=179$

Проверка: $\Sigma R_A+\Sigma R_B+\Sigma R_C+\Sigma R_D=528,\ \frac{kN}{2}(1+kN)=528.$

	D 179	C 146	B 122	A 81
D 179	—	33	57	90
C 146	—	—	24	65
B 122	—	—	—	41
A 81	—	—	—	—

Критическая разность суммы рангов в случае, когда $N=8$, $k=4$ и $\alpha=0{,}01$ равна 117. Поэтому ни одна из наблюдаемых разностей не является статистически значимой.

Глава 8

Упражнения

1. *Нулевая гипотеза* $(H_0): P=Q=\frac{1}{2}$. *Альтернативная гипотеза* (H_1): $P\neq Q\neq\frac{1}{2}$. *Статистический критерий*: поскольку план связан с использованием однородных пар и измерения являются порядковыми, подходящим критерием будет критерий знаков. *Выборочное распределение*: поскольку N не превышает 50, для проверки H_0 можно воспользоваться табличными значениями биномиальной переменной. *Критическое значение*: из табл. А видно, что при $\alpha=0{,}01$, двустороннем критерии и $N=12$ для отклонения H_0 необходимо выполнение условия $x\geqslant 11$. **2.** 10 + и 2 —. **3.** Поскольку $x=10$ не превышает критического значения при $\alpha=0{,}01$, мы принимаем H_0 при $\alpha=0{,}01$.

4.

	+	–	Итого
f_o	36	58	94
f_e	47	47	94

5. $$\chi=\frac{(|36-47|-0,5)^2+(|58-47|-0,05)^2}{47}=\frac{220,5}{47}=4,69.$$

6. При $\alpha=0,01$ и $\mathrm{df}=1$ критическое значение χ^2 равно 6,635. Поскольку расчетное значение χ^2 не превышает этого уровня, мы не можем отклонить H_0. 7. 7. *Нулевая гипотеза* (H_0): выборки были извлечены из совокупностей с одинаковыми медианами. *Альтернативная гипотеза* (H_1): выборки были извлечены из совокупностей с разными медианами. *Статистический критерий*: поскольку данные состоят из сопоставимых отметок, разности между которыми соответствуют порядковой шкале, подходящим критерием является знаково-ранговый критерий Уилкоксона для однородных пар. *Уровень значимости*: $\alpha=0,01$, критерий двусторонний. *Выборочное распределение*: критические значения тестовой статистики T приведены в табл. J. *Критическое значение*: при $N=12$ и $\alpha=0,01$, критерий двусторонний, H_0 отклоняется в случае $T\leqslant 7$.

7—11.

Однородные пары	X_1	X_2	Разность	Ранг
1	25	23	4	7
2	24	19	5	8,5
3	22	20	2	3
4	21	15	6	10,5
5	19	14	5	8,5
6	18	20	—2	(—) 3
7	17	14	3	5,5
8	16	15	1	1
9	15	12	3	5,5
10	14	6	8	12
11	13	7	6	10,5
12	12	14	—2	(—) 3

Проверка: $|\Sigma R|=78$, $\frac{N}{2}(1+N)=6\cdot 13=78$.

8—11. Поскольку наблюдаемое T меньше критического значения, необходимого для отклонения H_0, оно лежит внутри критической области. В связи с этим мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. 12. *Нулевая гипотеза* (H_0): отметки для всех трех экспериментальных условий были извлечены из общей генеральной совокупности. *Альтернативная гипотеза* (H_1): соответствующие экспериментальным условиям отметки не были извлечены из общей генеральной совокупности. *Статистический критерий*: поскольку предполагается, что оценки экспертов соответствуют порядковому измерению, и поскольку лица были сгруппированы в однородные блоки, подходящим критерием будет критерий двухфакторного анализа по Фридману. *Уровень значимости*: $\alpha=0,05$, $N=6$. Выборочное распределение: поскольку $k=3$ и N находится в пределах между 2 и 9, можно воспользоваться точными вероятностями, приведенными в табл. K.

13.

Блок	X_1	X_2	X_3
1	3	2	1
2	3	2	1
3	3	2	1
4	1	3	2
5	3	2	1
6	3	1	2
	$\sum R_1=16$	$\sum R_2=12$	$\sum R_3=8$

14. $(\Sigma R_1)^2=256$, $(\Sigma R_2)^2=144$, $(\Sigma R_3)^2=64$. *Проверка*: $N\left[\frac{k}{2}(k+1)\right]=6\cdot 1{,}5\cdot 4=$ $=36$. $\Sigma R_1+\Sigma R_2+\Sigma R_3=36$. 15. $\chi_r^2=\frac{12\,(256+144+64)}{6\cdot 3\cdot 4}-3\cdot 6\cdot 4=\frac{5568}{72}-$ $-72=5{,}33$, $\mathrm{df}=2$.

Из табл. К видио, что значению $\chi_r^2=5{,}33$ соответствует вероятность, равная 0,072. Поскольку это больше 0,05, мы приниимаем H_0.

Контрольиые вопросы

1. б. 2. г. 3. а. 4. а. 5. в. 6. б. 7. в. 8. а. 9. г. 10. г.

11. $\chi^2=\frac{(|60-54{,}5|-0{,}5)^2+(|49-54{,}5|-0{,}5)^2}{54{,}5}=0{,}917$, $\mathrm{df}=1$.

Поскольку полученное значение χ^2 не превышает критического при $\alpha=$ $=0{,}05$, мы принимаем H_0.

12.

D	Ранг	D	Раиг
2	2,5	3	4
5	8	6	10,5
5	8	2	2,5
4	5,5	6	10,5
—4	(—) 5,5	5	8
1	1	0	
			$T=5{,}5$

Критическое значение при $\alpha=0{,}05$, двустороннем критерии и $N=11$ равио 10. Поскольку иаблюдаемое T меньше критического значения, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

13.

X_1	X_2	X_3
1	3	2
1	3	2
1	2	3
2	3	1
1	3	2
1	3	2
1	3	2
2	1	3
1	3	2
$\Sigma R_1=11$	$\Sigma R_2=24$	$\Sigma R_3=19$
$(\Sigma R_1)^2=121$	$(\Sigma R_2)^2=576$	$(\Sigma R_3)^2=361$

Проверка: $\sum_{i=1}^{3}(\Sigma R_i)=54$, $N\left[\frac{k}{2}(k+1)\right]=9\cdot 1,5\cdot 4=54$. $\chi_r^2=\frac{12\cdot 1058}{27\cdot 4}-$ $-3\cdot 9\cdot 4=117,556-108=9,556$, $\mathrm{df}=2$. Поскольку наблюдаемое значение χ_r^2 превышает критическое значение χ^2 при $\alpha=0,01$ и $\mathrm{df}=2$, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Глава 9

Упражнения

1,2.

X	μ_0	$X-\mu_0$
15	10	5
12	10	2
8	10	—2
		$\Sigma(X-\mu_0)=5$

3. $2^3=8$. **4.** $5+2-2,5+2+2,5-2+2$. **5.** $p_{\Sigma X\geqslant 5}=\frac{3}{8}=0,375$.

6. $p_{\Sigma X\geqslant 5 \text{ или } \leqslant -5}=\frac{6}{8}=0,75$. **7.** *Нулевая гипотеза* (H_0): $\mu=50$. *Альтернативная гипотеза* (H_1): $\mu\neq 50$. *Статистический критерий*: поскольку данные состоят из отметок, соответствующих по крайней мере интервальному измерению, и имеются серьезные сомнения относительно нормальности исходного распределения, подходящим статистическим критерием является критерий рандомизации (для случая с одной выборкой). *Уровень значимости*: $\alpha=0,05$, критерий двусторонний.

8,9.

X	μ_0	$X-\mu_0$
62	50	12
59	50	9
57	50	7
55	50	5
53	50	3
53	50	3
48	50	—2
47	50	—3
		$\Sigma(X-\mu_0)=34$

10. $2^N = 2^8 = 256$. **11.** $12+9+7+5+3+3-2-3=34$; $12+9+7+5+3+3-2+3=40$; $12+9+7+5+3+3+2+3=44$; $12+9+7+5+3+3+2-3=38$; $12+9+7+5+3-3-2+3=34$; $12+9+7+5+3-3+2+3=38$; $12+9+7+5-3+3+2+3=38$; $12+9+7+5-3+3-2+3=34$.

8 исходов приводят к получению суммы, равной наблюдаемой или превышающей ее. **12.** $p_{\Sigma X\geqslant 34}=\frac{8}{256}=0{,}031$. **13.** $p_{\Sigma X\geqslant 34 \text{ или } \leqslant -34}=\frac{16}{256}=0{,}06$. **14.** $2^9\cdot 0{,}05=25{,}6$. Пороговое значение равио 26. Как только число сумм, равных наблюдаемой или превышающих ее, стаиет больше 25, перебор может быть прекращен. **15.** $2^9\cdot 0{,}01=5{,}12$. Как только число сумм превысит 5, перебор может быть прекращен. **16.** $2^{11}\cdot 0{,}01=20{,}48$. Разделив это значение на 2, поскольку H_0 является ненаправленной, мы получаем 10,24. Как только число сумм превысит 10, перебор может быть прекращен. **17.** $2^9\cdot 0{,}05=25{,}6$. Разделив это значение на 2, поскольку H_0 является ненаправленной, мы получаем 12,8. Как только число сумм превысит 12, перебор может быть прекращен.

Контрольные вопросы

1. г. **2.** в. **3.** г. **4.** в. **5.** б. **6.** б. **7.** а. **8.** а.

9.

X	$X-\mu_0$
114	14
112	12
110	10
108	8
103	3
102	2
97	—3
95	—5
	$\Sigma D=41$

Общее число возможных исходов составляет $2^N=2^8=256$.

Перечень исходов, приводящих к получению суммы, большей или равной 41:

14	12	10	8	3	2	—3	—5
14	12	10	8	3	2	—3	5
14	12	10	8	3	2	3	5
14	12	10	8	3	2	3	—5
14	12	10	8	—3	2	3	5
14	12	10	8	—3	—2	3	5
14	12	10	8	—3	2	—3	5
14	12	10	8	3	—2	3	5
14	12	10	8	3	—2	—3	5
14	12	10	8	—3	2	3	—5
14	12	10	8	3	—2	3	—5
14	12	10	—8	3	2	3	5

Общее число возможных результатов (для одной стороны) равно 12. Приняв во внимание оба конца распределения, получаем: $p_{\Sigma X \geqslant 41 \text{ или } \leqslant -41} = 24/256 = 0{,}09$. Мы принимаем H_0. Альтернативной процедурой было бы умножение 0,025 на 256 и получение 6,4; как только было бы перечислено 7 исходов, дальнейший перебор стал бы ненужным, поскольку $p > \alpha$. В этом случае мы также приняли бы H_0.

Глава 10

Упражнения

1. $p = 4/70 = 0{,}06$. 2. $p = 10/252 = 0{,}04$. 3. 70. 4. 56. 5. 924. 6. 21. 7. 184 756. 8. 6435. 9. 3003.

10.

A	B
4 9 12	5 11 17
$\Sigma A = 25$	$\Sigma B = 33$

11. $4+9+12=25$,
$4+5+12=21$,
$4+9+5=18$,
$4+9+11=24$,
$5+9+11=25$,
$4+5+11=20$.

12. $p = 12/20 = 0{,}60$. 13. *Нулевая гипотеза* (H_0): $\mu_1 = \mu_2$. *Альтернативная гипотеза* (H_1): $\mu_1 \neq \mu_2$. *Статистический критерий*: поскольку отметки соответствуют интервальной или еще более высокой шкале и нельзя сделать предположение о нормальном распределении, подходящим критерием будет критерий рандомизации. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. *Выборочное распределение*: общее число возможных исходов при двух группах, для которых $n_1 = 6$, $n_2 = 6$. 15. $19 + 14 + 13 + 18 + 11 + 5 = 80$; $17 + 14 + 13 + 18 + 11 + 5 = 78$; $19 + 14 + 13 + 17 + 11 + 5 = 79$; $16 + 14 + 13 + 18 + 11 + 5 = 77$; $19 + 14 + 13 + 16 + 11 + 5 = 78$; $17 + 14 + 13 + 16 + 11 + 5 = 76$; $17 + 14 + 13 + 16 + 11 + 5 = 76$; $17 + 16 + 13 + 18 + 11 + 5 = 80$; $16 + 14 + 13 + 20 + 11 + 5 = 79$; $17 + 14 + 13 + 20 + 11 + 5 = 80$.

16. $p = 20/924 = 0{,}02$, значение двустороннее. Поскольку $p = 0{,}02$ находится внутри области отклонения, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. 17. $120 \times 0{,}05 = 6$; поскольку H_0 является направленной, мы прекращаем перебор после нахождения седьмого исхода, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый. 18. $792 \cdot 0{,}01 = 7{,}92$. Поскольку H_0 является направленной, мы прекращаем перебор после нахождения восьмого исхода, столь же или еще менее вероятного, чем наблюдаемый. 19. $3003 \cdot 0{,}01 = 30{,}03$. Поскольку H_0 является ненаправленной, делим это значение пополам и получаем 15,015. Как

только найдем 16 исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый, мы прекратим перебор. **20.** $330 \cdot 0{,}05 = 16{,}5$. Поскольку H_0 является ненаправленной, делим это значение пополам и получаем 8,25. Как только найдем 9 исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый, мы прекратим перебор.

Контрольные вопросы

1. б. **2.** в. **3.** а. **4.** б. **5.** г. **6.** в. **7.** а. **8.** а. **9.** $\Sigma X_1 = 173$, $\Sigma X_2 = 121$ Общее число возможных результатов при $n_1 = 6$ и $n_2 = 6$ равно 924. При переборе с одной стороны в случае $\alpha = 0{,}05$ при двустороннем критерии пороговое значение равно $924 \cdot 0{,}025 = 24$. Перечень исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый:

28,25,20,18,16,14	30,23,20,18,16,14
24,25,20,18,16,14	29,28,20,18,16,14
28,24,20,18,16,14	29,24,20,18,16,14
28,23,20,18,16,14	24,23,20,18,16,14
23,28,20,18,16,14	24,25,20,18,16,14

p (двустороннее значение) $= \dfrac{2 \cdot 10}{924} = 0{,}02$. Поскольку двустороннее p-значение меньше, чем $\alpha = 0{,}05$, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1.

Глава 11

Упражнения

1. *Нулевая гипотеза* (H_0): $\mu_1 = \mu_2$. *Альтернативная гипотеза* (H_1): $\mu_1 \neq \mu_2$. *Статистический критерий*: данные состоят из сопоставимых отметок, соответствующих интервальной шкале измерения или более высоким шкалам, и предположение о нормальности исходного распределения сомнительно. Поэтому подходящим критерием будет критерий рандомизации. *Уровень значимости*: $\alpha = 0{,}05$, критерий двусторонний. *Критическое значение*: критическое значение не используется, поскольку путем перебора мы получим точное значение вероятности.

2,3.

Пара	X_1	X_2	Разность
1	87	80	7
2	94	73	21
3	82	77	5
4	74	63	11
5	70	76	—6
6	60	45	15
7	53	50	3
8	40	28	12
			$\Sigma D = 68$

4. $2^N = 2^8 = 256$. **5.** $7 + 21 + 5 + 11 - 6 + 15 + 3 + 12 = 68$; $7 + 21 + 5 + 11 + 6 + 15 + 3 + 12 = 80$; $7 + 21 - 5 + 11 + 6 + 15 - 3 + 12 = 70$; $7 + 21 + 5 + 11 + 6 + 15 - 3 + 12 = 74$. Общее число исходов, при которых сумма больше или равна 68, составляет 8 (на обеих сторонах). **6.** $p = 8/256 = 0{,}03$, критерий двусторонний. Поскольку наблюдаемое p меньше $\alpha = 0{,}05$, мы отклоняем H_0 и принимаем H_1. **7.** $2^N = 2^{11} = 2048$; $2048 \cdot 0{,}01 = 20{,}48$. Считая только на одном конце распределения, мы остановимся, как только будут перечислены 11 исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый результат. **8.** $2^N = 2^{10} = 1024$; $1024 \cdot 0{,}05 = 51{,}2$. Считая только на одном конце распределения, мы остановимся, как только будут перечислены 26 исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый результат. **9.** $2^N = 2^{12} = 4096$; $4096 \cdot 0{,}01 = 40{,}96$. Считая только на одном конце распределения, мы остановимся, как только будет перечислен 41 исход, столь же или еще менее вероятный, чем наблюдаемый результат.

Контрольные вопросы

1. г. **2.** б. **3.** г. **4.** в. **5.** г. **6.** б. **7.** а. **8.** в. **9.** г. **10.** б.

11.

Разность	Разность
9	−3
2	8
10	2
−1	8
	$\Sigma D = 35$

Общее число возможных исходов, 2^N, равно 256. Пороговое значение равно: 2 ($256 \cdot 0{,}005 = 1{,}28$). Перечень возможных исходов, столь же или еще менее вероятных, чем наблюдаемый:

9,2,10, −1, −3, 8, 2, 8;

9,2, 10, 1, −3, 8, 2, 8.

Поскольку пороговое значение уже достигнуто, мы можем прекратить перебор различных исходов; разность не является статистически значимой.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Рунион

СПРАВОЧНИК
ПО НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Зав. редакцией *А. В. Павлюков*

Редактор *Е. В. Крестьянинова*
Мл. редактор *О. Б. Степанченко*
Техн. редактор *Г. А. Полякова*
Корректоры *Т. М. Васильева, Т. М. Иванова*
Художественный редактор *Э. А. Смирнов*
Переплет художника *А. Д. Смелякова*

ИБ № 1014

Сдано в набор 29.06.81. Подписано в печать 29.01.82. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бум. офс. № 2. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. П. л. 12,5. Усл. п. л. 12,0. Усл. кр.-отт. 12,25. Уч.-изд. л. 12,43. Тираж 12 000 экз. Заказ 338. Цена 80 коп.

Издательство «Финансы и статистика»,
Москва, ул. Чернышевского, 7

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46

Рунион Р.

Р86 Справочник по непараметрической статистике: Современный подход / Пер. с англ. Е. З. Демиденко; Предисл. Ю. Н. Тюрина. — М.: Финансы и статистика, 1982. — 198 с., ил.

80 коп.

Книга посвящена непараметрическим методам исследования. Кратко излагается теория вероятностей. Последовательно рассматриваются непараметрические критерии проверки гипотез при различных выборках. Техника вычислений показана детально. Даются задания для самостоятельной работы.

Для экономистов, статистиков, математиков.

Р $\frac{0702000000^{*}\text{-}012}{010(01)\text{-}82}$ 39-81

ББК 22.172
517.8

* Второй индекс 1702060000