МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР ВИЩОЇ ОСВІТИ

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник

РЕКОМЕНДОВАНО
науково-методичною
радою університету.
Протокол № 3
від 21.12.2000

Харків 2001

УДК 53

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА: Навч. посібник/ Упоряд. Т.Б.Ткаченко, М.І.Українець, В.В.Калінін, А.І.Рибалка, А.В.Безуглий, А.І.Козарь, С.І.Мельник, В.О.Маслова – Харків; ХТУРЕ, 2000 - 106 с.

В навчальному посібнику викладено основні положення класичної механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, основи спеціальної теорії відносності. Особливу увагу приділено фізичному змісту та інтерпретації основних законів, аналізу експериментальних даних.

Для студентів технічних вузів.

Іл. 63. Бібліогр. 5 назв.

Рецензенти: О.Г.Нерух, д-р фіз.-мат. наук, професор (ХТУРЕ)

А.О.Александрова, д-р фіз.-мат. наук, професор (ХВУ)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

До друку дозволяю
Проректор з навчальної
та методичної роботи
____________В.В.Семенець
3.01.2001 року

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Всі цитати, цифровий,
фактичний матеріал та
бібліографічні відомості
перевірено, написання
одиниць відповідає стандартам

РЕКОМЕНДОВАНО
науково-методичною
радою університету
Протокол № 3
від 21.12.2000р.

Упорядники _________ Т.Б.Ткаченко
_________ М.І.Українець
_________ В.В.Калінін
_________ А.І.Рибалка
_________ А.В.Безуглий
_________ А.І.Козарь
_________ С.І.Мельник
_________ В.О.Маслова
_______П.С.Ковтун
_______Б.П.Косіковська

Харків 2001

ПЕРЕДМОВА

Класична механіка та термодинаміка відіграють особливу роль у вивченні загальної фізики. Побудова простих моделей, виділення основних та несуттєвих рис явищ, які розглядаються, лежить в основі вивчення явищ природи. Вивчення основних законів класичної фізики сприяє розвитку фізичного мислення у студентів, умінню формулювати та розв’язувати конкретні фізичні задачі. Такі вміння та навички необхідні як для подальшого вивчення сучасної фізики, так і суміжних природничих та технічних наук.

Пропонований навчальний посібник містить основні теоретичні та експериментальні положення класичної механіки, теорії механічних коливань, основи спеціальної теорії відносності, класичної термодинаміки та молекулярної фізики; є складовою частиною комплексу навчально-методичних посібників, виданих викладачами кафедри фізики Харківського державного університету радіоелектроніки.

Дане видання підготували: В.В.Калінін – розділ 1; М.І.Українець – розділ 2; А.І.Рибалка – розділи 3, 7; А.І.Козарь – розділ 4; А.В.Безуглий – розділ 5; С.І.Мельник, В.О.Маслова – розділ 6; Т.Б.Ткаченко – розділи 8, 9, 10, передмова та редагування навчального посібника.

ЧАСТИНА I. МЕХАНІКА

1 КІНЕМАТИКА

1.1 Механічний рух

Механіка – це розділ фізики, що розглядає найпростішу форму руху матерії – механічний рух, який полягає в переміщенні тіл або їх частин одні відносно одних в просторі. Експериментальні дослідження руху тіл та створення математичної теорії, що узагальнює результати дослідів, є основною метою механіки. Механіка встановлює закони руху, використовуючи які можна передбачити рух конкретних тіл.

Розділ механіки, в якому вивчається механічний рух тіл без врахування причин, що викликали цей рух, називають *кінематикою*. Інакше кажучи, кінематика розглядає "геометрію" руху, тобто встановлює математичні співвідношення між характеристиками руху, такими, наприклад, як переміщення, шлях, швидкість, прискорення, час руху.

Механічний рух спостерігається тоді, коли з плином часу одні тіла (чи частини тіла) переміщуються в просторі відносно інших тіл. Тому вибирають тіло, відносно якого розглядають рух інших тіл та називають його *тілом відліку. Система відліку* – це тіло відліку, система координат, пов'язана з ним, та годинник для вимірювання проміжків часу.

Явища та предмети реального світу такі різноманітні, що взаємозв'язок між ними повною мірою описати неможливо. Тобто будь-яку реальну задачу абсолютно точно розв'язати неможливо. Завжди використовують наближені розв'язки, точність яких визначається характером задачі та метою, якої намагаються досягти. В кінематиці створюють моделі, виділяють тільки суттєві для даних явищ властивості та зв'язки, нехтуючи деякими факторами, розкладають складний механічний рух на простіші. Наприклад, поступальним називають рух тіла, для якого всі точки рухаються так, що пряма, яка з'єднує дві довільні точки, залишається паралельною самій собі. Тоді для визначення поступального руху тіла достатньо описати рух однієї точки тіла, тобто вважати тіло матеріальною точкою. Замінити тіло на матеріальну точку доцільно у випадках, коли розмірами його можна знехтувати за умов даної задачі. Лінія, яку описує матеріальна точка під час руху в просторі, називається *траєкторією* руху. Форма траєкторії залежить від вибору тіла відліку, тобто траєкторія є відносним поняттям. В декартовій системі координат рівняння траєкторії має вигляд:

$$f(x, y, z) = 0.$$

1.2 Способи визначення руху матеріальної точки

Рух матеріальної точки – це неперервна зміна її положення в просторі з плином часу. Положення точки визначають різними способами.

Координатне визначення положення точки *M* в просторі (рис. 1.1) здійснюють за допомогою трьох незалежних координат:

а) *x,y,z* для прямокутної (декартової) системи координат;

б) r, θ, φ - для сферичної системи;

в) ρ, φ, z - для циліндричної системи.

У випадку *векторного визначення* положення у просторі точки М використовують радіус-вектор $\vec{r}$, напрям якого визначає радіальний орт $\vec{e}_r$:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r,$$

або трійка ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (базис прямокутної системи координат):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

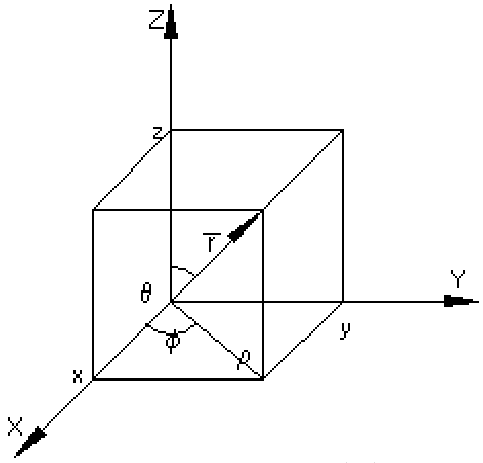


Рисунок 1.1

В цих виразах $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\vec{e}_r = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$; $\cos\alpha = \vec{e}_r\vec{i}$, $\cos\beta = \vec{e}_r\vec{j}$, $\cos\gamma = \vec{e}_r\vec{k}$.

Якщо відома функціональна залежність радіус-вектора від часу $\vec{r} = \vec{r}(t)$ чи залежність координат від часу $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ (кінематичні рівняння руху), то можна визначити залежність від часу основних кінематичних характеристик – швидкості та прискорення. В цьому полягає *пряма задача кінематики*, яку можна розв’язати, використовуючи три основних способи визначення руху: векторний, координатний та природний.

Визначення руху точки за допомогою параметрів траєкторії (природний спосіб визначення руху) використовують тоді, коли відома траєкторія руху. Вибирають деяку точку траєкторії за початкову S_0 (в початковий момент часу t_0), рух матеріальної точки визначає залежність відстані *S* вздовж траєкторії від часу: $S = S(t)$.

1.3 Швидкість

Кінематичні рівняння руху – достатня умова визначення швидкості та прискорення матеріальної точки.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ матеріальна точка перемістилась із положення 1 із радіус-вектором $\vec{r}_1$ в положення 2 з радіусом-вектором $\vec{r}_2$ (рис.1.2) по шляху $\Delta S = S_2 - S_1$, то величину $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ називають вектором переміщення, а вектором середньої швидкості $\langle\vec{V}\rangle$ - відношення $\langle\vec{V}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Середньою швидкістю на шляху ΔS називають скаляр $\langle V\rangle$:

$$\langle V\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Внаслідок того, що $\Delta S \neq |\Delta\vec{r}|$ (рис.1.2), то $\langle V \rangle \neq \left|\langle \vec{V} \rangle\right|$.

Якщо точка 2 наближається до точки 1 (положення $2', 2'' \ldots$ на рис.1.2),то границя відношення $\Delta\vec{r} / \Delta S$ дорівнює

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau} \,,$$

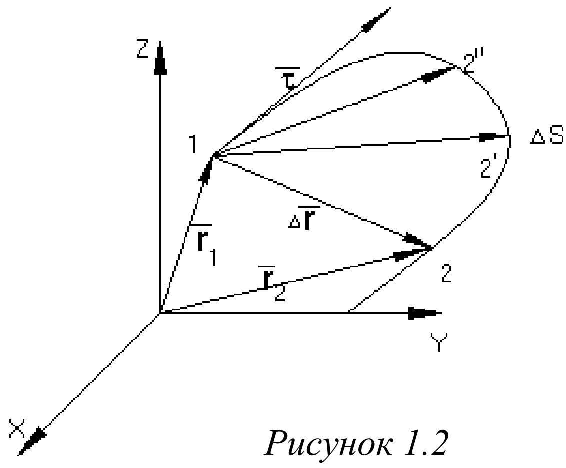


Рисунок 1.2

де $\vec{\tau}$ - одиничний вектор (орт) дотичної до траєкторії в точці 1, напрям якого збігається з напрямком $d\vec{r}$. Тоді миттєвою швидкістю, або швидкістю в даній точці траєкторії у випадку природного способу визначення руху є величина, модуль якої дорівнює

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \langle V \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S},$$

а напрям визначає вектор $\vec{\tau}$:

$$\vec{V} = \vec{\tau} V \,.$$

Миттєва швидкість для векторного способу визначення руху:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \,, \qquad (1.1)$$

а для координатного:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \,,$$

де $$V_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x};$$

$$V_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \dot{y};$$

$$V_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \dot{z};$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \,.$$

1.4 Прискорення

Під час руху матеріальної точки її швидкість може змінюватись за величиною та напрямом. Якщо $\Delta t = t_2 - t_1$ проміжок часу, за який швидкість змінилась на $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$, то *середнє прискорення* $\langle \vec{a} \rangle$ це вектор, який дорівнює:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \,.$$

Миттєве прискорення, тобто прискорення в даний момент часу або прискорення в даній точці траєкторії визначається границею, до якої прямує ця величина при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{1.2}$$

Формула (1.2) визначає прискорення як фізичну величину, справедлива у випадку різних рухів. При векторному способі визначення руху матеріальної точки відома залежність радіус-вектора від часу. Тоді прискорення можна знайти, якщо використати означення швидкості (1.1):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Якщо відомі залежності координат точки від часу (координатний спосіб визначення руху), то прискорення дорівнює:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\ .$$

Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\ .$$

У випадку природного способу визначення руху відома залежність шляху, пройденого тілом, від часу *S(t)*. Швидкість тоді дорівнює $\vec{V} = V\vec{\tau} = \dot{S}\vec{\tau}$. Знайдемо прискорення (1.2):

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(V\vec{\tau}) = V\frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{dV}{dt}\vec{\tau} = V\frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} \tag{1.3}$$

Другий доданок цієї суми має напрям дотичної до даної точки траєкторії, називається *тангенціальним прискоренням* та характеризує зміну швидкості за величиною:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} = \ddot{S}\vec{\tau}\ .$$

Проаналізуємо перший доданок (1.3). Для цього розглянемо рух матеріальної точки із положення 1 до положення 2 (рис. 1.3) за час Δt, якщо траєкторія руху – плоска крива. Перенесемо вектор $\vec{\tau}_2$ паралельно в точку 1. Тоді $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$ - приріст орта на шляху ΔS від точки 1 до 2, $\Delta\varphi$ - кут між векторами $\vec{\tau}_2$ та $\vec{\tau}_1$. Якщо точка 2 наближається до 1, то $\Delta\vec{\tau} \to d\vec{r}; \Delta S \to dS, \Delta\varphi \to d\varphi$, а відрізок траєкторії від 1 до 2 наближається до дуги кола радіусом

$$R = \frac{dS}{d\varphi}.$$

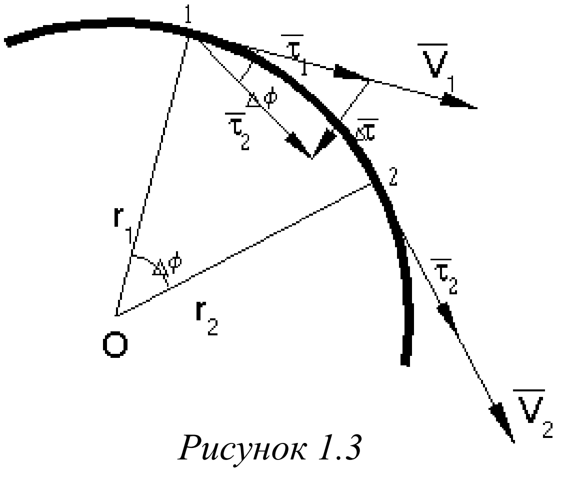


Рисунок 1.3

Знайдемо

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}V \qquad (1.4)$$

Розглянемо трикутник, сторонами якого є орти $\vec{\tau}_1$ та $\vec{\tau}_2$, при $\Delta\varphi \to 0$, робимо висновок, що вектор $\Delta\vec{\tau} \to d\vec{\tau}$, в точці 1 перпендикулярний до орта $\vec{\tau}$, тобто має напрям орта нормалі $\vec{n}$. А модуль вектора $|d\vec{\tau}|$ дорівнює

$$|d\vec{\tau}| = |\vec{\tau}|d\varphi = d\varphi .$$

Тоді

$$d\vec{\tau} = d\varphi\vec{n} . \qquad (1.5)$$

Після підстановки (1.5) в (1.4) одержимо:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dS}\vec{n}V = \frac{V}{R}\vec{n} .$$

А перший доданок (1.3) дорівнює

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n} ,$$

називається *нормальним прискоренням*, має напрям нормалі $\vec{n}$ даної точки траєкторії та характеризує зміну швидкості за напрямом. Вектор нормального прискорення напрямлений до центра кривини траєкторії, перпендикулярний вектору тангенціального прискорення (рис.1.4). Тоді повне прискорення

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n ,$$

його модуль –

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V}{R}\right)^2} .$$

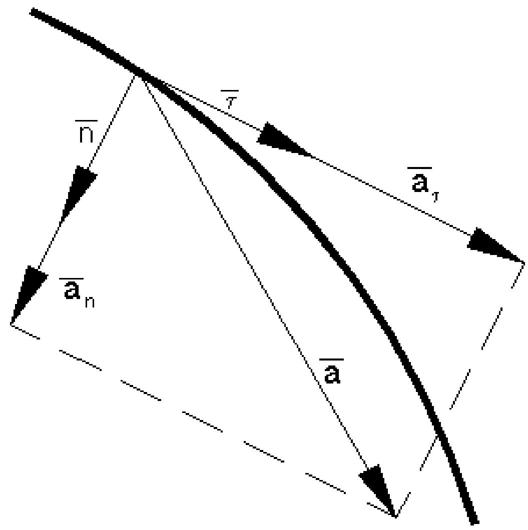


Рисунок 1.4

1.5 Обернена задача кінематики

Оберненою задачею кінематики називають задачу визначення кінематичних рівнянь руху, якщо відомі залежності швидкості чи прискорення від часу. Однозначний розв’язок цієї задачі можливий лише тоді, коли відомо початкові умови: швидкість $\vec{V}_0$, прискорення $\vec{a}_0$, радіус-вектор точки $\vec{r}_0$ в початковий момент часу.

Якщо, наприклад, відома залежність вектора прискорення $\vec{a}(t)$ від часу. Потрібно знайти швидкість $\vec{V}$ та радіус - вектор $\vec{r}$ точки у випадку векторного способу визначення руху. Скориставшись означенням прискорення (1.2), знайдемо:

$$d\vec{V} = \vec{a}dt .$$

Знайти швидкість можна, інтегруючи праву та ліву частини цього рівняння. Але інтегрування виконати можна, якщо відомо границі зміни величин. Так, швидкість змінюється від початкової $\vec{V}_0$ до $\vec{V}$, час – від початкового моменту t_0 до моменту часу t. Тоді

$$\vec{V} - \vec{V}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt;$$

$$\vec{V} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt + \vec{V}_0. \qquad (1.6)$$

Для того, щоб знайти радіус-вектор точки, скористаємось означенням швидкості (1.1), звідки інтегруванням цього виразу, знаходимо

$$\Delta\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{V}dt, \; \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{V}dt.$$

Радіус – вектор знаходимо, використавши (1.6):

$$\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{V}dt + \vec{r}_0.$$

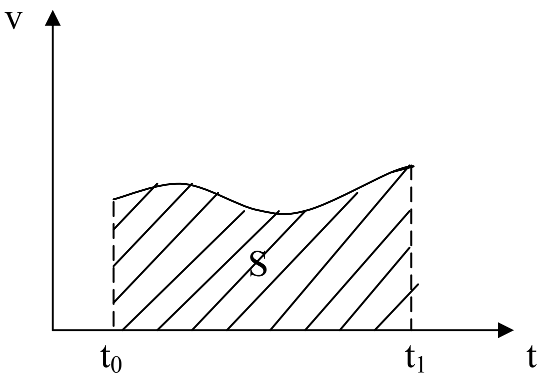


Рисунок 1.5

У випадку координатного способу визначення руху аналогічним способом можна знайти координати тіла, якщо відомо початкову швидкість і початкове прискорення.

Шлях, пройдений точкою, можна знайти, якщо використати взаємозв’язок модуля швидкості V та шляху S:

$$V = \frac{dS}{dt},$$

звідки $dS = Vdt$. Інтеграл від цього виразу – шлях, пройдений точкою за час від моменту t_0 до t_1:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} Vdt.$$

Якщо відома залежність модуля швидкості від часу, то шлях – площа під графіком $V(t)$ (рис. 1.5).

1.6 Кінематика обертального руху

Зовнішні дії на тіло призводять не тільки до зміни стану руху тіла, але і до деформації тіла. Але в багатьох випадках деформаційними змінами форми та розмірів тіла можна знехтувати. Абсолютно твердим тілом в механіці називають тіло, для якого відстань між двома довільними точками не змінюється під час руху. Рух твердого тіла можна виразити як суперпозицію двох основних типів руху – поступального та обертального.

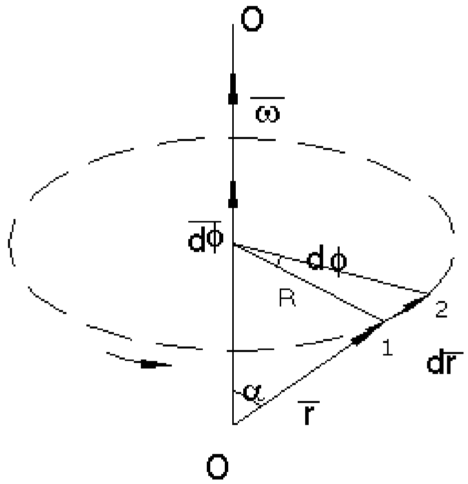


Рисунок 1.6

Розглянемо особливості обертального руху абсолютно твердого тіла. Під час обертального руху всі точки абсолютно твердого тіла рухаються по колам, центри яких лежать на одній прямій, що називається віссю обертання. Щоб описати цей рух тіла, досить знати характеристики руху одної з точок. Розглянемо обертальний рух твердого тіла навколо закріпленої осі OO' (рис. 1.6). Точка A цього тіла рухається по колу, положення точки визначає радіус-вектор $\vec{r}$. Якщо точка A перемістилась із 1 в 2 (ці точки нескінченно близькі), то зміна радіус-вектора дорівнює $d\vec{r}$, кут повороту - $d\varphi$. Модуль переміщення $|d\vec{r}|$ та зміна кута повороту пов'язані формулою:

$$|d\vec{r}| = r\sin\alpha \cdot d\varphi .$$

Якщо кут повороту $d\vec{\varphi}$ вважати вектором, модуль якого дорівнює $d\varphi$, а напрям визначається правилом правого гвинта, то вектор переміщення $d\vec{r}$ визначається векторним добутком:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]. \tag{1.7}$$

Вектор кута повороту $d\vec{\varphi}$ дозволяє відрізнити обертання точки по колу за годинниковою стрілкою та проти годинникової стрілки, це так званий псевдовектор або аксіальний вектор, він напрямлений вздовж осі обертання. Тільки для нескінченно малих кутів обертання можна ввести поняття вектора кута обертання, для якого можна здійснювати додавання векторів.

Тоді *кутова швидкість* $\vec{\omega}$ - вектор, що дорівнює

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

А *кутове прискорення* $\vec{\varepsilon}$ -

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$ також аксіальні вектори, кутова швидкість має напрям вектора $d\vec{\varphi}$, а кутове прискорення - напрям вектора зміни кутової швидкості $d\vec{\omega}$.

Одиниці вимірювання кутової швидкості - радіан за секунду (рад/с, $с^{-1}$), а кутового прискорення - радіан за секунду в квадраті (рад/$с^2$, $с^{-2}$).

Знайдемо швидкість $\vec{V}$ довільної точки А тіла, що обертається. Для цього поділимо рівняння (1.7) на час руху dt:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right].$$

Використовуючи означення швидкості (1.1) та кутової швидкості (1.8), одержимо

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \qquad (1.10)$$

Швидкість точки А має напрям вектора dr (рис. 1.6), - напрям дотичної до кола в даний момент часу, та є векторним добутком векторів кутової швидкості та радіуса-вектора $\vec{r}$ точки. Модуль вектора швидкості $\vec{V}$ дорівнює

$$V = r\omega \sin\alpha = \omega R,$$

де R - радіус кола, по якому рухається точка (рис.1.6).

Якщо знайти похідну від швидкості (1.10), одержимо повне прискорення $\vec{a}$ точки :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{V}]$$

Перший доданок цієї суми має напрям, перпендикулярний до $\vec{\varepsilon}$ та до $\vec{r}$, це напрям орта дотичної до кола $\vec{\tau}$ (якщо вісь обертання нерухома):

$$[\vec{\varepsilon}, \vec{r}] = \vec{a}_\tau,$$

модуль тангенціального прискорення дорівнює

$$|\vec{a}_\tau| = r\varepsilon \sin\alpha = R\varepsilon.$$

Нормальне прискорення точки дорівнює

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{V}],$$

модуль його - $a_n = \omega V = \omega^2 R$.

Повне прискорення точки в обертальному русі :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + a_n = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{V}],$$

модуль якого

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

2 ДИНАМІКА

2.1 Типи взаємодій

Динаміка – це розділ механіки, у якому вивчаються зміни руху тіл, внаслідок взаємодії з іншими тілами. Існують чотири типи взаємодій: гравітаційна, яка існує між тілами, що мають масу; електромагнітна, між частинками або тілами, які мають електричні заряди; сильна, між елементарними частинками, що називаються адронами; слабка, що обумовлює процеси перетворення деяких елементарних частинок та атомних ядер. Всі чотири взаємодії у природі є фундаментальними.

Гравітаційна взаємодія характеризується малою інтенсивністю, має необмежений радіус дії і однобічне притягання будь-яких об’єктів. Для цього виду взаємодії характерним є не насичуваність.

Електромагнітна взаємодія відбувається через електромагнітне поле. Основними ознаками цього виду взаємодії є необмежений радіус дії та зв'язок інтенсивності взаємодії з елементарним зарядом. Електромагнітна взаємодія за своєю інтенсивністю займає друге місце після сильної взаємодії серед фундаментальних взаємодій. Проявом електромагнітної взаємодії є сили тертя, пружності, поверхневого натягу, сили Ван-дер-Ваальса, Лоренца та Ампера.

Сильна взаємодія - найбільш інтенсивна серед інших взаємодій, має короткий радіус дії ($r \le 10^{-15}$ м), зв'язок нуклонів у ядрі, термоядерний синтез та визначає інші процеси.

Слабка взаємодія характеризується малим радіусом дії ($r \le 2 \cdot 10^{-18}$ м) і до неї належить β- розпад ядер, К - захоплення електронів атома, розпад ряду елементарних частинок.

В результаті цих чотирьох взаємодій виникають сили.

2.2 Сила і маса. Імпульс

Сила - це фізична величина, що характеризує взаємодію тіл і як кількісна характеристика є мірою інтенсивності взаємодії. Механічна сила - векторна величина, тобто на неї розповсюджуються правили дії з векторами. Сила визначається модулем, напрямком і точкою прикладання. Лінія, уздовж якої напрямлена сила, називається лінією дії сили.

Якщо на тіло діють сили збоку інших тіл (або системи тіл), то ці сили називаються зовнішніми. Сили, які діють між частинами одного й того самого тіла, називають внутрішніми силами.

Система тіл, на яку не діють зовнішні сили, називається замкнутою або ізольованою системою.

Під дією декількох сил рух тіла відбувається так, ніби на нього діє одна рівнодійна сила, що дорівнює векторній сумі цих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \tag{2.1}$$

В загальному випадку, коли на тіло діє більше двох сил, рівнодійну силу знаходять, застосовуючи до них послідовно правило паралелограма.

У випадку двох сил $\vec{F}_1$ *і* $\vec{F}_2$, що діють уздовж однієї прямої, рівнодійна напрямлена у бік більшої з них, якщо сили протилежні, і дорівнює за величиною $F = |F_1 - F_2|$, або $F = F_1 + F_2$, якщо вони напрямлені однаково.

Якщо сили $\vec{F}_1$ *і* $\vec{F}_2$ прикладені до тіла під кутом α одна до іншої, то величина рівнодійної дорівнює

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \,.$$

Кількісно механічний рух описується трьома основними величинами: довжиною L, часом t, і масою m. Маса тіла є мірою кількості речовини, що вміщується у цьому тілі. Фізичний смисл поняття маси розкривається законами, встановленими у 1687 р. видатним англійським вченим Ісааком Ньютоном (1643-1727 рр.)

Якщо при поступальному русі тіло не взаємодіє з іншими тілами, то його швидкість не змінюється. Ця особливість тіла називається інертністю. Мірою інертності тіла є фізична величина, яка називається інертною масою або просто масою. Досліди свідчать, що одна й та сама сила різним тілам надає різні за величиною прискорення, що й стверджує наявність маси у тіла.

Крім інерційних властивостей, маса характеризує і гравітаційні властивості тіл, які полягають в здатності тіл притягувати одне одного. З дослідних фактів випливає, що інертна і гравітаційна маси усіх тіл пропорційні одна іншій. Це означає, що при відповідному виборі одиниць вимірювання інертна і гравітаційна маси є тотожними [1].

Одиницею маси в СІ є кілограм (кг). За визначенням 1кг є маса міжнародного прототипу кілограма - платино - іридієвого циліндра довжиною 39 мм і діаметром 39 мм, який зберігається у палаці Бретель біля Парижа [2]. Практично 1 кг дорівнює масі 1 літра чистої води при температурі 4°С.

Маса одиниці об'єму тіла називається її *густиною*. Для однорідного тіла густина визначається як

$$\rho = \frac{m}{V} ,$$

де m - маса тіла об'ємом V.

Для неоднорідного тіла

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} ,$$

де Δm - маса елемента тіла, ΔV - об'єм цього елемента.

Одиницею густини в СІ є кілограм на кубічний метр:

$$[\rho] = \text{кг/м}^3.$$

Якщо матеріальна точка масою m рухається зі швидкістю $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то вона має імпульс $\vec{P}$:

$$\vec{P} = m\vec{V} = m\frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Імпульс є векторною величиною. Напрямок вектора $\vec{P}$ збігається з напрямком вектора швидкості $\vec{V}$, а його модуль у m разів більший за модуль швидкості. Розмірність імпульсу в СІ - [P]=кг·м·c^{-1}.

Імпульс системи точок (або тіл) дорівнює

$$\vec{P}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i ,$$

де $m_i\vec{V}_i$ - вектори імпульсу окремих точок.

2.3 Закони Ньютона

Рух тіл під дією зовнішніх сил підпорядковується законам динаміки. Основу динаміки складають три закони Ньютона (1687 р.), які отримані шляхом узагальнення дослідних фактів. Класична механіка базується на законах Ньютона і має певні межі застосування. Закони Ньютона справедливі для тіл великих мас (порівняно з масою атомів), які рухаються з малими швидкостями в порівнянні із швидкістю світла (V<<c, де c - швидкість світла).

Перший закон Ньютона (закон інерції) встановлено Галілео Галілеєм (1564 - 1642 рр.). Відповідно до цього закону тіло зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху, якщо на нього не діють інші тіла. Математично цей закон можна записати у вигляді

$$\vec{a} = 0, \text{ якщо } \vec{F} = 0,$$

де $\vec{F}$ - векторна сума сил, які діють на тіло, $\vec{a}$ - прискорення тіла.

З першого закону Ньютона випливає, що будь-яка зміна стану руху зумовлена дією на нього сил.

Виходячи із закону інерції; Ньютон дійшов висновку про існування *інерціальних систем відліку*. Система відліку, у який виконується цей закон, називається *інерціальною*. Зміст першого закону Ньютона такий: якщо на тіло не діють зовнішні сили, то існує система відліку, у якій воно знаходиться у стані спокою. Будь-яка система відліку, що рухається зі швидкістю, сталою відносно інерціальної системи відліку, також буде інерціальною.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки) встановлює зв'язок між діючою силою, прискоренням і масою тіла. Для тіла зі сталою масою швидкість зміни його імпульсу з часом дорівнює результуючій силі, що діє на тіло:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \tag{2.2}$$

Тобто рівнодійна сил, прикладених до тіла дорівнює швидкості зміни імпульсу тіла. Саме в такому вигляді сформулював цей закон Ньютон. Враховуючи, що $\vec{P} = m\vec{V}$, вираз (2.2) для тіла із сталою масою $m = const$, запишемо у вигляді:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right) = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}.$$

Звідки

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.3}$$

Оскільки в результаті дії сил тіло набуває прискорення, другий закон Ньютона можна сформулювати так: прискорення $\vec{a}$, якого набуває тіло, прямо пропорційне рівнодійній сил і обережно пропорційне його масі.

Р і в н я н н я (2.3) можна записати у вигляді

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad \text{або} \qquad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\,. \qquad (2.4.)$$

Рівняння (2.2)—(2.4) називають *основним рівнянням динаміки матеріальної точки у векторній формі*. В скалярній формі рівняння (2.3) або (2.4) еквівалентні рівнянням:

$$m\ddot{x} = F_x\,, \quad m\ddot{y} = F_y\,, \quad m\ddot{z} = F_z\,, \qquad (2.5)$$

де F_x, F_y, F_z — проекції сили $\vec{F}$ на відповідні осі декартової системи координат.

На основі рівняння (2.3) вводиться одиниця сили. В системі СІ одиницею сили є Ньютон (Н).

$$[F] = H = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\,.$$

Один Ньютон дорівнює силі, яка надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с^2.

Рівняння (2.4) і (2.5) відносно часу t є диференціальними рівняннями другого порядку. Розв'язуючи ці рівняння для певних початкових умов, визначаємо положення матеріальної точки або тіла масою m та швидкість у будь-який наступний момент часу $t>t_0$.

З другого закону Ньютона можна одержати фізичну величину, яка називається *імпульсом сили*. Помноживши вираз (2.2) на dt, маємо:

$$d\vec{P} = \vec{F}dt\,. \qquad (2.6)$$

З формули (2.6) випливає, що зміна імпульсу тіла залежить не лише від сили, але й від часу, протягом якого сила діє на тіло. За проміжок часу, від моменту t_1 до моменту t_2, імпульс змінюється від значення $\vec{P}_1$ до $\vec{P}_2$. Отже, якщо проінтегрувати вираз (2.6), то за цей час зміна імпульсу дорівнює

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt\,.$$

Якщо сила $\vec{F}$, яка діє на матеріальну точку або тіло за проміжок часу t_2-t_1, є величиною сталою, тоді зміна імпульсу тіла за цей час дорівнює

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{F}(t_2 - t_1)\,.$$

Таким чином, імпульс сили - це динамічна величина, яка чисельно дорівнює добутку сили на час її дії. Одиниця імпульсу сили — Ньютон·секунда [Н·с].

Імпульс сили являє собою міру тривалості дії сили і свідчить, що динамічний ефект, викликаний силою, залежить не лише від її величини і напрямку, але й від часу, протягом якого вона діяла. Цей ефект полягає в зміні імпульсу матеріальної точки або тіла.

Третій закон Ньютона (закон дії та протидії) формулюється так: *сили, з якими діють одне тіло на інше при їх взаємодії, рівні за величиною й протилежно спрямовані.*

Якщо F_1 — сила, з якою перше тіло діє на друге, а F_2 — сила, з якою друге тіло діє на перше, тоді третій закон Ньютона запишемо у вигляді:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

Ці сили спрямовані уздовж однієї прямої, яка з'єднує перше і друге тіла. Зауважимо, що сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ прикладені до різних тіл. Сила $\vec{F}_2$ називається силою реакції по відношенню до $\vec{F}_1$, а сила $\vec{F}_1$ — силою реакції по відношенню до $\vec{F}_2$. Ці сили виникають завжди попарно: силі, прикладеній до тіла, можна зіставити рівну за величиною протилежно спрямовану силу, яка прикладена до другого тіла.

Слід зауважити, що третій закон Ньютона з високою точністю виконується лише при безпосередньому контакті тіл або при взаємодії двох тіл, які перебувають у спокої.

Всі три закони Ньютона справедливі тільки в інерціальній системі відліку і лише для тіл, що рухаються із швидкостями, малими порівняно із швидкістю світла у вакуумі.

Рух тіл із значними швидкостями ($V \cong C$) розглянуто механікою Ейнштейна.

2.4 Принцип відносності Галілея

Галілео Галілей (1564—1642 рр.) – видатний італійський фізик і астроном, в 1636 р. сформулював принцип відносності, який відіграє велику роль у розвитку не лише механіки, але й усієї фізики. На основі цього принципу Ісаак Ньютон дійшов висновку про існування інерціальних систем, а Альберт Ейнштейн поширив механічний принцип відносності Галілея на усі фізичні процеси, зокрема, на світло, і створив спеціальну та загальну теорію відносності, замінивши при цьому перетворення Галілея перетвореннями Лоренца. (Генрік Антон Лоренц (1853—1928 рр.) — видатний нідерландський фізик-теоретик.

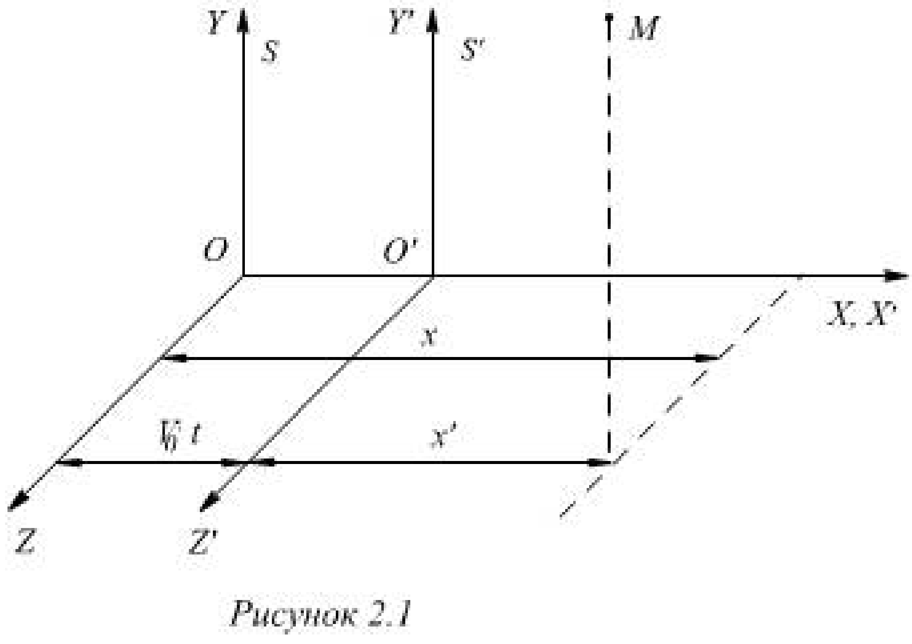


Рисунок 2.1

Згідно з принципом Галілея закони механіки однакові в будь-якій інерціальній системі. Розглянемо дві системи відліку, які рухаються одна відносно іншої із сталою швидкістю $\vec{V}_0$. Вважатимемо одну із систем умовно нерухомою. Позначимо її літерою S. Інша система (позначена літерою S') рухається відносно системи S із швидкістю $\vec{V}_0$. Ця швидкість називається переносною. Вважатимемо для спрощення, що осі OX і OX' систем збігаються, а осі OY і OY' та OZ і OZ' відповідно паралельні (рис. 2.1).

Знайдемо зв'язок між координатами точки M в системах S і S'. Початковим вважаємо момент часу, коли початок координат обох систем, знаходиться в одній точці. Крім того, в класичній механіці вважається, що час в усіх системах плине однаково, тобто для систем, які розглядаються у цьому випадку: $t=t'$. Тоді з рис. 2.1. одержимо:

$$\begin{aligned} x &= x' + V_0 \cdot t, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Р і в н я н н я (2.8) називаються *перетвореннями Галілея.*

Продиференцюємо за часом перші три співвідношення (2.8):

$$\dot{x} = \dot{x}' + V_0,$$
$$\dot{y} = \dot{y}',$$
$$\dot{z} = \dot{z}'.$$

Або

$$\begin{aligned} V_x &= V_x' + V_0 \\ V_y &= V_y', \\ V_z &= V_z'. \end{aligned} \tag{2.9}$$

У співвідношеннях (2.9) величини V_x, V_y, V_z є проекціями вектора швидкості $\vec{V}$ точки на координатні осі нерухомої системи S, а V_x', V_y', V_z' проекції вектора швидкості $\vec{V}'$ у рухомій системі S' . Ці скалярні рівняння (2.20) еквівалентні наступному співвідношенню між векторами швидкостей $\vec{V}$ і $\vec{V}'$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0. \tag{2.10}$$

Співвідношення (2.10) є *класичним нерелятивістським законом складання швидкостей*. У цьому рівнянні $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ — швидкості матеріальної точки (або тіла) в системах S і S' відповідно, $\vec{V}_0$ — стала швидкість руху системи S' відносно S, $\vec{r}$ і $\vec{r}'$ — радіуси-вектори точки M в системах S і S'.

Зауважимо, що векторне співвідношення (2.10) виконується при довільному виборі взаємних напрямків осей координат систем S і S', в той час як скалярні співвідношення (2.9) справедливі лише для розташування осей, наведеного на рис. 2.1.

Продиференцюємо співвідношення (2.10) за часом. Тоді отримаємо:

$$\dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V}}', \quad \text{або} \quad \vec{a} = \vec{a}',$$

де $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}'}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ — прискорення матеріальної точки в інерціальних системах S і S' відповідно.

Отже, прискорення матеріальної точки в інерціальних системах відліку є одним і тим самим, тобто *інваріантним (незмінним)* відносно перетворень Галілея. Це означає, що коли одна із систем є інерціальною $(\vec{a} = 0)$, то і всі інші теж інерціальні $(\vec{a}' = 0)$.

З перетворень Галілея випливає і такий висновок: оскільки прискорення тіла у двох інерціальних системах однакові, то і сили, які діють на це тіло у системах S і S', у відповідності до другого закону Ньютона будуть однакові, тобто

$$\vec{F} = \vec{F}'.$$

Таким чином, *рівняння механіки Ньютона є інваріантними відносно перетворень Галілея, тобто вони залишаються незмінними при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.*

Отже, всі механічні явища у різних інерціальних системах відбуваються однаково і ніякими механічними дослідами не можливо встановити, чи дана система відліку знаходиться у спокої, чи рухається прямолінійно та рівномірно.

Принцип відносності Галілея стверджує відносність механічного руху. Цей рух задається відносно конкретної інерціальної системи відліку. В той же час цей принцип стверджує рівноправність всіх інерціальних систем.

Принцип відносності Галілея і закони Ньютона складають основу *класичної теорії відносності*.

2.5 Закон збереження імпульсу

Закон збереження імпульсу – це один з фундаментальних законів природи, він є універсальним (точним).

З основного закону динаміки $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ випливає, що коли на тіло не діють інші тіла (тобто $\vec{F} = 0$), то $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0$.

Тобто імпульс тіла в цьому випадку залишається сталим

$$\vec{P} = const. \tag{2.11}$$

Вираз (2.11) є законом збереження імпульсу для одного тіла.

Розглянемо систему, яка складається з трьох тіл.

Нехай на кожне з цих тіл, крім внутрішніх сил $\vec{f}_{ik}$, дають і зовнішні сили $\vec{F}_1$ (рис.2.2). Індекс "*i*" вказує тіло, на яке діє сила, а індекс "*k*" — тіло, з боку якого діє ця сила. Запишемо для кожного з цих тіл другий закон Ньютона:

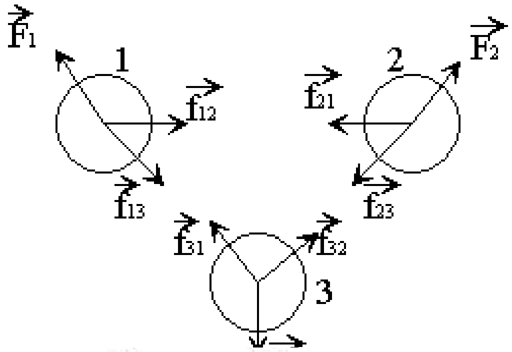


Рисунок 2.2

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{P}_1 = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1; \\ \dfrac{d}{dt}\vec{P}_2 = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2; \\ \dfrac{d}{dt}\vec{P}_3 = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3; \end{cases}$$

Відповідно до третього закону Ньютона внутрішні сили $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$ попарно скомпенсують одна одну, тоді

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \qquad (2.12)$$

Вираз у дужках (2.12) – це повний імпульс системи $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$. Тобто

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Якщо система замкнута (зовнішні сили відсутні), то

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \quad \vec{P} = const.$$

Таким чином, повний імпульс системи трьохматеріальних з часом точок не змінюється. Цей результат узагальнюється і на випадок, коли система складається з довільного числа фізичних тіл.

Сформулюємо закон збереження імпульсу: *імпульс замкнутої системи матеріальних точок залишається сталим*. Зауважимо, що на відміну від законів Ньютона, закон збереження імпульсу виконується не лише в рамках класичної механіки. Він відноситься до фундаментальних фізичних законів, тому що пов’язаний з такою властивістю простору, як його *однорідність*.

При цьому однорідність простору означає, що закони фізики однакові у всіх точках простору і не залежать від вибору положення початку координат інерціальної системи відліку, а *однорідність часу* — що закони фізики не змінюються з часом.

Стосовно до систем, які описуються класичною механікою, закон збереження імпульсу можна розглядати як наслідок законів Ньютона.

2.6 Рух тіла із змінною масою

Під рухом із змінною масою розуміють такий рух тіла, при якому його маса з часом змінюється. Динаміка руху тіл із змінною масою лежить в основі реактивного руху, яка використовується в ракето- і літакобудуванні. Рух частинки із змінною масою $m = m(t)$ описується рівнянням І.В.Мещерського (1858-1935рр.), що базується на законі збереження імпульсу. Це рівняння узагальнює закони Ньютона на випадок, коли маса тіла є функцією часу.

У класичній (ньютонівській) механіці маса тіла може змінюватися лише в результаті відокремлювання або приєднання до нього частинок речовини. Прикладом тіла із змінною масою є ракета під час польоту. Через сопло ракети (рис. 2.3) витікає струмінь маси, що відокремлюється в результаті згорання від усієї паливної маси. Нехай маса ракети з паливом у момент часу t дорівнює $M(t)$.

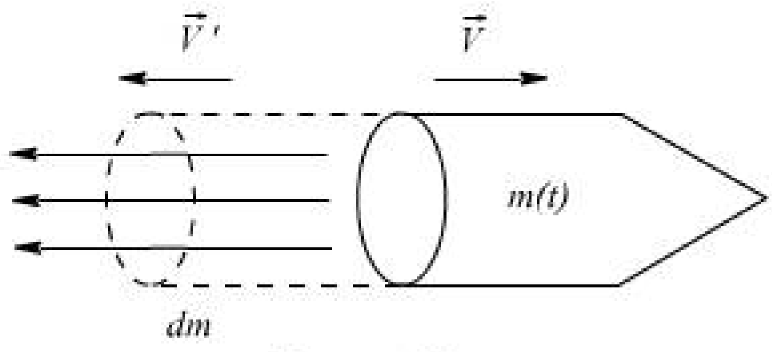


Рисунок 2.3

Протягом польоту ракети її маса змінюється внаслідок згорання палива. Нехай за час dt маса ракети зменшується на величину речовини dm, що полишає ракету. Тоді приріст маси всієї ракети є від'ємною величиною

$$M(t+dt)-M(t)=-dM(t)$$

і дорівнює масі, що полишає ракету

$$dm=-dM(t). \tag{2.13}$$

Під час руху ракети відбувається зміна її швидкості внаслідок дії двох факторів. Першою такою причиною є сила притягання $\vec{F}$ до Землі. Ця сила по відношенню до ракети є зовнішньою. Швидкість під впливом цієї зовнішньої сили змінюється на $d\vec{V}_1$. Друга причина в тому, що з ракети через її сопло йде потік речовини, який і виносить масу і який призводить до зміни швидкості на величину $d\vec{V}_2$. В результаті дії цих двох факторів швидкість ракети змінюється на величину

$$d\vec{V}=d\vec{V}_1+d\vec{V}_2.$$

Величину $d\vec{V}_1$ знайдемо з другого закону Ньютона:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}_1}{dt}=\frac{\vec{F}(t)}{M(t)}.$$

Звідки

$$d\vec{V}_1=\frac{\vec{F}(t)}{M(t)}dt\,.$$

Для знаходження величини $d\vec{V}_2$ застосуємо закон збереження імпульсу. Взаємодія між масами $M(t)$ та dm за характером є контактною. Тому її можна розглядати як пружний удар двох мас - $M(t)$ і dm. Тоді закон збереження імпульсу має вигляд

$$(M(t)-dm)\left(\vec{V}+d\vec{V}_2\right)+\vec{U}dm=M(t)\vec{V}\,, \tag{2.14}$$

де $\vec{V}$ - швидкість ракети у момент часу t, $\vec{U}$ - швидкість маси речовини dm, що залишає ракету. Скористаємось умовою (2.13) і розкриємо вираз (2.14):

$$dM(t)\vec{V} + M(t)d\vec{V}_2 + dM(t)d\vec{V}_2 - \vec{U}dM(t) = 0. \qquad (2.15)$$

Добуток $dM(t)d\vec{V}_2$ у виразі (2.15) є нескінченно малою величиною вищого порядку. Тому цим добутком можна знехтувати:

$$d\vec{V}_2[M(t) + dM(t)] + (\vec{V} - \vec{U})dM(t) = 0.$$

Звідки

$$d\vec{V}_2 = \frac{\vec{U} - \vec{V}}{M(t) + dM(t)} dM(t). \qquad (2.16)$$

В знаменнику виразу (2.16) можна знехтувати величиною $dM(t) << M(t)$:

$$d\vec{V}_2 = \frac{\vec{U} - \vec{V}}{M(t)} dM(t).$$

$$d\vec{V} = d\vec{V}_1 + d\vec{V}_2 = \frac{\vec{F}(t)}{M(t)} + \frac{\vec{U} - \vec{V}}{M(t)} dM(t).$$

або

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{M(t)} + \frac{\vec{U} - \vec{V}}{M(t)} \frac{dM(t)}{dt};$$

$$M(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t) + (\vec{U} - \vec{V})\frac{dM(t)}{dt}. \qquad (2.17)$$

Різниця швидкостей $\vec{U} - \vec{V} = \vec{V}_{відн}$ має назву відносної швидкості витікання маси відносно тіла (ракети). І тоді рівняння (2.17) набуває вигляду

$$M(t)\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{F}(t) + \vec{V}_{відн} \frac{dM(t)}{dt}. \qquad (2.18)$$

Рівняння (2.17) або (2.18) називається рівнянням *поступального руху змінної маси або рівнянням Мещерського.*

Величина

$$\vec{F}_p = (\vec{U} - \vec{V})\frac{dM(t)}{dt} = \vec{V}_{відн} \frac{dM(t)}{dt}$$

називається реактивною силою або силою тяги. Реактивна сила характеризує механічну дію на тіло маси, що покидає його або приєднується до нього.

Якщо зовнішні сили дорівнюють нулю: $\vec{F} = 0$, то рівняння руху (2.18) має вигляд:

$$M(t)d\vec{V} = \vec{V}_{відн}dM(t)$$

$\vec{V}_{відн} = \overrightarrow{const}$, розв`язком цього рівняння буде

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 - \vec{V}_{відн} \ln\frac{M_0}{M(t)}, \qquad (2.19)$$

де $\vec{V}_0$ і M_0 - швидкість і маса тіла в початковий момент часу.

Якщо початкова швидкість тіла (ракети) дорівнює нулю, то тіло (ракета) рухається прямолінійно у напрямку, протилежному відносній швидкості і струменю газу на виході із сопла двигуна. В цьому випадку рівняння (2.19) набуває скалярної форми і його розв`язок має вигляд:

$$\frac{M_0}{M(t)} = e^{V/V_{відн}}. \qquad (2.20)$$

Одномірний рух тіла в пустоті за відсутності зовнішніх сил $\left(\vec{F} = 0\right)$ складає суть першої задачі К.Е. Ціолковського (1857-1935 рр.), а формула (2.20) називається *формулою Ціолковського* (1895р.). Якщо рух ракети відбувається у вертикальному напрямку в гравітаційному полі Землі (друга задача Ціолковського), то зовнішньою силою є сила тяжіння, напрям протилежно руховi ракети. Тоді рівняння руху (2.18) можна записати у скалярній формі:

$$M(t)\frac{dV}{dt} = -V_{відн}\frac{dM(t)}{dt} - M(t)g,$$

де g - прискорення вільного падіння.

Розв`язок цього рівняння при умові $V_{відн} = const$ і без урахування опору повітря і зміни g з висотою має вигляд

$$V = V_{відн}\ln\frac{M_0}{M(t)} - gt, \qquad (2.21)$$

Використовуючи (2.21), можна знайти висоту підйому ракети над Землею та умови, яким задовольняє маса, що викидається ракетою, для руху ракети у полі тяжіння Землі.

3 РОБОТА, ПОТУЖНІСТЬ, ЕНЕРГІЯ

3.1 Робота, потужність

Поняття роботи в механіці пов'язано з поняттям сили й переміщення. Якщо частинка під дією сили переміщується по деякій траєкторії, так, що переміщення дорівнює $d\vec{r}$, то елементарною роботою δA сили $\vec{F}$ (сила не змінюється) називається скалярний добуток:

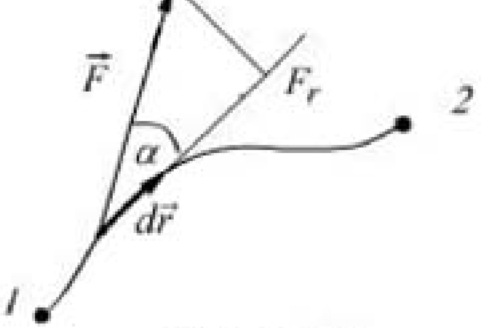


Рисунок 3.1

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\alpha = F_r dr,$$

де α- кут між векторами $d\vec{r}$ і $\vec{F}$, F_r - проекція вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$ (рис.3.1).

Величина δA – алгебраїчна; якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ δA – додатна величина; при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

елементарна робота від'ємна; коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\delta A=0$ (в цьому випадку $\vec{F} \perp d\vec{r}$).

Робота на ділянці траєкторії 1-2 дорівнює інтегралу:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha dr = \int_1^2 F_r dr \,. \qquad (3.1)$$

В координатній формі запису:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \,, \qquad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \,,$$

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \,. \qquad (3.2)$$

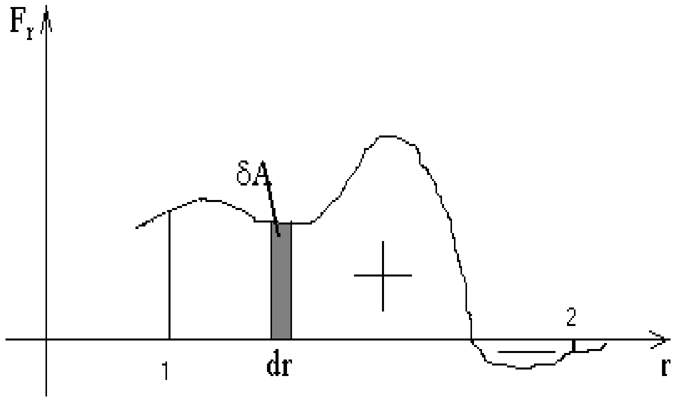


Рисунок 3.2

Поняттю роботи можна надати геометричний смисл. Якщо зобразити графік залежності F_r від положення частинки r на траєкторії 1-2 (рис.3.2), то елементарна робота δA дорівнює площі заштрихованої смужки. Зауважимо, що відрізки dr повинні бути настільки малими, щоб в межах цих відрізків силу можна було вважати сталою.

Робота A_{12} на ділянці траєкторії 1-2 дорівнює площі фігури, обмеженої кривою $F_r(r)$, ординатами 1 і 2 і віссю r. При цьому площа фігури над віссю r береться зі знаком плюс (додатна робота), а площа під віссю r - зі знаком мінус (від'ємна робота).

Одиницею роботи в системі СІ є джоуль. Робота в один джоуль – це робота, що виконується силою в один ньютон на переміщенні один метр.

1Дж=1Н∗1м.

Для характеристики швидкості, з якою виконується робота, застосовується потужність – величина роботи, виконаної за одиницю часу

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} \,.$$

Якщо потужність з часом змінюється, то інтенсивність виконання роботи характеризується миттєвою потужністю:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{V} \,.$$

Тобто миттєва потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості, з якою рухається частинка. Як і робота, потужність –

величина алгебраїчна. Знаючи потужність сили, можна знайти роботу, яку здійснює сила за проміжок часу t:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_0^t \vec{F}\vec{V} d\vec{t} = \int_0^t P dt.$$

Одиницею потужності в СІ є Ват (Вт). Потужність в один ват це така величина, коли за 1 секунду виконується робота в один джоуль:

1Вт=1Дж/1с.

Практично часто користуються такими одиницями як гектоват, кіловат, мегават. Зв'язок між наведеними одиницями такий: 1гВт=10^2Вт, 1кВт=10^3Вт, 1МВт=10^6Вт.

3.2 Кінетична енергія. Теорема про зміну кінетичної енергії

Рух – невід'ємна властивість матерії. У фізиці вводять скалярну фізичну величину, яка є кількісною характеристикою різних форм руху матерії і відповідних їм взаємодій. Ця величина – енергія, одна з фундаментальних характеристик різних систем. З різними формами руху матерії пов'язані різні види енергії – механічна, теплова, енергія магнітного поля, хімічна, ядерна та ін.

В механіці кількісною мірою механічного руху даної системи, а також механічної взаємодії тіл системи між собою і з зовнішніми тілами є механічна енергія, яка складається з кінетичної і потенціальної енергії.

Нехай частинка масою m рухається під дією деякої сили $\vec{F}$. Беручи до уваги, що

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad d\vec{r} = \vec{V}dt,$$

елементарна робота цієї сили на переміщенні $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = m\vec{V}d\vec{V}.$$

Скалярний добуток $\vec{V}d\vec{V} = V(d\vec{V})_V$, де $(d\vec{V})_V$ – проекція вектора $d\vec{V}$ на напрямок вектора $\vec{V}$. Ця проекція дорівнює dV – приросту модуля вектора швидкості, тому $\vec{V}d\vec{V} = VdV$ і елементарна робота:

$$\delta A = mVdV = d\left(\frac{mV^2}{2}\right).$$

Очевидно, що за рахунок роботи результуючої сили відбувається приріст деякої величини, яка має назву кінетичної енергії:

$$T = \frac{mV^2}{2}$$

Таким чином:

$$dT=\delta A, \tag{3.3}$$

а при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = m\int_1^2 VdV = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = T_1 - T_2\,, \qquad T_2 - T_1 = A_{12}\,. \tag{3.4}$$

Тобто приріст кінетичної енергії частинки на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт, виконаних всіма силами, які діють на цю частинку. Це і є формулюванням теореми про зміну кінетичної енергії.

Якщо $A_{12}>0$, тоді $T_2>T_1$, кінетична енергія збільшується; коли $A_{12}<0$, кінетична енергія зменшується.

Природно, що одиницею вимірювання енергії, як і роботи, є джоуль.

Рівняння (3.3) можна записати у вигляді:

$$\frac{\delta A}{dt} = \frac{dT}{dt} = \vec{F}\vec{V} = P\,. \tag{3.5}$$

Це означає, що швидкість зміни кінетичної енергії визначається потужністю результуючої сили $\vec{F}$, яка діє на частинку.

Оскільки кінетична енергія залежить від швидкості частинки, а швидкість визначається відносно певної системи відліку, то і кінетична енергія також залежить від вибору системи відліку.

Рівняння (3.4) і (3.5) прийнятні як в інерціальній, так і в неінерціальній системах відліку. В останніх, крім сил, що діють на частинку з боку інших тіл (сил взаємодії), необхідно враховувати і сили інерції. Тому робота (потужність) в цих формулах є алгебраїчною сумою робіт (потужностей) як сил взаємодії, так і сил інерції.

3.3 Силове потенціальне поле. Консервативні й неконсервативні сили

Якщо на частинку в кожній точці простору діє сила, яка змінюється у просторі за деяким законом, то це означає, що частинка перебуває в полі сили тяжіння Землі або в полі сил опору в потоці рідини (газу). В умовах, коли сила в кожній точці силового поля не залежить від часу, це поле називають стаціонарним. В цьому випадку сила залежить тільки від положення частинки. Очевидно, що силове поле, стаціонарне в одній системі відліку, в іншій може виявитись нестаціонарним.

Робота, яку виконують сили поля при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2, в загальному випадку залежить від шляху. Але серед стаціонарних силових полів є такі, в яких робота не залежить від шляху, а залежить лише від положення цих точок. Такі поля називають потенціальними, а сили – консервативними. До останніх належать дисипативні сили (сила тертя, сила опору, які з’являються, коли тіло рухається у рідині або газі), та гіроскопічні сили, які завжди залежать від швидкості і діють перпендикулярно швидкості (сила Лоренца, сила Коріоліса).

В потенціальному полі робота консервативних сил по замкнутому шляху можна поділити на дві довільні частини (рис.3.3) 1а2 і 2в1.

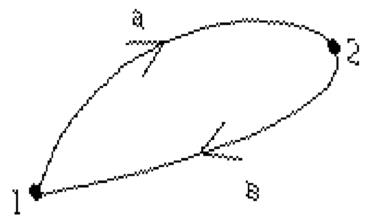


Рисунок 3.3

Зважаючи на те, що поле потенціальне, $A_{1а2}=A_{1в2}$. З іншого боку $-A_{1в2}=A_{2в1}$, звідки $A_{1а2}+A_{2в1}=A_{1а2}-A_{1в2}=0$. Якщо робота сил поля по замкнутому шляху дорівнює нулю, то робота , цих сил на шляху між довільними точками 1 і 2 не залежить від форми шляху – поле потенціальне.

Таким чином, для консервативних сил можна навести два визначення: як сил, робота яких не залежить від форми траєкторії частинки, а залежить лише від початкового і кінцевого положень; як сил, робота яких по замкнутому шляху дорівнює нулю.

3.4 Потенціальна енергія частинки

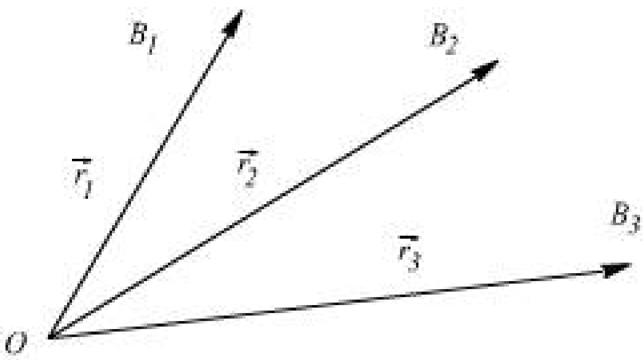


Рисунок 3.4

Нехай в стаціонарному полі консервативних сил частинка переміщується з різних точок B_i в точку O (рис.3.4). Зважаючи на те, що сили консервативні, робота не залежить від форми траєкторії, а також від положення точок B_i, тобто робота є деякою функцією радіус – вектора точки $\vec{r}_i$. Ця функція має назву потенціальної енергії частинки в даному полі:

$$A_{BO} = \int_B^0 \vec{F} d\vec{r} = U(r)\,. \qquad (3.6)$$

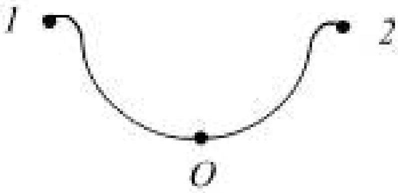


Рисунок 3.5

Знайдемо роботу по переміщенню частинки з т.1 в т.2. Нехай траєкторія пройде через точку *O* (рис.3.5). Тоді роботу на шляху *1O2* можна записати у вигляді: $A_{12}=A_{1O}+A_{O2}=A_{1O}-A_{2O}$. Враховуючи (3.6), маємо:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U\,. \qquad (3.7)$$

Робота консервативних сил при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2 дорівнює зміні потенціальної енергії зі знаком мінус.

Треба розрізняти поняття зміни або приросту потенціальної енергії, коли $\Delta U=U_2-U_1$, і поняття зменшення потенціальної енергії, коли $U_1-U_2=-\Delta U$.

Отже, потенціальна енергія – це енергія, пов'язана з розташуванням частинки, тобто з координатами і не залежить від її швидкості і траєкторії руху.

Значення потенціальної енергії залежить від вибору початкового положення системи. При заміні одного початку відліку на інший потенціальна енергія змінюється на сталу величину, тобто вона визначається не однозначно, а з точністю до довільної сталої. Однак треба зауважити, що звичайно нас цікавить не абсолютне значення потенціальної енергії, а тільки її різниця в різних станах і в цьому випадку наявність довільної сталої не має значення.

Знайдемо потенціальну енергію частинки, яка перебуває у полі центральних сил. Центральні сили залежать лише від відстані між взаємодіючими частинками і направлені вздовж прямої, яка з'єднує ці частинки. Прикладом таких сил є гравітаційна сила, створена гравітаційним полем, та кулонівська сила.

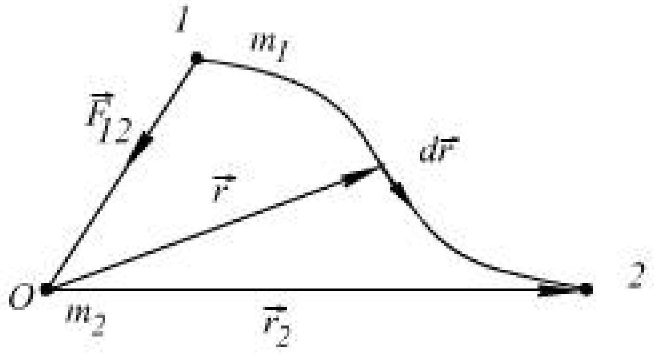


Рисунок 3.6

Нехай в точці О знаходиться нерухома частинка масою m_2 (рис.3.6).

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|r|}. \qquad (3.7)$$

Розрахуємо роботу гравітаційної сили при переміщенні частинки масою m_1 з точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = -Gm_1m_2\int_1^2 \frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{r} = -Gm_1m_2\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -G\left(\frac{m_1m_2}{r_1}\right) + G\left(\frac{m_1m_2}{r_2}\right).(3.7)$$

Тут враховано, що $\vec{r}d\vec{r} = rdr$. З (3.7) випливає, що потенціальна енергія частинки m_1 в гравітаційному полі, створеному частинкою m_2, дорівнює:

$$U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}.$$

Знайдемо потенціальну енергію частинки в полі пружних сил.

Пружна сила $\vec{F} = -k\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор частинки.

Робота переміщення частинки по довільному шляху з точки 1 в точку 2 дорівнює:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = -\int_1^2 k\vec{r}d\vec{r} = -\int_1^2 krdr = \left(\frac{kr_1}{2}\right) - \left(\frac{kr_2}{2}\right).$$

З урахуванням (3.7) потенціальна енергія частинки в полі пружних сил:

$$U(r)=\left(\frac{kr^2}{2}\right)$$

Якщо пружна сила діє тільки в напрямку осі X, тоді:

$$U(x)=\left(\frac{kx^2}{2}\right).$$

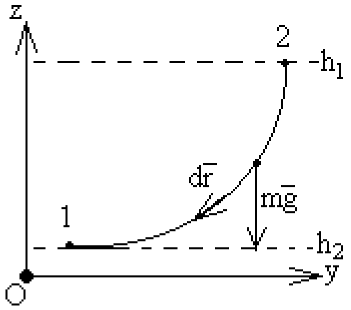


Рисунок 3.7

Потенціальну енергію частинки масою m в однорідному полі сил тяжіння поблизу поверхні Землі визначимо аналогічно попереднім двом прикладам.

Сила тяжіння $\vec{F}=m\vec{g}$ ($\vec{g}$ – прискорення вільного падіння) має однакову величину і напрямок у будь-якій точці між висотами h_1 і h_2 (рис 3.7).

Проекція сили тяжіння на вісь OZ, яка-напрямлена вгору, дорівнює F_z=-mg, тоді δA=- $mgdrcos\alpha$=-$mgdz$; ($drcos\alpha$=dz). Робота сили тяжіння на шляху від точки 1 до точки 2:

$$A_{12}=-\int_{h_1}^{h_2} mgdz=mg\left(h_1 - h_2\right).$$

Тоді потенціальна енергія частинки U=mgh, де h – висота підйому тіла над поверхнею Землі, енергія відраховується від поверхні Землі, де U=0.

3.5 Взаємозв'язок сили та потенціальної енергії

Нехай частинка здійснила переміщення $d\vec{r}$ під дією сили $\vec{F}$. Робота цієї сили дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$\delta A=\vec{F}d\vec{r}\ ; \qquad \delta A=-dU\ ; \qquad \vec{F}d\vec{r}=-dU.$$

Якщо записати роботу через проекції вектора сили і переміщення, то:

$$F_x dx+F_y dy+F_z dz=-dU.$$

Беремо до уваги, що координати точки x, y, z незалежні змінні. Якщо зафіксувати координати y, z. То одержимо $F_x=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, аналогічно $F_y=-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$, $F_z=-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$, тоді:

$$\vec{F}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (3.8)$$

Тобто, якщо відома потенціальна енергія $U(x,y,z)$,для визначення сили треба знайти частинні похідні потенціальної енергії від координат.

Вектор у дужках (3.8) називається градієнтом функції U і позначається *grad U*:

.
$$\vec{F} = -gradU .$$

Часто цю формулу записують у вигляді:

$$\vec{F} = -\nabla U ,$$

де $\nabla = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right)$ - оператор Гамільтона.

Отже, сила, яка діє на частинку в потенціальному полі, дорівнює взятому зі знаком мінус градієнту потенціальної енергії цієї частинки в даній точці поля.

Знак мінус вказує на те, що напрямки сили і градієнта потенціальної енергії протилежні. Вектор сили напрямлений у бік максимального зменшення потенціальної енергії.

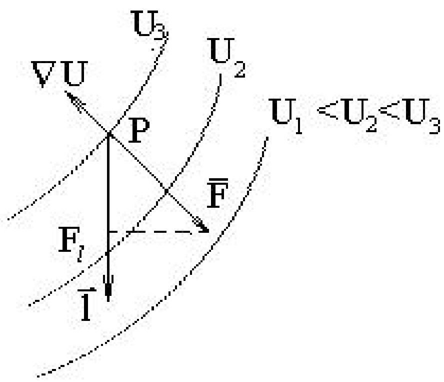


Рисунок 3.8

Смисл градієнта стане більш зрозумілим, якщо ввести поняття еквіпотенціальної поверхні-поверхні, у всіх точках якої потенціальна енергія має одне і теж значення. Кожному значенню потенціальної енергії відповідає своя еквіпотенціальна поверхня (рис.3.8).

Напрямок сили $\vec{F}$ збігається з напрямком максимальної зміни потенціальної енергії, він нормальний до еквіпотенціальних поверхонь. В довільному напрямку $\vec{l}$ проекція сили в точці P на цей напрям l дорівнюватиме:

$$F_l = -\frac{\partial U}{\partial l} .$$

3.6 Повна механічна енергія частинки і системи частинок. Закон збереження механічної енергії системи

Нехай на частинку діють тільки консервативні сили, тоді робота, здійснена над частинкою, з одного боку дорівнює зменшенню потенціальної енергії (3.7). З іншого, за теоремою про зміну кінетичної енергії, вона дорівнює зміні кінетичної енергії (3.4). Тоді :

$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1; \qquad T_1 + U_1 = T_2 + U_2. \tag{3.9}$$

Сума кінетичної і потенціальної енергій $T+U=E$, має назву повної механічної енергії частинки. З (3.9) випливає:

$$T+U=E=const; \qquad E_1=E_2,$$

тобто, одержуємо закон збереження енергії для частинки: енергія частинки, яка перебуває в полі консервативних сил, залишається сталою і є інтегралом руху.

Розглянемо тепер систему, яка складається з N не взаємодіючих між собою частинок, що перебувають у полі консервативних сил.

Кожна з них має кінетичну енергію $T_i=0{,}5m_iV_i^2$ і потенціальну $U_i=U_i(x_i,y_i,z_i)$.

Для кожної частинки виконується закон збереження енергії:

$$E_i=T_i+U_i=const.$$

Після сумування по всім частинкам одержимо:

$$E=\sum_{i=1}^{N}E_i=\sum_{i=1}^{N}T_i+\sum_{i=1}^{N}U_i=T+U=const\quad ,$$

де $T=\sum_{i=1}^{N}T_i$, $U=\sum_{i=1}^{N}U_i$ - сумарна кінетична і потенціальна енергія системи частинок, відповідно. Повна механічна енергія – адитивна величина, яка для замкнутої системи не взаємодіючих частинок, на які діють лише консервативні сили, залишається сталою величиною – це закон збереження енергії для даної системи.

Розглянемо загальний випадок, коли система складається з N взаємодіючих тіл, між якими діють консервативні і неконсервативні сили, також на систему діють зовнішні сили (консервативні і неконсервативні).

Якщо кожне тіло – матеріальна точка масою m_i (i=1,2,…,N), то для кожного тіла можна записати другий закон Ньютона:

$$m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}=\vec{F}_{i_{внут}}^{конс}+\vec{F}_{i_{внут}}^{неконс}+\vec{F}_{i_{зовн}}^{конс}+\vec{F}_{i_{зовн}}^{неконс}\quad .$$

Помножимо i-те рівняння на $d\vec{r}_i=\vec{V}_i dt$ і додамо всі N рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}\vec{V}_i dt=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,внут}^{конс}d\vec{r}+\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,внут}^{неконс}d\vec{r}+\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,зовн}^{конс}d\vec{r}+\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,зовн}^{неконс}d\vec{r}\ . \tag{3.10}$$

Ліва частина рівняння (3.10) дорівнює кінетичної енергії системи:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{V}_i d\vec{V}_i=d\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\vec{V}_i^{\,2}}{2}=dT\ .$$

Перший доданок правої частини дорівнює зменшенню потенціальної енергії взаємодії частинок між собою:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,внут}^{конс}d\vec{r}=dU_{вз}\ .$$

Другий доданок - це робота внутрішніх неконсервативних сил:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,зовн}^{неконс}d\vec{r}=A_{зовн}^{неконс}\ .$$

Згідно (3.7) третій доданок (3.10) – зменшення потенціальної енергії системи в зовнішньому полі консервативних сил:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i_{зовн}}^{неконс}\ d\vec{r}\ =-dU_{\ зовн}\ .$$

Нарешті, останній доданок дорівнює роботі неконсервативних зовнішніх сил:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i_{зовн}}^{неконс}\ d\vec{r}\ =dA_{зовн}^{неконс}\ .$$

Тепер рівняння (3.10) можна записати так :

$$d\left(T+U_{вз}+U_{зовн}\right)=dA_{зовн}^{неконс}+dA_{внут}^{неконс}\ .$$

Величина $E=T+U_{вз}+U_{зовн}$ називається повною механічною енергією системи. Якщо неконсервативні сили відсутні, повна енергія системи залишається сталою. Повна механічна енергія системи тіл, на які діють лише консервативні сили, залишається сталою – закон збереження механічної енергії.

Для замкнутої системи тіл, коли $F_{зовн.}=0$

$$E=T+V_{вз.}=const.$$

Закон збереження механічної енергії системи можна сформулювати так: повна механічна енергія замкнутої системи тіл, між якими діють тільки консервативні сили, залишається сталою.

Якщо в замкнутій системі, крім консервативних сил, діють і неконсервативні сили, то повна механічна енергія системи не зберігається. Її зміна дорівнює роботі не консервативних сил:

$$dE=d(T+V_{вз})=dA_{внутр}^{неконс}$$

$$E_2-E_1=A_{12}^{неконс}\ .$$

3.7 Умови рівноваги механічної системи

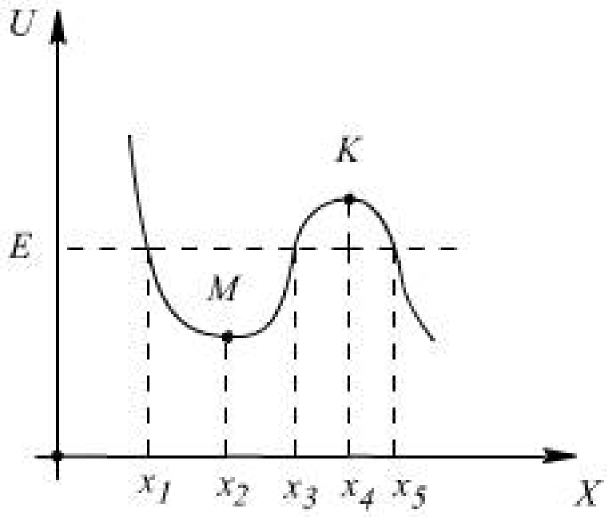


Рисунок 3.9

На основі закону збереження механічної енергії можна сформулювати загальні умови рівноваги тіла або системи тіл.

Повна механічна енергія дорівнює *E=T+U* і кінетична енергія не може бути від'ємною, одержимо $E \geq U$ (знак рівності буде при *T=0*). Якщо тіло рухається у потенціальному полі *U(x),* графік якого на рис.3.9, а повна енергія тіла *E*, то тіло може перебувати в областях з координатами $x_1 \leq x \leq x_3$ та $x \geq x_5$ Але не може потрапити в області $0 \leq x < x_1$, $x_3 < x < x_5$, які називаються потенціальними бар'єрами. Оскільки *U=U(x)*, то можна записати:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx}.$$

Відомо, що похідна від функції дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої. Тоді сила *F=0* в точках з координатами x_2 та x_4 (точках екстремумів). Якщо тіло знаходиться в точці М з координатою x_2, то його стан відповідає стійкій рівновазі. В цьому положенні значення потенціальної енергії мінімальне. Стан в точці К з координатою x_4 – стан нестійкої рівноваги.

4 МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Рух абсолютно твердого тіла

Тіла можуть змінювати свою форму та розміри, деформуватися. Назвемо тіло, розміри та форма якого не змінюються під час руху, абсолютно твердим тілом. В загальному випадку рух твердого тіла можна розкласти на поступальний рух з певною швидкістю та обертальний рух навколо деякої осі обертання.

При поступальному русі за однакові проміжки часу переміщення всіх точок тіла однакові. Тому швидкості та прискорення тіла однакові і достатньо визначити рух одної з точок для повного визначення поступального руху твердого тіла. Такою точкою може бути центр мас тіла. *Центром мас або центром інерції* називають точку, радіус-вектор якої для тіл з дискретним розподілом мас визначається рівнянням

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i},$$

де $m_i, \vec{r}_i$ - маси та радіус-вектори окремих точок системи, $\sum m_i = m$ - маса системи. Якщо маса розподілена рівномірно, то:

$$\vec{r}_c = \frac{\int \rho \cdot \vec{r} \cdot dV}{m},$$

де ρ - густина тіла, $\vec{r}$ - радіус-вектор об'єму dV.

Використовуючи означення центра мас, одержимо: імпульс тіла дорівнює добутку маси тіла на швидкість руху центра мас:

$$m\vec{V}_c = \sum m_i \cdot \vec{V}_i \,. \tag{4.1}$$

Застосуємо другий закон Ньютона до кожної матеріальної точки, та врахуємо рівняння (4.1), тоді

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_i \cdot \vec{V}_i\right) = \sum \vec{F}_i \,,$$

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i \,, \tag{4.2}$$

де $\vec{a}_c$ - прискорення центра мас, $\sum \vec{F}_i$ - векторна сума зовнішніх сил, що діють на систему. Рівняння (4.2) називають *рівнянням руху центра мас*. Центр мас рухається так, як рухалась би під дією всіх прикладених сил точка, маса якої дорівнює масі тіла.

При обертальному русі всі точки твердого тіла описують кола, центри яких лежать на одній прямій, що називається *віссю обертання*. Характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість та кутове прискорення, ці величини сталі для всіх точок тіла.

Рух твердого тіла в просторі задають шість величин : $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, що змінюються з часом (рис. 4.1). Три координати (x,y,z) визначають положення центра інерції С, а за відомими залежностями їх від часу визначають характеристики поступального руху тіла.

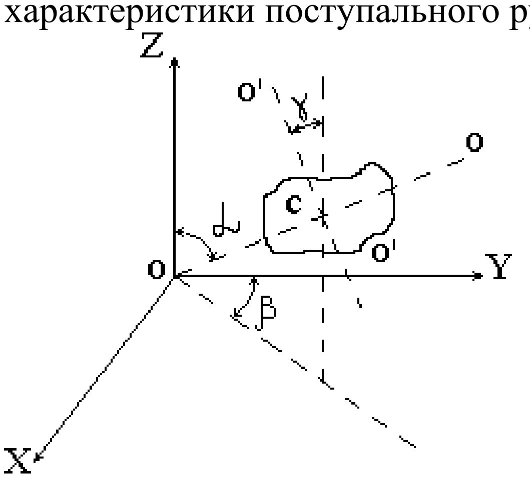


Рисунок 4.1

Кутові координати (α, β, γ) визначають розташування осей ОО і О'О' в просторі (рис.4.1). Кути α та β визначають положення осі ОО, що проходить через початок координат О та центр інерції С, а кут γ - розташування осі О'О', перпендикулярної до ОО.

Зміна кутів α, β, γ з часом визначає характеристики обертального руху тіла.

4.2 Момент імпульсу матеріальної точки та момент сили

В задачах динаміки криволінійного руху, крім понять імпульсу матеріальної точки та сили, вводять поняття моменту імпульсу та моменту сили. Розглянемо рух відносно деякої фіксованої точки. Така точка може збігатися з центром обертання або з центром сили у випадку поля центральних сил (наприклад, для точкового електричного заряду чи точкової гравітаційної маси).

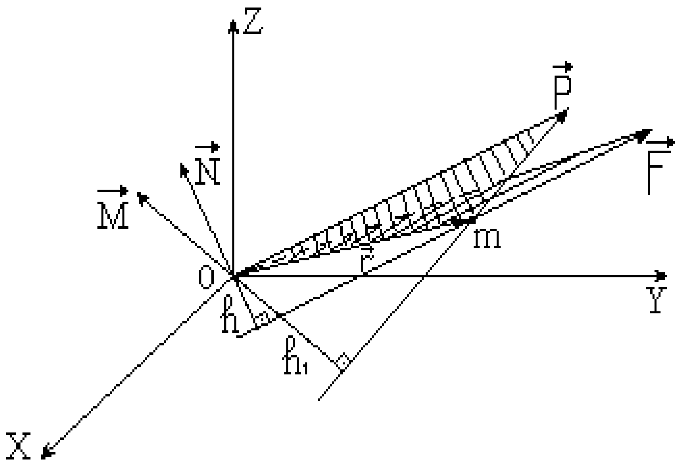


Рисунок 4.2

Якщо імпульс $\vec{p} = m\vec{V}$ точки під час руху змінюється, то на точку діє сила

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Помножимо ліву та праву частини цього виразу векторно на радіус-вектор $\vec{r}$ матеріальної точки відносно точки O (рис.4.2):

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, \vec{F}]. \qquad (4.3)$$

Назвемо величину $\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}]$ моментом сили відносно точки O. Вектор $\vec{N}$ - аксіальний вектор, його модуль дорівнює

$$|\vec{N}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right) = |\vec{F}|h,$$

де $h = |\vec{r}|\sin\left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right)$ - плече сили відносно точки O (рис. 4.2). Напрям вектора $\vec{N}$ перпендикулярний до площини, проведеної через вектори $\vec{r}, \vec{F}$. При спостереженні з кінця вектора $\vec{N}$ найкоротше обертання від $\vec{r}$ до $\vec{F}$ відбувається проти годинникової стрілки.

Величину $\vec{M}$, що дорівнює

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}],$$

назвемо *моментом імпульсу матеріальної точки* відносно точки O. Вектор $\vec{M}$ - аксіальний, модуль його дорівнює

$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{P}|\sin\left(\vec{r} \wedge \vec{P}\right) = mV \cdot h_1,$$

де $h_1 = |\vec{r}|\sin\left(\vec{r} \wedge \vec{p}\right)$ - плече імпульсу відносно точки O (рис. 4.2).

Рівняння (4.3) тоді запишемо у вигляді

$$\vec{N} = \frac{d\vec{M}}{dt}, \tag{4.4}$$

тобто похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до цієї точки. Рівняння (4.4) називають *рівнянням моментів*. Якщо $\vec{N} = 0$ відносно точки О, то момент імпульсу частинки відносно цієї точки не змінюється:

$$\vec{M} = \overrightarrow{const},$$

тобто момент імпульсу частинки величина стала - *закон збереження моменту імпульсу матеріальної точки*. Якщо проекція моменту сили на деякий напрям дорівнює нулю, то і проекція моменту імпульсу на цей напрям не змінюється з часом, а вектор моменту імпульсу може змінюватись.

Із рівняння (4.4) можна знайти залежність моменту імпульсу від часу, якщо відомі початкові умови - $\vec{M}(t = t_0) = \vec{M}_0$:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{N} dt.$$

4.3 Момент імпульсу та момент сили системи матеріальних точок

Розглянемо систему n матеріальних точок, які рухаються в просторі відносно деякої нерухомої точки О. Тоді положення і - ї точки в просторі визначає радіус-вектор $\vec{r}_i$, початок якого знаходиться в точці О. Позначимо $\vec{F}_{ik}$ - внутрішні сили взаємодії і - ї та k - ї точок, а $\vec{F}_i$ - рівнодійну зовнішніх сил, які діють на і-ту точку. За другим законом Ньютона рівняння руху точки масою m_i має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i,$$

де $\vec{V}_i = d\vec{r}_i / dt$ - швидкість і - ї точки, а індекс k набуває значення від 1 до n, окрім k=i.

Рівняння руху системи n матеріальних точок мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i-1}^{n} m_i\vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki}\right) + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i.$$

Домножимо векторно зліва кожний доданок на відповідний радіус-вектор, одержимо:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}\right]\right) + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right]. \tag{4.5}$$

Згідно з третім законом Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Позначимо $\vec{r}_i - \vec{r}_k = \vec{r}_{ik}$, тоді:

$$\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}\right] = \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_k\right), \vec{F}_{ik}\right] = \left[\vec{r}_{ik}, \vec{F}_{ik}\right].$$

Але вектори $\vec{r}_{ik}$ та $\vec{F}_{ik}$ - колінеарні, тому кожний з доданків подвійної суми в (4.5) дорівнює нулю, тобто векторна сума моментів внутрішніх сил системи матеріальних точок відносно точки О дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}\right]\right) = 0.$$

Тоді (4.5) запишемо так:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right]. \tag{4.6}$$

Назвемо векторну суму моментів імпульсу точок системи результуючим моментом системи відносно точки О:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right].$$

Векторну суму моментів всіх зовнішніх сил називають результуючим моментом зовнішніх сил відносно точки О:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Тоді рівняння (4.6) має вигляд:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{M}}{dt}, \tag{4.7}$$

тобто швидкість зміни результуючого моменту імпульсу $\vec{L}$ системи відносно нерухомої точки О дорівнює результуючому моменту зовнішніх сил $\vec{N}$ відносно цієї точки. Це *основний закон динаміки руху системи матеріальних точок відносно нерухомої точки*.

Якщо в (4.7) $\vec{N} = 0$, то $\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$,

тобто результуючий момент імпульсу системи - стала величина: $\vec{L} = \overline{Const}$. Проекція результуючого моменту імпульсу системи для певного напряму залишається сталою, якщо проекція результуючого моменту сил на цей напрям дорівнює нулю. Для замкнутої системи матеріальних точок результуючий момент зовнішніх сил відносно будь-якої нерухомої точки дорівнює нулю.

В інерціальних системах відліку результуючий момент імпульсу замкнутої системи матеріальних точок залишається незмінним - *закон збереження моменту імпульсу системи.* Момент імпульсу системи не змінюється внаслідок дії внутрішніх сил, які за третім законом Ньютона рівні за величиною та протилежні за напрямом. Дія внутрішніх сил викликає зміну моменту імпульсу окремих тіл, але повний момент імпульсу системи залишається незмінним.

4.4 Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

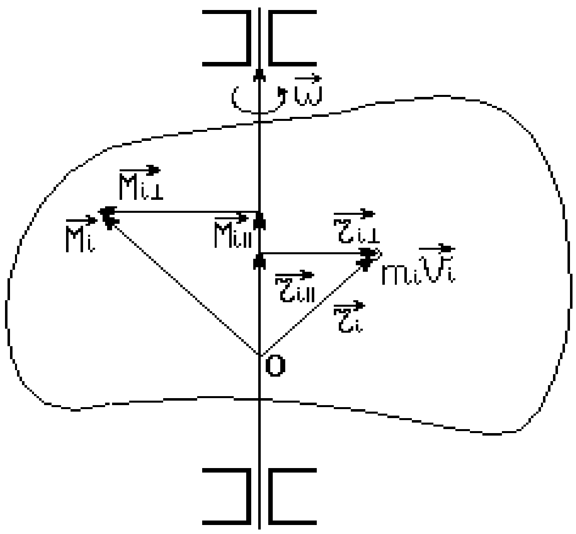


Рисунок 4.3

Розглянемо тверде тіло як систему матеріальних точок, взаємне розташування яких під час руху не змінюється. Нехай це тіло закріпили на нерухомій вертикальній осі, орієнтація якої в просторі зафіксована підшипниками (рис. 4.3). Виберемо на осі обертання довільну точку О та визначимо положення частинки масою m_i , радіус-вектором $\vec{r}_i$. Швидкість $\vec{V}_i$ частинок тіла перпендикулярна площині рисунка, а кутова швидкість - вздовж осі обертання (кутова швидкість для всіх точок однакова). Масу тіла m виразимо через маси окремих частинок:

$$m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i = \int_0^m dm .$$

Запишемо момент імпульсу тіла:

$$\vec{M} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \int_0^m \left[\vec{r}, \vec{V}\right] dm . \qquad (4.8)$$

Тоді результуючий момент зовнішніх сил дорівнює

$$\vec{N} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, m\vec{a}_i\right] = \int_0^m \left[\vec{r}, \vec{a}\right] dm , \qquad (4.9)$$

де $\vec{a}_i$ - прискорення і - ї точки.

Рівняння, яке пов’язує $\vec{M}$ та $\vec{N}$, аналогічне (4.7).

Момент імпульсу $\vec{M}_i$ окремої частинки відносно точки О дорівнює

$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right].$$

Розкладемо вектор $\vec{r}_i$ на дві складові:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i\|} + \vec{r}_{i\perp} ,$$

де $\vec{r}_{i\|}$ - складова, паралельна осі обертання, а $\vec{r}_{\perp}$ - перпендикулярна осі обертання. Тоді швидкість $\vec{V}_i$ частинки дорівнює

$$\vec{V}_i = [\vec{w}, \vec{r}_i] = [\vec{w}, (\vec{r}_{i\parallel} + \vec{r}_{i\perp})] = [\vec{w}, \vec{r}_{i\parallel}] + [\vec{w}, \vec{r}_{i\perp}] .$$

Вектори $\vec{w}$ та $\vec{r}_{i\parallel}$ - паралельні, тому $[\vec{w}, \vec{r}_{i\parallel}] = 0$, тоді

$$\vec{V}_i = [\vec{w}, \vec{r}_{i\perp}].$$

Враховуючи, що подвійний векторний добуток векторів дорівнює $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$, запишемо:

$$\begin{aligned}\vec{M}_i &= [m_i \vec{r}_i, \vec{V}_i] = m_i [(\vec{r}_{i\parallel} + \vec{r}_{i\perp}), [\vec{w}, \vec{r}_{i\perp}]] = \\ &= m_i [\vec{r}_{i\parallel} [\vec{w}, \vec{r}_{i\perp}]] + m_i [\vec{r}_{i\perp} [\vec{w}, \vec{r}_{i\perp}]] = \\ &= m_i [\vec{w}(\vec{r}_{i\parallel}, \vec{r}_{i\perp}) - \vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_{i\parallel}, \vec{w})] + \\ &+ m_i [\vec{r}_{i\perp}^{\,2} \vec{w}, -\vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_{i\perp}, \vec{w})].\end{aligned}$$

Але $(\vec{r}_{i\parallel}, \vec{r}_{i\perp}) = 0$, $(\vec{r}_{i\perp}, \vec{w}) = 0$, тоді

$$\begin{aligned}\vec{M}_i &= m_i [-\vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_{i\parallel}, \vec{w}) + r_{i\perp}^2 \vec{w}] = \\ &= m_i [-r_{i\parallel} w \vec{r}_{i\perp} + r_{i\perp}^2 \vec{w}] = \vec{M}_{i\perp} + \vec{M}_{i\parallel}\end{aligned}$$

Перший доданок $\vec{M}_{i\perp}$- складова вектора $\vec{M}_i$, перпендикулярна осі обертання, $\vec{M}_{i\parallel}$ - паралельна осі.

Якщо тіло симетричне відносно осі обертання, то $\vec{M}_{i\perp}$ компенсується за рахунок аналогічної складової, симетричної відносно осі точки. Для випадку несиметричних тіл складова $\vec{M}_{i\perp}$ є причиною виникнення сил бокового тиску на підшипники з боку осі обертання. Реакція підшипників компенсує перпендикулярну до осі складову загального моменту імпульсу тіла.

Для несиметричного тіла вектор $\vec{M}_i$ описує конус навколо осі обертання, а для симетричного тіла напрямлений вздовж осі обертання. Для симетричних тіл за відсутності сили тяжіння можна було б зняти підшипники, а вісь обертання зберігала б своє положення в просторі.

Для тіла, яке закріплено на нерухомій осі обертання, момент імпульсу дорівнює

$$\vec{M} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i\perp}^2 \vec{w} = \vec{w} \int_0^m r_\perp^2 \, dm .$$

Величину

$$I = \int_0^m r_\perp^2 \, dm \tag{4.10}$$

назвемо *моментом інерції тіла* відносно осі обертання. Тоді момент імпульсу тіла дорівнює

$$\vec{M} = I\vec{w}, \tag{4.11}$$

а вектори $\vec{M}$ та $\vec{w}$ - колінеарні.

Відзначимо, що для однієї матеріальної точки момент інерції дорівнює

$$I_i = m_i r_{i\perp}^2.$$

Тоді основне рівняння динаміки (4.7) має вигляд:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{w}\right) = I\frac{d\vec{w}}{dt} = I\vec{\varepsilon},$$

де $\vec{N}$ - результуючий момент всіх зовнішніх сил відносно точки на осі обертання, $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{w}}{dt}$ - кутове прискорення тіла. Якщо момент зовнішніх сил $\vec{N}$ дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла є сталою величиною. В цьому полягає закон збереження моменту імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу, як і закони збереження імпульсу та енергії є одним з фундаментальних законів фізики.

Кінетична енергія тіла, яке обертається відносно нерухомої осі, дорівнює

$$E_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i V_i^2 = \frac{w^2}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m_i r_{i\perp}^2 = \frac{Iw^2}{2}.$$

Робота зовнішніх сил при повороті тіла на кут $d\varphi$ навколо нерухомої осі дорівнює

$$\delta A = N_z d\varphi,$$

де N_z - момент сил відносно осі. Якщо N_z та $d\varphi$ мають однакові знаки - $\delta A > 0$, в протилежному випадку $\delta A < 0$.

4.5 Момент інерції тіла, закріпленого на нерухомій осі

Момент інерції одного тіла може бути різним відносно різних осей. Для визначення моменту інерції тіла користуються адитивністю моменту інерції: момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює сумі моментів інерції окремих частин тіла відносно цієї осі.

Знайдемо момент інерції циліндра, вісь обертання якого проходить перпендикулярно твірній циліндра, через основу циліндра (рис. 4.4). Густина циліндра ρ.

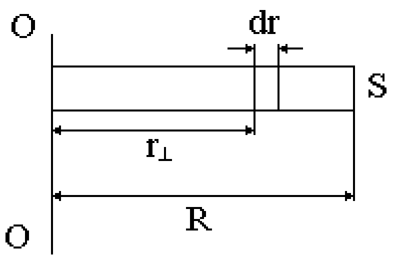


Рисунок 4.4

$$I = \int_0^m r_\perp^2\, dm = \int \rho\, r_\perp^2\, dV = \rho\, S \int_0^R r_\perp^2 dr = \rho\, S\, \frac{R^3}{3} = \frac{mR^2}{3}$$

В деяких випадках для знаходження моменту інерції тіла можна скористатися *теоремою Штейгера*: момент інерції I відносно довільної осі O'O' дорівнює сумі моменту інерції I_0 відносно осі OO, що проходить через центр мас паралельно даній, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями (рис. 4.5):

$$I = I_0 + ma^2 .$$

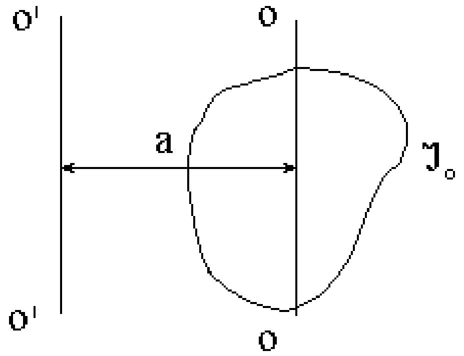


Рисунок 4.5

4.6 Вільне обертання твердого тіла

Якщо положення в просторі осі обертання залишається незмінним за відсутності зовнішніх сил, то така вісь називається *вільною віссю обертання*. Для тіл довільної форми є три взаємно перпендикулярних осі, які є вільними осями та проходять через центр інерції тіла. Їх називають ще головними осями інерції тіла. Наприклад, для однорідного паралелепіпеда вільні осі проходять через центр мас та центри протилежних граней, у однорідної кулі це будь-які три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр інерції.

Дослідження стійкості руху доводять, що за відсутності зовнішніх сил найбільш стійким є рух навколо вільних осей, для яких момент інерції максимальний та мінімальний.

При наявності зовнішніх сил стійкими є обертання навколо вільної осі, відносно якої момент інерції найбільший.

В загальному випадку обертального руху положення осі обертання не залишається незмінним ні для нерухомої системи відліку, ні для тіла, яке обертається. Можна говорити лише про миттєву вісь обертання, напрям якої змінюється з часом.

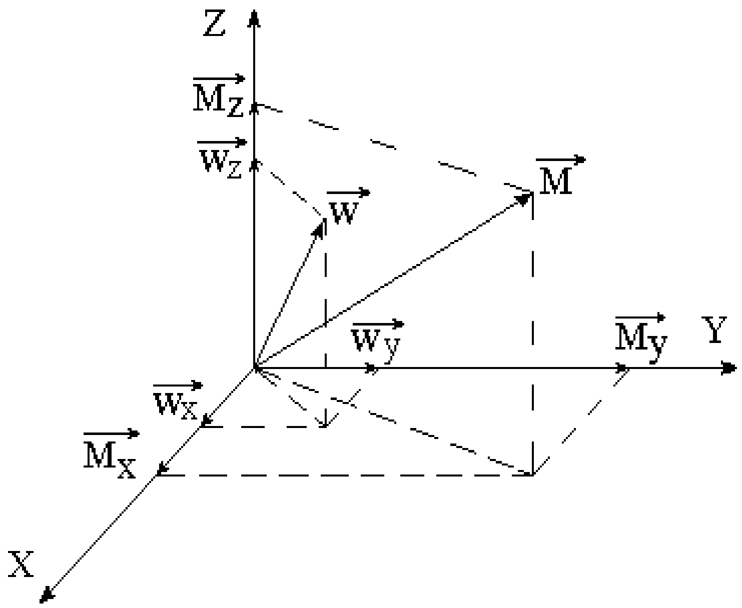


Рисунок 4.6

Точний розв'язок загальної задачі про довільне обертання твердого тіла можна одержати лише для деяких випадків, часто використовують наближені методи.

Якщо вісь обертання тіла не зберігає своєї орієнтації в просторі, вектор моменту імпульсу тіла $\vec{M}$ не паралельний вектору кутової швидкості $\vec{w}$ (рис. 4.6). Як зазначалося вище, для вільного тіла момент імпульсу тіла $\vec{M}$ паралельний $\vec{w}$, якщо вісь обертання збігається із вільною віссю.

В загальному випадку

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{w} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \vec{w}.$$

Величина $\hat{I}$ в цьому виразі – тензор інерції, тензор другого рангу. I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} - вісьові компоненти тензора, останні – відцентрові моменти інерції. Якщо осі координат мають напрям головних осей інерції, то тензор інерції – діагональний:

$$\vec{M} = \hat{I}\vec{w} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \vec{w} = I_{xx}\vec{w}_x + I_{yy}\vec{w}_y + I_{zz}\vec{w}_z,$$

де $I_{xx} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm$; $I_{yy} = \int \left(x^2 + z^2\right) dm$; $I_{zz} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$, інтегрування проводять за масою тіла.

Якщо вектор кутової швидкості $\vec{w}$ має напрям одної з головних осей інерції, то проекція $\vec{w}$ на інші осі дорівнює нулю, тоді

$$\vec{M} = \vec{M}_z = I_{zz}\vec{w} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm.$$

Тіло, для якого $I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz}$, називають асиметричною джигою; якщо $I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz}$, то це симетрична дзига, а для сферичної дзиги $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$.

Якщо тензор інерції тіла діагональний, то кінетична енергія тіла дорівнює:

$$E_k = \frac{1}{2}\left(I_{xx} w_x^2 + I_{yy} w_y^2 + I_{zz} w_z^2\right).$$

Для сферичної дзиги формула кінетичної енергії має вигляд:

$$E_k = \frac{1}{2}\left(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2\right) = \frac{Iw^2}{2}.$$

4.7 Плоский рух твердого тіла

Під час плоского руху всі точки твердого тіла рухаються в площинах, паралельних деякій площині, яка нерухома для даної системи відліку, а вектор кутової швидкості $\vec{w}$ перпендикулярний цій площині. Прикладом плоского руху є циліндр, що скочується з похилої площини без проковзування (рис. 4.7). Пов'яжемо з циліндром рухому систему координат K', а з похилою площиною – нерухому систему К. Вісь Z' системи K' проходить через центр інерції циліндра і під час руху залишається паралельною осі Z системи К. Система K' відносно системи К рухається поступально, значить центр інерції циліндра також рухається поступально в системі К. Відносно K' рух циліндра – обертальний відносно осі Z' з кутовою швидкістю $\vec{w}$, яка перпендикулярна до нерухомої площини XOY. Тобто, плоский рух твердого тіла можна розкласти на поступальний рух центра інерції та обертальний рух навколо осі Z'. Тоді рівняння, які визначають плоский рух, такі:

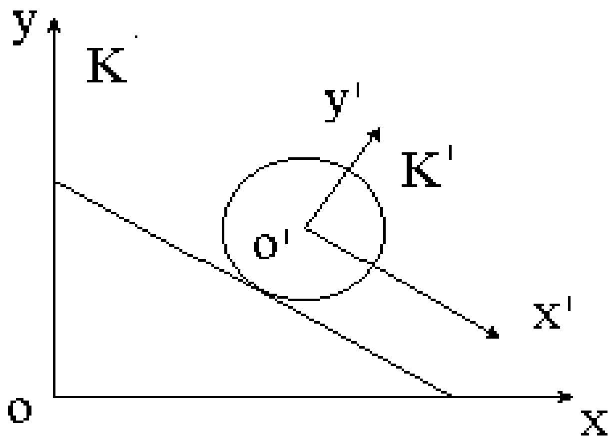


Рисунок 4.7

$$m\frac{dV_0}{dt} = \sum \vec{F}_i ,$$

$$I_0 \varepsilon_{z'} = \sum_{i=1}^{n} N_i ,$$

де m - маса тіла, $\vec{V}_0$ - швидкість центра інерції, $\sum \vec{F}_i$ - сума зовнішніх сил, прикладених до тіла, $I_0, \varepsilon_{z'}, \sum N_{iz'}$ - момент інерції, кутове прискорення та сумарний момент сил відносно осі Z', що проходить через центр інерції.

Кінетична енергія тіла для випадку плоского руху дорівнює

$$E_k = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{I_0 w^2}{2}.$$

4.8 Гіроскоп

Гіроскопом називають масивне симетричне тіло, яке обертається з великою кутовою швидкістю $\vec{w}$ навколо вільної осі. Прикладом такого тіла є симетрична дзига. Під дією сил тяжіння таке тіло здійснює прецесію, тобто його вільна вісь рухається, описуючи конус навколо вертикалі, з кутовою швидкістю $\vec{w}_n$. Із збільшенням кутової швидкості $\vec{w}$ швидкість прецесії $\vec{w}_n$ зменшується. У гіроскопа точка опори знаходиться нижче центра інерції (рис. 4.8), момент сили тяжіння $\vec{N}$ має такий напрям, щоб напрямки прецесії та обертання гіроскопа збігались. Момент імпульсу $\vec{M}_0$ відносно точки опори O дорівнює

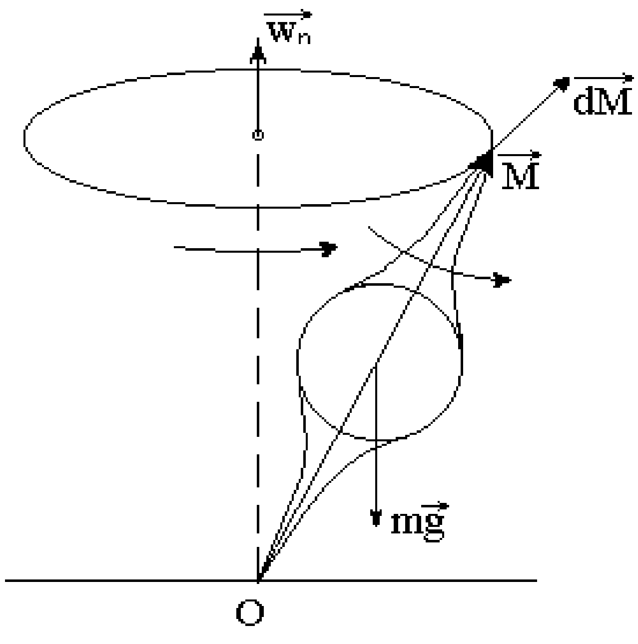


Рисунок 4.8

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_n + \vec{M},$$

де $\vec{M}_n$ - момент імпульсу, пов'язаний з прецесією гіроскопа відносно вертикальної осі, $\vec{M}$ - момент імпульсу відносно вільної гіроскопа. Внаслідок того, що $w >> w_n$, можна вважати, що $M_n << M$, тоді

$$\vec{M}_0 = \vec{M} = I\vec{w},$$

де I - момент інерції гіроскопа відносно його вільної осі. Внаслідок дії моменту сили тяжіння $\vec{N}$, момент імпульсу гіроскопа змінюється:

$$d\vec{M} = \vec{N}dt.$$

Вектори $d\vec{M}$ і $\vec{N}$ мають однаковий напрям, а вектор $d\vec{M}$ перпендикулярний $\vec{M}$ (рис 4.8). Тоді вектор $\vec{M}$ здійснює прецесію навколо вертикальної осі.

Гіроскопи використовуються в гірокомпасах, автопілотах, системах наведення ракет та інших приладах.

5 ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

5.1 Скінченність швидкості розповсюдження взаємодій

Взаємодію матеріальних частинок в класичній механіці описують за допомогою потенціальної енергії взаємодії, яка є функцією лише координат частинок, що взаємодіють. Такий спосіб опису взаємодії містить в собі припущення про миттєвість розповсюдження взаємодій. Дійсно, сили, які діють на кожну частинку з боку інших, в кожний момент залежать тільки від їх положення в цей момент часу. Зміна положення однієї із взаємодіючих частинок впливає на рух інших в той же момент часу. Досліди, однак, свідчать, що миттєвих взаємодій в природі не існує. А тому механіка, яка виходить з положення про миттєвість розповсюдження взаємодій, містить в собі деяку неточність. В дійсності, якщо з одним із взаємодіючих тіл відбувається якась зміна, то на інше тіло це вплине лише через деякий проміжок часу. Якщо поділити відстань між тілами на цей проміжок часу, ми знайдемо швидкість розповсюдження взаємодій.

Зазначимо, що цю швидкість можна називати максимальною швидкістю розповсюдження взаємодій. Вона визначає той проміжок часу, після якого зміни, які відбуваються з одним тілом, починають проявлятися на другому. Очевидно, що існування максимальної швидкості розповсюдження взаємодій означає водночас, що в природі взагалі неможливий рух тіл з швидкістю більшою за цю. А якщо все ж припустити, що такий рух можливий, то через його посередництво можна було б здійснити взаємодію з швидкістю, більшою за найбільшу можливу швидкість розповсюдження взаємодії.

5.2 Перетворення Лоренца

Дослідження електромагнітних та оптичних явищ узагальнено класичною електродинамікою, в основі якої є рівняння Максвелла. Однак рівняння Максвелла, як виявилося, неінваріантні відносно перетворень Галілея. Постало питання, чи немає в них помилок? Спроби змінити рівняння таким чином, щоб вони задовольняли принципу відносності Галілея, призвели до появи в рівняннях електродинаміки нових членів, які передбачали нові електромагнітні явища, але досліди їх не підтвердили. Поступово ставало ясно, що рівняння Максвелла абсолютно правильні і причина в іншому.

Відомий нідерландський фізик Х.А.Лоренц (1853-1928рр.) в 1904р. довів, що коли зробити в рівняннях Максвелла підстановку

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{5.1}$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \qquad y = y'; \qquad z = z'; \quad t = \frac{t' - \frac{x'u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{5.2}$$

де x, y, z, t – координати та час в нерухомій системі відліку K, а x',y',z',t' – в рухомій системі K', u – швидкість руху системи K, c – швидкість світла у вакуумі, то форма рівнянь в інерціальних системах відліку не змінювалась!

Системи K та K' розташовані так, як на рис.2.1.

Рівняння (5.1)-(5.2) називають перетвореннями Лоренца. Але перетворення Лоренца не залишають незмінними рівняння механіки. Якщо вважати правильними рівняння Максвелла, то тоді треба змінити рівняння механіки таким чином, щоб залишались інваріантними відносно перетворень Лоренца. Як виявилося, для цього досить, щоб маса в рівняннях Ньютона мала вигляд

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{5.3}$$

де m_0 – маса спокою, тобто маса нерухомого тіла.

Але в такому разі треба погодитися з тим, що маса тіла залежить від швидкості його руху, а ще більш незрозуміло, що час в різних інерціальних системах йде по-різному, що випливає з відповідних рівнянь (5.1) і (5.2)! Щоб розібратися в цьому, треба проаналізувати наші уявлення про простір та час, що й зробив свого часу Ейнштейн. Але перш ніж це зробити, розглянемо результати досліду Майкельсона - Морлі, який мав дуже велике значення для формування Ейнштейном нового принципу відносності.

Цей дослід проведено у 1881 р. американськими вченими з метою вивчення впливу руху Землі на швидкість розповсюдження світла. Існувала гіпотеза про те, що Земля рухається в просторі, заповненому деяким гіпотетичним середовищем – ефіром.

Вимірювання проводились за допомогою інтерферометра, сконструйованого Майкельсоном, схема якого зображена на рис. 2.1. Світло від джерела S розділяється напівпрозорим дзеркалом H так, що одна половина пучка продовжує розповсюджуватися в тому ж напрямі, а друга – перпендикулярно до нього. Пучки відбиваються дзеркалами M_1 та M_2. Обидва промені попадають на екран E, на якому утворюється інтерференційна картина. Якщо час проходження світлом відстані до дзеркала M_1 та назад до пластини H такий же, як у перпендикулярному напрямі (до M_2 та назад до H), то різниця фаз двох пучків не змінюється і при накладанні виникає певна інтерференційна

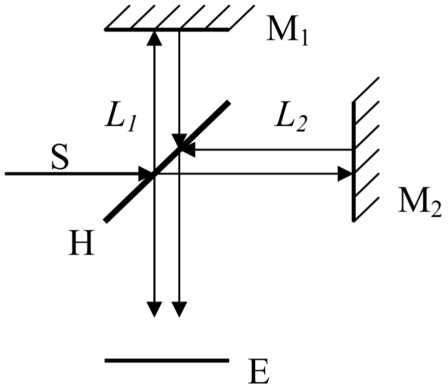


Рисунок 5.1

картина. Якщо проміжки часу відрізняються – інтерференційна картина зміниться. Якщо прилад відносно ефіру не рухається, то ці проміжки часу однакові ($L_1=L_2$), якщо рухається направо зі швидкістю u, то з'явиться різниця в часі.

Час розповсюдження світла до M_2 та назад дорівнює

$$t_2 = \frac{L_2}{c-u} + \frac{L_2}{c+u} = \frac{2L}{c(1-\frac{u^2}{c^2})},$$

де перший доданок характеризує час проходження світлом відстані L_2 зліва направо, а другий – в зворотному напрямі.

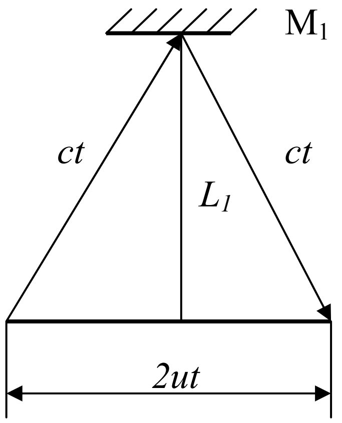


Рисунок 5.2

Для подолання світлом шляху від дзеркала H до дзеркала M_1 та назад необхідно затратити деякий час t_1, який можна визначити, використовуючи рис. 5.2:

$$c^2t^2 = L_1^2 + u^2t^2; \qquad t_1 = 2t = \frac{2L_1}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Якщо плечі інтерферометра однакові ($L_1=L_2=L$), то різниця в часі складає величину Δt:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c}\frac{u^2}{c^2}. \qquad (5.4)$$

Це досить мала величина, але інтерферометр мав достатню точність, щоб її зафіксувати. Однак в дослідах Мейкельсона - Морлі ніякого зміщення інтерференційних смуг при обертанні не виявлено.

Вичерпне поняття результатів досліду Мейкельсона - Морлі дав А. Ейнштейн в 1905 р. Ейнштейн дійшов висновку, що ефіру, тобто особливого середовища, яке могло бути абсолютною системою відліку, не існує. Швидкість світла не залежить від того, рухаються чи знаходяться у спокої джерело або приймач світла.

Свої висновки Ейнштейн сформулював у вигляді двох постулатів спеціальної теорії відносності:

а) всі закони природи однакові в усіх інерціальних системах відліку;

б) швидкість світла у вакуумі однакова в усіх інерціальних системах відліку, не залежить від руху джерела або приймача.

5.3 Відносність поняття одночасності

Проаналізуємо деякі наслідки, що випливають із перетворень Лоренца.

В подальшому користуватимемося поняттям події: подія визначається місцем де вона сталася, та моментом часу, коли вона сталася. Прикладом події може бути відправлення електромагнітного сигналу.

Припустимо, що в системі *K* одночасно в момент часу $t_1 = t_2 = t$ в точках з координатами x_1, x_2 відбуваються дві події. Цим подіям в системі *K′* відповідають координати (5.1):

$$x_1' = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{5.5}$$

та моменти часу

$$t_1' = \frac{t - \frac{ux_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t - \frac{ux_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{5.6}$$

З (5.5) та (5.6) випливає, що у випадку, коли події в системі *K* відбуваються в одній точці ($x_1 = x_2$), то вони збігаються у просторі ($x'_1 = x'_2$) та в часі ($t'_1 = t'_2$) також і в системі *K′*. Якщо ж події в системі *K* відбуваються в різних точках ($x_1 \neq x_2$), то в системі *K′* вони також відокремлені ($x'_1 \neq x'_2$), але не будуть одночасними ($t'_1 \neq t'_2$). Знак різниці $t'_2 - t'_1$ визначається знаком виразу $u(x_1 - x_2)$, тобто в одних системах відліку подія 1 випереджає подію 2, в інших системах навпаки. Зазначимо, що це відноситься до подій, між якими відсутній причинний зв'язок. Причинно пов'язані події (наприклад, постріл та влучення кулі в мішень) в жодній системі не можуть бути одночасними, причина випереджає наслідки.

5.4 Відносність довжин та проміжків часу

Розглянемо стержень, розташований вздовж осі x, нерухомий відносно системи *K′*. Довжина його в цій системі дорівнює $l_0 = x'_2 - x'_1$, де x'_1, x'_2 – координати кінців стержня. Відносно системи *K* стержень рухається зі швидкістю u. Для визначення довжини стержня в системі *K* необхідно визначити координати його кінців x'_1 та x'_2 в один і той же момент часу $t_1 = t_2 = t$. Їх різниця $l = x_2 - x_1$, це довжина стержня в системі *K*. Згідно з (5.1):

$$x_1' = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Звідки

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{5.7}$$

Тобто, довжина стержня l виміряна в системі, відносно якої він рухається, виявляється меншою довжини l_0, яка виміряна в системі, відносно якої стержень знаходиться в стані спокою.

Таким чином, у тіл, які рухаються, їх розміри в напрямку руху скорочуються. Це явище має назву Лоренцового скорочення довжини.

Припустимо тепер, що в точці, нерухомій відносно системи K', відбувається подія тривалістю $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$. Початку події відповідає в цій системі координата x'_1 та момент часу t'_1,кінцю події координата x'_1 та момент часу t'_2. Точка, в якій відбувається подія, переміщується відносно системи K. Згідно з (5.2) початку та кінцю події в системі K відповідають моменти

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{u}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t_2 + \frac{u}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \qquad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{5.8}$$

В (5.8) Δt_0 – тривалість події, що виміряна за допомогою годинника системи, що рухається з тією ж швидкістю, що й тіло. Проміжок часу Δt вимірюється за допомогою годинника системи, відносно якої тіло рухається. Як випливає з співвідношення (5.8), проміжок часу $\Delta t_0 < \Delta t$. Тому можна сказати, що годинник, який рухається, йде повільніше, ніж нерухомий.

Час Δt_0, виміряний за допомогою годинника, який рухається разом з тілом, називається власним часом цього тіла.

Релятивістський ефект уповільнення часу має експериментальне підтвердження. В 1971 р. атомний годинник, який здійснює коливання з частотою 10^{10} $с^{-1}$, протягом місяця знаходився в польоті на реактивних літаках, другий такий же годинник знаходився на Землі. Годинник, що знаходився в польоті, відстав на 203 нс. Відповідний розрахунок дав 184 нс.

5.5 Інтервал

Подію визначають точка простору, в якій вона відбулася з координатами x,y,z та час t, коли вона відбулася. Таким чином, подію характеризують чотири числа: x,y,z,t. Введемо уявний чотиривимірний простір, на координатних осях якого відкладаємо просторові координати та час. В цьому просторі подію зображає точка, яку називають світовою. Руху чи спокою довільної частинки відповідає в чотиривимірному просторі лінія, яку називають світовою.

Припустимо, що одна подія має координати x_1, y_1, z_1, t_1, друга – координати x_2, y_2, z_2 t_2. Величину

$$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \tag{5.9}$$

називають *інтервалом* між відповідними подіями.

Введемо позначення:

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}, \qquad t_{12} = t_2 - t_1,$$

тоді

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - c_{12}^2}. \tag{5.10}$$

Легко впевнитись (скориставшись перетвореннями Лоренца), що інтервал між двома такими самими подіями однаковий в усіх інерціальних системах відліку.

Припустимо, що перша подія в тому, що з точки з координатами x_1, y_1, z_1 в момент t_1 відправлено світловий сигнал, а друга подія – прийом цього сигналу в точці x_2, y_2, z_2 в момент t_2. Сигнал розповсюджується з швидкістю c, таким чином, відстань між точками $l_{12}=ct_{12}$. Звідси випливає, що інтервал S_{12} між подіями дорівнює нулю (див. 5.10). Якщо відстань між точками l_{12} перевищує ct_{12} ($l_{12}>ct_{12}$), то ці події ніяк не можуть вплинути одна на одну (не існує взаємодій, що розповсюджуються з швидкістю, більшою за c). Такі дві події не можуть бути причинно зв'язаними. Із (5.10) випливає, що інтервал S_{12} в цьому випадку уявне число. Уявні інтервали називають просторовоподібними.

Дійсні інтервали $(S_{12}^2 > 0)$ називаються часоподібними. Для них виконується умова $l_{12}<ct_{12}$. Таким чином, події, які розділені часоподібними інтервалами, можуть бути критично пов'язаними одна з одною.

5.6 Релятивістський закон перетворення швидкості

Із перетворень Лоренца (5.1) і (5.2) випливає закон перетворення швидкості. Згідно з означенням $v_x = \dfrac{dx}{dt}$. Із формул (5.2) випливає, що

$$dx = \frac{dx' + u\,dt'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}; \qquad dt = \frac{dt' + \dfrac{u}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

Таким чином,

$$v_z = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{uv'_x}{c^2}}. \tag{5.11}$$

Отриманий вираз (5.11) – релятивістський закон перетворення швидкості v_x, яким користуються при переході від системи K до системи K'.

Щоб отримати закон перетворення для зворотного переходу, від системи *K′* до системи *K*, можна просто визначити v_x' з виразу (5.11), або ж обчислити $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$, користуючись перетвореннями Лоренца (5.1). Тоді отримаємо:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}.$$

5.7 Релятивістське рівняння динаміки

Як вже зазначалося, для того, щоб рівняння динаміки було інваріантним відносно перетворень Лоренца, необхідно, щоб маса *m* матеріальної точки, яка рухається із швидкістю *u*, дорівнювала

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса нерухомої точки.
Тоді релятивістський імпульс дорівнює:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (5.12)$$

Основне рівняння релятивістської динаміки має вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right). \qquad (5.13)$$

Аналізуючи залежність імпульсу від швидкості руху тіла (5.12), одержимо, що при малих значеннях швидкості імпульс зростає за рахунок чисельника, бо величина $\frac{u^2}{c^2}$ мала і знаменник приблизно дорівнює одиниці. При великих значеннях швидкості, коли $u \to c$, чисельник зростає дуже повільно і імпульс різко зростає за рахунок знаменника, що наближається до нуля. Таким чином, при $u \to c$ для того, щоб хоч трохи змінити імпульс, потрібно затратити дуже велику кількість енергії, а тому практично неможливо розігнати тіло скінченої маси спокою m_0 до швидкості світла.

Слід зазначити, що формули (5.12) та (5.13) переходять у відповідні вирази класичної механіки, коли $u \ll c$.

5.8 Повна та кінетична енергія частинки

Домножимо рівняння (5.13) на переміщення частинки $d\vec{s} = \vec{u}dt$. В результаті отримаємо

$$\vec{F}d\vec{s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\overline{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\vec{u}\,dt \; .$$

Ліва частина цього рівняння дорівнює роботі *dA*, яка виконується над частинкою за час *dt*. Із закону збереження енергії випливає, що ця робота дорівнює збільшенню її енергії *dE*:

$$dE = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\overline{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\vec{u}dt = \vec{u}d\left(\frac{m_0\overline{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right).$$

Перетворимо отриманий вираз, беручи до уваги, що $\vec{u}d\vec{u} = d\frac{u^2}{2}$:

$$dE = \vec{u}\left\{\frac{m_0 d\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_0\vec{u}\left(\frac{\vec{u}d\vec{u}}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \frac{m_0 d\left(\frac{u^2}{2}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_0 c^2 d\left(\frac{u^2}{c^2}\right)}{2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right).$$

Інтегруючи цей вираз, одержимо:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + const\,.$$

Дослідні факти стверджують, що *const=0*. Тоді повна енергія частини дорівнює

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = mc^2\,. \tag{5.14}$$

У випадку, коли швидкість частинки *u=0*, енергія $E = m_0c^2$ має назву енергії спокою частинки. Ця енергія – внутрішня енергія частинки, не пов’язана з рухом частинки як цілого. До енергії спокою, як і до повної енергії (5.14), не входить потенціальна енергія тіла в зовнішньому силовому полі.

Кінетична енергія визначається як різниця E та E_0:

$$T = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

У випадку малих швидкостей *(u<<c)*:

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 u^2,$$

тобто кінетична енергія визначається формулою класичної фізики.

Із (5.14) випливає, що енергія тіла E і його релятивістська маса m прямо пропорційні. Можна стверджувати, що зміна енергії тіла ΔE супроводжується зміною релятивістської маси $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ і навпаки, зміна релятивістської маси супроводжується зміною енергії тіла:

$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

5.9 Взаємозв'язок енергії та імпульсу. Частинка з нульовою масою

Якщо виключити з рівнянь (5.12) та (5.14) швидкість u (при цьому рівняння (5.12) взяти в скалярному вигляді),

$$E = c^2 p^2 + m_0^2 c^4,$$

або

$$E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4. \tag{5.15}$$

В правій чистині (5.15) стоять величини, які залишаться незмінними при переході від однієї інерціальної системи до іншої. Тоді величина $E^2 - c^2 p^2$ — інваріантна. Якщо покласти в (5.15) $m_0=0$, то тоді отримаємо $E = cp$.

Із рівнянь (5.12) та (5.14) випливає, що

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{u} \tag{5.16}$$

Якщо $m_0=0$, то тоді із (5.15) отримаємо: $E=cp$.

Це співвідношення узгоджується з (5.16) в тому випадку, коли $u=c$. Тобто частинка з нульовою масою спокою завжди рухається із швидкістю світла. До таких частинок належить фотон.

6 ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ РІДИН ТА ГАЗІВ

Даний розділ часто називають гідроаеродинамікою, яка вивчає рівновагу та рух рідин і газів, їх взаємодію між собою та твердими тілами, які ними обтікаються.

При цьому і для рідин, і до газів застосовується єдиний підхід, який базується на уявленні про них як про суцільне середовище.

Досі ми розглядали матеріальні об'єкти у твердому стані. Для визначення їх руху використовують моделі матеріальної точки або абсолютно твердого тіла. Якщо розглядаємо рух рідини або газу, то кожну з цих моделей не можна застосовувати. По-перше, тому, що їх розмірами, як правило, не можна знехтувати. По-друге, тому, що їх форма змінюється під час руху. У цій ситуації треба визначити нову характерну властивість об'єктів, що дозволить спростити їх описання. Інакше треба було б визначити координати та швидкість кожної з понад $6{\cdot}10^{23}$ молекул в кожному молі речовини.

Такою властивістю можна вважати однорідність речовини у рідкому або газовому стані. Тобто задавати середню густину великої кількості молекул та їх середню швидкість. Виявляється, що цього досить, щоб визначити, як змінюватимуться ці параметри з часом. Тим паче, що й на рух інших тіл впливають тільки ці середні параметри. Причини цього будуть виявлені при вивченні статичної фізики.

Ця модель, як і інші, є наближенням, застосовність якого залежить не тільки від самого об'єкта, а й від тієї задачі, що розв'язується. Наприклад, зорі у галактиці вважають матеріальними точками при визначенні їх траєкторії руху, твердими тілами при розгляданні їх власного обертання, та ідеальним газом у випадку розв'язання задачі еволюції форми галактики.

6.1 Елементи гідроаеростатики. Закони Паскаля та Архімеда

Розглянемо явища, пов'язані з нерухомим газом та рідиною. Тобто явища *гідро - та аеростатики.* На відміну від статики твердих тіл, молекули рідини або газу можна вважати нерухомими тільки в середньому. А їх власний рух, що зветься *тепловим,* зумовлює нове фізичне явище – *тиск.* Так само називають фізичну величину, що його характеризує кількісно.

Тиск (p) – фізична величина, яка визначається нормальною силою, що діє з боку рідини чи газу на одиницю площі довільної поверхні, що знаходиться у рідині або газі:

$$p = \frac{dF_n}{dS}.$$

Мова йде тільки про середню за деякий проміжок часу силу, що складається з поштовхів кожної з молекул, що стискаються з поверхнею. Виникає тиск тільки тому, що кожна з молекул рухається, навіть коли газ чи рідина знаходяться у спокої.

В стані рівноваги тиск рідини і газу визначається *законом Паскаля*: *тиск у будь-якій точці нерухомої рідини однаковий у всіх напрямках і однаково передається по всьому об'єкту*.

Цей емпіричний закон пояснимо, користуючись молекулярною теорією. Вважаємо, що сила тиску з боку рідини на поверхню тіла, зануреного у цю рідину, перпендикулярна поверхні. Ця властивість рідин та газів пов'язана з відсутністю сил сухого тертя. Тоді сили тиску на трикутну призму, занурену у рідину, діють так, як показано на рис 6.1 (розміри призми вибираємо досить малими, щоб силою тяжіння можна було знехтувати).

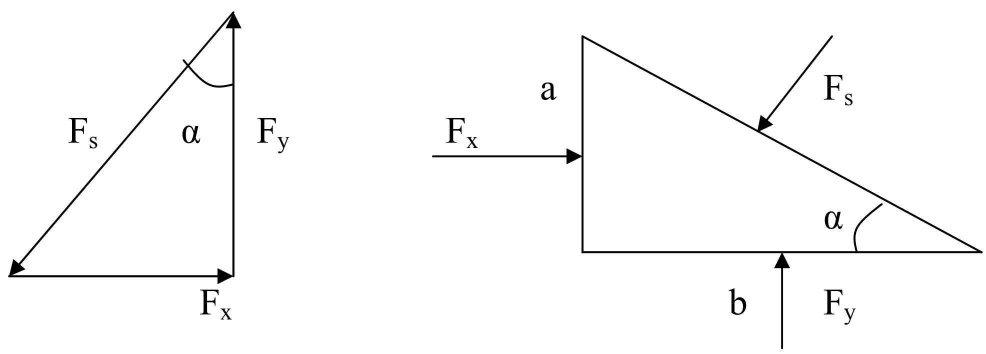


Рисунок 6.1

Сила, що діє на цю трикутну призму, в стані рівноваги дорівнює нулю. Тому можна записати:

$$\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_s = 0.$$

Звідси

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{a}{b}; \qquad \frac{F_x}{a} = \frac{F_y}{b}; \qquad P_x = P_y.$$

Тобто тиск у вибраних напрямках однаковий. Внаслідок того, що напрями вибрано довільно, закон Паскаля доведено.

Закон Паскаля є в основі роботи гідравлічних пресів, гідравлічних гальм, домкратів.

У полі тяжіння Землі розглянемо, наприклад, стовп рідини постійного перерізу (рис. 6.2). Він оточений такою ж рідиною і знаходиться у стані рівноваги. Тому сума сил, що на нього діють, дорівнює нулю:

$$P_1 S + mq = P_2 S.$$

Звідки $$P_2 = P_1 + \frac{mq}{S} = p_1 + \rho q h,$$

де p_1, p_2 – тиск на верхню та нижню поверхні, h – висота стовпа рідини, ρ – густина рідини.

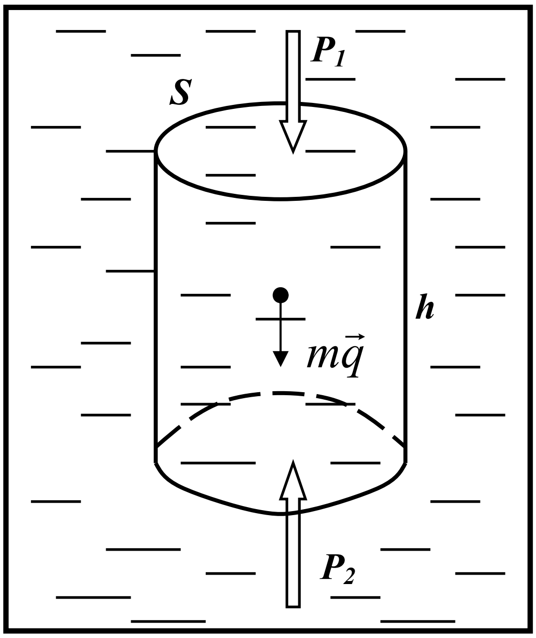


Рисунок 6.2

Це означає, що тиск у рідині з глибиною збільшується і на глибині, наприклад, 10 км дорівнює 1000 атмосфер. Це дуже ускладнює створення глибоководних апаратів та водолазного спорядження. В атмосфері Землі ситуація змінюється: густина атмосфери зменшується з висотою. Тоді одержимо рівняння

$$p_2 = p_1 + \int_{h_1}^{h_2} \rho(h) q dh.$$

Але це стосується тільки нерухомої рідини. Якщо, наприклад, рідина разом з посудиною рухається із прискоренням $\vec{a}$ (рис. 6.3), то у неінерціальній системі відліку до сили тяжіння $m\vec{q}$ додається сила інерції $-m\vec{a}$. Їх рівнодійна зумовлює новий напрямок сили (рис. 6.3) та нову залежність тиску від глибини.

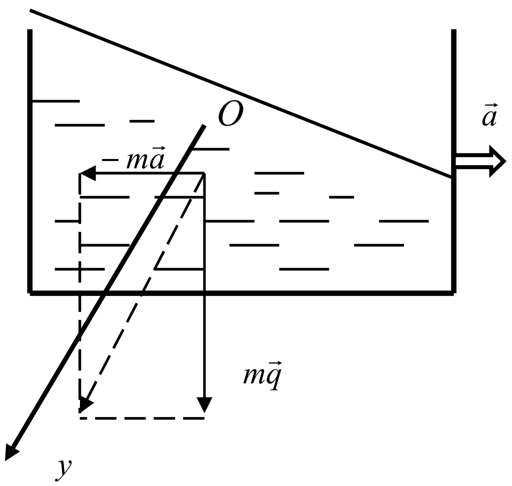


Рисунок 6.3

Якщо рідина рухається вниз з прискоренням, більшим за q, то тиск з глибиною не збільшується, а зменшується.

Різниця тисків на різних глибинах у рідин або газів в полі тяжіння призводить до того, що тиск на верхню зануреного у рідину тіла менший, ніж на нижню. А це, у свою чергу, є причиною виникнення виштовхувальної сили. Її можна обчислювати різними способами. Перші з них пов'язані з обчисленням сумарної сили тиску на поверхню тіла. Врахуємо, що тиск рідини спрямовано перпендикулярно поверхні тіла, а сили додаються векторно. Інший спосіб, мабуть, винайшов Архімед, коли, згідно легенді, вистрибнув із ванни з водою та побіг Сіракузами із криком “Еврика!”. Сила тиску, що діє на занурене у рідину тіло, не залежить від того, яке тіло занурене. Тому така ж виштовхувальна сила діє і на мішок такої ж форми, заповнений рідиною (рис. 6.4).

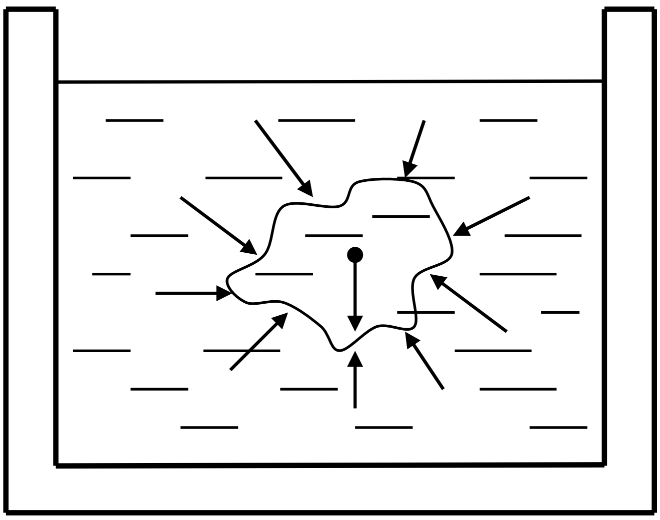


Рисунок 6.4

Цей об’єм рідини знаходиться у стані рівноваги. Тому сума сил тиску, що діють на нього, дорівнює вазі рідини у у цьому об’ємі. Закон Архімеда стверджує, що виштовхувальна сила, яка діє на тіло, занурене у рідину чи газ, дорівнює вазі рідини або газу в об’ємі зануреного тіла. Зазначимо, що у випадку, коли тіло занурене не повністю, треба враховувати вагу рідини тільки у зануреній частині тіла, а також те, що вага рідини залежить не тільки від сили тяжіння, а й від прискорення, з яким рідина рухається (див. вище).

Виштовхувальна сила зветься також силою Архімеда. Вона діє не тільки на занурену у рідину чи газ тіла, а також на саму рідину чи газ. Це може призвести до такого явища як конвекція.

Якщо, наприклад, у деякій частині земної атмосфери виникає маса більш теплого повітря, то його вага менша за вагу оточуючого холодного повітря, у тому ж самому об’ємі. Тому виштовхувальна сила є більшою за силу тяжіння і ця маса повітря підіймається вгору. Якщо є постійний приплив енергії (у даному випадку від Сонця), що робить густину нижніх шарів рідини або газу меншою, то конвекція є безперервним процесом.

Для засвоєння цього матеріалу спробуйте самостійно вирішити, куди перетікає рідина при нагріванні її у лівій посудині? У правій? (рис. 6.5)

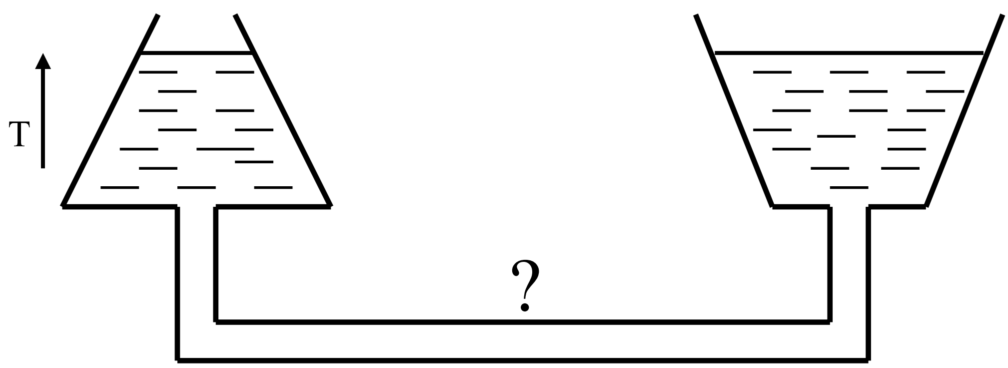


Рисунок 6.5

6.2 Рівняння Бернуллі

Досі ми розглядали статичний стан рідини. Але у багатьох випадках вона рухається. Відповідно до класичної механіки рух рідини призводить до того, що сили, які діяли б на рідину або газ, вже не скомпенсовані. Якщо виділити у рідині або газі невеликий за розмірами об’єм, то його можна вважати матеріальною точкою і використовувати для вивчення його руху закони Ньютона.

Спочатку опишемо властивості рухомої рідини якісно. При невеликих швидкостях руху окремі невеликі об’єми рідини рухаються не перемішуючись. Такий рух рідини зветься *ламінарним*. Лінія течії — лінія, дотична до якої в кожній точці збігається з вектором швидкості. Ці лінії, очевидно, ніде не перетинаються (перетин ліній означав би, що в одній точці частинка рідини має одночасно два напрямки швидкості). Крім того, вони не мають ні початку, ні кінця, тобто, безперервні. Частину рідини , обмежену лініями течії, називають трубкою течії (рис. 6.6). Кожну маленьку частину цієї трубки течії можна вважати матеріальною точкою малої маси Δm та використовувати для неї вже відомі нам закони руху матеріальної точки.

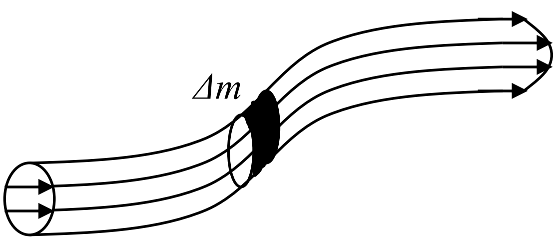


Рисунок 6.6

В іншому випадку, молекули рідини можуть перемішуватись. Тобто траєкторії руху частинок рідини можуть випадково змінюватись із часом. У цьому випадку течія зветься *турбулентною*.

Одна і та ж течія може бути як ламінарною, так і турбулентною. Це, наприклад, можна спостерігати, якщо дивитися на дим, який підіймається вгору від сигарети (рис. 6.7). Доки швидкість течії мала — течія ламінарна. На деякій висоті швидкість течії теплого повітря стає досить великою і ламінарна течія переходить у турбулентну.

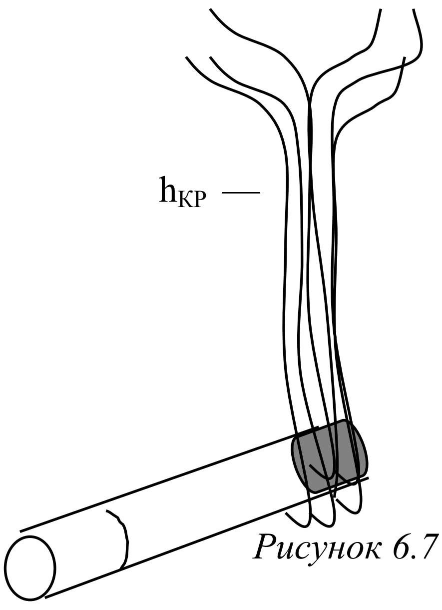


Рисунок 6.7

У різних ділянках трубки ламінарної течії можуть відрізнятися параметри течії — тиск, швидкість, температура. Для визначення взаємозв’язку цих величин застосовуємо до рідини, що знаходиться в трубці течії між двома перерізами S_1 та S_2, закон збереження енергії (рис. 6.8). Вважаємо, що за деякий час Δt до трубки надходить рідина масою Δm. Тоді

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 S_1 \Delta x_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t ,$$

де v_1 - швидкість рідини у цьому перерізі;

ρ_1 – густина рідини.

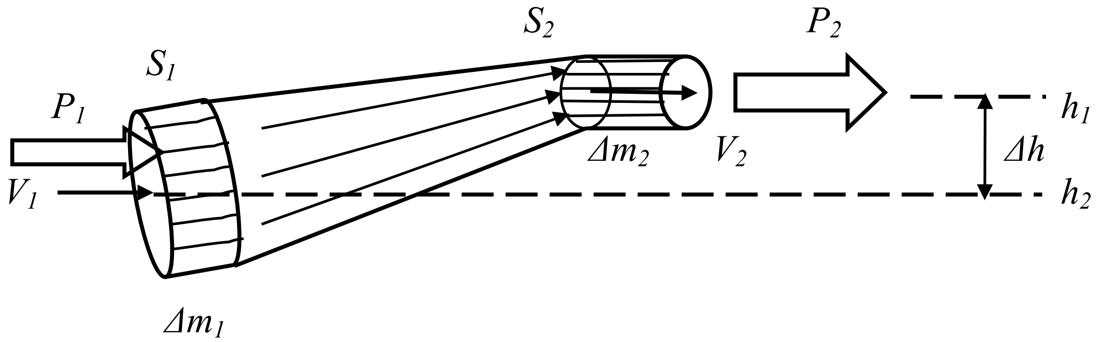


Рисунок 6.8

Аналогічно для другого перерізу можна записати:

$$\Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t .$$

Якщо течія стаціонарна, то маса рідин, що проходить між двома перерізами, з часом не змінюється. Тобто $\Delta m_1 = \Delta m_2$, та

$$\rho_2 S_2 v_2 = \rho_1 S_1 v_1 . \qquad (6.1)$$

Якщо рідина нестислива (воду за нормальних умов з великою точністю можна вважати нестисливою рідиною), то її густина в різних точках однакова. Тоді:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \text{, або. } Sv = const . \qquad (6.2)$$

Рівняння (6.1) та (6.2) називають рівнянням нерозривності течії. Зазначимо, що у випадку, коли течія має швидкість, не перпендикулярну площі перерізу, то рівняння має векторний вигляд:

$$\vec{S}\vec{v} = const .$$

Якщо течія не стаціонарна, то густина у кожній точці змінюється з часом. В цьому випадку рівняння нерозривності записують у диференціальному вигляді:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{v}) ,$$

де ∇ - оператор Гамільтона, $\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$.

Розглянемо енергетичні перетворення, що виникають у рідині. Маса Δm має потенціальну енергію у полі тяжіння Землі, кінетичну та внутрішню енергію. Тобто

$$E_1 = \Delta m_1 q h_1 + \frac{\Delta m_2 v_1^2}{2} + u_2 .$$

Аналогічно маса Δm_2, що витікає з перерізу S_2, має енергію:

$$E_2 = \Delta m_2 q h_2 + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + u_2 .$$

Якщо $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$, то зміна повної енергії рідини, що знаходиться між перерізами S_1 та S_2, за проміжок часу Δt дорівнює:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \Delta m q \Delta h + \frac{\Delta m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \Delta u .$$

Ця зміна енергії пов'язана з роботою зовнішніх сил (сил тиску) над об'ємом рідини, що розглядається. Сила тиску $F_1 = P_1 S_1$ виконує роботу $A_1 = \vec{F}_1 \Delta \vec{r}_1 = \vec{F}_1 \vec{v}_1 \Delta t$, та сила $F_2 = P_2 S_{21}$ роботу $A_2 = \vec{F}_2 \Delta \vec{r}_2 = \vec{F}_2 \vec{v}_2 \Delta t$.

Зазначимо, що робота A_1 – додатна, а A_2 – від'ємна, бо напрямки сил F_2 і швидкості рідини v_2 – протилежні.

Із закону збереження енергії

$$A = A_1 - A_2 = \Delta E ,$$

або

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \Delta E .$$

Звідки

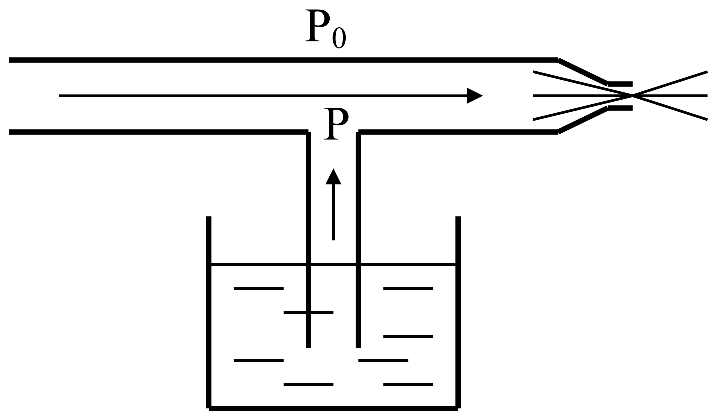
$$p_1 \frac{\Delta m}{\rho_1} - p_2 \frac{\Delta m}{\rho_2} = \Delta m q (h_2 - h_1) + \Delta m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \Delta u ;$$

$$p + \rho q h + \rho \frac{v^2}{2} + u_1 = const , \tag{6.3}$$

де u_1 - внутрішня енергія одиниці об'єму.

Закон збереження енергії в цьому випадку і є рівнянням Бернуллі для ламінарної течії. Якщо температура рідини або газу не змінюється, то останній доданок u_1 можна не писати. Перші три члени рівняння мають розмірність тиску: p – статичний тиск, $\rho q h$ - гідростатичний тиск, $\rho \frac{v^2}{2}$ - гідродинамічний тиск.

З рівнянням Бернуллі (6.3) пов’язано багато явищ природи. Залежність тиску рідини від швидкості є в основі дії багатьох механізмів та приладів. Найпростіший з них — пульверизатор (рис. 6.9).



Внаслідок великої швидкості повітря, яке проходить по горизонтальній трубці, тиск у ній зменшується і рідина з посудини “всмоктується” у повітряну течію.

Рисунок 6.9

6.3 Сили опору та в’язкість

Рівняння Бернуллі одержали, не враховуючи в’язкості. Під в’язкістю розуміють виникнення сил тертя між шарами рідини, які стикаються та мають різні швидкості. Ці сили дотичні до площин дотикання шарів, діють з боку шару, швидкість якого менша на шар, швидкість якого більша, протилежно напряму швидкості.

Дією сил в’язкого тертя пояснюється, наприклад, падіння тиску вздовж труб постійного перерізу (згідно рівнянню Бернуллі цей тиск не повинен змінюватись).

Розглянемо ламінарну течію рідини, що знаходиться між двома паралельними площинами, одна з яких нерухома, а інша рухається з постійною швидкістю $\vec{v}$ (рис. 6.10).

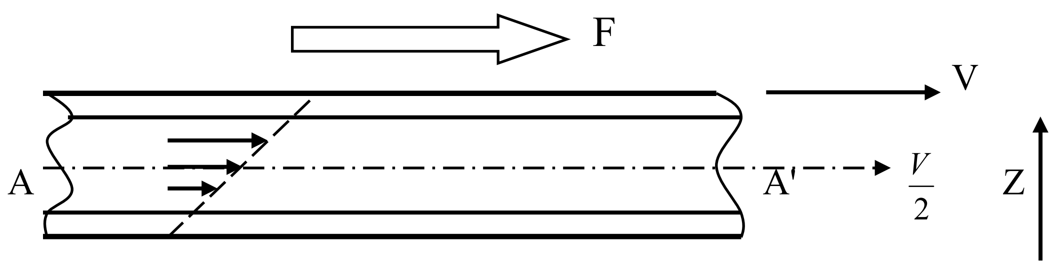


Рисунок 6. 10

Виявляється, що для цього до верхньої пластини потрібно прикласти постійну силу *F*. Робота цієї сили переходить за рахунок сил внутрішнього тертя (сил в’язкості) у тепло і підвищує температуру рідини.

Умовно розділимо шар рідини навпіл горизонтальною площиною *AA'*. Перейдемо в інерціальну систему відліку, яка рухається із швидкістю рідини у цьому перерізі. У цій системі відліку рідина всередині нерухома, а пластини рухаються у протилежних напрямках з однаковою швидкістю $\frac{v}{2}$ (за рахунок симетрії). Для цього треба до кожної з них прикласти однакову силу F_1. зазначимо, що за одиницю часу у новій системі відліку повинна виконуватись та ж сама робота. Тобто

$$Fv = F_1\frac{v}{2} + F_1\frac{v}{2}.$$

Звідки одержуємо $F_1 = \frac{F}{2}$.

Продовжуючи розділення кожної з половин ще раз навпіл (і т.д.), ми можемо довести, що як швидкість, так і необхідна сила лінійно залежить від товщини шару рідини (рис. 6.10).

Таким чином, можна записати $F \approx \frac{dv}{dt}S$, де S – площа кожної з пластин.

Коефіцієнт пропорційності зветься коефіцієнтом в’язкості. Його значення залежить тільки від властивостей рідини:

$$F = \eta\frac{dv}{dt}S. \tag{6.4}$$

Одиниці вимірювання — ньютон·сек/м^2.

На практиці часто користуються питомою в’язкістю, яка дорівнює коефіцієнту в’язкості, поділеному на густину рідини. При цьому питомі в’язкості різних рідин легко порівнювати. Так, для води при 20^{o}С

$$\frac{\eta}{\rho} = 10^{-6}\frac{м^2}{c},$$

для повітря $\frac{\eta}{\rho} = 15\cdot 10^{-6}\frac{м^2}{c}$.

Для визначення величини в’язкості формулу (6.4) важко застосовувати.

Перший з широко відомих методів вимірювання в’язкості пов’язаний з рухом твердих тіл у рідині. При малих швидкостях сила опору рідини пропорційна її швидкості, характерному розміру тіла та коефіцієнту в’язкості:

$$F_{оп} = klv\eta.$$

Безрозмірний коефіцієнт k залежить тільки від форми тіла. Для кулі, наприклад, $k=6\pi$. Таким чином, вимірюючи швидкість падіння кулі відомого радіусу r, можна розрахувати коефіцієнт в’язкості рідини.

Треба зазначити, що без урахування швидкості сила опору кулі, що рухається у рідині, повинна дорівнювати нулю. Це так званий парадокс д’Аламбера, рішення якого пов’язано з введенням в’язкості.

Іншим методом визначення коефіцієнта в’язкості є протікання рідини через трубку постійного перерізу.

Залежність об'єму рідини, яка протікає по трубці, виражається формулою Пуазейля:

$$v = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta},$$

де r – радіус трубки, t – час протікання, Δp - різниця тиску на її кінцях, l – довжина труби, η – коефіцієнт в'язкості.

Записані вище формули відповідають ламінарному потоку рідини. Але при великих швидкостях протікання потік стає турбулентним. Параметром, що характеризує перехід від ламінарного до турбулентного потоку, є число Рейнольдса:

$$R_e = k\frac{\rho v d}{\eta},$$

де $k \approx 1$ - безрозмірний коефіцієнт, що характеризує геометрію задачі, ρ – густина рідини, v – швидкість руху, d – характерний розмір тіла.

Якщо $R_e<1$ – течія ламінарна, якщо $R_e>1$ – течія турбулентна, якщо $R_e\approx 1$ – маємо перехідний режим.

7 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

7.1 Види коливань

Крім поступального і обертального рухів тіл, які були розглянуті у попередніх розділах, дуже розповсюдженим і у природі, і в техніці є коливальний рух.

Коливання – рух або процес, який характеризується певним повторенням з часом. Коливальний рух завжди відбувається відносно положення стійкої рівноваги, в якому рівноважна сила, що діє на систему $\sum \vec{F}_i = 0$. Коливання відбуваються відносно точок мінімуму потенціальної енергії, внаслідок того, що $F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$.

Залежно від фізичної природи процесу розрізняють, наприклад, коливання механічні, електромагнітні, електромеханічні. Але дуже важливим є факт, що коливальні процеси, різні за своєю фізичною природою, описуються аналогічними характеристиками та рівняннями. З філософської точки зору такий збіг не випадковий, він відбиває взаємозв'язок явищ природи, її єдність. Так, наприклад, коливальний рух здійснюють різні маятники, струми; атоми та іони в твердих тілах також коливаються навколо вузлів кристалічної решітки, в радіотехніці розглядають електромагнітні коливальні процеси. Переважна більшість акустичних і оптичних процесів пов'язана з коливальними рухами.

Коливальний рух може і завдавати шкоду, що виявляється, наприклад, при коливаннях незбалансованих роторів турбін, електродвигунів, при роботі на токарних верстатах.

Характер впливу зовнішнього середовища на коливальну систему дозволяє розрізняти вільні (або власні) коливання, вимушені, автоколивання та параметричні коливання.

Вільними (або власними) називаються коливання, які відбуваються за відсутності зовнішнього впливу на коливальну систему і виникають при початковому відхиленні цієї системи від положення рівноваги. Коливальні системи, у яких фізичні параметри (коефіцієнт пружності і опору середовища, електроопір, ємність і індуктивність коливального контуру) з часом не змінюються, називаються лінійними коливальними системами. Коливальні системи, параметри яких залежать від стану системи, називають нелінійними.

Процеси, які відбуваються у лінійних коливальних системах, описуються лінійними диференціальними рівняннями другого порядку однаковими за виглядом для коливальних систем різної фізичної природи. Коливання періодичні, якщо значення всіх фізичних характеристик системи, які змінюються при коливаннях, повторюються через певний проміжок часу – період коливань T:

$$x(t) = x(t+T) = x(t+2T) = \ldots = x(t+nT), \quad n = 1,2,3\ldots$$

На рис.7.1 зображено приклади різних за формою періодичних коливань.

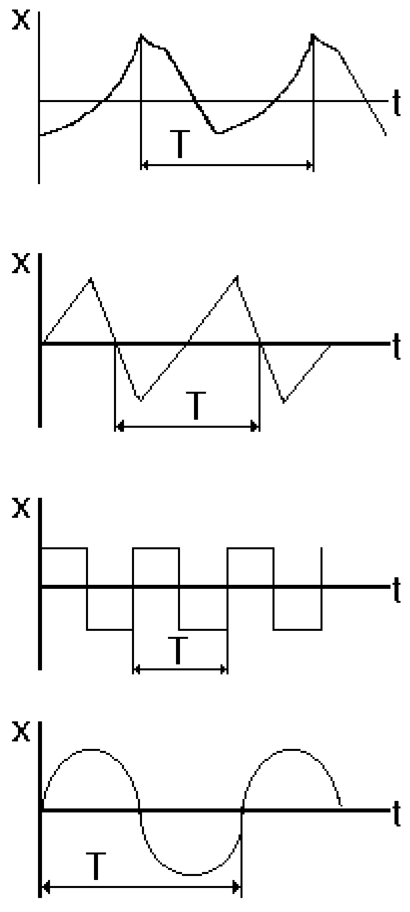


Рисунок 7.1

7.2 Гармонічні коливання

Найпростішим і найпоширенішим типом (за формою) періодичних коливань є гармонічні коливання. Коливання називаються гармонічними, якщо величина, яка коливається, змінюється за законом синуса або косинуса. Гармонічні коливання можна зобразити на векторній діаграмі. В цьому випадку з початку координат О на площині проводять вектор $\vec{A}$, модуль якого дорівнює амплітуді коливань $A = x_{max}$ (x_{max} – максимальне значення величини, яка коливається) і складає з віссю x кут, який дорівнює фазі коливань в даний момент часу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (рис.7.2). Тут $\varphi_0 = \varphi(0)$ – початкова фаза коливань при $t = 0$, а $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ - циклічна частота коливань, яка збігається з кутовою швидкістю обертання вектора A, $\nu = 1/T$ лінійна частота, T – період коливань.

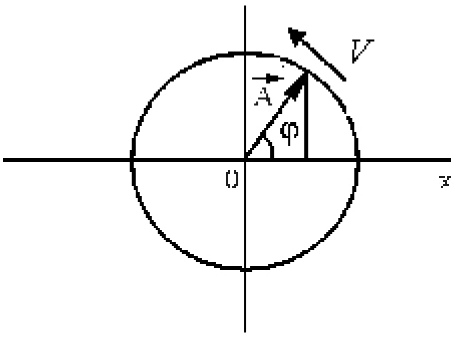


Рисунок 7.2

Проекція вектора $\vec{A}$ на вісь x (зміщення величини від положення рівноваги) змінюється за законом :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (7.1)$$

або

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_1),$$

де $\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$.

Перша і друга похідні від (7.1) за часом є швидкістю і прискоренням величини, яка коливається:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = V_0\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}); \qquad (7.2)$$

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = a_0\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi), \quad (7.3)$$

де $V_0 = A\omega$ і $a_0 = A\omega^2$ – амплітуда швидкості та прискорення.

З (7.2) та (7.3) бачимо, що швидкість та прискорення величини, яка коливається, також змінюється за гармонічним законом з тією ж частотою, але швидкість V випереджає зміщення x за фазою на $\frac{\pi}{2}$, а прискорення – на π (рис.7.3). Окрім того, з (7.3) одержимо, що $a(t) = -\omega^2 x(t)$, тобто прискорення пропорційне зміщенню з протилежним знаком. Цей зв’язок є ознакою гармонічних коливань

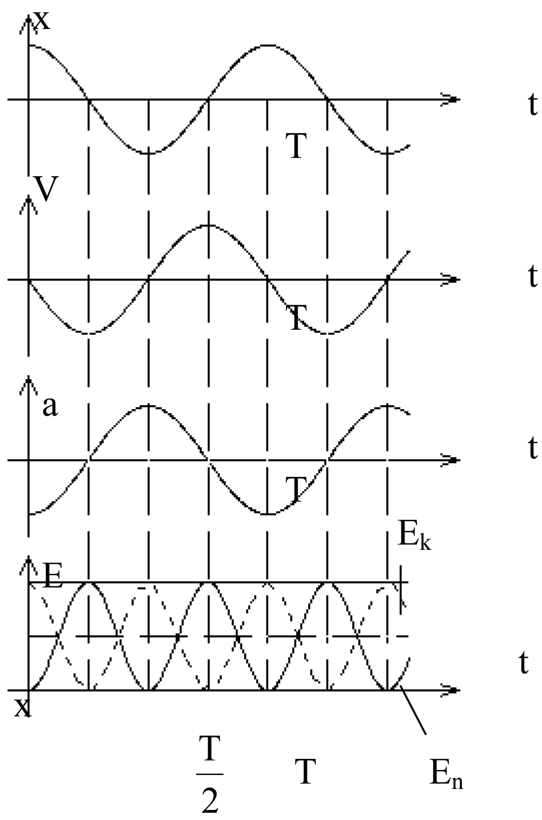


Рисунок.7.3

7.3 Гармонічний осцилятор

Нехай матеріальна точка коливається навколо положення рівноваги, яке вважається початком координат. Оскільки матеріальна точка рухається з прискоренням (7.3), то це означає, що на неї діє сила:

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x,$$
$$F = -kx, \qquad (7.5)$$

де $k = m\omega^2$ – стала, що характеризує коливальний процес.

Отже, сила пропорційна зміщенню матеріальної точки від положення рівноваги і напрямлена протилежно зміщенню (до положення рівноваги). Тоді з (7.5) маємо:

$$F_x = ma_x; \quad -kx = ma; \quad -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (7.6)$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - частота,

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ - період вільних або власних коливань.

Звернемо увагу на те, що період коливань T_0 і частота $\omega_0 = 2\pi\upsilon_0$ не залежать від амплітуди коливань. Ця властивість коливань називається ізохронністю і є характерною рисою всіх лінійних коливальних систем. При порушенні цієї умови – коливання нелінійні.

Розв'язком рівняння (7.6) є $x = Acos(\omega_0 t + \varphi_0)$, що можна перевірити підстановкою. Амплітуду і початкову фазу коливань не можна визначити з диференціального рівняння (7.6), а тільки з початкових умов, за яких виникли коливання.

Треба зауважити, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку (7.6) описує гармонічні лінійні коливання будь-якого походження (механічні – коливання маятника, електромагнітні – коливання заряду та ін.). При цьому в коливальній системі не обов'язково повинна діяти пружна сила, досить щоб сила змінювалась за законом (7.5). Така сила називається квазіпружною, а коливальна система має узагальнюючу назву *гармонічного осцилятора*. Повна енергія осцилятора E складається з кінетичної $E_к$ і потенціальної $E_п$. Кінетична енергія осцилятора з урахуванням виразу (7.2.):

$$E_к = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\,\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{1}{4} m\,\omega_0^2 A^2 \left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right]. \qquad (7.7)$$

Потенціальну енергію знаходимо, використовуючи формулу зв'язку потенціальної енергії U з силою:

$$\vec{F} = -gradU, \qquad F_x = -\frac{dU}{dx}, \qquad U = -\int_0^x F_x dx = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2};$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Враховуючи, що $k = m\omega_0^{\,2}$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} m\omega_0^{\,2} A^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4} m\omega_0^{\,2} A^2 [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)] = \\ &= \frac{1}{4} m\omega_0^{\,2} A^2 \left[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0 + \pi)\right]. \end{aligned} \qquad (7.8)$$

З виразів (7.7) та (7.8) випливає, що кінетична і потенціальна енергія коливальної системи змінюються також періодично, але з циклічною частотою $2\omega_0$, вдвоє більшою ніж частота коливань, та із зсувом фази між $E_к$ і U, який дорівнює π (рис.7.3).

При вільних коливаннях виконується закон збереження енергії (квазіпружна сила консервативна), тому повна енергія залишається сталою :

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^{\,2} A^2 = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} mV_0^{\,2} = const. \qquad (7.9)$$

Оскільки середні значення функцій $\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\, і \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ за період дорівнюють 1/2, то з (7.7) і (7.8) одержимо, що середні значення кінетичної і потенціальної енергії за період однакові і кожне з них дорівнює половині повної енергії вільних коливань (рис.7.3).

$$\overrightarrow{E}_к = \overrightarrow{E}_п = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}m\omega_0{}^2 A^2 . \qquad (7.10)$$

7.4 Вільні незгасаючі коливання пружного, фізичного та математичного маятників

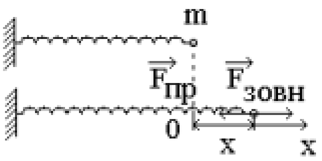


Рисунок 7.4

Одним з прикладів лінійного осцилятора є пружний маятник – матеріальна точка маси m закріплена на пружині (рис.7.4). Масою пружини і тертям нехтуємо. У положенні рівноваги тіла пружина недеформована. Це положення виберемо за початок координат, а вісь OX спрямуємо вправо. Якщо під дією зовнішньої сили $\overrightarrow{F}_{зовн}$ тіло зміщується від положення рівноваги на відстань x (рис.7.4) на нього, за законом Гука, діє сила пружності $F_{пр} = -kx$, де k-коефіцієнт пружності пружини. За другим законом Ньютона: $ma = -kx$;

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -кx\,; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{к}{m}x = 0\,. \qquad (7.11)$$

Порівнюючи рівняння (7.11) з (7.6) робимо висновок, що пружний маятник здійснює вільні гармонічні коливання за законом $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, що є розв’язком рівняння (7.11) з циклічною частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ та періодом $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Період коливань і частота не залежать від амплітуди. Рівняння (7.11) перепишемо у вигляді: $\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$. Аналогічний характер мають коливання тіла підвішеного до пружини. Потенціальна енергія цієї коливальної системи $U = \frac{1}{2}kx^2$, а повна енергія $E = \frac{kA^2}{2}$. Фізичний маятник – абсолютно тверде тіло довільної форми масою m, яке коливається у полі сили тяжіння навколо осі z, яка не проходить через центр тяжіння C.

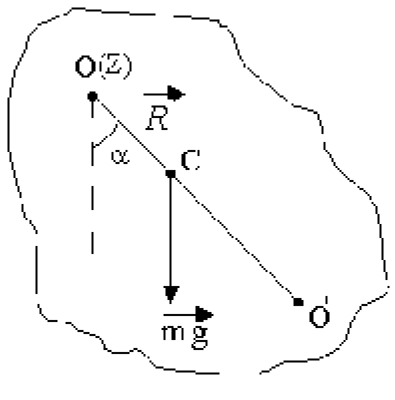


Рисунок 7.5

На рис.7.5 вісь обертання z напрямлена перпендикулярно площині рисунка, центр тяжіння розташований в точці C на відстані R від осі O, яка збігається з віссю z . Згідно з основним законом динаміки обертального руху тіла з нерухомою віссю обертання рівняння руху маятника при відхиленні його від положення рівноваги на кут α має вигляд :

$$I\beta_z = M_z ,$$

де $M_z = -mgRsin\alpha$ - обертальний момент сили тяжіння відносно осі z, I-момент інерції маятника відносно осі z, $\beta_z = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ - кутове прискорення.

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgR\sin\alpha\,. \qquad (7.12)$$

Знак мінус вказує на те, що напрям моменту сили тяжіння та кутового прискорення протилежні. Для малих кутів відхилення $\sin\alpha \approx \alpha$, $\alpha \approx 5^0 \div 7^0$ і рівняння (7.12) набуває вигляду :

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgR\alpha\,,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgR}{I}\alpha = 0 \qquad .\ (7.13)$$

За виглядом рівняння (7.13) збігається з рівнянням (7.6), якщо замінити x на α та позначити $\frac{mgR}{I} = \omega_0{}^2$. Таким чином, за відсутності тертя малі коливання фізичного маятника є гармонічними :

$$\alpha = \alpha_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,,$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$ - циклічна частота,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}}\,, \qquad (7.14)$$

період власних коливань фізичного маятника.

Математичний маятник – матеріальна точка масою m закріплена на кінці невагомої нерозтяжної нитки довжиною l, яка коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис.7.6). Математичний маятник – граничний випадок фізичного маятника. При цьому момент інерції цього маятника відносно осі O. $I = ml^2$, а відстань центра тяжіння до осі дорівнює довжині нитки $R = l$.

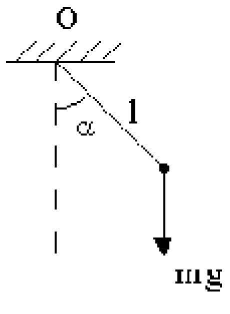


Рисунок 7.6

Циклічна частота і період коливань такого маятника дорівнюють $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Малі коливання фізичного та математичного маятників з невеликою амплітудою ізохронні, тобто їх частоти і періоди не залежать від амплітуди α_0. В загальному випадку період коливань фізичного маятника залежить від амплітуди α_0:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right].$$

При малих кутах відхилення доданками $\approx \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}$, та більш високих степенів можна знехтувати, то і одержуємо вираз (7.14). Зауважимо, що зміна періоду T_0 при збільшенні φ_0 до 15° не перевищує 0,5%.

Якщо математичний та фізичний маятники мають однаковий період коливань, то в цьому випадку довжина математичного маятника $l_{зв} = \frac{I}{mR}$ має назву зведеної довжини фізичного маятника. Завжди $l_{зв} > l = R$ - відстань до центра мас, тому що за теоремою Штейнера момент інерції маятника відносно точки підвісу *O* дорівнює :

$$I_0 = I_c + mR^2,$$

де I_c - момент інерції маятника відносно осі *C*, яка паралельна осі *O* та проходить через центр мас тіла.

$$l_{зв} = \frac{I}{mR} = \frac{I_0}{mR} + R > R\,.$$

Точка O', що знаходиться на лінії *OC* (рис.7.5) на відстані $l_{зв}$ від точки *O*, називається точкою коливань, або центром коливань фізичного маятника. Точка підвісу фізичного маятника *O* і його центр коливань O' є взаємними або спряженими. Якщо в точці O' підвісити фізичний маятник, то його період коливань не зміниться, а центр коливань перейде в точку *O*. Ця властивість використовується в оборотних маятниках, які застосовуються для визначення з великою точністю прискорення вільного падіння в різних точках Землі.

Маятники широко застосовуються у годинниках, у приладах для визначення прискорення рухомих тіл та вивчення коливань земної кори (сейсмографи); у гіроскопічних приладах, у приладах для експериментального визначення моментів інерції тіл, для дослідження механічних властивостей твердих тіл за різних фізичних умов.

7.5 Додавання коливань

Нехай тіло бере участь у двох коливаннях одного напряму з однаковою частотою

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

За допомогою методу векторних діаграм можна зробити висновок, що результуюче зміщення тіла у будь-який момент часу дорівнює сумі незалежних зміщень : $x = x_1 + x_2$. Оскільки вектори $\overrightarrow{A_1}$ і $\overrightarrow{A_2}$ обертаються навколо точки *O* з однаковими кутовими швидкостями ω, то зсув фаз між ними $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ з часом не змінюється і вектор *A* також обертатиметься з кутовою швидкістю ω. Тоді результуюче коливання гармонічне, його рівняння

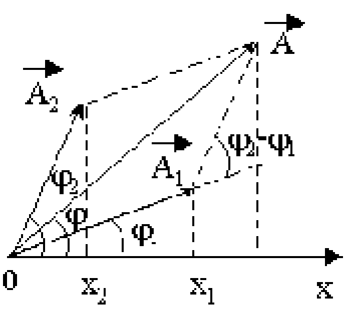


Рисунок 7.7

має вигляд $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$, де A- амплітуда і φ - початкова фаза результуючого коливання.
З рисунка (7.7) одержимо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (7.15)$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \qquad (7.16)$$

З (7.15) видно, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз складових коливань. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ $(n = 0,1,2,...)$ то $A = A_1 + A_2$, при $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi, (n = 0,1,2...)$, тобто складові коливання відбуваються в протилежних фазах, а результуюча амплітуда $A = (A_2 - A_1)$ (амплітуда завжди додатна величина). Зважаючи на те, що енергія коливання пропорційна квадрату амплітуди, одержимо:

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

тобто повна енергія результуючого коливання E також залежить від різниці фаз складових з енергіями E_1 і E_2.

Якщо складати коливання з різними, але близькими частотами

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1),\ x_2 = A_2\cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

то вектори A_1 і A_2 обертаються з різними кутовими швидкостями, кут між ними та амплітуда змінюватимуться з часом – коливання будуть негармонічними.

Для спрощення вважаємо, що $A_1 = A_2 = A_0$ і початкові фази дорівнюють нулю. Тоді $x_1 = A_0\cos\omega_1 t$, $x_2 = A_0\cos\omega_2 t$. Сумарне коливання: $x = x_1 + x_2 =$
$= \mathrm{A}(\cos\omega_1 \mathrm{t} + \cos\omega_2 \mathrm{t}) = 2\mathrm{A}_0\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\mathrm{t})\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\mathrm{t})$. Якщо $\omega_2 - \omega_1 =$
$= \Delta\omega << \omega_1, \omega_2$, то $x = (2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos\omega_1 t$, тобто амплітуда (вираз у дужках) змінюється з часом періодично: $T_A = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Другий множник змінюється швидко, в результаті ми одержуємо коливання з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, амплітуда яких змінюється за періодичним законом з періодом $T_A = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ (рисунок 7.8). Такі коливання мають назву «биття».

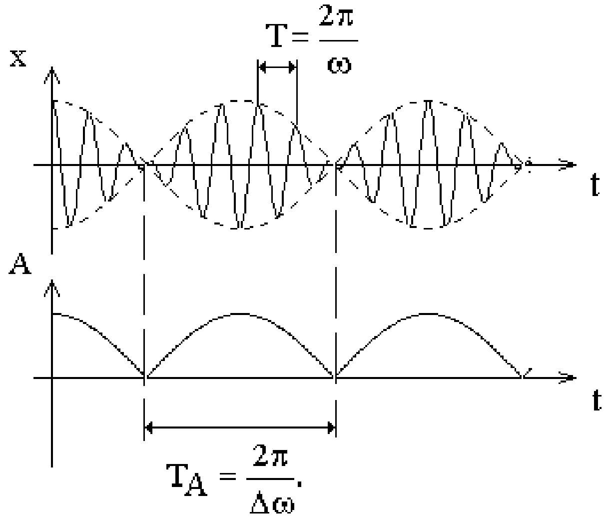


Рисунок 7.8

Складні періодичні коливання можна подати як суперпозицію одночасних гармонічних коливань з різними амплітудами, початковими фазами і частотами, кратними циклічній частоті ω_0:

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+A_1\cos(\omega_0 t++\varphi_1)+A_2\cos(2\omega_0 t+\varphi_2)++...+A_n\cos(\omega_0 t+\varphi_n)\ .$$

Такий вид періодичної функції пов'язаний з методом гармонічного аналізу складного періодичного коливання або розкладом Фур'є. Члени ряду Фур'є, які відповідають за гармонічні коливання з частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0,...$ мають назву першої (основної), другої, третьої та ін. гармонік складного періодичного коливання. Якщо тіло бере участь у коливаннях, напрями яких взаємно перпендикулярні, а частоти однакові, то траєкторія коливань криволінійна, форма її залежить від різниці фаз обох коливань.

Нехай

$$\left.\begin{aligned} x&=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\\ y&=A_2\cos(\omega t+\varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Одержимо рівняння траєкторії результуючого руху:

$$\frac{x}{A_1}=\cos\omega t\cdot\cos\varphi_1-\sin\omega t\cdot\sin\varphi_1, \tag{7.18}$$

$$\frac{y}{A_2}=\cos\omega t\cdot\cos\varphi_2-\sin\omega t\cdot\sin\varphi_2. \tag{7.19}$$

Домножимо рівняння (7.18) на $\cos\varphi_2$, а (7.19) на $\cos\varphi_1$ і знайдемо їх різницю, потім помножимо (7.18) на $\sin\varphi_2$, а (7.19) на $\sin\varphi_1$ і також знайдемо різницю.

В результаті одержимо:

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2-\frac{y}{A_2}\cos\varphi_1=\sin\omega t\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1), \tag{7.20}$$

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2-\frac{y}{A_2}\sin\varphi_1=\cos\omega t\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1). \tag{7.21}$$

Рівняння (7.20) і (7.21) піднесемо до квадрата і почленно додамо їх. Дістанемо:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1). \tag{7.22}$$

Вираз (7.22) є рівнянням траєкторії результуючого руху тіла, яке одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях. В загальному випадку це еліпс. Визначимо форму траєкторії для окремих випадків .

Якщо різниця фаз $\varphi_2-\varphi_1=0$, то рівняння (7.22) має вигляд : $\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$, звідки одержимо рівняння прямої $y=\frac{A_2}{A_1}x$. Результуючий рух є гармонічним коливанням з частотою ω вздовж прямої, нахиленої під кутом

$\varphi = arctg\dfrac{A_2}{A_1}$ до осі *OX*. Зміщення точки від положення рівноваги у будь-який момент часу знайдемо як $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис.7.9(а)), амплітуда коливань $S = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. В цьому випадку мова йде про лінійно поляризовані коливання . За умови $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$ з (7.22) одержимо, що траєкторія - пряма лінія, з рівнянням $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$, яка утворює з віссю ОХ кут $\varphi = arctg\left(-\dfrac{A_2}{A_1}\right)$.

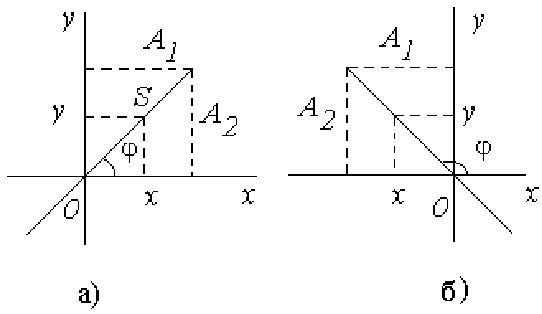


Рисунок 7.9

Результуючий рух також коливальний рух (рис7.9б). Якщо різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\dfrac{\pi}{2}$ рівняння (7.22) набуває вигляду:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

тобто це рівняння еліпса, у якого півосі дорівнюють A_1 *і* A_2 і орієнтовані вздовж координатних осей *Ох* і *Оу*.

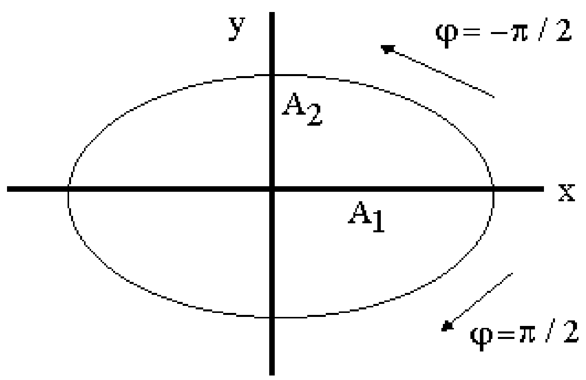


Рисунок 7.10

Якщо амплітуди однакові $A_1 = A_2 = A$, еліпс перетворюється в коло.

У випадку, коли $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ тіло рухається по еліпсу за стрілкою годинника, якщо $\varphi = -\pi/2$, рух проти годинникової стрілки (рис.7.10). Такі коливання називаються циркулярно поляризованими, або коливаннями поляризованими по колу.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань, які складаються, різні, то замкнені траєкторії результуючих коливань досить складні і мають назву фігур Ліссажу. Спостереження фігур Ліссажу є в основі досить зручного методу дослідження співвідношень між частотами і фазами коливань, а також форми коливань. Для цього фігури Ліссажу вписуються в прямокутник, центр якого збігається з початком координат, а бокові сторони паралельні осям ОХ і ОУ і розташовані по обидві сторони від них на відстанях A_1 *і* A_2. Відношення частот коливань, які складаються, дорівнює відношенню числа точок дотику фігур Ліссажу з сторонами прямокутника.

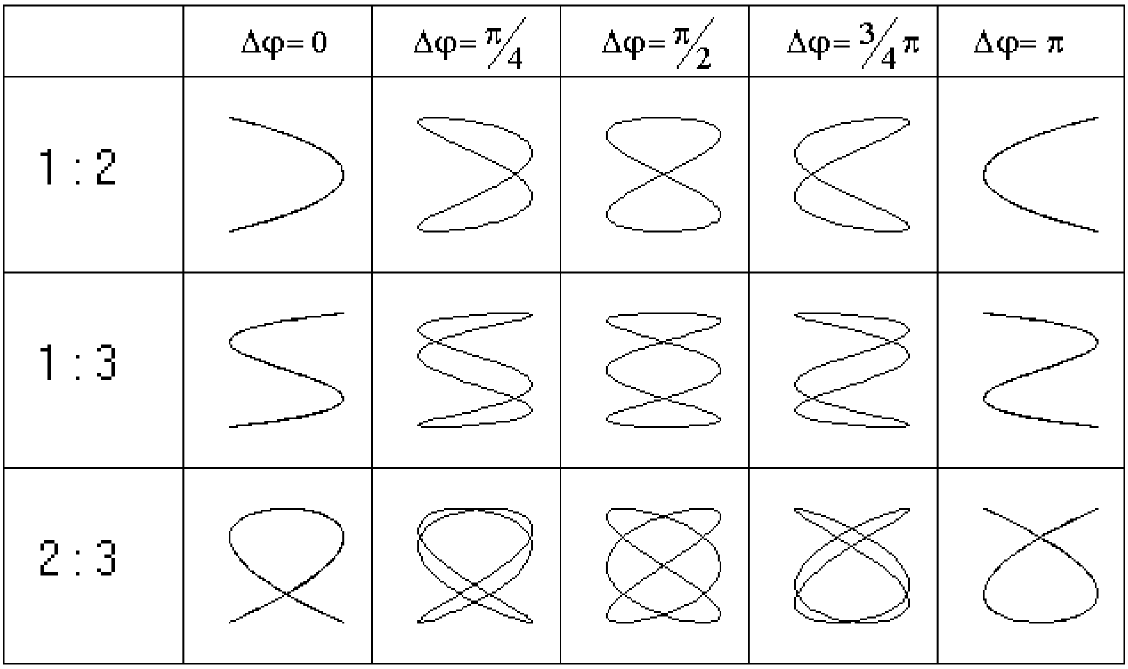


Рисунок 7.11

На рис.7.11 наведено фігури для випадків, коли частоти складових коливань відносяться як 1:2, 1:3, 2:3 відповідно для різниці фаз коливань $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

7.6 Затухаючі коливання

Ми розглядали коливальні рухи, нехтуючи дією сил тертя і опором середовища. В реальній ситуації внаслідок втрати енергії на виконання роботи проти сил опору і тертя та на випромінювання амплітуда коливань з часом зменшується. Такі коливання називаються загасаючими.

Розглянемо рух лінійного осцилятора у в'язкому середовищі. На нього, крім квазіпружної сили $F_{np} = -kx$, при невеликій швидкості коливальної системи діє сила опору середовища пропорційна швидкості та напрямлена завжди проти напряму швидкості системи: $F_{on} = -rV$, де r – коефіцієнт опору. За другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху осцилятора має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (7.23)$$

де $\beta = \dfrac{r}{2m}$ - коефіцієнт затухання, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - частота вільних коливань системи за відсутності сили опору.

Розв'язок цього рівняння (якщо $\omega = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$):

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{7.24}$$

де ω - частота затухаючих коливань.

Зауважимо, що в цьому випадку амплітуда коливань повинна зменшуватись з часом завдяки втратам енергії на виконання роботи проти сил опору. За час dt втрати енергії:

$$dE = F_{on} \cdot dx = -rV_0 V dt = -rV^2 dt\,; \qquad \frac{dE}{dt} = -rV^2\,;$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2r}{m}\cdot\frac{mV^2}{2} = -\frac{2r}{m}E_K\,. \tag{7.25}$$

З (7.24) знайдемо втрати енергії за один період. Оскільки середнє значення кінетичної енергії коливального руху дорівнює половині його повної енергії (7.10), тобто $E_K = \dfrac{1}{2}E$, тоді рівність (7.24) можна переписати як:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{r}{m}E = -2\beta E\,. \tag{7.26}$$

З (7.24) очевидно, що швидкість зменшення енергії при затухаючих коливаннях пропорційна енергії. Перепишемо вираз (7.25):

$$\frac{dE}{E} = -2\beta dt\,;$$

$$E = E_0 \cdot e^{-2\beta t}\,. \tag{7.27}$$

Рівняння (7.27) - закон втрати енергії з часом, де E_0 - значення енергії в момент часу $t = 0$. Оскільки повна енергія пропорційна квадрату амплітуди, то з (7.27) одержимо залежність амплітуди затухаючих коливань від часу:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}\,.$$

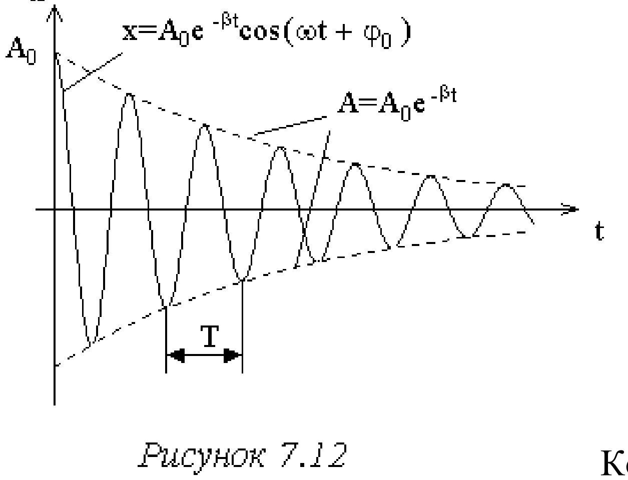


Рисунок 7.12

Отже, амплітуда затухаючих коливань зменшується з часом за експоненціальним законом, тобто розв'язок рівняння (7.22) має вигляд :

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)\,. \tag{7.28}$$

На рисунку 7.12 зображено залежність (7.28) . Бачимо, що амплітуда коливань $A = A_0 e^{-\beta t}$ зменшується з часом за експоненціальним законом, A_0 - початкова амплітуда при $t = 0$.

Коливання в цьому випадку не є періодичними, але при малих затуханнях можна ввести умовний період (або квазіперіод), який дорівнює :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \beta^2},$$

і збільшується із зростанням коефіцієнта затухання β. Очевидно, що цей період більший за період власних гармонічних коливань без затухання $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} < T$.

Проміжок часу, за який амплітуда коливань зменшується у е разів, має назву часу релаксації τ:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\beta\tau} = e; \qquad \beta\tau = 1; \qquad \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Час релаксації - величина обернена коефіцієнту затухання.

Натуральний логарифм відношення двох послідовних амплітуд, які відрізняються одна від одної на період, має назву логарифмічного декремента згасання λ. Він характеризує швидкість затухання коливань і дорівнює :

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T.$$

$$\lambda = \beta t = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Тобто логарифмічний декремент згасання - фізична величина обернена числу коливань N, яке здійснить система, доки амплітуда зменшується у е разів.

У техніці використовують величину, яка має назву добротності - величини пропорційній відношенню енергії коливальної системи в деякий момент часу до зміни величини енергії за період:

$$Q = 2\pi\frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}.$$

Беручи до уваги, що енергія коливань пропорційна квадрату амплітуди для малих значень λ одержимо:

$$Q = 2\pi\frac{A_0^2 e^{-2\beta t}}{(A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi\frac{1}{1 - e^{-2\beta t}} = 2\pi\frac{1}{1 - e^{-2\lambda}}.$$

Якщо λ мале, то розклавши $e^{-2\lambda}$ у ряд, маємо: $e^{-2\lambda} = 1 + 2\lambda + ...$,

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N,$$

тобто добротність пропорційна числу коливань, яке здійснить система за час релаксації, за час зменшення амплітуди коливань в е разів. Якщо $\omega = \omega_0^2 - \beta^2 \leq 0$, то при збільшенні коефіцієнта затухання умовний період зростає і при $\beta = \omega_0$ обертається на нескінченність. Рух буде аперіодичним. Якщо систему вивести із стану рівноваги, повертається до цього стану система без здійснення коливань.

7.7 Вимушені коливання

Як було розглянуто в розділі 7.6, в реальних системах відбувається згасання коливань. Для підтримки сталої амплітуди втрати енергії треба компенсувати дією зовнішньої періодичної сили.

Розглянемо лінійний осцилятор, аналогічний розглянутому у розділі 7.6, але за умови дії зовнішньої періодичної сили:

$$F(t) = F_0 cos\,\Omega t\ ,$$

де F_0 *і* Ω - амплітуда і частота змушуючої сили.

В цьому випадку рівняння (7.22) має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t\ . \qquad (7.29)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Загальний розв’язок такого рівняння $x(t)$ є сумою загального розв’язку однорідного рівняння $x_1(t)$, та частинного розв’язку неоднорідного диференціального рівняння $x_2(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд :

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)\ , \qquad (7.30)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а A_0 , φ_0 – сталі величини.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$x_2(t) = A cos(\Omega t + \varphi)\ , \qquad (7.31)$$

де A - амплітуда усталених коливань, φ- зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою.

Для розрахунку A і φ візьмемо першу і другу похідну від (7.31) за часом і підставимо в рівняння (7.29) :

$$A\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi + \pi) + 2\beta\Omega A\cos(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 A\cos(\Omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t \qquad (7.32)$$

Звідки випливає, що сталі A і φ мають такі значення, за яких гармонічна функція $\frac{F_0}{m}\cos\Omega t$ дорівнювала б сумі трьох гармонічних функцій лівої частини рівняння. Застосуємо метод векторних діаграм. На рисунку 7.13 зображено векторні амплітуди всіх чотирьох коливань з урахуванням зсуву фаз. Тоді:

$$A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2 A^2 = \frac{F_0^2}{m^2}\ ;$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\ . \qquad (7.33)$$

Зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2};$$

$$\varphi = arctg\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (7.34)$$

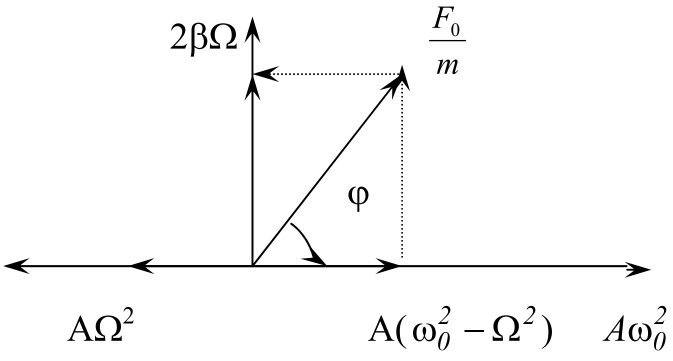


Рисунок 7.13

В результаті розв'язок рівняння (7.32) має вигляд:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + A\cos(\Omega t + \varphi).$$

Перший доданок має переважне значення тільки на початку коливань (період встановлення коливань), доки амплітуда не досягне величини (7.33). В усталеному режимі вимушені коливання є гармонічними і відбуваються з частотою змушуючої сили Ω (рис. 7.14).

З (7.33) випливає, що амплітуда вимушених коливань залежить від частоти змушуючої сили. При наближенні частоти зовнішньої сили до власної частоти коливань системи амплітуда коливань зростає (рис.7.15). Це явище має назву резонансу. Частоту змушуючої сили, при якій спостерігається максимальне значення амплітуди (при сталому β), називають резонансною частотою $\Omega_{рез}$. В цьому випадку знаменник в (7.33) повинен мати мінімальне значення, яке визначається за умови, що похідна від знаменника дорівнює нулю:

$$\omega_0^2 - \Omega_{рез}^2 - 2\beta^2 = 0.$$

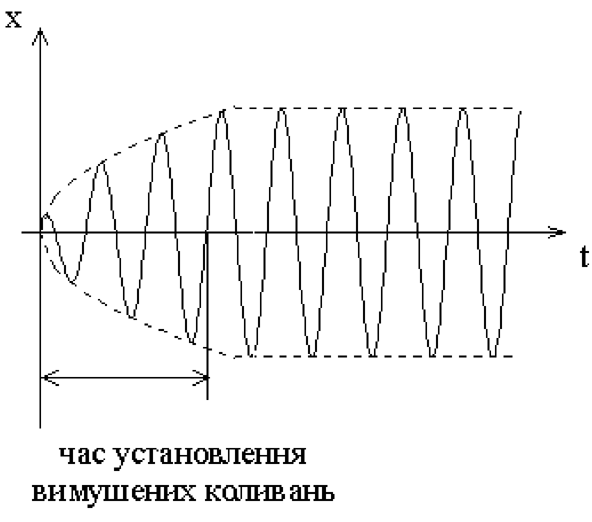


Рисунок 7.14

Єдине значення $\Omega_{рез}$, яке має фізичний зміст:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (7.35)$$

Коли коефіцієнт затухання $\beta = 0$, то при $\Omega = \omega_0$ амплітуда стає нескінченно великою. Наслідком збільшення затухання β є зменшення амплітуди коливань і зсуву резонансної частоти до менших значень (рис.7.15).

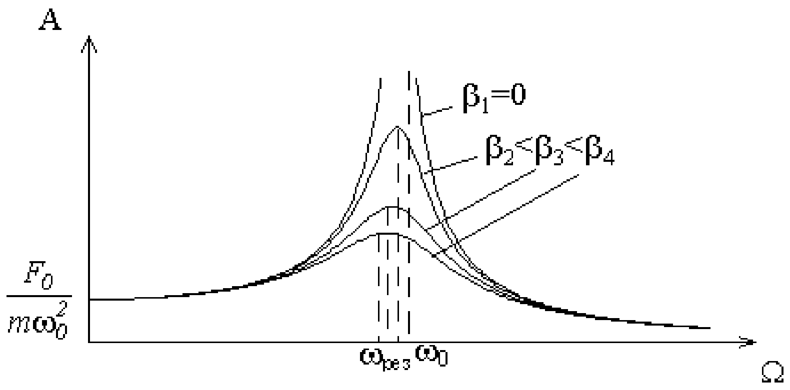


Рисунок 7.15

З (7.35) і (7.33) одержимо величину амплітуди при резонансі:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Треба зауважити, що при зменшенні частоти змушуючої сили до нуля, на резонансних кривих однакове значення амплітуди $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$, або $\frac{F_0}{k}$. Це статичне відхилення, тобто величина зсуву від положення рівноваги, яке має система при дії сталої сили F_0 (рис. 7.15).

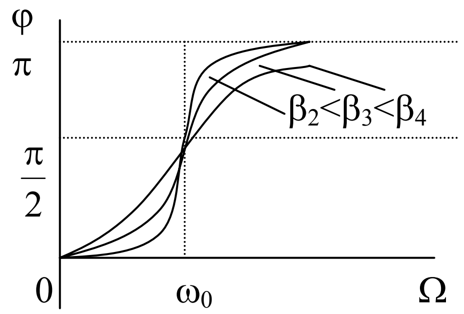


Рисунок 7.16

На (рис.7.16) зображено сімейство фазових резонансних кривих, тобто залежність зсуву фаз між силою і зміщенням від частоти сили Ω для різних значень β. З (7.34) ясно, що при $\Omega = 0$ і $\varphi = 0$, коли $\Omega = \omega_0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ за будь-яких значень коефіцієнта затухання β. При збільшенні Ω зсув фаз зростає і при $\Omega >> \omega_0$ $\varphi \to \pi$, тобто фаза коливань майже протилежна фазі зовнішньої сили.

Явище резонансу може бути як корисним (в радіотехніці, прикладній акустиці, електротехніці), так і шкідливим (при конструюванні машин, двигунів і інших механізмів треба уникати цього явища, щоб запобігти руйнуванню механізму).

7.8 Параметричний резонанс

Незатухаючі коливання можна одержати не тільки внаслідок дії зовнішньої нефізичної сили, а також при періодичній зміні параметрів коливальної системи. Амплітуда коливань в залежності від частоти зміни параметрів може зростати. Таке збудження коливань називається параметричним резонансом.

Як приклад, можна навести розгойдування гойдалки людиною, яка регулярно присідає і піднімається, тобто в цьому випадку періодично зміщується положення центра мас системи.

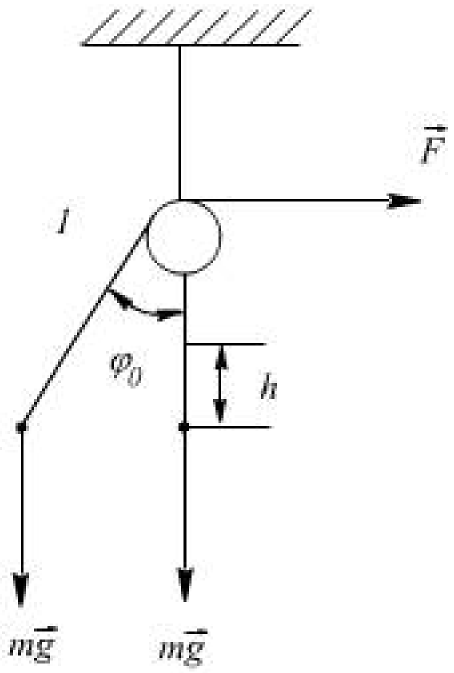


Рисунок 7.17

Для пояснення цього методу збудження коливань розглянемо коливання маятника, довжину нитки якого можна змінювати, перекинувши її через блок. Нехай в момент кожного проходження через положення рівноваги маятник підтягується зовнішньою силою F на деяку невелику висоту h (малу порівняно з довжиною маятника l), а в кожному крайньому положенні нитка відпускається на ту ж довжину h. За кожний період довжина маятника двічі збільшується і зменшується, тобто частота періодичної зміни параметра (довжина маятника) вдвічі більша частоти його власних коливань. Подовження нитки відбувається при похилому положенні маятника, тоді в цей момент він опускається на висоту $h\cos\varphi_0$, яка менша за висоту h піднімання в моменти вкорочування нитки. Тому за кожне подовження і вкорочування нитки зовнішня сила виконує проти сили тяжіння роботу, яка дорівнює:

$$A = mgh(1-\cos\varphi_0) \approx \frac{1}{2}mgh\varphi_0^2,$$

(кут φ_0 вважається малим, тоді $\cos\varphi_0 \approx 1-\dfrac{\varphi_0^2}{2}$).

Крім того, зовнішня сила F виконує ще роботу проти відцентрової сили, яка розтягує нитку. Ця робота дорівнює $\dfrac{mV_0^2}{l}$ (V_0 – максимальна швидкість маятника) в нижньому положенні маятника і нулю в його крайніх положеннях (де швидкість маятника дорівнює нулю). Таким чином, сумарна робота зовнішньої сили за період коливання маятника дорівнює:

$$A = 2\left(\frac{1}{2}mgh\varphi_0^2 + \frac{mV_0^2}{l}h\right).$$

Але $V_0 = l\varphi_0\omega$, де $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ - власна частота коливань маятника, тому

$$A = 6\frac{h}{l}\frac{mV_0^2}{2}.$$

Робота, яку виконує зовнішня сила над маятником, додатна і пропорційна його енергії. Тому енергія маятника періодично збільшується, одержує за кожен період невеликий приріст, пропорційний цій енергії і величині $\frac{h}{l}$. В цьому полягає механізм параметричного резонансу. Періодична зміна параметрів коливальної системи (з частотою вдвічі більшою за власну частоту системи) призводить до систематичного збільшення її середньої енергії E, швидкість цього збільшення пропорційна E:

$$\frac{dE}{dt} = 2\aleph E,$$

де $\aleph$ - невелика стала величина.

Це співвідношення таке ж, як і для затухаючих коливань, але в цьому випадку похідна $\frac{dE}{dt}$ не від'ємна, а додатна. Це означає, що енергія, а з нею і амплітуда експоненціально зростають з часом.

Існують коливальні системи, коливання яких збуджуються за рахунок постійно діючого джерела енергії. Це джерело постійно компенсує зменшення енергії в системі внаслідок затухання. Прикладом такої системи є механічні годинники, в яких джерелом енергії є стиснута пружина або підняті гирі. Такі системи називаються автоколивальними.

Автоколивальна система складається з трьох елементів: тіла, що коливається (в годиннику це маятник), стаціонарного джерела енергії (піднята гиря або пружина), пристрою, який регулює передачу енергії від її джерела до коливальної системи. Коли енергія, що передається від джерела до коливального тіла за період коливань, дорівнює енергії, витраченій тілом за цей проміжок часу на подолання сил тертя, то в системі встановлюються незатухаючі коливання з сталою амплітудою – автоколивання.

ЧАСТИНА ІІ. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

8 ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

8.1 Статистичний та термодинамічний методи досліджень

Термодинаміка та молекулярна фізика вивчають явища, які зумовлені безперервним рухом та взаємодією величезної кількості молекул або інших частинок, з яких складаються тіла. Предметом цих розділів фізики є вивчення закономірностей *теплового руху*, але суттєвою відмінністю є методи досліджень.

Термодинамічний метод не використовує уявлень про молекулярну будову речовин та фізичну природу теплоти, не розглядає внутрішній механізм досліджуваних явищ. Термодинаміка є аксіоматичною наукою, висновки якої ґрунтуються на загальних законах або началах, що є узагальненням дослідних фактів.

Молекулярна фізика – розділ фізики, який вивчає фізичні властивості та стан тіл, спираючись на уявлення про внутрішню будову, взаємодію частинок, що складають тіла, та їх характер руху. Об’єм газу 1м^3 містить ~ 10^{25} структурних одиниць (атомів, молекул), які безперервно рухаються, стикаючись між собою. Координати, швидкість, енергія окремої частинки є випадковими величинами, але поведінку сукупності великої кількості частинок можна визначити, використовуючи методи математичної статистики.

Молекулярна фізика встановлює статистичні закономірності макроскопічної поведінки систем, відсутні для окремих молекул.

Таким чином, термодинамічний та статистичний методи досліджень доповнюють один одного, розглядаючи теплові явища з різних точок зору.

8.2 Основні поняття термодинаміки

Тепловий рух притаманний тільки об’єктам, що складаються з великої кількості структурних одиниць – макроскопічним системам. Система макроскопічних тіл, які взаємодіють та обмінюються енергією – *термодинамічна система*. Фізичні величини, які характеризують систему – *термодинамічні параметри*, або *параметри стану системи*. Макроскопічні величини, які визначаються положенням та властивостями тіл, що не входять до складу системи, називають *зовнішніми параметрами*. *Внутрішніми параметрами* називають величини, що визначають внутрішній стан системи, вони залежать від положення зовнішніх тіл та від руху і положення частинок системи. Наприклад, якщо газ знаходиться в посудині певного об’єму V в електростатичному полі, то зовнішніми параметрами є об’єм (він залежить від розташування стінок посудини) та напруженість зовнішнього електричного поля. Внутрішні параметри – тиск та електричний дипольний момент (вектор поляризації) газу.

Якщо параметри системи не змінюються з часом, то стан системи називають *стаціонарним*.

Якщо система не обмінюється енергією, речовиною чи випромінюванням з зовнішніми тілами, то таку систему називають *ізольованою*. Узагальненням дослідних результатів є положення про існування стану *термодинамічної рівноваги*, яке називають *першим постулатом термодинаміки*: ізольована макроскопічна система за незмінних зовнішніх умов переходить до стану термодинамічної рівноваги. В цьому стані макроскопічні параметри залишаються сталими, система спонтанно не може вийти із стану рівноваги.

Статистична фізика доводить, що стан термодинамічної рівноваги – найбільш імовірний стан системи, який найчастіше створюється частинками, що безперервно рухаються. Тобто постулат про перехід системи до стану термодинамічної рівноваги вказує на найімовірнішу поведінку системи. Спонтанні відхилення параметрів системи від рівноважних значень (флуктуації) можливі внаслідок неперервного теплового руху. Але випадкові відхилення параметрів системи від середніх значень виникають у невеликих об'ємах або протягом невеликих проміжків часу. Для макроскопічних систем відносні флуктуації тим менші, чим більша кількість частинок входить до складу системи. Тому поява значних флуктуацій в термодинамічних системах малоймовірна.

Перехід ізольованої системи до стану термодинамічної рівноваги називають *процесом релаксації*, а час, протягом якого відбувається цей процес – *часом релаксації*. Зовнішні умови повинні змінюватись настільки повільно, щоб система проходила через послідовність рівноважних станів. Такі процеси називають *квазістатичними* чи *квазірівноважними*.

Нехай дві рівноважні системи А та В приведено до теплового контакту. Ці системи, незалежно від значень зовнішніх параметрів, або залишатимуться в тому ж стані рівноваги, або внаслідок обміну енергією прийдуть до спільного стану рівноваги, відмінного від станів рівноваги систем А та В. Тоді існує фізична величина, яка залежить від внутрішнього стану системи, не залежить від числа частинок системи, залишається постійною для всіх частин системи в стані термодинамічної рівноваги. Ця величина називається *температурою*, визначає взаємну рівновагу термодинамічних систем в тепловому контакті. Температура залежить від внутрішнього руху частинок, є мірою інтенсивності теплового руху. Якщо системи А та В до теплового контакту мають однакову температуру, то тепловий контакт не порушує стану термодинамічної рівноваги. У випадку різних температур контактуючих систем внаслідок обміну енергією встановлюється однакова температура у всіх частинах системи. Температура є величиною, що визначає стан термодинамічної рівноваги систем.

Рівноважні внутрішні параметри термодинамічної системи є функціями зовнішніх параметрів та температури. Тоді, змінюючи один з внутрішніх параметрів, можна визначити зміну температури тіла. Цей принцип є в основі вимірювань температури термометром. В термометрах використовують залежність довжини, об'єму, густини, електричного опору, випромінювальної здатності та інших зовнішніх параметрів від температури. Для вимірювань температури використовують різні термометричні тіла та термометричну шкалу. Так, за шкалою Цельсія початок відліку температури (0°С) відповідає температурі плавлення льоду, а 100°С – температурі кипіння води за нормальних умов. Різниця температур між цими двома основними (реперними) точками, поділена на 100, відповідає одному градусу за шкалою Цельсія. Градуйований таким чином термометр (наприклад, за лінійною залежністю об'єму від температури), приводять до стану теплової рівноваги з тілом, температуру якого вимірюють.

Покази термометрів з різними термометричними тілами, як правило, збігаються тільки для основних точок шкали, відрізняючись для інших температур. Температурна шкала, яка не залежить від вибору термометричного тіла, встановлюється другим началом термодинаміки та називається термодинамічною шкалою температур або шкалою Кельвіна. Одиницею вимірювання температури за цією шкалою є кельвін (1 К). Температура T за шкалою Кельвіна, та температура t за шкалою Цельсія пов'язані формулою

$$T=t+273{,}15.$$

8.3 Ідеальний газ

Основні фізичні закономірності, які мають місце в реальних газах, можна вивчати, використовуючи модель ідеального газу. Вважають, що молекули ідеального газу не взаємодіють між собою та мають власні розміри, набагато менші за характерні відстані між молекулами. Молекули ідеального газу рухаються хаотично, стикаючись між собою за законами пружних ударів. Властивості реальних газів за малої густини (розріджені гази) з великою точністю збігаються з властивостями ідеального газу.

Стан ідеального газу визначають його маса m, молярна маса μ, тиск p, об'єм V, температура T, взаємозв'язок між якими визначається рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT\,, \tag{8.1}$$

де $R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ - універсальна газова стала.

Рівняння (8.1) – це рівняння стану ідеального газу.

Позначимо

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{Дж}{К} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К\,,$$

де N_A – число Авогадро (число частинок в молі будь-якої речовини), k – стала Больцмана. (Фізичний смисл сталої Больцмана k розглянемо в наступних розділах). Тоді рівняння (8.1) можна записати в іншому вигляді:

$$pV = \frac{m}{\mu} N_A kT\,; \qquad pV = NkT\,; \qquad p = \frac{N}{V} kT\,,$$

де N – число молекул газу масою m.

Позначимо $n=N/V$ – концентрація молекул. Тоді

$$p = nkT\ . \tag{8.2}$$

Рівняння (8.1)-(8.2) – рівняння стану ідеального газу.

8.4 Внутрішня енергія, робота, кількість теплоти

В термодинаміці тепловий рух молекул та перетворення енергії, пов’язані з ним, відіграють визначальну роль. Механічна енергія термодинамічної системи в цілому – зовнішня енергія – термодинамікою не розглядаються.

Внутрішня енергія системи – це енергія руху та взаємодії частинок, що складають систему: кінетична енергія теплового руху частинок, потенціальна енергія їх взаємодії, кінетична та потенціальна енергія коливального руху атомів в молекулах, внутрішньоатомна та внутрішньоядерна енергія. Внутрішня енергія є однозначною функцією стану системи. Зміна внутрішньої енергії ΔU при переході системи із початкового стану з енергією U_1 до кінцевого стану з енергією U_2 дорівнює $\Delta U=U_2-U_1$, та не залежить від процесів, що призвели до переходу. Якщо система повертається до попереднього стану, внутрішня енергія її залишається незмінною. Тобто диференціал внутрішньої енергії dU є повним диференціалом:

$$\oint dU = 0\ . \tag{8.3}$$

Внутрішня енергія рівноважної системи залежить від зовнішніх параметрів та температури, є адитивною величиною. Під час взаємодії системи з зовнішніми тілами здійснюється обмін енергією. Стан термодинамічної системи змінюється двома способами: із зміною зовнішніх параметрів, та тоді, коли зовнішні параметри незмінні. У першому випадку відбувається макроскопічне переміщення зовнішніх тіл, виконується *макроскопічна робота*. Нехай в циліндрі під поршнем площею S знаходиться стиснутий газ (рис.8.1), тиск якого дорівнює p. Тоді сила тиску $F=pS$, якщо поршень при квазістатичному розширенні газу перемістився на dx, то газ виконає роботу

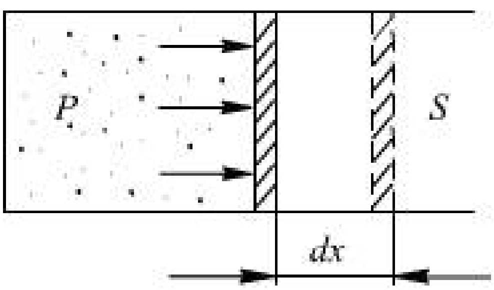


Рисунок 8.1

$$\delta A=Fdx=pSdx=pdV.$$

Робота, виконана системою при скінченному розширенні від об’єму V_1 до V_2, дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV\ . \tag{8.4}$$

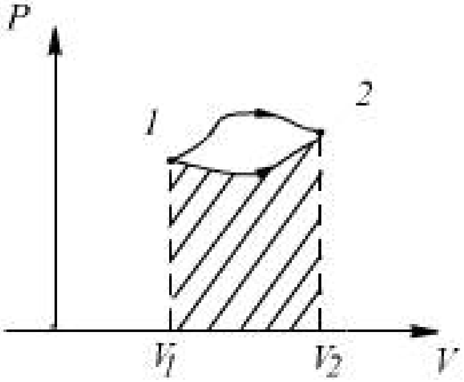


Рисунок 8.2

Зобразивши процес переходу на діаграмі *p-V* (рис.8.2), легко зрозуміти, що робота (8.4) залежить від способу переходу із точки *1* до точки *2* (робота дорівнює площі під графіком залежності $p(V)$). Таким чином робота не є функцією стану. Тому диференціал роботи δA не є повним диференціалом на відміну від диференціалу внутрішньої енергії dU.

Другим способом передачі енергії є *процес теплообміну*, який відбувається за незмінних зовнішніх параметрів. Теплообмін зумовлено різницею внутрішніх параметрів системи. *Кількість теплоти* δQ – енергія, що передається системі в процесі теплообміну. В цьому випадку відбувається передача енергії шляхом безпосередньої взаємодії молекул контактуючих тіл.

Якщо робота пов’язана зі змінами макроскопічного стану системи, то теплопередача – це мікропроцеси, що призводять до передачі енергії. Здійснюючи над системою роботу – змушуємо її частинки рухатись впорядковано; передача певної кількості теплоти пов’язана із невпорядкованим тепловим рухом молекул.

І робота, і кількість теплоти не дорівнюють нулю тільки в процесі передачі енергії, а чисельне значення їх суттєво залежить від виду цього процесу. Тобто робота та кількість теплоти не є формою енергії, вони характеризують способи передачі енергії, залежать від того, яким способом здійснено процес переходу від початкового до кінцевого стану.

8.5 Перший закон термодинаміки

За формулою (8.4) можна знайти роботу для довільного процесу, що відбувається з термодинамічною системою. Зміна внутрішньої енергії та передана теплота універсальних формул визначення не мають. Але існує взаємозв’язок між теплотою, зміною внутрішньої енергії та роботою, яку виконала система.

Перший закон (перше начало) термодинаміки є узагальненням закону збереження та перетворення енергії для термодинамічних систем. Цей закон встановлено експериментальними та теоретичними дослідженнями англійських фізиків Дж.П.Джоуля (1818-1889 рр.), У.Томсона (лорда Кельвіна)(1824-1907 рр.), німецьких дослідників, лікарів за освітою, Г.Гельмгольца (1821-1894 рр.) та Ю.Р.Майєра (1814-1878 рр.). *Перший закон термодинаміки* стверджує, що кількість теплоти δQ, яку одержала система, дорівнює сумі зміни внутрішньої енергії системи dU та роботи δA, яку виконала система над зовнішніми тілами:

$$\delta Q=dU+\delta A. \qquad (8.5)$$

Рівняння (8.5) – перший закон термодинаміки в диференціальному вигляді. Якщо термодинамічна система квазістатично здійснила перехід між двома фіксованими станами, то інтегруючи (8.5), одержимо

$$Q=(U_2-U_1)+A, \qquad (8.6)$$

перший закон термодинаміки в інтегральному вигляді. Якщо початковий і кінцевий стани системи збігаються, то, враховуючи (8.3), одержимо

$$Q=A.$$

Тоді робота в круговому процесі (циклі) дорівнює кількості теплоти, одержаної системою. Внаслідок цього перший закон термодинаміки формулюють як положення про неможливість вічного двигуна першого роду: неможливий такий періодичний пристрій, який виконував би роботу без одержання енергії ззовні. Тобто роботу не можна створити із нічого (без затрат енергії) та не можна перетворити в ніщо (без виділення енергії).

8.6 Теплоємність. Ізопроцеси в ідеальному газі

Якщо тілу надати кількість теплоти δQ і температура при цьому змінилась на dT, то *теплоємністю тіла* називають величину

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Питомою теплоємністю називають величину, що дорівнює кількості теплоти, необхідної для збільшення на 1 К температури 1 кг речовини:

$$c_0 = \frac{C}{m} = \frac{\delta Q}{mdT}.$$

Молярна теплоємність c дорівнює

$$c = \frac{C \cdot \mu}{m} = \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\delta Q}{dT}. \quad (8.7)$$

Залежно від умов нагрівання теплоємність тіла відрізняється. Розглянемо основні процеси в ідеальному газі, що відбуваються за умов сталості одного з параметрів стану.

Для ізохоричних процесів $V=const$. Тоді із (8.4) та (8.5) одержимо:

$$\delta Q = dU.$$

Знаходимо δQ із (8.7), враховуючи, що $V=const$.

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} c_V dT,$$

$$dU = \frac{m}{\mu} c_V dT, \quad (8.8)$$

де c_V – молярна теплоємність ізохорного процесу.

Із (8.8) зрозуміло, що внутрішня енергія U залежить тільки від температури для ідеального газу.

Для ізотермічних процесів $T=const$, тоді із (8.8) $dU=0$, а з (8.4) та (8.5) одержимо

$$\delta A = pdV; \qquad \delta Q = \delta A.$$

Із рівняння Менделєєва-Клапейрона (8.1) одержимо

$$\delta A = pdV = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}.$$

Після інтегрування одержимо роботу в ізотермічному процесі:

$$A = Q = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.9)$$

Якщо *процес ізобарний, то $p=const$*. Тоді із (8.4) та (8.1) одержимо

$$\delta A = pdV = \frac{m}{\mu} RdT; \qquad A = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Із означення молярної теплоємності знаходимо

$$\delta Q = c_p \frac{m}{\mu} dT \ ,$$

де c_p – молярна теплоємність в ізобарному процесі.

Тоді із (8.5) та (8.8) знайдемо

$$\delta Q = dU + \delta A \ ;$$

$$\frac{m}{\mu} c_p dT = \frac{m}{\mu} c_V dT + \frac{m}{\mu} RdT \ .$$

Тоді молярні теплоємності ізобарного та ізохорного процесів взаємозв'язані рівнянням

$$c_p = c_V + R, \qquad (8.10)$$

яке називається *рівнянням Майєра*.

Адіабатні процеси відбуваються без теплообміну з навколишніми тілами, тобто $\delta Q=0$. Тоді із першого закону термодинаміки (8.5):

$$-dU=\delta A,$$

робота газу дорівнює зменшенню внутрішньої енергії. Продиференціювавши рівняння (8.1), знаходимо:

$$\frac{m}{\mu} RdT = pdV + Vdp \ . \qquad (8.11)$$

Із (8.5) та (8.8) одержимо перший закон термодинаміки для адіабатного процесу:

$$\frac{m}{\mu} c_V dT + pdV = 0 \ ,$$

а з (8.11) знаходимо dT та підставляємо в це рівняння:

$$\frac{c_V}{R}\left(pdV + Vdp\right) + pdV = 0 \ . \qquad (8.12)$$

Позначимо $\gamma = c_p/c_V$ – показник адіабати.

Із рівняння Майєра (8.10):

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V} \ ; \qquad \frac{R}{c_V} = \gamma - 1 \ .$$

Тоді (8.12) запишемо у вигляді

$$pdV + Vdp + (\gamma - 1)pdV = 0 \ ;$$

$$\gamma pdV + Vdp = 0 \ ;$$

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \ .$$

Після інтегрування (8.13) одержимо

$$pV^{\gamma} = const.$$

Рівняння (8.14) – рівняння адіабати в координатах p,V – рівняння Пуассона. Показник адіабати $\gamma > 1$, тому адіабата на діаграмі p,V в точці перетину адіабати та ізотерми спадає крутіше за ізотерму

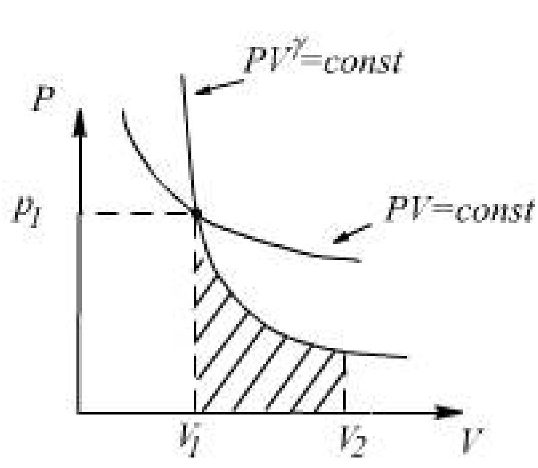


Рисунок 8.3

(рис.8.3). Дійсно, адіабатне розширення, на відміну від ізотермічного, відбувається без надання системі теплоти. Тому зменшення тиску зумовлене не тільки збільшенням об’єму, а й зменшенням температури.

Рівнянням адіабати в координатах T,V та p,T є рівняння

$$TV^{\gamma-1} = const\,; \tag{8.15}$$

$$p^{\gamma-1}/T^{\gamma} = const\,. \tag{8.16}$$

Наслідком рівняння (8.15) є нагрівання газу у випадку адіабатного стиску. Це явище використовується в двигуні Дізеля для спалахування займистої суміші. Якщо об’єм збільшується, то температура в адіабатному процесі зменшується – це один із способів одержання низьких температур.

Знайдемо роботу газу за адіабатних умов (площа заштрихованої фігури на рис.8.3):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^{\gamma} \frac{dV}{V^{\gamma}} = p_1 V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V^{\gamma-1}}\right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\lambda-1}\right].$$

9 ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

9.1 Взаємоперетворення роботи та теплоти. Напрямок теплових процесів

Робота та теплота є еквівалентними як два можливих способи передачі енергії, але в природі існує асиметрія стосовно їх взаємних перетворень. Роботу можна повністю перетворити в один з видів енергії, теплота безпосередньо (без попереднього перетворення в роботу) перетворюється тільки у внутрішню енергію. Окрім цього, роботу можна повністю перетворити в теплоту (наприклад, при гальмуванні автомобіля), без зміни стану інших тіл, такий процес відбувається сам собою. Якщо термодинамічна система ізольована, то перехід роботи в теплоту відбувається самовільно, без будь-яких додаткових процесів (без компенсації). Здійснення оберненого процесу перетворення теплоти в роботу неможливе без зміни стану інших тіл, такий процес не є єдиним процесом в ізольованій системі, супроводжується компенсацією. Нерівноправність взаємоперетворень роботи та теплоти призводить до того, що природні процеси відбуваються в певному напрямі. Наприклад, гарячі тіла з плином часу охолоджуються, а холодні самі собою не нагріваються; теплота переходить від тіла з вищою температурою до тіла з нижчою температурою при тепловому контакті двох тіл, а не навпаки; м’яч, що падає на горизонтальну поверхню з деякої висоти, через деякий час зупиняється і сам собою не починає підстрибувати.

Відповідно до першого закону термодинаміки повна кількість енергії термодинамічної системи повинна залишатись незмінною в довільних процесах, розподіл енергії змінюється необоротно. Асиметрія природних процесів відображається другим законом термодинаміки, який вказує на напрям зміни розподілу енергії.

9.2 Оборотні та необоротні процеси. Цикл Карно

Нехай за допомоги деякого процесу термодинамічна система переходить із стану A до стану B, якщо можливо повернути систему до початкового стану так, щоб у всіх інших тілах не відбулось ніяких змін, то цей процес називається *оборотним*. Квазістатичні процеси – оборотні; прямий та обернений процеси відбуваються через ті самі проміжні стани, не змінюється стан тіл, які не входять до складу системи. Тобто оборотні процеси відбуваються без компенсації.

Необоротні процеси – процеси, які не можна здійснити в оберненому напрямі без змін в зовнішніх тілах. Тобто необоротні процеси відбуваються з компенсацією. Реальні процеси в природі відбуваються із скінченною швидкістю, супроводжуються тертям, тобто є необоротними. Але вивчення ідеальних оборотних процесів дає можливість виявлення шляхів максимального наближення реальних необоротних процесів до оборотних.

Прикладами оборотних процесів є всі механічні процеси за відсутності тертя; незатухаючі електромагнітні коливання; розповсюдження електромагнітних хвиль в середовищах без поглинання; термодинамічні квазістатичні процеси.

Необоротними є процеси теплопередачі за скінченної різниці температур; розширення газу в пустоту; дифузії; всі механічні процеси, що супроводжуються тертям та інші процеси.

Особливу увагу привертають термодинамічні процеси, в яких відбувається перетворення теплоти в роботу та система повертається до попереднього стану. Такі процеси є в основі роботи теплових машин, це *колові процеси* або *цикли.*

Теплова машина складається з робочого тіла (найчастіше газ), нагрівника та холодильника. Початковий стан робочого тіла (газу в циліндрі теплової машини) – точка 1 на діаграмі pV (рис.9.1). Приведемо робоче тіло в контакт з нагрівником, тобто тілом, температура якого вища температури газу. Газ буде нагріватись та розширюватись, здійснюючи роботу A_1 – процес 1а2 на рис.9.1. За першим законом термодинаміки кількість теплоти Q_1, одержана від нагрівника, дорівнює

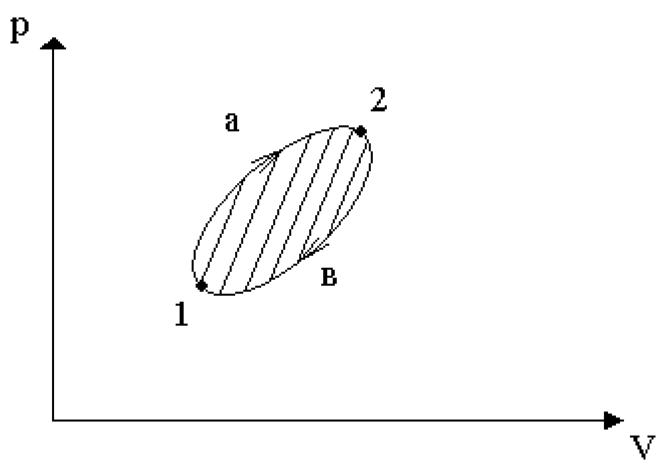


Рисунок 9.1

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1.$$

Тепер необхідно повернути газ в попереднє положення – стиснути газ, але так, щоб робота в цьому процесі A_2 була меншою за A_1. Робоче тіло приводять в контакт з холодильником (температура холодильника менша за температуру робочого тіла), стискують газ, здійснюючи роботу A_2 (2в1 на рис.9.1). Холодильник за цих умов одержить кількість теплоти Q_2:

$$-Q_2 = U_1 - U_2 - A_2.$$

Тоді коефіцієнт корисної дії такої теплової машини дорівнює

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

а робота A, виконана за цикл дорівнює площі заштрихованої фігури на рис.9.1.

Якщо $Q_2 = 0$, тобто кількість теплоти, що передається холодильнику дорівнює нулю, то одержимо теплову машину, що має $\eta = 1$. Така машина могла б повністю перетворювати на роботу всю теплоту, яка одержана від нагрівача. Створення такої теплової машини не забороняється першим законом термодинаміки. Таку теплову машину німецький вчений В.Оствальд (1853 – 1932 рр.) назвав *вічним двигуном другого роду.* Такий двигун міг би працювати за рахунок практично невичерпних джерел внутрішньої енергії, наприклад, енергії води морів та океанів. Але результати експериментів доводять, що таку ідеальну теплову машину не можна створити.

Робота теплових машин вперше розглянута французьким дослідником Н.Карно (1796 – 1832 рр.) в 1824 році. Розглянемо оборотний цикл, що складається з двох ізотерм та двох адіабат – цикл Карно (рис.9.2). На ділянці 1–2 відбувається ізотермічне розширення газу, який знаходиться в тепловому контакті з нагрівачем, що має температуру T_1. Газ ізотермічно переходить до стану 2, одержавши кількість теплоти Q_1 від нагрівача. Перехід 2–3 – адіабатне розширення газу, при цьому температура газу зменшується від T_1 до T_2. В процесі 3–4 відбувається ізотермічний стиск газу, що знаходиться в контакті з холодильником при температурі T_2. Газ на цьому етапі віддає холодильнику кількість теплоти Q_2. Перехід 4–1– адіабатний стиск газу, температура збільшується від T_2 до T_1. Використовуючи перший закон термодинаміки (8.5) та розрахунки роботи в ізотермічному процесі (8.9), внутрішньої енергії ідеального газу (8.8), знайдемо роботу на окремих ділянках циклу Карно:

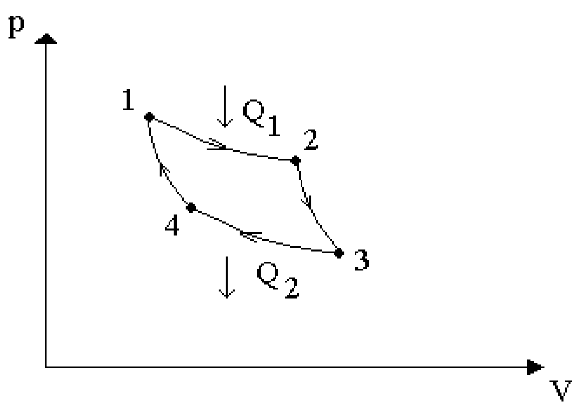


Рисунок 9.2

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1; \qquad (9.1)$$

$$A_{23} = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1);$$
$$A_{34} = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2; \tag{9.2}$$
$$A_{41} = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2).$$

Тоді повна робота газу за цикл Карно дорівнює:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2;$$
$$A = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Використовуючи рівняння адіабати (8.15), запишемо

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}; \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad ;$$

звідки

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тоді коефіцієнт корисної дії машини, що здійснює цикл Карно, дорівнює

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{9.3}$$

де T_1 – температура нагрівача, T_2 – температура холодильника.

Коефіцієнт корисної теплової машини, що здійснює цикл Карно, визначається тільки температурою нагрівача T_1 та холодильника T_2, не залежить від природи робочого тіла – це зміст *теореми Карно.* Така теплова машина має найбільший коефіцієнт корисної дії, порівняно з іншими тепловими машинами, у яких такі ж граничні температури. Величина $\eta < 1$. Тільки у випадку $T_1 \to \infty$ або $T_2 \to 0$ $\eta \to 1$, що неможливо здійснити.

Якщо двигун працює за оберненим циклом Карно $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$, то відбувається передача теплоти від холодного тіла до гарячого за рахунок роботи зовнішніх сил. За таким принципом працюють холодильні установки. Але такий процес супроводжується переходом теплоти від тіла, яке охолоджується, в навколишнє середовище.

9.3 Ентропія. Другий закон термодинаміки

В ізотермічних процесах 1-2 та 3-4 циклу Карно із рівнянь (9.1) – (9.2) одержимо

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \qquad (9.4)$$

Величина Q/T називається зведеною теплотою. (9.4) означає, що сума зведених теплот в оборотному циклі Карно дорівнює нулю. Цей висновок можна поширити на довільні цикли, розглядаючи їх як сукупність елементарних циклів Карно. Тоді (9.4) можна узагальнити для довільного оборотного циклу:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \qquad (9.5)$$

Закон (9.5) означає, що інтеграл по довільному контуру від зведеної теплоти за оборотний цикл дорівнює нулю. Тоді із (9.5) випливає, що підінтегральна функція є повним диференціалом деякої функції стану термодинамічної системи:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \qquad (9.6)$$

Функцію S вперше ввів німецький вчений Р.Клаузіус (1822-1888 рр.) в 1854 р., назвав її *ентропією.* Ентропія – однозначна функція стану системи, якби це було не так, то можна було б створити вічний двигун другого роду.

Ентропія – функція стану, не залежить від процесу переходу від початкового до кінцевого стану, є адитивною величиною. Із теореми Карно к.к.д. теплової машини, що працює за необоротним циклом η, менший за к.к.д. машини, що працює за оборотним циклом η_0:

$$\eta < \eta_0, \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1};$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \qquad (9.7)$$

Нерівність (9.7) – нерівність Клаузіуса, знак рівності тут відповідає оборотним процесам. Для необоротних процесів сума зведених теплот менша за нуль. Тоді нерівність Клаузіуса для довільного циклу має вигляд:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 . \qquad (9.8)$$

Рівняння (9.6) – (9.8) – визначають існування ентропії, як функції стану термодинамічної системи, яка збільшується в необоротних процесах та не зменшується для ізольованих систем. Ці твердження складають зміст другого закону термодинаміки, як закону зростання ентропії. Аналогічний вираз *другого закону термодинаміки* в диференціальній формі:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} . \qquad (9.9)$$

Для всіх необоротних процесів в ізольованій системі ентропія зростає, для оборотних процесів ентропія системи не змінюється. Реальні природні процеси є необоротними, тільки в окремих випадках процеси можна наближено вважати необоротними. Тому ентропія ізольованої системи не зменшується, не зникає. Якщо всі необоротні процеси в ізольованій системі завершуються, то подальшого зростання ентропії не буде, ентропія сягає максимального значення. *Ентропія ізольованої системи наближається до максимуму.*

Знайти зміну ентропії в різних оборотних процесах можна, використовуючи формулу

$$dS = \frac{1}{T}(dU + \delta A) .$$

Другий закон (друге начало) термодинаміки встановлено на основі узагальнення експериментальних досліджень, цей закон встановлює можливі межі перетворення теплоти в роботу, визначає напрям процесів. Можна навести декілька еквівалентних формулювань *другого закону термодинаміки:*

а) неможливо провести такий коловий процес, єдиним результатом якого є здійснення роботи за рахунок охолодження одного тіла (У.Томсон, 1851 р.);

б) теплота не може сама собою переходити від менш нагрітого тіла до більш нагрітого (Р.Клаузіус, 1850 р.);

в) вічний двигун другого роду неможливий (В.Оствальд).

Найбільш універсальним математичним виразом другого закону термодинаміки є (9.9) – закон зростання ентропії ізольованої системи. В розділі 10 розглядається статистичний смисл поняття ентропії – міри хаотичності, невпорядкованості системи, міри ймовірності термодинамічного стану (розділ 10.4).

Другий закон термодинаміки є основою для визначення термодинамічної шкали температур, яка не залежить від термометричної речовини та будови термометра. В основі такої абсолютної термодинамічної шкали температур лежить теорема Карно, відповідно до якої к.к.д. циклу Карно залежить тільки від температури нагрівача та холодильника і не залежить від будови теплової машини та природи робочого тіла (9.3). За цією шкалою єдиною визначальною точкою є температура потрійної точки води – 273,16 К. Докладніше про абсолютну термодинамічну шкалу див. в [1] та [3].

10 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ГАЗІВ

10.1 Молекулярно-кінетичне тлумачення тиску та температури

Всі матеріальні тіла складаються з великої кількості атомів і молекул, які перебувають в хаотичному русі. Якщо термодинаміка встановлює закони поведінки термодинамічних систем, не розглядаючи мікроскопічний рух молекул, то статистичний метод ґрунтується на встановленні поведінки макросистем на основі розгляду особливостей теплового руху молекул. Математичними методами молекулярної фізики є теорія ймовірностей та математична статистика.

Модель ідеального газу за молекулярно-кінетичною теорією – це сферичні молекули, розмірами яких можна знехтувати, які рухаються так, що всі напрямки руху є рівноправними та рівноймовірними. Зіткнення молекул між собою та із стінками посудини відбуваються за законами пружних ударів. В проміжках між зіткненнями молекули рухаються прямолінійно та рівномірно, потенціальна енергія їх взаємодії дорівнює нулю.

Тиск газу на стінки посудини, в якій він знаходиться, зумовлений ударами молекул. При кожному ударі молекули об стінку змінюється імпульс молекули, а за другим та третім законом Ньютона виникає сила, яка діє на стінку посудини. Відношення сили, що діє на стінку з боку молекул, до площі стінки визначає величину тиску газу.

Величину тиску газу, який знаходиться в стані рівноваги, можна знайти використовуючи закони класичної механіки та основні положення молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу [1].

Відповідно до *основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу:*

$$p = \frac{2}{3} n < E_k >, \tag{10.1}$$

де p – тиск, n – концентрація молекул газу, $< E_k > = < \frac{mv^2}{2} >$ - середня кінетична енергія молекул газу.

Це рівняння встановлює взаємозв’язок між мікроскопічними величинами (масою та швидкістю молекул) та макроскопічною величиною – тиском. Тиск газу є статистичною величиною, виникає внаслідок ударів великої кількості молекул. Якщо в посудині знаходиться невелика кількість молекул, то їх зіткнення із стінками відбуваються рідко та нерегулярно (час між окремими зіткненнями великий). Якщо число молекул велике, то зіткнення молекул із стінками відбувається дуже часто. Тоді нескінченно малі сили дії окремих молекул на стінку складають повну силу, що діє на стінку. Середнє за часом значення цієї сили, що діє на одиницю площі, і визначає тиск газу.

Порівняємо рівняння стану ідеального газу (9.2) та основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії (10.1):

$$p = \frac{2}{3} n < E_k >; \qquad p = nkT .$$

Тоді

$$< E_k > = \frac{3}{2} kT , \tag{10.2}$$

Середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу прямо пропорційна абсолютній температурі. Тобто *температура – міра середньої кінетичної енергії поступального руху молекул ідеального газу в стані термодинамічної рівноваги.*

Поступальний рух молекули ідеального газу повністю визначається трьома координатами. Тому для молекули ідеального газу є три ступені свободи (ступені вільності). *Числом ступенів свободи* називають найменше число незалежних величин, що визначають положення тіла. Для молекул одноатомного газу число ступенів свободи $i = 3$, для двоатомного газу, відстань між атомами якого не змінюється, $i = 5$ (два ступені свободи обертального та три поступального рухів). Для молекул багатоатомного газу $i = 6$ (три ступені свободи поступального руху та три обертального руху). Три взаємоперпендикулярні напрями поступального руху одноатомної молекули є рівноймовірними, тому на кожний ступінь свободи припадає енергія $1/2\, kT$. Це твердження, що називається *законом рівнорозподілу енергії за ступенями свободи,* доведено методами статистичної фізики австрійським фізиком-теоретиком Л.Больцманом (1844 – 1906 рр.) та англійським фізиком Дж.Максвеллом (1831 – 1874 рр.). Тоді середня кінетична енергія молекул газу, який має i ступенів свободи, дорівнює

$$< E_k > = \frac{i}{2} kT . \tag{10.3}$$

Молекули ідеального газу не взаємодіють між собою, тоді внутрішня енергія ідеального газу дорівнює добутку середньої енергії молекули (10.3) на число Авогадро N_A та число молів:

$$U = \frac{m}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT .$$

Тоді молярна теплоємність ідеального газу в ізохорному процесі дорівнює

$$C_V = \frac{i}{2} R . \tag{10.4}$$

А молярна теплоємність ізобарного процесу

$$C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2} R . \tag{10.5}$$

Відповідно до класичної теорії теплоємності C_P та C_V (10.4 – 10.5) не залежать від температури та визначаються тільки числом ступенів свободи i. Але такі висновки класичної фізики не підтверджуються експериментально. Тільки для окремих температурних інтервалів та досить великих температур експериментальні залежності теплоємності від температури збігаються з висновками класичної статистичної фізики. Причина такої розбіжності в тому, що рух молекул описується квантовою теорією [4], згідно з якою енергія коливального та обертального рухів молекул є величиною дискретною.

10.2 Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями

Якщо газ знаходиться в стані термодинамічної рівноваги, то його температура $T = const$, але це твердження не означає, що в стані рівноваги модулі швидкості молекул однакові. Адже молекули безперервно стикаються між собою та із стінками посудини і їх швидкості внаслідок цього змінюються. Всі напрями руху молекул рівноймовірні, а швидкість окремої молекули в даний момент часу величина випадкова. Тобто молекула навіть протягом невеликих проміжків часу змінює напрям та величину швидкості – існує розподіл молекул за швидкостями. Це означає, що швидкість в інтервалі від $\vec{v}$ до $\vec{v} + d\vec{v}$ мають певне число молекул. Оскільки в стані рівноваги сталою є температура, яка пов'язана із середньою кінетичною енергією молекул (10.3), то внаслідок принципу детальної рівноваги скільки молекул покидають інтервал швидкості, стільки ж їх і прибувають до цього інтервалу за малий проміжок часу. Тобто розподіл молекул за швидкостями є стабільним, не залежить від часу. Закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями встановлено Дж.Максвеллом в 1859 р. Розглянемо основні властивості розподілу Максвелла. Нехай швидкість в інтервалі від v до $v + dv$ мають dN молекул. Тоді імовірність того, що молекула має швидкість в цьому інтервалі дорівнює

$$dP = \frac{dN}{N},$$

де N – повне число молекул в посудині.

Ця ймовірність прямо пропорційна інтервалу швидкості:

$$dP = f(v)dv, \tag{10.6}$$

де $f(v)$ - функція розподілу за швидкостями, яка має зміст густини ймовірності розподілу молекул за швидкостями.

Тоді

$$f(v)dv = \frac{dN}{N} \tag{10.7}$$

– відносна доля молекул, які мають швидкість в інтервалі від v до $v + dv$. Із (10.7) знаходимо

$$dN = Nf(v)dv,$$

після інтегрування цього виразу одержимо повне число частинок:

$$\int dN = \int_0^\infty Nf(v)dv; \quad N = N\int_0^\infty f(v)dv;$$

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1. \tag{10.8}$$

Умова (10.8) – умова нормування функції розподілу Максвелла, означає, що ймовірність того, що молекула має швидкість в інтервалі від нуля до нескінченності, дорівнює одиниці.

Вигляд функції розподілу Максвелла за абсолютним значенням швидкості можна одержати, використовуючи методи статистичної фізики (наприклад [1], [5]). Таке доведення виходить за рамки курсу загальної фізики, тому наведемо цей закон без доведення:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \tag{10.9}$$

де m – маса молекули, k – стала Больцмана.

Залежність функції розподілу Максвелла від абсолютного значення швидкості зображена на рис.10.1 для різних температур $T_1 < T_2 < T_3$.

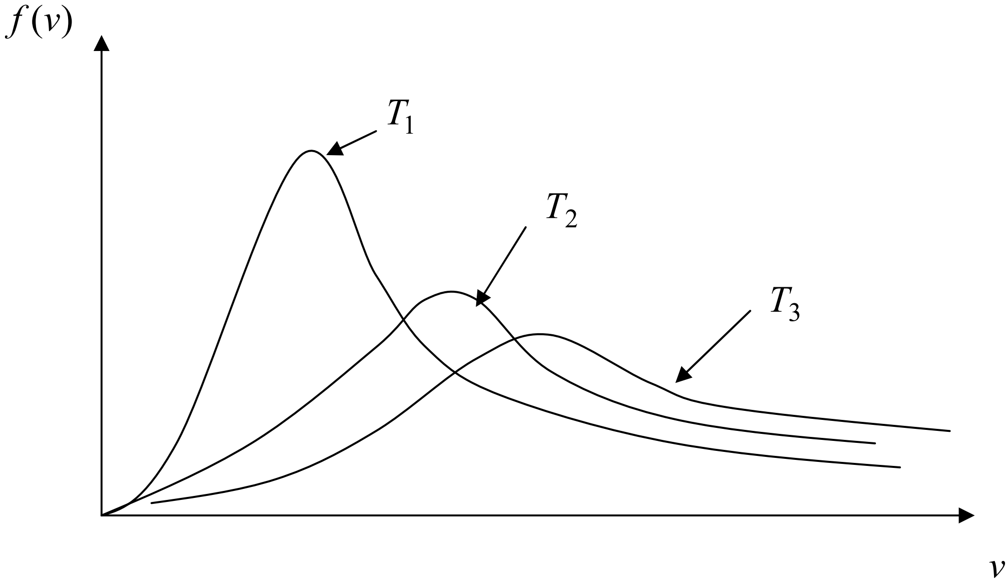


Рисунок 10.1

Якщо змінюється температура газу, то зміщується максимум функції $f(v)$ в бік зростання швидкості, а площа під графіком $f(v)$ не змінюється (10.8).

Використовуючи (10.9), можна знайти середню $<v>$, середньоквадратичну $v_k = \sqrt{<v^2>}$, та найбільш імовірну $v_{\max}$ швидкості молекул. $v_{\max}$ відповідає максимуму функції розподілу $f(v)$ (10.9):

$$\left.\frac{df}{dv}\right|_{v=v_{\max}} = 0;$$

$$4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot 2v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) - 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{mv}{kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = 0;$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{10.10}$$

Середню швидкість знаходимо з умови

$$<v> = \int_0^\infty f(v) v dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{10.11}$$

А середнє значення квадрата швидкості молекул знаходимо з (10.2):

$$<v^2> = \frac{3kT}{m}.$$

Тоді середньоквадратична швидкість дорівнює

$$v_k = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} . \qquad (10.12)$$

Закон Максвелла відображає статистичні закономірності хаотичного теплового руху молекул. Не зважаючи на випадковий, хаотичний рух молекул, сукупність великої кількості молекул підпорядкована закону (10.9), який має фундаментальне значення для молекулярної фізики.

Експериментальну перевірку закону Максвелла вперше здійснено в дослідах німецького вченого О.Штерна (1888 – 1969 рр.) в 1920 р. Більш точна перевірка здійснена в дослідах Елдріджа та Ламмерта в 1926 – 1929 рр. Експерименти довели з високою точністю справедливість закону Максвелла.

10.3 Барометрична формула. Розподіл Максвелла-Больцмана

Розподіл Максвелла не враховує зовнішніх сил, що діють на молекули. Але поблизу поверхні Землі на молекули діють сили тяжіння. Тому розподіл молекул газу в атмосфері визначається тепловим рухом та дією сил тяжіння. Внаслідок цього тиск повітря зменшується з висотою.

Розглянемо вертикальний стовп повітря, що знаходиться в стані термодинамічної рівноваги при температурі T (рис.10.2). Виділимо тонкий шар повітря висотою dh, густина повітря $\rho -$ стала величина. При збільшенні висоти на dh тиск на верхню поверхню шару повітря зменшується на

$$dp = -\rho g dh .$$

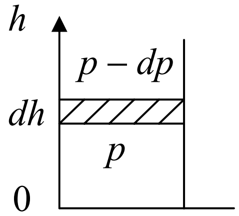


Рисунок 10.2

Якщо m – маса молекули, а $n -$ концентрація молекул, то $\rho = mn$. Концентрацію молекул знаходимо із рівняння стану ідеального газу (9.1): $n = p / kT$. Тоді

$$dp = -\frac{mg}{kT} \rho dh .$$

Розділяючи змінні та інтегруючи одержаний вираз:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT}dh\,; \qquad \int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT}\int\limits_{0}^{h}dh\,;$$

$$p = p_0\, exp\left(-\frac{mg}{kT}h\right). \tag{10.13}$$

(10.13) – барометрична формула, це рівняння дозволяє знайти тиск газу p на висоті h; p_0 – тиск газу на висоті $h = 0$. Для невеликих висот барометрична формула дозволяє досить точно визначити тиск. При збільшенні висоти тиск експоненціально зменшується.

Використовуючи (10.13), знайдемо закон розподілу молекул за висотою в полі тяжіння. Знайдемо концентрацію молекул n:

$$p = nkT\,; \qquad n = n_0\, \exp\left(-\frac{mg}{kT}h\right);$$

$$n = n_0\, \exp\left(-\frac{\Delta U}{kT}\right), \tag{10.14}$$

де n_0 – концентрація молекул на висоті $h = 0$; ΔU – зміна потенціальної енергії молекул в полі сили тяжіння.

Закон (10.14) – закон Больцмана рівноважного розподілу частинок у зовнішньому потенціальному полі. Відповідно до (10.14) число частинок в одиниці об'єму експоненціально зменшується при збільшенні потенціальної енергії.

Знайдемо число dn молекул, що знаходяться в одиниці об'єму в шарі на висоті між h і $h + dh$:

$$dn = n_0\, exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)dh,$$

а використовуючи розподіл Максвелла (10.9), знайдемо число молекул, швидкості яких є в інтервалі від v до $v + dv$ та ці молекули одночасно мають потенціальну енергію U:

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}}n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2/2 + \Delta U}{kT}\right)v^2 dv\,. \tag{10.15}$$

Закон (10.15) – закон розподілу Максвелла-Больцмана молекул за швидкостями та потенціальними енергіями.

10.4 Взаємозв’язок ентропії та ймовірності стану термодинамічної системи

Другий закон термодинаміки, як закон зростання ентропії вказує на те, що ентропія ізольованої системи досягає максимального значення. Перехід системи до стану термодинамічної рівноваги найбільш імовірний, тобто між ентропією та імовірністю стану термодинамічної системи є функціональний зв’язок.

Цей зв’язок встановлює формула Больцмана:

$$S = k \ln \Omega, \tag{10.16}$$

де Ω – термодинамічна ймовірність даного стану, або статистична вага стану.

Термодинамічна ймовірність дорівнює числу мікростанів, що відповідають даному макростану системи. Доведення формули Больцмана (10.16) проведено в курсі статистичної фізики, наприклад, в [5].

Формула Больцмана стверджує, що термодинамічна ймовірність стану ізольованої системи не зменшується, сягаючи максимального значення для рівноважного стану. Стан системи змінюється так, що відбувається перехід від менш імовірного до більш імовірного стану. В стані термодинамічної рівноваги термодинамічна ймовірність максимальна. Але навіть найменш імовірні стани, відповідно до теорії ймовірності, не є неможливими. Тоді можливі самовільні відхилення фізичних величин від середніх значень, зумовлені тепловим рухом, які називаються флуктуаціями. Відносно великі флуктуації зустрічаються тільки в системах з малим числом частинок. Поблизу стану рівноваги флуктуації величин в бік збільшення чи зменшення рівноймовірні.

Наслідком (10.16) є можливість переходу системи з більш імовірного стану до менш імовірного, але такий перехід можливий лише тоді, коли відбувається процес компенсації в зовнішніх тілах (у відповідності до другого закону термодинаміки).

Другий закон термодинаміки має статистичний характер, вказує на найбільш імовірні переходи системи, розкриваючи фізичний зміст ентропії як міри наближення стану термодинамічної системи до рівноваги, міри хаотичності та невпорядкованості стану системи.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1 – М.: Наука, 1970. – 512 с.
2. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. – К.: Наук.думка, 1989. – 864 с.

3. Базаров И.П. Термодинамика. – М.: Высш.шк., 1991. – 376 с.
4. Квантова та ядерна фізика: Навч.посібник / Упоряд.: М.І.Українець, Т.Б.Ткаченко, В.В.Калінін, М.А.Оробінський, С.І.Мельник, А.І.Рибалка, В.І.Бедратий, О.Є.Гетманова, С.С.Денисов, В.Л.Мельник, А.В.Безуглий, А.І.Козарь. – Харків: ХТУРЕ, 1998. – 124 с.
5. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. – М.: Высш.шк., 1973. – 280 с.

ЗМІСТ

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Упорядники:	ТКАЧЕНКО	Тетяна Борисівна
	УКРАЇНЕЦЬ	Микола Іванович
	КАЛІНІН	Віталій Веніамінович
	РИБАЛКА	Антоніна Іванівна
	БЕЗУГЛИЙ	Анатолій Васильович
	КОЗАРЬ	Анатолій Іванович
	МЕЛЬНИК	Сергій Іванович
	МАСЛОВА	Валентина Олексіївна

Відповідальний випусковий В.О.Стороженко
Редактор А.П.Кузнецов

План 2001, поз. 3.

Підп. до друку 3.01.2001	Формат 60x84 1/16	Папір друк.
Умов. друк. арк. 6,2.	Облік вид. арк. 5,5.	Тираж 600 прим.
Зам. № 1-34.	Ціна договірна.	

ХТУРЕ. 61166, Харків, просп. Леніна, 14

Надруковано в учбово-виробничому видавничо-поліграфічному центрі ХТУРЕ
61166, Харків, просп. Леніна, 14