Розділ II

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Будь-яка економічна або фінансова структура розвивається і змінюється протягом деякого часу. Якщо цю структуру можна охарактеризувати в кожний момент часу певними числовими параметрами, які до того ж залежать від випадку, то ми одержимо набір випадкових величин, що змінюються з часом, тобто *випадковий процес*. Випадкові процеси як математичний апарат найкраще моделюють ті реальні явища, які виникають стихійно, під впливом одного, або навіть великого числа випадкових факторів. Наприклад, ціна акцій певної компанії на біржі складається під впливом великого числа незалежних економічних факторів і якщо розглядати ціну акцій в різні моменти часу, то ми одержимо випадковий процес. Аналогічно, випадковими процесами є ціни на певний товар, сподівана вартість грошей, банківські активи, доходи компанії, розмір дивідендів на акції, капітал інвестора тощо, якщо всі вищевказані параметри спостерігаються на деякому проміжку часу. Детерміновані величини, наприклад, параметри, зумовлені контрактом, до випадкових процесів не відносяться. Зрозуміло, що випадкові процеси можуть розвиватися за різними законами, і необхідно мати декілька математичних моделей для їх опису. Основні математичні моделі випадкових процесів, які використовуються в фінансовій і страховій математиці, і розглядаються в цьому розділі.

§ 1. Випадкові процеси

Означення випадкового процесу

Теорія випадкових процесів має справу з вивченням випадкових величин, які залежать від параметру t з деякої множини T.

Означення 2.1. Нехай кожному t з множини T поставлено у відповідність випадкову величину X_t. Тоді говорять, що на T задано *випадковий процес* $\{X_t,\ t \in T\}$. *Реалізацією*, або *вибірковою функцією* випадкового процесу $\{X_t;\ t \in T\}$ є функція $X_t : T \to S$, яка ставить у відповідність кожному $t \in T$ одне з можливих значень $X_t \in S$ (S — множина можливих значень X_t).

Випадкові процеси, для яких $T = [0, \infty)$, грають особливу роль в застосуваннях. Як правило, в цьому випадку t інтерпретують як час.

Розглянемо спочатку два особливо важливих приклади випадкових процесів, які грають виняткову роль у фінансовій і актуарній (страховій) математиці.

Пуассонів процес

Уявимо собі, що на деякому пункті обслуговування з'являються замовники.

Зробимо такі природні припущення про характер надходження замовників:

1) події, пов'язані з появою замовників на інтервалах часу, які не перетинаються, є незалежними випадковими подіями;

2) розподіл числа замовників, які з'явились в інтервалі часу $[t, t+h)$, не залежить від t, а залежить лише від h;

3) ймовірність того, що в інтервалі $[t, t+h)$ з'явиться принаймні один замовник, дорівнює $\alpha h + o(h)$, де α — константа, а $\lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{o(h)}{h} = 0$;

4) ймовірність того, що в інтервалі $[t, t+h)$ з'явиться більш ніж один замовник, є $o(h)$.

Нехай N_t — число замовників, які з'явились в інтервалі $[0, t)$ і

$$P_m(t) = P\{N_t = m\}. \tag{2.1}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 2.1. *Випадкова величина N_t має розподіл Пуассона з параметром αt, тобто*

$$P_m(t) = e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^m}{m!}, \qquad m = 0, 1, \dots . \tag{2.2}$$

Доведення. Випадкова подія {на інтервалі часу $[0, t+h)$ нема жодного замовника}, ймовірність якої дорівнює $P_0(t+h)$, є перерізом двох випадкових подій: {на інтервалі $[0, t)$ нема жодного замовника} (ймовірність цієї події в силу припущення 2) дорівнює $P_0(h)$. Тому в силу припущення 1)

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h). \tag{2.3}$$

Згідно з припущенням 3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(h) = \alpha h + o(h), \tag{2.4}$$

і тому

$$P_0(h) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_k(h) = 1 - \alpha h + o(h). \tag{2.5}$$

Враховуючи (3) і (5), маємо

$$P_0(t+h) = P_0(t)\{1 - \alpha h + o(h)\},$$

звідки

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = -\alpha P_0(t) + P_0(t)\frac{o(h)}{h}.$$

Переходячи до границі при $h \to 0$ в останній рівності, одержимо таке диференціальне рівняння для функції $P_0(t)$:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\alpha P_0(t). \tag{2.6}$$

Загальний розв'язок цього рівняння, в якому розподіляються змінні, має вигляд $P_0(t) = Ce^{-\alpha t}$. Але ж відомо, що в момент часу $t = 0$ не було замовників. Тому $P_0(0) = 1$, звідки випливає, що $C = 1$. Отже, $P_0(t) = e^{-\alpha t}$.

Нехай тепер $m \geq 1$. З міркувань, які цілком аналогічні проведеним вище, маємо рівність

$$P_m(t+h) = P_m(t)P_0(h) + P_{m-1}(t)P_1(t) + \sum_{k=2}^{m} P_{m-k}(t)P_k(h) \tag{2.7}$$

(відзначимо, що при $m = 1$ третій доданок у правій частині рівності (2.7) відсутній). Згідно з припущенням 4)

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k(h) = o(h)$$

і тому

$$P_1(h) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(h) - \sum_{k=2}^{\infty} P_k(h) = \alpha h + o(h), \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_{m-k}(t)P_k(h) \leq \sum_{k=2}^{m} P_k(h) = o(h), \tag{2.9}$$

оскільки $P_k(t) \leq 1$. Враховуючи (2.5), (2.8) і (2.9) з рівності (2.7), одержимо

$$P_m(t+h) = P_m(t)\{1 - \alpha h + o(h)\} + P_{m-1}(t)\alpha h + o(h),$$

звідки

$$\frac{P_m(t+h)-P_m(t)}{h} = -\alpha P_m(t) + \alpha P_{m-1}(t) + \frac{o(t)}{h}.$$

Переходячи до границі при $h \to 0$ в цій рівності, одержимо рекурентну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -\alpha P_m(t) + \alpha P_{m-1}(t) \tag{2.10}$$

з початковими умовами

$$P_m(0) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{2.11}$$

Для розв'язання системи (2.10) введемо функції

$$Q_m(t) = e^{\alpha t}P_m(t), \qquad m \geq 0.$$

Підставляючи $P_m(t) = e^{-\alpha t}Q_m(t)$ в (2.10), одержимо

$$\frac{dQ_m(t)}{dt} = \alpha Q_{m-1}(t). \tag{2.12}$$

Відзначимо, що $Q_0(t) = 1$, і

$$Q_m(0) = 0, \qquad m \geq 1. \tag{2.13}$$

Послідовно розв'язуючи (2.12) з врахуванням початкових умов (2.13), одержимо

$$Q_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}, \tag{2.14}$$

що й доводить рівність (2.2).

Теорему доведено.

З припущення 1) випливає, що для будь-якого набору моментів часу $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ і будь-якого натурального n випадкові величини $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ взаємно незалежні. Випадкові процеси, що мають таку властивість, називаються ***процесами з незалежними приростами***. Зауважимо також, що згідно з 2), розподіл випадкової величини $N_{t+h} - N_t$ залежить лише від h і не залежить від t. Такі процеси називаються ***однорідними процесами з незалежними приростами***. Таким чином, пуассонів процес є однорідним процесом з незалежними приростами.

Броунівський рух (вінерів процес)

Це випадковий процес, який в певному наближенні є моделлю руху мікроскопічної частинки в середовищі, молекули якого перебувають в хаотичному русі. Середовище вважається однорідним, тому всі напрями зміщення рівноправні і розподіл величини зміщення частинки з певного положення в просторі не залежить від точки, з якої відбувається зміщення і часу, коли там опинилась частинка. Будемо стежити лише за однією координатою частинки (наприклад, координатою x).

Нехай W_t — координата частинки в момент часу t. Зробимо такі припущення про рух частинки:

1) $W_0 = 0$ (частинка виходить з початку координат);

2) $EW_t = 0$ в будь-який момент часу t;

3) розподіл випадкової величини $W_{t+h} - W_t$ залежить лише від h і не залежить від t;

4) прирости W_t на інтервалах часу, які не перетинаються, є незалежними випадковими величинами;

5) прирости процесу мають моменти третього порядку і

$$E\,|W_{t+h} - W_t|^3 = o(h). \tag{2.15}$$

Умова (2.15) є певною умовою малості зміщення частинки за малий проміжок часу. Припущення 3) і 4) можна сформулювати так: W_t є однорідним випадковим процесом з незалежними приростами.

Теорема 2.2. *При виконанні припущень 1)–5) випадкова величина W_t має нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням і дисперсією $\sigma^2 t$, де σ^2 — деяка константа ($\sigma^2 > 0$).*

Д о в е д е н н я. Нехай

$$\sigma^2(h) = M[W_{t+h} - W_t]^2 = D[W_{t+h} - W_t] \tag{2.16}$$

(згідно з припущенням 3) ця величина залежить від h і не залежить від t). Переконаємось, що при зроблених припущеннях $\sigma^2(h) = \sigma^2 h$, де σ^2 — деяка константа. Справді, функція $\sigma^2(h)$ задовольняє функціональне рівняння

$$\sigma^2(h_1 + h_2) = \sigma^2(h_1) + \sigma^2(h_2), \tag{2.17}$$

бо в силу припущення 4) незалежності приростів W_t з рівності

$$W_{t+h_1+h_2} - W_t = [W_{t+h_1+h_2} - W_{t+h_2}] + [W_{t+h_2} - W_t]$$

випливає (2.17). З рівності (2.17) і нерівності $\sigma^2(h) \geq 0$ випливає, що $\sigma^2(h)$ — неспадна функція. Відомо, що єдина монотонна функція, яка задовольняє функціональне рівняння (2.17) — це лінійна функція. Таким чином, $\sigma^2(h) = \sigma^2 h$, де $\sigma^2 > 0$ (ми не розглядаємо випадок $\sigma^2 = 0$, бо в цьому випадку з ймовірністю одиниця всі прирости дорівнюють нулеві, і рух частинки відсутній).

Встановимо диференціальне рівняння для характеристичної функції випадкової величини W_t

$$\varphi(v,t) = Ee^{ivW_t}. \tag{2.18}$$

Відзначимо, що в силу припущення 4) про незалежність приростів

$$\varphi(v,t+h) = Ee^{ivW_{t+h}} = Ee^{iv[W_{t+h}-W_t]+ivW_t} =$$

$$= Ee^{ivt}Ee^{iv[W_{t+h}-W_t]} = \varphi(v,t)Ee^{iv[W_{t+h}-W_t]}.$$

Використовуючи формулу Тейлора з остаточним членом в формі Лагранжа, будемо мати

$$Ee^{iv[W_{t+h}-W_t]} = E\Big\{1 + iv[W_{t+h} - W_t] - \frac{1}{2}v^2\,[W_{t+h} - W_t]^2 + R\Big\},$$

де

$$R = \frac{1}{3}\,(iv)^3[W_{t+h} - W_t]\,e^{i\theta[W_{t+h}-W_t]}, \quad 0 < \theta < 1.$$

З припущення 5) випливає, що $E|R| = o(h)$. Тому

$$Ee^{iv[W_{t+h}-W_t]} = 1 - \frac{1}{2}v^2\sigma^2 h + o(h).$$

Отже,

$$\varphi(v,t+h) = \varphi(v,t)\Big\{1 - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 h + o(h)\Big\},$$

звідки

$$\frac{\varphi(v,t+h) - \varphi(v,t)}{h} = -\frac{1}{2}\,\sigma^2 v^2 \varphi(v,t) + \frac{o(h)}{h}. \tag{2.19}$$

Переходячи до границі при $h \to 0$ в рівності (2.19), будемо мати

$$\frac{\partial\varphi(v,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\sigma^2 v^2 \varphi(v,t). \tag{2.20}$$

Інтегруючи диференціальне рівняння (2.20), в якому розподіляються змінні, матимемо

$$\varphi(v,t) = C(v)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\,v^2\sigma^2 t\Big\}.$$

Функція $C(v)$ — це константа інтегрування, яка в даному випадку залежить від параметра v. Але

$$\varphi(v,0) = Ee^{ivW_0} \equiv 1$$

для всіх v, і тому $C(v) = 1$.

Отже, характеристична функція випадкової величини W_t дорівнює

$$\varphi(v,t) = Ee^{ivW_t} = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\,v^2\sigma^2 t\Big\}. \tag{2.21}$$

Це означає, що W_t — нормально розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією $\sigma^2 t$. З припущень 1), 2), 3) випливає, що випадкова величина $W_{t+h} - W_t$ має нормальний (гауссів) розподіл з нульовим математичним сподіванням і дисперсією $\sigma^2 h$. Константу σ^2 називають *коефіцієнтом дифузії*.

Теорему доведено.

Означення 2.2. *Стандартним вінеровим процесом* називається випадковий процес $(W_t,\ t \in [0,\infty))$, який має такі властивості:

1) $W_0 = 0$;

2) W_t — однорідний процес з незалежними приростами;

3) випадкова величина $W_t - W_s$ має нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням і дисперсією $t - s$ $(s < t)$.

Класифікація випадкових процесів

Випадкові процеси класифікують за множиною S можливих значень X_t ($X_t \in S$, $t \in T$), множиною T можливих значень параметра T, характером залежності між випадковими величинами X_t.

Якщо $S = R^1 = (-\infty, \infty)$, то процес X_t називається дійснозначним випадковим процесом. Якщо $S = \mathbb{C}$, де $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел, то процес X_t називається комплекснозначним (такі процеси іноді зручно розглядати при вивченні процесів, які описують випадкові гармонічні коливання). Якщо $S = R^m$ ($m > 1$), то випадковий процес X_t називається багатовимірним.

Якщо $T = Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, або $T = Z^+ = \{0, 1, \dots\}$, то X_t називають випадковою послідовністю (випадковим процесом з дискретним часом). Якщо $T = R^m$, то замість терміну випадковий процес вживається термін *випадкове поле.*

Надалі ми будемо розглядати дійснозначні випадкові процеси, якщо не застережено протилежне.

Якщо X_t — випадковий процес на T, то для будь-якого натурального n, для будь-яких $t_1, \dots, t_n$ з T і будь-яких дійсних чисел $u_1, \dots, u_n$ визначені ймовірності

$$F_{t_1,\dots,t_n}(u_1, \dots, u_n) = P\{X_{t_1} \le u_1, \dots, X_{t_n} \le u_n\}. \tag{2.22}$$

Повний набір всіх можливих таких ймовірностей називається *системою скінченновимірних розподілів процесу X_t.* Функції $F_{t_1,\dots,t_n}(u_1, \dots, u_n)$ є функціями розподілу випадкового вектора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Система функцій (2.22) визначає і різні числові характеристики випадкового процесу X_t. Найбільш важливими серед них є *середнє значення*

$$a(t) = EX_t = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dF_t(u) \tag{2.23}$$

і *кореляційна функція*

$$B(t,s) = E(X_t - a(t))(X_s - a(s)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [u_1 - a(t)]\,[u_2 - a(s)]\, dF_{t,s}(u_1, u_2). \tag{2.24}$$

До певної міри функція $B(t,s)$ характеризує міру залежності випадкових величин X_t і X_s.

Процеси з незалежними значеннями

Процеси з незалежними значеннями — це такі процеси, що для будь-яких $t_1, \dots, t_n$ і кожного натурального n випадкові величини $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$

незалежні. Для таких процесів

$$F_{t_1,\dots,t_n}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{t_k}(u_k).$$

Ці процеси розглядаються, в основному, у випадку дискретного часу, бо у випадку неперервного часу їх реалізації є надзвичайно "нерегулярними" функціями. У випадку ж дискретного часу — це послідовності незалежних випадкових величин.

Процеси з незалежними приростами

Нехай $T \subset R$. Процес X_t називається ***процесом з незалежними приростами***, якщо для будь-яких $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ і кожного натурального $n \ge 1$ випадкові величини $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ незалежні. Пуассонів і вінерів процеси є прикладами процесів з незалежними приростами. У випадку дискретного часу процес з незалежними приростами являє собою послідовність незалежних випадкових величин.

Приклад 2.1 Нехай N_t — пуассонів процес. Тоді $EN_t = \alpha t$, $DN_t = \alpha t$,

$$EN_t^2 = DN_t + (EN_t)^2 = \alpha t + (\alpha t)^2.$$

Використовуючи незалежність приростів N_t, маємо при $s < t$

$$B(t,s) = E(N_t - \alpha t)(N_s - \alpha s) = EN_tN_s - \alpha^2 ts =$$

$$= E\left[(N_t - N_s) + N_s\right] N_s - \alpha^2 ts = E(N_t - N_s)EN_s + EN_s^2 - \alpha^2 ts =$$

$$= \alpha^2(t-s)s + \alpha s + \alpha^2 s^2 - \alpha^2 ts = \alpha s.$$

Отже, кореляційна функція пуассонового процесу дорівнює

$$B(t,s) = \alpha \min\{t,s\}. \tag{2.25}$$

Приклад 2.2 Нехай W_t — стандартний вінерів процес. Тоді при $s < t$

$$B(t,s) = EW_tW_s = E[W_t - W_s + W_s]\,W_s =$$

$$= E(W_t - W_s)\,EW_s + EW_s^2 = EW_s^2 = s.$$

Таким чином, кореляційна функція стандартного вінерового процесу дорівнює

$$B(t,s) = \min\{t,s\}. \tag{2.26}$$

Процесом Коші називається однорідний процес з незалежними приростами X_t такий, що $X_{t+h} - X_t$ має розподіл Коші із щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{h}{x^2 + h^2}.$$

Неважко переконатись, що скінченно-вимірні розподіли процесу з незалежними приростами виражаються через дві функції розподілу — функцію розподілу X_t і функцію розподілу приросту $X_t - X_s$.

Мартингали

Нехай X_t — випадковий процес з дискретним або неперервним часом. Випадковий процес X_t називається ***мартингалом***, якщо для будь-яких $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ і кожного натурального n виконується рівність

$$E\Big\{X_{t_{n+1}}/X_{t_1} = a_1, \ldots, X_{t_n} = a_n\Big\} = a_n \tag{2.27}$$

для всіх допустимих значень $a_1, ..., a_n$. Такі процеси можна розглядати як моделі необразливих ігор. Справді, якщо X_t — капітал гравця в момент часу t, то рівність (2.27) означає, що середній капітал гравця в момент часу t_{n+1} дорівнює a_n, якщо капітал гравця в момент часу t_n дорівнював a_n, незалежно від того, яким був капітал гравця в попередні моменти часу.

Неважко переконатись, що послідовність сум незалежних випадкових величин з нульовими математичними сподіваннями є мартингалом з дискретним часом. Процес з незалежними приростами, середні значення яких дорівнюють нулеві, є мартингалом з неперервним часом.

Мартингали грають дуже важливу роль в актуарній і фінансовій математиці. Строгі означення таких процесів, основні відомості з їх теорії будуть наведені в наступних параграфах.

Гауссові випадкові процеси

Процес X_t називається *гауссовим*, якщо для будь-яких $t_1, ..., t_n$ і кожного натурального n випадковий вектор $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ має гауссів розподіл. Нехай $a(t) = EX_t$, $B(t,s) = E(X_t - a(t))(X_s - a(s))$. Тоді характеристична функція випадкового вектора $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ має вигляд

$$\varphi(v_1, ..., v_n) = E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} v_k X_{t_k}\right\} =$$

$$= \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} v_k a(t_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} B(t_k, t_r)\, v_k v_r\right\}. \tag{2.28}$$

Таким чином, всі скінченновимірні розподіли гауссового процесу визначаються двома функціями — середнім значенням $a(t)$ і кореляційною функцією $B(t,s)$. Функція $a(t)$ може бути довільною. Для того щоб функція (2.28) була характеристичною функцією невиродженого багатовимірного гауссового розподілу, необхідно й достатньо, щоб для кожного натурального n, довільних $v_1, ..., v_n$, не рівних одночасно нулеві, виконувалась нерівність

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} B(t_k, t_r)\, v_k v_r > 0. \tag{2.29}$$

Функції $B(t,s)$, які мають таку властивість, називаються *додатньо визначеними ядрами*.

Випадкові процеси, які є результатом сумарної дії багатьох випадкових факторів, часто вважають гауссовими, мотивуючи це дією центральної граничної теореми.

Марковські процеси

Марковський процес — це процес, який має таку властивість: для будь-яких $u < t < s$ випадкові величини X_u і X_s стають умовно незалежними, якщо відомо X_t; інакше кажучи, ймовірність будь-якої події, пов'язаної з майбутньою поведінкою процесу, при умові, що відомо стан в сучасний момент t, не зміниться, якщо врахувати додаткову інформацію відносно минулого процесу. Нехай A — борелівська множина на числовій прямій. Процес X_t є марковським, якщо для будь-якого натурального n і будь-яких $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$

$$P\Big\{X_t \in A \,/\, {}_{X_{t_1}=x_1, \ldots, X_{t_n}=x_n}\Big\} = P\Big\{X_t \in A \,/\, {}_{X_{t_n} = x_n}\Big\}. \tag{2.30}$$

Функція $P\{s, x, t, A\} = P\{X_t \in A \,/\, {}_{X_s = x}\}$ називається *функцією перехідних ймовірностей*. Скінченновимірні розподіли процесу, тобто розподіл вектора $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ можна виразити через розподіл X_{t_1} і функцію перехідних ймовірностей.

Стаціонарні процеси

Нехай $T = R$ або $T = Z$. Випадковий процес X_t називається *стаціонарним у вузькому сенсі*, якщо розподіли випадкових векторів $(X_{t_1}, ...$ $..., X_{t_n})$ і $(X_{t_1+\tau}, ..., X_{t_n+\tau})$ співпадають для кожного натурального n, будь-яких $t_1, t_2, ..., t_n$ із T і будь-якого τ. Зокрема, розподіл X_t не залежить від t. Справді, $P\{X_{t+\tau} \le u\} = P\{X_t \le u\}$. Поклавши в цій рівності $\tau = -t$ матимемо, що $F_t(u) = P\{X_t \le u\} = P\{X_0 \le u\} = F_0(u)$, тобто функція розподілу X_t не залежить від t. Зауважимо також, що розподіл випадкового вектора (X_t, X_s) залежить лише від $t - s$. Дійсно,

$$P\{X_{t+\tau} \le u_1,\ X_{s+\tau} \le u_2\} = P\{X_t \le u_1,\ X_s \le u_2\}.$$

Поклавши в цій рівності $\tau = -s$, одержимо, що

$$F_{t,s}(u_1, u_2) = P\{X_{t-s} \le u_1,\ X_0 \le u_2\}$$

залежить лише від $t - s$.

Якщо припустити, що стаціонарний у вузькому сенсі випадковий процес має моменти другого порядку, то тоді

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dF_t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dF_0(u) = a$$

не залежить від t, а кореляційна функція

$$B(t,s) = E(X_t - a)(X_s - a) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 - a)(u_2 - a)\, dF_{t,s}(u_1, u_2)$$

залежить лише від $t - s$.

Випадковий процес X_t, який має моменти другого порядку, називається *стаціонарним в широкому сенсі*, якщо $EX_t = a$ не залежить від t, а кореляційна функція $E(X_t - a)(X_s - a)$ залежить лише від $t - s$.

П р и к л а д 2.3 Нехай η і φ — незалежні випадкові величини, причому φ рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$, а величина η має момент другого порядку, $E\eta^2 = \sigma^2$. Розглянемо випадковий процес

$$X_t = \eta \cos(\lambda t + \varphi), \tag{2.31}$$

де λ — невипадкова константа (частота гармонічного випадкового коливання з випадковою амплітудою $|\eta|$ і випадковою фазою φ). Переконаємось, що процес X_t стаціонарний у широкому сенсі. Маємо:

$$EX_t = E\eta \cos(\lambda t + \varphi) = E\eta\, E \cos(\lambda t + \varphi) =$$

$$= E\eta \{\cos \lambda t\, E \cos\varphi - \sin \lambda t\, E \sin\varphi\} = 0,$$

бо

$$E \cos\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos u\, du = 0, \quad E \sin\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin u\, du = 0.$$

Далі,

$$EX_tX_s = E\eta^2\, E\cos(\lambda t + \varphi)\cos(\lambda s + \varphi) =$$

$$= E\eta^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\lambda t + u)\cos(\lambda s + u)\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sigma^2 \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(\lambda - s) + \cos[\lambda(t+s) + 2u]\}\, du = \frac{1}{2}\sigma^2 \cos\lambda(t - s)$$

(відзначимо, що $\int_0^{2\pi} \cos[\lambda(t+s) + 2u]\, du = 0$).

Формальне означення випадкового процесу

Означення 2.1 випадкового процесу і наступний виклад були основані на інтуїтивному уявленні про випадкову величину. При розгляді деяких теоретичних питань суттєво доводиться спиратись на "строге" означення випадкового процесу.

Означення 2.3. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір, T – деяка параметрична множина. *Випадковим процесом на* T називається функція $X(t,\omega) : T \times \Omega \to R$ така, що при кожному фіксованому $t \in T$ $X(t,\omega)$ як функція ω є $\mathcal{F}$-вимірною випадковою величиною відносно σ-алгебри $\mathcal{F}$. Це означає, що для кожного дійсного u

$$\{\omega : X(t,\omega) \le u\} \in \mathcal{F}. \tag{2.32}$$

З (2.32) випливає, що означена ймовірність

$$F_t(u) = P\{\omega : X(t,\omega) \le u\},$$

а з того, що

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{\omega : X(t_k,\omega) \le u_k\} \in \mathcal{F},$$

випливає, що означені ймовірності

$$F_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = P\Big\{\bigcap_{k=1}^{n} \{\omega : X(t_k,\omega) \le u_k\} \in \mathcal{F},\Big\}.$$

Означення 2.4. Два випадкових процеси $X(t,\omega)$ і $Y(t,\omega)$ на T *стохастично еквівалентні*, якщо для кожного $t \in T$

$$P\{\omega : X(t,\omega) \ne Y(t,\omega)\} = 0. \tag{2.33}$$

У стохастично еквівалентних випадкових процесів співпадають скінченновимірні розподіли (2.22).

Якщо маємо випадковий процес $X(t,\omega)$ і зафіксуємо $\omega \in \Omega$, то одержимо фіксовану функцію параметра $t \in T$, яку називають *траєкторією* або (*реалізацією*) випадкового процесу. Іноді на основі деяких математичних перетворень можна довести (а іноді припустити), що всі траєкторії процесу мають певну властивість, наприклад, є неперервними.

Але найчастіше гарантувати властивості траєкторій можна лише на множині $\Omega_0 \subset \Omega$ такій, що $P(\Omega_0) = 1$. В цьому випадку кажуть, що траєкторії мають відповідну властивість з ймовірністю 1, або майже напевно (м.н.), або майже всі траєкторії мають цю властивість.

§ 2. Процеси другого порядку, основні відомості з кореляційної та спектральної теорії випадкових процесів

Процеси другого порядку (гільбертові процеси, L_2-процеси). Так називають випадкові процеси, які мають скінченні моменти другого порядку. Позначимо через H сукупність усіх випадкових величин, які мають скінченні моменти другого порядку: $H = \{\xi : E|\xi|^2 < +\infty\}$. Як відомо, H є лінійним простором і H стає гільбертовим простором, якщо ввести скалярний добуток $(\xi, \eta) = E\xi\eta$ і не вважати різними випадкові величини, які співпадають з ймовірностю одиниця.

Означення 2.5. Нехай кожному $t \in T$ поставлено у відповідність випадкову величину $X_t \in H$. Тоді X_t будемо називати *випадковим процесом другого порядку*, заданим на T.

Випадковий процес X_t можна розглядати як функцію з областю визначення T і областю значень H. Інша геометрична інтерпретація випадкового процесу $X_t : X_t (t \in T)$ є кривою в гільбертовому просторі H.

Для процесів другого порядку визначені числові характеристики $a(t) = EX_t$ і кореляційна функція

$$B(t,s) = E(X_t - a(t))(X_s - a(s)). \tag{2.34}$$

Кореляційну функцію $B(t,s)$ можна записати також у вигляді

$$B(t,s) = EX_tX_t - a(t)a(s). \tag{2.35}$$

П р и к л а д 2.4. Нехай W_t — вінерів процес, $\eta_t = W_t - tW_1$. Тоді $E\eta_t = a(t) = 0$, $B(t,s) = E\eta_t\eta_s = \min\{t,s\} - st$. Процес η_t називають вінеровим мостом.

П р и к л а д 2.5. Нехай $T = [0, \infty)$ і

$$X_t = e^{-\xi t},$$

де ξ — випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ. Тоді

$$a(t) = EX_t = Ee^{-\xi t} = \lambda \int_0^\infty e^{-x(t+\lambda)}dx = \frac{\lambda}{\lambda + t},$$

$$B(t,s) = EX_tX_s - EX_tEX_s =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + t + s} - \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)(\lambda + s)} = \frac{\lambda st}{(\lambda + s)(\lambda + t)(\lambda + s + t)}.$$

Стохастичний аналіз випадкових процесів другого порядку

Розглянемо деякі аналітичні властивості випадкових процесів другого порядку. Це такі властивості як неперервність, диференційовність, інтегровність. Умови, коли виконуються ці властивості, виражаються в термінах функцій $a(t)$ і $B(t,s)$.

Припустимо, що $T = [a, b]$.

Означення 2.6. Процес X_t називається *неперервним в середньому квадратичному* в точці t_0, якщо $\underset{t \to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X_t = X_{t_0}$, тобто

$$\|X_t - X_{t_0}\|^2 = E[X_t - X_{t_0}]^2 \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.36}$$

Теорема 2.3. *Процес X_t є неперервним в середньому квадратичному в точці t_0 тоді і лише тоді, коли функція $a(t)$ неперервна в точці t_0, а функція $B(t,s)$ неперервна в точці (t_0, t_0).*

Д о в е д е н н я. З нерівності Коші-Буняковського для скалярного добутку в H випливає, що

$$|a(t) - a(t_0)| = |E(X_t - X_{t_0}| \le \sqrt{E[X_t - X_{t_0}]^2}. \tag{2.37}$$

Нехай X_t неперервний в точці t_0. Тоді $X_t \xrightarrow[t \to t_0]{\text{с.к.}}$ і з (2.37) випливає, що $a(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} a(t_0)$, тобто функція $a(t)$ неперервна в точці t_0. З неперервності скалярного добутку випливає, що

$$(X_t, X_s) = EX_tX_s \to EX_{t_0}X_{t_0},$$

і тому $B(t,s) \to B(t_0,t_0)$, коли $t \to t_0$, $s \to t_0$, тобто функція $B(t,s)$ неперервна в точці (t_0, t_0).

Нехай $a(t)$ неперервна в точці t_0, а функція $B(t,s)$ неперервна в точці (t_0, t_0). Досить довести, що процес $Y_t = X_t - a(t)$ неперервний в точці t_0, бо тоді процес $X_t = Y_t + a(t)$ буде також неперервним в точці t_0. Але

$$E|Y_t - Y_{t_0}|^2 = B(t,t) - B(t_0,t) - B(t,t_0) + B(t_0,t_0) \to 0$$

коли $t \to t_0$ в силу неперервності $B(t,s)$ в точці (t_0, t_0).

Теорему доведено.

Зауваження. Неперервність процесу в середньому квадратичному не означає неперервність його реалізацій. Наприклад, пуассонів процес N_t неперервний в середньому квадратичному при $t > 0$, бо

$$E[N_{t+h} - N_t]^2 = \alpha h + (\alpha h)^2$$

і $E[N_{t+h} - N_t]^2 \to 0$ при $h \to 0$. Але N_t не є неперервним з ймовірністю одиниця.

Означення 2.7. Процес X_t називається *диференційовним в середньому квадратичному в точці* t_0, якщо існує границя

$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \frac{X_{t_0+h} - X_{t_0}}{h} = X'_{t_0}. \tag{2.38}$$

Процес диференційовний на $[a,b]$, якщо він диференційовний в кожній точці відрізка $[a,b]$.

Теорема 2.4. *Для того щоб процес X_t був диференційовним в середньому квадратичному на $[a,b]$ необхідно, щоб існували похідні*

$$a'(t), \quad \frac{\partial B(t,s)}{\partial t}, \quad \frac{\partial B(t,s)}{\partial s} \quad \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t\, \partial s}, \quad t \in (a,b), \quad s \in (a,b)$$

і достатньо, щоб існували $a'(t)$ і

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h_1\to 0}} \frac{B(t+h,t+h_1) - B(t,t+h_1) - B(t+h_1,t) + B(t,t)}{hh_1}. \tag{2.39}$$

Перше ніж доводити теорему, відзначимо, що критерій існування границі в середньому квадратичному, який ми використовували в першому розділі, може бути сформульований так.

Лема 2.1. *Для існування границі $\lim\limits_{h\to 0} Y_h$ необхідно і достатньо, щоб існувала границя*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h_1\to 0}} (Y_h, Y_{h_1}). \tag{2.40}$$

Доведення. Нехай існує X'_t, тобто існує границя

$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \frac{X_{t+h} - X_t}{h} = X'_t.$$

Тоді в силу неперервності скалярного добутку в H

$$\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h}, 1\right) = \frac{a(t+h) - a(t)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} EX'_t = a'(t).$$

Досить припускати, не обмежуючи загальності, $a(t) = 0$. Продовжуючи далі, в силу неперервності скалярного добутку, матимемо

$$\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h}, X_s\right) = \frac{B(t+h,s) - B(t,s)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial B(t,s)}{\partial t} = EX'_t X_s, \tag{2.41}$$

$$\left(X_t, \frac{X_{s+h} - X_s}{h}\right) = \frac{B(t,s+h) - B(t,s)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial B(t,s)}{\partial s} = EX_t X'_s, \tag{2.42}$$

$$\left(\frac{X_{t+h_1} - X_t}{h_1}, \frac{X_{t+h_2} - X_s}{h_2}\right) =$$

$$= \frac{B(t+h_1,s+h_2) - B(t,s+h_2) - B(t+h_1,s) + B(t,s)}{h_1 h_2} \longrightarrow$$

$$\underset{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}{\longrightarrow} \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s} = EX'_t X'_s. \tag{2.43}$$

Згідно з критерієм існування границі, для диференційованості X_t достатньо, щоб існувала границя

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h_1\to 0}} \left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h}, \frac{X_{t+h_1} - X_t}{h_1}\right),$$

яка співпадає з (2.39).

Лему доведено.

Означення 2.8. Випадковий процес X_t називається *інтегрованим в середньому квадратичному на відрізку* $[a,b]$, якщо існує в H границя інтегральних сум

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_{c_k}(t_{k+1} - t_k),$$

де $a = t_0 \le c_0 \le t_1 \le \cdots < t_{n-1} \le c_{n-1} \le t_n$, коли $\max\limits_k (t_{k+1} - t_k) \to 0$ і границя не залежить від способу вибору точок c_k. Ця границя позначається $\int\limits_a^b X_t dt$.

Використовуючи критерій існування середньоквадратичної границі, неважко встановити таке твердження.

Теорема 2.5. *Якщо існують інтеграли Рімана*

$$\int_a^b a(t)dt, \qquad \int_a^b\int_a^b B(t,s)\,dtds,$$

то процес X_t інтегрований на $[a,b]$ і

$$E\int_a^b X_t dt = \int_a^b a(t)\,dt, \quad E\int_a^b X_t dt \int_a^b X_s ds = \int_a^b\int_a^b B(t,s)\,dtds.$$

Процеси з ортогональними приростами

Означення 2.9. Випадковий процес $Z(\lambda)$ на $[a,b]$ будемо називати *процесом з ортогональними приростами*, якщо для будь-яких $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ з відрізку $[a,b]$

$$E[Z(\lambda_3) - Z(\lambda_2)]\,Z(\lambda_1) = 0. \tag{2.44}$$

Ми вважаємо, що $Z(a) = 0$, $\quad EZ(\lambda) \equiv 0$, і тому рівність (2.44) означає, що прирости випадкового процесу $Z(\lambda)$ на інтервалах, які не перетинаються, є ортогональними випадковими величинами (нагадаємо, що випадкові величини X і Y ортогональні, якщо $EXY = 0$).

Позначимо $E[Z(\lambda)]^2 = F(\lambda)$. Тоді з рівності

$$Z(\lambda_2) = Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1) + Z(\lambda_1)$$

при $a \le \lambda_1 < \lambda_2 \le b$ в силу ортогональності приростів будемо мати

$$E[Z(\lambda_2)]^2 = E[Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)]^2 + E[Z(\lambda_1)]^2$$

звідки

$$E\left(Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)\right)^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1). \tag{2.45}$$

Очевидно, $F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \ge 0$ при $\lambda_1 \le \lambda_2$, так що функція $F(\lambda)$ є неспадною функцією на $[a,b]$. Функція $F(\lambda)$ називається структурною функцією процесу $Z(\lambda)$.

Приклад 2.6. Нехай N_λ — пуассонів процес на $[0,\infty)$ з інтенсивністю α. Покладемо $Z(\lambda) = N_\lambda - \alpha\lambda$. Тоді $EZ(\lambda) = 0$, а з незалежності приростів $Z(\lambda)$ буде випливати, що при $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

$$E[Z(\lambda_3) - Z(\lambda_2)]Z(\lambda_1) = E[Z(\lambda_3) - Z(\lambda_2)]EZ(\lambda_1) = 0.$$

Отже, $Z(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами. Зауважимо, що $F(\lambda) = E[Z(\lambda)]^2 = \alpha\lambda$.

Приклад 2.7. Вінерів процес W_λ на $[0,\infty)$ є процесом з ортогональними приростами, причому $F(\lambda) = [W_\lambda]^2 = \lambda$.

Стохастичний інтеграл по процесу з ортогональними приростами

Нехай $g(\lambda)$ — невипадкова функція на $[a,b]$, $Z(\lambda)$ — випадковий процес з ортогональними приростами.

Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ таке, що

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b.$$

Оберемо в кожному інтервалі $(\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ точку λ_j^* і утворимо суму

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} g(\lambda_j^*)[Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})].$$

Нехай $\delta = \max\limits_{1\le j\le n}(\lambda_j - \lambda_{j-1})$. Якщо існує границя в середньому квадратичному

$$\operatorname*{l.i.m.}_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} g(\lambda_j^*)[Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})] \tag{2.46}$$

і не залежить від способу вибору точок λ_j^*, ми будемо називати її *стохастичним інтегралом*

$$\int_a^b g(\lambda)dZ(\lambda) \tag{2.47}$$

від функції $g(\lambda)$ по процесу з ортогональними приростами $Z(\lambda)$.

Відзначимо, що інтегральні суми (2.46) утворюються таким же способом, як в курсі математичного аналізу утворюють інтегральні суми при означенні інтегралу Рімана–Стілтьєса $\int_a^b g(\lambda)dF(\lambda)$. Достатньою умовою для існування такого інтегралу є неперервність функції $g(\lambda)$ і обмеженість варіації функції $F(\lambda)$. Але означати інтеграл (2.47) як інтеграл Рімана–Стілтьєса для окремої реалізації $Z(\lambda)$ не можна, бо процеси з ортогональними приростами, як правило, мають необмежену варіацію.

Теорема 2.6. *Якщо $g(\lambda)$ — неперервна функція на $[a,b]$, $Z(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами з обмеженою структурною функцією $F(\lambda)$, то існує стохастичний інтеграл $\int_a^b g(\lambda)dZ(\lambda)$, який має такі властивості:*

а) $\int_a^b [Ag_1(\lambda) + Bg_2(\lambda)]\,dZ(\lambda) = A\int_a^b g_1(\lambda)dZ(\lambda) + B\int_a^b g_2(\lambda)dZ(\lambda)$,

$$\tag{2.48}$$

б) $E\int_a^b g_1(\lambda)dZ(\lambda)\int_a^b g_2(\lambda)dZ(\lambda) = \int_a^b g_1(\lambda)g_2(\lambda)dF(\lambda)$.

Доведення. Оскільки $g(\lambda)$ неперервна на $[a,b]$, то в силу рівномірної неперервності $g(\lambda)$ для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що коли $|\lambda - \mu| < \delta$, то $|g(\lambda) - g(\mu)| < \varepsilon$.

Твердження теореми випливає з такої леми.

Лема 2.2. *Розглянемо розбиття відрізка* $[a,b]$

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b,$$

$$\lambda_0 \le \lambda_1^* \le \lambda_1 \le \lambda_2^* \le \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} \le \lambda_n^* \le \lambda_n = b$$

таке, що $\max\limits_{1\le k\le n}|\lambda_k - \lambda_{k-1}| < \frac{\delta}{2}$, *і утворимо суму*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} g(\lambda_k^*)\Big[Z(\lambda_k) - Z(\lambda_{k-1})\Big].$$

Розглянемо також інше розбиття

$$a = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_{m-1} < \nu_m = b,$$

$$\nu_0 \le \nu_1^* \le \nu_1 < \dots < \nu_{m-1} \le \nu_m^* \le \nu_m = b,$$

де $\max\limits_{1\le j\le m} |\lambda_j - \lambda_{j-1}| < \frac{\delta}{2}$, *і утворимо суму*

$$R_m = \sum_{j=1}^{m} g(\nu_j^*)\Big[Z(\nu_j) - Z(\nu_{j-1})\Big].$$

Тоді

$$E[S_n - R_m]^2 \le \varepsilon^2[F(b) - F(a)]. \qquad (2.49)$$

Д о в е д е н н я. Об'єднаємо $\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n\}$ і $\{\nu_0, \nu_1, ..., \nu_m\}$ в одне розбиття $\{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_l\}$. Нехай λ_k'' дорівнює λ_j^*, якщо

$$(\mu_{k-1}, \mu_k) \subset (\lambda_{j-1}, \lambda_j)$$

і ν_k'' дорівнює ν_j^*, якщо $(\mu_{k-1}, \mu_k) \subset (\nu_{j-1}, \nu_j)$. Тоді

$$E|S_n - R_m|^2 = E\Big|\sum_{k=1}^{l} g(\lambda_k'')[Z(\mu_k) - Z(\mu_{k-1})] -$$

$$-\sum_{k=1}^{l} g(\nu_k'')[Z(\mu_k)-Z(\mu_{k-1})]\Big|^2 = E\Big|\sum_{k=1}^{l}[g(\lambda_k'')-g(\nu_k'')]\,[Z(\mu_k)-Z(\mu_{k-1})]\Big|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} |g(\lambda_k'') - g(\nu_k'')|^2 [F(\mu_k) - F(\mu_{k-1})] \le \varepsilon^2[F(b) - F(a)].$$

Лемму доведено.

Твердження теореми 2.6 випливає тепер з леми 2.2 і критерія існування границі в середньому квадратичному. Властивості а) і б) випливають з неперервності скалярного добутку.

Теорему доведено.

П р и к л а д 2.8. Нехай ξ_1 і ξ_2 — випадкові величини такі, що $E\xi_1 = E\xi_2 = 0$, $E\xi_1\xi_2 = 0$, c_1 і c_2 ($c_1 < c_2$) — точки з відрізка $[a, b]$. Розглянемо на $[a, b]$ випадковий процес

$$Z(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < c_1, \\ \xi_1, & c_1 \le \lambda < c_2, \\ \xi_1 + \xi_2, & c_2 \le \lambda \le b. \end{cases}$$

Тоді $Z(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами і

$$\int_a^b g(\lambda)dZ(\lambda) = g(c_1)\xi_1 + g(c_2)\xi_2.$$

П р и к л а д 2.9. Нехай N_λ — пуассонів випадковий процес на $[0, \infty)$ з інтенсивністю α і $Z(\lambda) = N_\lambda - \alpha\lambda$. Тоді $Z(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами (див. приклад 2.6.) і

$$\int_0^T g(\lambda)dZ(\lambda) = \sum_{\tau_k \le T} g(\tau_k) - \alpha \int_0^T g(\lambda)\, d\lambda,$$

($\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ — точки стрибків процесу N_λ).

Стаціонарні випадкові послідовності

Нехай $T = Z = \{... - 1, 0, 1, ...\}$.

Означення 2.10. Послідовність X_t ($t \in Z$) називається *стаціонарною в широкому сенсі*, якщо:

а) $EX_t = c$ (не залежить від t, надалі ми будемо вважати $c = 0$);

б) $B(t, s) = EX_tX_s = B(t - s)$ залежить лише від $t - s$.

Теорема 2.7. *Нехай X_t — стаціонарна в широкому сенсі послідовність з кореляційною функцією $B(t-s)$. Тоді існує неспадна обмежена функція $F(\lambda)$ на $[-\pi, \pi]$ така, що*

$$B(t - s) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\lambda(t - s)\, dF(\lambda). \qquad (2.50)$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо такі функції

$$A_N(\lambda) = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t \cos t\lambda, \quad B_N(\lambda) = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t \sin t\lambda,$$

$$R_N^2(\lambda) = A_N^2(\lambda) + B_N^2(\lambda), \quad I_N(\lambda) = \frac{N}{8\pi}R_N^2(\lambda).$$

Відзначимо, що

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\Big[\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} X_tX_s \cos\lambda t\cos\lambda s +$$

$$+\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} X_tX_s \sin\lambda t \sin\lambda s\Big] = \frac{1}{2\pi N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} X_tX_s\cos\lambda(t - s).$$

Нехай

$$f_N(\lambda) = EI_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} B(t-s)\cos\lambda(t-s). \qquad (2.51)$$

В правій частині рівності (2.51) в подвійній сумі зробимо заміну $t-s = k$. Тоді k змінюватиметься від $-(N-1)$ до $(N-1)$. Оскільки число тих (t,s), для яких $t-s=k$, дорівнює $N-|k|$, то

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)B(k)\cos k\lambda. \qquad (2.52)$$

Нехай n таке, що $|n| < N$. Помножимо обидві частини рівності (2.52) на $\cos\lambda n$ і проінтегруємо по λ від $-\pi$ до π. Тоді, враховуючи властивість ортогональності тригонометричних функцій, будемо мати

$$\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B(n) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda n f_N(\lambda)\,d\lambda. \qquad (2.53)$$

Розглянемо функцію

$$F_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_N(u)\,du. \qquad (2.54)$$

Оскільки $f_N(u) \geq 0$, то функція $F_N(\lambda)$ є неспадною функцією на $[-\pi,\pi]$.

Поклавши в (2.53) $n=0$, одержимо $F_N(\pi) = B(0)$. Таким чином, для кожного N і кожного λ з відрізка $[-\pi,\pi]$ $F_N(\lambda) \leq B(0)$. Рівність (2.53) можна переписати у вигляді

$$\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B(n) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda n\,dF_N(\lambda). \qquad (2.55)$$

Як відомо (так звана перша теорема Хеллі), з будь-якої обмеженої послідовності $\{F_N(\lambda)\}$ неспадних функцій можна виділити підпослідовність, яка збігається в основному до неспадної функції $F(\lambda)$. (Нагадаємо: послідовність $F_N(\lambda)$ збігається при $N\to\infty$ в основному до функції $F(\lambda)$, якщо $\lim\limits_{N\to\infty} F_n(\lambda) = F(\lambda)$ в кожній точці неперервності функції $F(\lambda)$).

Отже, в нашій ситуації існує неспадна функція $F(\lambda)$ на $[-\pi,\pi]$ і підпослідовність $\{N_k\}$ така, що $\lim\limits_{N_k\to\infty}(\lambda) = F(\lambda)$. Переходячи до границі в рівності (2.55) по підпослідовності $\{N_k\}$ і користуючись можливістю

граничного переходу під знаком інтегралу Стілтьєса, одержимо

$$B(n) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda n\,dF(\lambda). \qquad (2.56)$$

Зауважимо, що можливість граничного переходу під знаком інтегралу Стілтьєса гарантується так званою другою теоремою Хеллі [5].

Теорему доведено.

Функція $F(\lambda)$ в (2.50) і (2.56) називається *спектральною функцією* послідовності X_t. Якщо $F(\lambda)$ абсолютно неперервна, тобто

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(u)\,du, \qquad (2.57)$$

де $f(u)$ інтегрована функція, то говорять, що послідовність X_t *має спектральну щільність* $f(\lambda)$. В цьому випадку рівність (2.56) матиме вигляд

$$B(n) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos nf(\lambda)\,d\lambda. \qquad (2.58)$$

В статистиці випадкових процесів функція $I_N(\lambda)$, яка розглядалась в доведенні теореми 2.7, називається *періодограмою* стаціонарної послідовності X_t. В процесі доведення теореми 2.7 ми встановили, що

$$E\int_{-\pi}^{\lambda} I_N(u)\,du \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} F(\lambda). \qquad (2.59)$$

Має місце таке твердження.

Теорема 2.8. *Якщо збігається ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|B(n)| < +\infty, \qquad (2.60)$$

то послідовність X_t має спектральну щільність

$$f(\lambda) = \frac{B(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}B(n)\cos\lambda n. \qquad (2.61)$$

Спектральна функція $F(\lambda)$, нормована умовою $F(-\pi) = 0$, відновлюється при цьому за допомогою співвідношення

$$F(\lambda) = \frac{B(0)}{2\pi}(\lambda+\pi) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}B(n)\frac{\sin\lambda n}{n}. \qquad (2.62)$$

Розглянемо деякі важливі приклади стаціонарних послідовностей.

Приклад 2.10. Нехай $X_t = \eta_t$, де η_t — послідовність некорельованих випадкових величин, тобто така послідовність, що $E\eta_t = 0$ і

$$E\eta_n\eta_m = \begin{cases} \sigma^2, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \tag{2.63}$$

Таким чином,

$$B(n) = \begin{cases} \sigma^2, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \tag{2.64}$$

Рівність (2.58) виконується, якщо $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$. Таким чином, спектральна щільність послідовності $\{\eta_n\}$ є сталою. Спектральна функція $F(\lambda)$ в силу (2.63) дорівнює

$$F(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(\lambda + \pi). \tag{2.65}$$

Послідовність $\{\eta_n\}$ називають "білим шумом".

Приклад 2.11. Нехай для кожного $t \in Z$, $X_t = \xi$, де $E\xi = 0$, $D\xi = \sigma^2$. Тоді

$$B(t-s) = EX_tX_s = \sigma^2$$

і $B(n) = \sigma^2$ для всіх $n \in Z$. Рівність (2.56) виконується при

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq \lambda < 0, \\ \sigma^2, & 0 \leq \lambda \leq \pi. \end{cases} \tag{2.66}$$

Спектральна щільність не існує.

Приклад 2.12. Нехай

$$X_t = \sqrt{2}\cos(t\xi + \varphi), \tag{2.67}$$

де ξ — випадкова величина з функцією розподілу $F(\lambda)$ на $[-\pi, \pi]$, φ — рівномірно розподілена на $[-\pi, \pi]$, причому ξ і φ незалежні. Тоді, приймаючи до уваги, що

$$E\cos^2\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2},$$

$$E\sin^2\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2},$$

$$E\sin\varphi\,\cos\varphi\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx = 0,$$

одержимо

$$EX_tX_s = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda(t-s)\,dF(\lambda). \tag{2.68}$$

Цей важливий приклад показує, що кожна неспадна функція на $[-\pi, \pi]$ є спектральною щільністю деякої стаціонарної послідовності.

Приклад 2.13. Нехай $X_t = \eta_t + \eta_{t-1}$, де η_t — послідовність некорельованих випадкових величин ($E\eta_t = 0, E\eta_t^2 = \sigma^2$, $E\eta_t\eta_s = 0$ при $t \neq s$). Тоді $B(0) = 2\sigma^2$, $B(1) = EX_{t+1}X_t = E(\eta_{t+1}+\eta_t)(\eta_t+\eta_{t-1}) = \sigma^2$, $B(n) = 0$ при $n > 1$. Таким чином, в силу теореми 2.8 існує спектральна щільність і згідно з (2.61)

$$f(\lambda) = \frac{2\sigma^2}{2\pi} + \frac{\sigma^2}{\pi}\cos\lambda = \frac{2\sigma^2\cos^2\frac{\lambda}{2}}{\pi}. \tag{2.69}$$

Приклад 2.14. Нехай X_t — послідовність, яка задовольняє різницеве стохастичне рівняння

$$X_t - aX_{t-1} = \eta_t, \tag{2.70}$$

де η_t — "білий шум" (послідовність, яка розглядалась в прикладі 2.10; будемо вважати, що $\sigma^2 = 1$). Будемо припускати також, що $|a| < 1$. Послідовно "інтегруючи" рівняння (2.70) m разів, будемо мати

$$\begin{aligned} X_t &= aX_{t-1} + \eta_t = a(aX_{t-2} + \eta_{t-1}) + \eta_t = \\ &= \eta_t + a\eta_{t-1} + a^2X_{t-2} = \cdots = \\ &= \eta_t + a\eta_{t-1} + \cdots + a^{m-1}\eta_{t-m+1} + a^mX_{t-m}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Переходячи до границі в (2.71) при $m \to \infty$, одержимо

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\eta_{t-k}. \tag{2.72}$$

Знайдемо кореляційну функцію X_t:

$$B(n) = EX_{t+n}X_t = E\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \eta_{t+n-k}\Big)\Big(\sum_{r=0}^{\infty} a^r \eta_{t-r}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} a^k a^r = \sum_{r=0}^{\infty} a^{r+n} a^r = a^n \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r} = \frac{a^n}{1-a^2}.$$

Отже,

$$B(n) = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}. \tag{2.73}$$

Спектральна щільність послідовності X_t згідно з (2.61) дорівнює

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\lambda\Big].$$

Використовуючи формулу Ейлера

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

матимемо

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{e^{in\lambda}+e^{-in\lambda}}{2}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-a^2}\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(ae^{i\lambda})^n + \sum_{n=1}^{\infty}(ae^{-i\lambda})^n\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-a^2}\Big[1 + \frac{ae^{i\lambda}}{1-ae^{i\lambda}} + \frac{ae^{-i\lambda}}{1-ae^{-i\lambda}}\Big].$$

Отже,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\lambda + a^2}. \tag{2.74}$$

П р и к л а д 2.15. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — дійсні числа з відрізка $[-\pi, \pi]$, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ і $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — два набори взаємно некорельованих випадкових величин такі, що $E\eta_k\eta_r = \sigma_k^2\delta_k^r$, $E\gamma_k\gamma_r = \sigma_k^2\delta_k^r$, $E\gamma_k = E\eta_k = 0$, $E\eta_k\gamma_r = 0$ ($\delta_k^r = 1$, якщо $k = r$ і 0, якщо $k \neq r$). Розглянемо послідовність

$$X_t = \sum_{k=1}^{m}(\eta_k \cos\lambda_k t + \gamma_k \sin\lambda_k t). \tag{2.75}$$

Послідовність X_t — стаціонарна в широкому сенсі. Справді, $EX_t = 0$,

$$EX_tX_s = E\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\eta_k\eta_r \cos\lambda_k t\,\cos\lambda_r s +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\eta_k\gamma_r \cos\lambda_k t\,\sin\lambda_r s + \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\eta_r\gamma_k \sin\lambda_k t\,\cos\lambda_r s +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\gamma_k\gamma_r \sin\lambda_k t\,\sin\lambda_r s\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2(\cos\lambda_k t\,\cos\lambda_k s + \sin\lambda_k t\,\sin\lambda_k s) = \sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\cos\lambda_k(t-s). \tag{2.76}$$

Спектральна функція послідовності X_t може бути записана у вигляді

$$F(\lambda) = \sum_{\lambda_k \le \lambda}\sigma_k^2. \tag{2.77}$$

Покладемо

$$Z_1(\lambda) = \sum_{\lambda_k \le \lambda}\eta_k, \tag{2.78}$$

$$Z_2(\lambda) = \sum_{\lambda_k \le \lambda}\gamma_k. \tag{2.79}$$

Тоді $Z_1(\lambda), Z_2(\lambda)$ — процеси з ортогональними приростами на $[-\pi, \pi]$, причому

$$E[Z_1(\lambda)]^2 = E[Z_2(\lambda)]^2 = F(\lambda).$$

Послідовність X_t можна подати у вигляді суми двох стохастичних інтегралів

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda t dZ_1(\lambda) + \int_{-\pi}^{\pi}\sin\lambda t dZ_2(\lambda). \tag{2.80}$$

Основний факт в спектральній теорії стаціонарних послідовностей полягає в тому, що будь-яка стаціонарна послідовність є границею в середньому квадратичному послідовностей виду (2.75).

Має місце таке твердження.

Теорема 2.9. *Нехай X_t — стаціонарна випадкова послідовність з спектральною функцією $F(\lambda)$. Тоді існують два взаємно ортогональних випадкових процеси $Z_1(\lambda)$ і $Z_2(\lambda)$ з ортогональними приростами і структурною функцією $F(\lambda)$ такі, що виконується рівність*

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\lambda t dZ_1(\lambda) + \int_{-\pi}^{\pi}\sin\lambda t dZ_2(\lambda). \tag{2.81}$$

Рівність (2.81) називається *спектральним розкладом* послідовності X_t.

Гільбертів простір комплекснозначних випадкових величин

Будемо розглядати комплекснозначні випадкові величини $\gamma = \xi + \eta$, де ξ та η — дійснозначні випадкові величини. Математичне сподівання випадкової величини γ визначимо так: $E\gamma = E\xi + iE\eta$. Випадкова величина $\bar\gamma$ це $\bar\gamma = \xi - i\eta$, $|\gamma|^2 = \gamma\bar\gamma = \xi^2 + \eta^2$.

Нехай H — сукупність усіх комплекснозначних величин таких, що $E|\gamma|^2 < \infty : H = \{\gamma : E|\gamma|^2 < \infty\}$. H є лінійним простором над полем комплексних чисел. Якщо ввести скалярний добуток випадкових величин γ_1 і $\gamma_2 : (\gamma_1, \gamma_2) = E\gamma_1\gamma_2$, то H стає гільбертовим простором, якщо умовимось ототожнювати випадкові величини, що співпадають з ймовірністю одиниця.

Стохастичні випадкові міри

Нехай $(\Lambda, \mathcal{B}_\Lambda, \mu)$ — вимірний простір, Λ — деяка множина, $\mathcal{B}_\Lambda$ — σ-алгебра підмножин цієї множини, $\mu(\cdot)$ — міра на σ-алгебрі $\mathcal{B}_\Lambda$. Міра μ припускається або скінченною ($\mu(\Lambda) < \infty$), або ж σ-скінченною (це означає, що Λ можна представити у вигляді об'єднання зліченного числа множин, міра $\mu(\cdot)$ кожної з яких є скінченною).

Означення 2.10. Будемо говорити, що на σ-алгебрі $\mathcal{B}_\Lambda$ задано ортогональну випадкову міру $Z(\cdot)$ із структурною мірою $\mu(\cdot)$, якщо кожному $S \in \mathcal{B}_\Lambda$ поставлено у відповідність комплекснозначну випадкову величину $Z(S) \in H$ таку, що

а) $EZ(S) = 0,$ (2.82)

б) $Z\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Z(S_i),$ (2.83)

якщо множини $\{S_i\}$ попарно не перетинаються (ряд в правій частині збігається в середньому квадратичному),

в) $(Z(S_1), Z(S_2)) = EZ(S_1)\overline{Z(S_2)} = \mu(S_1 \cap S_2).$ (2.84)

З властивості в) випливає таке: якщо $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, то

$$EZ(S_1)\overline{Z(S_2)} = \mu(\emptyset) = 0,$$

тобто величини $Z(S_1)$ і $Z(S_2)$ ортогональні, якщо S_1 і S_2 не перетинаються. Відзначимо також, що

$$(Z(S), Z(S)) = E|Z(S)|^2 = \mu(S). \tag{2.85}$$

Приклад 2.16. Нехай $\Lambda = [0, \infty)$, $\mathcal{B}_\Lambda = \mathcal{B}$ — σ-алгебра борелівських множин на півосі $[0, \infty)$. Визначимо на півінтервалах виду $(a, b]$ міру $W([a, b]) = w_b - w_a$ і продовжимо цю міру на σ-алгебру $\mathcal{B}$. Тоді одержимо випадкову міру $W(S)$ на $\mathcal{B}$, яка задовольняє умови а), б), в), причому

$$EW(S_1)W(S_2) = \int\limits_{S_1 \cap S_2} dt = \mu(S_1 \cap S_2), \tag{2.86}$$

де $\mu(\cdot)$ — міра Лебега на $\mathcal{B}$. Міру $W(S)$ називають *вінеровою випадковою мірою.*

Приклад 2.17. Нехай $\Lambda = [0, \infty)$, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелівських множин з $[0, \infty)$, N_t — пуассонівський процес з інтенсивністю $\alpha = 1$. Покладемо

$$N((a, b)) = N_b - N_a - [b - a] \tag{2.86}$$

і продовжимо цю міру з півінтервалів на σ-алгебру борелівських множин. Одержимо міру $N(S)$, для якої виконуються властивості а), б), в), причому

$$E|N(S)|^2 = \int\limits_S dt = \mu(S),$$

де $\mu(\cdot)$ міра Лебега на $[0, \infty)$. Міру $N(S)$ називають *пуассоновою випадковою мірою.*

Приклад 2.18. Нехай $\Lambda = [a, b]$, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелівських множин з Λ. Нехай $Z(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами зі структурною функцією $F(\lambda)$. Визначимо міру $Z(\cdot)$ на півінтервалах $(c, d]$ так: $Z([c, d]) = Z(d) - Z(c)$. Тоді $EZ([c, d])^2 = F(d) - F(c)$. Продовжимо міру на $\mathcal{B}$. Одержимо міру $Z(S)$, для якої виконуються умови а), б), в), причому $E|Z(S)|^2 = \int\limits_S dF(\lambda) = F(S)$. Міра $F(S)$ — це міра Лебега-Стілтьєса, породжена неспадною функцією $F(\lambda)$.

Стохастичний інтеграл по ортогональній випадковій мірі

Нехай

$$L_2(\Lambda, \mu) = \left\{\varphi(\lambda) : \Lambda \to \mathbb{C}, \int\limits_\Lambda |\varphi(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty\right\}$$

— простір комплекснозначних функцій, заданих на Λ і інтегрованих з квадратом. Це гільбертів простір із скалярним добутком

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L_2} = \int\limits_\Lambda \varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2(\lambda)}\mu(d\lambda). \tag{2.87}$$

Для кожної функції $\varphi(\lambda)$ з $L_2(\Lambda,\mu)$ можна визначити стохастичний інтеграл

$$\int\limits_\Lambda \varphi(\lambda)Z(d\lambda) \tag{2.88}$$

від функції $\varphi(\lambda)$ по ортогональній випадковій мірі так, що мають місце властивості:

а) $E\int\limits_\Lambda \varphi(\lambda)Z(d\lambda)=0$,

б) $E\int\limits_\Lambda[\alpha\varphi_1(\lambda)+\beta\varphi_2(\lambda)]Z(d\lambda)=\alpha\int\limits_\Lambda\varphi_1(\lambda)Z(d\lambda)+\beta\int\limits_\Lambda\varphi_2(\lambda)Z(d\lambda)$,

в) $E\int\limits_\Lambda \varphi_1(\lambda)Z(d\lambda)\overline{\int\limits_\Lambda \varphi_2(\lambda)Z(d\lambda)}=\int\limits_\Lambda \varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2(\lambda)}\,\mu(d\lambda).$ (2.89)

Конструкція, за допомогою якої будується інтеграл (2.88), нагадує конструкцію, за допомогою якої будується інтеграл Лебега.

Визначимо спочатку інтеграл (2.88) для простих функцій. Функція $\varphi(\lambda)$ називається простою, якщо вона приймає зліченне число значень на множинах, які не перетинаються:

$$\Lambda=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k \qquad (S_k\cap S_r=\emptyset,\quad k\neq r),$$

якщо $\lambda\in S_k$, то $\varphi(\lambda)=c_k$.

Якщо $\varphi(\lambda)$ — проста фукнція і $\varphi(\lambda)\in L_2(\Lambda,\mu)$, то

$$\int\limits_\Lambda|\varphi(\lambda)|^2\mu(d\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\mu(S_k). \tag{2.90}$$

Якщо $\varphi(\lambda)$ — проста функція з $L_2(\Lambda,\mu)$, покладемо за означенням

$$\int\limits_\Lambda\varphi(\lambda)Z(d\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kZ(S_k). \tag{2.91}$$

Із умови (2.90) випливає, що ряд в правій частині (2.91) збігається в середньому квадратичному. Легко перевірити, що умови а), б), в) виконуються. Перевіримо, наприклад, в). Нехай $\varphi_1(\lambda)$ і $\varphi_2(\lambda)$ — дві прості функції, які приймають значення $\{c_k^{(1)}\}$ і $\{c_k^{(2)}\}$ відповідно на множинах $\{S_k\}$ (не обмежуючи загальності, можна вважати, що ці множини однакові для обох функцій). Тоді

$$E\int\limits_\Lambda\varphi_1(\lambda)Z(d\lambda)\overline{\int\limits_\Lambda\varphi_2Z(d\lambda)}=E\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{(1)}Z(S_k)\overline{\sum_{j=1}^{\infty}c_j^{(2)}Z(S_j)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{(1)}\overline{c_k^{(2)}}\mu(S_k)=\int\limits_\Lambda\varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2(\lambda)}\mu(d\lambda).$$

Для будь-якої функції $\varphi(\lambda)\in L_2(\Lambda,\mu)$ існує послідовність функцій $\varphi_n(\lambda)$ така, що

$$\|\varphi(\lambda)-\varphi_n(\lambda)\|^2_{L_2(\Lambda,\mu)}=\int\limits_\Lambda|\varphi(\lambda)-\varphi_n(\lambda)|^2\mu(d\lambda)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{2.92}$$

З критерію збіжності в $L_2(\Lambda,\mu)$ випливає, що для будь-якої послідовності $\{\varphi_n\}$, яка задовольняє (2.92), існує границя

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}(\varphi_n,\varphi_m)_{L_2(\Lambda,\mu)}=\int\limits_\Lambda\varphi_n(\lambda)\,\overline{\varphi_m(\lambda)}\mu\,(dx)=$$

$$=\Big(\int\limits_\Lambda\varphi_n(\lambda)Z(d\lambda),\int\limits_\Lambda\varphi_m(\lambda)Z(d\lambda)\Big)_H.$$

Звідси, в силу критерія збіжності в H маємо, що існує границя

$$\lim\int\limits_\Lambda\varphi_m(\lambda)\,Z(d\lambda). \tag{2.93}$$

Ця границя не залежить від способу вибору послідовності $\{\varphi_n\}$ і ми її назвемо стохастичним інтегралом (2.88). Властивості а), б), в) легко перевіряються.

Інтегральні зображення випадкових функцій

Нехай T — деяка множина, X_t — комплекснозначний випадковий процес другого порядку на T з кореляційною функцією $B(t,s)=$ $=E\xi(t)\overline{\xi(s)}$ і $E\xi(t)=0$, $f(t,\lambda)$ — комплекснозначна функція на $T\times\Lambda$ така, що при кожному фіксованому $t\in T$ $f(t,\lambda)\in L_2(\Lambda,\mu)$.

Теорема 2.10. *Для того, щоб випадковий процес X_t допускав зображення у вигляді стохастичного інтегралу*

$$X_t=\int\limits_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda) \tag{2.94}$$

по ортогональній випадковій мірі $Z(\cdot)$ із структурною мірою $\mu(\cdot)$, необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція допускала зображення

$$B(t,s)=\int\limits_\Lambda f(t,\lambda)\,\overline{f(s,\lambda)}\mu(d\lambda). \tag{2.95}$$

Теорему 2.10 іноді називають теоремою Карунена. Її доведення можна знайти в [2]. Ми розглянемо деякі застосування цієї теореми.

П р и к л а д 2.19. Неважко переконатись, що має місце рівність

$$2\,\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t\lambda \sin s\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda = \min\{t,s\}. \tag{2.96}$$

Тому, поклавши в попередній теоремі $T=[0,\infty)$, $\Lambda=[0,\infty)$, $\mu(\cdot)$ — міра Лебега на $[0,\infty)$,

$$f(t,\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin t\lambda}{\lambda}, \tag{2.97}$$

одержимо таке зображення для вінерового процесу:

$$W_t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t\lambda}{\lambda}\,W(d\lambda), \tag{2.98}$$

де $W(S)$ — вінерівська міра на $[0,\infty)$.

П р и к л а д 2.20. Нехай $T=[a,b]$, X_t — дійснозначний неперервний в середньому квадратичному випадковий процес на $[a,b]$,

$$EX_t=0, \qquad EX_tX_s=B(t,s).$$

Розглянемо інтегральне рівняння

$$\varphi(\lambda)=\lambda\int\limits_a^b B(t,s)\varphi(s)ds. \tag{2.99}$$

Функція $B(t,s)$ симетрична $(B(t,s)=B(s,t))$ і неперервна в квадраті $[a,b]\times[a,b]$. В теорії інтегральних рівнянь встановлюється, що існує злічeнний набір $\{\lambda_n>0\}$ таких чисел, що рівняння (2.99) при $\lambda=\lambda_n$ має ненульовий розв'язок $\varphi_n(t)$. Функції $\{\varphi_n(t)\}$ ортогональні між собою і ми будемо вважати їх ортонормованими. При цьому

$$B(t,s)=\sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_n(t)\varphi_n(s)}{\lambda_n}. \tag{2.100}$$

Застосуємо до (2.100) теорему Карунена. Покладемо в теоремі Карунена $T=[a,b]$, $\Lambda=[0,\infty)$, $\mu(\cdot)$ — міра, зосереджена в цілих додатніх точках, $\mu(\{n\})=1$, $\mu(S)=\sum\limits_{n\in S}\mu(\{n\})$, $f(t,\lambda)=\left\{\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}},\ \text{якщо}\ \lambda=\lambda_n\right\}$.

Тоді суму (2.100) можна записати у вигляді інтегралу

$$B(t,s)=\int\limits_0^\infty f(t,\lambda)f(s,\lambda)\,\mu(d\lambda). \tag{2.101}$$

Неважко переконатись, що відповідна міра $Z(S)$ зосереджена в цілих точках, і поклавши $Z\{\{n\}\}=\xi_n$, матимемо рівність

$$X_t=\sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}\,\xi_n, \tag{2.102}$$

де $\{\xi_n\}$ — послідовність некорельованих випадкових величин:

$$E\xi_n\xi_m=1, \quad m=n, \qquad n\neq m.$$

Розклад (2.102) називається розкладом Карунена–Лоева–Пугачова.

П р и к л а д 2.21. Нехай w_t — вінерів процес на $[0,1]$. Тоді $B(t,s)=\min\{t,s\}$ і, аналізуючи рівняння (2.99) при $a=0$, $b=1$, $B(t,s)=\min\{t,s\}$, можна встановити, що

$$\lambda_n=\pi^2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2,$$

$$\varphi_n(t)=\sqrt{2}\sin\pi\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,t.$$

Таким чином, вінерів процес w_t на $[0,1]$ допускає представлення у вигляді ряду

$$w_t=\sqrt{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\xi_n, \tag{2.103}$$

де $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних нормально $N(0,1)$ розподілених випадкових величин.

П р и к л а д 2.22. Нехай X_t — стаціонарна дійснозначна випадкова послідовність така, що $EX_t=0$. Вище ми встановили (теорема 2.7), що

$$EX_tX_s=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\,\lambda(t-s)\,dF(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\,\lambda t\cos\lambda s\,dF(\lambda)+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\,\lambda t\sin\lambda s\,dF(\lambda). \tag{2.104}$$

Застосовуючи до (2.104) теорему Карунена, поклавши в ній $T=Z,\Lambda=$ $=\{1,2\}\times[-\pi,\pi]$, одержимо зображення

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda t \, Z_1(d\lambda) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin \lambda t \, Z_2(d\lambda), \qquad (2.105)$$

де $Z_1(s)$ і $Z_2(s)$ — дві взаємно некорельовані між собою ортогональні випадкові міри такі, що

$$EZ_1(S_1)Z_1(S_2) = EZ_2(S_1)Z_2(S_2) = F(S_1 \cup S_2), \qquad (2.106)$$

де $F(\cdot)$ — міра Лебега–Стілтьєса, породжена функцією $F(\lambda)$.

Комплекснозначні стаціонарні випадкові послідовності

Нехай X_t — комплекснозначна стаціонарна в широкому сенсі випадкова послідовність. Це означає, що

а) $EX_t = c$ (будемо вважати далі, що $c = 0$),

б) $EX_t \bar{X}_s = B(t, s)$.

Теорема 2.11. *Якщо X_t — стаціонарна в широкому сенсі послідовність, то*

$$B(t-s) = EX_t\bar{X}_s = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} dF(\lambda), \qquad (2.107)$$

де $F(\lambda)$ — неспадна обмежена функція на $[-\pi, \pi]$.

Функція $F(\lambda)$ називається спектральною функцією послідовності X_t. Якщо $F(\lambda)$ — абсолютно неперервна функція, тобто має місце рівність (2.57), то $f(\lambda)$ називається спектральною щільністю, і рівність (2.107) може бути записана у вигляді

$$B(t-s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} dF(\lambda). \qquad (2.108)$$

Теорема 2.12. *Якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |B(n)| < \infty$, то існує спектральна щільність*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda} B(n). \qquad (2.109)$$

Запишемо представлення (2.107) у вигляді

$$B(t-s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, \overline{e^{i\lambda s}} F(d\lambda) \qquad (2.110)$$

і застосуємо до (2.110) теорему Карунена, поклавши $T = Z$, $\Lambda = [-\pi, \pi]$, $f(t, \lambda) = e^{i\lambda t}$, $\mu(\cdot)$ — міра Лебега–Стілтьєса, яка породжена функцією $F(\lambda)$. Одержимо таке твердження.

Теорема 2.13. *Стаціонарна послідовність X_t допускає зображення*

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} Z(d\lambda), \qquad (2.111)$$

де $Z(\lambda)$ — комплекснозначна ортогональна випадкова міра, така, що $EZ(S_1)\overline{Z(S_2)} = F(S_1 \cup S_2)$.

Стаціонарні випадкові процеси з неперервним часом

Нехай $T = (-\infty, \infty)$, X_t — комплекснозначний випадковий процес другого порядку на T.

Процес X_t називається стаціонарним в широкому сенсі, якщо

а) $EX_t = c$ (не залежить від t; далі вважитемемо $c = 0$);

б) $EX_t\bar{X}_s = B(t-s)$ залежить лише від $t - s$.

Будемо вважати X_t неперервним в середньому квадратичному.

Теорема 2.14. *Кореляційна функція неперервного в середньому квадратичному випадкового процесу допускає представлення*

$$B(t-s) = EX_t\bar{X}_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} dF(\lambda), \qquad (2.112)$$

де $F(\lambda)$ — обмежена неспадна функція на $(-\infty, \infty)$.

Функція $F(\lambda)$ називається спектральною функцією X_t. Якщо $F(\lambda)$ абсолютно неперервна, тобто $F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} f(u)du$, то функція $f(\lambda)$ називається спектральною щільністю і представлення (2.112) має вигляд

$$B(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f(\lambda) d\lambda. \qquad (2.113)$$

Теорема 2.15. *Якщо*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(\tau)|\, d\tau < \infty, \qquad (2.114)$$

то існує спектральна щільність

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} B(\tau)\, d\tau. \qquad (2.115)$$

Запишемо представлення (2.112) у вигляді

$$EX_t\bar{X}_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\,\overline{e^{-i\lambda s}}\,dF(\lambda)$$

і застосуємо теорему Карунена, поклавши $T = (-\infty, \infty)$, $\Lambda = (-\infty, \infty)$, $\mu(\cdot)$ — міра Лебега–Стілтьєса, породжена функцією $F(\lambda)$.

Теорема 2.16. *Стаціонарний випадковий процес X_t, неперервний в середньому квадратичному, допускає представлення*

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \tag{2.116}$$

де $Z(\cdot)$ — ортогональна випадкова міра на $\mathcal{B}$ така, що

$$EZ_1(S_1)\overline{Z(S_2)} = F(S_1 \cap S_2). \tag{2.117}$$

§ 3. Процес Пуассона та споріднені з ним процеси

Деякі властивості пуассонового процесу

Випадковий процес Пуассона N_t було означено в §1. Розглянемо більш детально деякі властивості цього процесу.

Нехай $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ — моменти появи замовників в пуассоновому процесі і нехай $\theta_1 = \tau_1, \theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ $(k \geq 2)$.

З означення пуассонового процесу випливає, що величина θ_1 має показниковий розподіл з параметром α. Справді, при $x > 0$

$$P\{\tau_1 \leq x\} = 1 - P\{\tau_1 > x\} = 1 - e^{-\alpha x}, \tag{2.118}$$

бо подія $\{\tau_1 > x\}$ відбувається тоді і лише тоді, коли на відрізку $[0, x]$ не з'явиться жоден замовник (ймовірність цього дорівнює $e^{-\alpha x}$). А який же розподіл мають величини θ_k?

Теорема 2.17. *При будь-якому $n > 1$ випадкові величини $\theta_1, ..., \theta_n$ незалежні і кожна з них має показниковий розподіл з параметром α.*

Доведення. Знайдемо спочатку сумісну щільність $p_{\tau_1,...,\tau_n}(t_1, ..., t_n)$ розподілу $\tau_1, ..., \tau_n$.

Нехай $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ (досить розглядати лише цей випадок, бо $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$). Розглянемо відрізки $\Delta_k = [t_k, t_k + h_k]$, де h_k настільки малі, що відрізки не претинаються. Нехай $\Delta = \Delta_1 \times \times\Delta_2 \times \cdots \times \Delta_n$ — паралелепіпед в R^n з вершиною $(t_1, ..., t_n)$ і довжинами ребер $h_1, ..., h_n$. Підрахуємо двома різними способами ймовірність того, що вектор $(\tau_1, ..., \tau_n)$ потрапляє в цей паралелепіпед. Відзначимо, що

$$\{\tau_1 \in \Delta_1, ..., \tau_n \in \Delta_n\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = 0\} \bigcap \{N_{t_k+h_k} - N_{t_k} = 1\}.$$

Тому в силу незалежності приростів N_t

$$P\Big\{\bigcap_{k=1}^{n}\{\tau_k \in \Delta_k\}\Big\} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\alpha(t_k - t_{k-1})}\alpha h_k e^{-\alpha h_k} =$$

$$= e^{-\alpha t_n} e^{-\alpha(h_1 + \cdots + h_n)} \alpha^n h_1, ..., h_n. \tag{2.119}$$

З іншого боку, за означенням щільності розподілу випадкового вектора

$$P\{(\tau_1, ..., \tau_n) \in \Delta\} = \int \underset{\Delta}{\cdots} \int P_{\tau_1,...,\tau_n}(u_1, ..., u_n) du_1, ..., du_n =$$

$$= p_{\tau_1,...,\tau_n}(t_1, ..., t_n) h_1 \cdots h_n + o(h_1 \cdots h_n). \tag{2.120}$$

Прирівняємо обидві частини рівностей (2.119) і (2. 120), поділимо обидві частини одержаної рівності на $h_1 \cdots h_n$ і перейдемо до границі, коли $h_1 \to 0, \ldots, h_n \to 0$. Тоді одержимо, що

$$p_{\tau_1,...,\tau_n}(t_1, ..., t_n) = \alpha^n e^{-\alpha t_n}$$

при $0 < t_1 < \cdots < t_n$.

Розглянемо таке перетворення R^n в R^n:

$$s_1 = t_1, \quad s_k = t_k - t_{k-1} \quad (2 \leq k \leq n). \tag{2.122}$$

Це взаємно однозначне перетворення, якобіан якого дорівнює 1. Тому, враховуючи правило обчислення щільності випадкового вектора, який одержується з іншого вектора в результаті взаємно однозначного перетворення, і приймаючи до уваги, що в кожному випадку $t_n = s_1 + + \cdots + s_n$, одержимо

$$p_{\tau_1,...,\tau_n}(s_1, ..., s_n) = \prod_{k=1}^{n} (\alpha e^{-\alpha s_k}). \tag{2.123}$$

Таким чином, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ незалежні і кожна з них має показниковий розподіл з параметром α.

Теорему доведено.

Теорема 2.18. *Випадкова величина τ_n (момент появи n-го замовника) має розподіл Ерланга з щільністю*

$$p_{\tau_n}(x) = \alpha \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x} \qquad (x > 0). \tag{2.124}$$

Твердження теореми випливає з теореми 2.17 і представлення $\tau_n = = \sum_{k=1}^{n} \theta_i$.

Узагальнений пуассонів процес

Нехай N_t — пуассонів процес, $\{Y_k,\ k \geq 1\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(\infty)$ $(F(0) = 0)$ і математичним сподіванням μ. Припустимо, що N_t і $\{Y_k,\ k \geq 1\}$ взаємно незалежні.

Означення 2.11. *Узагальненим пуассоновим процесом* називається випадковий процес

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \tag{2.125}$$

(вважається, що $\sum\limits_{k=1}^{0} Y_k = 0$).

Неважко перевірити, що S_t — це однорідний випадковий процес з незалежними приростами.

Процес S_t є сумою випадкового числа випадкових величин. За теоремою про розподіл суми випадкового числа випадкових величин функція розподілу S_t має вигляд

$$G_t(x) = P\{S_t \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} F^{k*}(x), \tag{2.126}$$

де

$$F^{k*}(x) = P\Big\{\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq x\Big\}$$

є k-кратна композиція функції розподілу $F(x)$. За теоремою про математичне сподівання суми випадкового числа випадкових величин

$$ES_t = EN_t EY_1 = \alpha\, t\, \mu = \alpha\, \mu\, t. \tag{2.127}$$

Випадковий процес S_t допускає таку інтерпретацію в термінах актуарної математики: нехай $\tau_1, ..., \tau_n, ...$ — моменти надходжень до страхової компанії замовлень на страхові виплати, Y_i — розмір виплати в момент τ_i; тоді S_t — сумарний обсяг виплат на інтервалі $[0, t]$.

В наступному розділі ми будемо детально вивчати процес S_t.

Неоднорідний процес Пуассона

Припустимо, що при означенні процесу Пуассона в §1, припущення 3) ми сформулюємо так: ймовірність того, що в інтервалі $[t, t+h)$ з'явиться принаймні один замовник, дорівнює $\alpha(t)h + 0(h)$.

Всі інші припущення залишимо без змін. Тоді, повторюючи всі міркування, які проведені в §1, ми одержимо такий результат: випадкова величина $N_t - N_s$ має розподіл Пуассона з параметром $\int\limits_s^t \alpha(u)du$.

Процес N_t називається неоднорідним пуассоновим процесом з функцією інтенсивності $\alpha(t)$.

Сформулюємо більш загальне означення неоднорідного пуассонового процесу. Нехай $A(t)$ — неспадна неперервна функція на $[0, \infty)$ така, що $A(0) = 0$, $A(t) < \infty$ для кожного $t \geq 0$. З допомогою неспадної функції можна побудувати міру $A(\cdot)$, означивши спочатку міру на інтервалах $A((s,t]) = A(t) - A(s)$ і продовживши її на всі борелівські множини. Тому ми іноді неспадну функцію будемо називати мірою.

Означення 2.12. Випадковий процес N_t на $[0, \infty)$ називається *неоднорідним пуассоновим процесом* з мірою інтенсивності $A(t)$, якщо

1) N_t — процес з незалежними приростами;

2) при $s < t$ випадкова величина $N_t - N_s$ має розподіл Пуассона з параметром $A(t) - A(s)$.

Відзначимо, що неперервність функції $A(t)$ гарантує, що з імовірністю одиниця процес N_t зростає одиничними стрибками. Якщо функція $A(t)$ абсолютно неперервна, тобто

$$A(t) = \int_0^t \alpha(u)du, \tag{2.128}$$

де $\alpha(u)$ — інтегрована функція, то функція $\alpha(t)$ називається функцією інтенсивності пуассонового процесу N_t.

Нехай $f(t)$ і $g(t)$ — дві функції, причому $f(\cdot)$ означена на множині значення $g(t)$. Означимо операцію утворення складної функції

$$f \circ g(t) = f(g(t)). \tag{2.129}$$

Нехай $A^{-1}(t)$ — функція, яка обернена до функції $A(t)$. Тоді

$$A \circ A^{-1}(t) = A(A^{-1}(t)) = t \tag{2.130}$$

для всіх t $(t < A(\infty))$.

Означення 2.13. Однорідний пуассонів процес N_t, у якого $\alpha = 1$, будемо називати *стандартним пуассоновим процесом.*

Відзначимо таке просте, але дуже важливе для нас твердження.

Теорема 2.19. *Нехай N_t — пуассонів процес з мірою інтенсивності $A(t)$ такою, що $A(\infty) = \infty$. Тоді випадковий процес*

$$\tilde{N}_t = N \circ A^{-1}(t) \tag{2.131}$$

є стандартним пуассоновим процесом.

Справді, оскільки $A^{-1}(t)$ зростає, то $\tilde{N}_t$ є процесом з незалежними приростами. Далі $\tilde{N}_t - \tilde{N}_s = N(A^{-1}(t) - N(A^{-1}(s))$ має пуассонів розподіл з параметром

$$A \circ A^{-1}(t) - A \circ A^{-1}(s) = t - s.$$

Приклад 2.23. Нехай N_t — пуассонів процес з мірою інтенсивності $A(t) = t^2$ $(t \geq 0)$. Тоді $A^{-1}(t) = \sqrt{t}$. Отже, $\tilde{N}_t = N \circ \sqrt{t} = N_{\sqrt{t}}$ — стандартний пуассонів процес.

Має місце і таке твердження.

Теорема 2.20. *Нехай N_t — стандартний пуассонів процес. Тоді процес $N_t = \tilde{N} \circ A(t)$ є пуассоновим процесом з мірою інтенсивності $A(t)$.*

Змішаний пуассонів процес

Припустимо, що N_t є пуассоновим процесом з інтенсивністю Λ, причому сам параметр Λ є додатною випадковою величиною з функцією $Q(\lambda) = P\{\Lambda \leq \lambda\}$. Тоді за формулою повної ймовірності

$$P\{N_t = k\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, dQ(\lambda). \tag{2.132}$$

Приклад 2.24. Нехай Λ має гама-розподіл з параметрами (α, β), тобто

$$Q'(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}. \tag{2.133}$$

Тоді, після нескладних обчислень з використанням інтегрального представлення гама-функції, одержимо

$$P\{N_t = k\} = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)k!} \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha \left(\frac{t}{\beta+t}\right)^k. \tag{2.134}$$

Важливими є часткові випадки $\alpha = 1$ (Λ має показниковий розподіл з параметром β) і $\alpha = n$ (Λ має розподіл Ерланга). При $\alpha = 1$

$$P\{N_t = k\} = \frac{\beta}{\beta+t} \left(\frac{t}{\beta+t}\right)^k, \tag{2.135}$$

і, отже, N_t має геометричний розподіл. При $\alpha = n$

$$P\{N_t = k\} = C_{n+k-1}^{n-1} \left(\frac{t}{\beta+t}\right)^k \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^n. \tag{2.136}$$

Це так званий від'ємно показниковий розподіл або розподіл Паскаля (розподіл числа невдач в послідовності випробувань Бернуллі до n-ї появи успіху).

Випадкова величина Λ називається *структурною змінною*, а її функція розподілу $Q(\lambda)$ *структурним розподілом.*

Процеси Кокса

Важливим узагальненням неоднорідних пуассонових процесів є так звані процеси Кокса. Процес Кокса є пуассоновим процесом з випадковою мірою інтенсивності.

Означення 2.14. Випадковий процес Λ_t, $t \geq 0$ такий, що з ймовірністю одиниця

1) $\Lambda(0) = 0$;
2) $\Lambda(t) < \infty$ для кожного $t > 0$;
3) $\Lambda(t)$ з ймовірністю одиниця неспадна функція,

називається ***випадковою мірою.*** Випадкова міра Λ_t називається ***дифузною***, якщо траєкторії Λ_t неперервні з ймовірністю одиниця.

Означення 2.15. Нехай Λ_t — дифузна випадкова міра, $\tilde{N}_t$ — стандартний пуассонів процес, причому $\tilde{N}_t$ і Λ_t незалежні. Випадковий процес $N_t = \tilde{N} \circ \Lambda(t)$ називається ***процесом Кокса.***

§ 4. Процеси відновлення

Нехай $T_1, T_2, ..., T_n$ — послідовність незалежних однаково розподілених додатніх випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$.

Означення 2.16. Послідовність випадкових величин

$$\tau_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n \tag{2.136}$$

називається ***процесом відновлення,*** якщо випадкові величини $T_1, T_2, ...$ $..., T_n ...$ взаємно незалежні, мають однакову функцію розподілу $F(x)$ таку, що $F(0) = 0$.

Корисно дати таку інтерпретацію процесу відновлення $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$. Нехай є прилад, що працює випадковий час. Як тільки прилад виходить з ладу, він миттю замінюється новим, але ідентичним приладом. Якщо $\tau_0 = 0$ — момент включення першого приладу, T_1 — тривалість його безвідмовної роботи, T_n — тривалість безвідмовної роботи n-го приладу, то природньо вважати, що всі випадкові величини T_k незалежні і однаково розподілені. Момент τ_n закінчення роботи n-го приладу і включення $(n+1)$-го приладу називається ***моментом відновлення.*** Позначимо через $\nu(t)$ номер приладу, який працює в момент часу t. Тоді $\nu(t) = n$, якщо $\tau_{n-1} \leq t < \tau_n$. Функція $H(t) = E\nu(t)$ називається ***функцією відновлення.*** Підкреслимо ще раз, що ми відносимо до моментів відновлення і момент τ_0 включення першого приладу. В іншій інтерпретації процесу відновлення $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ є моментами надходження страхових вимог до страхової компанії. Ця інтерпретація буде активно використовуватись в наступному розділі.

Означення 2.17. ***Функцією відновлення*** $H(t)$ будемо називати функцію

$$H(t) = E\nu(t), \tag{2.137}$$

де $\nu(t)$ — число моментів відновлення на замкненому інтервалі $[0, t]$.

Теорема 2.21. *Має місце рівність*

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t), \tag{2.138}$$

де $F^{n*}(t)$ — n-кратна композиція функції $F(t)$, тобто $F^{n*}(t) = P\{T_1 + \dots + T_n \le T\}$.

Ми вважаємо також $F^{0*}(t) = 1$.

Доведення. Нехай $\eta_n(t)$ — випадкова величина, яка дорівнює одиниці, якщо $\tau_n \in [0,1]$, і нулеві, якщо $\tau_n \overline{\in} [0,t]$. Тоді

$$\nu(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t),$$

звідки

$$H(t) = E\nu(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{\eta_n(t) = 1\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_1 + \dots + T_n \le t\}.$$

Отже, має місце (2.138).

Теорему доведено.

Лема 2.3. *Для кожного $t > 0$ $H(t) < \infty$.*

Доведення. Справді, оскільки $\{\tau_1 + \dots + \tau_n\} \subset \bigcap_{r=1}^{n} \{\tau_k \le t\}$, то при кожному $t > 0$ $F^{n*}(t) \le F^n(t)$. Якщо при всіх t $F(t) < 1$, то з (2.138) випливає, що $H(t) < \frac{1}{1-F(t)}$. Якщо розподіл величини T_k зосереджений на якомусь скінченному відрізку, то для кожного t існує таке досить велике r, що $F^{r*}(t) < 1$. Використовуючи це і монотонність членів ряду (2.138), неважко встановити його збіжність.

Лему доведено.

Відзначимо ще таке представлення для функції $H(t)$:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{\nu(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{\tau_{n-1} \le t < \tau_n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(P\{\tau_n > t\} - P\{\tau_{n-1} > t\}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big[F^{(n-1)*}(t) - F^{n*}(t)\Big]. \tag{2.139}$$

Теорема 2.22. *Нехай*

$$h(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} H(t)\, dt \tag{2.140}$$

— перетворення Лапласа функції відновлення $H(t)$. Тоді

$$h(\lambda) = \frac{1}{\lambda[1 - g(\lambda)]}, \tag{2.141}$$

де

$$g(\lambda) = Ee^{-\lambda T_k} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x)$$

— перетворення Лапласа величини T_k.

Дійсно, використовуючи рівність (2.139), будемо мати

$$h(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} H(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F^{(n-1)*}(t) - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F^{n*}(t)\, dt.$$

Відзначимо далі, що інтегруючи частинами, матимемо

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F^{n*}(t)\, dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} F^{n*}(t)\, d(e^{-\lambda t}) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dF^{n*}(t) = \frac{1}{\lambda} g^n(\lambda)$$

(нагадаємо, що перетворення Лапласа композиції дорівнює добуткові перетворень Лапласа, тобто $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dF^{n*}(t) = g^n(\lambda)$). Отже,

$$h(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n[g^{n-1}(\lambda) - g^n(\lambda)] = \frac{1}{\lambda[1 - g(\lambda)]}.$$

З рівності (2.141), зокрема, також випливає, що функція $H(t)$ скінченна при кожному $t > 0$.

Приклад 2.25. Нехай випадкова величина T_k має показниковий розподіл з параметром α. Тоді

$$g(\lambda) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-\alpha t} d\lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}$$

і в силу (2.141)

$$h(\lambda) = \frac{\alpha + \lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{2.142}$$

Знаходячи з (2.142) за перетворенням Лапласа оригінал, одержимо

$$H(t) = 1 + \alpha t. \tag{2.143}$$

Теорема 2.33. *Функція $H(t)$ задовольняє інтегральне рівняння*

$$H(t) = 1 + \int_0^t H(t-y)\,dF(y). \tag{2.144}$$

Д о в е д е н н я. Справді, оскільки $\tau = 0$ вважається моментом відновлення, то математичне сподівання числа моментів відновлення в замкненому відрізку $[0,t]$ дорівнює одиниці плюс число моментів відновлення у відкритому інтервалі $(0,t)]$. Інтервал $(0,t]$ містить моменти відновлення тоді, коли $T_1 \le x$. За умови, що $T_1 = y$, математичне сподівання числа моментів відновлення в інтервалі $(0,t]$ дорівнює $H(t-y)$. Інтегруючи по y, одержуємо рівняння (2.144).

Теорему доведено.

П р и к л а д 2.26. Переходячи в рівнянні (2.144) до перетворень Лапласа, одержимо

$$h(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + h(\lambda)g(\lambda), \tag{2.145}$$

звідки випливає (2.141).

Рівняння відновлення. Так називається інтегральне рівняння

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)\,dF(y), \tag{2.146}$$

де $Z(t)$ — невідома функція, $z(t)$ — відома функція. Функції $z(t)$ і $Z(t)$ дорівнюють нулеві на від'ємній півосі.

Теорема 2.24. *Якщо $z(t)$ — обмежена функція, то функція*

$$Z(t) = \int_0^t z(t-y)\,dH(y) \tag{2.147}$$

є единим розв'язком рівняння (2.146), обмеженим на скінченних інтервалах.

Д о в е д е н н я. Розглянемо перетворення Лапласа від обох частин рівняння (2.146). Позначимо

$$\tilde{z}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} z(t)\,dt, \qquad \tilde{Z}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Z(t)\,dt.$$

Тоді одержимо

$$\tilde{Z}(\lambda) = \tilde{z}(\lambda) + \tilde{Z}(\lambda)g(\lambda),$$

звідки

$$\tilde{Z}(\lambda) = \tilde{z}(\lambda)\frac{1}{1-g(\lambda)} = \tilde{z}(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} g^n(\lambda). \tag{2.148}$$

Відзначимо, що з рівності (2.138) випливає, що

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dH(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n(\lambda). \tag{2.148}$$

Тому, переходячи в рівності (2.148) від перетворень Лапласа до оригіналів, одержимо (2.147).

Теорему доведено.

Теореми відновлення. Так називають твердження про асимптотичну поведінку функції відновлення $H(t)$ на нескінченності.

Будемо розрізняти два різних припущення про розподіл величин T_k.

Означення 2.18. Випадкова величина T_1 *має арифметичний розподіл*, якщо при деякому d випадкова величина T_1/d є цілочисельною величиною. Максимальне таке d називається *кроком розподілу*.

Якщо $f(u) = Ee^{iuT_1}$ — характеристична функція випадкової величини T_1, причому T_1 має арифметичний розподіл з кроком d, то $2\pi/d$ є мінімальним додатним коренем рівняння $f(u) = 1$.

Теорема 2.25. *Нехай випадкова величина T_1 має арифметичний розподіл з кроком h і $ET_1 = \mu < \infty$. Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} [H(t+h) - H(t)] = \frac{h}{\mu}. \tag{2.149}$$

Д о в е д е н н я. Будемо вважати, що $h = 1$. Покладемо

$$q_n = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\tau_k = n\} \quad (n \ge 1), \qquad q_0 = 1.$$

Нехай $\nu_{k,n} = 1$, якщо $\tau_k = n$, і $\nu_{k,n} = 0$, якщо $\tau_k \ne n$. Тоді $\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n\le t} \nu_{kn}$, і тому

$$H(t) = E\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\le t} P\{\tau_k = n\} = \sum_{n\le t}\sum_{k=1}^{\infty} P\{\tau_k = n\} = \sum_{n\le q} q_n.$$

Для доведення теореми досить встановити, що

$$\lim_{t\to\infty} [H(t+1) - H(t)] = \lim_{t\to\infty} q_t = \frac{1}{\mu}.$$

Нехай

$$f(u) = Ee^{iuT_1} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_1 = n\} e^{iun}. \tag{2.150}$$

Тоді

$$f^k(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau_k = n\}\, e^{iun}. \qquad (2.151)$$

Помноживши обидві частини рівності (2.151) на e^{-iun} і, інтегруючи по u від $-\pi$ до π, одержимо

$$P\{\tau_k = n\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iun} f^k(u)\, du. \qquad (2.152)$$

Тому

$$q_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iun} f^k(u) du. \qquad (2.153)$$

Оскільки величини τ_k додатні, то

$$P\{\tau_k = -n\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iun} f^k(u) du = 0.$$

Тому

$$q_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(e^{-iun} - e^{iun}\right) f^k(u)\, du = \frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f^k(u) \sin nu\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nu \left(\sum_{k=0}^{\infty} f^k(u)\right) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nu}{1 - f(u)}\, du. \qquad (2.154)$$

Нагадаємо, що в силу припущення про арифметичність розподілу T_1 з кроком $h = 1$, на інтервалі $(-\pi, \pi)$ виконується нерівність $|f(u)| < 1$. Зробимо заміну $s = nu$ в інтегралі (2.154). Будемо мати

$$q_n = \frac{1}{\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{\sin s}{s}\, \frac{-i(s/n)}{1 - f(s/n)}\, ds. \qquad (2.155)$$

Відзначимо, що

$$\lim_{u\to\infty} \frac{-iu}{1 - f(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{-iu}{1 - \{1 + iu\mu + o(u)\}} = \frac{1}{\mu}. \qquad (2.156)$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$ під знаком інтеграла (2.155). Одержимо

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{\mu\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds.$$

Як відомо з курсу математичного аналізу,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \pi \qquad (2.157)$$

(інтеграл Діріхле). Отже,

$$\lim_{t\to\infty} [H(t+1) - H(t)] = \lim_{t\to\infty} q_t = \frac{1}{\mu},$$

що й доводить теорему 2.25. Строге обґрунтування можливості граничного переходу під знаком інтегралу в (2.155) ми залишаємо читачеві.

Теорему доведено.

Розглянемо випадок неарифметичного розподілу T_1. Якщо T_1 має неарифметичний розподіл і $f(u) = Ee^{iuT_1}$, то $|f(u)| < 1$ при всіх $u \neq 0$.

Теорема 2.26. *Якщо випадкова величина T_1 має неарифметичний розподіл, $ET_1 = \mu < \infty$, то для всіх $h > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} (H(t+h) - H(t)) = \frac{h}{\mu}. \qquad (2.158)$$

Доведення. Достатньо довести, що для досить гладких фінітних функцій $\psi(u)$ буде виконуватись рівність

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\, dH(t+s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\, dH(v) = \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\, ds. \qquad (2.159)$$

(Нагадаємо, що функція називається *фінітною*, якщо вона перетворюється в нуль зовні деякого відрізку, і насправді інтеграл береться по цьому відрізку.) Маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\, dH(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\, d\nu(v) = E\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\tau_n - t) = \sum_{n=0}^{\infty} E\psi(\tau_n - t). \qquad (2.160)$$

Нехай

$$\psi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivu}\tilde{\psi}(u)\, du.$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\, dH(v) = \sum_{n=0}^{\infty} E\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_n - t)u}\tilde{\psi}(u)\, du.$$

Приймаючи до уваги, що $Ee^{i\tau_n u} = f^n(u)$, будемо мати

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\,dH(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} f^n(u)\tilde{\psi}(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} \frac{1}{1-f(u)}\tilde{\psi}(u)\,du. \tag{2.161}$$

Зауважимо, що оскільки випадкові величини τ_n додатні, то при $t > 0$ і кожному n

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f^n(u)\tilde{\psi}(u)\,du = 0. \tag{2.162}$$

Це випливає з так званих формул обертання для характеристичних функцій. Наприклад, якщо η — випадкова величина з абсолютно інтегрованою характеристичною функцією $f(v)$, то існує щільність розподілу $p(x)$ і в силу формули обертання для характеристичних функцій

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} f(u)\,du.$$

Оскільки $p(x) = 0$ при $x < 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} f(u)\,du = 0.$$

Покладаючи в цій рівності $x = -t$, будемо мати

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f(u)\,du = 0$$

при $t > 0$.

Віднімаючи від (2.161) суму інтегралів (2.162), яка дорівнює нулеві, будемо мати

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\,dH(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iut} - e^{iut}}{1-f(u)}\,\tilde{\psi}(u)\,du =$$

$$= -2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ut}{1-f(u)}\,\tilde{\psi}(u)du.$$

Зробимо в цьому інтегралі заміну $ut = s$. Тоді матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\,dH(v) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\,\frac{-i(s/t)}{1-f(s/t)}\,\tilde{\psi}\!\left(\frac{s}{t}\right)\,ds. \tag{2.163}$$

Переходячи до границі під знаком інтегралу в (2.163) при $t \to \infty$, будемо мати, враховуючи (2.156) і (2.157),

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\,dH(v) = \frac{2\pi\tilde{\psi}(0)}{\mu}. \tag{2.164}$$

Але за формулою обертання для перетворень Фур'є

$$\tilde{\psi}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isv}\psi(s)\,ds,$$

тобто

$$\tilde{\psi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,ds.$$

Таким чином, має місце (2.159). Розглянемо в (2.159) функцію $\psi(s)$, яка дорівнює 1, коли $s \in [0,h]$ і дорівнює нулеві, коли $s \overline{\in} [0,h]$. Тоді матимемо

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v-t)\,dH(v) = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,dH(t+s) = \lim_{t\to\infty} [H(t+h) - H(t)] = \frac{h}{\mu},$$

що й доводить (2.158). (Ми користуємось тим, що індикаторну функцію інтервалу можна апроксимувати достатньо гладкими фінітними функціями. Відзначимо також, що ми залишили читачеві обгрунтування граничного переходу в інтегралі (2.163).)

Теорему доведено.

Зауваження 2.2. Якщо $ET_1 = \mu = \infty$, то рівність (2.158) залишається в силі, якщо покласти $1/\mu = 0$.

Асимптотична поведінка розв'язків рівняння відновлення

Дослідимо асимптотичну поведінку розв'язків рівняння (2.146), коли $t \to \infty$. Оскільки розв'язок рівняння (2.146) для обмежених функцій $z(t)$ має вигляд (2.147), то уважно аналізуючи доведення теореми 2.26, треба відзначити, що при доведенні цієї теореми встановлено таке: якщо розподіл $F(\cdot)$ неарифметичний, а $z(t)$ — обмежена гладка фінітна функція, то для функції $Z(t)$, яка є розв'язком (2.146), виконується рівність

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \frac{1}{\mu} \int_{0}^{\infty} z(u)\,du. \tag{2.165}$$

Узагальнемо цей результат на більш широкий клас функцій $z(t)$.

Нагадаємо читачеві означення інтеграла Рімана $\int_0^a z(t)dt$. Нехай $z(t)$ — обмежена функція на $[0,a]$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин точками $t_k = kh$ $(k = 1,...,n-1)$, де $h = a/n$. Нехай

$$\underline{m_k} = \inf_{(k-1)h\le t<kh} z(t), \qquad \overline{m}_k = \sup_{(k-1)h\le t<kh} z(t). \tag{2.166}$$

Нижня і верхня ріманові суми (суми Дарбу) при заданому h визначаються рівностями

$$\underline{\sigma} = h\sum_{k=1}^{n}\underline{m_k}, \qquad \overline{\sigma} = h\sum_{k=1}^{n}\overline{m}_k. \tag{2.167}$$

Коли $n \to \infty$, то $h \to 0$ і $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$ прямують до скінченних границь. Якщо $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \to 0$, то ці границі співпадають і їх спільне значення називається $\int_0^a z(t)dt$, а сама функція $z(t)$ називається інтегрованою за Ріманом. Зокрема, обмежена функція, яка має лише розриви першого роду, інтегрована за Ріманом.

Інтеграл по нескінченному проміжку $\int_0^\infty z(t)$ в курсах математичного аналізу означається, як границя $\lim_{a\to\infty}\int_0^a z(t)dt$.

Ми ж будемо користуватись іншим означенням інтегрованості за Ріманом на $[0,\infty)$, яке належить Феллеру.

Означення 2.19. Розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на частини точками $t_k = kh$ $(k \ge 0)$. Невід'ємна функція $z(t)$ називається *безпосередньо інтегрованою за Ріманом* на $[0,\infty)$, якщо верхня і нижня суми, визначені рівностями (2.166) і (2.167), скінченні і при $h \to 0$ прямують до однієї й тієї ж границі.

Зауважимо, що суми (2.166) і (2.167) тепер є нескінченними рядами.

Припустимо, що $z(t)$ — безпосередньо інтегрована на $[0,\infty)$, а розподіл $F(x)$ — неарифметичний. При фіксованому $h > 0$ покладемо $z_k(t) = 1$ при $(k-1)h \le t < kh$ і $z_k(t) = 0$ в інших випадках. Розглянемо дві ступінчаті функції

$$\underline{z} = h\sum_k \underline{m_k} z_k(t), \qquad \overline{z} = h\sum_k \overline{m}_k z_k(t). \tag{2.168}$$

Інтеграл $\int_0^\infty z(t)dt$ є спільна границя при $h \to 0$ інтегралів від цих ступінчатих функцій. Нехай $Z_k(t)$ — розв'язок рівняння (2.146), який відповідає функції $z_k(t)$. Тоді розв'язки рівняння (2.146), які відповідають

функціям $\underline{z}(t)$ і $\overline{z}(t)$, мають вигляд

$$\underline{Z(t)} = \sum \underline{m_k} Z_k(t), \qquad \overline{Z(t)} = \sum \overline{m}_k Z_k(t). \tag{2.169}$$

При кожному фіксованому k, згідно з теоремою 2.26, $\overline{Z}_k(t) \to h/\mu$, $\underline{Z_k}(t) \to h/\mu$ при $t \to \infty$. Тому

$$\underline{Z_k}(t) \to \frac{\underline{\sigma}}{\mu}, \qquad \overline{Z}_k(t) \to \frac{\overline{\sigma}}{\mu}. \tag{2.170}$$

Але $\underline{Z}(t) \le Z(t) \le \overline{Z}(t)$ і тому всі граничні значення $\underline{Z}(t)$, коли $t \to \infty$, лежать між $\underline{\sigma}/\mu$ і $\overline{\sigma}/\mu$. Тому, якщо функція $z(t)$ безпосередньо інтегрована на $[0,\infty)$, то

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)ds. \tag{2.171}$$

Таким чином, ми довели таке твердження.

Теорема 2.17. *Якщо розподіл $F(x)$ — неарифметичний, функція $z(t)$ безпосередньо інтегрована на $[0,\infty)$, а $Z(t)$ — розв'язок рівняння (2.146), то має місце рівність (2.171).*

Якщо розподіл $F(x)$ — арифметичний з кроком d, то розв'язок рівняння (2.146) має вигляд

$$Z(t) = \sum_k z(x - kd)q_k, \tag{2.172}$$

де $q_k \to d/\mu$ при $k \to \infty$ (теорема 2.25).

Звідси випливає, що при фіксованому t і $n \to \infty$

$$Z(t + nd) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{\mu}\sum_{j=1}^{\infty} z(t + jd) \tag{2.173}$$

при умові збіжності ряду в правій частині (2.173), що насправді має місце, якщо функція $z(t)$ безпосередньо інтегрована.

Таким чином, має місце теорема

Теорема 2.18. *Якщо розподіл $F(x)$ — арифметичний з кроком d, функція $z(t)$ безпосередньо інтегрована на $[0,\infty)$, $Z(t)$ — розв'язок рівняння (2.146), то має місце гранична рівність (2.173).*

Процеси відновлення, що обриваються (нерекурентні процеси відновлення)

Припустимо, що випадкові величини T_k мають невласний розподіл, тобто $F(\infty) < 1$. Це означає, що з додатньою ймовірністю T_k може набути значення ∞.

Будемо надалі функцію розподілу T_k позначати через $L(x)$ і припускатимемо, що $L(0) = 0$, $L(\infty) = L_\infty < 1$. Як і раніше, будемо вважати, $\tau_0 = 0$ моментом відновлення. Випадкові величини $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$ є моментами відновлення. Випадкова величина τ_n також має невласний розподіл $L^{n*}(x)$, причому $L^{n*}(\infty) = L_\infty^n$. Різниця $1 - L_\infty^n$ є ймовірність обриву процесу до моменту n-го відновлення. Нехай $\nu(t)$ — число моментів відновлення на відрізку $[0, t]$. Розглянемо функцію відновлення

$$H(t) = E\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{n*}(t). \tag{2.174}$$

Процес відновлення у випадку, коли випадкові величини T_k мають невласний розподіл, називають ***нерекурентним процесом відновлення*** або процесом відновлення, що обривається.

На відміну від розглянутого вище процесу відновлення, коли $F(\infty) = 1$, в нерекурентному процесі відновлення математичне сподівання числа відновлень на нескінченному проміжку є скінченним,

$$H(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{n*}(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} L_\infty^n = \frac{1}{1 - L_\infty}. \tag{2.175}$$

Теорема 2.29. *Нерекурентний процес відновлення, який розпочинається з нуля, обривається з ймовірністю одиниця. Момент обриву M, тобто максимум послідовності $0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, має власний розподіл*

$$P\{M \le x\} = (1 - L_\infty) H(x). \tag{2.176}$$

Справді, ймовірність того, що n-й момент відновлення буде останнім і при цьому $\le x$ дорівнює $(1 - L_\infty) L^{n*}(x)$. Тому має місце (2.176).

Розглянемо рівняння відновлення

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t - y)\, dL(y). \tag{2.177}$$

При невласному розподілі $L(x)$ теорія цього рівняння спрощується.

Теорема 2.30. *Якщо $z(t) = 0$ при $t \le 0$, рівняння (2.177) має єдиний розв'язок $Z(t)$, причому*

$$Z(t) = \int_0^t z(t - y)\, dH(y). \tag{2.178}$$

Якщо існує $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = z(\infty)$, то при $t \to \infty$

$$Z(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{z(\infty)}{1 - L_\infty}. \tag{2.179}$$

Д о в е д е н н я. Перша частина теореми може бути доведена точно так же, як теорема 2.24. Рівність (2.179) одержуємо, переходячи до границі під знаком інтегралу в (2.178).

Теорему доведено.

П р и к л а д 2.27. Нехай $Z(t) = P\{M \le t\}$, де M — момент обриву процесу. Подія $\{M \le t\}$ відбувається, якщо процес обривається на τ_0 (ймовірність цього $1 - L_\infty$), або якщо τ_1 набуває деякого значення $y \le t$, а процес, що залишився, доживає до моменту $\le t - y$. Інтегруючи по y, переконуємось, що $Z(t)$ задовольняє рівняння відновлення

$$Z(t) = 1 - L_\infty + \int_0^t Z(t - y)\, dH(y). \tag{2.180}$$

Відзначимо, що із (2.178) випливає (2.176).

Розглянемо тепер питання про асимптотичну поведінку розв'язків рівняння відновлення (2.177). Одержані нижче результати будуть мати важливі застосування в наступному розділі при розгляді проблем актуарної математики.

Припустимо, що існує таке число R, що

$$\int_0^\infty e^{Ry}\, dL(y) = 1. \tag{2.181}$$

Оскільки функція $\gamma(s) = \int_0^\infty e^{sy}\, dL(y)$ монотонно зростає на $[0, \infty)$, бо $\gamma'(s) > 0$, і крім того, $\gamma(0) = \int_0^\infty dL(y) = L_\infty < 1$, то таке число R існує і $R > 0$.

Розглянемо тепер власний розподіл $\bar{L}(y)$, який визначається рівністю

$$d\bar{L}(y) = e^{Ry}\, dL(y). \tag{2.182}$$

Поставимо у відповідність кожній функції $f(t)$ нову функцію $\bar{f}(t) = e^{Rt} f(t)$. Помножимо обидві частини рівняння відновлення (2.177) на e^{Rt}. Тоді це рівняння можна записати у вигляді

$$e^{Rt} Z(t) = e^{Rt} z(t) + \int_0^t e^{R(t-y)} Z(t - y) e^{Ry}\, dL(y),$$

тобто

$$\bar{Z}(t) = \bar{z}(t) + \int_0^t \bar{Z}(t - y)\, d\bar{L}(y). \tag{2.183}$$

Рівняння (2.183) є рівняння відновлення з власним розподілом $\bar{L}(y)$. Тому з теореми 2.27 випливає таке твердження.

Теорема 2.31. *Якщо функція $\bar{z}(y)$ безпосередньо інтегрована за Ріманом на $[0,\infty)$ (в цьому випадку, очевидно, $z(\infty)=0$), і R — корінь рівняння (2.181), то*

$$\lim_{t\to\infty} Z(t)e^{Rt} = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{Rs}z(s)\,ds, \tag{2.184}$$

де

$$\bar{\mu} = \int_0^\infty e^{Ry}y\,dL(y). \tag{2.185}$$

Таким чином, при великих t

$$Z(t) \sim e^{-Rt}\frac{1}{\bar{\mu}}\int_0^\infty e^{Rs}z(s)\,ds.$$

У випадку $z(\infty)\neq 0$ дослідимо асимптотичну поведінку $Z(\infty)-Z(t)$. Покладемо

$$z_1(t) = z(\infty)-z(t)+z(\infty)\frac{L_\infty - L(t)}{1-L_\infty}. \tag{2.186}$$

Тоді $z_1(\infty)=0$ і

$$\int_0^\infty z_1(s)ds = \int_0^\infty e^{Rs}[z(\infty)-z(s)]\,ds + \frac{z(\infty)}{1-L_\infty}\int_0^\infty e^{Rs}(L_\infty - L(s))\,ds. \tag{2.187}$$

Інтегруючи частинами і приймаючи до уваги (2.181), переконуємось, що другий інтеграл в правій частині рівності (2.187) дорівнює $\frac{z(\infty)}{R}$. Функція $Z(\infty)-Z(t)$ є розв'язком рівняння відновлення

$$Z(\infty)-Z(t) = z_1(t)+\int_0^t [Z(\infty)-Z(t-y)]\,dL(y).$$

Тому з теореми 2.21 випливає наступне твердження.

Теорема 2.32. *Якщо R — корінь рівняння (2.181), функція $z_1(t)$, яка визначена рівністю (2.181), безпосередньо інтегрована, $\bar{\mu}\neq\infty$ ($\bar{\mu}$ визначена рівністю (2.185)), то*

$$\lim_{t\to\infty}\bar{\mu}[Z(\infty)-Z(t)] = \frac{z(\infty)}{R}+\int_0^\infty e^{Rs}[z(\infty)-z(s)]\,ds. \tag{2.188}$$

Якщо застосувати теорему 2.32 до рівняння (2.180), в якому $Z(t) = P\{M\le t\}$, то одержимо таке твердження.

Теорема 2.33. *Якщо M — момент обриву нерекурентного процесу відновлення, то при $t\to\infty$*

$$P\{M>t\}\sim\frac{1-L_\infty}{R\bar{\mu}}e^{-Rt}, \tag{2.189}$$

де R — корінь рівняння (2.181), а $\bar{\mu}$ визначається рівністю (2.185).

§ 5. Фільтрація, моменти зупинки

Фільтрація

Нехай T — параметрична множина. Пов'яжемо з кожним значенням $t\in T$ деяку σ-алгебру $\mathcal{F}_t$, що є під σ-алгеброю $\mathcal{F}:\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$. Вважаємо, що $T=[0,\infty)$.

Означення 2.20. Сукупність σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t\in T\}$ називається *фільтрацією*, якщо вона задовольняє наступні умови:

1) $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$ для всіх $s<t,\ s,\ t\in T$;

2) σ-алгебра $\mathcal{F}_0$ містить всі ті події (множини) A з σ-алгебри $\mathcal{F}$, для яких $P(A)=0$.

3) $\mathcal{F}_t=\bigcap_{t>s}\mathcal{F}_s$.

Зауважимо, що при виконанні властивості 1) кожна σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ задовольняє умову 2). Умову 3) ще називають умовою неперервності "справа" фільтрації $\mathcal{F}_t$. (Нагадаємо, що перетин будь-якої кількості σ-алгебр знов є σ-алгеброю). Якщо $T=\{0,1,2...\}$, то умова 3) не розглядається. Пов'яжемо тепер з процесом $X_t,\ \ t\in T$ деяку фільтрацію. Спочатку зауважимо, що кожна випадкова величина X_t при фіксованому $t\in T$ є $\mathcal{F}$-вимірною (це випливає безпосередньо з визначення випадкової величини). Але при визначенні випадкового процесу ми вимагаємо, щоб виконувалась більш сильна умова: 4) для кожного $t\in T$ випадкова величина $X_t\in\mathcal{F}_t$- вимірного ($\mathcal{F}_t$-адаптованою).

В цьому випадку фільтрація $\{\mathcal{F}_t,\ t\in R\}$, що також задовольняє умови 1)–3), називається фільтрацією, пов'язаною з випадковим процесом X_t. Сукупність процесу з відповідною фільтрацією позначається $(X_t,\ \mathcal{F}_t,\ t\in T)$. Іноді розглядають таку спеціальну фільтрацію: покладають $\mathcal{F}_t=\sigma\{X_s,\ 0\le s\le t\}$ — найменшій σ-алгебрі, пов'язаній з випадковим процесом; тобто $\mathcal{F}_t$ — це найменша σ-алгебра, що містить всі події вигляду $\{Xs_1\le u_1,\ Xs_2\le u_2,...,Xs_n\le u_n\}$, де $\{s_1,s_2,...,s_n\}\subseteq\subseteq[0,t]$, $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ — будь-які дійсні числа. Таку фільтрацію часто позначають $\mathcal{F}_t^x$ і називають *фільтрацією, породженою процесом X_t*. В будь-якому випадку, якщо маємо процес з фільтрацією $(X_t,\mathcal{F}_t,t\in T)$, то подія $\{X_t\le u\}\in\mathcal{F}_t$. Зокрема, визначені ймовірності $P(x_t\le u)$, тобто визначений *розподіл випадкового процесу X_t*.

Моменти зупинки

Іноді потрібно розглянути випадковий процес не в детермінований момент часу $t \in T$, а в деякий випадковий момент часу τ. Наприклад, можна цікавитись тим моментом часу, коли значення випадкового процесу вперше перевищить фіксований рівень a (брокер на біржі чекає моменту, коли вартість акцій перевищить деякий рівень, тоді він буде їх продавати). Найчастіше розглядають такі випадкові моменти, які визначаються "попередньою" поведінкою траєкторій процесу, тобто подія $\{\tau \le u\}$ залежить лише від траєкторій процесу на проміжку часу $[0, u]$. Дамо, взагалі кажучи, більш широке визначення.

Означення 2.21. Нехай $T = [0, \infty)$, $\tau = \tau(\omega) \ge 0$ — випадкова величина, $(\mathcal{F}_t,\ t \ge 0)$ — фільтрація. Величина τ називається ***моментом зупинки*** (або ***марковським моментом*** відносно фільтрації $\mathcal{F}_t$, якщо для будь-якого $u \ge 0$ подія $\{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u$. Скорочено кажуть, що τ є $\mathcal{F}_t$-моментом зупинки.

Якщо $T = \{0, 1, 2, ...\}$, то відповідне визначення моменту зупинки таке: випадкова величина $\tau \in \{0, 1, ...\}$ є $\mathcal{F}_t$-моментом зупинки $t \in \in \{0, 1, ...\}$, якщо для будь-якого $n \ge 0$ подія $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$.

Лема 2.4. *Випадкова величина τ є $\mathcal{F}_t$-моментом зупинки тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $u > 0$ подія $\{\tau < u\} \in \mathcal{F}_u$.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай τ — це $\mathcal{F}_t$ – момент зупинки, тобто для будь-якого $v \ge 0$ подія $\{\tau \le v\} \in \mathcal{F}_v$. Нехай тепер $u > 0$. Подамо подію $\{\tau < u\}$ як об'єднання таких подій: $\{\tau < u\} = \bigcap\limits_{v<u} \{\tau \le v\}$. Тоді кожна з подій $\{\tau \le v\} \in \mathcal{F}_v \subseteq \mathcal{F}_u$, оскільки $v < u$, а тоді і їх об'єднання, тобто $\{\tau < u\} \in \mathcal{F}_u$.

Достатність. Нехай для будь-якого $u > 0$ подія $\{\tau < u\} \in \mathcal{F}_u$. Зафіксуємо число $v \ge 0$ і подамо подію $\{\tau \le v\}$ як перетин таких подій: $\{\tau \le v\} = \bigcup\limits_{v+\delta \ge u > v} \{\tau < u\}$, де $\delta > 0$ — будь-яке число. Кожна подія в правій частині, а значить, і їх перетин, належить до σ-алгебри $\mathcal{F}_{v+\delta}$. Отже, $\{\tau \le v\} \in \mathcal{F}_{v+\delta}$ для будь-якого $\delta > 0$, а значить, $\{\tau \le v\} \in \in \bigcap\limits_{\delta>0} \mathcal{F}_{v+\delta} = \mathcal{F}_v$ (згідно з властивістю 2) фільтрації). Лему доведено.

Лема 2.5. *Якщо τ — це $\mathcal{F}_t$-момент зупинки, то:*

1) для будь-якого $u \ge 0$ події $\{\tau > u\}$, $\{\tau \ge u\}$ і $\{\tau = u\}$ належать до $\mathcal{F}_u$,

2) події $\{u < \tau < v\}$, $\{u \le \tau < v\}$, $\{\tau < \tau \le v\}$ і $\{u \le \tau \le v\}$ належать до $\mathcal{F}_v$, якщо $u < v$.

Д о в е д е н н я. 1. За властивостями σ-алгебр і лемою 1 події $\{\tau < u\} = \Omega \backslash \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u$, $\{\tau \ge u\} = \Omega \backslash \{\tau < u\} \in \mathcal{F}_u$, $\{\tau = u\} = = \Omega \backslash (\{\tau < u\} \cap \{\tau > u\}) \in \mathcal{F}_u$.

2. Наприклад, подія $\{u < \tau < v\} = \{\tau < v\} \backslash \{\tau \le u\}$, причому $\{\tau < v\}) \in \mathcal{F}_v$, $\{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_v$, звідки $\{u < \tau < v\} \in \mathcal{F}_v$; інші події розглядаються аналогічно.

Лему доведено.

Розглянемо тепер σ-алгебру, пов'язану з моментом зупинки τ.

Означення 2.22. σ-алгеброю $\mathcal{F}_\tau$, пов'язаною з $\mathcal{F}_t$-моментом зупинки τ, називається σ-алгебра, що складається з таких множин $A \in \mathcal{F}$, для яких перетин множин $A \cap \{\tau \le u\}$ належить до $\mathcal{F}_u$ для будь-яких $u \ge 0$. Формально: $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u\ \forall u \ge 0\}$.

Очевидно, до $\mathcal{F}_\tau$ належать такі множини: Ω, $\emptyset$, $\{\tau \le u\}$, $\{\tau > u\}$, $\{\tau = u\}$, $u \ge 0$, але, взагалі кажучи, вона містить і деякі інші множини з $\mathcal{F}$. Але, визначення 2.22 дає лише деяку сукупність множин, тому треба перевірити, що $\mathcal{F}_\tau$ справді є σ-алгеброю.

Лема 2.6. а) *Сукупність множин $\mathcal{F}_\tau$ з означення 2.22 справді є σ-алгеброю;* б) ***момент зупинки τ — це $\mathcal{F}_\tau$-вимірна випадкова величина.***

Д о в е д е н н я. а) Згідно з означенням, перевіряємо властивості 1)–3). 1) Якщо $\{A_1, A_2, ...\} \subseteq \mathcal{F}_\tau$, тобто

$$A_i \cap \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u\ \forall u \ge 0,$$

то в силу властивостей операцій над множинами

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \{\tau \le u\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{\tau \le u\}) \in \mathcal{F}_u$$

як зліченне об'єднання множин з $\mathcal{F}_u$. Отже, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_\tau$.

2) Якщо $\{A, B\} \subseteq \mathcal{F}_\tau$, тобто $A \cap \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u$ і $B \cap \{\tau \le u\} \in \in \mathcal{F}_u$, то

$$(A \backslash B) \cap \{\tau \le u\} = (A \cap \{\tau \le u\}) \backslash (B \cap \{\tau \le u\}) \in \mathcal{F}_u.$$

отже, $A \backslash B \in \mathcal{F}_u$.

3) очевидно, $\Omega \in \mathcal{F}_\tau : \Omega \cap \{\tau \le u\} = \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u$.

б) Оскільки $\{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_\tau$, то це і означає, що τ є $\mathcal{F}_\tau$-вимірною випадковою величиною.

Лему доведено.

Нехай σ і τ — два скінченні $\mathcal{F}_t$-моменти зупинки, причому відомо, що для всіх $\omega \in \Omega$ $\sigma(\omega) \le \tau(\omega)$ (тобто $\sigma \le \tau$). Далі треба буде порівнювати σ-алгебри $\mathcal{F}_\sigma$ і $\mathcal{F}_\tau$.

Лема 2.7. *Якщо $0 \le \sigma \le \tau < \infty$, то $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.*

Д о в е д е н н я. Нехай множина $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Це означає, що $A \cap \{\sigma \le \le u\} \in \mathcal{F}_u$ для будь-якого $u \ge 0$. Тепер, якщо $\tau \le u$, то, тим більше, $\sigma \le u$. Тому $A \cap \{\tau \le u\} = (A \cap \{\sigma \le u\}) \cap \{\tau \le u\}$, і ця множина належить до $\mathcal{F}_u$ як перетин двох множин з $\mathcal{F}_u$. Але те, що $A \cap \{\tau \le u\}$ належить до $\mathcal{F}_u$ і означає, що $A \in \mathcal{F}_\tau$.

Лему доведено.

Доведемо ще один результат щодо умовних математичних сподівань. Оскільки $\mathcal{F}_\tau$ — це σ-алгебра, то, очевидно, для інтегрованих випадкових величин існує умовне математичне сподівання $E(X/\mathcal{F}_\tau)$.

Лема 2.8. *Нехай X — інтегрована випадкова величина ($E|X| < < \infty$) і τ — $\mathcal{F}_t$-момент зупинки. Тоді на множині $\{\omega : \tau(\omega) = t\}$ умовне математичне сподівання $E(X/\mathcal{F}_\tau)$ співпадає з $E(X/\mathcal{F}_t)$.*

Доведення. Треба показати, що

$$P(\{\tau = t\} \cap (E(X/\mathcal{F}_\tau) \neq E(X/\mathcal{F}_t))) = 0,$$

або, що те саме, що з ймовірністю 1

$$I\{\tau = t\}E(X/\mathcal{F}_\tau) = I\{\tau = t\}E(X/\mathcal{F}_t),$$

де

$$Y = I\{\tau = t\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \tau = t, \\ 0, & \text{якщо } \tau \neq t. \end{cases}$$

При цьому випадкова величина Y є одночасно і $\mathcal{F}_t$ і $\mathcal{F}_\tau$-вимірною. Справді, подія

$$\{Y \le a\} = \begin{cases} \Omega, & a \ge 1, \\ \{\tau < t\} \cup \{\tau > t\}, & 0 \le a < 1 \in \mathcal{F}_t, \\ \emptyset, & a < 0. \end{cases}$$

З другого боку,

$$\{Y \le a\} \cap \{\tau \le u\} =$$

$$= \begin{cases} \{\tau \le u\}, & a \ge 1, \text{ або } 0 < a < 1, & u < t; \\ \{\tau < t\} \cup \{t < \tau \le u\}, & 0 < a < 1, & u \ge t \in \mathcal{F}_u, \\ \{\tau < t\}, & 0 < a < t, & u = t, \\ \emptyset, & a < 0, \end{cases}$$

звідки $\{Y \le a\} \in \mathcal{F}_\tau$, тобто $Y - \mathcal{F}_\tau$-вимірна випадкова величина. Таким чином, $YE(X/\mathcal{F}_\tau) = E(XY/\mathcal{F}_\tau)$ і $YE(X/\mathcal{F}_t) = E(XY/\mathcal{F}_t)$, і значить, треба довести, що

$$E(XY/\mathcal{F}_\tau) = E(XY/\mathcal{F}_t). \tag{2.190}$$

Доведемо, що випадкова величина $E(XY/\mathcal{F}_t)$ є $\mathcal{F}_\tau$-вимірного, тобто що для будь-якого $a \in R$ подія

$$B = \{E(XY/\mathcal{F}_t) \le a\} \cap \{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_u.$$

Але, якщо $t \le u$, то $E(XY/\mathcal{F}_t)$ є $\mathcal{F}_t$-а значить і $\mathcal{F}_u$-вимірною величиною, звідки $B \in \mathcal{F}_u$. Якщо ж $t > u$, то

$$B = \{I\{\tau = t\}E(X/\mathcal{F}_t) \le a\} \cap \{\tau \le u\} = \begin{cases} \emptyset, & a < 0, \\ \tau \le u, & a \ge 0 \end{cases} \quad \in \ \mathcal{F}_u.$$

Тепер, згідно з визначенням умовного математичного сподівання, для будь-якої множини $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\int\limits_A E(XY/\mathcal{F}_\tau)\,dP = \int\limits_A XY\,dP = \int\limits_A I\{\tau = t\}X\,dP = \int\limits_{A\cap\{\tau=t\}} X\,dP. \tag{2.191}$$

Множина $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, тому що

$$A \cap \{\tau = t\} = \bigcap_{t \le s \le t+\delta} A \cap \{\tau = t\} \cap \{\tau \le s\} \in \mathcal{F}_{t+\delta},$$

для будь-якого $\delta > 0$, а значить, $A \cap \{\tau = t\} \in \bigcap_{\delta>0} \mathcal{F}_{t+\delta} = \mathcal{F}_t$. Тому

$$\int\limits_{A\cap\{\tau=t\}} X\,dP = \int\limits_{A\cap\{\tau=t\}} E(X/\mathcal{F}_t)dP = \int\limits_A I\{\tau = t\}E(X/\mathcal{F}_t)dP =$$

$$= \int\limits_A YE(X/\mathcal{F}_t)dP = \int\limits_A E(XY/\mathcal{F}_t)dP. \tag{2.192}$$

З (2.191) і (2.192) випливає, що для будь-якої множини $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\int\limits_A E(XY/\mathcal{F}_\tau)dP = \int\limits_A E(XY/\mathcal{F}_t)dP. \tag{2.193}$$

Тепер (2.190) випливає з (2.193), $\mathcal{F}_\tau$-вимірності $E(XY/\mathcal{F}_t)$ і довільного вибору множини $A \in \mathcal{F}_\tau$.

Лему доведено.

Розглянемо тепер моменти зупинки, які найчастіше зустрічаються в фінансовій математиці. Для цього звузимо клас випадкових процесів, розглянувши деякі обмеження на їх траєкторії. Нагадаємо, що дійсна невипадкова функція X_t, $t \in [0, \infty)$ називається

а) неперервною, якщо для будь-якого $t_0 > 0$ $\lim\limits_{t\to t_0} X_t = X_{t_0}$, $X_0 = \lim\limits_{t\to 0,\, t>0} X_t$.

б) неперервною справа (зліва), якщо для будь-якого $t_0 \ge 0$

$$X_{t_0} = \lim_{t\to t_0,\, t>t_0} X_t (X_{t_0} = \lim_{t\to t_0,\, t<t_0} X_t).$$

Означення 2.23. Випадковий процес $X_t = X_t(\omega)$, $t \in [0, \infty)$, $\omega \in \Omega$ називається:

а) неперервним, якщо майже всі його траєкторії неперервні;

б) неперервним справа, якщо майже всі його траєкторії неперервні справа.

Очевидно, неперервний процес, тим більше, є неперервним і справа і зліва.

Лема 2.9. *Нехай $(X_t, \mathcal{F}_t, t \ge 0)$ — неперервний справа випадковий процес. Тоді моменти*

$$\tau_1 = \inf\{t \ge 0 : X_t > a\}, \quad \tau_2 = \inf\{t \ge 0 : X_t < a\}$$

є моментами зупинки для будь-якого $a \in R$.

Доведення. Розглянемо τ_1 (τ_2 розглядається аналогічно). Для будь-якого $t \geq 0$, в силу неперервності справа траєкторій, множина

$$\{\tau_1 > t\} = \{\omega : X_s(\omega) \leq a,\ s \leq t\} = \bigcap_{r \leq t} \{X_r \leq a\},$$

де r — раціональні числа. Тому

$$\{\tau_1 \leq t\} = \bigcap_{r \leq t} \{X_r \leq a\} \in \mathcal{F}_t.$$

Лему доведено.

Приклад 2.28. Нехай $\{X_n,\ n \leq 0\}$ — такий випадковий процес, що величини X_n незалежні і однаково розподілені: $P\{X_n = 1\} = p$, $P\{X_n = -1\} = q = 1 - p$, $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n > 0\}$. Знайти $E\tau$ (величину $E\tau$ можна трактувати як середній час чекання до виходу процесу у верхню півплощину).

<u>*Розв'язок.*</u> Подія $\{\tau = k\} = \{X_0 \leq 0, X_1 \leq 0, ..., X_{k-1} \leq 0, X_k > 0\} = \{X_0 = x_1 = \cdots = X_{k-1} = -1, X_k = 1\}$. Тому $P\{\tau = k\} = P\{X_0 = -1\}P\{X_1 = -1\}...P\{X_{k-1} = -1\}P\{X_k = 1\} = q^k p$, $k \geq 1$. Значить,

$$E\tau = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{\tau = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{p}.$$

Приклад 2.29. Нехай деякий банк має необмежене число клієнтів, які прибувать один за одним і виконують деяку фінансову операцію. Занумеруємо їх натуральними числами і позначимо X_n, $n \geq 1$ розмір прибутку n-го клієнта. Припустимо, що $X_0, X_1, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини. Нехай перший клієнт одержав свій прибуток X_1 і чекає, коли один з наступних клієнтів одержить більший прибуток (ми нехтуємо таким поняттям, як комерційна таємниця). Таким чином, зараз момент зупинки $\tau = k$, якщо $X_2 \leq X_1, ..., X_{k-1} \leq X_1$, $X_k > X_1$. Подія $\{\tau > k\}$ відбувається тоді і тільки тоді, коли в рядку $X_1, X_2, ..., X_k$ перший член є найбільшим; в силу повної симетрії ймовірність цієї події дорівнює $1/k$. Подія $\{\tau = k\} = \{\tau > k-1\} \setminus \{\tau > k\}$ і значить її ймовірність дорівнює

$$P\{\tau = k\} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Тому математичне сподівання

$$E\tau = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot P\{\tau = k\} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = \infty.$$

Таким чином, в середньому треба чекати до нескінченності, щоб дочекатися більшого прибутку. Звичайно, на практиці можливий випадок, коли вже другий прибуток буде більшим за перший, але при повторенні ситуації час чекання більшого прибутку може бути досить великим.

§ 6. Мартингали і напівмартингали. Дискретний час

Основні означення і приклади

Нехай параметрична множина $T = \{0, 1, 2, ...\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір, $X_t = X_n(\omega)$, $n \geq 0$, $\omega \in \Omega$ — випадковий процес з дискретним часом (такий процес ще називають *випадковою послідовністю*). Пов'яжемо з процесом X_n фільтрацію $(\mathcal{F}_n,\ n \geq 0)$, тобто послідовність σ-алгебр $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$, що задовольняє умови

1) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ для всіх $n \geq 0$;
2) $\mathcal{F}_0$ містить всі підмножини з $\mathcal{F}$, що мають нульову ймовірність;
3) випадкова величина $X_n \in \mathcal{F}_n$-вимірною.

Означення 2.24. Випадкова послідовність $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ називається *мартингалом* (з дискретним часом), якщо виконуються умови

4) $E|X_n| < \infty$ для всіх $n \geq 0$;
5) $E(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$, $n \geq 1$.

Оскільки X_{n-1} є $\mathcal{F}_{n-1}$-вимірною випадковою величиною, то умову 5) ще можна переписати у вигляді $E(X_n - X_{n-1}/\mathcal{F}_{n-1}) = 0$, або $E(\Delta X_n / /\mathcal{F}_{n-1}) = 0$, де $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. В силу властивостей умовних математичних сподівань для мартингалу X_n буде виконуватись рівність

$$E(X_n/\mathcal{F}_m) = X_m, \text{ якщо } n \geq m. \tag{2.194}$$

Справді,

$$E(X_n/\mathcal{F}_m) = E(E(X_n/\mathcal{F}_{n-1})/\mathcal{F}_m) = E(X_{n-1}/\mathcal{F}_m) =$$
$$= \cdots = E(X_{m+1}/\mathcal{F}_m) = X_m.$$

Якщо $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$ — найменша σ-алгебра, породжена випадковими величинами $X_1, ..., X_n$, то умову 5) можна переписати у вигляді: $E(X_n/X_0, X_1, ..., X_{n-1}) = X_{n-1}$.

Мартингал з дискретним часом часто інтерпретують як "необразливу" або "справедливу" гру. Припустимо, що гравець робить ставки в дискретні моменти часу $n = 1, 2, ...$ і що його капітал після n-ї ставки — це випадкова величина X_n (X_0 — початковий капітал гравця, величини X_n можуть бути як додатніми, так і від'ємними, від'ємність означає борг). При цьому σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ являє собою наше знання про еволюцію капіталу гравця до n-ї ставки включно. Гра називається справедливою, якщо знання про еволюцію капіталу не дозволяє гравцю в наступний момент збільшити свій капітал, тобто умовне математичне сподівання приросту капіталу дорівнює нулю: $E(\Delta X_n/\mathcal{F}_{n-1}) = 0$, що відповідає визначенню мартингала. Аналогічно можна визначити поняття "сприятливої" і "несприятливої" гри, коли знання попередньої гри дозволяє збільшити капітал, або, навпаки, призводить до його зменшення. Ці поняття відповідають математичним визначенням субмартингалу і супермартингалу.

Означення 2.25. Випадкова послідовність $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ називається *субмартингалом (супермартингалом)*, якщо виконуються дві умови:

6) $E|X_n| < \infty$ для всіх $n \geq 0$;

7) $E(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$ $(E(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1})$ для всіх $n \geq 1$.

Зробимо наступні зауваження: 1. Будь-який мартингал є одночасно субмартингалом і супермартингалом.

2. Якщо $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — супермартингал, то $(-X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — супермартингал і навпаки.

3. Математичне сподівання субмартингалу не спадає: $EX_n \geq EX_{n-1}$. Справді, $EX_{n-1} \leq E(E(X_n/\mathcal{F}_{n-1})) = EX_n$. Аналогічно, математичне сподівання супермартингалу не зростає, $EX_{n-1} \geq EX_n$, мартингалу — є стала $EX_n = EX_{n-1} = \dots = EX_0$, і якщо X_0 — стала, то $EX_n = X_0$.

4. Субмартингал і супермартингал в сукупності називаються півмартингалами.

П р и к л а д 2.30. Нехай X — інтегрована випадкова величина, $E|X| < \infty$. Покладемо $X_n = E(X/\mathcal{F}_n)$, де $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — деяка фільтрація. Тоді $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — мартингал, оскільки $E(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) = E(E(X/\mathcal{F}_n)/\mathcal{F}_{n-1}) = E(X/\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$.

П р и к л а д 2.31. Нехай $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ — послідовність інтегрованих незалежних випадкових величин з нульовим середнім: $E|y_i| < \infty$, $Ey_i = 0$, $i \geq 0$. Покладемо $X_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$, при цьому y_n не залежить від F_{n-1}. Тоді $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — мартингал, тому що $E(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) = E(y_0 + y_1 + \dots + y_n/\mathcal{F}_{n-1}) = y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + E(y_n/F_{n-1}) = y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + Ey_n = y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} = X_{n-1}$.

П р и к л а д 2.32. Нехай $(X_0, X_1, \dots)$ і $(Y_0, Y_1, \dots)$ — дві сукупності випадкових величин, і для кожного $n \geq 0$ існують сукупні щільності розподілу цих величин, $f_n(u_0, \dots, u_n)$ і $g_n(u_0, \dots u_n)$, причому $f_n(u_0, \dots, u_n) > 0$ для всіх $n \leq 0$ і всіх $u_i \in R$. Тоді $(Z_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — мартингал, якщо

$$Z_n = \frac{g_n(X_0, \dots, X_n)}{f_n(X_0, \dots, X_n)}, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n).$$

Справді, умовна щільність розподілу випадкової величини X_n щодо випадкових $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ дорівнює відношенню f_{n+1}/f_n, тому

$$E(Z_n/X_0 = x_0,\ X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_n(x_0, \dots, x_{n-1}, y)}{p_n(x_0, \dots, x_{n-1}, y)} \frac{p_n(x_0, \dots, x_{n-1}, y)}{p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})} dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_n(x_0, \dots, x_{n-1}, y)\, dy \frac{1}{p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})} =$$

$$= \frac{q_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})}{p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})}. \tag{2.195}$$

З (2.195) випливає, що

$$E(Z_n/\mathcal{F}_{n-1}) = \frac{q_{n-1}(X_0, \dots, X_{n-1})}{p_{n-1}(X_0, \dots, X_{n-1})} = Z_{n-1},$$

тобто Z_n — мартінгал.

П р и к л а д 2.33. Нагадаємо, що дійсна функція $f(x) : R \to R$ називається опуклою вниз, якщо для будь-яких $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ таких, що $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$. Кожна двічі диференційована функція з додатньою другою похідною є опуклою вниз. Зокрема, функції $f_1(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $f_2(x) = |x|\log^+ x$, $x > 0$, $\log^+ x = \max(0, \log x)$ є опуклими вниз. Нехай $(X_n, \mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$ — мартингал, $f(x)$ — опукла вниз функція, причому, $E|f(X_n)| < \infty$. Тоді в силу нерівності Єнсена, $E(f(X_n)/\mathcal{F}_{n-1}) \geq f(E(X_n/\mathcal{F}_{n-1})) = f(X_{n-1})$, тобто $f(X_n)$ — субмартингал. Найчастіше використовується той факт, що функція $f(x) = x^2$ є опуклою вниз і значить, X_n^2 — субмартингал, якщо X_n — мартингал, такий, що $EX_n^2 < \infty$, $n \geq 1$.

Півмартингали з дискретним часом $T = \{1, \dots, N\}$

Визначимо тепер ті властивості мартингалів і півмартингалів, які найчастіше використовуються в фінансових моделях і розрахунках. Однією з основних властивостей є те, що (суб-, супер-) мартингальна властивість зберігається, якщо замінити фіксований момент часу n на момент зупинки τ.

Теорема 2.34. *Нехай $X = (X_n, \mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$ — супермартингал, σ і τ — два моменти зупинки відносно потоку σ-алгебр $\mathcal{F}, 1 \leq n \leq N$, причому $P\{1 \leq \sigma \leq \tau \leq N\} = 1$.*

Тоді $E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma$ $(P-$м.н.$)$.

Д о в е д е н н я. Перевіримо, що випадкова величина X_τ є інтегрованою. Справді,

$$E|X_\tau| = \sum_{n=1}^{N} EI\{\tau=n\}|X_n| \le \sum_{n=1}^{N} E|X_n| < \infty.$$

Тому можна розглядати умовні математичні сподівання X_τ.

Нехай n — фіксований момент часу, $1 \le n \le N$, множина $A \in \mathcal{F}_n$. Оскільки множини $\{\sigma = n\}$ і $\{\tau > n\}$ належать до $\mathcal{F}_n$, то і їх перетин $A \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau > n\} = A \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau \ge n+1\} \in \mathcal{F}_n$. Крім того, в силу супермартингальної властивості $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \le X_n$. Тому, враховуючи, що $X_\tau = X_n$, якщо $\tau = n$, одержимо

$$\int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge n\}} (X_n - X_\tau)\,dP = \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau=n\}} (X_n - X_\tau)\,dP +$$

$$+ \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n\}} (X_n - X_\tau)\,dP = \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n\}} \ge$$

$$\ge \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n\}} (E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) - X_\tau)\,dP = \tag{2.196}$$

$$= \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n\}} (X_{n+1} - X_\tau)\,dP = \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n+1\}} (X_{n+1} - X_\tau)\,dP.$$

Порівняємо ліву і праву частини (2.196)

$$\int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge n\}} (X_n - X_\tau)\,dP \ge \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge n+1\}} (X_{n+1} - X_\tau)\,dP.$$

Продовжуючи, одержимо:

$$\int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge n\}} (X_n - X_\tau)\,dP \ge \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge n+2\}} (X_{n+2} - X_\tau)\,dP \ge \ldots$$

$$\ldots \ge \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge N\}} (X_N - X_\tau)\,dP = \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge N\}} (X_N - X_\tau)\,dP = 0. \tag{2.197}$$

З (2.197)

$$\int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\ge n\}} (X_n - X_\tau)\,dP = \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}} (X_n - X_\tau)\,dP \ge 0.$$

В силу властивостей умовних математичних сподівань

$$\int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}} (X_n - E(X_\tau/\mathcal{F}_n))\,dP \ge 0. \tag{2.198}$$

Оскільки $A \in \mathcal{F}_n$ — довільна множина, то з (2.198) $X_n \ge E(X_\tau/\mathcal{F}_n)$ (P – м.н.) на множині $\{\sigma = n\}$, тобто $x_\sigma \ge E(X_\tau/\mathcal{F}_n)$ (P – м.н.) на множині $\{\sigma = n\}$. Але в силу леми 2.8, на множині $\{\sigma = n\}$ $E(X_\tau/\mathcal{F}_n) = E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma)$. Остаточно, $X_\sigma \ge E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma)$ (P – м.н.) на множині $\{\sigma = n\}$, а значить і на об'єднанні цих множин $\cup_{n=1}^{N}\{\sigma = n\} = \Omega$.

Наслідки. 1. Якщо $(X_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le N)$ — супермартингал і $P\{1 \le \sigma \le \tau \le N\} = 1$, σ, τ — моменти зупинки, то $EX_1 \ge EX_\sigma \ge \ge EX_\tau \ge Ex_N$.

2. Якщо $(X_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le N)$ — супермартингал, $P\{1 \le \sigma \le \le \tau \le N\} = 1$, σ, τ — моменти зупинки, то $E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma) \ge X_\sigma$ і $EX_1 \le \le EX_\sigma \le EX_\tau \le EX_N$.

3. Якщо $(X_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le N)$ — мартингал, то для тих самих σ і τ $E(X\tau/\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ і $EX_1 = EX_\sigma = EX_\tau = EX_N$.

Наведемо без доведення деякі корисні нерівності для мартингалів і півмартингалів з дискретним часом.

1. Якщо $(X_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le)$ — супермартингал, то

$$P(\max_{1\le n\le N} X_n \ge C) \le C^{-1}Ex_N^{+} \ (a^{+} = \max(a, 0)).$$

2. Якщо $(X_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le N)$ — супермартингал, то

$$P(\max_{1\le n\le N} X_n \ge C) \le 2C^{-1} \max_{1\le n\le N} E|X_n|.$$

3. (*Нерівність Колмогорова* для мартингалів). Якщо $(X_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le N)$ — квадратично-інтегрований мартингал, тобто $EX_n^2 < < \infty$ для всіх $1 \le n \le N$, то

$$P(\max_{1\le n\le N} |X_n| \ge C) \le C^{-2}EX_N^2.$$

Півмартингали з дискретним часом $T = \{1, 2, \ldots\}$

Спочатку наведемо теорему про існування границь (пів) мартингалів $(X_n, \mathcal{F}_n, n \ge 1)$.

Теорема 2.35. 1)*Якщо* $(X_n, \mathcal{F}_n, n \ge 1)$ — *супермартингал і*

$$\sup_{n\ge 1} EX_n^{+} < \infty, \text{ то } X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$$

існує (P – м.н.) *і* $E|X_\infty| < \infty$;

2) *Якщо* $(X_n, \mathcal{F}_n, n \ge 1)$ — *невід'ємний супермартингал, то границя* X_∞ *існує* (P – м.н.);

3) *Якщо* $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ — *мартингал,*

$$\sup_{n\geq 1} E|X_n| < \infty, \text{ то } X_\infty \text{ існує } (P - \text{м.н.}).$$

(Твердження 2) і 3) випливають з 1).)

Перенесемо тепер, хоча б частково, твердження теореми 2.34 на (пів)-мартингали, задані на нескінченній параметричній множині $T = \{1, 2, ...\}$. Але для цього потрібні додаткові припущення про структуру (пів)мартингалу.

Означення 2.26. Мартингал $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ називається регулярним, якщо існує така інтегрована випадкова величина X, що

$$X_n = E(X/\mathcal{F}_n), \qquad n \geq 1 \ (P - \text{м.н.}).$$

Теорема 2.36. *Нехай* $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ — *регулярний мартингал,* σ, τ — *моменти зупинки, такі, що* $P\{1 \leq \sigma \leq \tau < \infty\} = 1$. *Тоді* $X_\sigma = E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma)$.

Д о в е д е н н я. Спочатку покажемо, що $E|X_\tau| < \infty$. Але, з нерівності Єнсена,

$$E|X_\tau| = \sum_{n=1}^{\infty} EI\{\tau = n\}|X_n| = \sum_{n=1}^{\infty} EI\{\tau = n\}|E(X/\mathcal{F}_n)| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} EI\{\tau = n\}E(|X|/\mathcal{F}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} EI\{\tau = n\}|X| = E|X| < \infty.$$

Використовуючи теорему 2.36, доведемо відповідний результат для супермартингалів.

Теорема 2.37. *Нехай* $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ — *супермартингал, причому існує така інтегрована випадкова величина* X, *що* $X_n \geq E(X/\mathcal{F}_n)$, $n \geq 1$ $(P - \text{м.н.})$, σ, τ — *моменти зупинки, і* $P(1 \leq \sigma \leq \tau < \infty\} = 1$. *Тоді* $X_\sigma \geq E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma)$ $(P - \text{м.н.})$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $X_n = E(X/\mathcal{F}_n) + y_n$, де $y_n = X_n - E(X/\mathcal{F}_n)$ — невід'ємний супермартингал, а $E(X/\mathcal{F}_n)$ — мартингал, для якого має місце теорема 2.36, достатньо розглянути лише невід'ємні супермартингали X_n. Розглянемо послідовність випадкових величин $\tau_k = \tau \wedge k$ $(a \wedge b = \min(a, b))$, $\sigma_k = \sigma \wedge k$. Тоді $\sigma_k \leq \tau_k \leq k$. Крім того, σ_k і τ_k — моменти зупинки, тому що, наприклад, множина

$$\{\omega : \tau_k \leq t\} = \begin{cases} \Omega, & \text{якщо } t \geq k, \\ \{\omega : \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, & \text{якщо } t < k. \end{cases}$$

В силу теореми 2.34, $X_{\sigma_k} \geq E(X_{\tau_k}/\mathcal{F}_{\sigma_k})$. Якщо множина $A \in \mathcal{F}_\sigma$, то

$A \cap \{\sigma \leq k\} \in \mathcal{F}_k$, і $A \cap \{\sigma \leq k\} \in \mathcal{F}_\sigma$, значить $A \cap \{\sigma \leq k\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge k} = \mathcal{F}_{\sigma_k}$,

тому

$$\int_{A\cap\{\sigma\leq k\}} X_{\sigma_k}\, dP \geq \int_{A\cap\{\sigma\leq k\}} E(X_{\tau_k}/\mathcal{F}_{\sigma_k})\, dP = \int_{A\cap\{\sigma\leq k\}} X_{\tau_k}\, dP.$$

Далі, оскільки подія $\{\tau \leq k\} \subseteq \{\sigma \leq k\}$, а $X_{\tau_k} \geq 0$, то

$$\int_{A\cap\{\sigma\leq k\}} X_{\sigma_k}\, dP \geq \int_{A\cap\{\sigma\leq k\}} X_{\tau_k}\, dP \geq \int_{A\cap\{\sigma\leq k\}} X_{\tau_k}\, dP.$$

Але, $X_{\sigma_k} = X_\sigma$, якщо $\sigma \leq k$, $X_{\tau_k} = X_\tau$, якщо $\tau \leq k$. Отже, $\int\limits_{A\cap\{\sigma\leq k\}} X_\sigma\, dP \geq$ $\geq \int\limits_{A\cap\{\sigma\leq k\}} X_\tau\, dP$. Перейдемо до границі при $k \to \infty$:

$$\int_{A\cap\{\sigma<\infty\}} X_\sigma\, dP \geq \int_{A\cap\{\tau<\infty\}} X_\tau\, dP.$$

Але, $P(\sigma < \infty) = P(\tau < \infty) = 1$, тобто для будь-якої події $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\int_A X_\sigma\, dP \geq \int_A X_\tau\, dP = \int_A E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma)\, dP,$$

звідки випливає доведення.

Розклад мартингалу за "базисом". Наведемо один спеціальний результат, який буде використано в §6 розділу IV. Спочатку нагадаємо деякі факти з теорії ймовірностей [13]:

1. Якщо σ-алгебру $\mathcal{F}$ породжено випадковою величиною X, а випадкова величина $Y \in \mathcal{F}$-вимірною, то існує така борельова невипадкова функція $f : R \to R$, що $Y = f(X)$ $(P - \text{м.н.})$.

2. Якщо σ-алгебру $\mathcal{F}$ породжено скінченним набором випадкових величин $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, а випадкова величина $Y \in \mathcal{F}$-вимірною, то існує така борельова невипадкова функція $f : R^n \to R$, що $Y = f(X_1, X_2, ...$ $..., X_n)$ $(P - \text{м.н.})$.

(Твердження 1 — це частковий випадок твердження 2.) Нехай тепер $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір, на якому задано незалежні в сукупності однаково розподілені величини $X_1, X_2, ..., X_n$, причому кожна з них приймає два значення α і β з ймовірностями q і p, відповідно. Тоді $EX_1 = \alpha q + \beta p = r$. Припустимо, що $-1 < \alpha < r < \beta$. При цьому $r = (1-p)\alpha + \beta p$, звідки $p = \dfrac{r-a}{b-a}$. Покладемо $m_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - r)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, $1 \leq n \leq N$. Тоді $E|X_n - r| < \infty$, $E(X_k - r) = 0$ і згідно прикладу 2.4, $(m_n, \mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$ — мартингал. Розглянемо будь-який інший мартингал $(M_n, \mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$ і покажемо, що його можна представити, або розкласти по "базисному" мартингалу m_n.

Теорема 2.38. *Кожний мартингал* $(M_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le N)$ *з* $EM_n = 0$ *допускає розклад*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta m_k, \tag{2.199}$$

де $\Delta m_k = m_k - m_{k-1} = X_k - r$, *випадкові величини* α_k *є* $\mathcal{F}_{k-1}$*-вимірними,* $k \ge 1$ $(\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\})$.

Доведення. Оскільки випадкові величини M_n є $\mathcal{F}_n$-вимірними, то згідно з твердженням 2 існують борельові функції $f_n = f_n(x_1, ..., x_n)$, причому $x_i = \alpha$ або β, такі що

$$M_n(\omega) = f_n(X_1(\omega),\ X_2(\omega), ..., X_n(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

При цьому $(M_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n \le N)$ — мартингал, звідки

$$E(f_n(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))/\mathcal{F}_{n-1}) = f_{n-1}(X_1(\omega), ..., X_{n-1}(\omega)). \tag{2.200}$$

Але, випадкові величини $X_1, ..., X_{n-1}$ є $\mathcal{F}_{n-1}$-вимірними, вони не залежать від X_n і X_n приймає лише два значення α і β з ймовірностями q і p, відповідно, тому

$$E(f_n(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))/\mathcal{F}_{n-1}) = (1-p) f_{n-1}(X_1(\omega), ...$$

$$..., X_{n-1}(\omega), \alpha) + p f_{n-1}(X_1(\omega), ..., X_{n-1}(\omega), \beta). \tag{2.201}$$

Підставимо (2.201) в (2.200) і тотожньо перетворимо:

$$\frac{1}{q}(f_n(X_1, ..., X_{n-1}, \beta) - f_{n-1}(X_1, ..., X_{n-1})) =$$

$$= \frac{1}{p}(f_{n-1}(X_1, ..., X_{n-1}) - f_n(X_1, ..., X_{n-1}, \alpha)).$$

Але, $p = \dfrac{r-\alpha}{\beta-\alpha}$, $q = 1 - p = \dfrac{\beta - r}{b - \alpha}$, звідки

$$\frac{1}{\beta - r}(f_n(X_1, ..., X_{n-1}, \beta) - f_{n-1}(X_1, ..., X_{n-1})) =$$

$$= \frac{1}{\alpha - r}(f_n(X_1, ..., X_{n-1}, \alpha) - f_{n-1}(X_1, ..., X_{n-1})), \tag{2.202}$$

(індекс ω при $X_1, ..., X_{n-1}$ опускаємо). Позначимо $\alpha_n = \alpha_n(u)$ ліву частину (2.202). Тоді $\alpha_n - \mathcal{F}_{n-1}$ — вимірна випадкова величина і з (2.202)

$$f_n(X_1, ..., X_{n-1}, \beta) - f_{n-1}(X_1, ..., X_{n-1}) = \alpha_n(\omega)(\beta - r), \tag{2.203}$$

$$f_n(X_1, ..., X_{n-1}, \alpha) - f_{n-1}(X_1, ..., X_{n-1}) = \alpha_n(\omega)(\alpha - r). \tag{2.204}$$

Сукупність рівностей (2.203) і (2.204) означає, що на всіх $\omega \in \Omega$

$$f_n(X_1, ..., X_n) - f_{n-1}(X_1, ..., X_{n-1}) = \alpha_n(\omega)(X_n - r),$$

тобто $M_n - M_{n-1} = \alpha_n(\omega)\Delta M_n$, що рівносильно (2.199).

Теорему доведено.

§ 7. Мартингали і напівмартингали. Неперервний час. Теорема про перетворення вільного вибору

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з фільтрацією $(\mathcal{F}_t, t \ge 0)$ (див. § 5). Цю сукупність будемо позначати $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, t \ge 0, P)$.

Означення 2.27. Випадковий процес з фільтрацією $(X_t, \mathcal{F}_t, t \ge 0)$ називається мартингалом (суб-, супермартингалом) з неперервним часом, якщо виконуються дві умови:

1) $E|X_t| < \infty$ для всіх $t \ge 0$;

2) $E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$ $(\ge X_s,\ \le X_s)$ для будь-яких $s \le t$.

Приклад 2.34. Найбільш тривіальний приклад мартингалу з неперервним часом — це постійний процес $X_t = C$. Будь-який монотонно неспадний процес $(X_t, \mathcal{F}_t, t \ge 0)$ є субмартингалом, монотонно незростаючий — супермартингалом (випадковий процес називається монотонно неспадним (незростаючим), якщо майже всі його траєкторії — монотонно неспадні (незростаючі) функції).

Нашою метою є перенесення результатів теорем 2.34, 2.36 і 2.37 на напівмартингали з неперервним часом. Відповідні теореми називають теоремами вільного вибору через те, що вони гарантують збереження мартингальної або напівмартингальної властивості при заміні детермінованого моменту часу на випадковий. Але автоматично теореми вільного вибору на напівмартингали з неперервним часом не переносяться, потрібні додаткові припущення про структуру їх траєкторій.

Означення 2.28. Послідовність $\{X_n, n \ge 1\}$ інтегрованих випадкових виличин називається рівномірно інтегрованою, якщо

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{n \ge 1} E|X_n| I\{|X_n| \ge C\} = \lim_{C\to\infty} \sup_{n\ge 1} \int\limits_{\{|X_n| \ge C\}} |X_n|\, dP = 0.$$

Кілька наступних результатів наведемо без доведення.

Лема 2.10. *Якщо* $\{X_n, n \ge 1\}$ — *рівномірно інтегрована послідовність випадкових величин і*

$$X_n \xrightarrow{P} X, \qquad n \to \infty,$$

де X — *деяка випадкова величина, то:*

1) для будь-якої множини $A \in \mathcal{F}$

$$\int\limits_A X_n dP \longrightarrow \int\limits_A X dP, \qquad n \to \infty;$$

2) для будь-якої σ-алгебри $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$

$$E(X_n/\mathcal{F}_1) \xrightarrow{P} E(X/\mathcal{F}_1), \qquad n \to \infty;$$

3)

$$EX_n \to EX, \qquad n \to \infty.$$

Доведення міститься, наприклад, в [13].

Лема 2.11. *Нехай* $(X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *— супермартингал, для якого існує така інтегрована випадкова величина* X, *що* $X_t \geq E(X/\mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$ $(P-\text{м.н.})$. *Нехай* $\{\tau_n, n \geq 1\}$ *— така послідовність моментів зупинки, що* $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots$ $(P-\text{м.н.})$. *Тоді послідовність випадкових величин* $\{X_{\tau_n},\ n \geq 1\}$ *(супермартингал, "зупинений" в незростаючі моменти часу) є рівномірно інтегрованою.*

Доведення міститься в [4]. Далі будуть розглядатися випадкові процеси, неперервні справа (див. § 5). Виявляється, що при не дуже сильних обмеженнях півмартингал є "майже неперервним справа" у наступному розумінні.

Означення 2.29. Випадковий процес $(Y_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ називається *модифікацією* процесу $(X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$, якщо для будь-якого $t \geq 0$

$$P(X_t \neq Y_t) = 0.$$

Лема 2.12. *За умови, що фільтрація* $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ *задовольняє вимоги 1)–3) означення 2.20, супермартингал* $(X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *допускає неперервну справа модифікацію тоді і тільки тоді, коли числова функція* $\varphi_t = EX_t$, $t \geq 0$ *є неперервною справа.*

Доведення міститься в [9].

Теорема 2.39. *Нехай* $(X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *— неперервний справа супермартингал, і існує така випадкова величина* X, $E|X| < \infty$, *що* $X_t \geq (X/\mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$ $(P-\text{м.н.})$.

Тоді, якщо σ *і* τ *— такі моменти зупинки, що* $P\{0 \leq \sigma \leq \leq \tau < \infty\} = 1$, *то*

$$X_\sigma \geq E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma).$$

Доведення. Розглянемо будь-яке натуральне число $n \geq 1$ і розіб'ємо промінь $[0, \infty)$ на такі відрізки довжини $1/2^n$:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \left[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \ldots, \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), \ldots$$

Оскільки момент зупинки τ невід'ємний, то для кожного $\omega \in \Omega$ $\tau(\omega)$ попаде в один з відрізків $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$. Утворимо тепер наступну послідовність випадкових величин τ_n: покладемо $\tau_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$, якщо $\frac{k-1}{2^n} \leq$

$\leq \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}$. Покажемо, що $\tau_n(\omega)$ — моменти зупинки, Справді, множина

$$\left\{\omega : \tau_n(\omega) = \frac{k}{2^n}\right\} = \left\{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \subseteq \mathcal{F}_t,$$

якщо $\frac{k}{2^n} \leq t$, а тому для будь-якого $t \geq 0$

$$\{\omega : \tau_n(\omega) \leq t\} = \bigcup_{k: \frac{k}{2^n} \leq t} \left\{\omega : \tau_n(\omega) = \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

При цьому τ_n приймає дискретну множину значень. Аналогічно за моментом зупинки σ визначимо послідовність дискретних моментів зупинки $\{\sigma_n,\ n \geq 1\}$. Нехай для деякого $\omega \in \Omega$ $\sigma_n = \frac{k}{2^n}$. Це означає, що $\frac{k-1}{2^n} \leq \sigma < \frac{k}{2^n}$, тому $\tau \geq \frac{k-1}{2^n}$, а тоді $\tau_n \geq \frac{k}{2^n} \geq \sigma_n$. Отже, $(\infty > \tau_n \geq \sigma_n \geq 0) = 1$. Дискретні моменти зупинки σ_n і τ_n при фіксованому n можна розглядати як моменти зупинки для супермартингалу $\{X_{k/2^n},\ k \geq 0\}$ з дискретним часом, причому цей супермартингал, очевидно, задовольняє умови теореми 2.37. Тому

$$E(X_{\tau_n}/\mathcal{F}_{\sigma_n}) \leq X_{\sigma_n} \quad (P-\text{м.н.}),\ n \geq 1.$$

Нехай множина A належить до σ-алгебри $\mathcal{F}_\sigma$. Оскільки $\sigma \leq \sigma_n$ $(P-\text{м.н.})$, то $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_n}$, значить $A \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$. Тому

$$\int_A X_{\sigma_n} dP \geq \int_A E(X_{\tau_n}/\mathcal{F}_{\sigma_n}) dP = \int_A X_{\tau_n} dP. \tag{2.205}$$

Зауважимо, що $\sigma_n \geq \sigma_{n+1}$ для будь-якого $n \geq 1$. Справді, якщо $\sigma_n = \frac{k}{2^n}$, то $\frac{k-1}{2^n} \leq \sigma < \frac{k}{2^n}$, тобто $\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq \sigma < \frac{2k}{2^{n+1}}$, звідки або $\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq \sigma < < \frac{2k-1}{2^{n+1}}$, або $\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq \sigma < \frac{2k}{2^{n+1}}$, тому $\sigma_{n+1} = \frac{2k-1}{2^n}$, або $\sigma_{n+1} = = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n}$. В обох випадках $\sigma_{n+1} \leq \sigma_n$. Очевидно також, що $\sigma \leq \sigma_{n+1} \leq \sigma_n$ і $\sigma_n \to \sigma$, $\tau_n \to \tau$, $n \to \infty$ (якщо змінна величина прямує до границі, при цьому монотонно не спадає і залишається більшою або рівною границі, то цей факт позначають ще так: $\sigma_n \downarrow \sigma$, $\tau_n \downarrow \tau$, $n \to \infty$). Оскільки супермартингал X_t є неперервним справа, то $X_{\tau_n} \to X_\tau$ і $X_{\sigma_n} \to X_\sigma$ при $n \to \infty$. В силу леми 2.11 послідовність випадкових величин $\{X_{\tau_n}, n \geq 1\}$ і $\{X_{\sigma_n}, n \geq 1\}$ є рівномірно інтегрованими, а тоді, з врахуванням леми 2.10

$$\int_A X_{\sigma_n} dP \to \int_A X_\sigma dP, \quad \int_A X_{\tau_n} dP \to \int_A X_\tau dP.$$

Перейдемо тепер до границі при $n \to \infty$ в (2.205):

$$\int_A X_\sigma \, dP \geq \int_A X_\tau \, dP = \int_A E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma) \, dP.$$

В силу довільного вибору множини $A \in \mathcal{F}_\sigma$ одержуємо: $X_\sigma \geq E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma)$.

Теорему доведено.

Наслідки. 1. Нехай $(X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ — такий мартингал, для якого існує інтегрована випадкова величина X і $X_t = E(X/\mathcal{F}_t)$ (P – м.н.), $t \geq 0$ (такий мартингал називають *рівномірно інтегрованим*), σ, τ — такі моменти зупинки, що $P(0 \leq \sigma \leq \tau < \infty) = 1$. Тоді $X_\sigma = E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma)$; зокрема, $EX_\sigma = EX_\tau = EX_0$.

2. Якщо неперервний справа мартингал задано на обмеженому проміжку $[0, T]$ то $X_t = E(X_T/\mathcal{F}_t)$; можна покласти $X = X_T$ і ми одержимо: якщо σ, τ — моменти зупинки і $P(0 \leq \sigma \leq \tau \leq T) = 1$, то $E(X_\tau/\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ і $EX_\tau = EX_\sigma = EX_0$.

§ 8. Процеси, що передбачаються. Розклад Дуба–Мейєра

Процеси з дискретним часом, що передбачаються

Означення 2.30. Випадковий процес $(A_n, F_n, \ n \geq 0)$ з дискретним часом називається:

1) *процесом, що передбачається* (відносно фільтрації $(F_n, \ n \geq 0)$), якщо для всіх $n \geq 1$ випадкова величина A_n є F_{n-1}-вимірною, A_0 — постійна;

2) *монотонно неспадним (незростаючим)*, якщо

$$A_n \leq A_{n+1} \ (P\text{-м.н.}) \qquad (A_n \geq A_{n+1} \ (P\text{-м.н.})).$$

Теорема 2.40. *Кожний супермартингал $(X_n, F_n, \ n \geq 0)$ можна подати єдиним чином як різницю мартингалу M_n і монотонно неспадного процесу A_n, що передбачається і такого, що $A_0 = 0$:*

$$X_n = M_n - A_n. \tag{2.206}$$

Співвідношення (2.206) називається *розкладом Дуба–Мейєра супермартингалу X_n*.

Д о в е д е н н я. Позначимо $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$ і покладемо

$$A_0 = 0, \quad M_0 = X_0;$$

$$A_1 = -E(\Delta X_1/F_0), \quad M_1 = X_1 + A_1 = X_1 - E(\Delta X_1/F_0);$$

$$A_2 = A_1 - E(\Delta X_2/F_1),$$

$$M_2 = X_2 + A_2 = X_2 - E(\Delta X_1/F_0) - E(\Delta X_2/F_1);$$

. . . .

$$A_n = A_{n-1} - E(\Delta X_n/F_{n-1}),$$

$$M_n = X_n + A_n = X_n - \sum_{i=1}^{n} E(\Delta X_i/F_{i-1}).$$

Тоді випадкові величини A_n є F_{n-1}-вимірними,

$$A_n - A_{n-1} = -E(\Delta X_n/F_{n-1}) \geq 0,$$

тобто $A_n \geq A_{n-1}$;

$$E(M_n - M_{n-1}/F_{n-1}) = E(x_n + A_n - x_{n-1} - A_{n-1}/F_{n-1}) =$$

$$= E(\Delta x_n/F_{n-1}) + \Delta A_n = E(\Delta x_n/F_{n-1}) + (-E(\Delta x_n/F_{n-1})) = 0,$$

тобто M_n — мартингал. Існування розкладу (2.206) доведено. Єдиність: нехай ще $X_n = M_n' - A_n'$, де $(M_n', F_n, \ n \geq 0)$ — мартингал; A_n' — монотонно неспадний процес, що передбачається; $A_0 = 0$. Тоді для кожного $n \geq 1$

$$M_n - A_n = M_n' - A_n', \quad \text{або} \quad M_n - M_n' = A_n' - A_n.$$

Це означає, що процес $B_n := M_n - M_n'$ одночасно є мартингалом і процесом, що передбачається, звідки $\Delta B_n = E(\Delta B_n/F_{n-1}) = 0$. Таким чином,

$$B_n = B_{n-1} = \ldots = B_0 = A_0' - A_0 = 0,$$

отже, $M_n = M_n'$ і $A_n = A_n'$ (P-м.н.) для всіх $n \geq 1$.

Теорему доведено.

Наслідок. Якщо $(X_n, F_n, \ n \geq 1)$ — субмартингал, то для нього існує єдиний розклад вигляду

$$X_n = M_n + A_n, \tag{2.207}$$

де M_n — мартингал; A_n — неспадний процес, що передбачається і такий, що $A_0 = 0$.

Зауваження. 1. Розклад (2.207) можна трактувати так, що процес A_n компенсує субмартингал X_n до мартингалу M_n. Тому процес A_n в розкладі Дуба–Мейєра називають *компенсатором субмартингалу X_n*.

2. Нехай $(M_n, F_n, \ n \geq 0)$ — квадратично інтегровний мартингал, тобто $EM_n^2 < \infty$ для всіх $n \geq 0$. Тоді згідно з прикладом 2.33 $(M_n^2, F_n, \ n \geq 0)$ — субмартингал. Тому згідно з (2.207) існує мартингал m_n і компенсатор, який позначимо $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_n, F_n, \ n \geq 0)$, такі, що $M_n^2 = m_n + \langle M \rangle_n$, $\langle M \rangle_0 = 0$. Компенсатор $\langle M \rangle_n$ називають *квадратичною характеристикою мартингалу M*. Повторюючи доведення теореми 2.40, одержимо, що

$$\Delta \langle M \rangle_n = \langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1} = E(\Delta(M_n^2)/F_{n-1}) =$$

$$= E(M_n^2 - M_{n-1}^2/F_{n-1}) = E((M_{n-1} + \Delta M_n)^2 - M_{n-1}^2/F_{n-1}) =$$

$$= E(2\Delta M_n M_{n-1} + (\Delta M_n)^2/F_{n-1}) = 2M_{n-1}E((\Delta M_n/F_{n-1})+$$

$$+E((\Delta M_n)^2/F_{n-1}) = E((\Delta M_n)^2/F_{n-1}).$$

Отже,

$$\langle M\rangle_n = \sum_{i=1}^{n} E((\Delta M_i)^2/F_{i-1}).$$

Крім того, для всіх $l \leq k$

$$E((M_k - M_l)^2/F_l) = E(M_k^2 - M_l^2 - 2M_l\,(M_k - M_l)/F_l) =$$

$$= E(M_k^2 - M_l^2/F_l) = E(\langle M\rangle_k - \langle M\rangle_l/F_l).$$

П р и к л а д 2.35. Нехай $M_0 = 0$, $M_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, де $\{X_i,\ i \geq 1\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з нульовим середнім, $EX_i = 0$, і скінченним другим моментом, $EX_i^2 = DX_i < \infty$. Нехай також

$$F_n = \sigma(X_1, ..., X_n), \quad n \geq 1, \quad F_0 = \{\varnothing, \Omega\}.$$

Тоді $(M_n, F_n,\ n \geq 0)$ — мартингал (див. приклад 2.31), і в силу незалежності X_i від F_{i-1} його квадратична характеристика дорівнює

$$\langle M\rangle_n = \sum_{i=1}^{n} E((\Delta M_i)^2/F_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2/F_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \sum_{i=1}^{n} DX_i = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right),$$

тобто вона є невипадковою і співпадає з дисперсією.

Процеси з неперервним часом, що передбачаються

Поняття передбачуваності розглядається і для процесів з неперервним часом. Воно є порівняно складним, і в цій книзі детально зупинятися на ньому ми не будемо (див. [9, 14]). Зауважимо лише наступне: передбачуваність процесу полягає в тому, що його випадкове значення у фіксований момент часу можна визначити, розглядаючи його в попередні моменти часу. Зокрема, якщо процес X_t насправді є невипадковою функцією, тобто його значення в кожний момент часу є детермінованим, то він є процесом, що передбачається. Якщо процес X_t є неперервним або неперервним зліва, то він також є процесом, що передбачається, тому що значення функції, неперервної зліва, дорівнюють її границі зліва, тобто визначаються її значеннями в попередні моменти часу.

Нехай вже відомо, що деякий субмартингал $\{X_t, F_t,\ t \geq 0\}$ допускає розклад

$$X_t = M_t + A_t, \tag{2.208}$$

де $(M_t, F_t,\ t \geq 0)$ — мартингал, а $(A_t, F_t,\ t \geq 0)$ — монотонно неспадний процес, неперервний зліва (зокрема, неперервний) і такий, що $A_0 = 0$. Тоді розклад (2.208) єдиний. Він називається *розкладом Дуба–Мейєра субмартингала* X_t. Розглянемо один частковий випадок.

Теорема 2.41. *Нехай $(X_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ — неспадний інтегровний процес з незалежними приростами, $X_0 = 0$.*

Тоді X_t допускає розклад Дуба–Мейєра

$$X_t = M_t + A_t,$$

де M_t — мартингал; A_t — невипадкова неспадна функція (компенсатор X_t), і цей розклад єдиний.

Д о в е д е н н я. Оскільки приріст $X_t - X_s$ не залежить від $\mathcal{F}_s$, $s \geq t$, то $E(X_t - X_s/\mathcal{F}_s) = EX_t - EX_s = A_t - A_s$, де неспадна невипадкова функція $A_t = EX_t$. Таким чином, $X_t = M_t + A_t$, де $M_t = X_t - EX_t$ — мартингал. Якщо ще $X_t = M_t' + A_t'$, то $M_t - M_t'$ — невипадковий мартингал, рівний нулю в точці $t = 0$, тобто тотожній нуль.

Теорему доведено.

Сформулюємо тепер без доведення теорему про розклад Дуба–Мейєра для неперервних квадратично-інтегровних мартингалів, тобто таких, що $EM_t^2 < \infty$ для всіх $t \geq 0$, тоді, очевидно, M_t^2 — субмартингал (див. приклад 2.33).

Теорема 2.42. *Нехай $(M_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ — неперервний квадратично-інтегровний мартингал, такий, що $\sup_{t\geq 0} EM_t^2 < \infty$. Тоді M_t допускає єдиний розклад вигляду*

$$M_t^2 = m_t + \langle M\rangle_t,$$

де m_t — неперервний мартингал; $\langle M\rangle_t$ — неперервний неспадний процес; $\langle M\rangle_0 = 0$ (квадратична характеристика мартингала M_t). При цьому для всіх $0 \leq s < t$

$$E\left((M_t - M_s)^2/F_s\right) = E\left(M_t^2 - M_s^2/F_s\right) = E\left(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s/F_s\right).$$

§ 9. Квадратично-інтегровні мартингали. Стохастичне інтегрування

В курсі математичного аналізу розглядаються інтеграли Рімана $\int_a^b f(t)\,dt$ і інтеграли Рімана–Стілтьєса $\int_a^b f(t)\,dg(t)$, де функція $g(t)$ має обмежену варіацію на відрізку $[a, b]$, тобто

$$\operatorname*{var}_{[a,b]} g := \sup_{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty,$$

де точна верхня межа береться по всіх розбиттях λ відрізку $[a,b]$ таких, що $\lambda = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$. Ці інтеграли можна, зокрема, визначити як границі інтегральних сум $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\theta_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]$, $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, за умови, що діаметр розбиття $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} (t_k - t_{k-1}) \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.

Теорія стохастичного інтегрування будується для інтегралів вигляду $\int\limits_a^b f_t dm_t$, де $f_t = f_t(\omega)$ — деякий випадковий процес; m_t — мартингал. Але мартингали m_t, що застосовуються в економічних і фінансових моделях, часто мають траєкторії необмеженої варіації (див. § 10). Тому визначити $\int\limits_a^b f_t dm_t$ як границю інтегральних сум неможливо (детальніше це питання висвітлене в [3]). Ми розглянемо конструкцію стохастичного інтегралу $\int\limits_a^b f_t dm_t$ для випадку, коли m — квадратично інтегровний неперервний мартингал з характеристикою $\langle m \rangle_t$.

Стохастичний інтеграл від кусково-постійних функцій

Розглянемо випадок, коли підінтегральна функція f_t є кусково-постійним випадковим процесом. Нехай $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ — фільтрація, що задовольняє умови 1)–3) означення 2.20, m_t — квадратично інтегровний неперервний мартингал, $\sup\limits_{t\geq 0} Em_t^2 < \infty$,

$$E\left((m_t - m_s)^2/\mathcal{F}_s\right) = E\left(\langle m \rangle_t - \langle m \rangle_s/\mathcal{F}_s\right), \quad 0 \leq s < t. \tag{2.209}$$

Зауважимо, що прирости процесу m_t є ортогональними в наступному розумінні: якщо $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$, то

$$E\left((m_{t_3} - m_{t_2})(m_{t_2} - m_{t_1})/\mathcal{F}_{t_2}\right) = (m_{t_2} - m_{t_1})\, E\,(m_{t_3} - m_{t_2}/\mathcal{F}_{t_2}) = 0, \tag{2.210}$$

звідки, зокрема, випливає, що $E\,(m_{t_3} - m_{t_2})(m_{t_2} - m_{t_1}) = 0$.

Через $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t) = \mathcal{L}_0$ позначимо клас таких $\mathcal{F}_t$-вимірних процесів, що приймають постійні обмежені значення на скінченному числі напівінтервалів $(t_{k-1}, t_k]$ і рівних нулю поза цими інтервалами. Тобто $f = f_t \in \mathcal{L}_0$ тоді і тільки тоді, коли

$$f_0 = 0, \quad f_t = f_{k-1}(\omega), \quad t \in (t_{k-1}, t_k],$$

$$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n, \quad f_t = 0, \quad t \notin (t_0, t_n)],$$

де випадкові величини f_k є $\mathcal{F}_{t_k}$-вимірними. Випадковий процес f_t можна записати за допомогою індикаторів інтервалів, а саме, якщо позначити $I_{(t_{k-1},t_k]}(t)$ індикатор інтервалу $(t_{k-1}, t_k]$, то

$$f_t = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1} I_{(t_{k-1},t_k]}(t).$$

Крім того, ми припускаємо, що існує постійне число $c > 0$ таке, що $|f_k| \leq c$ (P-м.н.).

Для процесів f_t визначимо інтеграл

$$I(f) = \int\limits_0^\infty f_s\, dm_s = \int\limits_0^\infty f dm$$

таким чином: покладемо

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}(m_{t_k} - m_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}\, \Delta m_k.$$

Властивості $I(f)$:

1. $I(f)$ є лінійним функціоналом відносно f, тобто

$$I(\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2) = \alpha_1 I(f^1) + \alpha_2 I(f^2),$$

де f^1 і f^2 належать до $\mathcal{L}_0$, α_1 і α_2 — постійні.

2.

$$E\left(I(f)/\mathcal{F}_0\right) = \sum_{k=1}^{n} E\left(f_{k-1} E\,(m_{t_k} - m_{t_{k-1}}/\mathcal{F}_{t_{k-1}})/\mathcal{F}_0\right) = 0,$$

зокрема, $EI(f) = 0$.

3. Нехай процеси f^1 і f^2 належать до $\mathcal{L}_0$. Оскільки кожен з цих процесів буде кусково-постійним відносно будь-якого нового розбиття, що утворюється додаванням до початкового розбиття нових точок, то можна вважати, що f^1 і f^2 є кусково-постійними відносно одного і того ж розбиття $\lambda = \{0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$. Тоді, враховуючи (2.209) і (2.210), одержимо

$$E\left(I(f^1)\, I(f^2)/\mathcal{F}_0\right) = \sum_{i,k=1}^{n} E\,(f_{k-1}^1 f_{i-1}^2 \Delta m_k \Delta m_i/\mathcal{F}_0) =$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}^1 f_{k-1}^2 \Delta\langle m\rangle_k/\mathcal{F}_0\right) + \sum_{i<k} E((f_{k-1}^1 f_{i-1}^2 + f_{i-1}^1 f_{k-1}^2) \times$$

$$\times \Delta m_i E\,(\Delta m_k/\mathcal{F}_{t_{k-1}})/\mathcal{F}_0) = E\left(\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}^1 f_{k-1}^2 \Delta\langle m\rangle_k/\mathcal{F}_0\right),$$

$$\Delta\langle m\rangle_k = \langle m\rangle_{t_k} - \langle m\rangle_{t_{k-1}}. \tag{2.211}$$

Таким чином,

$$E\Big(\int_0^\infty f^1 dm \int_0^\infty f^2 dm/\mathcal{F}_0\Big) = E\Big(\int_0^\infty f_t^1 f_t^2 d\langle m\rangle_t/\mathcal{F}_0\Big). \tag{2.212}$$

З (2.212) випливає, що

$$E\Big(\int_0^\infty f^1 dm - \int_0^\infty f^2 dm\Big)^2 = E\Big(\int_0^\infty f^1 dm\Big)^2 - 2E\int_0^\infty f^1 dm \int_0^\infty f^2 dm +$$

$$+E\Big(\int_0^\infty f^2 dm\Big)^2 = E\int_0^\infty (f_t^1)^2 d\langle m\rangle_t - 2E\int_0^\infty f_t^1 f_t^2 d\langle m\rangle_t +$$

$$+E\int_0^\infty (f_t^2)^2 d\langle m\rangle_t = E\int_0^\infty (f_t^1 - f_t^2)^2 d\langle m\rangle_t,$$

де інтеграли відносно квадратичної характеристики $\langle m\rangle_t$, що є неспадним процесом, треба розуміти як звичайні інтеграли Рімана–Стілтьєса, або, в більш загальних випадках, як інтеграли Лебега–Стілтьєса.

Розглянемо також інтеграли $\int_0^t f dm$ по відрізку $[0,t]$. Для цього утворимо випадковий процес $I_{[0,t]}(s)\, f_s$, який, очевидно, є кусково-постійним і належить до класу $\mathcal{L}_0$. Тепер

$$I_t(f) = \int_0^t f dm := \int_0^\infty I_{[0,t]}(s)\, f_s dm_s.$$

Очевидно, якщо $t \in (t_{k-1}, t_k]$, то

$$I_t(f) = \sum_{j=1}^k f_{j-1}\Delta m_j + f_k(m_t - m_{t_k}), \tag{2.213}$$

якщо ж $t > t_k$, то

$$I_t(f) = I(f). \tag{2.214}$$

Оскільки інтеграл $I_t(f)$ залежить від t, то його можна трактувати як випадковий процес.

Властивості процесу $I_t(f)$:

4. Процес I_t є $\mathcal{F}_t$-вимірним і неперервним.

5. Процес I_t є мартингалом. Справді, нехай $0 \le t < u$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точки t і u є точками розбиття: $t = t_k$ і $u = t_l$ при $k < l$. Тоді

$$I_t(f) = \sum_{j=1}^k f_{j-1}\Delta m_j, \quad I_u(f) = \sum_{j=1}^l f_{j-1}\Delta m_j,$$

$$I_u(f) - I_t(f) = \sum_{j=k+1}^l f_{j-1}\Delta m_j,$$

$$E\big(I_u(f) - I_t(f)/\mathcal{F}_t\big) = E\Big(\sum_{j=k+1}^l f_{j-1}\Delta m_j/\mathcal{F}_t\Big) =$$

$$= \sum_{j=k+1}^l E\left(f_{j-1}\, E\left(\Delta m_j/\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)/\mathcal{F}_t\right) = 0. \tag{2.215}$$

6. Процес I_t є квадратично-інтегровним мартингалом. Це випливає з формул (2.213)–(2.214). Крім того, з (2.215) можна вивести аналогічно тому, як ми одержали (2.211)–(2.212), що

$$E\big(I_u - I_t\big)^2/\mathcal{F}_t\big) = E\Big(\sum_{j=k+1}^l f_{j-1}^2 d\langle m\rangle_j/\mathcal{F}_t\Big) = E\Big(\int_t^u f_s^2 d\langle m\rangle_s/\mathcal{F}_t\Big), \tag{2.216}$$

з (2.216)

$$E\left(I_u^2 - I_t^2\right)/\mathcal{F}_t) = E\Big(\int_t^u f_s^2 d\langle m\rangle_s/F_t\Big), \tag{2.217}$$

причому процес $\int_t^u f_s^2 d\langle m\rangle_s$ є неперервним і неспадним. Запишемо розклад Дуба–Мейєра для квадратично-інтегровного мартингалу $I_t : I_t^2 = M_t + \langle I\rangle_t$, де M_t — мартингал; $\langle I\rangle_t$ — неперервний неспадний процес, характеристика мартингалу I. З (2.217) випливає, що $\langle I\rangle_t = \int_t^u f_s^2 d\langle m\rangle_s$.

Стохастичний інтеграл на просторі $\mathcal{L}_2(\langle m\rangle)$

Узагальнимо поняття стохастичного інтегралу на клас випадкових процесів, ширший, ніж $\mathcal{L}_0$ так, щоб властивості 4–6 збереглися.

Означення 2.31. Випадковий процес f належить до простору $\mathcal{L}_2(\langle m\rangle)$, якщо існує послідовність процесів $\{f^n = f_t^n(\omega),\ n \ge 1\}$ з простору $\mathcal{L}_0$ така, що

$$E\int_0^\infty (f_t - f_t^n)^2 d\langle m\rangle_t \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{2.218}$$

Неважко показати, що при виконанні умови (2.218) існує такий випадковий процес $I_t(f)$, що

$$E\sup_{t\geq 0}\Big(I_t(f)-\int_0^t f_s^n\,dm_s\Big)^2\to 0,\quad n\to\infty.$$

Тому процес $I_t(f)$ логічно прийняти за *стохастичний інтеграл*: $I_t(f) = \int_0^t f_s dm_s$.

Покажемо, що клас $\mathcal{L}_2(\langle m\rangle)$ містить, при деякому обмеженні, неперервні процеси.

Теорема 2.43. Якщо процес $\{f_s, \mathcal{F}_s,\ s\geq 0\}$ є неперервним і

$$E\int_0^\infty f_s^2 d\langle m\rangle_s<\infty, \tag{2.219}$$

то $f\in\mathcal{L}_2(\langle m\rangle)$.

Зауваження. Насправді, при виконанні умови (2.219) клас $\mathcal{L}_2(\langle m\rangle)$ містить процеси, що передбачаються. Детальніше ці питання викладені в [3].

Доведення. Нехай задано $\varepsilon>0$. Спочатку виберемо натуральне число N так, щоб $\int_N^\infty f_s^2 d\langle m\rangle_s<\varepsilon/2$. Утворимо тепер таку послідовність кусково-постійних процесів:

$$f_t^n=\begin{cases}\min\limits_{u\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]} f_u, & \text{якщо}\quad t\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right],\quad k=\overline{0,2^nN-1},\\ 0, & t\geq N.\end{cases}$$

Тоді

$$\int_0^\infty (f_s-f_s^n)^2 d\langle m\rangle_s=\int_N^\infty f_s^2 d\langle m\rangle_s+\sum_{k=0}^{N\cdot 2^n-1}\times$$

$$\times\int_{k/2n}^{(k+1)/2^n}(f_s-\min_{u\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]} f_u)^2 d\langle m\rangle_s<\frac{\varepsilon}{2}+\int_N^\infty \varphi_s^n d\langle m\rangle_s,$$

де

$$\varphi_s^n=(f_s-\min_{u\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]} f_u)^2,$$

якщо $s\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]$, $k=\overline{0,2^nN-1}$. Очевидно, при $n\to\infty$, в силу неперервності процесу f_s, $\varphi_s^n\to 0$ для кожного $s\in[0,N]$. Крім того,

$\varphi_s^n\leq f_s^2$ і $E\int_0^N f_s^2 d\langle m\rangle_s<\infty$. Отже, можна застосувати теорему про мажоровану збіжність під знаком інтеграла Лебега–Стілтьєса, згідно з якою $E\int_0^N f_s^2 d\langle m\rangle_s\to 0$ при $n\to\infty$. Отже, існує $n_0\in N$ таке, що для всіх $n\geq n_0$

$$\int_0^N \varphi_s^n d\langle m\rangle_s<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для таких n

$$E\int_0^\infty (f_s-f_s^n)^2 d\langle m\rangle_s<\varepsilon.$$

В силу довільного вибору $\varepsilon>0$ маємо

$$E\int_0^\infty (f_s-f_s^n)^2 d\langle m\rangle_s\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Теорему доведено.

Теорема 2.44. *Якщо процес $f\in\mathcal{L}_2(\langle m\rangle)$, то стохастичний інтеграл $I_t(f)=\int_0^t f\,dm$ має такі властивості:*

1. $I_\infty\big(I_{(0,a]}(t)\big)=m(a)-m(0)$;
2. $I_\infty\big(I_{(0,a]}f\big)=I_a(f),\quad a>0$;
3. $I_t(c_1f^1+c_2f^2)=c_1I_t(f^1)+c_2I_t(f^2)$;
4. *I_t — квадратично-інтегровний мартингал з квадратичною характеристикою* $\langle I\rangle_t=\int_0^t f_s^2 d\langle m\rangle_s$.

Доведення безпосередньо випливає з властивостей 4–6 і визначення (2.219).

Зауваження. Умова (2.219) є занадто сильною. Припустимо, що виконується більш слабка умова: для деякого $T>0$

$$E\int_0^T f_s^2 d\langle m\rangle_s<\infty.$$

Тоді можна розглядати стохастичний інтеграл $\int_0^t f_s dm_s$ для $t\in[0,T]$.

Формула Іто для неперервних семімартингалів

Нехай випадковий процес є сумою мартингалу і процесу обмеженої варіації (такі процеси називаються *семімартингалами*). Точніше, нехай процес $(X_t, \mathcal{F},\ t \geq 0)$ подається у вигляді $X_t = m_t + a_t$, де $(m_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ — неперервний квадратично інтегрований мартингал з квадратичною характеристикою $< m >_t$, а $(a_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ — неперервний процес обмеженої варіації. Виведемо формулу заміни змінної, тобто формулу, яка подає значення процесу $F(X_t)$, де $F(x)$ — дійсна функція, у вигляді, подібному до розкладу X_t. Формули такого типу називають *формулами Іто*, за ім'ям автора першої з таких формул К. Іто (див. [6, 10]).

Теорема 2.45. *Нехай функція $F = F(x) : R \to R$ і належить до класу $C^2(R)$, тобто має дві неперервні похідні $F'(x)$ і $F''(x)$. Тоді для будь-якого $t > 0$*

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t F'(x_s)\,da_s + \int_0^t F'(x_s)\,dm_s +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t F''(x_s)\,d\langle m\rangle_s \quad (P\text{-м.н.}). \tag{2.220}$$

Зауваження. В формулі (2.220) інтеграли

$$\int_0^t F'(x_s)\,da_s \quad \text{і} \quad \frac{1}{2}\int_0^t F''(x_s)\,d\langle m\rangle_s$$

— це інтеграли Лебега–Стілтьєса, $\int_0^t F'(x_s)\,dm_s$ — стохастичний інтеграл по квадратично-інтегрованому мартингалу.

Для доведення теореми 2.45 спочатку сформулюємо і доведемо допоміжну лему.

Лема 2.13. *Нехай $(m_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ — неперервний квадратично-інтегровний мартингал, $(a_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ — процес обмеженої варіації, $x_t = m_t + a_t$, $F(x)$ — неперервна обмежена функція. Тоді:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{n} F(X_{t_{k-1}})\Delta m_k \to \int\limits_0^t F(x_s)\,dm_s$ *при* $n \to \infty$ *в* $\mathcal{L}_2$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} F(X_{t_{k-1}})\Delta a_k \xrightarrow{P} \int\limits_0^t F(x_s)\,da_s$ *при* $n \to \infty$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} F(X_{t_{k-1}})(\Delta m_k)^2 \xrightarrow{P} \int\limits_0^t F(x_s)\,d\langle m\rangle_s$ *при* $n \to \infty$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} F(X_{t_{k-1}})\Delta m_k \Delta a_k \xrightarrow{P} 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} F(X_{t_{k-1}})(\Delta a_k)^2 \xrightarrow{P} 0;$

$$\sum_{k=1}^{n} F(X_{t_k})(\Delta X_{t_k})^3 \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

(Тут $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, $\max\limits_{k=\overline{0,n-1}}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ при $n \to \infty$, $\Delta m_k = m_{t_k} - m_{t_{k-1}}$.)

Д о в е д е н н я. Доведення проведемо лише для випадку, коли $m_t = W_t$ — вінерів процес.

1) Мають місце очевидні рівності

$$\sum_{k=1}^{n} F(X_{t_{k-1}})\Delta W_k = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(X_{t_{k-1}})\,dW_s,$$

$$\int_0^t F(x_s)\,dW_s = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(X_s)\,dW_s,$$

тому

$$E\Big(\int_0^t F(x_s)\,dW_s - \sum_{k=1}^{n} F(X_{t_{k-1}})\Delta W_k\Big)^2 =$$

$$= E\Big(\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (F(X_s) - F(X_{t_{k-1}}))dW_s\Big)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} (F(X_k) - F(X_{t_{k-1}}))\,dW_s\Big)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(F(X_s) - F(X_{t_{k-1}})\big)^2 ds = E\int_0^t G_s^n\,ds \leq tE\sup_{s\leq t} G_s^n,$$

де процес $G_s^n = \big(F(X_s) - F(X_{t_{k-1}})\big)^2$, якщо $s \in (t_{k-1}, t_k]$, $G_0 = 0$. В силу неперервності процесу x_t $\sup\limits_{s\leq t} G_s^n \xrightarrow{P} 0$ з ймовірністю 1 для всіх $s \in [0,t]$ при $n \to \infty$. Крім того, в силу обмеженості функції F $\sup\limits_{s\leq t} G_s^n \leq 4C^2$, де $|F(x)| \leq C$. Отже, з теореми Лебега–Стілтьєса про мажоровану збіжність $E\int\limits_0^t G_s^n ds \to 0$ при $n \to \infty$.

2) Це твердження випливає з властивостей інтегралу Лебега–Стілтьєса.

3) Припустимо додатково, що $F(x) \equiv 1$. Оцінимо величину

$$E\Big(t-\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_k)^2\Big)^2 = E\Big(\sum_{k=1}^{n}(\Delta t_k-(\Delta W_k)^2)\Big)^2 =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E\big(\Delta t_k-(\Delta W_k)^2\big)^2+2\sum_{0\le j<n\le n}E\big(\Delta t_k-(\Delta W_k)^2\big)^2\big(\Delta t_j-(\Delta W_j)^2\big)^2.$$

Але, при $j<k$

$$E\big(\Delta t_k-(\Delta W_k)^2\big)\big(\Delta t_j-(\Delta W_j)^2\big) =$$

$$=E\big(\Delta t_j-(\Delta W_j)^2\big)\,E\big(\Delta t_k-(\Delta W_k)^2/\mathcal{F}_{t_{k-1}}\big)=0.$$

Отже,

$$E\Big(t-\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_k)^2\Big)^2=\sum_{k=1}^{n}E\Big(\Delta t_k-(\Delta W_k)^2\Big)^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\Delta t_k)^2-2\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k E(\Delta W_k)^2+\sum_{k=1}^{n}E(\Delta W_k)^4=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}(\Delta t_k)^2+\sum_{k=1}^{n}E(\Delta W_k)^4.$$

Але, $\sum\limits_{k=1}^{n}(\Delta t_k)^2 \le \max\limits_{i=1,k}\Delta t_k t \to 0$. Оскільки, $\Delta W_k = W_{t_k}-W_{t_{k-1}}$ має нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією Δt_k, то $E(\Delta W_k)^4 = 3(\Delta t_k)^2$, тобто $\sum\limits_{k=1}^{n}E(\Delta W_k)^4\to 0$, $n\to\infty$. Звідси $\sum\limits_{k=1}^{n}(\Delta W_k)^2\to t$ при $n\to\infty$ в просторі $\mathcal{L}_2$, а значить і за ймовірністю.

4) Мають місце оцінки

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}F(X_{t_{k-1}})\Delta m_k\Delta a_k\Big|\le\max_{k=\overline{1,n}}|\Delta m_k|\,C\operatorname*{var}_{[0,t]}a\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty;$$

аналогічно,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}F(X_{t_{k-1}})(\Delta a_k)^2\Big|\le\max_{k=\overline{1,n}}|\Delta a_k|\,C\operatorname*{var}_{[0,t]}a\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty,$$

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}F(X_{t_{k-1}})(\Delta X_{t_k})^3\Big|\le\max_{k=\overline{1,n}}|\Delta X_{t_k}|\,C\sum_{k=1}^{n}(\Delta X_{t_k})^2\xrightarrow{P}0.$$

Лему доведено:

Доведення теореми 2.45. Спочатку припустимо, що функція $F(x)$ обмежена, $|F(x)|\le C$, і має три неперервні похідні. Згадаємо формулу Тейлора з залишковим членом в формі Лагранжа:

$$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}F'''(\theta)(x-x_0)^3,\ (*)$$

де точка θ лежить між x_0 і x.

Розіб'ємо відрізок $[0,t]$ точками $0=t_0<t_1<\dots<t_n=t$. Цим точкам відповідають значення процеса $X_0=X_{t_0},X_{t_1},\dots,X_{t_n}=X_t$. Розглянемо кожну пару сусідніх значень $[X_{t_k},X_{t_{k-1}}]$, $k=\overline{1,n}$ і припустимо, не обмежуючи загальності, що $X_{t_{k-1}}<X_{t_k}$. Застосуємо формулу $(*)$ до кожного відрізка $[X_{t_{k-1}},X_{t_k}]$:

$$F(X_{t_k})=F(X_{t_{k-1}}+F'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})+\frac{1}{2}F''(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2+$$

$$+\frac{1}{6}F'''(\theta_k)(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^3,\qquad \theta_k\in[X_{t_{k-1}},X_{t_k}].$$

Тепер,

$$F(X_t)=F(X_{t_n}=F(x_0)+\sum_{k=1}^{n}(F(X_{t_k})-F(X_{t_{k-1}})=F(X_0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}F'(X_{t_{k-1}}\Delta m_k+\sum k=1nF'(X_{t_{k-1}}\Delta a_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}F''(X_{t_{k-1}}(\Delta m_k)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}F''(X_{t_{k-1}}(\Delta a_k)^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}F'''(X_{t_{k-1}})(\Delta X_{t_k})^3.$$

Доведення випливає тепер з леми 2.13. В загальному випадку розглядається послідовність апроксімацій (наближень) для функції F.

Наслідки. 1. Нехай x_t^1 і x_t^2, $t\ge 0$ — два семімартингала. Тоді їх добуток можна подати у вигляді

$$x_t^1x_t^2=x_0^1x_0^2+\int_0^t x_s^1dx_s^2+\int_0^t x_s^2dx_s^1+\langle m^1,m^2\rangle_t,\qquad(2.221)$$

де

$$x_t^i=a_t^i+m_t^i,\qquad \int_0^t y_sdx_s^i=\int_0^t y_sda_s^i+\int_0^t y_sdm_s^i,$$

$$\langle m^1,m^2\rangle_t,=\frac{1}{2}\left(\langle m^1+m^2\rangle_t-\langle m^1-m^2\rangle_t\right)$$

— це так звана спільна квадратична характеристика мартингалів m_t^1 і m_t^2.

§ 10. Вінерів процес як мартингал

Розглянемо вінерів процес з точки зору теорії мартингалів. Нагадаємо його означення.

Означення 2.32. Випадковий процес $(W_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$, заданий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, називається *вінеровим* (або *процесом броунівського руху*), якщо він задовольняє наступні умови:

1. $W_0 = 0$ $(P$-м.н.);
2. W_t — процес з незалежними приростами;
3. Прирости $W_t - W_s$ мають нормальний розподіл з нульовим середнім, $E(W_t - W_s) = 0$ і дисперсією $D(W_t - W_s) = E(W_t - W_s)^2 = t - s$;
4. Траєкторії процеса $W_t = W_t(\omega)$ неперервні $(P$-м.н.);

Зауваження. 1. Іноді процесом броунівського руху називають випадковий процес β_t, який задовольняє умови 1–4 з тою різницею, що $E(\beta_t - \beta_s)^2 = \sigma^2(t-s)$, де $\sigma > 0$ — деяка постійна (фактично $\beta_t = \sigma W_t$).

2. Оскільки нормальний розподіл відповідає, в силу центральної граничної теореми, нормованій сумі великого числа незалежних однаково розподілених випадкових величин, то вінерів процес можна трактувати як такий, що відбувається під дією великого числа незалежних факторів.

В теорії ймовірностей встановлюється [6, 11], що траєкторії вінерового процесу на кожному відрізку $[0, t]$ мають необмежену варіацію і, крім того, не мають похідної в жодній точці.

Історія дослідження процесу броунівського руху почалась в 1827 р., коли біолог Роберт Броун за допомогою мікроскопа досліджував рух дуже маленьких частинок, що містяться в пилку рослин. Він виявив надзвичайно нерегулярний характер руху цих частинок.

Математичну конструкцію броунівського руху дав Альберт Ейнштейн в 1905 р. Строгу математичну теорію вінерового процесу побудував Норберт Вінер в 1923 р.

Як було сказано, ми розглянемо вінерів процес з точки зору теорії мартингалів. Будемо вважати, що фільтрацію $\mathcal{F}_t$ породжено процесом W_t, тобто $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s,\ s \leq t\}$ (див. § 5).

Теорема 2.46. *Вінерів процес* $(W_t, \mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0)$ *є квадратично інтегрованим мартингалом з квадратичною характеристикою* $\langle W \rangle_t = t$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $W_0 = 0$ і, згідно з властивістю 3, $EW_t = E(W_t - W_0) = 0$, то вінерів процес як будь-який процес з незалежними приростами і постійним середнім (див. приклад 2.35) є мартингалом. Квадратична інтегрованість випливає з того, що $EW_t^2 = E(W_t - W_0)^2 = t < \infty$ для кожного $t > 0$. Таким чином, в силу теореми 2.42 існує квадратична характеристика $\langle W \rangle_t$. Обчислимо її: як завжди, $E(\langle W \rangle_t - \langle W \rangle_s / \mathcal{F}_s^W) = E\left((W_t - W_s)^2 / \mathcal{F}_s^W\right)$. Але зараз $(W_t - W_s)^2$ не залежить від $\mathcal{F}_s^W$, звідки $E\left((W_t - W_s)^2 / \mathcal{F}_s^W\right) = E(W_t - W_s)^2 = t - s$. Отже, $\langle W \rangle_t = t$.

Зауваження. Має місце і обернений результат (теорема Леві): будь-який неперервний квадратично-інтегровний мартингал $(W_t, \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ з $W_0 = 0$ і квадратичною характеристикою $\langle W \rangle_t = t$ є вінеровим процесом. Доведення цієї теореми наведено, наприклад, в [3].

Стохастичний інтеграл по вінеровому процесу

Оскільки вінерів процес W_t є квадратично-інтегрованим мартингалом, то згідно з § 9, за ним можна будувати стохастичний інтеграл $I_t(f) = \int\limits_0^t f_s dW_s$. Згідно з теоремою 2.44, цей інтеграл буде квадратично-інтегровним мартингалом з квадратичною характеристикою $\langle I \rangle_t = \int\limits_0^t f_s^2 ds$. Таким чином, інтеграл $\int\limits_0^t f_s dW_s$ визначено для тих випадкових $\mathcal{F}_t$-адаптованих функцій f, для яких $E\int\limits_0^t f_s^2 ds < \infty$.

Геометричний вінерів процес

З'ясуємо тепер ймовірнісну поведінку приростів $|W(t + \Delta t) - W(t)|$.

Приріст $W(t + \Delta t) - W(t)$ має нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією Δt. Тому $E|W(t + \Delta t) - W(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t}$. Це означає, що прирости $W(t + \Delta t) - W(t)$ в деякому розумінні мають порядок $\sqrt{\Delta t}$. Ще в 1900 р. Л. Башельє в своїй докторській дисертації [16] спробував охарактеризувати залежність вартості акцій від часу як випадковий процес $(S_t,\ t \geq 0)$, прирости якого $S(t + \Delta t) - S(t)$ мають в деякому розумінні порядок $\sqrt{\Delta t}$. Цей факт пояснюється тим, що коливання вартості акцій є наслідком дії великого числа незалежних економічних факторів, сумарний ефект яких, в силу центральної граничної теореми, призводить до нормального розподілу приросту вартості, що, в свою чергу призводить до "ефекту $\sqrt{\Delta t}$". Башельє розрахував вартості деяких опціонів, а тоді порівняв їх з реальними цінами на ринку.

Ідеї Башельє були розвинуті П. Самуельсоном в 1965 р. [17, 18]. Самуельсон відзначив, що опис процесу S_t вартості акцій, що його зробив Башельє у вигляді $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$, де S_0 — початкова вартість акції; μt — знос; μ — коефіцієнт зносу (або росту); W_t — вінерів процес; $\sigma > 0$ — коефіцієнт змінності (волатильності), не є цілком задовільним, тому що вінерів процес W_t може приймати які завгодно великі за абсолютною величиною від'ємні значення, тобто в деякі моменти часу S_t може бути від'ємною, що не узгоджується з економічним змістом S_t як вартості акцій. Тому Самуельсон розглянув з метою опису еволюції вартості акцій так званий геометричний, або ще в його термінології, економічний броунівський рух, тобто процес вигляду

$$S_t = S_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t} - \frac{\sigma^2 t}{2},$$

де S_0 — додатнє початкове значення. Запишемо процес S_t за допомогою формули Іто (теорема 2.45). При цьому

$$F(x) = e^x, \qquad x_t = \ln S_0 + \sigma W_t + \mu t - \frac{\sigma^2 t}{2}.$$

Тут σW_t — неперервний мартингал з квадратичною характеристикою $\sigma^2 t$; $\mu t - \frac{\sigma^2 t}{2}$ — різниця двох неперервних монотонно неспадних процесів, тобто неперервна функція обмеженої варіації. Тому

$$S_t = S_0 + \sigma \int_0^t S_u dW_u + \mu \int_0^t S_u du. \tag{2.222}$$

Таким чином, S_t — додатній процес і дорівнює сумі мартингала $\sigma \int_0^t S_u dW_u$ і зносу $\mu \int_0^t S_u du$. Якщо $\mu = 0$, то S_t — мартингал.

§ 11. Точкові процеси та їх компенсатори

Поняття точкового процесу

В багатьох практичних задачах виникає ситуація, коли певні події відбуваються випадковим чином, одна за одною, і ми цікавимося числом подій, що відбулися протягом певного часу. Позначимо через N_t число подій, що відбулися на проміжку часу $[0,t]$. Якщо в момент $t = 0$ ніяких подій не відбулося, одночасно може наступити лише одна подія, і на кожному скінченному проміжку $[0,t]$ може відбутися лише скінченне число подій, то число N_t, яке можна трактувати як випадковий процес, задовольняє умові: $N_0 = 0$, стрибок ΔN_t в момент часу t дорівнює $\Delta N_t = N_t - N_{t-0} = 0$, або 1 (0, якщо в момент t подія не відбулася, 1 — якщо відбулася, $N_{t-0} = \lim_{s\to t, s<t} N_s$, границя зліва), $N_t < \infty$ з ймовірністю 1 і N_t є постійним між двома подіями. Позначимо τ_k, $k \geq 1$ випадковий момент часу, в який відбулась подія з номером k. Оскільки поява або непоява події залежить від випадку, то τ_k справді є випадковими величинами.

Дамо точне визначення точкового випадкового процесу. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, t \geq 0, P)$ — ймовірнісний простір з фільтрацією, X — простір неперервних справа кусково-постійних функцій x_t таких, що $x_0 = 0$, $x_t < \infty$ для всіх $t > 0, \Delta x_t = 0$ або $1, t > 0$ (очевидно, $\Delta x_0 = 0$).

Означення 2.33. Випадковий процес $N = (N_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, t \geq 0, P)$, траєкторії N_t якого належать до простору X, називається *точковим процесом.*

Приклад 2.36. Процес страхових виплат. Нехай страхова компанія сплачує гроші клієнтам в порядку надходження запитів. Якщо вважати, що запити надходять один за одним, то чило страхових виплат на проміжку часу $[0,t]$ є точковим процесом.

Приклад 2.37. Нехай банк видає позики клієнтам за їх запитами. Як і в попередньому прикладі, за умов неодночасного обслуговування клієнтів, кількість виданих позик за проміжок часу $[0,t]$ — це точковий процес.

Приклад 2.38. Будь-який процес обслуговування клієнтів — перукарем в перукарні, касиром в магазині, прохід пасажирів в метро через турнікет тощо — породжують точкові процеси, рівні числу одиниць обслуговування на проміжку часу $[0,t]$, $t \geq 0$.

Зауваження. Досить часто в теорії випадкових процесів розглядаються узагальнені точкові процеси, тобто такі процеси, які відповідають всім умовам означення: крім одної, а саме, ΔN_t може дорівнювати будь-якому натуральному числу або нулю. Такий процес відповідає спостереженню за подіями, які можуть відбуватися і одночасно. Наприклад, у великому банку або страховій компанії одночасно можуть обслуговуватись кілька клієнтів, в магазині може бути декілька кас, в метро — декілька турнікетів тощо.

Нехай N_t — точковий процес. Позначимо $\tau_k = \inf\{t : N_t = k\}$ — момент k-го стрибка процесу N_t. Можна покласти $\tau_0 = 0$ і $\tau_k = \infty$, якщо $N_t < k$ для всіх $t > 0$. Далі припускаємо, що виконується умова

$$EN_t = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_t = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N_t \geq k) < \infty \text{ для всіх } t > 0, \tag{2.223}$$

тоді, оскільки процес N_t не спадає і інтегрований, то він є субмартингалом. До нього можна застосувати формулу (2.107) , згідно якої N_t допускає розклад

$$N_t = m_t + A_t, \tag{2.224}$$

де m_t — мартингал, A_t — неспадний процес, що передбачається.

Означення 2.34. Процес A_t в розкладі (2.224) називається ***компенсатором точкового процесу*** N_t.

Елементарними обчисленнями підрахуємо перші два моменти N_t:

$$EN_t = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{-\alpha t} \alpha t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\alpha t} \alpha t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = \alpha t;$$

$$EN_t^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = (\alpha t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} + \alpha t = (\alpha t)^2 + \alpha t.$$

Тому $DN_t = EN_t^2 - (EN_t)^2 = \alpha t$.

Означення 2.35. Параметр α називається *інтенсивністю* пуассонового процесу.

Теорема 2.47. *Компенсатор пуассонового процесу N_t з інтенсивністю α дорівнює $A_t = \alpha t$; процеси $N_t - \alpha t$ і $(N_t)^2 - \alpha t$ — мартингали.*

Доведення. Для процеса з незалежними приростами компенсатор A_t дорівнює: $A_t = EN_t = \alpha t$, звідки $m_t = N_t - \alpha t$ — мартингал. Підрахуємо $\langle m\rangle_t$:

$$E(\langle m\rangle_t - \langle m\rangle_s/\mathcal{F}_s) = E\left((N_t - \alpha t)^2 - (N_s - \alpha s)^2/\mathcal{F}_s\right) =$$

$$= E\left((N_t - N_s - \alpha(t-s))^2/\mathcal{F}_s\right) + 2E\left[(N_s - \alpha_s)E(N_t -\right.$$

$$\left.-N_s - \alpha(t-s)/\mathcal{F}_s)\right] = E(N_t - N_s - \alpha(t-s))^2 =$$

$$= E(N_t - N_s)^2 - 2\alpha E(N_t - N_s)(t-s) + \alpha^2(t-s)^2 = \alpha^2(t-s)^2 +$$

$$+\alpha(t-s) - \alpha^2(t-s)^2 = \alpha(t-s).$$

Звідси $B_t = \alpha t$, тобто $(N_t - \alpha t)^2 - \alpha t$ — мартингал.

Теорему доведено.

Зауваження. 1. Повертаємось до прикладу 2.36. Нехай розміри виплат, що їх здійснює страхова компанія, утворюють послідовність $(Y_k, k \geq 1)$ незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$. Припустимо, що точковий процес N_t, рівний числу виплат за проміжок часу $[0,t]$, є пуассонового з інтенсивністю $\alpha > 0$. Вважаємо, крім того, що процес N і величини Y_k незалежні один від одного. Припущення про пуассоновість процеса N еквівалентна тому, що проміжки між моментами виплат, які позначимо $(X_k, k \geq 1)$, незалежні і мають показниковий розподіл, $P(X_k > t) = e^{-\alpha t}$. Позначимо через U_t суму виплат, що зроблено компанією до часу t включно. Тоді ця сума дорівнює

$$U_t = \sum_{k=}^{N_t} Y_k \quad \Big(\sum_{k=1}^{0} Y_k = 0\Big).$$

Процес U_t називають *складним пуассоновим процесом.* В силу незалежності N_t і Y_k

$$F_t(x) = P(U_t \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(N_t = n,\ \sum_{k=1}^{n} Y_k \leq x\Big) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq x\Big) P(N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^n}{n!} F^{n*}(x),$$

де $F^{n*}(x)$ — функція розподілу суми $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ (n-кратна згортка) функції $F(x) = P(Y_1 \leq x)$ (див. § 4.)

2. Припущення про незмінну інтенсивність α пуассонового процесу у випадку, коли він описує виплати страхової компанії, еквівалентне незмінності портфеля цієї компанії, і не передбачає зростання бізнесу.

Але страхова справа певної фірми може як розширюватись, так і згортатись, тобто можливі флуктуації (зміни) розмірів справи. Побудуємо більш загальний пуассонів процес. Будемо вважати, що для кожного моменту часу t число виплат N_t до часу t включно є пуассоновим з параметром Λt, де Λ — додатня випадкова величина. Ця величина Λ називається ***структурною змінною***, а її функція розподілу $F_\Lambda(x) = P(\Lambda \leq \leq x)$ — ***структурним розподілом.*** Процес N_t називається ***змішаним пуассоновим процесом.*** Його функція розподілу дорівнює

$$P(N_t = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dF_\Lambda(\lambda).$$

Якщо $F_\Lambda(x)$ має щільність $f_\Lambda(x)$, то

$$P(N_t = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} f_\Lambda(\Lambda)d\lambda.$$

3. Процес Пуассона з фіксованою інтенсивністю α часто називають ***однорідним пуассоновим процесом.*** Побудуємо ***неоднорідний пуассонів процес*** з невипадковою, але змінною інтенсивністю. Нехай $\Lambda(t)$ — неперервна неспадна невипадкова і невід'ємна функція. Нехай випадковий процес N_t має розподіл Пуассона з параметром $\Lambda(t)$. Якщо параметр $\Lambda(t)$ можна подати у вигляді інтегралу $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, то функцію $\lambda(s)$ називають інтенсивністю неоднорідного процесу Пуассона. Неважко, аналогічно доведенню теореми 2.47, перевірити, що компенсатор процесу N_t дорівнює $\Lambda(t)$. Для точкових процесів має місце такий фундаментальний результат (доведення міститься в [7]).

Теорема 2.48. *Нехай $N = (N_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ — точковий процес з неперервним компенсатором A_t. Позначимо*

$$\tau(t) = \inf\{u : A_u \geq t\}.$$

Тоді точковий процес $\tilde{N}_t = N_{\tau(t)}$ є пуассоновим однорідним процесом з інтенсивністю $\alpha = 1$.

В цій теоремі $\tau(t)$ — випадковий момент часу. В частковому випадку, коли N_t — неоднорідний пуассонів процес, $\tau(t)$ — невипадкова неспадна функція і, згідно цієї тереми, $\tilde{N}_t = N_\tau(t)$ — однорідний пуассонів процес з інтенсивністю $\alpha = 1$.

§ 12. Марковські і дифузійні процеси

Марковська властивість

Розглянемо вінерів процес $W_t, t \geq 0$ з початковим значенням $W_0 = = 0$. Згідно з визначенням, приріст $W_t - W_s$ не залежить від приростів $W_s - W_0 = W_s$, і має нормальний розподіл із щільністю

$$p_{t-s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}, \qquad x \in R.$$

Тому умовний розподіл випадкової величини W_t при фіксованому значенні $W_s = x$ не залежить від величин W_u, $u < s$, тобто при будь-яких

$$W_{u_1} = x_1, ..., W_{u_n} = x_n, W_s = x, u_1 < u_2 < \cdots < u_n < s$$

умовний розподіл ймовірностей величини W_t не залежить від $W_{u_1}, ...$ $..., W_{u_n}$:

$$P\{W_t \in [a,b]/W_{u_1} = X_1, ..., W_{u_n} = X_n, W_s = X\} =$$

$$= P\{W_t \in [a,b]/W_s = X\} = \int_a^b p(s,x,t,y)dy, \tag{2.225}$$

$a < b$, де $p(s,x,t,y) = P_{t-s}(y-x)$ — умовна щільність розподілу величини W_t при фіксованому $W_s = X$.

Означення 2.36. Випадковий процес $(X_t, t \geq 0)$, для якого виконується властивість марковості, що виражається співвідношенням (2.225), називається *марковським процесом з перехідною щільністю* $p(s,x,t,y)$.

Спільний (умовний) розподіл ймовірностей будь-яких випадкових величин $X_{t_1}, ..., X_{t_m}$, де X_t — марковський процес, при фіксованому значенні $X_s = X$ задається щільністю $p(x_1, ..., x_m)$ вигляду

$$p(x_1, ..., x_m) = p(s,x,t,x_1)...p(t_{m-1}, x_{m-1}, t_m, x_m), \tag{2.226}$$

точка $\vec{X} = (x_1, ..., x_m)$ — будь-яка точка з R^m.

Якщо задано початковий розподіл ймовірностей випадкової величини X_s, і цей розподіл має щільність $p(x,s)$, то спільна щільність випадкових величин $X_s, X_{t_1}, ..., X_{t_m}$ визначається як добуток

$$p(s,x)p(s,x,t,x_1)...p(t_{m-1}, x_{m-1}, t_m, x_m), \tag{2.227}$$

$\vec{x} = (x_1, ..., x_m) \in R^m$.

Означення 2.37. Марковський процес називається *однорідним*, якщо перехідна щільність $p(s,x,t,y)$ залежить лише від $t - s$: $p(s,x,t,y) = p(x, t-s, y)$. Очевидно, вінерів процес — це однорідний марковський процес.

Рівняння Колмогорова–Чепмена

Запишемо спільну щільність випадкових величин X_u і X_t для марковського процесу при умові, що $X_s = x, s < u < t$. Це буде добуток $p(s,x,u,z)p(u,z,t,y)$, $\quad z \in R, \quad y \in R$.

Проінтегруємо по $z \in R$, тоді ми одержимо умовну щільність величини X_t, при умові, що $X_s = x$. Відповідна формула має вигляд

$$p(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,u,z)p(u,z,t,y) \tag{2.228}$$

— це рівняння Колмогорова, або Колмогорова–Чепмена.

Навпаки, нехай при всіх $s, x, t > s$ задано щільність розподілу ймовірностей $p(s,x,t,y)$ (як функцію від y), що задовольняє рівняння Колмогорова–Чепмена. Якщо тепер визначити спільний розподіл випадкових величин $X_{t_1}, ..., X_{t_m}$ за формулою (2.227), то ми одержимо марковський процес X_t з перехідною щільністю $P(s,x,t,y)$.

Відзначимо, що для марковського процесу спільний розподіл ймовірностей $X_{t_1}, ..., X_{t_m}$, $s < t_1 < \cdots < t_m$ при фіксованому значенні $X_s = x$ не залежать від величин X_u, $u \leq s$, точніше, умовна щільність ймовірності величин $X_{t_1}, ..., X_{t_m}$ при умові $X_{u_1} = x_1, ...,$ $X_{u_n} = x_n$, $X_s = x$, $u_1 < u_2 < \cdots < u_n < s$ дорівнює (2.227) незалежно від $X_{u_1}, ..., X_{u_n}$. Цю властивість можна сформулювати так: поведінка марковського процесу в майбутньому, після моменту часу s, не залежить від його поведінки в минулому, до моменту часу s, якщо відоме його значення X_s.

Дифузійні процеси

Розглянемо марковський процес, який у деякому розумінні, можна розкласти на дві складові — одну лінійну,з деяким, можливо, змінним коефіцієнтом (цю складову називають зносом), другу — хаотичну, подібну до вінерового процесу, теж з деяким, можливо, змінним коефіцієнтом, (цю складову називають дифузією). Для побудови такого процесу необхідно обумовити поведінку його перехідних ймовірностей. А саме, ми припускаємо, що прирости процесу $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ є малими в наступному розумінні:

1) $P(|\Delta X_t| > \varepsilon / X_t = x) = \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} p(t,x,t+\Delta t, y)dy = o(\Delta t)$, для будь-якого $\varepsilon > 0$.

2) $E(\Delta X_t I\{|\Delta X_t| \leq \varepsilon\}/X_t = x) =$

$$= \int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)p(t,x,t+\Delta t,y)dy = a(t,x)\Delta t + o(\Delta t).$$

3) $E(\Delta X_t)^2 I\{|\Delta X_t| \leq \varepsilon\}/X_t = x) =$

$$= \int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 p(t,x,t+\Delta t,y)dy = b(t,x)\Delta t + o(\Delta t).$$

Тут $o(\Delta t)$ — така числова функція, що $\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно на кожному проміжку $[t_1, t_2]$.

Означення 2.38. Марковський процес, що задовольняє умови 1–3, називається *дифузійним*, коефіцієнти $a(t,x)$ і $b(t,x)$ — коефіцієнтами зносу і дифузії, відповідно.

Якщо дифузійний процес X_t однорідний, то коефіцієнти $a(t,x) = a(x)$ і $b(t,x) = b(x)$ не залежать від t. Процес броунівського руху є дифузійним з нульовим коефіцієнтом зносу і постійною дифузією $b(t,x) = \sigma^2$.

З певних умов гладкості на перехідні щільності ці останні задовольняють так звані прямі і обернені рівняння Колмогорова. Ми наведемо відповідні результати без доведення (більш детально ці питання викладено в [1, 10]).

Теорема 2.49. *Нехай перехідна щільність $p(s,x,t,y)$ має похідні $\dfrac{\partial p}{\partial s}, \dfrac{\partial p}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$, неперервні по x рівномірно відносно y в кожному проміжку $y \in [y_1, y_2]$. Тоді вона задовольняє таке диференціальне рівняння в частинних похідних (обернене рівняння Колмогорова)*

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a(s,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Теорема 2.50. *Нехай перехідна щільність $p(s,x,t,y)$ і функції $a(t,x)$, $b(t,s)$ мають такі неперервні похідні:*

$$\frac{\partial}{\partial t}p(s,x,t,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[a(t,y)p(s,x,t,y)\right], \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b(t,y)p(s,x,t,y)\right].$$

Тоді перехідна щільність задовольняє таке диференціальне рівняння в частинних похідних (пряме рівняння Колмогорова, або рівняння Фоккера–Планка)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a(t,y)p(s,x,t,y)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b(t,y)p(s,x,t,y)\right].$$

Назви "пряме" і "обернене" пояснюються тим, що пряме рівняння містить похідну $\dfrac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial t}$, тобто досліджує поведінку перехідної щільності відносно "майбутнього" часу t, в прямому напрямку, а обернене рівняння містить похідну $\dfrac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial s}$, тобто досліджує поведінку перехідної щільності відносно "минулого" часу s, в оберненому напрямку.

Марковські процеси з дискретним числом станів

Досі ми розглядали марковські процеси, перехідна ймовірність яких, тобто ймовірність в момент часу t потрапити в деяку множину за умови, що в момент часу $s < t$ процес x_s дорівнює x, має перехідну щільність $p(s,x,t,y)$. Але властивість марковості, за умови, що відоме значення в поточний момент часу, розглядається і для випадкових послідовностей з дискретним часом, і для процесів з неперервним часом, але з дискретним набором станів, тобто для таких процесів, що можуть приймати лише скінченне або зліченне число значень. Такі процеси часто називають *ланцюгами Маркова* (іноді назву "ланцюги Маркова" відносять лише до випадкових послідовностей). Теорії ланцюгів Маркова присвячено багато літератури, в тому числі окремі монографії [8, 12]. Ясно, що ніякої щільності дискретні розподіли цих процесів не мають.

Розглянемо однорідний марковський процес x_t, $t \geq 0$ із скінченним числом можливих значень (станів) $\{0,1,2,...,n\} = X$ (сукупність станів називають фазовим простором процесу і кажуть, що фазовий стан просу в момент часу t — це x_t; ясно, що X може складатися з інших елементів, але ми приймаємо наше припущення для зручності). Позначимо $P_{ij}(t)$ ймовірність того, що в момент часу t $x_t = j$ за умови, що $x_0 = i$:

$$P_{ij}(t) = P(x_{t+s} = j \,/\, x_s = i), \qquad i,j \in X.$$

Нехай ще $P_i^0, i \in X$ — початковий розподіл ймовірностей:

$$P_i^0 = P(x_0 = i), \qquad i \in X.$$

Тоді марковська властивість дає такі рівняння Колмогорова–Чепмена для перехідних ймовірностей

$$\begin{aligned} P(x_t = j) &= \sum_{i\in X} P_i^0 P_{ij}(t), \\ P_{ij}(t+s) &= \sum_{k\in X} P_{ik}(t)P_{kj}(s), \end{aligned} \tag{2.229}$$

де $P_{ij}(0) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (δ_i^j — так званий символ Кронекера.)

Нехай в деякий момент часу t_0 процес $x_t = i$ і випадкова величина τ дорівнює часу, проведеному процесом в стані i, до моменту виходу з цього стану. За умови, що $\tau > s$, в момент $t_1 = t_0{+}s$ процес знаходиться в тому ж стані i. Оскільки поведінка однорідного марковського процесу після $t_0{+}s$ така ж, як і після t_0, розподіл ймовірностей часу перебування процесу в стані i такий самий, як і у величини τ. Тому

$$P(\tau > t + s/\tau > s) = P(\tau > t).$$

З другого боку, $P(\tau > t{+}s/\tau > s)$, в силу означення умовної ймовірності [2, 5], дорівнює $\dfrac{P(\tau > t+s)}{P(\tau > s)}$, отже, $P(\tau > t+s) = P(\tau > t)P(\tau > s)$.

Єдиним ненульовим розв'язком такого рівняння є показникова функція. Отже, розподіл часу τ до виходу процесу зі стану i є показниковим: $P(\tau > t) = e^{-\alpha_i t}$, $t \geq 0$, де α_i — деяка невід'ємна постійна, α_i називається щільністю виходу процесу зі стану i. Якщо $\alpha_i = 0$, то процес назавжди залишиться в стані i.

Розглянемо таку схему: в початковий момент $t = 0$ процес з ймовірністю P_i^0 знаходиться в стані i, де перебуває протягом випадкового часу $T_1 = \tau_1 - \tau_0$, де $\tau_0 = 0$, з α_i — показниковим розподілом ймовірностей, після чого в момент часу τ_1 процес переходить в деякий новий стан j_1 з ймовірністю π_{ij_1}, де π_{ij_1} — умовна ймовірність попасти, виходячи зі стану i, саме в стан j_1; в стані j_1 процес проводить випадковий час $T_2 = \tau_2 - \tau_1$ з α_{j_1} — показниковим розподілом; потім в момент τ_2 процес переходить зі стану j_1 в деякий новий стан j_2 з ймовірністю π_{j_1,j_2}, і в стані j_2 процес перебуває протягом часу $T_3 = \tau_3 - \tau_2$ з α_{j_2} — показниковим розподілом і т. д. Очевидно, безпосередній перехід з початкового стану i в деякий стан $j \neq i$ за малий проміжок часу Δt відбувається з ймовірністю $(1 - e^{-\alpha_i \Delta t})\pi_{ij}$, і якщо ймовірність більше ніж одного переходу за малий час Δt є малою, в порівнянні з Δt, тобто дорівнює $o(\Delta t)$, де $\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$, при $\Delta t \to 0$, то процес за час Δt попадає в стан j з ймовірністю $(1 - e^{-\alpha_j \Delta t})\pi_{ij} + o(\Delta t) = \alpha_i \pi_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$, тому що $1 - e^{-\alpha_j \Delta t} = \alpha_j \Delta t \pi_{ij} + o(\Delta t)$, а $o(\Delta t) + o(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Таким чином, логічно припустити, що перехідні ймовірності однорідного марковського процесу x_t, $t \geq 0$, задовольняють такі умови:

$$\begin{gathered} 1 - P_{ii}(\Delta t) = \alpha_i \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{ij}(\Delta t) = \alpha_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \quad j \neq i, \quad \Delta t \to 0, \end{gathered} \tag{2.230}$$

де α_i — щільність виходу зі стану i, а постійні α_{ij} називаються щільностями переходу з i в j, $\alpha_i = \sum\limits_{j \in X, j \neq j} \alpha_{ij}$. Покладемо $\alpha_{ii} = -\alpha_i$, $i \in X$. Згідно з (2.229),

$$P_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{n} P_{ik}(\Delta t) P_{kj}(t) = \sum_{k=0}^{n} P_{ik}(t) P_{kj}(\Delta t).$$

Використовуючи (2.230), одержимо

$$\frac{P_{ij}(t + \Delta t) - P_{ij}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k \neq i} P_{ik} P_{kj}(t) + \Big[\frac{P_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t}\Big] P_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Big[\alpha_{ik} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\Big] P_{kj}(t) = \sum_{k=0}^{n} P_{ik}(t) \Big[\alpha_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\Big]. \tag{2.231}$$

Перейдемо в (2.231) до границі при $\Delta t \to 0$:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} P_{ik}(t), \tag{2.232}$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{n} P_{ij}(t) \alpha_{kj}, \quad i, j \in X. \tag{2.233}$$

(2.232) — це обернена, (2.233) — пряма система диференціальних рівнянь Колмогорова для марковського процесу зі скінченним фазовим простором.

§ 13. Найпростіші стохастичні диференціальні рівняння

Поняття стохастичного диференціалу

Розглянемо випадковий процес вигляду

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s) ds, \ t \geq 0, \tag{2.234}$$

де $a(s)$ — випадкова неперервна функція, обмежена з ймовірністю 1 деякою постійною. Тоді можна сказати, що процес x_t має (потраєкторний) диференціал $dx_t = a_t dt$, розуміючи під цими словами саме те, що X_t подається у вигляді (2.234). Нехай функція $a(s)$ задовольняє більш слабку умову, а саме вона неперервна в середньому квадратичному, тобто $E(a(t) - a(s))^2 \to 0$ при $t \to s$. Тоді, використовуючи нерівність Коші–Буняковського, одержимо

$$E\Big(\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - a(t)\Big)^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2} E\Big(\int_t^{t+\Delta t} a(s) ds - a(t)\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{(\Delta t)^2} E\Big(\int_t^{t+\Delta t} a(s) ds - a(t)\Big)\Big)^2 \leq \max_{s \in [t, t+\Delta t]} E(a(s) - a(t))^2 \to 0,$$

$\Delta t \to 0$. Тоді можна сказати, що випадковий процес X_t має той самий стохастичний диференціал, але у розумінні середнього квадратичного.

Розглянемо тепер стохастичний інтеграл (див. § 9) $X_t = \int\limits_0^t b(s) dW_s$, де $b(s)$ випадкова неперервна функція, що задовольняє умову $E \int\limits_0^t b^2(s) \times$

$\times ds < \infty$, $t > 0$. Процес X_t не має похідної навіть у розумінні середнього квадратичного (тим більше потраєкторно), оскільки

$$E\left(\frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}\right)^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2} E\int_t^{t+\Delta t} b^2(s)ds \sim \frac{Eb^2(t)}{\Delta t} \to \infty, \ \Delta t \to 0.$$

Тому неможливо записати його диференціал у вигляді $dX_t = c(t)dt$, де $c(t)$ — деяка функція.

Розглянемо тепер процес більш загального вигляду:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s, \tag{2.235}$$

де $a(s)$ — неперервна в середньому квадратичному функція; $b(s)$ — неперервна функція така, що $E\int_0^t b^2(s)ds < \infty$ для всіх $t > 0$, X_0 — випадкова величина. Кажуть, що процес вигляду (2.235) має *стохастичний диференціал*

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t,$$

розуміючи під цими словами те, що для X_t має місце інтегральне представлення (2.235). Іноді доданок $\int_0^t a(s)ds$ називають *зносом*, а $\int_0^t b(s)dW_s$ — *дифузією процеса* X_t. При цьому, якщо випадкові процеси $a(s), b(s)$ і W_s узгоджені з однією і тією ж фільтрацією $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$, $x_0 - \mathcal{F}_0$-вимірна, то процес X_t є $\mathcal{F}_t$-узгодженим.

Стохастичні диференціальні рівняння

Розглянемо тепер випадок, коли коефіцієнти a і b залежать від змінної $x \in R$ і $a = a(s,x)$, $b = b(s,x)$, причому попередні припущення про неперервність і узгодженість зберігаються, а при фіксованому s функції a і b по x є вимірними, наприклад, борелівськими.

Означення 2.39. *Стохастичним диференціальним рівнянням* (с.д.р.) відносно випадкового процесу $X(t)$ називається рівняння вигляду

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)\, dW_s, \tag{2.236}$$

або в формі стохастичного диференціалу

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, dW_t, \ X_0 = x.$$

Зауважимо, що рівність (2.222):

$$S_t = S_0 + \mu\int_0^t S_u\, du + \sigma\int_0^t S_u\, dW_u$$

(див. § 10), яку ми одержали для геометричного броунівського руху, що описує еволюцію вартості акцій, означає, що S_t задовольняє с.д.р. з $a(s,x) = \mu x$, $b(s,x) = \sigma x$. Теорія с.д.р. — досить розвинена область теорії випадкових процесів. Їй, зокрема, присвячено монографії [4, 15]. Окремі властивості с.д.р. розглянуто в [1, 3, 9, 10, 14]. Ми наведемо лише один результат з теорії с.д.р.

Теорема 2.51. *Нехай функції $a(s,x)$ і $b(s,x)$ задовольняють наступні умови:*

1. Існує така постійна $C_1 > 0$, що для всіх $s \geq 0$, $x, y \in R$

$$|a(s,x) - a(s,y)| + |b(s,x) - b(s,y)| \leq K|x - y|$$

(умова Ліпшиця).

2. Існує така постійна $C_2 > 0$, що для всіх $x \in R$ і $s \geq 0$ $|a(s,x)|^2 + |b(s,x)|^2 \leq C_2(1 + |x|^2)$.

Тоді існує розв'язок рівняння (2.230), і він єдиний у наступному розумінні: якщо X_t^1 і X_t^2 — два розв'язки, то $P\{\sup\limits_{t\geq 0} |X_t^1 - X_t^2| > 0\} = 0$.

Якщо x — постійна, то розв'язок X_t — неперервний марковський процес.

Доведення теореми суттєво використовує наступне твердження, яке називають нерівністю Гронуолла. Це твердження часто використовується і в інших прикладних задачах.

Лема 2.14. *Нехай невипадкова функція $\alpha(t)$ є інтегрованою на відрізку $[a,b]$, а B і C — такі постійні, що*

$$\alpha(t) \leq B + C\int_a^t \alpha(s)\, ds \quad \text{для всіх} \quad t \in [a,b].$$

Тоді $\alpha(t) \leq Be^{C(t-a)}$.

Доведення. Мають місце такі оцінки:

$$\alpha(t) \leq B + C\int_a^t \left(B + C\int_a^s \alpha(u)\, du\right) ds \leq B + CB(t-a) + C^2\int_a^t \left[\int_a^s \alpha(u)\, du\right] ds,$$

продовжуючи, одержимо:

$$\alpha(t) \leq B + CB(t-a) + \frac{C^2B(t-a)^2}{2!} + \frac{C^3B(t-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{C^{n-1}B(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} + C^n \int\limits_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha(s)\,ds,$$

причому

$$C^n \int\limits_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha(s)\,ds \le C^n \frac{(t-a)^n}{n!} C_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де C_1 — постійна, що обмежує функцію $|\alpha(s)|$ на $[a, b]$. Отже,

$$\alpha(t) \le B \sum_{n=0}^{\infty} C^n \frac{(t-a)^v}{n!} = Be^{C(t-a)}.$$

Лему доведено.

Доведення теореми 2.51 міститься, наприклад, в [10].

ТЕОРЕТИКО-ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ В СТРАХОВІЙ МАТЕМАТИЦІ

Існування ризиків для життя, власності, довкілля привело до створення великої всесвітньої страхової індустрії, яка забезпечує фінансове покриття непередбачених витрат. Непередбачені витрати — результат дії випадку і тому не дивно, що в страхових розрахунках широко використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, математичної статистики.

Сучасна *актуарна* (страхова) математика є повнокровною гілкою прикладної математики. Математична теорія ризику, теорія довірчого оцінювання — найважливіші розділи в актуарній математиці.

В цьому розділі ми будемо вивчати *класичну модель теорії ризику*, деякі узагальнення цієї моделі, розглянемо деякі статистичні проблеми, які виникають при вивченні класичної моделі ризику. Основна увага буде зосереджена на вивченні ймовірності банкрутства в класичній моделі ризику при початковому капіталі u, дослідженні асимптотичної поведінки цієї ймовірності при $u \to \infty$.

§ 1. Класична модель ризику

Процесс ризику в класичній моделі

В класичній моделі ризику розміри виплат, що їх проводить страхова компанія, утворюють послідовність незалежних випадкових величин $\{Y_k,\ k \ge 1\}$, однаково розподілених з функцією розподілу $F(x)$. Ми будемо припускати, що $F(0) = 0$ (це означає, що величини Y_k додатні), існують математичне сподівання $EY_k = \mu$ та дисперсія $DY_k = \sigma^2$.

Число N_t страхових виплат на відрізку $[0, t]$ є пуассонівським процесом з інтенсивністю α. Таким чином, $EN_t = \alpha t$. Припускається також, що процес N_t і послідовність $\{Y_k\}$ взаємно незалежні. Момент τ_k k-го стрибка процесу N_t є моментом надходження до страхової компанії k-ї вимоги і в цей момент компанія виплачує суму Y_k.

Випадковий процес

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \tag{3.1}$$

виражає суму виплат, які проведені компанією на відрізку часу $[0, t]$ (припускається, що $\sum\limits_{k=1}^{0} Y_k = 0$). За теоремою про математичне споді-