КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. Ф. КОВАЛЕНКО

З А Г А Л Ь Н А Ф І З И К А

В ПРИКЛАДАХ, ЗАПИТАННЯХ І ВІДПОВІДЯХ

МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів

КИЇВський УНІВЕРСИТЕТ 2011

УДК 531/534(076.3)
ББК 22.2я73
К56

Рецензент

д-р фіз.-мат. наук, проф. О. В. Слободянюк

Рекомендовано до друку вченою радою радіофізичного факультету
(протокол № 4 від 8 листопада 2010 року)

Коваленко, В. Ф.

К56 Загальна фізика в прикладах, запитаннях і відповідях. Механіка : навчальний посібник / В. Ф. Коваленко. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 223 с.

ISBN 978-966-439-382-6

Посібник містить запитання і відповіді, а також приклади розв'язування задач з розділу загальної фізики "Механіка". Він допоможе студентам під час самостійної роботи опанувати більш глибоке розуміння лекційного матеріалу з уже частково вивчених певних розділів механіки, свідомо використовувати фізичні закони, знаходити відповіді на запитання, що виникли, і ті, що можуть виникнути, набути практичних навичок з розв'язування задач.

Призначено студентам фізичних факультетів університетів. Може бути корисним також для викладачів фізики в навчальних закладах 3-4 рівнів акредитації, учням і викладачам спеціалізованих шкіл і фізико-математичних ліцеїв.

УДК 531/534(076.3)
ББК 22.2я73

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України (лист № 1/11-8064 від 29.08.11)

ISBN 978-966-439 382-6

ЗМІСТ

ВСТУП

Існує велика кількість підручників для засвоєння лекційного матеріалу з курсів загальної фізики різних ступенів складності, обсягу, якості подачі матеріалу, виданих в Україні та за її межами (див. список літератури). Кожний студент фізичних спеціальностей університету з будь-яким рівнем спеціальної підготовки та здібностей за бажанням може знайти "свій підручник" із фізики. При цьому від студентів можна почути прохання порекомендувати посібник, який допоміг би їм "навчитись розв'язувати задачі і краще розуміти викладене". Справді, існує невеликий перелік підручників і посібників, які допомагають оволодіти деякими навичками з розв'язування задач. Проте, на жаль, підручники подібного типу або являють собою бібліографічну рідкість (напр., [15], оскільки видані більш ніж 40 років тому, або це закордонні видання (напр., [18]), або ж мають невеликий наклад для студентів окремих факультетів. Тому виникла потреба у створенні спеціального навчального посібника з розв'язування задач.

Окрім того, немає посібників, які допомогли б студенту знаходити відповіді на запитання, що стосуються вже частково знайомого йому розділу фізики, сприяли б більш глибокому розумінню суті розглянутих на лекційних заняттях фізичних явищ. Прикладом такого посібника може бути хіба що навчальний посібник Є. І. Бутикова та ін.[1], призначений для слухачів підготовчих відділень вищих навчальних закладів, учнів фізико-математичних шкіл і студентів технікумів.

Усе це спонукало авторів до написання цього посібника з метою допомогти студентам в їх самостійній роботі з опанування більш глибокого розуміння лекційного матеріалу та сталих навичок розв'язання задач із загальної фізики.

Планувалось, що підручник буде складатись із шести томів, які відображали б усі розділи загальної фізики. Спільним для колективів авторів кожного із томів підручника є те, що всі вони викладають на кафедрі електрофізики радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Кожна розглянута тема посібника містить такі підрозділи:

- "Короткі теоретичні відомості";
- "Методичні вказівки та поради";
- "Запитання та відповіді";
- "Приклади розв'язування задач".

Підрозділ **"Короткі теоретичні відомості"** містить інформацію, яку необхідно нагадати студентам перед тим, як почати застосовувати на практиці набуті під час

---

[1] Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратов А. С. Физика в примерах и задачах. – М., 1983.

вивчення лекційного матеріалу. Сподіватись на достатність наведеного в підрозділі матеріалу для розв'язування задач і відповідей на відповідні запитання, безумовно, не можна. Однак значна кількість підручників із курсів загальної фізики, частину з яких наведено у списку **літератури**, має допомогти повною мірою вирішити цю проблему.

Матеріал з підрозділу **"Методичні вказівки та поради"** спрямований на поради щодо практичного застосування теоретичних відомостей. Вказівки і поради мають помітний авторський відтінок і можуть бути суттєво видозмінені та доповнені кожним, хто забажає розібратись у змісті розглянутого матеріалу і почне творчо застосовувати ці знання для розв'язання конкретних задач.

Підрозділ **"Запитання та відповіді"** фактично містить розв'язування задач якісного характеру. Запитання підбирались таким чином, щоб відповіді на них потребували не механічного запам'ятовування матеріалу, а глибокого розуміння та вміння творчо його використовувати. У відповідях автори намагались викласти основну ідею, на якій базується відповідь. Більш поглиблені відповіді на запитання потрібно самостійно шукати, працюючи з літературою. Запитання і відповіді до них можуть бути використані студентами під час підготовки до іспиту, а викладачами – під час іспиту.

У підрозділі **"Приклади розв'язування задач"** розглянуто найбільш типові задачі, які розв'язані методами, що дозволяють застосувати їх в подальшому як універсальні. Автори спеціально не ставили за мету розв'язання задач підвищеної складності, хоча частину наведених задач можна вважати саме такою.

Деяка особливість подачі матеріалу з розділу "Механіка" порівняно з іншими розділами загальної фізики пов'язана з тим, що до нього звертаються студенти, які тільки починають оволодівати навичками такої роботи і ще не звикли до вимог і специфіки викладання фізики в університеті. Крім того, з частиною матеріалу цього розділу (особливо з його першими темами) студентам доводиться працювати в період, коли прикладний апарат вищої математики їм відомий ще недостатньо. Це стосується базових понять векторної та тензорної алгебри, диференціального та інтегрального числення тощо. Тому в деяких прикладах і відповідях до запитань надається більш широкий і детальний розгляд математичних прийомів шляхів розв'язування конкретної задачі.

Посібник призначено для студентів факультетів фізичного профілю класичних університетів. Частково викладений матеріал доступний не тільки студентам вищих навчальних закладів, але й учням спеціалізованих шкіл і ліцеїв фізико-математичного профілю. Він може бути корисним для викладачів фізики в навчальних закладах третього-четвертого рівнів акредитації.

Загальні поради щодо розв'язування задач

1. Безумовно, братись за розв'язування задачі має сенс тільки за умови вільного володіння теоретичним матеріалом з відповідної теми. Короткі теоретичні відомості, наведені на початку кожного розділу слугують хіба що як довідковий матеріал. Тому обов'язково необхідно спочатку вивчити теоретичний матеріал з даної теми за спеціальним підручником із загальної фізики.

2. Уважно прочитайте умову задачі, зрозумійте її зміст. Це дуже важливо! Не поспішайте, не починайте розв'язувати задачу доки правильно не зрозумієте її умову. Зазвичай кожне слово в умові задачі має певне смислове фізичне навантаження.

3. Спробуйте вже на початку роботи окреслити подумки хід розв'язування задачі. Подумайте, чи наявні всі необхідні для цього дані в умові задачі, чи не потрібно скористатись додатковим матеріалом (напр. таблицями, які зазвичай наведено наприкінці кожного збірника задач).

4. Бажано з'ясувати, якими факторами ми нехтуємо в цій задачі, до яких змін може привести їх врахування.

5. Коротко запишіть умову задачі.

6. Усі дані при розв'язуванні задачі слід наводити в одній системі одиниць, бажано в системі СІ. Зверніть увагу на те, що формули в різних системах одиниць можуть відрізнятись коефіцієнтами.

7. Завжди, там, де це можливо, зобразіть схему або рисунок до задачі. Це значно полегшить її розв'язування.

8. Розв'язуйте задачу в загальному, аналітичному вигляді. Відповідь задачі можна вважати отриманою, якщо вона має вигляд залежності шуканої величини від відомих величин, заданих в умові задачі та даних з таблиць.

9. Якщо в умові задачі дані про фізичні величини наведені у числах, відповідь, окрім її аналітичного виразу, має містити і чисельне її значення. Це особливо важливо для задач з прикладної та експериментальної фізики. Числова відповідь дозволяє зробити оцінку коректності умови та розв'язку задачі. Інколи така оцінка дозволяє зробити висновок про невірний розв'язок задачі. Наприклад, швидкість світла не може бути більшою за відому величину, швидкість супутника на орбіті Землі – більша за II і менша за I космічні швидкості тощо.

10. Розв'язуючи задачу, у процесі запису розв'язку треба пам'ятати не тільки про суть, але й про форму. Наприклад, типовими недоліками є введення нових (відсутніх в умові задачі) величин без їх пояснення. Бажано, щоб розв'язок складався не

тільки із формул, але й містив необхідні пояснення. Грубою помилкою вважається відсутність розмірності у числовій формі відповіді для розмірної величини.

11.Виконуючи розрахунки, пам'ятайте, що вони наближені. Числові значення всіх фізичних величин мають свою точність і намагатись отримати максимально можливу кількість знаків у відповіді, яку дозволяє, наприклад, розрядність калькулятора, неправильно.

12.Корисно в деяких випадках при виконанні розрахунків відмовитись від використання калькулятора. Не бійтесь при розрахунках користуватись правилами наближених обчислень. Величину помилки/похибки в 10 % і навіть у 20 %, яку можна при цьому отримати, у задачах із загальної фізики, частіше всього можна вважати припустимою.

13.У ході запису умови та розв'язку задачі не забувайте про розмірність числових значень фізичних величин. У фізиці немає (чи майже немає) безрозмірних величин! Отримавши відповідь, а інколи і на проміжних етапах розв'язку, перевірте розмірність. Невірна розмірність фізичної величини однозначно свідчить про невірну відповідь. Закон розмірності виконується завжди!

14.Під час розв'язування задачі, виконуючи математичні розрахунки, особливо бажано не забувати про фізичний зміст задачі і намагатись уже в проміжних результатах знаходити фізичні закономірності. Отримавши остаточний результат (відповідь) в аналітичному вигляді, слід намагатись його проаналізувати: з'ясувати, від яких фізичних параметрів системи та умов експерименту залежить знайдена величина, як вона змінюється зі зміною величин, від яких вона залежить.

15.Якщо це можливо, дослідіть отриману в аналітичному вигляді відповідь для граничних часткових випадків. Наприклад, у задачах з релятивістської механіки, при спрямуванні величини $\frac{\upsilon}{c} \to 0$ повинні отримати відомий з ньютонівської механіки результат. Правильно проведений аналіз не тільки переконає в правильності розв'язку, але й допоможе глибше зрозуміти фізичний зміст задачі.

16.Не хвилюйтесь, якщо ви розв'язали задачу не в загальноприйнятий спосіб і при цьому не зробили помилок у математичних викладках та у фізичних міркуваннях. Не існує єдиного, безальтернативного способу розв'язування задач. Може йтися лише про оптимальність шляху, "красу розв'язку". Найголовніше – розв'язок задачі має бути правильним (як кажуть, коректним) з точки зору фізики та математики.

Перелік позначень і скорочень

АЧХ	– амплітудно-частотна характеристика;
ЗЗ	– закони збереження;
ЗЗЕ	– закон збереження енергії;
ЗЗІ	– закон збереження імпульсу;
ЗЗМІ	– закон збереження моменту імпульсу;
ІСВ	– інерціальна система відліку;
к.ч.	– комплексне число;
МВО	– миттєва вісь обертання;
МТ	– матеріальна точка;
НІСВ	– неінерціальна система відліку;
СВ	– система відліку;
СК	– система координат;
СМТ	– система матеріальних точок або тіл;
СТВ	– спеціальна теорія відносності;
ФЧХ	– фазочастотна характеристика
ц.м.	– центр мас
Ц-система, або Ц-СВ	– система відліку, яка пов'язана із центром мас

1. КІНЕМАТИКА

1.1. Короткі теоретичні відомості

- Положення точки в просторі задається радіус-вектором

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \tag{1.1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти); x, y, z – координати матеріальної точки.

- Миттєва швидкість матеріальної точки (МТ)

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon_x \cdot \vec{i} + \upsilon_y \cdot \vec{j} + \upsilon_z \cdot \vec{k}, \tag{1.2}$$

де проекції вектора $\vec{\upsilon}$ на осі координат відповідно дорівнюють:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.3}$$

- Модуль вектора швидкості

$$|\vec{\upsilon}| \equiv \upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}. \tag{1.4}$$

- Вектор середньої швидкості за час Δt:

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.5}$$

де $\Delta \vec{r}$ – вектор переміщення.

- Скалярна середня швидкість МТ за час Δt

$$\langle \upsilon \rangle_{scal} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + ...}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + ...} = \frac{\sum_i \Delta s_i}{\sum_i \Delta t_i}, \tag{1.6}$$

де Δs – увесь пройдений матеріальною точкою шлях; Δt – час, за який МТ проходить шлях Δs.

- Прискорення матеріальної точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.7}$$

- Шлях, пройдений матеріальною точкою, швидкість якої змінюється із часом за законом $\upsilon(t)$, за проміжок часу від t_1 до t_2, дорівнює

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\,dt \,. \qquad (1.8)$$

- У випадку криволінійного руху повне прискорення МТ

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}\,, \qquad (1.9)$$

де a_n, a_τ – нормальна та тангенціальна компоненти прискорення, відповідно; R – радіус кривизни траєкторії в даній точці; $\vec{\tau}, \vec{n}$ – орти дотичної та нормалі до траєкторії в даній точці траєкторії, відповідно.

- Модуль вектора повного прискорення

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}\,. \qquad (1.10)$$

- Миттєва кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.11)$$

- Кутове прискорення

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (1.12)$$

- Лінійна та кутова швидкості, пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{R}\right], \qquad (1.13)$$

де $\vec{R}$ – радіус-вектор, що проведений від миттєвого центра кривизни траєкторії до точки траєкторії, де розташована в даний момент часу матеріальна точка.

1.2. Методичні вказівки та поради

1. Розглядати механічний рух або розв'язувати задачі з механіки можна лише після вибору системи відліку, відносно якої цей рух розглядається. Вибір системи відліку (СВ) визначається міркуваннями зручності. Часто за СВ зручно обирати Землю (нерухомі відносно Землі предмети). Для спостерігача, який перебуває у вагоні потягу, системою відліку може бути рухомий вагон. У деяких задачах зручно перейти до СВ, пов'язаної із системою зірок тощо. Варіантів вибору СВ безліч, але серед всіх можливих варіантів є найбільш доцільний.

2. Усі системи відліку поділяються на лабораторні (нерухомі) і рухомі, а також – на інерціальні та неінерціальні. Радимо добре розібратись в тому, чим вони відрізняються.

3. Як відомо, існують декілька систем координат (СК), якими широко користуються у фізиці: декартові, полярні, циліндричні, сферичні. Вибір тієї чи іншої СК обумовлений умовою конкретної задачі та характером руху МТ. Можна порадити, не обмежуватись вибором СК одного типу (зазвичай декартової СК). Вдалий вибір СК може помітно спростити розв'язування задачі.

4. Якщо відомий закон руху матеріальної точки $\vec{r}(t)$, то можна розрахувати траєкторію (у двовимірному випадку знайти функцію $y(x)$) і побудувати її графік, а також шляхом послідовного диференціювання функції $\vec{r}(t)$ знайти вектори швидкості $\vec{\upsilon}(t)$ і прискорення $\vec{a}(t)$. З іншого боку, якщо відомі функції $\vec{\upsilon}(t)$ або $\vec{a}(t)$ і початкові умови ($\vec{r}(t_0)$ або $\vec{\upsilon}(t_0)$), то шляхом інтегрування можна знайти закон руху $\vec{r}(t)$.

5. Особливий інтерес у кінематиці проявляють до плоского руху. Основна причина такого інтересу полягає в тому, що для плоского руху довільний або змішаний рух можна відносно легко розкласти на два рухи: поступальний та обертальний.

1.3. Запитання та відповіді

Властивості простору та часу

1.3.1. *Які види матерії вам відомі? Що таке рух? Як співвідносяться рух і матерія?*

У фізиці розрізняють два види матерії – речовину і поле. Увесь розвиток науки свідчить, що матерія перебуває в неперервному і вічному русі. Під рухом розуміють будь-які зміни, що відбуваються з матерією. Найпростіший вид руху – механічний, при якому відбувається переміщення матеріального тіла в просторі. Рух є формою буття матерії. Матерію не можна уявити без руху, так само як і рух без матерії. Усі явища в природі є нічим іншим, як проявом різних видів руху матерії. Спокій має відносний характер, він є окремим випадком руху. Простір, як і час, неможливий без матерії та її руху. Тому рух, простір і час називають *формами існування матерії.*

1.3.2. *Яких поглядів на простір і час дотримуються в класичній (ньютонівській) механіці?*

У механіці Ньютона вважається, що поряд із тривимірним евклідовим простором існує незалежний від нього час. Класична (ньютонівська) механіка базується на використанні законів Евклідової геометрії, у якій для тривимірного простору виконуються "очевидні" закони (аксіоми): сума кутів трикутника дорівнює 180^0; паралельні прямі ніколи не перетинаються тощо. Із досліду відомо, що в повсякденному житті в широких межах відстаней і швидкостей з великою точністю справедлива геометрія Евкліда. В усіх СВ у класичній механіці використовуються аксіоми геометрії Евкліда.

1.3.3. *У яких випадках закони класичної (ньютонівської) механіки не виконуються?*

Існують два обмеження в застосуванні законів ньютонівської механіки: її закони не виконуються за великих швидкостей (у випадку, коли швидкість частинки порівняна зі швидкістю світла c і умовою $\upsilon << c$ скористатись не можна) та у випадку дуже малих розмірів частинки (у мікросвіті, де розглядаються атоми, електрони, елементарні частинки тощо). Відповідно, поведінку таких частинок описують релятивістська механіка (СТВ) і квантова механіка.

1.3.4. *Що таке система відліку? Як обирається система відліку? Які системи відліку ви знаєте?*

Тіло, відносно якого розглядається рух МТ, називається *тілом відліку*. Сукупність нерухомих відносно один одного тіл, щодо яких розглядається рух, утворюють систему відліку. Дуже часто і справедливо СВ вважають також годинник для вимірювання часу в даній СВ. Системи відліку бувають рухомі і нерухомі, а також інерціальні та неінерціальні.

1.3.5. *Що таке система координат? Які системи координат ви знаєте?*

Введення відповідної системи координат (СК) означає введення системи домовленостей про спосіб надання "адреси" кожній точці системи відліку. Таким чином, кожна точка СВ має свою, відмінну від інших "адресу", а кожній адресі відповідає лише одна точка СВ. Система координат являє собою математичну абстракцію, а систему відліку утворюють реальні тіла.

Як відомо, існують декілька систем координат, якими широко користуються у фізиці: декартові, полярна, циліндрична, сферична. На поверхні Землі користуються СК, яка полягає в наданні чисел, що мають розмірність кутового градуса і називаються географічними широтою та довготою точки на поверхні Землі. Ніяких принципових переваг або недоліків різні СК одна над іншою не мають.

1.3.6. *Яка система відліку вважається "нерухомою"? Чому тут останнє слово взято в лапки?*

"Нерухома" СВ – така СВ, що перебуває у стані спокою. Як випливає із I-го закону Ньютона (або із принципу відносності Галілея), стан спокою є відносним: ніякими механічними експериментами, перебуваючи в ІСВ, не можна відрізнити стан спокою від стану рівномірного прямолінійного руху. Саме тому слово "нерухома" взято в лапки. Кажучи про нерухоме тіло, треба не забувати визначати, відносно якої СВ це тіло нерухоме. Проте тіло завжди нерухоме у власній СВ.

1.3.7. *Яка система відліку вважається "абсолютною"? Чому останнє слово взято в лапки? Яка із відомих систем відліку найбільш наближена до "абсолютної"? Чи існує абсолютна система відліку?*

Абсолютної СВ не існує. Є лише якесь наближення до неї. До "абсолютної" СВ найбільш наближеною колись вважалась Земля, потім – Сонце, потім – система зірок, зараз – реліктове випромінювання. Намагання знайти абсолютну СВ у вигляді ефіру, як відомо, були невдалими. Тому тут слово "абсолютна" береться в лапки.

Найбільш наближеною до "абсолютної" системи відліку наразі вважається СВ, пов'язана з так званим реліктовим випромінюванням, яке виникло приблизно 14 млрд років тому після "Великого вибуху" і заповнило Всесвіт. Це випромінювання фіксується сучасними фізичними методами. І хоча абсолютної системи відліку не існує, саме реліктове випромінювання можна вважати своєрідною, виділеною ІСВ, яка найближче серед відомих сучасній науці об'єктів у Всесвіті за своїми властивостями наближена до властивостей абсолютної СВ.

1.3.8. *Що мають на увазі, коли кажуть про однорідність простору, ізотропність простору, однорідність часу?*

Однорідність простору означає еквівалентність усіх точок простору: усі фізичні явища в ізольованій системі МТ відбуваються однаково, незалежно від точки простору. У будь-який точці простору (у Києві, Лондоні, Америці, на Місяці, у Космосі) фізичні закони однакові.

Ізотропність простору означає еквівалентність різних напрямків у просторі. Фізичні закони в ізольованій системі виконуються однаково, незалежно від того, як орієнтована ця система в просторі.

Однорідність часу означає еквівалентність між собою різних моментів часу. Це означає, що всі фізичні процеси відбуваються однаково, незалежно від того, у який конкретно момент часу вони відбуваються: вчора, сьогодні, завтра. З однорідності часу випливає, зокрема, відсутність залежності потенціальної енергії ізольованої системи від часу. У силу однорідності часу початкові умови можуть бути зафіксовані відносно будь-якого моменту часу.

1.3.9. *Які практичні наслідки випливають із факту однорідності простору і дозволяють за початок СК обрати будь-яку точку простору?*

У силу однорідності простору за початок СК може бути обрана будь-яка (довільна) точка простору. Фактично, однорідність простору визначає те, що всі фізичні закони виконуються однаково в усіх ІСВ.

1.3.10. *Як практично здійснюється реєстрація визначених моментів часу? Як ця операція пов'язана з координатами годинника в просторі? Що таке єдиний час?*

Відповідні моменти часу визначаються за допомогою годинника, який розташований у тій точці СВ, де відбувається дана подія. Однак із того, що час є відносним (див. перетворення Лоренца (8.1)) таке визначення часу вже не задовольняє нас, коли треба зіставити події одну з іншою (напр., порівняти час їх виникнення або перебігу), а вони відбуваються в різних місцях СВ. Та сама проблема існує у випадку, коли визначають проміжок часу між подіями, віддаленими на різні відстані від годинника.

Для усунення цієї проблеми необхідно встановити спосіб визначення єдиного для всіх точок СВ часу. Тобто треба забезпечити синхронізацію ходу всіх годинників у даній СВ. *Синхронізувати годинники*, розташовані в різних точках СВ, можна за допомогою будь-яких сигналів. Проте світло або радіохвилі для цього найбільш придатні. Тому є декілька причин: 1) вони мають найбільшу в природі швидкість; 2) швидкість їх поширення виміряна з великою точністю; 3) швидкість світла інваріантна (однакова для всіх ІСВ).

Операція синхронізації годинника виконується таким чином: із точки O простору, де розташований годинник 1, (точка O може бути обрана за початок СК) відправляють світловий (або радіо-) сигнал "точного часу" з повідомленням: "Зараз на годиннику 1 t_0 годин". У момент часу, коли сигнал досягає точки, де розташований годинник 2, і відстань r від точки O відома, на годиннику 2 встановлюють час $t = t_0 + r/c$. Таким чином враховують час запізнення сигналу.

Повторення сигналів "точного часу" через відомий проміжок часу дає можливість встановити синхронний хід не тільки годинників 1 і 2, але й усіх годинників цієї системи, і стверджувати, що всі годинники цієї СВ показують у кожний момент один і той самий (спільний) час. При цьому виходили з того, що всі синхронізовані годинники відносно цієї СВ перебувають у стані спокою.

1.3.11. *Які фактори впливають на єдиний час?*

Сучасні уявлення про час базуються на тому, що *час відносний* (він залежить від швидкості руху годинника та місця його розташування в рухомій СВ з певними координатами). Окрім того, треба враховувати й те, що на єдиний час можуть впливати такі фактори, як зміна напруженості поля тяжіння та прискорення руху. (Зміна висоти розташування годинника відносно рівня моря або прискорений рух годинника мають викликати зміну в його показаннях).

1.3.12. *Який зв'язок існує між проблемою вимірювання відстані та часом?*

Обов'язковою умовою вимірювання відстані на площині або у тривимірному просторі є *одночасне* вимірювання координат початку і кінця відрізку, що вимірюється. У разі невиконання цієї умови під час руху відрізка відносно лабораторної системи, у якій розміщений вимірювальний пристрій, можна отримати неадекватний результат вимірювання.

1.3.13. *Сформулюйте принцип відносності Галілея.*

Принцип відносності Галілея фактично еквівалентний І-му закону Ньютона: ніякими механічними дослідами, проведеними всередині ІСВ, не можна встановити, перебуває тіло в рівномірному прямолінійному русі чи в стані спокою. Принцип відносності Галілея можна представити і в такому вигляді: рівняння ньютонівської механіки інваріантні відносно перетворень Галілея, тобто вони залишаються незмінними при переході від однієї ІСВ до іншої. Згідно з принципом відносності Галілея всі інерціальні систем відліку рівноправні.

1.3.14. *Запишіть перетворення Галілея.*

Розглянемо дві інерціальні СВ: нерухому (*К*-СВ) і таку, що рухається прямолінійно рівномірно зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ відносно *К*-СВ уздовж її осі x, (K'-СВ).

Формули, які дають можливість перейти від координат МТ у *К*-СВ до її координат у K'-СВ і навпаки, називаються *перетвореннями Галілея*. Нехай у момент часу $t = 0$ початки систем координат в обох системах відліку збігаються. Рух K'-СВ відбувається вздовж осі *Ox* зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, а осі *Oy* та *Oz* K-СВ залишаються паралельними відповідним осям Oy' та Oz' K'-СВ. Якщо позначити координати МТ відносно цих систем відліку x, y, z та x', y', z', відповідно, то зв'язок між цими координатами у будь-який момент часу виглядає так:

$$x' = x - \upsilon t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t$$

або (1.14)

$$x = x' + \upsilon t'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'.$$

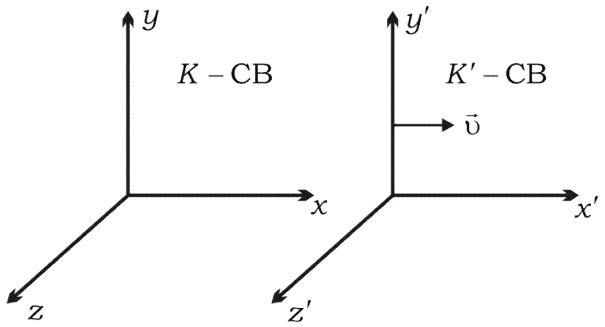


Рис. 1.1. До запитання 1.3.10

Рівняння $t = t'$ вказує на те, що в класичній механіці час однаковий в усіх ІСВ. Систему рівнянь (1.14) називають *перетвореннями Галілея*. Усі три закони Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея.

1.3.15. *Доведіть, що довжина відрізка відносно перетворень Галілея є інваріантною величиною.*

Відстань ℓ між двома точками в тривимірному просторі з координатами (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2) у *К*-СВ дорівнює

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Відстань ℓ' між двома точками в тривимірному просторі з координатами (x'_1, y'_1, z'_1) і (x'_2, y'_2, z'_2) у K'-СВ дорівнює

$$\ell' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}\ .$$

Скориставшись перетвореннями Галілея, маємо

$$\ell = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(x_2' + \upsilon t - x_1' - \upsilon t\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(x_2' - x_1'\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2} = \ell'.$$

Таким чином, довжина відрізка відносно перетворень Галілея є величиною інваріантною.

1.3.16. *Доведіть, що швидкість відносно перетворень Галілея не є інваріантною величиною.*

Із перетворень Галілея (1.14)

$$x' = x - \upsilon t; \quad x = x' + \upsilon t'; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t,$$

після їх диференціювання за часом маємо

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \upsilon \frac{dt'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \upsilon = \upsilon_x' + \upsilon \neq in\upsilon.$$

Водночас

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} = \upsilon_y' = in\upsilon; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'} = \upsilon_z' = in\upsilon.$$

1.3.17. *Чи є інваріантною величиною відносно перетворень Галілея прискорення МТ? Доведіть.*

Двічі продиференцюємо рівняння (1.14) із перетворень Галілея:

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \Rightarrow a_x = a_x'$. Так само: $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \Rightarrow a_y = a_y'$ і $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \Rightarrow a_z = a_z'$.

Таким чином, прискорення МТ є інваріантом відносно перетворень Галілея.

1.3.18. *Сформулюйте закон додавання швидкостей відносно перетворень Галілея у векторній формі.*

Додавання швидкостей відносно перетворень Галілея у векторній формі здійснюється за правилом паралелограма: сумарний вектор за величиною і напрямком збігається з діагоналлю паралелограма, сторони якого утворені векторами, що додаються. Таким чином, якщо треба знайти результуючу швидкість $\vec{\upsilon}_\Sigma$ під час руху двох МТ з неколінеарними векторами швидкостей $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$, то вектор $\vec{\upsilon}_\Sigma = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ можна знайти відповідною побудовою (рис. 1.2).

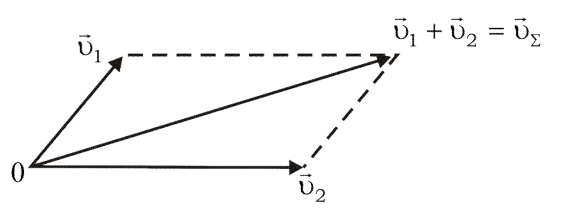


Рис. 1.2. До запитання 1.3.18

Кінематика матеріальної точки

1.3.19. *Що означає термін "описати рух"?*

Описати рух, або знайти закон руху означає знайти залежність положення МТ у просторі (або на площині у випадку плоского руху) від часу. Цей закон найчастіше всього виражається у вигляді залежності радіус-вектора МТ від часу $\vec{r}(t)$. Зважаючи на те, що $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$, рух часто описують за допомогою трьох скалярних рівнянь $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Знання положення МТ у довільний момент часу фактично потребує також знання початкових умов $\vec{r}(t_0)$.

1.3.20. *Які способи завдання закону руху вам відомі?*

Існують три способи опису руху матеріальної точки: векторний, координатний і за допомогою параметрів траєкторії ("природний"). Детально про особливості опису руху трьома різними способами радимо прочитати, наприклад, у [1] п. 8. Апріорі ці способи рівноправні і вибір одного з них зазвичай пов'язують з умовою конкретної задачі.

1.3.21. *Дайте визначення траєкторії руху МТ.*

Траєкторія руху МТ – це геометричне місце точок, які проходить кінець радіус-вектора, що описує рух МТ. Лінія, яку описує МТ під час руху на площині або в просторі, називається *траєкторією руху*. Рівняння траєкторії, наприклад, для двовимірного (плоского) руху $y(x)$.

1.3.22. *Чим відрізняється рівняння руху від рівняння траєкторії руху?*

Рівняння руху МТ це – залежність координат МТ від часу $\vec{r}(t)$, а рівняння траєкторії руху – це залежність $y(x)$ чи $x(y)$ під час руху МТ у площині xy або залежність $\vec{r}(x, y, z)$ під час руху в тривимірному просторі.

1.3.23. *У чому полягає пряма і зворотна задачі кінематики?*

Пряма задача кінематики: маючи закон руху МТ, треба отримати її швидкість і прискорення. Зворотна задача кінематики полягає у визначенні закону руху МТ, якщо відомі закони зміни в часі швидкості $\vec{v}(t)$ або прискорення $\vec{a}(t)$. Пряма задача кінематики розв'язується за допомогою математичної операції диференціювання. Зворотна задача кінематики розв'язується за допомогою математичної операції інтегрування.

1.3.24. *Що таке початкові умови руху і яка їх роль при розв'язуванні задач кінематики?*

Початкові умови – дані про значення одного або декількох значень параметрів руху (координат, радіус-вектора, швидкості, прискорення тощо) у відповідний (будь-який, але зазвичай для $t = 0$) момент часу. Знання початкових умов – обов'язковий елемент розв'язування зворотної задачі кінематики, яка пов'язана з інтегруванням у визначених межах. Знання початкових умов необхідне для отримання *однозначного розв'язку.*

1.3.25. *Чи залежить форма траєкторії від вибору систем відліку? Поясніть.*

Форма траєкторії залежить від вибору систем відліку. Наприклад, траєкторія точки на колесі, що котиться по горизонтальній поверхні, має різну форму залежно від обраної СВ. Щодо осі це – коло, щодо поверхні, по якій котиться колесо, – циклоїда. Іншій приклад: під час будь-якого руху матеріального тіла з визначеною траєкторією у власній СВ траєкторія самого тіла, як і будь-якої його точки взагалі відсутня через те, що у власній СВ матеріальне тіло перебуває в стані спокою.

1.3.26. *Наведіть визначення поступального руху.*

Під час поступального руху всі точки матеріального тіла рухаються по однакових траєкторіях. Це означає, що у цьому випадку пряма, проведена через будь-які дві точки тіла, залишається під час руху тіла паралельною сама собі.

1.3.27. *Чим відрізняється миттєва швидкість від середньої? Укажіть спосіб для вимірювання миттєвої швидкості. Поясніть, чим визначається точність вимірювання швидкості.*

Середня швидкість за період часу Δt дорівнює відношенню вектора переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt, за який це переміщення було здійснене: $<\upsilon(t, t+\Delta t)>=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Величина Δt і відповідна йому величина $\Delta\vec{r}$ можуть бути будь-якими за значеннями, не обов'язково – елементарними або нескінченно малими. Проте, якщо спрямувати $\Delta t \to 0$, то відбудеться перехід від середньої швидкості до миттєвої: $\upsilon(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Тому для того, щоб перейти до вимірювання миттєвої швидкості, треба процес вимірювання швидкості звести до мінімуму часу, за який це робиться. Чим менший цей час, тим ближче виміряна величина швидкості до її миттєвого значення.

1.3.28. *Чи тотожні значення двох скалярних величин: приросту модуля вектора $\vec{r}$ (Δr) і модуля вектора переміщення $\Delta\vec{r}$ $\left(\left|\Delta\vec{r}\right|\right)$?*

Ні, не тотожні. Переконаємось у цьому на прикладі механічного руху МТ по криволінійній траєкторії за допомогою рис. 1.3, на якому зображено переміщення МТ між точками 1 і 2. У випадку, представленому на рис. 1.3, а, переміщення МТ здійснюється по криволінійній траєкторії зі зміною величини вектора $\vec{r}$. Вектор $\Delta\vec{r}$ переміщення є різницею двох векторів: вектора $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ у момент часу $t+\Delta t$ і вектора $\vec{r}$ у момент часу t. Модуль вектора $\Delta\vec{r}$ можна записати лише у вигляді $\left|\Delta\vec{r}\right|$. Скаляр Δr являє собою приріст модуля вектора $\vec{r}$: $\Delta r \equiv \Delta\left|\vec{r}\right|$. Як бачимо, $\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta r$.

У випадку, коли переміщення МТ здійснюється по круговій траєкторії без зміни величини вектора $\vec{r}$, положення МТ у точці 1 описується радіус-вектором $\vec{r}$, у точці 2 – радіус-вектором $\vec{r}+\Delta\vec{r}$. Переміщення МТ із точки 1 у точку 2 відбувається таким чином, що отримавши зміну, яку характеризує вектор переміщення $\Delta\vec{r}$, вектор $\vec{r}$ не змінює свого модуля (довжини). У цьому випадку приріст модуля вектора

$\vec{r}$ дорівнює нулю $\Delta r \equiv \Delta|\vec{r}| = 0$, а модуль вектора переміщення $|\Delta\vec{r}| \neq 0$ (рис. 1.3) дорівнює довжині відрізка 1–2. Вищедоведене справедливе для будь-якого вектора $\vec{a}$, у загальному випадку $|\Delta\vec{a}| \neq \Delta a$.

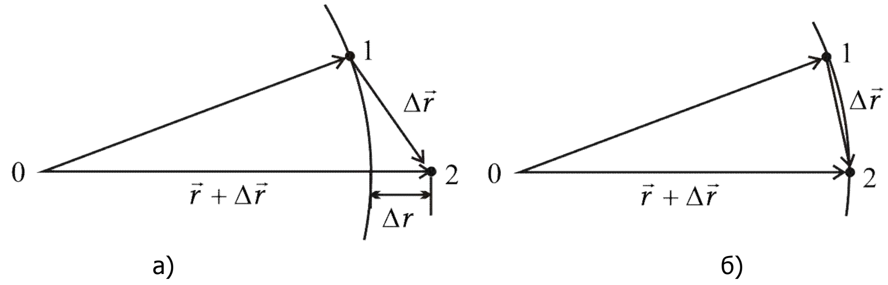


Рис. 1.3. До запитання 1.3.28

1.3.29. *Чи можуть бути рівними в кінематиці шлях і модуль вектора переміщення? Якщо так, то в яких випадках?*

Шлях Δs і модуль вектора переміщення $|\Delta\vec{r}|$ у загальному випадку відрізняються один від одного (рис. 1.4): $\Delta s \neq |\Delta\vec{r}|$.

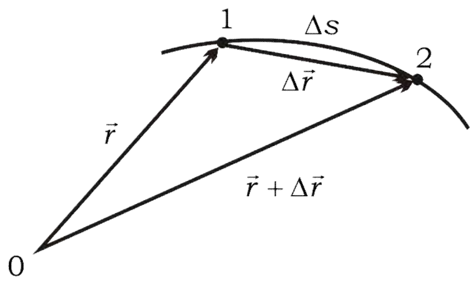


Рис. 1.4. До запитання 1.3.29

Однак, якщо брати все менші проміжки часу Δt, то різниця між Δs і $|\Delta\vec{r}|$ буде зменшуватись, а в границі вони зрівняються (їх відношення дорівнюватиме $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{|\Delta\vec{r}|} = 1$).

Ще один випадок, коли $\Delta s = |\Delta\vec{r}|$, відповідає прямолінійному руху МТ.

1.3.30. *У разі якого руху середня та миттєва швидкості матеріальної точки однакові?*

У разі прямолінійного рівномірного руху середня та миттєва швидкості матеріальної точки однакові під час усього руху. Можна показати, що й у разі нерівномірного руху можна знайти моменти часу, у які миттєва швидкість дорівнює середній швидкості за весь час руху (див. [9], задача 1.4).

1.3.31. *Яким чином властивості вектора приписують малому куту повороту*

$\Delta\vec{\varphi}$*? Як вектор* $\Delta\vec{\varphi}$ *пов'язаний з векторами кутової швидкості* $\vec{\omega}$ *і кутового прискорення* $\vec{\beta}$*?*

Напрямок вектора $\Delta\vec{\varphi}$ пов'язують з віссю обертання і напрямком обертання МТ навколо осі за "правилом правого гвинта": вектор $\Delta\vec{\varphi}$ направлений уздовж осі обертання МТ у бік поступального руху гвинта, що повертається за напрямком обертання МТ (рис. 1.6). Модуль вектора $\Delta\vec{\varphi}$ дорівнює кутовому переміщенню $\Delta\varphi$ за даний проміжок часу: $|\Delta\vec{\varphi}| = \Delta\varphi$. Вектори, напрямки яких випливають із самих фізичних величин (напр., радіус-вектор $\vec{R}$, лінійна швидкість $\vec{\upsilon}$ тощо), називаються *полярними векторами*. Вектори, напрямки яких залежать від напрямку обертання, називаються *аксіальними*. Вектор $\Delta\vec{\varphi}$ – один із аксіальних векторів.

Таким чином вводять і вектори кутової швидкості

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

і кутового прискорення

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\beta}$ – аксіальні вектори.

Напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\beta}$ залежать від напрямку обертання МТ (рис. 1.6). Вектор $\vec{\omega}$ разом із вектором $\vec{R}$ і вектором лінійної швидкості $\vec{\upsilon}$ утворюють правогвинтову трійку перпендикулярних векторів $\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]$.

Введення до розгляду векторів кутової швидкості $\vec{\omega}$ і кутового прискорення $\vec{\beta}$ доцільне, якщо тіло, наприклад, бере участь у декількох (напр., двох) одночасних обертаннях, його результуюче обертання характеризується саме аксіальними векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{\beta}$, які отримані додаванням складових аксіальних векторів за правилом паралелограма.

1.3.32. *Чому дорівнюють компоненти вектора прискорення у разі криволінійного руху матеріальної точки?*

Вектор прискорення $\vec{a}$ можна записати через його складові: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Складові вектора прискорення такі: тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau}$ і нормальне прискорення $\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R} \cdot \vec{n}$ (рис. 1.5). Вектори $\vec{a}_\tau$ та $\vec{a}_n$ взаємно перпендикулярні $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$.

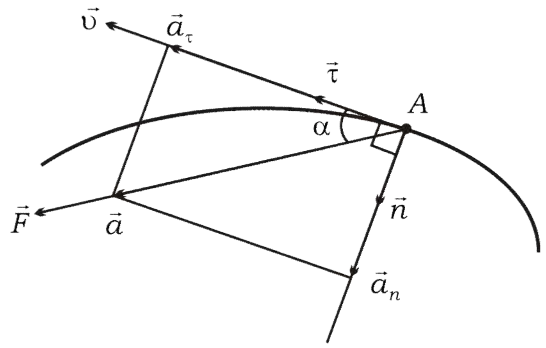


Рис. 1.5. До запитань 1.3.32–1.3.34 та 1.3.41

1.3.33. *Яку інформацію про швидкість дають знання напрямків і величин нормального та тангенціального прискорень?*

Тангенціальне прискорення $|\vec{a}_\tau| = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ показує швидкість зміни *величини* миттєвої швидкості $\vec{\upsilon}(t)$. Нормальне прискорення $|\vec{a}_n| = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ показує швидкість зміни *напрямку* миттєвої швидкості. Знаючи величини $|\vec{a}_\tau|$ і $|\vec{a}_n|$, можна знайти кут $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}$ між векторами $\vec{\upsilon}(t)$ та $\vec{a}(t)$ (рис. 1.5).

1.3.34. *Як знайти напрямок миттєвого прискорення МТ для прямолінійного та криволінійного рухів матеріальної точки?*

Напрямок миттєвого прискорення $\vec{a}(t)$ у класичній механіці завжди збігається з напрямком сили $\vec{F}(t)$, яка діє на МТ і яка це прискорення викликала. Під час прямолінійного руху МТ напрямки векторів $\vec{a}(t)$, $\vec{F}(t)$ і швидкості $\vec{v}(t)$ однакові – вздовж напрямку руху.

У випадку криволінійного руху вектори $\vec{a}(t)$ та $\vec{F}(t)$ колінеарні: $\vec{a} || \vec{F}$, але сила $\vec{F}$ вже не паралельна швидкості $\vec{\upsilon}$, як це було у випадку прямолінійного руху. Щоб знайти напрямок $\vec{a}$ (рис. 1.5) необхідно побудувати дотичну до кривої траєкторії в даній точці A, а також перпендикуляр до цієї дотичної. Так ми задамо напрямки ортів $\vec{\tau}$ та $\vec{n}$. Після цього, визначивши (розрахувавши) значення компонентів вектора прискорення $|\vec{a}_\tau| = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ та $|\vec{a}_n| = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ і відклавши їх, відповідно, уздовж напрямків векторів $\vec{\tau}$ та $\vec{n}$, знаходимо за правилом паралелограма сумарний вектор $\vec{a}$.

Якщо відомі значення $|\vec{a}_\tau|$ та $|\vec{a}_n|$, то значення вектора $\vec{a}(t)$ можна знайти аналітично: $|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_\tau|^2 + |\vec{a}_n|^2}$.

1.3.35. *Вектори тангенціального прискорення* $\vec{a}_\tau$ *і швидкості* $\vec{\upsilon}$ *у разі криволінійного руху в обраній точці траєкторії напрямлені вздовж дотичної (паралельні між собою). Що можна сказати про їх напрямки?*

Напрямки векторів $\vec{a}_\tau$ і $\vec{\upsilon}$ збігаються у разі прискореного руху $\vec{a} > 0$ і протилежні у разі гальмівного руху $\vec{a} < 0$ (рис. 1.6).

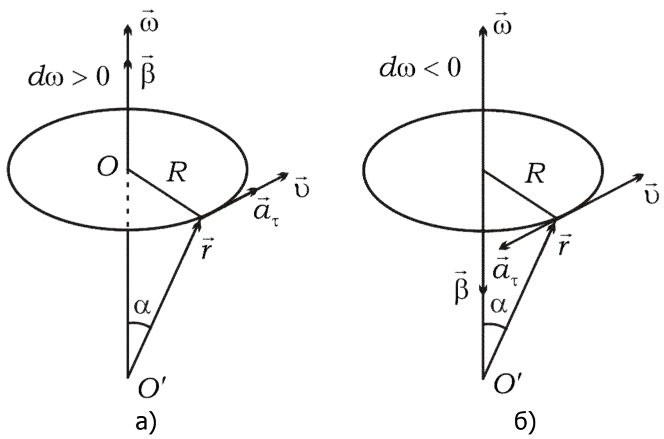


Рис. 1.6. До питань 1.3.35 – 1.3.38

1.3.36. *Як зорієнтований вектор кутової швидкості у разі обертального руху МТ?*

У разі обертального руху МТ вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ перпендикулярний до площини, у якій відбувається рух МТ. Вектор лінійної швидкості $\vec{\upsilon}$ лежить у цій площині (рис. 1.6).

1.3.37. *Як зорієнтовані вектори кутової швидкості* $\vec{\omega}$ *і кутового переміщення* $\Delta\vec{\varphi}$ *?*

Ці аксіальні вектори пов'язані між собою співвідношенням (1.11): $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$. Їх напрямки збігаються і визначаються за "правилом правого гвинта".

1.3.38. *Як зорієнтовані вектори кутової швидкості* $\vec{\omega}$ *і кутового прискорення* $\vec{\beta}$?

Вектор кутового прискорення $\vec{\beta}$ і вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ напрямлені вздовж однієї лінії (осі обертання). Це видно, зокрема, із формули $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Напрямки векторів $\vec{\beta}$ і $\vec{\omega}$ збігаються, коли швидкість обертання збільшується (рис. 1.6, а). При сповільненні обертання напрямки векторів $\vec{\beta}$ і $\vec{\omega}$ протилежні (рис. 1.6, б).

1.3.39. *Як у випадку руху МТ по криволінійній траєкторії повне (лінійне) прискорення пов'язане з кутовою швидкістю і кутовим прискоренням?*

Повне лінійне прискорення дорівнює[1]

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}\ . \tag{1.15}$$

Якщо розгляд проводити у векторній формі, то

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \left[\vec{\beta}\vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}\vec{\upsilon}\right] = \left[\vec{\beta}\vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]\right] = \left[\vec{\beta}\vec{R}\right] - \omega^2\vec{R}\ . \tag{1.16}$$

1.3.40. *У якому випадку при криволінійному русі МТ повне прискорення МТ направлене до центра кривизни?*

Модуль вектора повного прискорення дорівнює (1.9): $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. У випадку, коли $a_\tau = 0$, величина $a = a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Цей випадок спостерігаємо тоді, коли $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 0 \ \Rightarrow\ \upsilon = \mathrm{const}$, тобто під час рівномірного руху по кривій. У цьому випадку вектор повного прискорення $\vec{a} = a_n \cdot \vec{n}$ направлений уздовж вектора $\vec{n}$, до центра кривизни траєкторії руху. У разі рівномірного руху МТ по колу вектор $\vec{a}$ направлений до центра кривизни кола і зберігає свою величину незмінною. Такий самий висновок можна зробити із формули (1.16): якщо $\beta = 0$, то величина повного прискорення дорівнює $\vec{a} = -\omega^2\vec{R}$.

1.3.41. *Що таке годограф швидкості? Як його побудувати? Який фізичний зміст годографа швидкості?*

Кожну точку траєкторії руху МТ можна характеризувати не тільки координатами, але й миттєвою швидкістю $\vec{\upsilon}$, яку має МТ у цій точці. Вектор $\vec{\upsilon}$ лежить уздовж дотичної до траєкторії в точці, у якій він вимірюється (у різних точках траєкторії), а його напрямок збігається з напрямком руху (рис. 1.5). Якщо об'єднати зображення всіх векторів $\vec{\upsilon}(t)$, отримані в різні моменти часу, таким чином, щоб звести початки цих векторів в одну точку, то їх кінці опишуть криву, яка називається годографом швидкості. Таким чином, *годограф швидкості* – це геометричне місце точок, через які проходить кінець вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ за час руху МТ по траєкторії у разі, коли початок векторів $\vec{\upsilon}$ стягнути в одну точку. Доцільність введення до розгляду годографа швидкості обумовлена тим, що, побудувавши цей годограф, можна використовувати його важливу властивість: дотична до кривої годографа швидкості в будь-якій її точці покаже напрямок вектора прискорення МТ у цій точці.

1.3.42. *Годографом якої величини є траєкторія?*

Траєкторію руху МТ можна визначити як годограф радіус-вектора $\vec{r}(t)$. Дотич-

[1] Зверніть увагу на перший погляд дивну, але правильну розмірність величин у формулі (1.15).

на до кривої годографа радіус-вектора в будь-якій її точці покаже напрямок вектора швидкості МТ у цій точці.

1.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. *По літаку в той момент, коли він перебував строго над точкою на поверхні Землі, де базуються ракети, була випущена одна з них. Ракета з головкою самонаведення рухається рівномірно зі швидкістю* υ *так, що вектор* $\vec{\upsilon}$ *увесь час "націлений" на точку простору, у якій перебуває літак-ціль, що летить прямолінійно і рівномірно зі швидкістю* $u < \upsilon$. *У початковий момент часу, коли* $\vec{u} \perp \vec{\upsilon}$, *відстань між ракетою та літаком дорівнювала* ℓ. *Через який час ракета наздожене літак-ціль?*

Розв'язання: Оберемо, як показано на рис. 1.7, початкове положення ракети та літака в точках A (ракета) і B (літак). У кожний наступний момент часу дотична до траєкторії ракети (пунктирна лінія) у будь-якій її точці (напр., у точці A') направлена на відповідну точку на траєкторії руху літака по прямій лінії, у якій він у цей момент часу перебуває, (на точку B'). Таким чином, напрямок руху ракети буде характеризувати кут $\alpha(t)$ – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ та $\vec{u}$ (рис. 1.7). Видно, що на початку руху, коли $t = 0$, величина $\alpha(0) = \pi/2$. Наприкінці руху, коли ракета наздожене літак, а це відбудеться через час τ після початку руху, кут $\alpha(\tau) = 0$.

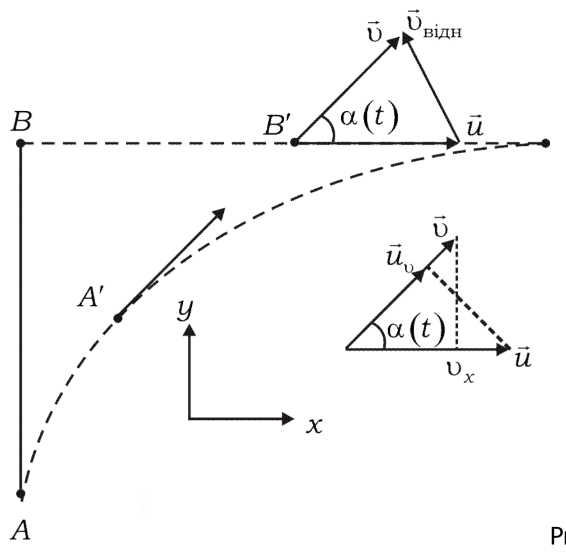


Рис. 1.7. До прикладу 1.1

Проекція u_{υ} незмінного вектора швидкості $\vec{u}$ літака на напрямок вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ ракети, положення якого на площині xy визначається кутом $\alpha(t)$, дорівнює $u_\upsilon = u \cdot \cos\alpha$ (рис. 1.7). Це означає, що відносна швидкість $\upsilon_{\text{відн}}$ (швидкість зближення ракети та літака, або швидкість ракети відносно літака) дорівнює

$$\vec{\upsilon}_{\text{відн}} = \vec{\upsilon} - \vec{u} \;\Rightarrow\; \upsilon_{\text{відн}} = \upsilon - u_\upsilon = \upsilon - u \cdot \cos\alpha . \tag{1.17}$$

Аналіз (1.17) показує, що: 1) на початку руху, коли $\alpha(0) = \pi/2$, $\upsilon_{\text{відн}} = \upsilon - u \cdot 0 = \upsilon$; 2) у кінці руху, коли $\alpha(\tau) = 0$, $\upsilon_{\text{відн}} = \upsilon - u \cdot 1 = \upsilon - u$.

На початку руху відстань між літаком і ракетою була ℓ. Наприкінці руху відстань між ними – нуль. Таким чином, максимальна відстань між ракетою і літаком, тобто і шлях, що пролітає ракета відносно літака за час руху τ (до моменту її зустрічі з літаком), дорівнює

$$\ell = \int_0^\tau \upsilon_{\text{відн}}\, dt = \int_0^\tau (\upsilon - u \cdot \cos\alpha) dt . \tag{1.18}$$

Водночас горизонтальна складова швидкості ракети в нерухомій системі відліку, відносно Землі (*К*-СВ), дорівнює

$$\upsilon_x(\alpha) = \upsilon \cdot \cos\alpha .$$

Ракета до місця зустрічі з літаком-ціллю в горизонтальному напрямку за час τ у *К*-СВ пройде шлях

$$s = \int_0^\tau \upsilon \cdot \cos\alpha \, dt .$$

Літак-ціль у горизонтальному напрямку із швидкістю u за час τ пройде той самий шлях: $s = u \cdot \tau$. Таким чином,

$$\int_0^\tau \upsilon \cdot \cos\alpha \, dt = u \cdot \tau \;\Rightarrow\; \int_0^\tau \cos\alpha \, dt = \frac{u}{\upsilon} \cdot \tau . \tag{1.19}$$

Розв'яжемо інтеграл (1.18)

$$\ell = \upsilon \cdot \tau - u \int_0^\tau \cos\alpha \, dt .$$

З урахуванням (1.19) отримаємо

$$\ell = \upsilon \cdot \tau - \frac{u^2 \tau}{\upsilon} = \tau\left(\upsilon - \frac{u^2}{\upsilon}\right) = \tau\left(\frac{\upsilon^2 - u^2}{\upsilon}\right).$$

Остаточно маємо

$$\tau = \frac{\ell \cdot \upsilon}{\upsilon^2 - u^2} .$$

Як бачимо, час τ прямо пропорційно залежить від висоти ℓ перебування літака в момент запуску ракети і досить складно залежить від швидкостей υ та u.

Примітка: Ця задача (але вже про "кішку і мишку") розв'язана іншим способом (див. [1], п. 8, приклад 8.1). Розберіться в її розв'язанні та порівняйте з наведеним тут розв'язанням.

Приклад 1.2. *Матеріальна точка рухається по прямій лінії з гальмуванням, величина якого $a = -\beta\sqrt{\upsilon}$, де β – додатна стала; υ – швидкість МТ. На початку руху швидкість МТ дорівнювала υ_0. Який шлях (s_0) пройде матеріальна точка до зупинки? За який час (t_0) цей шлях буде пройдений?*

Розв'язання: За визначенням, прискорення $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$. Порівнявши це з умовою задачі, маємо

$$-\beta\sqrt{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{1.20}$$

Провівши в (1.20) операцію розділення змінних

$$-\beta\, dt = \frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}}, \tag{1.21}$$

проінтегруємо (1.21)

$$\int \upsilon^{-1/2}\, d\upsilon = -\int \beta\, dt \;\Rightarrow\; 2\sqrt{\upsilon} = -\beta\, t + C,$$

де C – стала інтегрування, яку слід знайти. Шукається стала C, як завжди, з початкових умов: для $t = 0$ (на початку руху) величина $\upsilon = \upsilon_0$ – початкова швидкість, тобто $2\sqrt{\upsilon_0} = -\beta \cdot 0 + C \Rightarrow C = 2\sqrt{\upsilon_0}$.Таким чином,

$$2\sqrt{\upsilon} = -\beta\, t + 2\sqrt{\upsilon_0} \;\Rightarrow\; \sqrt{\upsilon} = \sqrt{\upsilon_0} - \frac{\beta\, t}{2}.$$

Остаточно маємо

$$\upsilon(t) = \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\beta\, t}{2}\right)^2. \tag{1.22}$$

Зупинка матеріальної точки характеризується тим, що її швидкість $\upsilon = 0$. У (1.22) це буде відповідати умові

$$\frac{\beta\, t_0}{2} = \sqrt{\upsilon_0}, \tag{1.23}$$

де t_0 – час до зупинки. Із (1.21) знаходимо

$$t_0 = \frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta}. \tag{1.24}$$

Бачимо, що час t_0 до зупинки прямо пропорційний $\sqrt{\upsilon_0}$: наприклад, якщо початкову швидкість збільшили в 2 рази, то час t_0 збільшиться в 1,4 раза. Шлях до зупинки дорівнює

$$s_0 = \int_0^{t_0} \upsilon(t)\,dt = \int_0^{t_0} \left(\upsilon_0 + \frac{\beta^2 t^2}{4} - \beta\sqrt{\upsilon_0}\, t \right) dt = \upsilon_0 t_0 + \frac{\beta^2 t_0^3}{12} - \frac{\beta\sqrt{\upsilon_0}\, t_0^2}{2} \quad . \qquad (1.25)$$

З урахуванням (1.24) вираз (1.25) матиме вигляд

$$s_0 = \upsilon_0 \frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta} + \frac{\beta^2}{12}\left(\frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta}\right)^3 - \frac{\beta\sqrt{\upsilon_0}}{2}\left(\frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\beta}\right)^2 = \frac{\upsilon_0^{3/2}}{\beta}\left(2 + \frac{2}{3} - 2\right) = \frac{2}{3}\frac{\upsilon_0^{3/2}}{\beta}.$$

Бачимо, що шлях s_0 до зупинки прямо пропорційний $\sqrt{\upsilon_0^3}$: наприклад, при збільшенні початкової швидкості в 2 рази шлях s_0 збільшується в $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ раза.

Приклад 1.3. *Два пароплави рухаються рівномірно прямолінійно зі швидкостями і υ_2, наближаючись один до одного. У деякий момент часу $t = 0$ зафіксовано положення пароплавів у точках А та В, а також виміряна відстань між ними – ℓ і кути α та β, які складають вектори $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ з відрізком ℓ, відповідно* (рис. 1.8). *Знайдіть найменшу відстань, на якій можуть опинитись пароплави, і момент часу, коли це трапиться.*

Розв'язання: Розв'яжемо цю задачу двома методами.

Перший метод розв'язування – у нерухомій системі відліку (*К*-СВ), яка пов'язана з берегом.

Оберемо початок декартової системи координат у точці *А*, у якій перебуває у фіксований момент часу $t = 0$ пароплав 1 (рис. 1.8). Подальший рух і положення пароплавів 1 і 2 в обраній СК будемо характеризувати радіус-вектарами $\vec{r}_1(t)$ та $\vec{r}_2(t)$, відповідно.

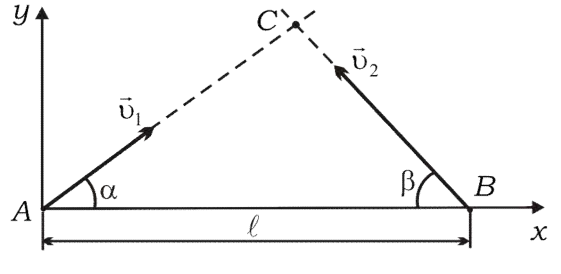


Рис. 1.8. До розв'язування прикладу 1.3 у нерухомій СВ, пов'язаній із берегом моря

Звернемо увагу на те, що напрямки векторів $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{r}_1(t)$ збігаються (тільки $\vec{\upsilon}_1$ сталий, а $\vec{r}_1(t)$) – рівномірно змінюється в часі та просторі). Напрямок $\vec{\upsilon}_2$ не збігається з напрямком радіус-вектора $\vec{r}_2(t)$: останній, за визначенням, починається в одній точці з $\vec{r}_1(t)$ – початку системи координат. Продовження векторів $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ (пунктирні лінії на рис. 1.8) дасть точку їх перетину (точку C) – єдине місце на поверхні моря, яке будуть (неодночасно!) перетинати обидва пароплави. Ту саму точку C можна було б отримати на перетині траєкторій руху обох пароплавів, як геометричних місць кінців векторів $\vec{r}_1(t)$ та $\vec{r}_2(t)$.

Положення пароплава 1 у будь-який момент часу (його закон руху) описується виразом, який має вигляд

$$\vec{r}_1(t)=\vec{\upsilon}_1 t=(\upsilon_{1x}\cdot\vec{i}+\upsilon_{1y}\cdot\vec{j})t=\left[(\upsilon_1\cdot\cos\alpha)\vec{i}+(\upsilon_1\cdot\sin\alpha)\vec{j}\right]t\,, \tag{1.26}$$

де υ_1 – модуль вектора $\vec{\upsilon}_1$; υ_{1x} і υ_{1y} – проекції вектора $\vec{\upsilon}_1$ на відповідні осі координат; $\vec{i}$ та $\vec{j}$ – орти.

Радіус-вектор $\vec{r}_2$, який описує рух пароплава 2, зважаючи на те, що $\vec{r}_2\neq\vec{\upsilon}_2\cdot t$ через неколінеарність векторів $\vec{r}_2$ та $\vec{\upsilon}_2$, можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{r}_2(t)&=r_{2x}\cdot\vec{i}+r_{2y}\cdot\vec{j}=\left[(\ell-\upsilon_{2x}\cdot t)\cdot\vec{i}+\upsilon_{2y}\cdot t\cdot\vec{j}\right]=\\&=\left[(\ell-\upsilon_2\cdot\cos\beta\cdot t)\cdot\vec{i}+\upsilon_2\cdot\sin\beta\cdot t\cdot\vec{j}\right],\end{aligned} \tag{1.27}$$

де υ_2 – модуль вектора $\vec{\upsilon}_2$; υ_{2x} і υ_{2y} – проекції вектора $\vec{\upsilon}_2$ на відповідні осі координат. Правильність (1.27) можна перевірити, виходячи з початкових умов: при $t=0$ величина $r_2(0)=\ell$.

Якщо відомі закони руху (1.26) для $\vec{r}_1(t)$ і (1.27) для $\vec{r}_2(t)$, то відстань $\Delta r(t)$ між двома точками з координатами $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ буде змінюватись у часі за законом

$$\begin{aligned}\Delta r(t)&=\sqrt{(r_{2x}-r_{1x})^2+(r_{2y}-r_{1y})^2}=\\&=\sqrt{\left[(\ell-\upsilon_2\cdot\cos\beta\cdot t)-\upsilon_1\cdot\cos\alpha\cdot t\right]^2+\left[\upsilon_2\cdot\sin\beta\cdot t-\upsilon_1\cdot\sin\alpha\cdot t\right]^2}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Треба дослідити цю функцію на екстремум (мінімум). Для цього знайдемо першу похідну за часом і прирівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned}\frac{d(\Delta r)}{dt}&=\frac{1}{2\sqrt{\left[(\ell-\upsilon_2\cdot\cos\beta\cdot t)-\upsilon_1\cdot\cos\alpha\cdot t\right]^2+\left[\upsilon_2\cdot\sin\beta\cdot t-\upsilon_1\cdot\sin\alpha\cdot t\right]^2}}\cdot\\&\cdot t\left[\upsilon_1^2\cdot\cos^2\alpha+\upsilon_2^2\cdot\cos^2\beta+(\upsilon_1\cdot\sin\alpha-\upsilon_2\cdot\sin\beta)^2+2\upsilon_1\upsilon_2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\right]-\\&-\ell(\upsilon_2\cdot\cos\beta+\upsilon_1\cdot\cos\alpha)=0.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що час, за який між пароплавами встановиться найменша відстань, дорівнює

$$t_{\min} = \frac{\ell(\upsilon_2 \cdot \cos\beta + \upsilon_1 \cdot \cos\alpha)}{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \cdot \cos(\alpha+\beta)}. \qquad (1.29)$$

Якщо підставити (1.29) у (1.28), то отримаємо вираз для визначення найменшої відстані між пароплавами:

$$\Delta r_{\min} = \frac{\ell(\upsilon_2 \cdot \sin\beta - \upsilon_1 \cdot \sin\alpha)}{\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \cdot \cos(\alpha+\beta)}}. \qquad (1.30)$$

Другий метод розв'язання – у рухомій системі відліку (K'-СВ), яка пов'язана, наприклад, із пароплавом 1. Швидкість пароплава 1 у K'-СВ дорівнює $\upsilon_1' = 0$. Швидкість пароплава 2

$$\vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1. \qquad (1.31)$$

Графічним методом, будуючи паралелограм відповідно до (1.31), як показано на рис. 1.9, знаходимо величину і напрямок $\vec{\upsilon}_2'$. Таким чином, траєкторія пароплава 2 відносно пароплава 1 буде виглядати як пряма лінія ВС.

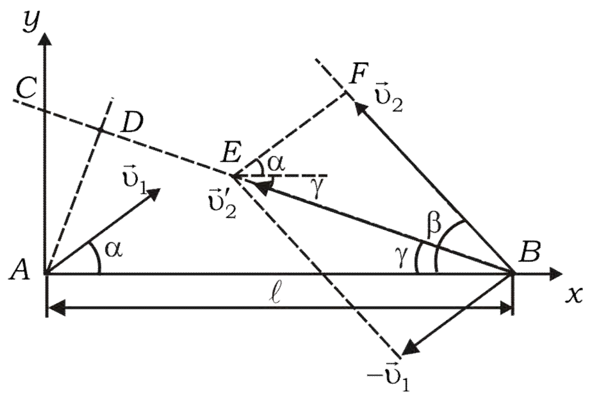


Рис. 1.9. До розв'язування прикладу 1.3 у рухомій СВ, пов'язаній із пароплавом 1

Шукану найкоротшу відстань між пароплавами $\Delta r_{\min}$ також можна знайти методом геометричної побудови. Опускаючи перпендикуляр з точки A на лінію ВС, знаходимо точку D. Саме відрізок AD і буде відображати величину $\Delta r_{\min}$. Із прямокутного трикутника ABD видно, що

$$AD = \ell \cdot \sin\gamma \qquad (1.32)$$

де γ – кут між відрізком AB і вектором $\vec{\upsilon}_2'$. Окрім того, із (1.31) видно, що проекція вектора $\vec{\upsilon}_2'$ на вісь Oy дорівнює

$$\upsilon_{2y}' = \upsilon_{2y} - \upsilon_{1y}, \text{ або}$$

$$\upsilon_2' \cdot \sin\gamma = \upsilon_2 \cdot \sin\beta - \upsilon_1 \cdot \sin\alpha. \qquad (1.33)$$

З іншого боку, із теореми косинусів для трикутника BEF випливає, що

$$\begin{aligned} \upsilon_2' &= \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos \angle EFB} \equiv \\ &\equiv \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos[\pi - (\alpha+\gamma) - (\beta-\gamma)]} \equiv \\ &\equiv \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Із (1.33) і (1.34) маємо

$$\sin\gamma = \frac{\upsilon_2 \cdot \sin\beta - \upsilon_1 \cdot \sin\alpha}{\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos(\alpha+\beta)}}. \tag{1.35}$$

Із (1.32) і (1.35)

$$AD = \Delta r_{\min} = \ell \cdot \frac{\upsilon_2 \cdot \sin\beta - \upsilon_1 \cdot \sin\alpha}{\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos(\alpha+\beta)}}. \tag{1.36}$$

Як бачимо, результати (1.30) і (1.36), отримані різними методами, повністю збігаються.

Приклад 1.4. *Радіус-вектор точки A відносно початку координат змінюється із часом t за законом* $\vec{r} = \alpha t \cdot \vec{i} + \beta t^2 \cdot \vec{j}$, *де* α, β *– сталі;* $\vec{i}, \vec{j}$ *– орти осей x і y, відповідно. Знайдіть:*

а) рівняння траєкторії точки y(x); побудуйте його графік;

б) залежність від часу швидкості $\vec{\upsilon}$, *прискорення* $\vec{a}$ *і модулів цих величин;*

в) залежність від часу кута між векторами $\vec{a}$ *та* $\vec{\upsilon}$.

Розв'язання: а) із рівняння $\vec{r} = \alpha t \cdot \vec{i} + \beta t^2 \cdot \vec{j}$ випливає, що

$$x = \alpha t, \tag{1.37}$$

$$y = \beta t^2. \tag{1.38}$$

Із (1.37)

$$t = x/\alpha. \tag{1.39}$$

(1.39) $\rightarrow$ (1.38): $y = \beta\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2$. Це рівняння параболи й є рівнянням траєкторії руху матеріальної точки $y(x)$. Його графік зображено на рис. 1.10;

б) проекції вектора швидкості на осі Ox та Oy, за визначенням і з урахуванням (1.37) і (1.38), відповідно, дорівнюють: $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = \alpha$; $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = 2\beta t$.

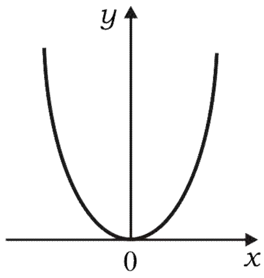


Рис. 1.10. Траєкторія руху МТ – парабола (до прикладу 1.4)

Вектор швидкості $\vec{\upsilon} = \upsilon_x \cdot \vec{i} + \upsilon_y \cdot \vec{j} = \alpha \cdot \vec{i} + 2\beta t \cdot \vec{j}$, а модуль вектора швидкості $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta t)^2}$. Вектор прискорення $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 2\beta \cdot \vec{j}$, його проекції на відповідні осі дорівнюють $a_x = 0$; $a_y = 2\beta$. Модуль вектора прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\beta$;

в) вектор швидкості $\vec{\upsilon}$, як з'ясувалось вище, має сталу в часі проекцію на вісь Ox: $\upsilon_x = \alpha$ і змінну у часі проекцію на вісь Oy: $\upsilon_y = 2\beta t$. Вектор прискорення має лише одну (на вісь Oy) проекцію $a_y = 2\beta$. Проекція вектора прискорення на вісь Ox відсутня $a_x = 0$.

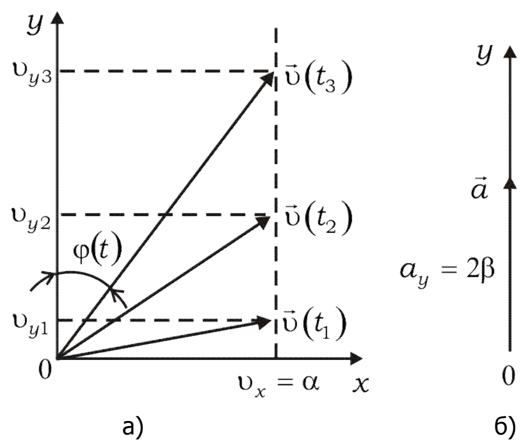


Рис. 1.11. До прикладу 1.4

Як видно з рис. 1.11, кут $\varphi = \widehat{\vec{a}\,\vec{\upsilon}}$, окрім того, є кутом між вектором швидкості та віссю Oy. Його можна виразити через складові вектора швидкості υ_x і υ_y: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = \dfrac{\alpha}{2\beta t}$.

Таким чином: $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{2\beta t}$.

Приклад 1.5. *Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут* φ *його повороту залежить від часу як* $\varphi = \beta t^2$*, де* $\beta = 0,20$ рад/с^2. *Знайдіть повне прискорення* $|\vec{a}|$ *точки A на ободі колеса в момент часу* $t = 2,5$ с *після початку руху, якщо швидкість точки A в цей момент дорівнює* $\upsilon = 0,65$ м/с.

Розв'язання: За визначенням, кутова швидкість $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$. З умови прикладу

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\beta t^2\right) = 2\beta t. \tag{1.40}$$

Як видно з рис. 1.12, довжина дуги $d\ell$, по якій рухається точка *A*, пов'язана з кутом $d\varphi$, на який вона за цей час повертається, співвідношенням

$$d\ell = R \cdot d\varphi. \tag{1.41}$$

Лінійна швидкість υ точки *A* на ободі колеса при цьому дорівнює $\upsilon = \dfrac{d\ell}{dt}$. Окрім того, $\upsilon = \omega \cdot R$, а з урахуванням (1.40)

$$\upsilon = 2\beta R t. \tag{1.42}$$

Із (1.42)

$$R = \upsilon / 2\beta t. \tag{1.43}$$

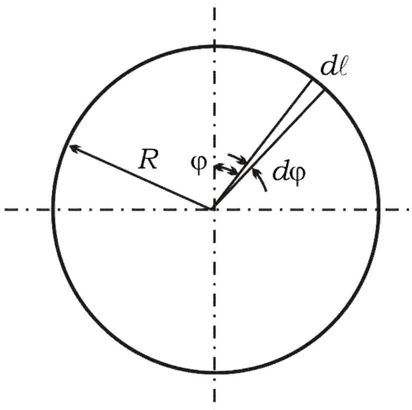


Рис. 1.12. До прикладу 1.5

Нормальне прискорення точки *A* з урахуванням (1.40) і (1.43) дорівнює

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = (2\beta t)^2 R = (2\beta t)^2 \frac{\upsilon}{2\beta t} = 2\beta\upsilon t.$$

Тангенціальне прискорення точки A з урахуванням (1.42) дорівнює $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 2\beta R$. Порівнюючи останній вираз для a_τ з (1.42), бачимо, що $a_\tau = \upsilon / t$, тобто спостерігається рівноприскорений обертальний рух точки A. Повне прискорення точки A дорівнює

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{t^2} + 4\beta^2 t^2 \upsilon^2} = \frac{\upsilon}{t}\sqrt{1 + 4\beta^2 t^4}\ .$$

Підставляючи числові значення з умови, отримуємо:

$$a = \frac{0,65}{2,5}\sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot (2,5)^4} \approx 0,7 \text{ м/с}^2 .$$

2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1. Короткі теоретичні відомості

- Імпульс (кількість руху) матеріальної точки

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \qquad (2.1)$$

- Основне рівняння динаміки (ІІ закон Ньютона)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (2.2)$$

- Координати центра мас системи матеріальних точок

$$x_C = \frac{\sum m_i\, x_i}{\sum m_i}; \quad y_C = \frac{\sum m_i\, y_i}{\sum m_i}; \quad z_C = \frac{\sum m_i\, z_i}{\sum m_i}\ , \qquad (2.3)$$

де m_i – маса i -ї матеріальної точки; x_i, y_i, z_i – координати i -ї матеріальної точки.

2.2. Методичні вказівки та поради

1. Розв'язування задачі в багатьох випадках (напр., щодо руху тіла по похилій площині або із застосуванням блоку) доцільно починати із запису рівняння руху у векторній формі. Після цього слід перейти до запису рівнянь (або рівняння) у скалярній формі. Вони записуються через проекції векторів (прискорення та сили) на відповідні координатні осі. Напрямки останніх можуть обиратись довільно, вони визначають знаки доданків рівняння руху.

2. Починаючи розв'язувати задачу з цього розділу, особливу увагу необхідно приділити аналізу всіх сил, що діють у системі. Такий аналіз включає з'ясування таких питань:

- Яке походження мають сили? У результаті взаємодії з якими тілами виникає кожна із сил, що діє на МТ?
- До якого типу сил належать ці сили (сила тяжіння, пружна сила, сила тертя тощо)?
- Якими факторами (силами) можна знехтувати?
- Якими властивостями характеризуються СМТ і СВ, яка застосовується в даній задачі: це замкнена чи незамкнена СМТ, інерціальна чи неінерціальна СВ? При цьому треба виходити з того, що закони Ньютона застосовуються лише до замкнених СМТ, а задачі з цього розділу стосуються лише ІСВ.

3. Поняття замкненої (або ізольованої) системи матеріальних точок (тіл) є важливою характеристикою механічного руху так само, як і з'ясування типу сил, що діють на СМТ, і приналежність їх до категорії внутрішніх або зовнішніх. Домовимось внутрішні сили (моменти сил) позначати нижнім індексом "*i*" (*inside*), а зовнішні – нижнім індексом "*e*" (*external*).

4. Виходячи з того, що закони Ньютона справедливі лише для інерціальних систем відліку, слід ретельно поставитись до вибору СВ. Для частини задач систему відліку, пов'язану із Землею, можна вважати інерціальною. Це так, якщо можна знехтувати впливом обертанням Землі навколо власної осі. Якщо це не так, за інерціальну систему відліку обирають нерухомі зірки, а Земля перетворюється на НІСВ.

2.3. Запитання та відповіді

2.3.1. *Який зміст має поняття сили в механіці Ньютона?*

Сила в ІСВ – міра взаємодії матеріальних сил. Сила в неінерціальній системі відліку є проявом властивостей системи відліку (її обертання або руху з переносним прискоренням).

2.3.2. *Назвіть причини, які можуть викликати прискорення тіла.*

Прискорення МТ може викликати дія сили з боку іншого тіла або дія сил інерції, які не мають матеріального носія.

2.3.3. *Що таке маса тіла?*

Будь-яке матеріальне тіло характеризується певною інерційністю – здатністю опиратись дії сили, яка намагається змінити його стан: вивести тіло зі стану спокою або змінити його швидкість (надати прискорення). Міра інертності – маса тіла. Окрім того, маса – міра кількості речовини.

2.3.4. *Чи існує еталон маси (тіло, маса якого дорівнює* 1 кг*)? Що може бути еталоном маси? Запропонуйте метод вимірювання маси.*

Маса тіла визначається шляхом порівняння її з масою еталонного зразка, який зберігається в Міжнародному бюро мір та ваги в м. Севр (Франція). Маса цього еталона визначається як 1 кг. Це циліндр діаметром і висотою 39,17 мм з платино-іридієвого сплаву (90 % платини, 10 % іридію). Спочатку кілограм визначався як маса одного кубічного дециметра (літра) чистої води при температурі 4 °С і стандартному атмосферному тиску на рівні моря.

Вимірювання (порівняння) мас може виконуватись за допомогою терезів (важільних або пружинних). У цьому випадку маса визначається як гравітаційна. Для вимірювання величини маси тіла можна запропонувати установку, у якій одна й та сама сила діє на еталон масою $m_{ет}$ і тіло, масу m якого треба виміряти. Але при цьому вимірюють прискорення $a_{ет}$ еталона та прискорення тіла a. За відомим співвідношенням, яке випливає з II закону Ньютона, $\frac{a_{ет}}{a} = \frac{m}{m_{ет}}$ можна знайти величину m. У цьому випадку маса визначається як інерціальна маса.

Масу тіла принципово можна виміряти і на установках типу таких, на яких Г. Кавендиш (1798) або Ф. Жоллі (1878) визначали гравітаційну сталу (див., напр., [2], п. 55). Чи можете ви запропонувати ще способи вимірювання маси (див. приклад 4.8)?

2.3.5. *У чому полягає процес вимірювання сили?*

Методики вимірювання сили різноманітні. Це – вимірювання величини Δx подовження пружини, що відбулось під дією пружної сили $F_{пр}$ і підпадає під дію закону Гука $F_{пр} = \mu \cdot \Delta x$, де μ – коефіцієнт пружності. Інший спосіб полягає у використанні II закону Ньютона: вимірюванні прискорення a тіла з відомою масою m і обчислення сили за формулою $F = m \cdot a$. Ще один спосіб вимірювання сили – вимірювання швидкості (кількості руху $p = m \cdot \upsilon$) матеріального тіла за різних значень часу Δt дії сили F. Тоді $F = \frac{m \cdot \upsilon}{\Delta t}$. Чи можете ви запропонувати ще способи вимірювання сили?

2.3.6. *Чи залежать закони динаміки від того, у якій СВ вони розглядаються?*

Закони динаміки (закони Ньютона) для замкнених систем матеріальних точок однакові в усіх інерціальних системах відліку.

2.3.7. *Чому не можна поміняти місцями закони Ньютона і на перше місце поставити, наприклад, основний закон динаміки – II закон Ньютона?*

Справді, II закон Ньютона – основний закон динаміки. Проте його не можна поставити на перше місце, тому що саме в I законі Ньютона вводиться визначення інерціальних систем відліку, для яких справедливий II закон Ньютона. Із тої самої причини не можна поміняти місцями I і III закони Ньютона.

2.3.8. *Чи можна формально довести* I і III *закони Ньютона з основного закону динаміки –* II *закону Ньютона? Якщо так, то чому не можна обмежитись основним законом динаміки?*

Формально поклавши в II законі Ньютона $F = ma$ величину сили F рівною нулю, отримуємо, що при цьому $a = 0$. Фактично, отримали одне із формулювань I закону Ньютона: "Тіло, на яке не діє сила, перебуває в стані спокою або в прямолінійному рівномірному русі".

Із II закону Ньютона формально можна отримати також і III закон Ньютона. При взаємодії двох тіл тіло 2 діє на тіло 1 із силою $\vec{F}_{21} = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt}$, де $d\vec{p}_1$ – зміна імпульсу тіла 1; dt – час дії сили $\vec{F}_{21}$. Тіло 1 діє на тіло 2 із силою $\vec{F}_{12} = \dfrac{d\vec{p}_2}{dt}$, де $d\vec{p}_2$ – зміна імпульсу тіла 2; dt – час дії сили $\vec{F}_{12}$. Природно, що час dt дії однаковий для обох сил.

В ізольованій системі матеріальних тіл діє закон збереження імпульсу: на скільки одне тіло зменшило свій імпульс, на стільки друге тіла збільшило свій імпульс: $d\vec{p}_1 = -d\vec{p}_2 \;\Rightarrow\; \vec{F}_{21} \cdot dt = -\vec{F}_{21} \cdot dt \;\Rightarrow\; \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{21}$. Це і є III закон Ньютона: при взаємодії двох тіл сили, з якими тіла діють одне на друге, рівні за величиною і протилежні за напрямком.

Таким чином, із основного закону динаміки – II закону Ньютона формально можна довести I і III закони Ньютона. Проте обмежитись тільки основним законом динаміки при цьому не можна. У I законі Ньютона вводиться визначення інерціальних систем відліку, тільки для яких і справедливий II закон Ньютона. Що стосується III закону Ньютона, то він відіграє самостійну роль, тобто незалежний від II закону Ньютона. Окрім того, для доведення III закону Ньютона нам довелось додатково залучити закон збереження імпульсу.

Таким чином, усі три закони Ньютона мають співіснувати і бути розташованими саме в традиційно заданому порядку.

2.3.9. *Чи завжди виконується III закон Ньютона? Наведіть (три) відомі вам випадки, коли III закон Ньютона не виконується. Поясніть.*

Прикладами неможливості застосування III закону Ньютона може бути таке. *По-перше*, III закон Ньютона не можна застосовувати до сил інерції, які виникають не в результаті взаємодії двох тіл, а як прояв деяких властивостей самої СВ, яку в цьому випадку вважають приналежною до категорії НІСВ. Для виникнення сил інерції, які діють на тіло в НІСВ, немає необхідності існування тіла-носія сили інерції. Тому казати про дію III закону Ньютона в НІСВ не має сенсу.

По-друге, III закон Ньютона не виконується щодо двох електрично заряджених тіл, які рухаються в магнітному полі (див. [1], п. 19). Пояснення такого невиконання лежать в існуванні електромагнітних полів, що супроводжують рух заряджених тіл, і які треба враховувати при розгляді цього питання. Треба пам'ятати, що III закон Ньютона строго виконується лише в класичній механіці, а у випадку руху електрично зарядженого тіла зазвичай відбувається релятивістський рух і діють закони електродинаміки. І нарешті, треба брати до уваги й те, що III закон Ньютона вимагає збереження імпульсів, що можливо лише в ізольованій СВ, чого немає в розглянутому випадку.

*Третій випадок виключення із III закону Ньютон*а пов'язаний з розглядом зміни положення одного з двох тіл, що взаємодіють і розташовані на деякій відстані одне від другого. Тут III закон Ньютона не виконується під час руху тіла. Наприклад, між тілами 1 і 2 (рис. 2.1) діє сила гравітації $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. При переміщенні тіла 1 з точки 1 у точку $1'$ дія поля гравітації передається з дуже великою швидкістю, але не миттєвою, яка обмежена швидкістю світла у вакуумі. На час руху тіла 1 інформація про його нове положення $1'$, яка доходить до тіла 2, запізнюється стосовно дійсного положення тіла 1 і відповідає величині та напрямку сили, які визначаються старим положенням 1 тіла. Інформація про збурення поля гравітації весь час запізнюється до положення тіла, що змінюється. Таким чином, на час руху тіла і деякий час після того, як воно зупинилось, III закон Ньютона був порушений. Цей випадок порушення III закону Ньютона безпосередньо пов'язаний із застосуванням принципу близькодії й демонструє некоректність застосування принципу далекодії (див. запитання 7.3.1).

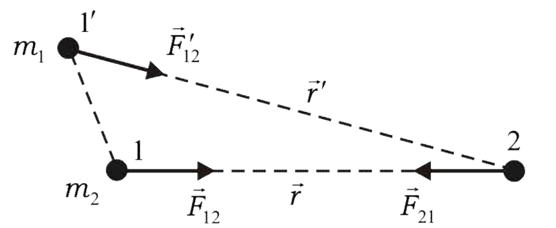


Рис. 2.1. До запитання 2.3.9

Таким чином, III закон Ньютона виконується не завжди. Строго його можна застосовувати лише у випадку взаємодії тіл, коли сила є мірою такої взаємодії. При його застосуванні слід виходити із позицій принципу близькодії.

2.3.10. *Користуючись законом збереження імпульсу та перетвореннями Галілея, покажіть, що в класичній механіці маса – адитивна величина.*

М. Ломоносов та А.-Р. Лавуазьє в середині XVIII ст. довели закон збереження речовини (ваги) е хімічних реакціях: сумарна вага речовин до їх вступу в хімічну реакцію дорівнює сумарній вазі речовин, утворених е результаті хімічної реакції. Тут йдеться про адитивність ваги (маси) у хімічних реакціях. Аналогічний закон випливає із повсякденного досвіду і для механічних систем: маса утвореної СМТ (m) дорівнює сумі мас кожної з МТ, які утворили цю СМТ, наприклад, для двох тіл $m = m_1 + m_2$. Це можна довести.

Нехай у результаті абсолютно непружного удару два тіла, маси яких m_1 і m_2, злипаються в одне тіло масою m. Швидкості тіл до удару υ_1 та υ_2, складеного тіла після удару υ. Для замкненої СМТ запишемо закон збереження імпульсу в нерухомій СВ

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m\upsilon . \tag{2.4}$$

Якщо розглянути цей удар е рухомій СВ (*К´*-СВ), яка рухається відносно *К*-СВ зі швидкістю υ_0, то в *К´*-СВ швидкості частинок до удару будуть відповідно дорівнювати

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0 \quad \text{та} \quad \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_0 , \tag{2.5}$$

а швидкість утвореної після удару системи дорівнюватиме

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 . \tag{2.6}$$

Для *К´*-СВ, у якій швидкості частинок, відповідно, дорівнюють: υ_1' і υ_2', а маси інваріантні щодо перетворень Галілея, закон збереження імпульсу набуває вигляду

$$m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = m\upsilon' . \tag{2.7}$$

Якщо підставити (2.5) і (2.6) у (2.7) і врахувати (2.4), то отримаємо

$$(m_1 + m_2)\upsilon_0 = m\upsilon_0 \;\Rightarrow\; m_1 + m_2 = m .$$

Таким чином, користуючись законом збереження імпульсу та перетвореннями Галілея, дійшли висновку, що маса складеного тіла або СМТ дорівнює сумі мас тіл, які утворюють складене тіло або систему МТ. Ця властивість називається *адитивністю* мас. Доведення можна узагальнити і перенести закон адитивності мас на довільну кількість тіл. Так можна перейти навіть до хімічних реакцій, у яких у взаємодію вступають атоми і молекули. Як бачимо, строго доведено те, що здається очевидним. Це варто було зробити, тому що в релятивістській механіці закон адитивності мас не виконується (див. розд. 9).

2.3.11. *Чи залежить сила тертя ковзання від швидкості руху тіла?*

Як встановлено експериментально, існує залежність сили тертя від швидкості руху тіла.

При зміні зовнішньої сили F, яка прикладається до тіла, що покоїться, від 0 до $F < F_0$ (де F_0 – гранична величина зовнішньої сили, за якої починається рух тіла) тіло не рушає з місця через дію на нього сили тертя спокою (рис. 2.2, а). При цьому, коли швидкість тіла $\upsilon = 0$, сила тертя визначається не однозначно і може набувати будь-яких значень від $+F_0$ до $-F_0$.

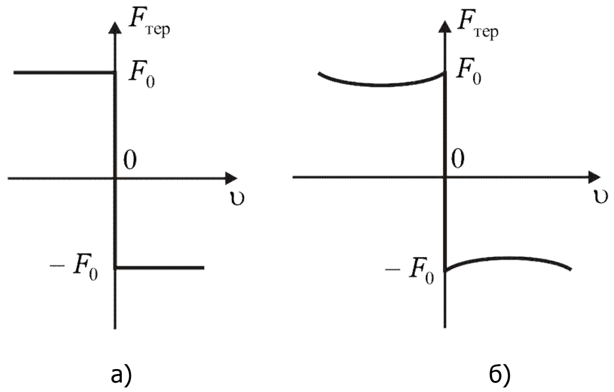


Рис. 2.2. Залежність сили тертя ковзання від швидкості руху МТ

Тіло починає рухатись, коли $F = F_0$. Сила тертя спокою, яку в цьому випадку прирівнюють до сили F_0, переходить у силу тертя ковзання $F_{\text{тер}}$. Дослідним шляхом було встановлено, що $F_{\text{тер}} = kN$, де k – коефіцієнт тертя; N – сила реакції опори. За малих швидкостей зі збільшенням швидкості відносного руху тіла сила тертя ковзання спочатку зменшується, а при подальшому збільшенні швидкості зростає (рис. 2.2, б).

2.3.12. *Якщо сила тертя ковзання залежить від швидкості руху тіла (див. попереднє запитання), то коефіцієнт тертя є функцією швидкості. Як при цьому можна користуватись виразом $F_{\text{тер}} = kN$, де k – коефіцієнт тертя – величина стала?*

Коефіцієнт тертя залежить від величини швидкості υ. Однак, як встановив Ш. Кулон, ця залежність зазвичай виражена слабо. Тобто, коли не потрібна велика точність, коефіцієнт тертя k можна вважати незалежним від швидкості і користуватись виразом $F_{\text{тер}} = kN$, де k – коефіцієнт тертя – величина стала. Тоді крива, що зображена на рис. 2.2, б, вироджується у залежність, показану на рис. 2.2, а. Зауважимо, що сила тертя і в цьому ідеалізованому випадку залежить від υ, оскільки при переході швидкості через нуль сила $F_{\text{тер}}$ змінює знак, а за $\upsilon = 0$ стає невизначеною. (Зміна знака сили $F_{\text{тер}}$ при зміні знака швидкості природна, оскільки існує універсальне правило: сила тертя завжди направлена в протилежний бік від напрямку руху, вона заважає руху). У всіх задачах, які ми будемо розв'язувати, вважається, що k не залежить від υ.

2.3.13. *Вираз для сили тертя ковзання має вигляд: $F_{\text{тер}} = kN$, де N – сила нормального тиску, яка притискає поверхні тіл одне до одного. Поясніть напрямки сил $\vec{F}_{\text{тер}}$ і $\vec{N}$. Як вираз для $\vec{F}_{\text{тер}}$ записати у векторному вигляді?*

Через те, що напрямки сил $\vec{F}_{\text{тер}}$ і $\vec{N}$ ніколи не збігаються, записувати рівняння $F_{\text{тер}} = kN$ у векторному вигляді, просто записавши сили як вектори, не можна. Проте його можна записати в інший спосіб, а саме:

$$\vec{F}_{\text{тер}} = -kN\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}, \tag{2.8}$$

де $\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$ – одиничний вектор уздовж напрямку швидкості. Знак "мінус" означає протилежний напрямок векторів $\vec{F}_{\text{тер}}$ і $\vec{\upsilon}$.

2.3.14. *Чи правильне твердження про те, що "сила тертя завжди заважає руху"?*

Ні, не правильне. Сили тертя можуть виступати в ролі і гальмівних і рушійних сил. Наприклад, існування сили тертя між ведучими колесами автомобіля і дорогою забезпечує його рух. Тертя широко використовується в пасових передачах і фрикційних муфтах для передачі зусиль від однієї деталі машини до інших.

2.3.15. *Відомо, що сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і швидкість $\vec{\upsilon}$ тіла мають протилежні напрямки. Чи існують випадки, коли сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і швидкість $\vec{\upsilon}$ тіла мають однаковий напрямок?*

Коли кажуть про протилежні напрямки сили тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і швидкості $\vec{\upsilon}$ тіла, мають на увазі тертя між рухомим тілом і тілом, яке відносно системи відліку нерухоме. Розглянемо випадок, коли сила тертя обумовлена взаємодією тіла 2 з іншим тілом 1, яке також рухається в тому самому напрямку, але з більшою швидкістю (рис. 2.3): $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

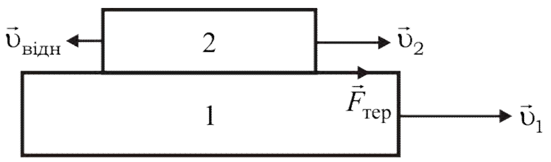


Рис. 2.3. До запитання 2.3.14

Швидкість тіла 2 відносно тіла 1 (відносна швидкість) дорівнює: $\vec{\upsilon}_{\text{відн}} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$. Напрямки сили тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і відносної швидкості $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ протилежні, але напрямок швидкості $\vec{\upsilon}_2$ збігається з напрямком сили тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$[1].

2.3.16. *Що таке детермінізм Лапласа?*

Зробимо нескладні викладки. Швидкість υ МТ з урахуванням початкових умов (за $t = 0$ величина $\upsilon = \upsilon_0$) дорівнює

[1] Більш детальний розгляд випадку, подібного до наведеного тут, див. у [9] задача 1.67.

$$\upsilon = \frac{dr}{dt} = \upsilon_0 + at = \upsilon_0 + \frac{F}{m}t \;\Rightarrow\; dr = \left(\upsilon_0 + \frac{F}{m}t\right)dt\,.$$

Інтегрування останнього виразу дає

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}}{2m}t^2 + \vec{\upsilon}_0 t + \vec{r}_0\,, \tag{2.9}$$

де r_0 – радіус-вектор точки, з якої починається рух МТ.

Вираз (2.9) є розв'язком основного закону динаміки – закону руху МТ, на яку діє постійна зовнішня сила $\vec{F}$. Так само, розв'язком рівняння коливального руху $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (див. розд. 10), яке, до речі, було отримано також із використанням II закону Ньютона, є вираз $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$. Із цього виразу, як і з (2.9), можна за відомими початковими умовами визначити стан МТ у будь-який момент часу, у тому числі, не тільки для часу $t > 0$, але й для часу $t < 0$. (Через те, що час однорідний, за початковий момент часу може бути обраний будь-який момент часу $t = t_0$).

Вищенаведене дозволило П. Лапласу (1749–1827) сформулювати твердження про те, що *розвиток світу строго детермінований (визначений). Це означає, що за відомим у деякий момент часу станом МТ або системи МТ із розв'язку рівняння Ньютона можна передбачити майбутній і відтворити минулий стани МТ або системи МТ.* Таке твердження служить базою для вчення, яке називається детермінізмом Лапласа.

Хоча наведені викладки і коректні, а логіка П. Лапласа нам зрозуміла, здоровий глузд підказує, що детермінізм Лапласа, який базується на спрощених (механістичних) результатах класичної механіки, робить занадто далекосяжні висновки щодо складних систем.

2.3.17. *У чому полягає обмеженість детермінізму Лапласа?*

П. Лаплас не розглядав питання стійкості розв'язків рівняння руху. Його вперше для деяких астрономічних задач розглянув О. М. Ляпунов (1857–1918). Він показав, що достатньо малі (нескінченно малі) зміни початкових умов можуть призводити до великих змін у траєкторії руху. Такі розв'язки Ляпунов назвав нестійкими, і саме розвинув методи визначення стійких і нестійких розв'язків рівняння руху.

Відповідаючи на поставлене запитання, не слід забувати, що в природі не існує строго ізольованих систем. Окрім регулярних сил, пов'язаних із потенціальною енергією, на систему завжди діють зовнішні (нехай і достатньо малі) випадкові сили та різного роду флуктуації, які призводять до змін швидкості, маси чи просторового положення МТ. Вони не змінюють стійких траєкторій. Проте нестійкі траєкторії під дією нескінченно малих зовнішніх випадкових сил істотно змінюються.

Таким чином, *якщо властивості системи такі, що траєкторія руху стійка, то для неї можна застосовувати принцип детермінізму Лапласа. Якщо властивості системи такі, що траєкторія руху нестійка, то принцип детермінізму Лапласа для неї несправедливий.*

2.3.18. *Що таке система центра мас – Ц-система відліку?*

Ц-система відліку – це СВ, у якій рух тіл у СМТ розглядається відносно центра мас. Ц.м. у Ц-системі відліку для ізольованої СМТ нерухомий. Нагадаємо, що положення центра мас СМТ відносно початку системи координат у лабораторній системі відліку характеризується радіус-вектором $\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i$, де m_i, r_i – маса і радіус-вектор i-ї частинки, відповідно.

2.3.19. *Сформулюйте та доведіть теорему центра мас.*

Імпульс системи МТ дорівнює сумі імпульсів усіх МТ, що входять до СМТ:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = m\frac{d\vec{r}_c}{dt} = m\vec{\upsilon}_c\,, \qquad (2.10)$$

тобто імпульс системи МТ дорівнює добутку маси системи на швидкість υ_c її центра мас.

Продиференцюємо (2.10) за часом $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}$. З урахуванням того, що $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{зовн}}$, остаточно маємо

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{зовн}}\,. \qquad (2.11)$$

Отримали рівняння руху системи МТ як цілого, яке можна сформулювати таким чином: центр мас будь-якої системи МТ рухається так, начебто вся маса системи накопичена в одній точці –у центрі мас, до якої прикладені всі зовнішні сили $F_{\text{зовн}}$.

Якщо система матеріальних тіл – замкнена $\left(\vec{F}_{\text{зовн}} = 0\right)$, то

$$\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\upsilon}_c = \text{const}\,.$$

Таким чином, в ІСВ швидкість центра мас СМТ, при всіх можливих змінах, які відбуваються в системі, залишається постійною: не змінюється із часом ні за величиною, ні за напрямком. Тобто центр мас замкненої системи МТ в ІСВ рухається прямолінійно і рівномірно або перебуває в стані спокою. Тому в Ц-системі відліку нас цікавить лише відносний рух усередині системи і зазвичай не цікавить рух системи як цілого.

Можна зробити і протилежний висновок: якщо в Ц-СВ величина $\vec{\upsilon}_c = 0$ або $\vec{\upsilon}_c = \text{const}$, то СМТ належить до категорії замкнених СМТ. Таким чином, для замкненої СМТ її Ц-СВ є ІСВ; для незамкненої СМТ її Ц-СВ є НІСВ.

2.3.20. *Між величинами кінетичної енергії системи матеріальних частинок, виміряними в К-системі відліку (лабораторній, нерухомій СВ) і в Ц-системі від-*

ліку, існує зв'язок. Знайдіть його.

Швидкість i-ї частинки в K-системі відліку за перетвореннями Галілея дорівнює $\upsilon_i = \vec{\tilde{\upsilon}}_i + \upsilon_c$, де υ_c – швидкість Ц-системи відліку відносно K-системи відліку; $\vec{\tilde{\upsilon}}_i$ – швидкість i-ї частинки в Ц-системі відліку.

Кінетична енергія системи матеріальних частинок у K-системі відліку дорівнює

$$T = \sum_i \frac{m_i \upsilon^2{}_i}{2} = \sum_i \frac{m_i (\vec{\tilde{\upsilon}}_i + \vec{\upsilon}_c)^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \tilde{\upsilon}_i{}^2}{2} + \vec{\upsilon}_c \sum_i m_i \vec{\tilde{\upsilon}}_i + \sum_i \frac{m_i \upsilon_c{}^2}{2}. \qquad (2.12)$$

Оскільки центр мас у Ц-системі перебуває в стані спокою, сумарний імпульс системи матеріальних частинок дорівнює нулю $\sum\limits_i m_i \tilde{\upsilon}_i = 0$. Тоді другий доданок у (2.12) зникає і ця формула набуває вигляду

$$T = \sum_i \frac{m_i \tilde{\upsilon}_i{}^2}{2} + \frac{\upsilon_c{}^2}{2} \sum_i m_i = \tilde{T} + \frac{m \upsilon_c{}^2}{2}, \qquad (2.13)$$

де $\tilde{T}$ – кінетична енергія системи матеріальних частинок у Ц-системі відліку. Із виразу (2.13) видно, що кінетична енергія системи матеріальних частинок у K-системі відліку складається із сумарної кінетичної енергії $\tilde{T}$ матеріальних частинок у Ц-системі відліку та кінетичної енергії, пов'язаної з рухом системи частинок як цілого (кінетичної енергії центра мас).

2.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. *Куля, яка пробиває наскрізь дошку товщиною h, змінює свою швидкість від величини υ_0 на вході в дошку до величини υ_e на виході з неї. Знайдіть час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадрату швидкості.*

Розв'язання: З умови прикладу сила опору

$$F = -b\upsilon^2, \quad \text{де } b \text{ – стала } (b > 0). \qquad (2.14)$$

За ІІ-им законом Ньютона прискорення (гальмування) кулі в дошці з урахуванням (2.14) буде визначатись як

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{b\upsilon^2}{m}.$$

Врахувавши визначення прискорення, маємо

$$-\frac{\mathrm{b}\upsilon^2}{m} = \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (2.15)$$

З урахуванням того, що стала b у (2.14) – додатна величина, а куля в дошці гальмується, тобто прискорення – від'ємна величина ($a < 0$), у (2.15) слід ставити знак "мінус". Переписавши (2.15) у вигляді $-\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = \frac{\mathrm{b}}{m} dt$, проінтегруємо його:

$$\frac{1}{\upsilon} = \frac{b}{m}t + C . \qquad (2.16)$$

Визначимо сталу інтегрування *C*. Для цього скористаємось початковими умовами: при $t = 0$ швидкість кулі (за умовою задачі) $\upsilon = \upsilon_0$, тоді

$$\frac{1}{\upsilon_0} = \frac{b}{m} \cdot 0 + C , \quad \text{або} \quad \frac{1}{\upsilon_0} = C . \qquad (2.17)$$

Підставляючи (2.17) у (2.16), отримуємо

$$\frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{\upsilon_0} = \frac{b}{m}t \;\Rightarrow\; \upsilon = \frac{\upsilon_0}{1 + \frac{b\upsilon_0}{m}t} . \qquad (2.18)$$

За таким законом (2.18) змінюється із часом швидкість кулі при проходженні її через дошку.

Тепер можна знайти залежність шляху *s*, який проходить куля в дошці, від часу *t*. Для цього скористаємось визначенням шляху для прискореного руху $s = \int\limits_0^t \upsilon \cdot dt$.

Урахувавши (2.18), маємо

$$s = \int\limits_0^t \frac{\upsilon_0 \cdot dt}{1 + \frac{b\upsilon_0}{m}t} . \qquad (2.19)$$

Визначивши цей інтеграл[1], отримуємо

$$s(t) = \frac{m}{b} \ln\left(1 + \frac{b\upsilon_0}{m}t\right) . \qquad (2.20)$$

За таким законом (2.20) змінюється із часом шлях, який проходить куля в дошці. Введемо такі позначення: t_0 – час прольоту кулі крізь дошку; *h* – товщина дошки; υ_e – швидкість кулі на виході з дошки. Урахувавши це, отримуємо

---

[1] Щоб знайти значення інтеграла (2.19), зробимо заміну змінної: позначимо $1 + \frac{b\upsilon_0}{m}t = x$. Тоді, урахувавши, що $dx = \frac{b\upsilon_0}{m}dt$ і замінивши межі інтегрування відповідно до нової змінної, отримуємо $s = \upsilon_0 \int\limits_0^t \frac{dt}{1 + \frac{b\upsilon_0}{m}t} = \frac{\upsilon_0 \cdot m}{b \cdot \upsilon_0} \int\limits_1^{1+\frac{b\upsilon_0}{m}t} \frac{dx}{x}$. Скористаємось табличним інтегралом $\int \frac{dx}{x} = \ln x$, маємо $s = \frac{m}{b} \ln x \Big|_1^{1+\frac{b\upsilon_0}{m}t} = \frac{m}{b}\left[\ln\left(1 + \frac{b\upsilon_0}{m}t\right) - \ln 1\right] = \frac{m}{b} \ln\left(1 + \frac{b\upsilon_0}{m}t\right)$.

$$h = \frac{m}{b} \ln\left(1 + \frac{b}{m} \upsilon_0 t_0\right). \tag{2.21}$$

Із (2.18) маємо

$$\upsilon_e = \frac{\upsilon_0}{1 + \dfrac{b\upsilon_0}{m} t_0}. \tag{2.22}$$

Комбінуючи вирази (2.21) і (2.22), маємо

$$h = \frac{m}{b} \ln \frac{\upsilon_0}{\upsilon_e}. \tag{2.23}$$

Враховуючи (2.23), із (2.22) знаходимо час прольоту кулі через дошку

$$t_0 = \frac{h(\upsilon_0 - \upsilon_e)}{\upsilon_e \cdot \upsilon_0 \cdot \ln \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_e}}.$$

Приклад 2.2. *На гладенькій горизонтальній поверхні лежать два однакових бруски, з'єднані невагомою пружиною, жорсткість якої χ і довжина L_0 у нерозтягнутому стані. На один із брусків почали діяти постійною горизонтальною силою $\vec{F}$* (рис. 2.4*). Знайдіть максимальну і мінімальну відстань між брусками в процесі їх руху.*

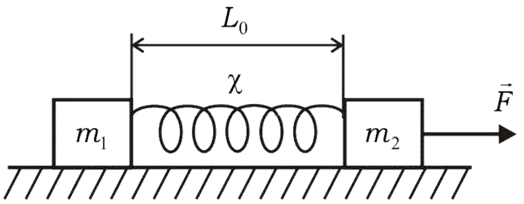


Рис. 2.4. До прикладу 2.3

Розв'язання: з початком руху бруска m_2, до якого прикладена сила $\vec{F}$, почалась розтягуватись пружина. При цьому зразу ж почав рухатись і брусок m_1 (поверхня – гладенька, тертя немає). Сила, що діє на брусок m_1 під час розтягування пружини поступово (у міру розтягування пружини) зростає від 0 до $\vec{F}$. Довжина пружини при цьому змінюється від $L_{\min} = L_0$ до $L_{\max}$. На брусок m_1 сила $\vec{F}$ почне діяти тоді, коли пружина буде розтягнута максимально до довжини $L_{\max} = L_0 + \Delta L$, де ΔL – абсолютне подовження пружини. Ураховуючи це в законі Гука $F = \chi \cdot \Delta L$, маємо $\chi \cdot (L_{\max} - L_0) = F$. Звідси $L_{\max} = L_0 + \dfrac{F}{\chi}$. Після досягнення максимальної довжини пружини $L = L_{\max}$ обидва бруски рухаються разом, з однаковими швидкостями і прискореннями.

Приклад 2.3. *Брусок починає сковзати по похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя k залежить від шляху x, який проходить брусок, за законом $k = \gamma x$, де γ – стала. Знайдіть шлях, який пройде брусок до зупинки, і його максимальну швидкість на цьому шляху. У якому місці шляху брусок матиме максимальну швидкість?*

Розв'язання: Чому брусок має зупинитись? Через те, що коефіцієнт тертя збільшується в міру збільшення шляху x, через деякий час сила тертя стане достатньо великою для того, щоб брусок зупинився, $mg\cos\alpha$.

Сили, які діють на брусок (рис. 2.5), визначаються силою тяжіння бруска $\vec{P} = m\vec{g}$, яка має складові на вісь *Ox* і на вісь *Oy*. Складова цієї сили на вісь *Ox*, що дорівнює за величиною $mg\sin\alpha$, викликає ковзання бруска з похилої площини. Складова сили $\vec{P}$ на вісь *Oy*, пов'язана з існуванням сили реакції опори $N = mg\cos\alpha$. Окрім того, існує сила тертя $F_{\text{тер}} = kN = kmg\cos\alpha$ [1].

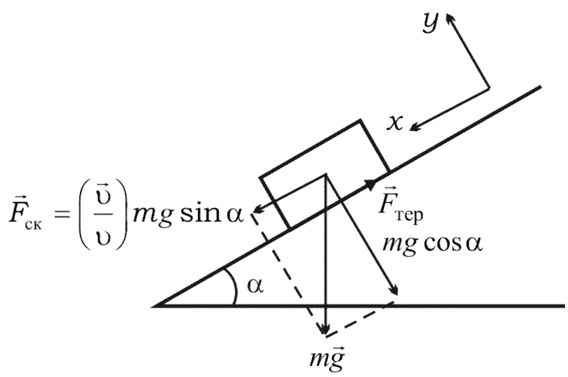


Рис. 2.5. До прикладу 2.3

Рівняння руху бруска $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}$. Рівнодіюча сил, які діють на брусок уздовж осі Ox, дорівнює

$$F = mg\sin\alpha - F_{\text{тер}} = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha .$$

Прискорення бруска дорівнює

$$a = \frac{F}{m} = g\sin\alpha - kg\cos\alpha = g\sin\alpha - \gamma xg\cos\alpha . \qquad (2.24)$$

З іншого боку, за визначенням, прискорення дорівнює

[1] Проблема запису цих складових у векторному вигляді розв'язується традиційним способом – через одиничні вектори (див. питання 2.3.13): складова сили $\vec{P}$, що змушує тіло сковзати вздовж осі Ox, записується у вигляді $\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} mg\sin\alpha$; сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}} = -\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} kN$, де $\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$ – одиничний вектор осі Ox. Сила реакції опори $\vec{N} = \vec{n} mg\cos\alpha$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до похилої площини вздовж осі *Oy*.

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon\,. \tag{2.25}$$

Порівнюючи (2.24) та (2.25), маємо

$$\upsilon\,d\upsilon=\left(g\sin\alpha-\gamma xg\cos\alpha\right)dx\,. \tag{2.26}$$

Проінтегруємо вираз (2.26):

$$\int\upsilon\,d\upsilon=\int\left(g\sin\alpha-\gamma gx\cos\alpha\right)dx\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\upsilon^2}{2}=gx\sin\alpha-\frac{\gamma g}{2}x^2\cos\alpha+C\,.$$

Скористаємось початковими умовами (на початку руху: $x=0$, $\upsilon=0$ – брусок покоїться), знайдемо сталу інтегрування $C=0$. Таким чином,

$$\upsilon=\sqrt{x(2g\sin\alpha-g\gamma x\cos\alpha)}\,. \tag{2.27}$$

Проаналізуємо (2.27). Швидкість бруска $\upsilon=0$ у двох випадках:

1) на початку шляху $x=0$;

2) коли виконується умова $g\sin\alpha-\frac{\gamma g}{2}x\cos\alpha=0$. Ця умова відповідає випадку зупинки бруска внаслідок зростання сили тертя. У цьому разі координата бруска визначається величиною

$$x_e=\frac{2}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha,\ \text{де}\ x_e\ \text{– шлях до зупинки.} \tag{2.28}$$

Для відшукання $\upsilon_{\max}$ дослідимо функцію (2.27) на екстремум, для цього визначимо першу похідну за x і прирівняємо її нулю:

$$\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{1}{2}\frac{2g\sin\alpha-2g\gamma x\cos\alpha}{\sqrt{x\left(2g\sin\alpha-2g\gamma x\cos\alpha\right)}}=0\;\Rightarrow\;2g\sin\alpha-2g\gamma x\cos\alpha=0\,. \tag{2.29}$$

Координата бруска, яку знайдемо з (2.29), відповідає випадку, коли швидкість бруска максимальна

$$x\Big|_{\upsilon_{\max}}=\frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha\,. \tag{2.30}$$

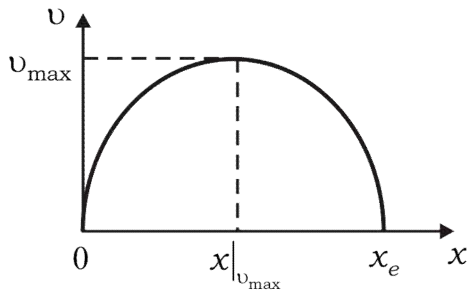


Рис. 2.6. До прикладу 2.3

Як бачимо (рис. 2.6), порівнюючи (2.28) і (2.30), максимальна швидкість досягається посередині шляху до зупинки $x\big|_{\upsilon_{\max}} = \frac{1}{2}x_e$. Підставляючи (2.30) у (2.27), знайдемо максимальну швидкість бруска

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha\left(2g\sin\alpha - g\gamma\frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha\right)} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}\ .$$

Приклад 2.4. *Ланцюжок довжиною ℓ розмістили на гладеньку сферичну поверхню радіуса R так, що один кінець ланцюжка закріплений на вершині сфери. З яким прискоренням почне рухатись кожний елемент ланцюжка, якщо його верхній кінець звільнити. Вважається, що довжина ланцюжка $\ell < \pi R/2$.*

Розв'язання: "Гладенька сферична поверхня" означає, що тертям під час руху ланцюжка по поверхні нехтуємо. Умова $\ell < \pi R/2 \equiv 2\pi R/4$ означає, що ланцюжок по всій своїй довжині лежить на сферичній поверхні і не звисає з неї. Введемо такі позначення (рис. 2.7):

- $\alpha_0 = \dfrac{\ell}{R}$ – кутовий розмір ланцюжка;
- $d\alpha$ – кутовий розмір одного елемента ланцюжка;
- dm – маса одного елемента ланцюжка.

Якщо маса всього ланцюжка m, а кількість елементів у ланцюжку N, то маса одного елемента ланцюжка дорівнює

$$dm = \frac{m}{N} = \frac{m}{\alpha_0/d\alpha} = \frac{m}{\ell/(R\cdot d\alpha)}. \qquad (2.31)$$

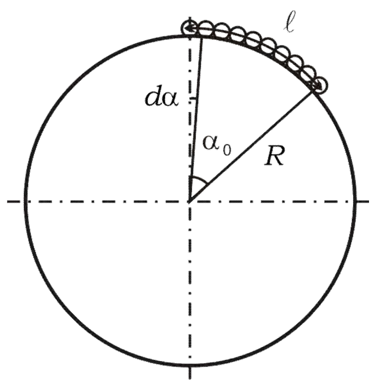


Рис. 2.7. Розташування ланцюжка на сферичній поверхні (до прикладу 2.4)

Сила, яка діє на один елемент ланцюжка і примушує його рухатись із прискоренням a, ураховуючи (2.31), дорівнює

$$dF = dm\cdot a = \frac{m}{\ell/(R\cdot d\alpha)}a\ .$$

Якщо зважити на те, що ковзання ланцюжка зі сферичної поверхні має ту саму природу, що й ковзання тіла з похилої площини, то прискорення такого ковзання $a = g\sin\alpha$ (рис. 2.8). Таким чином, маємо

$$dF = \frac{m}{\ell/(R\cdot d\alpha)}g\sin\alpha\,. \tag{2.32}$$

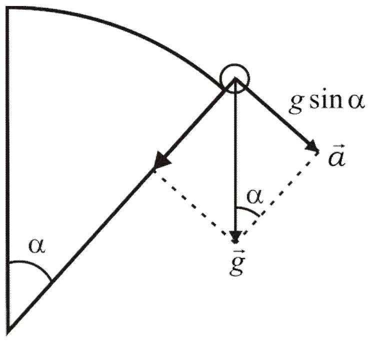


Рис. 2.8. Складові прискорення при сковзанні елемента ланцюжка (до прикладу 2.4)

Інтегрування (2.32) приводить до виразу

$$F = \int_0^{\alpha_0}\frac{mgR}{\ell}\sin\alpha\,d\alpha = -\frac{mgR}{\ell}\cos\alpha\Big|_0^{\alpha_0} = \frac{mgR}{\ell}\left(1-\cos\alpha_0\right) = \frac{mgR}{\ell}\left(1-\cos\frac{\ell}{R}\right).$$

Як відомо, $F = ma$. Тому прискорення a, з яким почне рухатись кожний елемент ланцюжка (як і ланцюжок у цілому), якщо його верхній кінець звільнити, дорівнює

$$a = \frac{gR}{\ell}\left(1-\cos\frac{\ell}{R}\right).$$

Приклад 2.5. *Пліт маси M з людиною на ньому масою m нерухомо стоїть на поверхні озера. Відносно плота людина здійснює переміщення $\vec{\ell}'$ зі швидкістю $\upsilon'(t)$ і зупиняється. Нехтуючи опором води, знайдіть величину переміщення ℓ плота відносно берега.*

Розв'язання: Випадок, описаний в умові прикладу, можна представити на рис. 2.9, де використані такі позначення: x_1 і x_2 – координати центра мас, відповідно, людини та плота відносно берега до початку руху людини на плоту; x_1^e і x_2^e – координати центра мас, відповідно, людини та плота відносно берега в кінці руху людини на плоту; x_1' і $x_2'^e$ – координати центра мас людини відносно плота до початку та в кінці руху людини на плоту, відповідно.

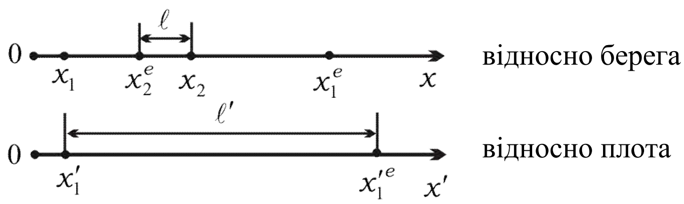


Рис. 2.9.
До прикладу 2.5

Згідно з визначенням центра мас СМТ – у даному випадку системи "пліт–людина" – її ц.м. до початку руху має координату

$$x_c = \frac{mx_1 + Mx_2}{m + M}. \tag{2.33}$$

Координату ц.м. цієї системи в кінці руху можна представити у вигляді

$$x_c^e = \frac{mx_1^e + Mx_2^e}{m + M}. \tag{2.34}$$

Механіка процесів, що відбуваються в системі "пліт–людина", така, що відстань між положеннями ц.м. людини в кінці її переміщення відносно берега і плота, які характеризуються координатами x_1^e і $x_1'^e$, відповідно (рис. 2.9), буде дорівнювати величині переміщення ℓ ц.м. плота відносно берега. Врахувавши це, згідно з рис. 2.9 вираз (2.34) набуде вигляду

$$x_c^e = \frac{mx_1^e + Mx_2^e}{m + M} = \frac{m\left[x_1 + (\ell' - \ell)\right] + M(x_2 - \ell)}{m + M}. \tag{2.35}$$

Будемо вважати, що опір води нехтовно малий, і результуюча всіх зовнішніх сил, які діють на систему "пліт – людина", дорівнює нулю: система замкнена. Тому центр мас цієї системи матеріальних тіл у процесі руху людини (і плота) змінюватись не буде (теореми центра мас) $x_c^e = x_c$. Таким чином,

$$mx_1 + Mx_2 = m\left[x_1 + (\ell' - \ell)\right] + M(x_2 - \ell) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mx_1 + Mx_2 = mx_1 + m\ell' - m\ell + Mx_2 - M\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ell' = \ell(m + M). \tag{2.36}$$

Остаточно маємо

$$\ell = \frac{m}{m + M}\ell'. \tag{2.37}$$

Із виразу (2.37) видно, що величина переміщення плота ℓ відносно берега не залежить від характеру руху людини на плоту, тобто від закону $\vec{\upsilon}'(t)$ і траєкторії руху людини на плоту.

3. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

3.1. Короткі теоретичні відомості

- Моментом $\vec{M}$ сили відносно точки O називають векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки O в точку прикладання сили, на вектор сили $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]. \tag{3.1}$$

- Проекції M_x, M_y, M_z вектора $\vec{M}$ на осі прямокутної декартової СК з початком у точці O пов'язані з проекціями на ці осі векторів $\vec{r}$ і $\vec{F}$ співвідношеннями:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x, \tag{3.2}$$

де x, y, z – координати точки прикладання сили $\vec{F}$.

- Моментом сили відносно осі називають скалярну величину, яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту сили $\vec{M}$ відносно будь-якої точки на цій осі.
- Момент інерції матеріальної точки маси m відносно деякої осі, яка віддалена від МТ на відстань r, дорівнює

$$I = mr^2. \tag{3.3}$$

- Момент інерції твердого тіла відносно осі називають величину, яка є мірою інерції твердого тіла при обертальному русі навколо цієї осі й дорівнює сумі добутків мас усіх частинок тіла на квадрат їх відстані від цієї осі.
- Момент інерції твердого тіла відносно відповідних осей прямокутної декартової СК дорівнює:

$$\begin{aligned}
I_x &= \int\limits_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm = \int\limits_{(V)} \left(y^2 + z^2\right)\rho dV = \iiint\limits_{(V)} \left(y^2 + z^2\right)\rho\, dx\, dy\, dz, \\
I_y &= \int\limits_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm = \int\limits_{(V)} \left(x^2 + z^2\right)\rho dV = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + z^2\right)\rho\, dx\, dy\, dz, \\
I_z &= \int\limits_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm = \int\limits_{(V)} \left(x^2 + y^2\right)\rho dV = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + y^2\right)\rho\, dx\, dy\, dz,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

де m, ρ, V – маса, густина та об'єм тіла; x, y, z – координати елементарної частинки тіла, яка має об'єм dV і масу dm.

- Відцентрові моменти інерції тіла відносно до осей прямокутної декартової СК називаються такі величини:

$$I_{xy} = \int\limits_{(m)} xy\,dm = \int\limits_{(V)} xy\,\rho dV = \iiint\limits_{(V)} xy\,\rho\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{xz} = \int\limits_{(m)} xz\,dm = \int\limits_{(V)} xz\,\rho dV = \iiint\limits_{(V)} xz\,\rho\,dx\,dy\,dz, \tag{3.5}$$

$$I_{yz} = \int\limits_{(m)} yz\,dm = \int\limits_{(V)} yz\,\rho dV = \iiint\limits_{(V)} yz\,\rho\,dx\,dy\,dz\,.$$

- Момент інерції твердого тіла I_a відносно осі a, що проходить через будь-яку точку O, з моментами інерції цього тіла відносно осей прямокутної декартової СК, початок якої збігається з точкою O, пов'язаний співвідношенням

$$\begin{aligned} I_a &= I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - \\ &- 2I_{xy}\cos\alpha\,\cos\beta - 2I_{xz}\cos\alpha\,\cos\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\,\cos\gamma\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

де α, β, γ – кути, утворені віссю a відповідно з осями Ox, Oy, Oz прямокутної СК.

- Через кожну точку тіла можна провести так три взаємно перпендикулярні головні осі інерції Ox', Oy', Oz', що

$$I_a = I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma\,, \tag{3.7}$$

де α', β', γ' – кути, утворені віссю a відповідно з осями Ox', Oy', Oz'; I_1, I_2, I_3 – моменти інерції тіла відносно головних осей інерції в точці O, які називаються головними моментами інерції.

- Теорема Гюйгенса – Штейнера: момент інерції I твердого тіла відносно довільної осі a дорівнює сумі моменту інерції I_0 цього тіла відносно осі a_0, яка паралельна осі a і проходить через центр мас тіла, і добутку маси m тіла на квадрат відстані d між осями a та a_0:

$$I = I_0 + md^2\,. \tag{3.8}$$

- Момент кількості руху (момент імпульсу) матеріальної точки відносно деякої точки (полюса) називається вектор $\vec{L}_i$, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}_i$ точки, проведеного з полюса, на її кількість руху $m_i\vec{\upsilon}_i$:

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i\, m_i\vec{\upsilon}_i\right]. \tag{3.9}$$

- Момент кількості руху (момент імпульсу) твердого тіла відносно деякої точки (полюса) дорівнює

$$\vec{L} = \int\limits_{(m)} \left[\vec{r}\,\vec{\upsilon}\right] dm = \int\limits_{(V)} \left[\vec{r}\,\vec{\upsilon}\right]\rho dV = \iiint\limits_{(V)} \left[\vec{r}\,\vec{\upsilon}\right]\rho\,dx\,dy\,dz\,, \tag{3.10}$$

де $\vec{r}, \vec{\upsilon}, \rho$ – відповідно, радіус-вектор, швидкість і густина малого елемента тіла, який має масу dm та об'єм dV.

- Якщо тіло обертається навколо осі a з кутовою швидкістю ω, то момент імпульсу $\vec{L}_a$ відносно цієї осі дорівнює

$$\vec{L}_a = I_a \omega. \tag{3.11}$$

- Рівняння моментів

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{3.12}$$

де $\vec{M}$ – момент зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі a; $\vec{L}$ – момент імпульсу відносно цієї самої осі.

- При незмінному моменті інерції основний закон динаміки обертального руху твердого тіла записується у вигляді

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}. \tag{3.13}$$

- Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

$$T = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{3.14}$$

3.2. Методичні вказівки та поради

1. На початку розв'язування задачі слід детально проаналізувати, які сили діють у системі, до яких тіл вони прикладені та куди вони направлені. Також обов'язково треба зазначати, відносно яких осей або точок визначаються відповідні моменти: сили, інерції, імпульсу.

2. Задача про скочування твердого тіла, яке має симетрію обертання (куля, циліндр), з похилої площини потребує попередніх додаткових коментарів. Залежно від умов досліду тіло під час руху з похилої площини може перебувати в різних видах руху: скочуватись, ковзати або одночасно і скочуватись, і ковзати. Розглянемо умови, коли ці види руху в даному випадку реалізуються, але перед цим визначимо сили, які діють на тіло під час його руху з похилої площини (рис. 3.1). Це сила тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$, що діє на тіло, маса якого m; сила $\vec{N}$ реакції з боку похилої площини на тіло, величина якої дорівнює складовій сили тяжіння $mg \cdot \cos\alpha$; дотична сила $\vec{F}_\tau$, величина якої буде визначатись складовою сили тяжіння $mg \cdot \sin\alpha$ і силою тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$.

Вважатимемо, що при русі тіла, коли не виникає ковзання, спостерігається чисте кочення тіла. Це означає, що швидкість тіла в точці A його дотику з поверхнею дорівнює нулю. Відсутність ковзання визначається дією сил з боку похилої площини на тіло, що скочується. Ці сили зводяться до дії сили нормального тиску $\vec{N}$ і дотичної сили $\vec{F}_\tau$. За відсутності ковзання сила $\vec{F}_\tau$ є силою тертя спокою $\vec{F}_{\text{тер}}$, яка може набувати будь-яких значень від 0 до $F_{\text{тер}} = kN = kmg \cdot \cos\alpha$, де k – коефіцієнт тертя.

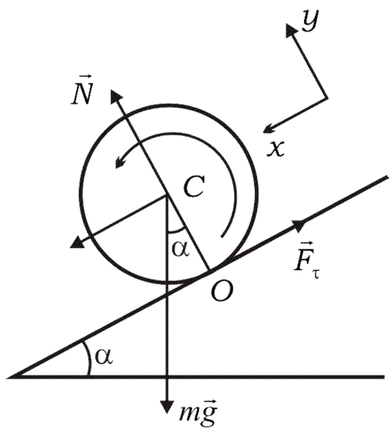


Рис. 3.1. До методики розв'язання задач, де фігурує похила площина

При коченні тіла величина сили $\vec{F}_\tau$ встановлюється такою, щоб не було ковзання. Ця умова виконується, коли виконується співвідношення

$$kmg \cdot \cos\alpha > mg \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow\; k > \operatorname{tg}\alpha .$$

У разі, коли виконується співвідношення

$$kmg \cdot \cos\alpha < mg \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow\; k < \operatorname{tg}\alpha ,$$

чисте кочення неможливе, воно супроводжується ковзанням. Ковзання спостерігається у випадку відсутності тертя, коли $k = 0$.

Задачу про скочування тіла з похилої площини можна розв'язати трьома способами (див. [2], п. 48).

3.3. Запитання та відповіді

3.3.1. *Яку властивість матеріального тіла хочуть підкреслити, коли йдеться про "тверде тіло" або про "абсолютно тверде тіло"?*

Під "твердим тілом" або "абсолютно твердим тілом" у механіці розуміють матеріальне тіло, яке під час руху не деформується, тобто відстань між окремими частинами якого та їх розташування не змінюється.

3.3.2. *Сформулюйте умови відсутності обертання твердого тіла.*

Якщо тіло перебуває в інерціальній СВ, то умовою відсутності його обертання є вимога, щоб сумарний момент зовнішніх сил відносно будь-якої осі, що проходить через ц.м. тіла, дорівнював нулю: $\vec{M} = \sum \vec{M}_{i\,\text{зовн}} = 0$. Для неінерціальних СВ, до моменту зовнішніх сил слід додати і моменти сил інерції.

3.3.3. *Чому дорівнює кінетична енергія твердого тіла в разі плоского руху?*

Плоский рух твердого тіла, який зазвичай пов'язаний зі змішаним рухом (одночасно поступальним і обертальним), характеризується тим, що будь-яка точка тіла під час руху перебуває в одній площині (її траєкторія руху описується двовимірним законом, напр., $y(x)$). Один із компонентів змішаного руху може бути відсутнім і тоді рух стає або поступальним, або обертальним.

Кінетична енергія твердого тіла при плоскому змішаному русі складається з енергії поступального руху центра мас твердого тіла та енергії обертання тіла навколо осі, що проходить через центр мас тіла: $T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$, де υ_c – швидкість центра мас; I_c – момент інерції тіла відносно осі обертання, яка проходить через центр мас.

3.3.4. *Чи завжди довільний рух тіла можна розкласти на два рухи: поступальний та обертальний?*

Ні, не завжди. Тільки плоский рух можна відносно легко розкласти на два рухи: поступальний та обертальний.

3.3.5. *Чи можна казати, що "матеріальна точка рухається поступально"? Чому?*

Ні, не можна. За визначенням, поступальний рух – це рух тіла, при якому траєкторії руху всіх точок тіла однакові. Також поступальний рух характеризується тим, що пряма лінія, проведена між двома довільними точками тіла, під час його руху залишається паралельною сама собі. Ні одна з двох наведених вище ознак поступального руху не може бути застосована для руху матеріальної точки. МТ може перебувати або в прямолінійному або в криволінійному (зокрема, в обертальному) русі.

3.3.6. *Центр мас твердого тіла рухається по синусоїді. Чи може такий рух бути оцінений як поступальний?*

Інформації про характер руху тільки однієї точки твердого тіла, навіть такої важливої, як центр мас недостатньо для того, щоб вважати його поступальним, обертальним або змішаним (поступально-обертальним) рухом тіла. У випадку, коли можна довести, що обертання тіла, яке рухається по синусоїді, відсутнє, і водночас рух тіла підпадає під визначення поступального руху (див. запитання 3.3.5), то такий рух можна вважати поступальним.

3.3.7. *Що таке миттєва вісь обертання?*

Миттєвою віссю обертання (МВО) під час змішаного (поступально-обертальному) руху називається та вісь обертання, відносно якої поступальна складова плоского руху в даний момент часу має нульову швидкість. Швидкість усіх точок тіла в цьому випадку може бути представлена як швидкість обертального руху навколо МВО. Плоске переміщення твердого тіла навколо миттєвої осі подається у вигляді чистого обертання. Миттєва вісь – це уявна вісь, вона не має свого матеріального носія.

Якщо по плоскій поверхні котиться колесо і немає його проковзування, то миттєвою віссю обертання колеса буде пряма, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через точку дотику колеса з поверхнею в даний момент часу.

3.3.8. *Як визначити місцеположення миттєвої осі обертання при плоскому русі твердого тіла у формі стрижня?*

Якщо стрижень AB перебуває у плоскому, змішаному (поступально-обертальному) русі, то пошук миттєвої осі здійснюється таким чином, як показано на рис. 3.2.

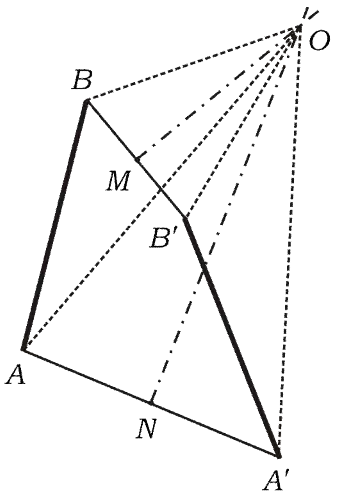


Рис. 3.2. До визначення місцеположення миттєвого центра (осі) обертання при плоскому русі твердого тіла

- фіксуємо положення стрижня у два довільних моменти часу AB і $A'B'$;
- з'єднуємо відповідні кінці отриманих зображень двох положень стрижня AB і $A'B'$ лініями AA' та BB';
- поділимо відрізки AA' та BB' навпіл і з отриманих точок M і N, які відображають середини відрізків AA' та BB', побудуємо перпендикуляри до відповідних відрізків AA' та BB';
- точка перетину O цих перпендикулярів і буде шуканою точкою перетину МВО з площиною руху.

3.3.9. *Колесо котиться по плоскій поверхні. Чи завжди миттєва вісь обертання збігається з точкою дотику колеса з поверхнею?*

Миттєва вісь обертання збігається з точкою дотику колеса із поверхнею тільки у випадку, коли нема проковзування або гальмування колеса (рис. 3.3, а). Саме в такому випадку зв'язок між кутовою швидкістю обертання ω і лінійною швидкістю υ_c руху центра мас задається простим законом $\upsilon_c = R\omega$, а лінійна швидкість точки на периферії колеса дорівнює $2\upsilon_c$.

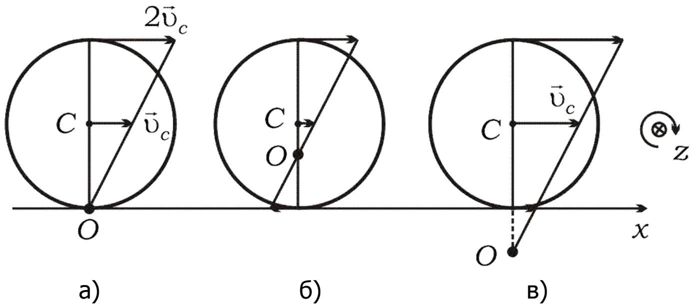


Рис. 3.3.
До запитання 3.3.9

У разі виникнення штучного гальмування (рис. 3.3, б) або сковзання (рис. 3.3, в) миттєва вісь, яка проходить через точку O, переміщується з поверхні, по якій рухається колесо. Лінійна швидкість υ_c руху центра мас у цих випадках більш складним, ніж у випадку чистого кочення (рис. 3.3, а), способом залежить від кутової швидкості обертання колеса.

3.3.10. *Як формулюється рівняння руху центра мас твердого тіла?*

Рівняння центра мас твердого тіла має вигляд

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{зовн}},$$

де $\vec{F}_{\text{зовн}}$ – результуюча всіх зовнішніх сил, які діють на тіло. Центр мас тіла рухається так, неначе вся маса тіла зосереджена в цій точці (ц.м.) і до неї прикладені всі зовнішні сили.

Як бачимо, у випадку, коли $\vec{F}_{\text{зовн}} = 0$, величина $\vec{\upsilon}_c = \text{const}$. Це – теорема центра мас твердого тіла, яка за змістом аналогічна теоремі центра мас для СМТ (див. запитання 2.3.18). Така аналогія не дивна, оскільки СМТ і тверде тіло дуже близькі між собою. Вони відрізняються тим, що в СМТ матеріальні точки розподілені по системі дискретно, їх кількість обмежена. У твердому тілі частинки, з яких воно складається, утворюють суцільний континуум. Від операції сумування для СМТ у випадку твердого тіла слід переходити до інтегрування.

Рівняння руху центра мас записане для інерціальних систем відліку. Для НІСВ це рівняння залишається в такому самому вигляді, але до зовнішніх сил взаємодії в цьому випадку додаються ще сили інерції, які тут розглядаються як зовнішні.

3.3.11. *Доведіть формулу (3.2).*

Із відомої формули для моменту сили $\vec{M}$ за відомими правилами векторної алгебри можна записати:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}\ .$$

Як бачимо, $M_x = yF_z - zF_y$; $M_y = zF_x - xF_z$; $M_z = xF_y - yF_x$, що і вимагалось довести.

3.3.12. *Як визначити напрямок моменту сил? Коли момент сили дорівнює нулю? Коли момент сили максимальний?*

Момент сили $\vec{M}$ за визначенням дорівнює векторному добутку $\vec{M} = \left[\vec{r}\ \vec{F}\right]$. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$. Напрямок вектора $\vec{M}$ визначається за правилом правої трійки векторів $\vec{M}, \vec{r}, \vec{F}$. Максимального значення момент сили набуває, коли $\vec{r} \perp \vec{F}$. У випадку, коли $\vec{r}\,||\,\vec{F}$, величина $M = 0$. Мінімальне значення момент сили матиме, коли $\sin\left(\vec{r}, \vec{F}\right) = -1 \Rightarrow$ кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$ дорівнює $\left(\frac{3}{2}\pi \pm 2\pi m\right)$.

3.3.13. *Як із рівняння моментів отримати основне рівняння обертального руху твердого тіла?*

Із рівняння моментів (3.3) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, урахувавши рівняння обертального руху $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$, маємо $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\beta}$. Таким чином, $\vec{M} = I \cdot \vec{\beta}$ – основне рівняння обертального руху твердого тіла.

3.3.14. *Чим визначається момент інерції тіла?*

Момент інерції твердого тіла залежить тільки від форми тіла, розташування маси в ньому та вибору осі, відносно якої визначається момент інерції.

3.3.15. *Чи можна змінити момент інерції тіла, не змінюючи його маси та форми? Якщо можна, то як?*

Можна. Для цього треба якимось чином перерозподілити масу по об'єму. Наприклад, зробити тіло неоднорідним або, якщо тіло було неоднорідним (напр., шаруватим), "перемішати" ці неоднорідності, або навпаки, зробити тіло з неоднорідного однорідним. І, нарешті, ще один спосіб: нічого не змінюючи в тілі, обрати іншу вісь обертання. Це також приведе до зміни моменту інерції тіла без зміни його маси та форми.

3.3.16. *Відносно якої з двох паралельних осей обертання момент інерції твердого тіла мінімальний?*

Виходячи із теореми Гюйгенса – Штейнера (3.5), момент інерції однорідного твердого тіла завжди менший щодо тієї осі обертання, яка розташована ближче до центра мас тіла. Матеріальне тіло має мінімальний момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас тіла.

3.3.17. *Коли виникає необхідність, замість скалярної величини моменту інерції, вводити тензор моменту інерції?*

Необхідність, замість скалярної величини моменту інерції у формулі $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$, вводити тензор моменту інерції викликана неколінеарністю векторів $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$. Більш повну інформацію з цього питання можна отримати в [3], п. 40.

3.3.18. *Що таке тензор другого рангу (покажіть на прикладі переходу від однієї декартової системи координат до іншої, яка відрізняється від першої лише поворотом координатних осей)?*

Система рівнянь, що описують перетворення координат (x, y, z) вектора при зміні однієї СК на іншу СК, у якій цей вектор має координати (x', y', z'), яка відрізняється від першої лише поворотом осей координат, має вигляд ([1], с. 32):

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z', \end{cases} \tag{3.9}$$

де коефіцієнти α_{il} та α_{km} мають значення напрямних косинусів $\alpha_{ik} = \cos(x_i', x_k')$, $i, k = 1, 2, 3$. Систему рівнянь (3.9) можна записати, використовуючи тензор $\hat{T}$ другого рангу.

Тензором $\hat{T}$ другого рангу називають сукупність дев'яти величин

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix},$$

які використовуються при переході від однієї декартової системи координат до іншої, яка відрізняється від першої лише поворотом осей координат. Таке перетворення здійснюється за визначеною формулою $T_{ik}' = \sum \alpha_{il}\alpha_{km}T_{lm}$, де $i, k = 1, 2, 3$; коефіцієнти α_{il} та α_{km} мають значення напрямних косинусів $\alpha_{ik} = \cos(x_i', x_k')$. Величини T_{ik} називаються компонентами тензора. Більш повну інформацію з цього питання можна отримати, наприклад, у [3], додаток III.

3.3.19. *Що таке вільна вісь тіла? Головна вісь інерції?*

Вільна вісь тіла це вісь, положення якої в просторі залишається незмінним при обертанні навколо неї тіла за відсутності зовнішніх сил.

Можна показати, що для тіла будь-якої форми і з довільним розподілом маси існують три взаємно перпендикулярні прямі, які проходять через центр мас тіла і можуть бути вільними осями. Такі прямі називаються *головними осями інерції.*

3.3.20. *Що із фізичної точки зору означає діагоналізація тензора інерції?*

Зведення тензора інерції

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

до вигляду

$$\begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

називається діагоналізацією тензора другого рангу. З погляду фізики ця математична операція означає вибір такої системи координат, осями якої обрані головні осі інерції. Наприклад, вісь Ox стає головною віссю інерції твердого тіла, якщо відцентрові моменти інерції I_{xy} та I_{xz} одночасно дорівнюють нулю.

3.3.21. *Чому дорівнює момент інерції однорідного прямокутного паралелепіпеда? Як визначити елементи тензора інерції такого паралелепіпеда?*

Без доведення (строге доведення див. у [3], п. 40), обравши систему координат з початком у центрі мас тіла (точка C, як показано на рис. 3.4), запишемо головні моменти інерції для однорідного прямокутного паралелепіпеда:

$$I_{zz} = \frac{1}{3}m\left(a^2 + b^2\right); \quad I_{xx} = \frac{1}{3}m\left(b^2 + c^2\right); \quad I_{yy} = \frac{1}{3}m\left(a^2 + c^2\right). \tag{3.11}$$

Доцентрові моменти інерції $I_{ik} = 0$, де $i, k = x, y, z; \quad i \neq k$. Це означає, що вказаний вибір координатних осей приводить до діагоналізації тензора моменту інерції. А це, у свою чергу означає, що таким чином обрані осі є головними осями інерції однорідного прямокутного паралелепіпеда.

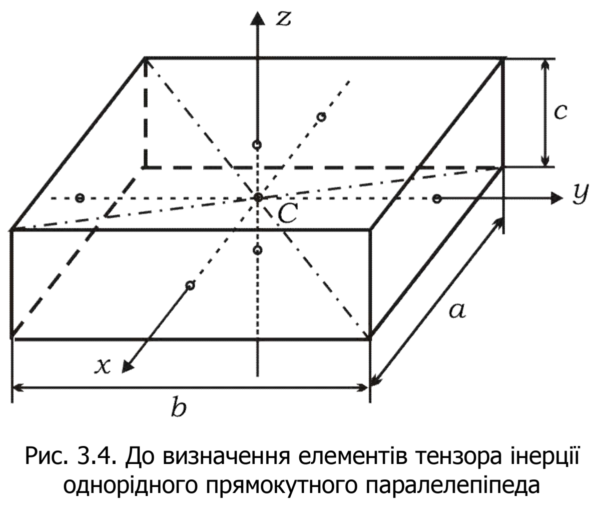


Рис. 3.4. До визначення елементів тензора інерції однорідного прямокутного паралелепіпеда

3.3.22. *Коли кінетичну енергію матеріального тіла не можна описувати виразом* $T = \dfrac{I\omega^2}{2}$?

Виразом $T = \dfrac{I\omega^2}{2}$ описується кінетична енергія матеріального тіла лише у випадках, коли момент інерції I – скаляр. У цьому разі в рівнянні $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ і моменту імпульсу $\vec{L}$ колінеарні. Це щодо матеріальної точки та для деяких однорідних твердих тіл, що обертаються, з високою симетрією (куля, стрижень, диск тощо). Проте в загальному випадку, частіше всього при обертанні твердого тіла, вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{L}$ неколінеарні. У випадках визначення кінетичної енергії для таких твердих тіл необхідно користуватись іншими, модифікованими формулами. У цих випадках, якщо декартову систему координат жорстко прив'язати до тіла і розмістити її початок у центрі мас тіла, то кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої точки фіксованої осі, описуватиметься виразом

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_x\omega_z + I_{yx}\omega_y\omega_x + I_{yy}\omega_y^2 + \\ +I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x + I_{zy}\omega_z\omega_y + I_{zz}\omega_z^2 \end{pmatrix}, \qquad (3.8)$$

де I_{ik} – компоненти тензора інерції $\left(i, k = x, y, k\right)$ – набір із дев'яти величин, які мають розмірність моменту інерції $кг \cdot м^2$.

Формулу (3.8) можна записати у вигляді $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k=x,y,z} I_{ik}\omega_i\omega_k$. При сумуванні індекси i та k пробігають, незалежно один від одного, значення x, y, z.

Якщо описувати обертання твердого тіла, обираючи таким чином декартову систему координат, щоб її осі збіглись з головними осями інерції, то доцентрові моменти інерції типу I_{xy}, I_{yz} та I_{xz} перетворяться на нуль, а кінетична енергія тіла спроститься до вигляду $T = \dfrac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right)$, де I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – головні моменти інерції. Тому при розв'язуванні задач з розд. 3 ("Динаміка обертального руху твердого тіла") зазвичай віддають перевагу декартовій системі координат, початок якої збігається із центром мас, а осі збігаються з осями симетрії тіла, при цьому вісь OZ збігається з віссю обертання (напрямком вектора кругової швидкості $\vec{\omega}$).

3.3.23. *Як пов'язана частота прецесії* Ω *гіроскопа з частотою* ω *його обертання? Зробіть фізичні висновки.*

Частота прецесії Ω гіроскопа пов'язана з частотою ω його обертання формулою

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{mg\ell}{L} = \frac{mg\ell}{I\omega}. \qquad (3.12)$$

Доведення цієї формули можна знайти в [4], п. 4.6. Із (3.12) можна зробити такі висновки:

1) $\Omega \sim \frac{1}{\omega}$, тобто частота прецесії Ω гіроскопа обернено пропорційна частоті ω його обертання;

2) частота прецесії Ω не залежить від кута нахилу осі гіроскопа до вертикалі;

3) $\Omega << \omega$, тому, незважаючи на наявність прецесії, можна вважати, що вектори $\vec{\omega}||\vec{L}$ паралельні осі гіроскопа;

3.3.24. *Які висновки можна зробити, аналізуючи формулу $\vec{M} = \left[\vec{\Omega}\vec{L}\right]$ для моменту $\vec{M}$ зовнішніх сил, що діють на гіроскоп з моментом імпульсу $\vec{L}$ і викликають прецесію з частотою Ω?*

Висновки:

1) виникнення прецесії з частотою Ω пов'язане із дією моменту зовнішніх сил;

2) вектор кутової швидкості прецесії $\vec{\Omega}$ перпендикулярний до вектора моменту $\vec{M}$ зовнішніх сил $\vec{\Omega} \perp \vec{M}$;

3) поява (зміна) моменту сили викликає появу (зміну) швидкості прецесії. Раніше, до розгляду гіроскопів, було: дія сили або моменту сили викликають прискорення (лінійне або кутове);

4) прецесія гіроскопа не має інерції: прецесійний рух зупиняється в момент зупинки гіроскопа. Раніше, до розгляду гіроскопів, було: у момент зупинки дії сили миттєво зникає прискорення, а швидкість залишається.

3.3.25. *Чому стрижень, диск, ланцюжок, які прив'язані до мотузки та обертаються, орієнтуються в просторі горизонтально?*

Теорія і практика показують, що обертання тіла буде стійким тільки відносно тих вільних осей, відносно яких момент інерції тіла найбільший (вісь $O_2O'_2$) або найменший (вісь $O_1O'_1$) (рис. 3.5). Перевагу має перший варіант обертання тіла. Обертання буде нестійким відносно осі, для якої момент інерції тіла має проміжне значення (вісь $O_3O'_3$).

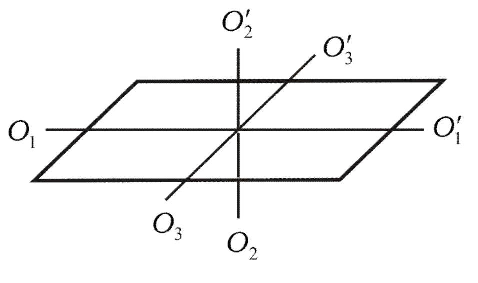


Рис. 3.5. Три осі вільного обертання (до запитання 3.3.25)

Якщо стрижень (рис. 3.6, а) або диск (рис. 3.6, б), або ланцюжок (рис. 3.6, в), які прив'язані до мотузки, привести у швидке обертання, то ці тіла повернуться і будуть обертатись у тій площині, навколо тієї осі, відносно якої їхні моменти інерції будуть найбільшими. На рис. 3.5 це вісь O_2O_2, що перпендикулярна до площини обертання. Ланцюжок (рис. 3.6, в) під час обертанні не тільки повертається в горизонтальну площину, як це було зі стрижнем, але й розпрямляється та утворює коло в горизонтальній площині. Цей факт пояснюється намаганням тіла набути форму, яка надавала б йому максимального моменту інерції (рис. 3.6).

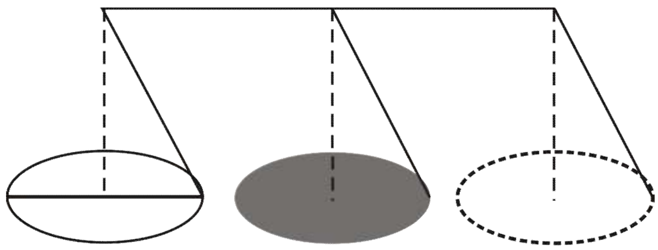


Рис. 3.6. До запитання 3.3.25

3.3.26. *Як, виходячи із законів фізики, слід кинути предмет, який за формою нагадує книжку, щоб він пролетів якомога далі?*

Предмет слід кинути таким чином, щоб він обертався навколо осі, відносно якої момент інерції має найбільше значення. Це має бути вісь стійкого вільного обертання. Для тіла, яке має форму прямокутного паралелепіпеда (напр., книжка), така вісь проходить через точки перетину діагоналей великих граней (обкладинок книжки) перпендикулярно до цих граней. Досвід добре це підтверджує.

Предмет, який має форму прямокутного паралелепіпеда (цеглина, книжка тощо), кинутий так, що він спочатку починає обертатись уздовж невизначеної (довільної) осі, через деякий час перелаштовує свій рух таким чином, що починає обертатись відносно однієї з вільних осей стійкого обертання.

3.3.27. *Китайська дзиґа. Опишіть і поясніть фізику поведінки китайської дзиґи.*

Китайська дзиґа (КД) має форму, яку показано на рис. 3.7, а. Із теорії КД відомо, що сили тертя між поверхнею, на якій обертається дзиґа, і самою дзигою викликають прецесію (нахил вершини дзиґи AB,) і підняття центра мас дзиґи (точки O). Ці тенденції мають постійний характер і збільшуються. Цьому сприяє конструкція КД, яка забезпечує значну величину сили тертя. Ці дві тенденції під час руху КД призводять до перевертання КД, вона стає на ніжку (рис. 3.7, б). Після перевертання КД її ніжка все більше і більше наближається до вертикального стану. Якщо дзиґа ще деякий час не втратить стійкості обертання через гальмування, вона досить швидко починає обертатись на ніжці без прецесії.

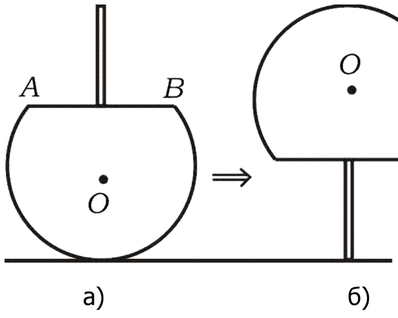


Рис. 3.7. Китайська дзиґа

3.3.28. *Чому момент інерції твердого тіла називають його "мірою інертності"?*

Як відомо, мірою інертності при прямолінійному русі МТ або поступальному русі твердого тіла є маса. Маса m виступає коефіцієнтом між силою та прискоренням $m = \frac{F}{a}$. Залежно від маси МТ або твердого тіла одна й та сама сила викликає у них різне прискорення. Тіла різної маси по-різному "чинять опір дії сили". Здатність "чинити опір дії сили" називається *інертністю тіла*. Маса є мірою інертності тіла.

Так само, у випадку, коли МТ або тверде тіло обертаються, їх момент інерції I виступає як коефіцієнт між моментом сили M і кутовим прискоренням β: $I = \frac{M}{\beta}$. Залежно від моменту інерції один і той самий момент сили викликає у тіл різне кутове прискоренням. Тіла з різними значеннями моменту інерції по-різному "чинять опір дії моменту сили". Здатність "чинити опір дії моменту сили" при обертанні МТ або твердого тіла визначає їх інертність. Момент інерції є мірою інертності МТ або твердого тіла при їх обертанні. При цьому не слід забувати, що момент інерції залежить від маси, хоча існує залежність і від квадрата відстані МТ до осі обертання або характерного розміру твердого тіла.

3.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. *Знайдіть момент інерції $I_{\text{сф.ш}}$ тонкого сферичного шару масою m і радіуса R відносно своєї осі симетрії.*

Розв'язання: Що таке "тонкий" сферичний шар? Це сферичний шар, для товщини ΔR якого виконується нерівність $\Delta R \ll R$ (рис. 3.8). Відомо, що для суцільної однорідної кулі масою m і радіуса R момент інерції $I(R) = \frac{2}{5} mR^2$. Оскільки маса такої кулі $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$, де ρ – густина матеріалу, з якого його зроблено, величина $I(R) = \frac{2}{5} mR^2 \equiv \frac{2}{5} R^2 \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \equiv \frac{8}{15}\pi\rho R^5$. Момент інерції кулі, зробленої з того самого матеріалу, але радіуса $(R-\Delta R)$, дорівнює $I(R-\Delta R)=\dfrac{8}{15}\pi\rho(R-\Delta R)^5$. Величина ΔR – це товщина сферичного шару.

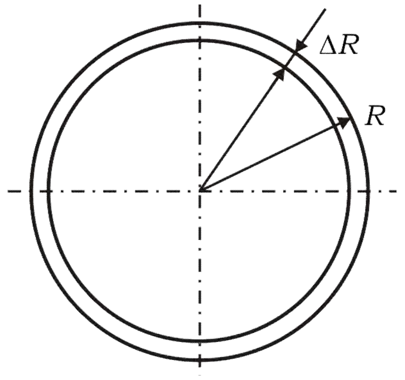


Рис. 3.8. До прикладу 3.1

Звернемо увагу на те, що тонкий сферичний шар, момент інерції якого треба знайти, розташований між поверхнями куль, моменти інерції яких розглядались. Оскільки осі обертання обох цих куль і тонкого сферичного шару збігаються, можна записати

$$I_{\text{сф.ш}}=I(R)-I(R-\Delta R). \tag{3.13}$$

Підставивши в (3.13) отримані вище значення для моментів інерції і скориставшись біномом Ньютона, маємо

$$I_{\text{сф.ш}}=I(R)-I(R-\Delta R)=\frac{8}{15}\pi\rho R^5-\frac{8}{15}\pi\rho(R-\Delta R)^5=\frac{8}{15}\pi\rho\left[R^5-\left(R-\Delta R\right)^5\right]\approx$$

$$\approx\frac{8}{15}\pi\rho\left(R^5-R^5+5R^4\cdot\Delta R\right)=\frac{8}{3}\pi\rho R^4\cdot\Delta R=\frac{2}{3}(4\pi R^2\cdot\Delta R)\rho R^2=\frac{2}{3}mR^2.$$

Як бачимо, залежності моменту інерції тонкого сферичного шару та суцільної однорідної кулі від їх маси та радіуса відрізняються лише коефіцієнтами біля множника mR^2.

Приклад 3.2. *Дві кулі зроблені з різного матеріалу, але мають однакову масу й однаковий радіус. Одна куля – суцільна й однорідна, друга – тонкостінна. Обидві кулі одночасно почали скочуватись з нахиленої площини. Яка з куль скотиться швидше? Чому? Знайдіть, у скільки разів будуть відрізнятись часи скочування для цих куль?*

Розв'язання: Розглянемо спочатку механіку скочування з нахиленої площини кулі, незалежно від того, суцільна вона чи тонкостінна (див. також п. 2, підрозд. 3.2).

Рівняння поступального руху центра мас, виходячи з діючих на кулі сил (рис. 3.9), має вигляд

$$mg\cdot\sin\alpha-k\cdot N=ma_c, \tag{3.14}$$

де a_c – прискорення центра мас кулі; k – коефіцієнт тертя; m – маса кулі; α – кут нахилу площини; N – сила реакції нахиленої площини на кулю. Поступальний рух центра мас кулі, як випливає з умови задачі, обумовлений її скочуванням з похилої площини (обертанням).

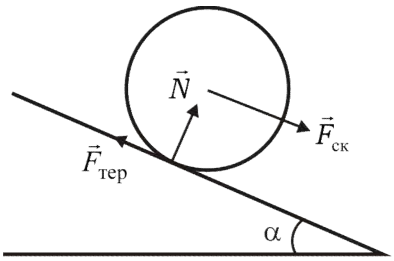


Рис. 3.9. До прикладу 3.2

В основному рівнянні обертального руху (3.13) твердого тіла $M = I \cdot \beta$ (де β – кутове прискорення кулі під час її обертання; I – момент інерції кулі відносно осі обертання, яка проходить через центр мас кулі), величина M – момент зовнішньої сили, яка викликає обертання кулі. У нашому випадку такою силою є сила тертя $F_{тер}$. Плече цієї сили, яка викликає момент сили M, є радіус кулі R. Таким чином, основне рівняння обертального руху набуде вигляду

$$F_{тер} \cdot R = I \cdot \beta. \tag{3.15}$$

З урахуванням того, що кутове прискорення β кулі при її обертанні за визначенням пов'язане з лінійним прискорення a точки на поверхні кулі співвідношенням $a = R \cdot \beta$, із (3.15) отримуємо

$$F_{тер} = \frac{\beta \cdot I}{R} \equiv \frac{a}{R} \cdot \frac{I}{R}. \tag{3.16}$$

Підставимо (3.16) у (3.14):

$$mg \cdot \sin\alpha - \frac{a \cdot I}{R^2} = ma_c. \tag{3.17}$$

Умовою відсутності проковзування (умовою "чистого скочування") є рівність $a = a_c$. Врахуємо її в (3.17):

$$mg \cdot \sin\alpha = a\left(\frac{I}{R^2} + m\right) \;\Rightarrow\; a = \frac{g \cdot \sin\alpha}{1 + \dfrac{I}{mR^2}}. \tag{3.18}$$

Вираз (3.18) описує залежність прискорення центра мас кулі від параметрів руху і насамперед від кута α та моменту інерції I. Видно, що скочування кулі з похилої площини є рівноприскореним $a \neq f(t)$.

Для суцільної кулі момент інерції $I_1 = \frac{2}{5} mR^2$. Таким чином, із (3.18) отримуємо

$$a_1 = \frac{5}{7} g \cdot \sin\alpha . \tag{3.19}$$

Для тонкостінної кулі (див. приклад 3.1) момент інерції $I_2 = \frac{2}{3} mR^2$. Звідси (3.17) набуває вигляду

$$a_2 = \frac{3}{5} g \cdot \sin\alpha . \tag{3.20}$$

Із (3.19) та (3.20) робимо висновок про те, що прискорення, з яким з похилої площини скочуються кулі, залежить від кута α нахилу площини та конструкції кулі: суцільна вона чи тонкостінна, але не залежить від її розмірів і маси. (Саме такі експериментальні результати отримував Г. Галілей, досліджуючи скочування і сковзання тіл з похилої площини).

Згадаємо, що час t, за який тіло, що рухається з прискоренням a, проходить шлях s, дорівнює $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$, тобто $t \sim \frac{1}{\sqrt{a}}$. Враховуючи це, а також (3.19) і (3.20), маємо

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}92 \text{ або } \frac{t_2}{t_1} \approx 1{,}09 .$$

Висновок: часи скочування суцільної однорідної та тонкостінної куль з нахиленої площини відрізняються приблизно на 10 %.

Приклад 3.3. *Тонкостінний циліндр радіуса R розкрутили до швидкості ω_0 і вставили між двома стінками прямого кута (*рис. 3.10*). Коефіцієнт тертя між циліндром і стінками кута – k. Скільки обертів зробить циліндр до зупинки?*

Розв'язання: Сили, які діють у розглянутій системі, та їх напрямки зображені на рис. 3.10. Сили $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ – сили реакції відповідних стінок кута, що діють на циліндр. Саме ці сили визначають сили тертя:

$$F_{\text{тер}1} = kN_1 , \tag{3.21}$$

$$F_{\text{тер}2} = kN_2 . \tag{3.22}$$

Результуюча сила, що діє на циліндр уздовж горизонтальної прямої, дорівнює нулю (інакше циліндр рухався б горизонтально з прискоренням): $N_2 = F_{\text{тер}1}$. Якщо останнє співвідношення врахувати в (3.22), то отримаємо

$$F_{\text{тер}2} = kF_{\text{тер}1} . \tag{3.23}$$

Із (3.23) можна зробити такі висновки: $F_{\text{тер}2} \neq F_{\text{тер}1}$ і $F_{\text{тер}2} < F_{\text{тер}1}$.

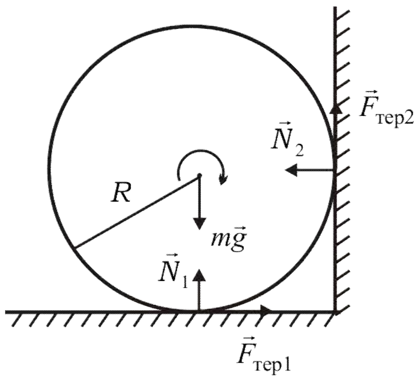


Рис. 3.10. До прикладу 3.3

Для сил, що діють на циліндр у вертикальному напрямку (рис. 3.10), можна записати $N_1 - mg + F_{\text{тер2}} = 0$. З урахуванням (3.23) маємо

$$N_1 = mg - kF_{\text{тер1}} . \tag{3.24}$$

Із (3.24) $\to$ (3.21):

$$F_{\text{тер1}} = k(mg - kF_{\text{тер1}}) = kmg - k^2 F_{\text{тер1}} \Rightarrow F_{\text{тер1}} = \frac{kmg}{1+k^2} . \tag{3.25}$$

Із (3.25) $\to$ (3.23):

$$F_{\text{тер2}} = \frac{k^2 mg}{1+k^2} . \tag{3.26}$$

Незважаючи на різну залежність $F_{\text{тер1}}$ і $F_{\text{тер2}}$ від k ($F_{\text{тер1}} \sim k$, а $F_{\text{тер2}} \sim k^2$), розмірності $\vec{F}_{\text{тер1}}$ і $\vec{F}_{\text{тер2}}$ однакові, оскільки коефіцієнт тертя k є безрозмірною величиною.

Тепер запишемо *закон збереження енергії*. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла $E_{\text{к}} = \dfrac{I\omega_0^{\,2}}{2}$ витрачається на виконання роботи сил тертя на обох стінках кута $E_{\text{к}} = A_{\text{тер1}} + A_{\text{тер2}}$. Відомо, що робота сили дорівнює добутку сили на шлях. Сили $F_{\text{тер1}}$ і $F_{\text{тер2}}$ відомі з (3.25) та (3.26). Шлях дорівнює добутку довжини одного оберту $(2\pi R)$ на кількість обертів (n). Таким чином, з урахуванням того, що для суцільного однорідного циліндра момент інерції $I = \dfrac{mR^2}{2}$, маємо

$$\frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^{\,2}}{2} = 2\pi R n (F_{\text{тер1}} + F_{\text{тер2}}) = 2\pi R n \left(\frac{kmg}{1+k^2} + \frac{k^2 mg}{1+k^2} \right) \Rightarrow n = \frac{(1+k^2)\omega_0^2 R}{8\pi k (1+k) g} .$$

Проаналізуємо відповідь. Кількість обертів (n) циліндра до зупинки прямо пропорційна квадрату початкової швидкості обертання $\left(\omega_0^2\right)$ та радіусу (R) циліндра і складно залежить від коефіцієнта тертя (k). Можна було очікувати залежність величини n від маси чи моменту інерції циліндра, але такої не спостерігається.

Приклад 3.4. *На однорідний суцільний диск, маса якого m_1 і радіус R, щільно намотана легка нитка, до кінця якої прив'язаний вантаж m_2* (рис. 3.11). *У момент часу $t = 0$ система прийшла в рух. Нехтуючи тертям в осі циліндра, знайдіть залежність від часу: а) модуля кутової швидкості диска; б) кінетичної енергії всієї системи.*

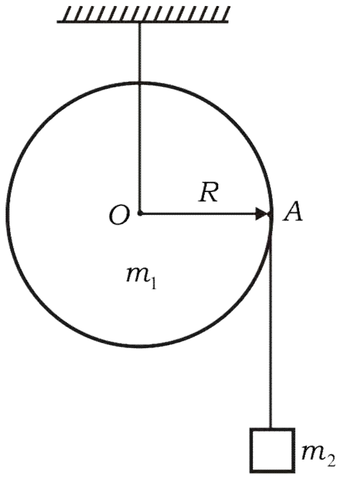


Рис. 3.11. До прикладу 3.4

Розв'язання: Момент інерції диска

$$I_д = \frac{m_1R^2}{2}. \tag{3.27}$$

Момент інерції I системи, яка складається з однорідного диска та вантажу масою m_2, який розташований на відстані R від осі обертання O, дорівнює сумі двох моментів:

$$I = I_д + m_2R^2 = \frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2 = m_2R^2\left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right). \tag{3.28}$$

(Зауважимо, що вираз (3.28) ззовні схожий на рівняння Гюйгенса – Штейнера, але насправді прямого відношення до нього не має).

Основне рівняння обертального руху (3.13) для диска з урахуванням того, що момент сили $\vec{M} = m_2\vec{g}R$, набуває вигляду

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} = m_2\vec{g}R \;\Rightarrow\; d\omega = \frac{m_2gR}{I}dt. \tag{3.29}$$

Інтегруємо (3.29): $\omega = \dfrac{m_2gR}{I}t + C$, де C – стала інтегрування, яку визначаємо з початкових умов: у момент часу $t = 0$ кутова швидкість ω обертання системи дорівнює нулю. Звідси випливає, що і $C = 0$. Таким чином, кутова частота обертання диска, з урахуванням (3.28), дорівнює

$$\omega = \frac{m_2 gRt}{\frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2} = \frac{gt}{R\left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right)}. \tag{3.30}$$

Із (3.30) видно, що швидкість обертання системи лінійно зростає із часом, вона обернено пропорційна радіусу диска і залежить від співвідношення m_1 / m_2.

Кінетична енергія (T) системи, враховуючи формули (3.28) і (3.30), дорівнює

$$T = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 \left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right) \cdot \frac{g^2 t^2}{R^2 \left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right)^2} = \frac{m_2 g^2 t^2}{2\left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right)}.$$

4. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

4.1. Загальні зауваження

4.1.1. Короткі теоретичні відомості

- Детальний розгляд поведінки МТ чи системи МТ за допомогою рівняння руху часто буває важко зробити або навіть неможливо. Проте існує метод, який відповідно до загальних принципів, що випливають із законів Ньютона, дозволяє розв'язати ту саму задачу (знайти стан системи – координату або швидкість у певний момент часу) альтернативним способом. Цей метод пов'язаний із застосуванням *законів збереження.*
- Серед функцій стану, що зберігаються, найважливішу роль відіграють енергія, імпульс і момент імпульсу. Ці три величини мають важливу спільну властивість – адитивність: їх значення для системи матеріальних тіл дорівнює сумі значень цих величин для кожного із МТ.
- Закони збереження мають глибокий зв'язок із фундаментальними властивостями симетрій часу і простору: однорідністю та ізотропністю.
- Закони збереження належать до найбільш фундаментальних принципів фізики, вони виходять далеко за межі механіки і являють собою універсальні закони природи.

4.1.2. Методичні вказівки та поради

1. Якщо в ході або в результаті розв'язування задачі з'ясовується, що якийсь процес (рух), який відбувається в замкненій СМТ, суперечить законам збереження, то можна стверджувати, що цей процес (рух) неможливий і не має сенсу намагатись його реалізувати (напр., побудувати "вічний" двигун).

2. Закони збереження не залежать ні від траєкторії руху матеріального тіла, ні від характеру діючих сил. Останнє дозволяє використовувати закони збереження навіть тоді, коли сили та їх природа не визначені (напр., у фізиці елементарних частинок).

3. Існують задачі, у яких сили відомі. Такі задачі можна розв'язати за допомогою рівнянь руху, але їх часто розв'язують, використовуючи закони збереження. Хоча формально із законів збереження ніякої додаткової інформації отримати не можна, але фактично застосування законів збереження часто дозволяє отримати розв'язок найбільш простим способом. Тому при розв'язуванні нових задач слід дотримуватись такого порядку: спробувати застосувати відповідні закони збереження, і лише переконавшись, що цього недостатньо, переходити до розв'язання за допомогою рівнянь руху.

4.1.3. Запитання та відповіді

4.1.1. *Скільки законів збереження ви знаєте? Чи мають вони межі застосування (чи завжди вони виконуються)?*

Існують три закони збереження (ЗЗ): закон збереження енергії (ЗЗЕ), закон збереження імпульсу (ЗЗІ) і закон збереження моменту імпульсу (ЗЗМІ). Закони збереження не мають меж застосування, вони виконуються в усіх розділах фізики не залежно від того, відбувається досліджуване явище в мікросвіті чи в просторах Космосу. Сучасній науці не відомі факти невиконання законів збереження. Більше того, якщо на будь-якому етапі досліджень з'ясовується, що не виконується один із ЗЗ, то це вказує на існування помилки в дослідженнях. Дослідження в такому випадку слід припинити і почати шукати помилку.

ЗЗ мають більш узагальнений характер, ніж закони Ньютона. Так, ЗЗ діють також тоді, коли не виконується III закон Ньютона (наприклад, для НІСВ). Крім того, що ЗЗ є точними законами, які строго виконуються в межах Ньютонівської механіки, вони виконуються і у релятивістській механіці. Взагалі, ЗЗ виходять за межі механіки. Вони мають універсальний характер і лежать в основі всієї фізики.

4.1.2. *Наслідком яких загальних властивостей простору і часу є закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу?*

ЗЗ мають тісний зв'язок з основними властивостями простору і часу. Основні, фундаментальні властивості простору і часу ще називають симетріями простору і часу. До них належать: однорідність часу, однорідність простору та ізотропність простору.

ЗЗЕ пов'язаний з однорідністю часу, тобто рівнозначністю всіх моментів часу. Це означає, що механічні властивості системи без зміни її параметрів (швидкості, координат тощо), виміряні в різні моменти часу, залишаються сталими. Тобто заміна в початкових умовах часу t_1 на час t_2 не змінює закону руху системи.

В основі ЗЗІ лежить однорідність простору, тобто однаковість властивостей простору в усіх його точках. Це означає, що паралельний (точніше – поступальний) перенос ізольованої системи з одного місця простору в інше без зміни взаємного розташування частинок і зміни їх швидкостей не призводить ні до зміни стану системи, ні до зміни її внутрішніх рухів.

В основі ЗЗМІ лежить ізотропність простору, тобто однаковість властивостей простору в усіх напрямках. Це означає, що поворот ізольованої системи в просторі як цілого не приводить до змін її механічних властивостей.

У всіх попередніх розглядах прийнято було, що перенос або поворот ізольованої системи МТ не змінює її ізольованого стану. Строге математичне доведення зв'язку конкретних ЗЗ із конкретними симетріями простору і часу розглянуто в [1], п. 26. Доведення базується на залученні законів Ньютона і відповідних властивостей простору і часу.

4.1.3 *У чому полягають переваги використання законів збереження порівняно із застосуванням рівняння руху? Які існують недоліки?*

Переваги використання законів збереження порівняно із застосуванням рівняння руху полягають у такому:

- ЗЗ дозволяють отримувати найбільш загальні відомості про механічні процеси, не деталізуючи їх розгляд, як це робиться в рівняннях руху.
- ЗЗ не залежать від траєкторії руху.
- ЗЗ не залежать від характеру сил, що діють в системі. Більше того, навіть не знаючи природу сил, можна застосовувати ЗЗ.
- Застосування ЗЗ помітно спрощує процес отримання інформації про механічні процеси порівняно з рівняннями руху, які потребують інколи досить складного і тривалого розв'язку.

Недоліками (особливостями) ЗЗ слід вважати той факт, що ЗЗ дозволяють отримати інформацію про стан системи в конкретний момент часу, наприклад, визначити швидкість ракети в кінці її виводу на орбіту або висоту останньої. Рівняння руху дозволяє визначити координату, швидкість або прискорення в будь-який момент часу і в будь-якій точці траєкторії.

ЗЗ ніякої додаткової порівняно з рівняннями руху інформації про рух не дають.

4.1.4. *Чи для будь-яких систем матеріальних точок (тіл) виконуються закони збереження?*

Ні, закони збереження виконуються не для будь-яких систем матеріальних точок (тіл), а тільки для ізольованих (замкнених) систем.

4.1.5. *Що таке ізольована (замкнена) система матеріальних точок (тіл)? У чому полягає відносність ступеня ізольованості системи МТ?*

Окрема матеріальна точка або система матеріальних точок (тіл) називається ізольованою (замкненою) за відсутності дії на неї зовнішніх сил. Ізольованих в абсолютному розумінні цього слова систем бути не може, оскільки всі тіла так чи інакше пов'язані між собою, наприклад полем тяжіння. Проте, будуючи якусь фізичну модель, наприклад, при розв'язуванні задачі, можна деякими зв'язками знехтувати і з великим ступенем достовірності вважати матеріальну точку або систему матеріальних точок (тіл) ізольованими (замкненими).

Зауважимо про необхідність враховування того факту, що існують частково ізольовані системи МТ. Це системи, у яких уздовж одного напрямку або в одній площині ("виділений" напрямок або "виділена" площина) складова результуючої зовнішніх сил дорівнює нулю. При цьому частково ізольована система залишається в цілому неізольованою системою.

4.1.6. *Що таке консервативна система матеріальних точок (тіл)?*

Визначення консервативної системи полягає в тому, що це ізольована система матеріальних точок (тіл), у якій немає непотенціальних (дисипативних) сил. У консервативній замкненій системі МТ у процесі її руху в інерціальній СВ зберігається повна механічна енергія.

4.1.7. *У чому полягає відносність ступеня консервативності системи МТ?*

Як немає абсолютно ізольованих систем МТ, так і немає абсолютно консервативних систем МТ. У кожній реальній системі існують дисипативні сили. Вони можуть бути значними і незначними. Ними можна або не можна нехтувати, але вони завжди існують, як існує сила тертя (дисипативна сила), вага нитки, деформація нитки тощо. Однак, коли вони дуже малі, ними нехтують і це часто при розв'язуванні конкретних задач дає позитивні результати.

Із хорошим ступенем наближення замкненою консервативною системою можна вважати Сонячну систему.

4.1.8. *Чи можуть у деяких випадках закони збереження виконуватись і для незамкнених систем матеріальних точок (тіл)? У яких випадках?*

Як було зазначено, ЗЗ виконуються лише для ізольованих систем. Проте в деяких випадках ЗЗ виконуються і для неізольованих систем тіл. До таких випадків належать:

1) частково ізольовані СМТ: для неізольованої системи інколи можна визначити певні напрямки, уздовж яких рух можна розглядати як рух ізольованої системи, хоча в цілому система залишається неізольованою.

Із трьох ЗЗ два пов'язані із збереженням векторних величин: це ЗЗІ та ЗЗМІ. Може статись так, що система неізольована, але складові зовнішніх сил у певних напрямках дорівнюють нулю. Неізольована система набуває вздовж цих напрямків властивостей ізольованої системи. Таким чином, для частково ізольованої системи можна записати ЗЗІ та ЗЗМІ;

2) інсують випадки, коли система МТ неізольована, на неї діють зовнішні сили, але ці сили себе повністю компенсують. Це призводить до того, що до такої неізольованої системи можна застосувати всі три ЗЗ. Якщо компенсація зовнішніх сил відбуваються вздовж деяких напрямків, кажуть про частково ізольовану СМТ: уздовж цих напрямків можна застосувати ЗЗІ та ЗЗМІ.

4.1.9. *Чи може бути так, що для одного й того самого фізичного процесу одні ЗЗ застосувати можна, а інші – ні?*

Можуть існувати випадки, коли для даної системи тіл одні закони збереження виконуються, а інші – ні. Наприклад, при непружному ударі двох тіл частина механічної енергії переходить у внутрішню (теплову) енергію і використовувати ЗЗ механічної енергії не можна. У той же час ЗЗІ можна застосовувати і він продуктивно "працює".

4.2. Закон збереження енергії

4.2.1. Короткі теоретичні відомості

• Закон збереження механічної енергії: в інерціальних системах відліку повна механічна енергія E замкненої системи частинок, у якій немає непотенціальних сил, у процесі руху зберігається:

$$E = T + U = \text{const}\,, \tag{4.1}$$

де T і U – кінетична та потенціальна енергії, відповідно.

• Система матеріальних тіл, у якій немає непотенціальних сил, називається консервативною.

При русі консервативної замкненої системи зберігається повна механічна енергія. Кінетична та потенціальна енергії в загальному випадку при цьому змінюються. Однак ці зміни відбуваються завжди так, що приріст однієї з них дорівнює втраті іншої, тобто

$$\Delta T = -\Delta U\,. \tag{4.2}$$

• Якщо замкнена система неконсервативна, тобто в ній є непотенціальні сили, то механічна енергія такої дисипативної системи зменшується:

$$\Delta E = E_2 - E_1 < 0\,. \tag{4.3}$$

4.2.2. Методичні вказівки та поради

1. Твердження про те, що при непружному ударі закон збереження енергії не виконується, яке інколи можна почути від студентів, невірне. Вірно казати, що при непружному ударі не виконується закон збереження механічної енергії.

2. Залучення до розгляду зовнішніх сил у багатьох випадках при розв'язуванні задач є принципово важливим (необхідним) кроком. Це пов'язане з тим, що робота саме зовнішніх сил разом з дією внутрішніх дисипативних сил визначає зміну механічної енергії матеріального тіла або СМТ.

3. Для того, щоб використовувати закони збереження, треба бути впевненим, що виконуються такі умови: 1) СМТ – замкнена (ізольована); 2) сили, які діють у системі, консервативні; 3) розгляд здійснюється в ІСВ (немає сил інерції).

4. Збереження повної механічної енергії (E) у консервативній системі не означає, що кінетична (T) або потенціальна (U) енергії також залишаються незмінними. У загальному випадку, вони змінюються, але їх зміна завжди відбувається так, що приріст однієї з них точно дорівнює зменшенню іншої, тобто $\Delta T = -\Delta U$. Зрозуміло, що це можливо лише в інерціальних СВ.

4.2.3. Запитання та відповіді

4.2.1. *Закон збереження механічної енергії доводиться чи це постулат?*

Закон збереження механічної енергії можна довести. Покажемо, що з II закону Ньютона випливає ЗЗЕ. Розглянемо найбільш простий випадок руху – одновимірний рух МТ уздовж осі OX у полі консервативної сили $\vec{F}$. Запишемо в скалярному вигляді рівняння руху – II закон Ньютона: $m\frac{d\upsilon}{dt} = F_x = -\frac{dU}{dx}$. Помножимо праву й ліву частини рівняння на швидкість МТ $\upsilon = \frac{dx}{dt}$:

$$\upsilon m\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{dU}{dx}\upsilon \;\Rightarrow\; m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{2} + U(x)\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{2} + U(x) = \text{const} \;\Rightarrow$ повна механічна енергія МТ (сума кінетичної та потенціальної енергій) зберігається. Цей закон збереження енергії можна довести і для руху в тривимірному просторі.

4.2.2. *Поясніть, чому однією з умов існування ЗЗЕ є вимога того, щоб розгляд відбувався в ІСВ.*

Закон збереження механічної енергії системи МТ формулюється так: в інерціальній системі відліку механічна енергія ізольованої системи МТ, у якій немає дисипативних (непотенціальних) сил, у процесі руху зберігається $E = T + U = \text{const}$.

Якщо розглядати рух у НІСВ, то обов'язково до розгляду слід залучати сили інерції. Частина цих сил (напр., відцентрова сила) належить до консервативних сил (див. запитання 5.3.8). Однак їх поява пов'язана з дією зовнішньої сили, у результаті якої СВ починає рухатись із прискоренням. Тобто поява сил інерції та можливість розглядати рух у НІСВ свідчать про втрату системою МТ ізольованості.

4.2.3. *Чим можна викликати зміну потенціальної енергії МТ в ізольованій системі?*

Зміну потенціальної енергії ізольованої СМТ можна викликати дією лише внутрішньої сили $F_{\text{вн}}$ (для ізольованої системи $F_{\text{зовн}} = 0$). Змінити потенціальну енергію МТ можна лише діями, пов'язаними зі зміною кінетичної енергії. Те саме можна сказати й про зворотний зв'язок: змінити кінетичну енергію МТ можна лише за рахунок зміни потенціальної енергії.

Справді, повна механічна енергія для ізольованої системи зберігається $E = T + U = \text{const}$. Зміна U можлива лише за рахунок зміни T : $T \uparrow \Rightarrow U \downarrow$; $T \downarrow \Rightarrow U \uparrow$.

4.2.4. *Чи може зберігатись повна механічна енергія в неізольованій СМТ?*

При зменшенні механічної енергії неізольованої системи завжди виникає еквівалентна кількість енергії інших видів, не пов'язаних з рухом тіл. У цьому випадку механічна енергія тіл переходить у енергію руху молекул (теплову енергією) і пружну енергію деформованих тіл.

Механічна енергія може зберігатись і в неізольованих системах тіл, але це відбувається лише в тих випадках, коли зменшення цієї енергії, яке відбувається за рахунок роботи проти внутрішніх дисипативних сил, компенсується поповненням енергії за рахунок роботи зовнішніх сил.

4.2.5. *Чим можна викликати зміну повної механічної енергії системи МТ за відсутності дисипативних сил?*

Зміну повної механічної енергії МТ можна викликати лише дією зовнішньої сили $F_{\text{зовн}}$. Робота $A_{\text{зовн}}$ зовнішньої сили дорівнює величині зміни ΔE повної механічної енергії МТ: $|A_{\text{зовн}}| = \Delta E \equiv E_2 - E_1 \equiv (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1)$, де T_1, T_2 – кінетична енергія МТ у початковому та кінцевому станах; U_1, U_2 – потенціальна енергія МТ у початковому і кінцевому станах.

Для ізольованої системи ($F_{\text{зовн}} = 0$), у якій відсутні дисипативні сили, змінити повну механічну енергію не можна: у процесі руху МТ її повна механічна енергія зберігається, закон збереження енергії виконується. При цьому потенціальна і кінетична енергії МТ можуть змінюватись.

4.2.6. *Які обмеження висуваються при типовому розгляді удару двох тіл?*

Вважається, що виконуються такі умови:

- удар розглядається в інерціальній *К*-системі відліку;
- система з двох тіл замкнена;
- тіла до і після удару розташовані на достатньо великих відстанях одне від іншого, щоб потенціальною енергією взаємодії між тілами можна було знехтувати.

4.2.7. *Чи можна записати закон збереження енергії для непружного удару?*

Закон збереження енергії для непружного удару в загальному вигляді можна записати в такому вигляді: $E = E' + E_{\text{вн}}$, де E – механічна енергія СМТ до удару; E' – механічна енергія СМТ після удару; $E_{\text{вн}}$ – внутрішня енергія (теплова енергія і енергія деформації) системи тіл після удару.

Для непружного удару двох тіл закон збереження енергії має вигляд

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 \upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2'^2}{2} + E_{\text{вн}}.$$

4.2.8. *Чи завжди в механіці, фізиці і природі виконується закон збереження енергії?*

Поняття енергії, яке вперше було введене в механіці, розширене й на інші розділи фізики, які виникали з її розвитком. Наприклад, на сьогодні широко використовуються поняття немеханічних форм енергії: енергії електромагнітного поля, хімічної енергії, ядерної енергії тощо.

Закон збереження енергії в природі виконується завжди: у механіці, електриці, атомній фізиці та інших розділах фізики, у мікросвіті, повсякденному житті людини та Всесвіті. Сучасній науці невідомі факти невиконання закону збереження енергії. Глибоке осмислення цього питання привело до фундаментального висновку про існування в природі універсального закону збереження енергії: енергія ніколи не утворюється і не знищується, вона може тільки переходити з однієї форми в іншу або обмінюватися між окремими видами матерії.

Універсальний закон збереження енергії охоплює й ті фізичні явища, на які закони Ньютона не поширюються. Тому він не може бути доведений із цих законів, а має розглядатись як самостійний закон, який являє собою одне із найбільш широких узагальнюючих дослідних фактів.

Окремого розгляду та осмислення потребує закон $E_0 = mc^2$, який пов'язує енергію спокою і масу тіла. Такий розгляд проводиться в розділі "Релятивістська динаміка".

4.3. Закон збереження імпульсу

4.3.1. Короткі теоретичні відомості

- Імпульс СМТ є векторною сумою імпульсів її окремих точок:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \,. \tag{4.4}$$

- Закон зміни імпульсу системи тіл

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_1^2 \vec{F}_e \, dt \,, \tag{4.5}$$

де $\vec{F}_e$ – результуюча всіх зовнішніх сил.

- Для замкненої системи МТ $\left(\vec{F}_e = 0\right)$ імпульс системи залишається незмінним $\left(\Delta\vec{p} = \text{const}\right)$, не зважаючи на те, що при цьому імпульси тіл, які входять до системи, можуть змінюватись. У цьому разі кажуть про ЗЗІ.
- Рівняння динаміки матеріальної точки зі змінною масою (рівняння Мещерського) має вигляд

$$m\vec{a} = \vec{u}\frac{dm}{dt} + \vec{F} \,, \tag{4.6}$$

де F – результуюча зовнішніх сил, що діють на тіло з боку оточуючих (сторонніх) тіл і силового поля; $\vec{F}_p = \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ – реактивна сила; $\vec{u}$ – відносна швидкість (швидкість приєднання або відділення маси тіла).

- Формула Ціолковського для визначення швидкості тіла

$$\vec{v}(t) = -\vec{u}\cdot\ln\frac{m_0}{m(t)}, \tag{4.7}$$

де m_0 – маса тіла на початку руху.

4.3.2. Методичні вказівки та поради

1. При визначенні швидкості, набутій при взаємодії двох тіл, для замкнених систем незалежно від типу удару зазвичай використовують закон збереження імпульсу, для незамкнених систем – закон зміни імпульсу.
2. У деяких випадках, наприклад, у випадку абсолютно пружного удару одночасно можуть виконуватись два закони збереження: імпульсу та енергії. В інших випадках використовувати закон збереження механічної енергії не можна (напр., у випадку непружного удару). Закон збереження імпульсу має більш широке поле застосування: воно обмежене лише умовою замкненої системи.
3. Окреме місце в розділі "Закон збереження імпульсу" займають задачі, пов'язані з рухом тіла змінної маси. Їх поява в цьому розділі пов'язана з тим, що рівняння Мещерського отримане, виходячи саме із ЗЗІ.
4. При розв'язуванні задач, пов'язаних з динамікою тіла змінної маси, треба розрізняти два випадки:

- є задачі, у яких тіло змінної маси $m(t)$ характеризується відносною швидкістю $u \neq 0$ і рівняння Мещерського має вигляд (4.5).
- є задачі, у яких розглядається тіло змінної маси $m(t)$, але відносна швидкість $\vec{u} = 0$, тобто маса приєднується або віддаляється від тіла без складової швидкості відносно напрямку руху тіла. До таких задач належить, наприклад, розгляд руху платформи, з якої вільно висипається пісок через отвір у днищі. У цьому разі $F_p = 0$ і рівняння руху набуває вигляду $m(t)\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$.

5. Якщо вважати, що в рівнянні Мещерського $\vec{u} = -\vec{\upsilon}$, де υ – швидкість руху тіла, то вираз (4.5) набуває вигляду

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{\upsilon} = \vec{F} \quad \text{або} \quad \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}.$$

У цьому випадку дія сторонньої сили $\vec{F}$ визначає зміну імпульсу тіла зі змінною масою. Цей випадок реалізується, наприклад, при русі платформи, яка навантажується сипучою речовиною з нерухомого бункера.

(Завдання: у зв'язку із зауваженнями 4 і 5 розв'яжіть задачі 1.136 і 1.137 із [6]).

6. Наближенням $\vec{u} = -\upsilon$, де $\vec{u}$ – відносна швидкість; υ – швидкість руху тіла, треба користуватись вдумливо: наприклад, у випадку з ракетою таке наближення некоректне.

4.3.3. Запитання та відповіді

4.3.1. *Поясніть, як змінюється імпульс окремих матеріальних тіл усередині системи під дією внутрішніх сил.*

В ізольованій СМТ зміна імпульсів окремих матеріальних тіл або частин системи під дією внутрішніх сил відбуваються так, що збільшення імпульсу одного тіла дорівнює зменшенню імпульсу другого. Окремі тіла ізольованої системи можуть лише обмінюватись імпульсами. Знайшовши в СМТ тіло, у якого відбулося, наприклад, зменшення імпульсу, треба бути впевненим, що існує інше тіло в цій самій ізольованій системі, у якого відбулось збільшення імпульсу, причому за модулями величина збільшення імпульсу дорівнює величині зменшенню імпульсу. Фактично, така зміна імпульсів окремих тіл, що входять до СМТ, підпорядкована закону збереження імпульсу для СМТ у цілому.

4.3.2. *Доведіть закон збереження імпульсу, базуючись на II законі Ньютона.*

Коли система МТ ізольована $\left(\vec{F}_{\text{зовн}} = 0\right)$, то $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p} = \text{const}$ – це і є закон збереження імпульсу для ізольованої системи тіл: імпульс ізольованої системи матеріальних тіл залишається сталим, незмінним у часі. При цьому, не залежно від того, що $\vec{p} = \sum \vec{p}_i(t) = \text{const}$, імпульси $\vec{p}_i(t)$ окремих матеріальних тіл ізольованої системи можуть із часом змінюватись.

4.3.3. *Чи існують випадки, коли закон збереження імпульсу застосовувати не можна?*

Закон збереження імпульсу не можна застосовувати лише в одному випадку – для неізольованих систем.

4.3.4. *Чи можуть у деяких випадках ЗЗІ виконуватись і для неізольованих систем матеріальних точок (тіл)? У яких випадках?*

ЗЗІ може виконуватись для частково ізольованих СМТ. Розглянемо два випадки таких систем:

1) нагадаємо, що під "частково ізольованою системою" розуміють систему для якої відповідним вибором системи координат можна досягти того, що одна або дві проекції зовнішніх сил перетворюються на нуль. Тоді неізольована система набуває вздовж цих напрямків властивостей ізольованої системи і вздовж цих напрямків можна записати ЗЗІ.

Наприклад, коли зовнішня сила $\vec{F}$ лише вздовж напрямку OZ має відмінну від нуля складову $F_z \neq 0$, а інші складові зовнішньої сили дорівнюють нулю:

$$F_y = 0; \quad F_x = 0\text{, то } F_z = \frac{dp_z}{dt} \neq 0; \qquad F_y = \frac{dp_y}{dt} = 0; \; F_x = \frac{dp_x}{dt} = 0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; p_z \neq \text{const}; \; p_y = \text{const}; \; p_x = \text{const}$. Як бачимо, у напрямках, паралельних площині XY, імпульс зберігається. Уздовж цих напрямків ЗЗІ можна використовувати. Прикладом такої зовнішньої сили може бути сила тяжіння, яка діє тільки перпендикулярно до поверхні Землі, і має тільки вертикальну складову. Уздовж цього напрямку рух системи має розглядатись як рух неізольованої системи. Водночас рух системи в горизонтальних напрямках можна розглядати як рух ізольованої системи. Це дозволяє записати ЗЗІ для всіх напрямків у горизонтальній площині, хоча система в цілому залишається неізольованою;

2) існують випадки, коли система МТ є незамкненою і на неї діють зовнішні сили, але при цьому ці сили компенсують себе повністю або частково вздовж деяких напрямків. Це призводить до того, що до такої незамкненої системи також можна застосувати ЗЗІ.

4.3.5. *Чи можна в разі виконання ЗЗ для вектора $\vec{p}$ застосувати цей закон до окремих проекцій вектора $\vec{p}$ на будь-який напрямок?*

Наприклад, для ізольованих систем МТ завжди можна застосувати закон збереження імпульсу не тільки до вектора імпульсу $\vec{p}$, але й до його окремих проекцій на будь-який напрямок. Однак при цьому не треба забувати й про випадок, коли для неізольованої СМТ можна знайти напрямки, для проекцій вектора $\vec{p}$ на які виконується ЗЗІ, тоді це не означає, що ЗЗІ можна використовувати до вектра $\vec{p}$.

4.3.6. *Виходячи з попереднього запитання і відповіді на нього, зважте, чи можна з факту збереження у часі однієї чи навіть двох проекцій вектора $\vec{p}$ прийняти рішення про те, що система МТ ізольована й до неї можна застосувати закон збереження вектора $\vec{p}$?*

Ні, не можна. Збереження імпульсу $\left(\vec{p} = \text{const}\right)$ означає незмінність у часі як напрямку, так і величини вектора $\vec{p}$. Як видно з рис. 4.1, а, вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ – не дорівнюють один одному ні за напрямком, ні за величиною, але їх проекції на вісь OZ рівні: $p_{z1} = p_{z2}$. Водночас $p_{x1} \neq p_{x2}$ та $p_{y1} \neq p_{y2}$.

Так само з факту збереження двох проекцій вектора $\vec{p}$ на осі координат не можна стверджувати, що СМТ ізольована і в ній зберігається незмінним вектор $\vec{p}$. На рис. 4.1, б видно, що вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ – не дорівнюють один одному ні за напрямком, ні за величиною, але їх проекції на осі OX та OY рівні. Водночас проекції векторів $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2$ на вісь OZ різні: $p_{z1} \neq p_{z2}$.

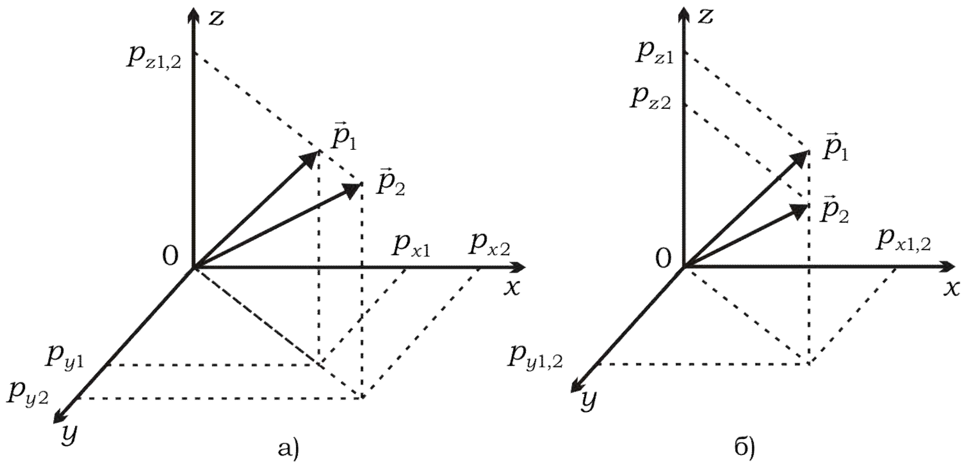


Рис. 4.1. До запитання 4.3.6

4.3.7. *Як за характером руху тіл після співудару відрізнити абсолютно пружний удар від абсолютно непружного, від частково пружного удару?*

Необхідною й достатньою умовою *абсолютно непружного удару* є злипання тіл після удару. Як наслідок цього виникає деформація тіл і частковий або повний перехід механічної енергії у внутрішню (теплову) енергію. Після абсолютно непружного удару система з двох тіл зазвичай продовжує механічний рух.

Називаючи ознаки *частково пружного удару*, слід казати лише про частковий (або повний) перехід механічної енергію у внутрішню (теплову) енергію, але вже без злипання тіл після удару.

Абсолютно пружний удар характеризує те, що в результаті удару відбувається лише обмін механічною енергією між тілами. Ніяких процесів деформації, злипання, переходу механічної енергію у внутрішню (теплову) енергію в цьому випадку не відбувається.

Таким чином, абсолютно непружний удар легко відрізнити від інших типів ударів (від абсолютно пружного та частково непружного) за ознакою: злипаються тіла після удару чи ні.

4.3.8. *Що таке коефіцієнт відтворення відносної швидкості після удару двох тіл?*

Удар двох тіл можна характеризувати коефіцієнтом відтворення β:

$$\beta = \frac{\text{Відносна швидкість тіл після удару}}{\text{Відносна швидкість тіл до удару}} = \frac{\vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_1'}{\upsilon_2 - \upsilon_1},$$

де υ_1 і υ_2 – швидкості тіл до удару; υ_1' та υ_2' – швидкості тіл після удару.

І. Ньютон експериментально показав, що коефіцієнт відтворення (β) залежить від властивостей матеріалу тіл, які беруть участь в ударі. Значення β з точністю, достатньою для практичних цілей, для даного матеріалу можна вважати величиною сталою.

Абсолютно непружний удар означає, що $\beta = 0$. При абсолютно пружному ударі $\beta = -1$. При частково пружному ударі $-1 < \beta < 0$. Таким чином, коефіцієнт відтворення може змінюватись у межах $-1 \le \beta \le 0$.

4.3.9. *Який удар називається центральним?*

Удар двох тіл називається центральним у випадку, коли швидкості, які тіла мали до удару, направлені вздовж прямої лінії, що з'єднує їх центри. Ознакою центральних ударів є те, що для них прицільна відстань $\delta = 0$ (рис. 4.2).

4.3.10. *Опишіть поведінку двох куль з однаковою масою після зіткнення, якщо до зіткнення вони рухались з однаковими швидкостями назустріч одна одній. Удар центральний.*

Поведінка куль після зіткнення залежатиме від характеру удару. У разі абсолютно пружного удару кулі розлетяться в протилежні боки, "обміняються" швидкостями (імпульсами): перша куля полетить у напрямку, у якому до удару летіла друга куля, і навпаки. Модулі швидкостей куль не зміняться. У разі абсолютно непружного удару кулі "обміняються" імпульсами, їх кінетичні енергії перейдуть у внутрішню енергію (деформації та теплову), кулі, об'єднавшись в єдину систему, зупиняться.

4.3.11. *Як знайти напрямки, у яких розлетяться дві кулі після нецентрального пружного удару?*

Знайти напрямки швидкостей двох куль після нецентрального пружного удару можна, скориставшись векторною (імпульсною) діаграмою (див. [5] п. 34). Будемо вважати, що до удару куля 1 із центром мас у точці O'_1 рухається, а куля 2 із центром мас у точці O_2 покоїться (рис. 4.2). (Припущення про те, що одна з куль нерухома, не є обмеженням. Завжди можна обрати систему відліку, яка рухається зі швидкістю кулі 2 до удару, і розглядати задачу в цій системі відліку).

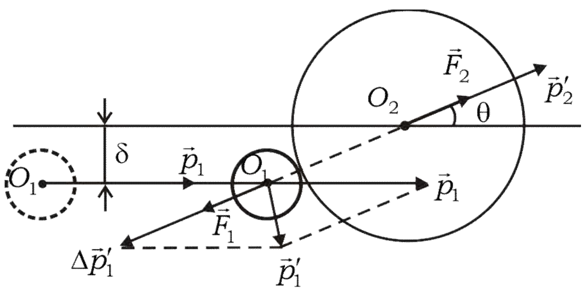


Рис. 4.2. Нецентральний пружний удар двох куль

У момент удару між кулями виникає взаємодія: на кулю 2 з боку кулі 1 діє сила $\vec{F}_2$, а на кулю 1 з боку кулі 2 діє сила $\vec{F}_1$. Ці сили однакові за величиною і протилежні за напрямками $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Діють ці сили по прямій лінії O_1O_2, яка з'єднує центри куль. Напрямок руху кулі 2, яка до удару покоїлась, після удару збігається з напрямком дії сили $\vec{F}_2$ уздовж лінії, що з'єднує центри куль у момент удару. Таким способом визначили кут θ між напрямком руху кулі 1 до удару та напрямком, уздовж якого відскочила куля 2.

Куля 2 після удару набуде вздовж лінії O_1O_2 імпульсу $\vec{p}_2'$, величину якого можна знайти методом векторної (імпульсної) діаграми або за формулою

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos\theta .$$

Щоб скористатись цією формулою необхідно знати величину кута θ, імпульсу p_1, мас m_1, m_2. Значення θ вже знайдено, значення p_1 відоме з умови. Якщо вважати, що $m_1 = m_2 \Rightarrow p_2' = p_1 \cos\theta$, то таким чином, знайдено значення p_2'.

Знаємо напрямки та величини імпульсів $\vec{p}_2'$ і $\vec{p}_1$. Як знайти напрямок, у якому буде рухатись куля 1, після удару, (напрямок імпульсу $\vec{p}_1'$)? Із ЗЗІ маємо $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$. Знаючи $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2'$, побудуємо відповідний трикутник, однією із сторін якого є імпульс $\vec{p}_1'$ (рис. 4.3). Так знайдено величину і напрямок імпульсу $\vec{p}_1'$.

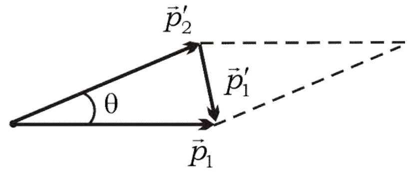


Рис. 4.3. До запитання 4.3.11

Зауважимо, що поява імпульсу $\vec{p}_2'$ у кулі 2 пов'язана із втратою імпульсу $\Delta\vec{p}_1'$ кулі 1 після удару (це випливає із ЗЗІ) $\vec{p}_2' = -\Delta\vec{p}'$. Тому, знаходячи напрямок і величину імпульсу $\vec{p}_1'$, можна виходити із рівняння $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \Delta\vec{p}_2'$.

4.3.12. *Зробіть фізичні висновки і коментарі з рівняння Мещерського.*

Рівняння Мещерського (4.5) описує рух тіла зі змінною масою і має вигляд $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt} + \vec{F}$, де $\vec{u}$ – швидкість приєднання (від'єднання) маси; $\frac{dm}{dt}$ – швидкість зміни маси тіла; $\vec{F}$ – результуюча зовнішніх сил.

Висновки та коментарі:

❖ зліва в рівнянні Мещерського показано силу, що надає тілу масою m прискорення $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Вона дорівнює сумі двох сил: зовнішньої сили $\vec{F}$ і реактивної сили $F_\text{р} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$. (Величину швидкості зміни маси $\frac{dm}{dt}$ часто позначають через μ, тоді реактивна сила $F_\text{р} = \mu \cdot \vec{u}$).

❖ рівняння Мещерського однаково коректно описує рух тіл, маса яких як збільшується, так і зменшується під час руху;

❖ неправильно вважати, що рівняння Мещерського в основному описує рух ракет (реактивний рух). Більше того, рівняння Мещерського взагалі не обов'язково пов'язане з описом руху тіл, які рухаються тільки за рахунок реактивної сили. Значна кількість задач, які описує рівняння Мещерського, ніяк з реактивним рухом не пов'язана. Це – задачі про автомобіль для поливу вулиць, про краплю дощу, маса якої збільшується при падінні в пересиченому водяними парами середовищі, про навантаження та розвантаження залізничних платформ під час їх руху тощо;

❖ записуючи рівняння Мещерського у скалярному вигляді необхідно враховувати напрямок дій реактивної сили і результуючої зовнішніх сил для кожного конкретного випадку. Це може привести до суттєвого різноманіття набору знаків біля доданків у рівнянні Мещерського;

❖ рівняння Мещерського є наслідком ІІ закону Ньютона та ЗЗІ і нічого принципово нового порівняно з ними в собі не має. Рівняння Мещерського належить до рівнянь класичної механіки;

❖ не менш інформативною формою запису рівняння Мещерського є його запис не через сили, а через імпульси у вигляді $m \cdot d\vec{\upsilon} = \vec{u} \cdot dm + \vec{F} \cdot dt$;

❖ реактивна сила завжди направлена в протилежний до відносної швидкості $\vec{u}$ бік;

❖ реактивний принцип руху, мабуть, єдиний серед відомих, який дозволяє на сучасному етапі розвитку техніки створити силу тяги, яка не залежить від середовища і застосовується при русі в пустоті (у Космосі);

❖ інколи, частково відмовляючись від реальних умов, для наочності, яка придає рівнянню Мещерського додаткового фізичного змісту, вважають, що $\vec{u} = -\vec{\upsilon}$. (Насправді, зазвичай це не так, хоча для деяких випадків та етапів руху така рівність виконується). Тоді рівняння Мещерського набуває вигляду

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \vec{\upsilon}\frac{dm}{dt} = \vec{F} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}\right) = \vec{F},$$

що дуже нагадує ІІ закон Ньютона: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, але за умови, що не тільки швидкість, але й маса тіла змінюються у часі: $\upsilon(t)$ та $m(t)$.

4.3.13. *Доведіть формули Ціолковського.*

Якщо в рівнянні Мещерського $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{u}\dfrac{dm}{dt} + \vec{F}$ для руху ракети покласти $F = 0$, то рівняння набуває вигляду $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$. Тоді $m\ d\vec{\upsilon} = \vec{u}\ dm \;\Rightarrow\; d\vec{\upsilon} = \dfrac{dm}{m}\vec{u}$. Переходячи до запису останнього рівняння в скалярному вигляді з урахуванням того, що $\dfrac{dm}{m} < 0$, маємо $d\upsilon = -\dfrac{dm}{m}u$. Якщо $u = \text{const}$, то

$$\int d\upsilon = -u\int\frac{dm}{m} + C \;\Rightarrow\; \upsilon = -u \cdot \ln m + C.$$

Початкові умови: при $t = 0$ величини $\upsilon = 0$; $m = m_0 \Rightarrow C = u \cdot \ln m_0$. Остаточно

$$\upsilon(m) = u \cdot \ln\frac{m_0}{m} \Rightarrow m(\upsilon) = m_0 \cdot \exp\left(-\frac{\upsilon}{u}\right).$$

Два останніх рівняння називають формулами Ціолковського.

4.3.14. *Як у рівнянні руху ракети, що піднімається вгору з поверхні Землі, врахувати дію зовнішніх сил?*

Коли записується рівняння Мещерського $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p = \vec{F} + \vec{u}\,\frac{dm}{dt}$ (де F – результуюча зовнішніх сил, яка діє на ракету з боку оточуючих (сторонніх) тіл і силового поля), виникає проблема, як розписати силу F. У стартуючої з поверхні Землі ракети основний внесок у силу F дає сила гравітації Землі $F = -\gamma\frac{M_З \cdot m}{R_З^2}$, де $M_З$ і $R_З$ – маса та радіус Землі, відповідно; m – маса ракети. При цьому під час розв'язування задач з механіки зазвичай нехтують опором повітря, вважаючи, що висота h підйому ракети невелика ($h << R_З$) і прискорення вільного падіння незмінне, не враховують впливу Місяця, нехтують силами інерції – відцентровою силою і силою Коріоліса тощо.

4.3.15. *До явищ, які мають суто атомну та ядерну природу, належать ефект Комптона і сповільнення нейтронів. Ці ефекти є проявом відповідних процесів у мікросвіті, у якому, як ми справедливо стверджували, не виконується більшість законів класичної механіки. З якою метою вищеназвані ефекти розглядаються в курсі класичної механіки?*

Явища, які мають атомну та ядерну природу, згадуються в курсі класичної механіки як ілюстрація того, що фундаментальні ЗЗ виконуються в різних розділах фізики, у тому числі й сучасної (квантової та релятивістської) фізики. Більше того, ці ефекти були пояснені після свого відкриття (ефект Комптона) або були запропоновані для використання в атомній енергетиці (сповільнення нейтронів) насамперед завдяки застосуванню до них законів збереження.

4.4. Закон збереження моменту імпульсу

4.4.1. Короткі теоретичні відомості

- Момент імпульсу системи матеріальних точок є векторною сумою моментів імпульсу її окремих точок :

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i\,, \tag{4.8}$$

де всі вектори визначаються відносно однієї й тієї самої точки *O* обраної системи відліку.

• Закон зміни моменту імпульсу системи тіл полягає в тому, що приріст моменту імпульсу за проміжок часу від 0 до t дорівнює інтегралу від моменту сил за цей самий час:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}\, dt\,. \qquad (4.9)$$

Обидва моменти ($\vec{L}$ і $\vec{M}$) при цьому визначаються відносно однієї й тієї самої точки *O* обраної системи відліку.

• Момент імпульсу системи МТ може змінюватись лише під дією результуючого моменту всіх зовнішніх сил.

• Сумарний момент усіх внутрішніх сил системи МТ відносно будь-якої точки дорівнює нулю.

• Закон збереження моменту імпульсу полягає в тому, що момент імпульсу замкненої системи МТ залишається сталим:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i(t) = \text{const}. \qquad (4.10)$$

При цьому момент імпульсу окремої частини замкненої системи МТ може змінюватись із часом: $\vec{L}_i(t)$.

• ЗЗМІ, встановлений відносно точки *O*, справедливий відносно будь-якої точки інерціальної системи відліку.

4.4.2. Методичні вказівки та поради

1. Треба мати на увазі, що в літературі, окрім терміну "момент імпульсу" використовуються й інші назви цієї величини: момент кількості руху; обертальний момент; крутильний момент; кутовий момент; момент.

2. Зазвичай закон збереження моменту імпульсу застосовується при розв'язуванні задач з динаміки руху твердого тіла і використовується разом з основним рівнянням обертального руху та рівнянням моментів. У цьому випадку потрібно знати момент інерції тіла.

3. Про момент імпульсу частіше йдеться при розгляді динаміки (обертанні) твердого тіла. Однак ніщо не заважає вводити його і працювати з ним при розгляді динаміки матеріальної точки.

4. Рівняння моментів, як і основне рівняння обертального руху твердого тіла, а також закон збереження моменту імпульсу, розглядаються нами для інерціальних систем відліку. Проте, якщо система відліку неінерціальна, то в названих вище випадках момент сили $\vec{M}$ включає в себе, як момент сил взаємодії, так і момент сил інерції відносно однієї й тієї самої точки *O*.

7. Слід розрізняти і не плутати моменти імпульсу відносно точки та відносно осі (див. запитання 4.4.1 і 4.4.6). Ці поняття різні, хоча і пов'язані між собою.

Момент імпульсу відносно точки є вектором. Момент імпульсу відносно осі є проекцією на цю вісь вектора моменту імпульсу відносно точки, що лежить на тій самій осі. Таким чином, момент імпульсу відносно осі є скаляром.

8. Визначаючи адитивність моменту імпульсу системи МТ, слід підкреслити, що момент імпульсу системи МТ відносно деякої точки *O* дорівнює векторній сумі моментів імпульсу всіх МТ системи відносно тієї ж точки *O*.

4.4.3. Запитання та відповіді

4.4.1. *Дайте визначення моменту імпульса відносно точки.*

Розглянемо матеріальну частинку, положення якої в точці A відносно деякої точки O характеризується радіус-вектором $\vec{r}$ і яка в цій системі відліку має імпульс $\vec{p}$ (рис. 4.4). Моментом імпульсу частинки A відносно точки O називають вектор $\vec{L}$, який дорівнює векторному добутку векторів $\vec{r}$ та $\vec{p}$:

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}]. \tag{4.11}$$

Вектор $\vec{L}$ – перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$ (на рис. 4.4 вектор $\vec{L}$ перпендикулярний до площини рисунка). Вектор $\vec{L}$ – аксіальний вектор. Його напрямок обирають так, що обертання вектора $\vec{r}$ навколо точки O в напрямку вектора $\vec{p}$ утворює правогвинтову систему (на рис. 4.4 вектор $\vec{L}$ направлений "на нас").

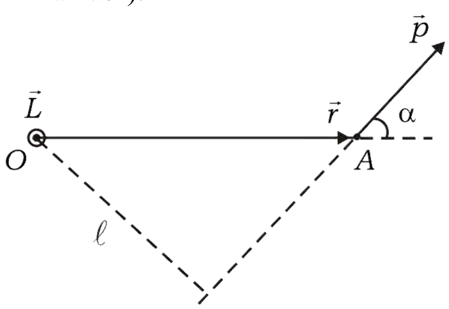


Рис. 4.4. До запитання 4.4.1

Модуль вектора $\vec{L}$ дорівнює $L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = \ell \cdot p$, де α – кут між векторами $\vec{r}$ та $\vec{p}$; ℓ – плече вектора $\vec{p}$ відносно точки O (рис. 4.4).

4.4.2. *Чи необхідно при визначенні моменту імпульсу $\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}]$ дотримуватись порядку запису співмножників – векторів $\vec{r}$ та $\vec{p}$?*

Так, необхідно. При зміні порядку запису співмножників – векторів $\vec{r}$ та $\vec{p}$ у векторному добутку змінюється знак, $[\vec{p}\,\vec{r}] = -[\vec{r}\,\vec{p}]$.

4.4.3. *Яке рівняння описує зміну в часі вектора $\vec{L}$?*

Зміну в часі вектора моменту імпульсу $\vec{L}$ описує рівняння моментів: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, де $\vec{M}$ – момент сили.

4.4.4. *Які властивості моменту імпульсу випливають із рівняння моментів?*

Якщо момент сили $\vec{M} = 0$, то, як випливає з рівняння моментів, $\vec{L} = \text{const}$. Тобто: якщо відносно деякої точки обраної системи відліку момент усіх сил, що діють на МТ, деякий час дорівнює нулю, то відносно цієї точки момент імпульсу залишається сталим протягом цього часу.

4.4.5. *Як визначити зміну моменту імпульсу МТ відносно точки O за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$, якщо відома залежність від часу моменту сил, що діють на МТ відносно тієї ж точки O?*

Із рівняння моментів $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ знаходимо елементарний приріст вектора $\vec{L}$: $d\vec{L} = \vec{M}\,dt$. Проінтегрувавши цей вираз за часом, знайдемо зміну моменту імпульсу МТ відносно точки O за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t)\,dt\,.$$

4.4.6. *Дайте визначення моменту імпульсу відносно осі.*

Оберемо на нерухомій осі Z (рис. 4.5) деяку точку *O*. Момент імпульсу МТ, що розташований у точці *A*, відносно точки *O* дорівнює $\vec{L}$, а момент сили, що діє на МТ визначається як $\vec{M}$. Моментом імпульсу L_z відносно осі Z називають проекцію на цю вісь вектора $\vec{L}$, визначеного відносно точки *O* (рис. 4.5).

Аналогічно вводиться момент сили M_z відносно осі Z.

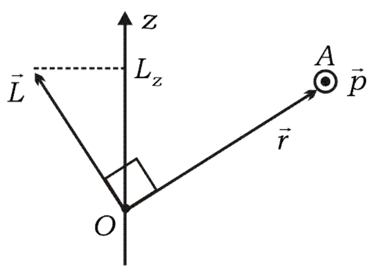


Рис. 4.5. До запитання 4.4.6

Зв'язок між L_z і M_z визначається через рівняння моментів $M_z = \frac{dL_z}{dt}$: похідна за часом від моменту імпульсу МТ відносно осі Z дорівнює моменту сили відносно цієї осі.

4.4.7. *Яка характеристика моментів імпульсу відносно точки і відносно осі найбільш суттєво їх відрізняє?*

Момент імпульсу відносно точки є вектором. Момент імпульсу відносно осі є проекцією на цю вісь вектора моменту імпульсу відносно точки, що лежить на тій самій осі. Таким чином, момент імпульсу відносно осі є скаляром.

4.4.8. *Матеріальна точка масою* m *підвішена на нитці й рівномірно обертається в горизонтальній площині по колу (*рис. 4.6*). Покажіть, що момент імпульсу МТ відносно осі* Z *залишається сталим, хоча при цьому вектор* $\vec{L}$ *змінюється.*

На МТ діють сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу $\vec{T}$ з боку нитки. Відносно точки *O* підвісу момент імпульсу тіла $\vec{L}$ перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори імпульсу $\vec{p}$ і радіус-вектора $\vec{r}$ (за визначенням). Тобто вектор $\vec{L}$ лежить в одній площині з віссю Z і ниткою, і при русі МТ вектор $\vec{L}$ під дією моменту сили тяжіння $\vec{M}$ обертається (змінюється). Проекція L_z цього вектора залишається сталою, оскільки вектор $\vec{M}$ перпендикулярний до осі Z і $M_z = 0$. Це випливає з того, що $\dfrac{dL_z}{dt} = M_z$. Із цього розгляду можна зробити ще один важливий висновок: величини L_z та M_z не залежать від вибору точки *O*, відносно якої визначаються вектори $\vec{L}$ та $\vec{M}$, на осі Z .

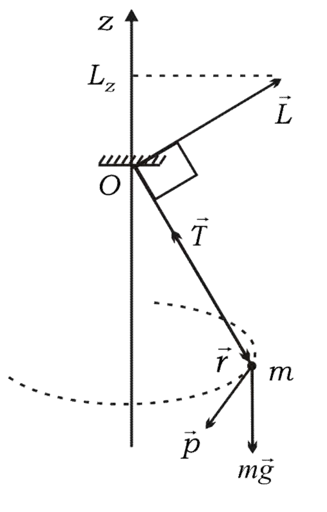


Рис. 4.6. До запитання 4.4.8

4.4.9. *Чи залежить адитивність моменту імпульсу для замкненої СМТ, яка виражена у співвідношенні (4.8), від того, взаємодіють МТ усередині системи між собою чи ні?*

Закон адитивності моменту імпульсу системи МТ виконується незалежно від того, взаємодіють МТ між собою чи ні.

4.4.10. *Чи можна застосовувати закон збереження моменту імпульсу за наявності зовнішніх сил, що діють на систему тіл?*

Загалом, не можна: ЗЗМІ застосовується лише для ізольованих систем тіл (систем, на які зовнішні сили не діють). Однак ЗЗМІ може виконуватися і для частково ізольованих систем матеріальних точок (тіл). Частково ізольованою системою називають систему МТ, для якої відповідним вибором системи координат у деяких спеціальних випадках можна досягти того, що одна або дві проекції зовнішніх сил перетворюються на нуль. Тоді неізольована система набуває вздовж цих напрямків властивостей ізольованої системи і вздовж цих напрямків виконується ЗЗМІ. Розглянемо два випадки таких систем:

1) нехай складові вектора моменту сил мають такі значення: $M_z = 0$; $M_x \neq 0$; $M_y \neq 0$. Тоді рівняння моментів дорівнюють

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = 0; \quad M_y = \frac{dL_y}{dt} \neq 0; \quad M_x = \frac{dL_x}{dt} \neq 0,$$

а складові вектора $\vec{L}$ моменту імпульсу набувають такого вигляду: $L_z = \text{const}$; $L_y \neq \text{const}$; $L_x \neq \text{const}$. Таким чином, система буде ізольована вздовж напрямку OZ. Це означає, що в напрямках, перпендикулярних площині XY, імпульс зберігається, уздовж цих напрямків ЗЗМІ виконується.

Наведемо приклад, пов'язаний з дією сили тяжіння. Вона діє тільки перпендикулярно до поверхні Землі, має тільки вертикальну складову вздовж осі OZ. Уздовж цього напрямку рух системи має розглядатись як рух неізольованої системи: $F_z \neq 0$. Водночас рух системи в горизонтальних напрямках можна вважати рухом ізольованої системи $F_x = 0$ і $F_y = 0$. Це означає, що

$$M_z \neq 0; \quad M_x = 0; \quad M_y = 0 \;\Rightarrow\; L_z \neq \text{const}; \quad L_y = \text{const}; \quad L_x = \text{const}.$$

Таким чином, за умови відсутності інших зовнішніх сил до системи МТ, розташованій у полі тяжіння Землі, можна використовувати ЗЗМІ для всіх напрямків у горизонтальній площині, хоча система в цілому залишається неізольованою;

2) існують випадки, коли на систему МТ діють зовнішні сили (система – неізольована), але ці сили компенсують себе повністю або частково вздовж деяких напрямків. Це призводить до того, що до такої незамкненої системи можна застосувати ЗЗМІ.

4.4.11. *Чи можна в разі виконання ЗЗМІ для СМТ застосувати ЗЗМІ до його окремих проекцій на будь-який напрямок?*

Так, для ізольованих систем МТ завжди можна застосувати закон збереження імпульсу не тільки до вектора моменту імпульсу $\vec{L}$, але й до його окремих проекцій на будь-який напрямок.

4.4.12. *Виходячи з попереднього запитання та відповіді на нього, зважте, чи можна з факту збереження у часі однієї чи двох проекцій вектора $\vec{L}$ прийняти* *рішення про те, що система МТ ізольована і до неї можна застосувати закон збереження вектора $\vec{L}$?*

Ні, не можна. Збереження моменту імпульсу означає $\vec{L} = \text{const}$, тобто незмінність у часі як напрямку, так і величини вектора $\vec{L}$. Як видно з рис. 4.7, вектори $\vec{L}_1$ та $\vec{L}_2$ – не дорівнюють один одному ні за напрямком, ні за величиною, але їх проекції на вісь OZ рівні $L_{z1} = L_{z2}$. При цьому не рівні й дві інші проекції: $L_{x1} \neq L_{x2}$ та $L_{y1} \neq L_{y2}$.

Так само, з факту збереження двох проекцій вектора $\vec{L}$ на осі координат, не можна стверджувати, що СМТ ізольована і в ній зберігається незмінним вектор $\vec{L}$. На рис. 4.7, б видно, що вектори $\vec{L}_1$ та $\vec{L}_2$ – не дорівнюють один одному ні за напрямком, ні за величиною, але їх проекції на осі OX та OY рівні. Водночас проекції векторів $\vec{L}_1$ та $\vec{L}_2$ на вісь OZ різні $L_{z1} \neq L_{z2}$.

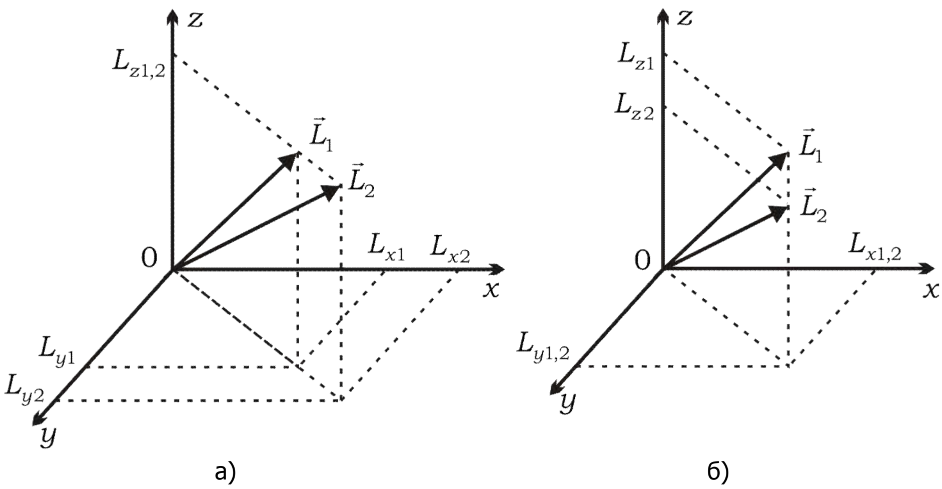


Рис. 4.7. До запитання 4.4.12

4.4.13. *Чи може центральна сила змінити момент імпульсу МТ? Доведіть.*

Центральна сила не може змінити імпульс матеріального тіла, незалежно від характеру руху МТ. Доведемо це. Врахуємо, що рух у полі центральної сили є плоским рухом (див. запитання 8.3.5). Плоский рух може бути прямолінійним або обертальним. Розглянемо два типи руху окремо.

Поступальний рух будемо розглядати на прикладі його різновиду – прямолінійного руху (рис. 4.8). Як відомо, момент імпульсу $L = r \cdot p \cdot \sin(\vec{r}, \vec{p})$. Будемо вважати, що кут α між векторами $\vec{r}$ та $\vec{p}$ змінюється в межах від 0 до $\pi/2$. При прямолінійному русі кут $\alpha = 0$ і величина $L = 0$.

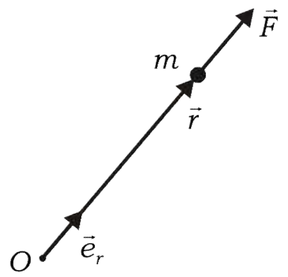


Рис. 4.8. Прямолінійний рух тіла в полі центральної сили

У випадку дії центральної сили на МТ, що обертається, величина кута $\alpha = \pi/2$ (рис. 4.9). Напрямок центральної сили в будь-якій точці поля проходить через точку O – силовий центр. Початок координат (точка, з якої виходить радіус-вектор $\vec{r}$) розміщений у точці O – силовому центрі. Момент $\vec{M}$ центральної сили відносно точки O дорівнює нулю $\vec{M} = 0$. Це випливає з того, що плече центральної сили дорівнює нулю. Із рівняння моментів $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, де $\vec{L}$ – момент імпульсу відносно точки O, за умови, що $\vec{M} = 0$, випливає, що $\vec{L} = \text{const}$. Це означає, що в кожний момент часу вектор $\vec{L} = [\vec{r}\ \vec{p}]$ перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$, і залишається незмінним у часі (рис. 4.9).

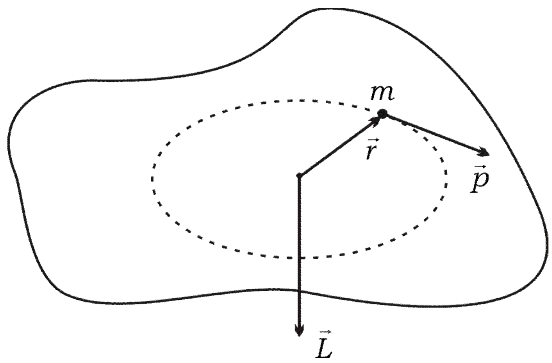


Рис. 4.9. Обертальний рух у полі центральної сили

4.4.14. *Деяка планета обертається в полі тяжіння Сонця. Відносно якої точки геліоцентричної системи відліку момент імпульсу цієї планети зберігається із часом?*

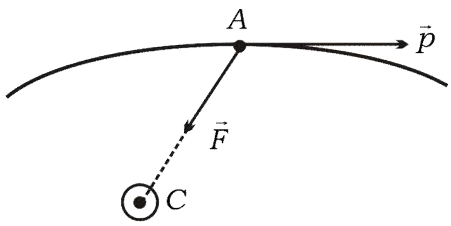


Рис. 4.10. До запитання 4.4.14

На планету (точка A на рис. 4.10) з боку Сонця (центр маси Сонця – точка C) при обертанні планети навколо Сонця діє сила $\vec{F}$ тяжіння, яка весь час направлена в центр Сонця (у точку C). Тому точка C і є саме тією точкою, відносно якої момент ($\vec{M}$) центральної сили весь час дорівнює нулю, тобто момент імпульсу планети буде залишатись сталим. (Це випливає з рівняння моментів $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{L}=\text{const}$). При цьому імпульс $\vec{p}$ планети через зміну вектора її швидкості $\vec{\upsilon}$ буде змінюватись.

Зауважимо, що, крім точки C, будь-яка точка на прямій, яка з'єднує планету і Сонце, може бути точкою, відносно якої момент імпульсу зберігається із часом.

4.5. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. *Кулька, яка підвішена на нитці, коливається у вертикальній площині так, що її прискорення в крайньому і нижньому положеннях рівні за модулем один одному. Знайдіть кут* θ *відхилення нитки в крайньому положенні.*

Розв'язання: На кульку, що коливається навколо положення рівноваги, у довільній точці траєкторії діють такі сили (рис. 4.11, а): з боку нитки сила $\vec{T}$, складові сили тяжіння $mg\cdot\sin\theta$ і $mg\cdot\cos\theta$, а також відцентрова сила $\vec{F}_{\text{відц}}$ взаємодії кульки з ниткою. У крайньому положенні (точка A на рис. 4.11, а) швидкість кульки $\upsilon_A=0$, тому і відцентрова сила $\vec{F}_{\text{відц}}$ дорівнює нулю. Прискорення a_A дорівнює $a_A=g\cdot\sin\theta$. Сила натягу нитки в цій точці дорівнює $T_1=mg\cdot\cos\theta$.

У точці B (рис. 4.11, а) швидкість кульки набуває максимального значення, прискорення $(g\cdot\sin\theta)$ кульки змінює знак і дорівнює нулю, на кульку діє відцентрова сила взаємодії кульки з ниткою $F_{\text{відц}}=\frac{m\upsilon^2}{L}$. Сила натягу нитки в цьому положенні дорівнює $T_2=mg+\frac{m\upsilon^2}{L}$. Закон збереження енергії з урахуванням результатів розгляду рис. 4.11, б має вигляд

$$\frac{m\upsilon^2}{2}=mgH=mgL(1-\cos\theta). \tag{4.12}$$

Повернемось до умови прикладу, де сказано про те, що $a_A=a_B$. У точці A на кулю діє сила, якій відповідає прискорення $a_A=g\cdot\sin\theta$. У точці B прискорення, яке пов'язане зі складовою сили тяжіння $g\cdot\sin\theta$, як уже з'ясувано, $a_B=0$. Відмінне від нуля прискорення кульки в точці B пов'язане з відцентровою силою $F_2=ma_2=\frac{m\upsilon^2}{L}$, тобто $a_B=\frac{\upsilon^2}{L}$. Таким чином, маємо

$$a_A = a_B \;\Rightarrow\; g\cdot\sin\theta = \frac{\upsilon^2}{L} \;\Rightarrow\; \upsilon^2 = g\cdot\sin\theta\cdot L\,. \tag{4.13}$$

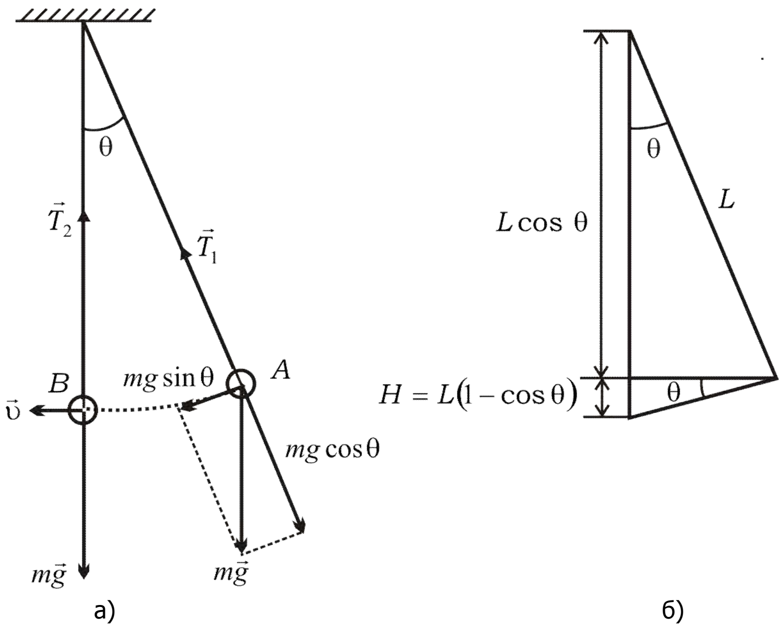


Рис. 4.11. До прикладу 4.1

З іншого боку, із (4.12)

$$\upsilon^2 = 2gH = 2gL(1-\cos\theta)\,. \tag{4.14}$$

Об'єднавши (4.13) і (4.14), маємо

$$g\cdot\sin\theta\cdot L = 2gL(1-\cos\theta) \;\Rightarrow\; \sin\theta = 2(1-\cos\theta) \;\Rightarrow\; \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2}; \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\,.$$

Із таблиць знаходимо кут $\frac{\theta}{2} \approx 26{,}5^0$ або $\theta = 53^0$.

Приклад 4.2. *Невелика кулька масою* $m = 50\,\text{г}$ *прикріплена до кінця пружної нитки, жорсткість якої* $\chi = 63\ \text{Н/м}$. *Нитку з кулькою обережно відвели в горизонтальний стан і відпустили. Коли кулька проходила вертикальне положення, довжина нитки була* $\ell = 1{,}5\,\text{м}$, *а швидкість кульки* $\upsilon = 3\,\text{м/с}$. *Знайдіть силу натягу нитки у вертикальному положенні.*

Розв'язання. Із рис. 4.12 видно, якщо ℓ_0 – довжина нитки в нерозтягнутому стані (горизонтальному положенні); $\Delta\ell$ – подовження нитки, яке вона набуває, проходячи вертикальне положення, то довжина нитки в розтягнутому стані (вертикальному положенні) дорівнює

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell\,. \tag{4.15}$$

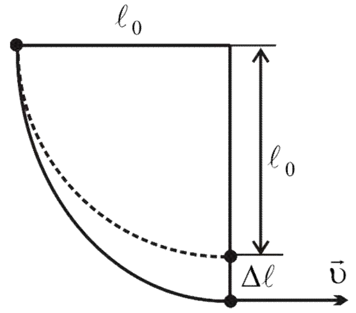


Рис. 4.12. До прикладу 4.2

Закон збереження механічної енергії в цьому випадку має такий вигляд: потенціальна енергія кулі, яка піднята на висоту ℓ, переходить у кінетичну енергію кулі та пружну енергію розтягнутої нитки. Масою нитки при цьому нехтуємо (нитка невагома). Отже,

$$mg\ell = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{\chi\cdot(\Delta\ell)^2}{2} \Rightarrow 2mg\ell = m\upsilon^2 + \chi\cdot(\Delta\ell)^2 \Rightarrow \Delta\ell = \sqrt{\frac{m(2g\ell - \upsilon^2)}{\chi}}, \tag{4.16}$$

$$\Delta\ell = \sqrt{\frac{(2\cdot 9{,}8\cdot 1{,}5 - 3^2)50\cdot 10^{-3}}{63}} = 0{,}13\,\text{м}\,.$$

За законом Гука сила натягу розтягнутої на $\Delta\ell$ нитки з урахуванням (4.16) дорівнює

$$F_{\text{пруж}} = \chi\cdot\Delta\ell = \sqrt{\chi m(2g\ell - \upsilon^2)}\,,$$

$$F_{\text{пруж}} = \sqrt{63\cdot 5\cdot 10^{-2}(2\cdot 9{,}8\cdot 1{,}5 - 3^2)} = 8\,\text{Н}\,.$$

Звернемо увагу на те, що застосування закону збереження енергії замість рівняння руху позбавило нас від детального розгляду сил, які беруть участь у цьому процесі, і таким чином спростило розв'язування задачі. (У даному випадку пружну нитку розтягують дві сили: сила тяжіння і відцентрова сила).

Приклад 4.3. *Два бруски з масами m_1 і m_2, які з'єднані недеформованою легкою пружиною, лежать на горизонтальній площині. Коефіцієнт тертя між брусками та площиною дорівнює k. Яку мінімальну сталу силу треба прикласти в горизонтальному напрямку до бруска з масою m_2, щоб інший брусок зрушив з місця?*

Розв'язання: Нехай стала сила $F(t)$, яка прикладена в горизонтальному напрямку до бруска з масою m_2, починає змінюватись від нуля в бік зростання аж до величини F_{min}, при якій брусок m_1 зрушує з місця і яку треба визначити. До моменту, коли це відбудеться, тіло з масою m_2 пройде шлях ℓ_2 і набуде при цьому деякої швидкості υ_2.

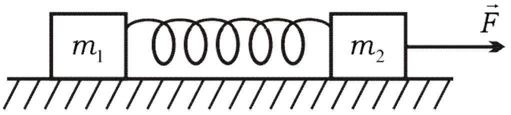


Рис. 4.13. До прикладу 4.3

Проте кінетичну енергію тіла m_2, що дорівнює $\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}$, будемо вважати малою і нею знехтуємо.

Визначимо роботу сили $F(t)$ зі переміщення тіла з масою m_2 на відстань ℓ_2 як $A_2 \approx F_{min} \cdot \ell_2$. Робота A_2 йде на подолання сили тертя $F_{\text{тер}2} = k \cdot m_2 g$ і пружної сили, яка за законом Гука дорівнює $F_{\text{пр}} = \chi \cdot \ell_2$, де k – коефіцієнт тертя; χ – коефіцієнт пружності. Таким чином,

$$F_{min} \cdot \ell_2 = k \cdot m_2 g \ell_2 + \frac{\chi \cdot \ell_2{}^2}{2}. \tag{4.17}$$

З іншого боку, деформована пружина з силою $F_{\text{пр}} = \chi \cdot \ell_2$ діє на тіло масою m_1 і, долаючи силу тертя $F_{\text{тер}1} = k \cdot m_1 g$, зрушує його з місця. У момент початку руху: $F_{\text{пр}} = F_{\text{тер}1} \Rightarrow$

$$\chi \cdot \ell_2 = k \cdot m_1 g \tag{4.18}$$

(4.18) $\rightarrow$(4.17):

$$F_{min} \cdot \ell_2 = k \cdot m_2 g \ell_2 + \frac{k \cdot m_1 g \ell_2}{2} \tag{4.19}$$

$$F_{min} = k \cdot m_2 g + \frac{k \cdot m_1 g}{2} = kg\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right). \tag{4.20}$$

Щодо аналізу (4.20). Цікавими і неочікуваними результатами, на наш погляд, є такі: 1) "нерівноправна" залежність сили F_{min} від мас тіл: величина сили F_{min} пропорційна сумі повної маси бруска, до якого прикладена сила, і половини маси бруска, який зрушує з місця за допомогою пружини; 2) відсутність залежності F_{min} від жорсткості пружини χ.

Заважимо, що приклад з двома брусками, з'єднаними пружиною, які лежать на абсолютно гладенькій поверхні, тобто без урахування тертя, ми вже розглядали (приклад 2.2).

Приклад 4.4. *Відбулося абсолютно пружне лобове зіткнення частинки 1 масою m_1 з частинкою 2 масою m_2, що перебувала у стані спокою. Яку частину кінетичної енергії втратила частинка 1.*

Розв'язання: Основний закон пружного співудару частинок описується формулою

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cdot \cos\theta\,, \tag{4.21}$$

де $\vec{p}_2'$ – імпульс частинки 2, яка до удару покоїлась; p_1 – імпульс частинки 1, яка до удару рухалась, θ – кут між напрямком руху частинки 1 до удару та напрямком, під яким частинка 2 почала рухатись після удару (рис. 4.2).

Для $\theta = 0$ (удар лобовий) формула (4.21) набуває вигляду

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1\,. \tag{4.22}$$

Закон збереження імпульсу (ЗЗІ) має вигляд

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'\,. \tag{4.23}$$

Із (4.23) маємо $\vec{p}_2' = \vec{p}_1 - \vec{p}_1'$. (4.24).

Зважаючи на те, що рух частинок відбувається вздовж однієї прямої, можна перейти до запису ЗЗІ для скалярних величин імпульсу $p_2' = p_1 - p_1'$ і підставити (4.22) у (4.24):

$$p_1 - p_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \;\Rightarrow\; p_1\left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) = p_1' \;\Rightarrow\; p_1^{\,2}\left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = p_1'^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_1^{\,2}}{2m_1}\left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{p_1'^2}{2m_1} \;\Rightarrow\; E_1\left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = E_1'\,,$$

де E_1 і E_1' – енергії частинки 1 до та після удару, відповідно. Відношення цих енергій дорівнює $\dfrac{E'}{E_1} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$, а величина

$$\eta = 1 - \frac{E'}{E_1} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\,.$$

Зауважимо, коли йдеться про втрату кінетичної енергії частинкою 1, ми розуміли передачу цієї частини механічної енергії в кінетичну енергію частинки 2. Ніякі перетворення механічної енергії на інші види енергії при цьому, безумовно, не відбуваються, удар абсолютно пружний.

Приклад 4.5. *У результаті абсолютно пружного лобового зіткнення частинки 1 масою m_1 з частинкою 2 масою m_2, що перебувала у стані спокою, обидві частинки розлетілись у протилежні напрямки з однаковими за модулями швидкостей. Яке співвідношення між масами m_1 і m_2 може забезпечувати таку поведінку частинок?*

Розв'язання: До удару: $\upsilon_1 \neq 0$ і $\upsilon_2 = 0$. Після удару за умовою прикладу $\vec{\upsilon}_1' = -\vec{\upsilon}_2'$; $|\vec{\upsilon}_1'| = |\vec{\upsilon}_2'| = \upsilon'$.

$$\text{ЗЗІ: } m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2' - m_1\upsilon_1' = m_2\upsilon' - m_1\upsilon' \;\Rightarrow\; \upsilon' = \frac{m_1\upsilon_1}{m_2 - m_1}. \tag{4.25}$$

$$\text{ЗЗЕ: } \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1\upsilon'^2}{2} + \frac{m_2\upsilon'^2}{2}. \tag{4.26}$$

(4.25) $\to$ (4.26):

$$1 = \left(\frac{m_1}{m_2 - m_1}\right)^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_2 - m_1)^2} \;\Rightarrow\; m_2 = 3m_1.$$

Приклад 4.6. *Снаряд із гармати, який летить зі швидкістю $\upsilon = 500$ м/с, вибухає і розколюється на три однакових уламки так, що кінетична енергія системи збільшилась у $\eta = 1{,}5$ раза. Яку максимальну швидкість може мати один із уламків? Який саме?*

Розв'язання: Проаналізуємо умову задачі. Як випливає з умови, у результаті вибуху кінетична енергія змінилась: збільшилась у 1,5 раза. Це означає, по-перше, що закон збереження механічної енергія застосувати не можна. По-друге, виникає запитання: чому збільшилась кількість механічної енергії і за рахунок чого. Відповідь проста – за рахунок вибуху. Частина енергії, яка виділилась при згоранні пороху, перейшла в механічну енергію уламків снаряду. (Інша частина енергії, що звільнилась у результаті вибуху, перейшла в енергію звукової хвилі, в енергію світлового спалаху тощо).

У результаті вибуху утворились три однакових уламки. Це означає, якщо позначити масу кожного з уламків через m, маса снаряду до вибуху (якщо знехтувати масою пороху, що після вибуху згорів) дорівнює $3m$. Таким чином, початкова кінетична енергія снаряду до вибуху дорівнює

$$T_0 = \frac{3m\upsilon^2}{2}. \tag{4.28}$$

Кінетична енергія уламків снаряду після вибуху дорівнює

$$T = \eta T_0 = \eta \cdot \frac{3m\upsilon^2}{2}. \qquad (4.29)$$

Якщо всі три уламки розлітаються в різні боки, то в ІСВ більшу швидкість матиме той уламок який буде характеризуватись найменшим кутом між напрямком його руху та напрямком руху снаряду до вибуху. Максимальну швидкість буде мати той уламок, напрямок руху якого збігатиметься з напрямком руху снаряду до вибуху ("прямий" уламок). На рис. 4.14 "прямий" уламок має імпульс $\vec{p}_1$, два інших однакових уламки мають імпульси $\vec{p}_2$ та $\vec{p}_3$. Результуючий імпульс двох останніх уламків дорівнює $\vec{p}_{рез}$. Максимальне значення імпульсу $\vec{p}_{рез}$ матиме, коли уламки 2 і 3 летять в одному напрямку (рис. 4.14, б). Цей випадок буде відповідати максимальному значенню швидкості уламку 1, яку треба визначити за умовою прикладу.

Зауважимо, що зроблений аналіз проводився в нерухомій системі відліку (*К*-СВ), пов'язаній із Землею. Далі задачу будемо розв'язувати в системі центра мас (Ц-системі відліку).

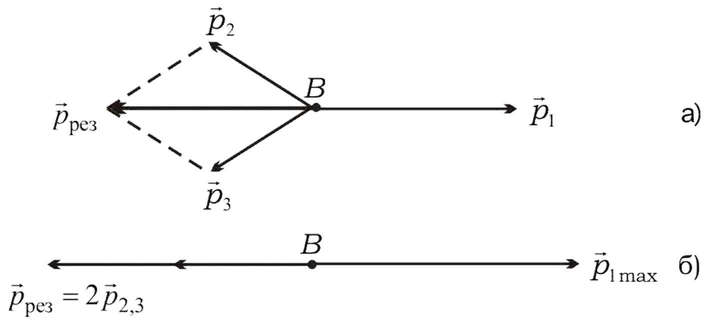


Рис. 4.14. Векторні діаграми для імпульсів уламків снаряду після його вибуху в разі існування "прямого" уламку (а) та у випадку, коли цей уламок має максимальну швидкість (б). До прикладу 4.6

У Ц-СВ "прямий" уламок має швидкість υ_1, кожен з двох інших уламків має однаку за величиною швидкість υ_2. Відомо, що в замкненій Ц-СВ сумарний імпульс матеріальних частинок, дорівнює нулю, тобто $m\vec{\upsilon}_1 + 2m\vec{\upsilon}_2 = 0 \Rightarrow \vec{\upsilon}_1 = -2\vec{\upsilon}_2$ (рис. 4.15, б). З останнього рівняння видно, що для випадку максимальної швидкості "прямого" уламку його напрямок руху має бути протилежним напрямкам руху двох інших уламків (рис. 4.15, б). Таким чином, рух усіх трьох уламків направлений уздовж однієї лінії, і рівняння для проекцій векторів $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_2$ на напрямок руху центра мас снаряду (на напряок вектора $\vec{\upsilon}$) запишеться у вигляді

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2}. \qquad (4.30)$$

Кінетична енергія $\tilde{T}$ уламків снаряду після вибуху в Ц-СВ складається із суми кінетичних енергій уламків снаряду:

$$\tilde{T} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + 2\frac{m\upsilon_2^2}{2}. \tag{4.31}$$

Урахуємо в (4.31) вираз (4.30):

$$\tilde{T} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + 2\frac{m\upsilon_1^2}{2\cdot 4} = \frac{3}{4}m\upsilon_1^2. \tag{4.32}$$

Як вже було з'ясовано, кінетична енергія T_0 снаряду до вибуху в K-СВ дорівнює (4.28)

$$T_0 = \frac{3m\upsilon^2}{2},$$

а кінетична енергія T системи уламків снаряду після вибуху в K-СВ дорівнює (4.29)

$$T = \eta\, T_0 = \eta\cdot\frac{3m\upsilon^2}{2}. \tag{4.32}$$

Перехід від величини кінетичної енергії T системи уламків снаряду після вибуху в K-системі відліку до такої величини в Ц-СВ ($\tilde{T}$), як було показано вище при розгляді властивостей Ц-СВ (див. запитання 2.3.20), здійснюється з урахуванням руху центра мас зі швидкістю υ_c за допомогою співвідношення (2.13), яке для нашого випадку набуде вигляду

$$T = \tilde{T} + \frac{3m\upsilon_c^2}{2}. \tag{4.33}$$

Підставимо в (4.33) вирази (4.29) і (4.32):

$$\eta\cdot\frac{3m\upsilon^2}{2} = \frac{3}{4}m\upsilon_1^2 + \frac{3m\upsilon_c^2}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}\upsilon_1^2 = \eta\cdot\frac{3\upsilon^2}{2} - \frac{3\upsilon_c^2}{2}. \tag{4.34}$$

Відповідно до теореми центра мас (див. запитання 2.3.19) швидкість υ_c центра мас уламків снаряду після вибуху дорівнює швидкості υ снаряду до вибуху $\upsilon_c = \upsilon$, вираз (4.33) перепишеться як:

$$\frac{3}{4}\upsilon_1^2 = \eta\cdot\frac{3\upsilon^2}{2} - \frac{3\upsilon^2}{2} \equiv \frac{3}{2}\upsilon^2(\eta-1) \Rightarrow \upsilon_1^2 = 2\upsilon^2(\eta-1) \;\Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon\sqrt{2(\eta-1)}. \tag{4.35}$$

Проте до швидкості υ_1 "прямого" уламку, яку він мав у Ц-СВ, додається ще і швидкість υ снаряду до вибуху, яка, як ми з'ясували, дорівнює υ_c. Таким чином, шукана максимальна швидкість уламка $\upsilon_{\max} = \upsilon_1 + \upsilon$ або з урахуванням (4.35):

$$\upsilon_{\max} = \upsilon + \upsilon\sqrt{2(\eta-1)} = \upsilon(1+\sqrt{2(\eta-1)}).$$

З урахуванням значень υ та η з умови задачі ($\upsilon = 500$ м/с; $\eta = 1{,}5$) остаточно маємо

$$\upsilon_{\max} = 500\ \text{м/с} \cdot (1 + \sqrt{2(1{,}5 - 1)}) = 500\ \text{м/с} \cdot (1 + 1) = 1000\ \text{м/с}.$$

Приклад 4.7. *Частинка A, маса якої m_A, пролітаючи поблизу іншої частинки B, яка до того перебувала у стані спокою, відхиляється на кут α. Імпульс частинки A до взаємодії був $\vec{p}_0$, після взаємодії став $\vec{p}_A$. Знайдіть масу m_B частинки B, якщо система замкнена.*

Розв'язання: У результаті взаємодії тіло A змінює свою траєкторію (рис. 4.16). Це один із зовнішніх проявів взаємодії. Однак, напевно, взаємодія призводить також до змін (перерозподілів) імпульсів та енергій обох тіл. Зокрема, тіло A змінює свій імпульс $\vec{p}_0$ на імпульс $\vec{p}_A$. Тіло B змінює свій стан: до початку взаємодії тіло B було нерухомим, після взаємодії воно набуло імпульсу $\vec{p}_B$. Відбулись ще якісь зміни, які обговоримо далі.

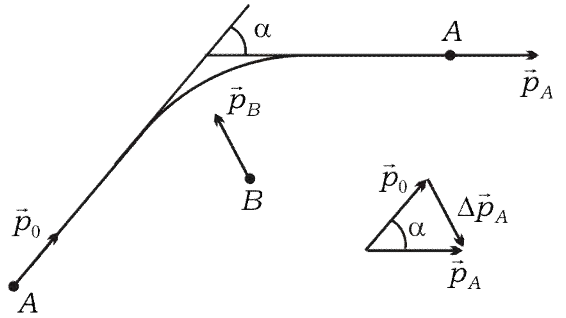


Рис. 4.15. До прикладу 4.7

Позначимо через Δp_A зміну імпульсу тіла A:

$$\Delta\vec{p}_A = \vec{p}_A - \vec{p}_0 \ \Rightarrow\ \vec{p}_A = \vec{p}_0 + \Delta\vec{p}_A. \tag{4.36}$$

Записане в (4.36) має своє графічне відображення на вставці до рис. 4.15. Із зображеного на цій вставці трикутника за теоремою косинусів випливає, що

$$\Delta p_A = \sqrt{p_0^2 + p_A^2 - 2 p_0 p_A \cos\alpha}. \tag{4.37}$$

Закон збереження імпульсу в даному випадку замкненої системи має таку форму: імпульс,втрачений тілом A, набувається тілом B:

$$\vec{p}_B = -\Delta\vec{p}_A. \tag{4.38}$$

Закон збереження механічної (кінетичної) енергії для розглянутої системи можна використовувати тому, що взаємодія тіл має характер абсолютно пружної взаємодії (в умові прикладу йдеться про "неконтактну" взаємодію, немає й натяку на "злипання" тіл, тобто і переходу частини механічної енергії в теплову). Окрім того, система замкнена і до неї можна застосувати ЗЗЕ: кінетична енергія системи до взаємодії (рухається тільки тіло A, маса якого m_A, зі швидкістю υ_0 та імпульсом $p_0 = m_A \cdot \upsilon_0$) дорівнює кінетичній енергії системи після взаємодії (рухаються обидва тіла з масами m_A та m_B і швидкостями υ_A та υ_B, імпульсами p_A та p_B, відповідно). Враховуючи, що кінетична енергія матеріального тіла, яке рухається поступально, дорівнює $\dfrac{m\upsilon^2}{2} \equiv \dfrac{p^2}{2m}$, закон збереження кінетичної енергії набуде вигляду

$$\frac{p_0^2}{2m_A} = \frac{p_A^2}{2m_A} + \frac{p_B^2}{2m_B} \;\Rightarrow\; \frac{p_0^2 - p_A^2}{m_A} = \frac{p_B^2}{m_B}. \tag{4.39}$$

Із (4.39), врахувавши (4.38), остаточно маємо

$$m_B = \frac{\Delta p_A{}^2 \cdot m_A}{p_0^2 - p_A^2} = \frac{(p_0^2 + p_A^2 - 2p_0 p_A \cos\alpha)\cdot m_A}{p_0^2 - p_A^2}.$$

Отриманий результат цікавий тим, що може бути покладений в основу безконтактного методу визначення маси частинки методом вимірювання параметрів іншої частинки при їх взаємодії.

Приклад 4.8. *Кулька масою m падає без початкової швидкості з висоти h над поверхнею Землі. Знайдіть модуль приросту моменту імпульсу кульки за час падіння відносно точки O в системі відліку, яка рухається поступально зі швидкістю υ у горизонтальному напрямку. У момент початку руху точка O збігається з центром кульки. Опір повітря не враховувати.*

Розв'язання: Проілюструємо умову прикладу на рис. 4.16, з якого можна пересвідчитись, що координати кульки в рухомій системі відліку змінюються за законом

$$\begin{cases} x = -\upsilon t \\ y = -\dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{4.40}$$

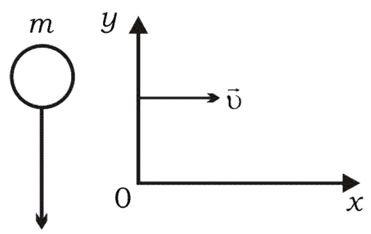


Рис. 4.16. До прикладу 4.8

Продиференціюємо кожне з рівнянь системи (4.40) за часом:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\upsilon \\ \dot{y} = -gt \end{cases}. \tag{4.41}$$

Система рівнянь (4.41) містить складові швидкості кульки на відповідні осі координат у рухомій системі відліку. Проекції вектора імпульсу кульки на ці осі координат знайдемо шляхом домноження складових швидкості на m:

$$\begin{cases} p_x = -m\upsilon \\ p_y = -mgt. \end{cases} \tag{4.42}$$

Момент імпульсу $\vec{L}$ кульки відносно точки O дорівнює

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}. \tag{4.43}$$

З урахуванням того, що розглядається двовимірний випадок руху у площині xy, величини z та p_z дорівнюють нулю:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(x \cdot p_y - y \cdot p_x). \tag{4.44}$$

Як і слід було очікувати із самого визначення моменту імпульсу (його напрямок має бути перпендикулярним до площини, у якій розташовані вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$), із (4.44) випливає, що вектор $\vec{L}$ має тільки одну вздовж осі Oz складову (вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$ розташовані у площині xy).

Величина моменту імпульсу дорівнює:

$$\left|\vec{L}\right| = x \cdot p_y - y \cdot p_x, \tag{4.45}$$

(4.40), (4.42) $\to$ (4.45):

$$\left|\vec{L}\right| = (-\upsilon t)\cdot(-mgt) - \left(-\frac{gt^2}{2}\right)\cdot(-m\upsilon) = \upsilon tmgt - \frac{gt^2 m\upsilon}{2} = \frac{gt^2 m\upsilon}{2}. \tag{4.46}$$

Важливим висновком, який можна зробити, аналізуючи (4.46), є квадратична залежність моменту імпульсу тіла від часу падіння. Як відомо, час падіння кульки з висоти h дорівнює $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, тоді

$$\left|\vec{L}\right| = \frac{gm\upsilon}{2} \cdot \frac{2h}{g} = m\upsilon h.$$

Оскільки кулька падає без початкової швидкості, тобто на момент початку руху момент імпульсу дорівнював нулю, шукана величина приросту моменту імпульсу ΔL дорівнює

$$\left|\Delta\vec{L}\right| = \left|\vec{L}\right| = m\upsilon h .$$

Отриманий результат нам не здається тривіальним хоча б через висновок про те, що величина приросту моменту імпульсу залежить не тільки від швидкості самого тіла, але й від швидкості рухомої системи, відносно якої визначається момент імпульсу. Більше того, якщо приріст моменту імпульсу пропорційний квадрату величини швидкості υ_y падіння тіла, виміряній у нерухомій системі відліку, ($\upsilon_y = \sqrt{2gh}$), то від швидкості рухомої системи ця величина залежить лінійно

$$\left|\Delta\vec{L}\right| = m\upsilon h = \frac{m}{2g}\cdot\upsilon\cdot\upsilon_y^2 .$$

Приклад 4.9. *Через блок перекинуто мотузку, до кінців якої прив'язані два вантажі з однаковими масами, що спираються на гладкі нахилені площини* (рис. 4.17). *Кути нахилу площин –* α *та* β. *Система прийшла в рух. Визначте швидкість руху вантажів залежно від пройденого одним із вантажів шляху* s .

Розв'язання: Вважатимемо мотузку, до кінців якої прив'язані вантажі, невагомою та непружною, а блок невагомим. Швидкість руху υ вантажів буде однаковою. Поверхні нахилених площин – гладенькі, тобто тертям нехтуємо. Швидкість руху системи буде змінюватись із часом руху (із пройденим шляхом). Знайдемо залежність υ від пройденого вантажем 1 (або 2) шляху s .

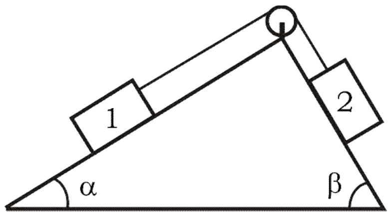


Рис. 4.17. До прикладу 4.9

Вантажі мають однакову масу, і тому будуть рухатись так, що вниз рушить вантаж з тієї площини, яка нахилена до горизонту під більшим кутом. (У випадку, який зображений на рис. 4.17, униз рушить вантаж 2 оскільки $\beta > \alpha$.

Пройшовши відстань s по нахиленій площині вантаж 1 просунеться вгору по вертикалі на висоту

$$\Delta h_1 = s\cdot\sin\alpha . \qquad (4.47)$$

За цей самий час вантаж 2 просунеться вгору по вертикалі на висоту

$$\Delta h_2 = s\cdot\sin\beta . \qquad (4.48)$$

Швидкість руху вантажів у цей час набуде значення $\upsilon(s)$, а кінетична енергія системи дорівнюватиме $E_к = 2\frac{m\upsilon^2}{2}$, де m – маса одного вантажу.

Під час руху системи потенціальна енергія одного вантажу (2) зменшується, другого (1) збільшується. Потенціальна енергія всієї системи за час, коли один із вантажів пройде шлях s, зміниться на величину

$$\Delta E_п = 2mg(\Delta h_1 - \Delta h_2) .$$

Закон збереження енергії для замкненої системи тіл, що розглядається, при зроблених допущеннях означає, що $E_к = \Delta E_п$ або

$$2mg(\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\frac{m\upsilon^2}{2} .$$

Звідси з урахуванням (4.47) та (4.48) маємо

$$\upsilon(s) = \sqrt{2gs(\sin\alpha - \sin\beta)} .$$

Приклад 4.10. *Два однакових візка 1 і 2, на кожному з яких перебуває по людині, рухаються без тертя за інерцією назустріч один одному по паралельних рейках. Коли візки порівнялись, з кожного з них на інший перестрибнула людина – у напрямку, перпендикулярному до руху візків. У результаті візок 1 зупинився, а швидкість візка 2 стала дорівнювати* $\vec{\upsilon}$. *Знайдіть швидкості візків до стрибків (*$\vec{\upsilon}_1$ *та* $\vec{\upsilon}_2$, *відповідно), якщо маса кожного візка без людини дорівнює* M , *а маса кожної людини* m .

Розв'язання: Розглянемо представлені в умові прикладу події на рис. 4.18 а,б,в. Спочатку обидва візка рухаються назустріч один одному (рис. 4.18, а). Судячи з аналізу умови, $\upsilon_1 \neq \upsilon_2$.

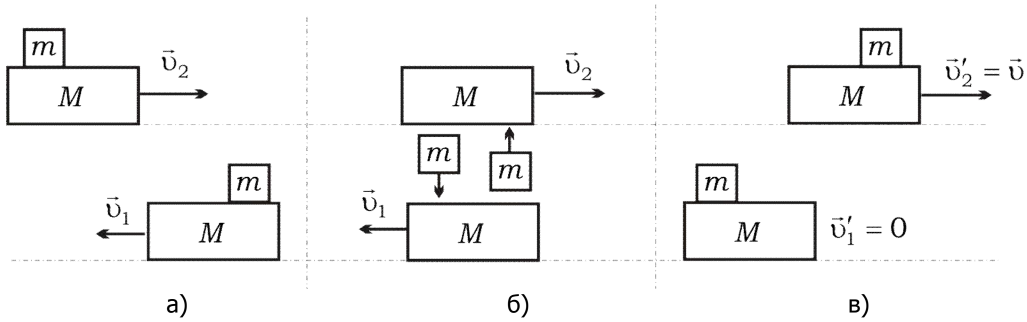


Рис. 4.18. До прикладу 4.10

У момент часу, якому відповідає рис. 4.18, б, відбувається перестрибування людей. У момент перестрибування візки деякий час порожні. Імпульс візка 1 при цьому дорівнює $M\vec{\upsilon}_1$: його швидкість не змінилась, оскільки стрибок відбувся в "напрямку, перпендикулярному до руху візків". Проте, коли на візок 1 людина вже перестрибнула, цей візок зупинився. Це означає, що імпульс людини з візка 2 $\left(-m\vec{\upsilon}_2\right)$ дорівнює імпульсу візка 1 без людини:

$$M\vec{\upsilon}_1 = -m\vec{\upsilon}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}_1 = -\frac{m}{M}\vec{\upsilon}_2\,. \tag{4.49}$$

У момент перестрибування імпульс візка 2 дорівнює $M\vec{\upsilon}_2$. Коли на цей візок потрапляє людина, імпульс якої дорівнює $m\vec{\upsilon}_2$, швидкість візка з людиною стає рівною $\vec{\upsilon}$, а імпульс $(M+m)\vec{\upsilon}$. Закон збереження імпульсу в цьому випадку набуває вигляду

$$M\vec{\upsilon}_2 + m\vec{\upsilon}_1 = (m+M)\vec{\upsilon}$$

або з урахуванням (4.49)

$$M\vec{\upsilon}_2 - m\frac{m}{M}\vec{\upsilon}_2 = (m+M)\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}_2\left(M - \frac{m^2}{M}\right) = (m+M)\vec{\upsilon}\,. \tag{4.50}$$

Із (4.50)

$$\vec{\upsilon}_2 = \frac{m+M}{M - \dfrac{m^2}{M}}\vec{\upsilon} = \frac{(m+M)M}{M^2 - m^2}\vec{\upsilon} = \frac{M}{M-m}\vec{\upsilon}\,. \tag{4.51}$$

Якщо підставити (4.51) у (4.49), то

$$\vec{\upsilon}_1 = -\frac{m}{M}\frac{M}{M-m}\vec{\upsilon} = -\frac{m}{M-m}\vec{\upsilon}\,.$$

Приклад 4.11. *Пліт масою M з людиною на ньому масою m нерухомо стоїть на поверхні озера. Відносно плота людина здійснює переміщення $\vec{\ell}'$ зі швидкістю $\vec{\upsilon}'(t)$ і зупиняється. Нехтуючи опором води, знайдіть переміщення $\vec{\ell}$ плота відносно берега.*

Розв'язання:[1]. Результуюча всіх зовнішніх сил, які діють на систему пліт–людина, дорівнює нулю: система замкнена. Тому імпульс цієї системи матеріальних тіл у процесі руху і в результаті переміщення людини на плоту не змінюється:

$$M\vec{\upsilon}_2 + m\vec{\upsilon}_1 = 0\,, \tag{4.52}$$

де $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ – швидкості людини та плота відносно берега, відповідно.

Швидкість людини відносно берега можна представити у вигляді

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}\,. \tag{4.53}$$

Якщо (4.53) $\rightarrow$ (4.52), то

---

[1] Цей самий приклад в розд. 2 розв'язаний методом використання властивостей центра мас системи тіл (приклад 2.5).

$$M\upsilon_2 + m(\upsilon_2 + \upsilon) = 0 \;\Rightarrow\; \upsilon_2 = -\frac{m}{m+M}\upsilon' . \qquad (4.54)$$

Домножимо ліву й праву частини (4.54) на dt і знайдемо зв'язок між елементарними переміщеннями плота $d\ell$ відносно берега та людини $d\ell'$ відносно плота:

$$\upsilon_2\, dt = -\frac{m}{m+M}\upsilon' dt \text{ або } d\vec{\ell} = -\frac{m}{m+M} d\vec{\ell}' .$$

Такий самий зв'язок існує і для скінченних переміщень

$$\vec{\ell} = -\frac{m}{m+M}\vec{\ell}' .$$

Із цього виразу, який є відповіддю до прикладу, видно, що переміщення плота $\vec{\ell}$ не залежить від характеру руху людини на плоту (закону $\upsilon'(t)$ і траєкторії руху).

5. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

5.1. Короткі теоретичні відомості

Основне рівняння динаміки матеріальної точки в неінерціальній системі відліку (НІСВ), яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ або з кутовим прискоренням $\vec{\beta}$ або/та переміщується поступально з прискоренням $\vec{a}_0$, має вигляд

$$\begin{aligned} ma_{\text{відн}} &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_{\text{К}} = ma - ma_e - ma_{\text{К}} = \\ &= \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]\right] - m\left[\vec{\beta}\vec{R}\right] - 2m\left[\vec{\omega}\vec{\upsilon}_{\text{відн}}\right], \end{aligned} \qquad (5.1)$$

де $\vec{F}$ – рівнодійна всіх сил, які діють на МТ з боку інших тіл (це сила, що реально існує як результат взаємодії тіл); $\vec{R}$ – радіус-вектор, який перпендикулярний осі обертання і характеризує положення матеріальної точки відносно цієї осі; $\vec{a}_{\text{відн}}$ – відносне прискорення (прискорення МТ у НІСВ); $\vec{F}_e$ – переносна сила $\vec{F}_e = -m\vec{a}_0 - m\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]\right] - m\left[\vec{\beta}\vec{R}\right]$; m – маса МТ.

До сил інерції належать:

- поступальна сила інерції, яка обумовлена поступальним прискореним рухом НІСВ:

$$\vec{F}_{\text{пост}} = -m\vec{a}_0, \tag{5.2}$$

де $\vec{a}_0$ – прискорення НІСВ відносно ІСВ;

- відцентрова сила інерції:

$$\vec{F}_{\text{відц}} = -m\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]\right]; \tag{5.3}$$

- сила Коріоліса:

$$\vec{F}_{\text{K}} = -2m\left[\vec{\omega}\vec{\upsilon}_{\text{відн}}\right], \tag{5.4}$$

де $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ – швидкість МТ у НІСВ, що обертається;

- сила інерції, пов'язана з нерівномірним (прискореним) обертанням НІСВ:

$$F_{\text{нерівн}} = -m\left[\vec{\beta}\,\vec{R}\right], \tag{5.5}$$

де $\vec{\beta}$ – кутове прискорення обертання НІСВ.

5.2. Методичні вказівки та поради

1. Основне рівняння динаміки (5.1) у НІСВ справедливе в припущенні, що (крім сил взаємодії з іншими тілами) на тіло діють сили інерції, які не обумовлені взаємодією з тілами.
2. Сили інерції залежать насамперед від характеру руху неінерціальної системи відліку. Тобто для знаходження сил інерції необхідно знати, як рухається НІСВ відносно інерціальної системи відліку.
3. Одна із сил інерції – сила Коріоліса існує в СВ, які обертаються з кутовою швидкістю ω, і діє тільки на тіла, що поступально рухаються відносно цієї НІСВ зі швидкістю $\upsilon_{\text{відн}}$. При цьому сила Коріоліса не діє у випадку, коли вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ паралельні.
4. При розв'язуванні задач, пов'язаних із рухом МТ, що відбувається, наприклад, на поверхні Землі, відповідаючи на запитання, у якому місці Землі (на полюсі, на екватор чи в будь-якій іншій точці Землі) сила Коріоліса найбільша, необхідно враховувати умови руху в місці події з даною географічною широтою для кожного конкретного випадку руху окремо. Єдиної відповіді на це запитання для всіх можливих випадків (маятник Фуко, відхилення тіла, що падає з башти, від її основи тощо) немає.
5. Сила Коріоліса $\vec{F}_{\text{K}}$, представлена у вигляді (5.4), має напрямок, який антипаралельний вектору, що утворюється в результаті векторного множення двох векторів $\vec{\omega}$ та $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$. Визначають напрямок вектора $\vec{F}_{\text{K}}$ за правилом "лівої руки": вектор

$\vec{\omega}$ входить у долонь, чотири складених разом, витягнутих пальці збігаються з напрямком $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$, а п'ятий відставлений палець покаже напрямок сили $\vec{F}_{\text{K}}$.

6. Типовою помилкою при розв'язуванні задач або у відповідях на запитання є пов'язування дії сил інерції з якимось із тіл. Необхідно пам'ятати, що сили інерції не мають свого носія, їх величина і напрямок дії залежать від параметрів тіла, на яке вони діють (від його маси, швидкості), а також від параметрів неінерціальної системи відліку (від її кутової швидкості, кутового та лінійного прискорень). Сили інерції не є мірою взаємодії тіл.

7. Використання сил інерції при аналізі руху в ІСВ є помилкою, оскільки в ІСВ сил інерції не існує.

8. Треба розрізняти відцентрову силу інерції, прикладену до тіла, що обертається або рухається по криволінійній траєкторії, яка існує в НІСВ, і доцентрову силу, пов'язану із взаємодією двох тіл (напр., тіла, що обертається, і мотузки, до якої воно прив'язане), яка існує в ІСВ. Природи цих сил принципово різні, вони існують у СВ різної природи. При цьому не слід забувати, що в ІСВ за III законом Ньютона, окрім доцентрової сили взаємодії, існує відцентрова сила взаємодії (див. запитання 5.3.17).

5.3. Запитання та відповіді

5.3.1. *Дайте визначення і назвіть властивості інерціальних і неінерціальних систем відліку.*

Визначення інерціальної та неінерціальної систем відліку розглянемо покроково:

Інерціальною системою відліку (ІСВ) називається така СВ, яка рухається прямолінійно рівномірно (без прискорення) або перебуває у стані спокою відносно інших ІСВ.

Неінерціальною системою відліку (НІСВ) називається така СВ, яка рухається з прискоренням або/та обертається.

ІСВ можна визначати як таку СВ, у якій виконуються закони геометрії Евкліда та існує єдиний час. І навпаки, НІСВ – це СВ, у якій не виконуються закони геометрії Евкліда та не існує єдиного часу.

Властивості (ознаки) ІСВ полягають в тому, що в них:

- справедливі всі три закони Ньютона (напр., I закон у такому формулюванні: "Тіло, на яке не діють інші тіла, тобто і сили, які є мірою взаємодії цих тіл, перебувають у стані спокою або рухається прямолінійно й рівномірно");
- сили обумовлені взаємодією тіл (сил інерції в ІСВ не існує);
- окрім неізольованих (незамкнених) СМТ існують ізольовані (замкнені) СМТ, тобто такі, щодо яких зовнішні сили не діють.

Властивості (ознаки) НІСВ полягають у тому, що в них:

- не справедливі I та III закони Ньютона, а II закон для НІСВ модифікований;

- наявні сили, причина виникнення яких не пов'язана із взаємодією конкретних тіл, – сили інерції;
- не існує ізольованих систем МТ, оскільки в НІСВ завжди діють зовнішні сили у вигляді сил інерції, окрім часткових випадків, коли сили інерції взаємно компенсуються;
- прискорений рух, як і наявність поля тяжіння, впливає на хід синхронізованих годинників.

5.3.2. *Сили інерції, як відомо, визначаються властивостями СВ. Чи залежать сили інерції від властивостей самої МТ?*

Сили інерції не є результатом дії інших тіл. Сили інерції є результатом прояву властивостей СВ $\left(\vec{a}_0, \vec{\omega}, \vec{\beta}\right)$. Однак сили інерції (їх величина і напрямок) залежать і від властивостей МТ $\left(m,\ \upsilon_{\text{відн}}, R\right)$.

5.3.3. *Чи можна застосувати принцип відносності Галілея до неінерціальних систем відліку (НІСВ)?*

Принцип відносності Галілея стверджує, що ніякими механічними дослідами не можна відрізнити одну ІСВ від іншої, наприклад, систему відліку, що рухається прямолінійно рівномірно, від СВ, що перебуває в стані спокою. Таким чином, принцип відносності Галілея стосується тільки ІСВ. Для НІСВ принцип відносності Галілея застосовувати не можна: НІСВ легко розрізнити та класифікувати за існуванням і властивостями сил інерції.

5.3.4. *Чи виконуються в НІСВ закони Ньютона?*

І закон Ньютона дає визначення ІСВ і НІСВ. ІІ закон Ньютона в НІСВ має свої особливості, пов'язані з урахуванням дії сил інерції. Кажуть, що в НІСВ користуються модифікованим ІІ законом Ньютона. В неінерціальних системах відліку ІІІ закон Ньютона застосувати не можна, оскільки в НІСВ існують сили інерції, які не мають свого тіла-носія. В ІСВ ІІІ закон Ньютона характеризує взаємодію між двома тілами, мірою якої є сили взаємодії. У НІСВ сили інерції характеризують СВ і частково тіло, яке відчуває вплив з боку СВ у вигляді сил інерції.

5.3.5. *Чи можна використовувати основні закони руху (ІІ закон Ньютона, рівняння моментів тощо) для НІСВ?*

Використання основних законів руху в НІСВ можливе, але після їх відповідної модифікації, яка полягає в тому, що до сил взаємодії додають ще й сили інерції. Прискорення МТ обирається таким, яке фактично існує в НІСВ і пояснюється силами взаємодії лише частково. При цьому вводиться "відносне" прискорення $\vec{a}_{\text{відн}}$ – прискорення відносно НІСВ).

Наприклад, ІІ закон Ньютона набуває вигляду

$$m\,\vec{a}_{\text{відн}} = \vec{F}_{\text{зовн}} + \vec{F}_{\text{інерц}} \text{ або } \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{зовн}} + \sum \vec{F}_{\text{інерц}}\,, \tag{5.6}$$

а рівняння моментів

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{зовн}} + \sum \vec{M}_{\text{інерц}}\,, \qquad (5.7)$$

де $\vec{F}_{\text{зовн}}$ – зовнішні сили, які обумовлені взаємодією тіл; $\vec{F}_{\text{інерц}}$ – сили інерції; $\vec{M}_{\text{зовн}}$ та $M_{\text{інерц}}$ – моменти вказаних сил.

5.3.6. *Чи можна використовувати закони збереження в неінерціальних системах відліку?*

Відомо, що закони збереження не виконуються в неізольованих системах МТ. Сили інерції належать до зовнішніх сил, тоді НІСВ є неізольваними системами. Через це в НІСВ закони збереження не виконуються.

5.3.7. *Якої форми набуває закон зміни механічної енергії в НІСВ?*

Закон зміни повної механічної енергії при переміщенні МТ з положення 1 у положення 2 у НІСВ набуває вигляду

$$E_2 - E_1 = A_{12\ \text{дисип}} + A_{12\ \text{інерц}}\,, \qquad (5.8)$$

де $A_{12\ \text{інерц}}$ – робота сил інерції; $A_{12\,\text{дисип}}$ – робота дисипативних (неконсервативних) сил.

5.3.8. *Доведіть, що відцентрова сила інерції є консервативною силою.*

Відцентрова сила інерції $\vec{F}_{\text{відц}} = m\omega^2\vec{R}$. Робота цієї сили дорівнює

$$A_{12\,\text{відц}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{відц}}\, d\vec{r} = m\omega^2 \int_1^2 \vec{R}\, d\vec{r}\ .$$

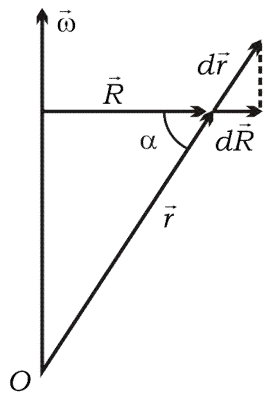


Рис. 5.1. До запитання 5.3.8

Із рис. 5.1 видно, що проекція вектора $d\vec{r}$ на напрямок вектора $\vec{R}$ дорівнює dR, де dR – приріст модуля вектора $\vec{R}$. Величина $dR = dr \cdot \cos\,\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{R}$ та $\vec{r}$. З іншого боку, скалярний добуток двох векторів дорівнює $\vec{R} \cdot d\vec{r} = R \cdot dr \cdot \cos\,\alpha$.

Таким чином,

$$\vec{R}\,d\vec{r} = R\,dR = d\left(\frac{R^2}{2}\right) \Rightarrow A_{12\,\text{відц}} = m\omega^2\int_1^2 d\left(\frac{R^2}{2}\right) = m\omega^2\left(\frac{R_2{}^2}{2} - \frac{R_1{}^2}{2}\right). \qquad (5.9)$$

Як бачимо, робота відцентрової сили не залежить від шляху, а залежить від положення точок, між якими здійснюється переміщення МТ, тобто відцентрова сила інерції є консервативною силою.

5.3.9. *Чи можна використати сили інерції, наприклад, у приладобудуванні?*

Так, можна. Наприклад, вимірювання сил інерції дає можливість виміряти абсолютне прискорення МТ відносно ІСВ. На цій основі створені інерціальні навігаційні прилади, які називаються акселерометрами. Існує багато інших застосувань сил інерції в техніці.

5.3.10. *Дайте визначення відносного і переносного рухів.*

Рух тіла відносно рухомої СВ називається відносним рухом, а рух рухомої СВ відносно нерухомої СВ – переносним рухом.

5.3.11. *Що таке абсолютна, відносна та переносна швидкості? Який сенс введення переносної швидкості в НІСВ? Як пов'язані між собою ці види швидкостей?*

Абсолютна швидкість – це швидкість МТ відносно нерухомої СВ. Відносна швидкість – це швидкість МТ відносно рухомої СВ. Переносна швидкість – це швидкість рухомої СВ відносно нерухомої СВ.

Поняття абсолютної, відносної та переносної швидкостей широко використовуються при розгляді властивостей НІСВ. Наприклад, якщо рухома СВ – НІСВ, то переносна швидкість – це швидкість такої точки НІСВ, через яку в даний момент часу проходить МТ, рух якої розглядається. Переносна швидкість у НІСВ $\vec{\upsilon}_e = \vec{\upsilon}_{\text{а}} - \vec{\upsilon}_{\text{відн}}$, де $\vec{\upsilon}_{\text{а}}$ – абсолютна швидкість (швидкість МТ в ІСВ); $\upsilon_{\text{відн}}$ – відносна швидкість (швидкість МТ у НІСВ). Переносна швидкість характеризує НІСВ, а не МТ, що рухається. Переносна швидкість дорівнює $\vec{\upsilon}_e = \vec{\upsilon}_0 + \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$, де $\vec{\upsilon}_0$ – швидкість поступального руху НІСВ; $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання НІСВ; $\vec{r}$ – радіус-вектор тієї точки НІСВ, через яку в даний момент часу проходить МТ, рух якої розглядається.

5.3.12. *Що таке переносне прискорення?*

Переносне прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \left[\vec{\beta}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right]$ – це прискорення тієї точки НІСВ, через яку в даний момент часу проходить МТ, рух якої розглядається, Аналіз переносного прискорення показує, що $\vec{a}_0$ – прискорення поступального руху НІСВ; $\left[\vec{\beta}\vec{r}\right]$ – прискорення, зумовлене нерівномірним (прискореним) обертанням НІСВ; $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ – кутове прискорення НІСВ; $\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right]$ – доцентрове прискорення (з векторного добутку можна переконатись, що вектор $\vec{a}_{\text{доц}}$ направлений до миттєвої осі оберання).

5.3.13. *Яким співвідношенням пов'язані між собою абсолютне ($\vec{a}_{\text{а}}$), відносне ($\vec{a}_{\text{відн}}$) і переносне ($\vec{a}_e$) прискорення?*

Усі три прискорення пов'язані між собою співвідношенням: $\vec{a}_{\text{а}} = \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{відн}} + \vec{a}_{\text{К}}$. Як бачимо, у це співвідношення, якщо його порівняти з виразом для переносної швидкості, "втрутилось" ще одне прискорення ($\vec{a}_{\text{К}}$) – прискорення Коріоліса.

5.3.14. *Що таке теорема Коріоліса і в чому її фізичний зміст?*

Із того, що $\vec{a}_{\text{а}} = \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{відн}} + \vec{a}_{\text{К}}$ випливає $\vec{a}_{\text{відн}} = \vec{a}_{\text{а}} - \vec{a}_e - \vec{a}_{\text{К}}$: абсолютне прискорення дорівнює векторній сумі переносного, відносного та коріолісового прискорень. Це і є теорема Коріоліса. Окрім того, що вона пов'язує між собою абсолютне $\vec{a}_{\text{а}}$, відносне $\vec{a}_{\text{відн}}$ і переносне $\vec{a}_e$ прискорення, у ній стверджується, що до відносного прискорення входить ще один доданок ($\vec{a}_{\text{К}}$) – прискорення Коріоліса (на відміну від відносної швидкості $\vec{\upsilon}_{\text{відн}} = \vec{\upsilon}_{\text{а}} - \vec{\upsilon}_e$, яка не містить інформацію про можливість існування сили інерції Коріоліса). Цей доданок відображає силу Коріоліса, яка виникає, коли тіло рухається поступально відносно НІСВ, що обертається. Величина $\vec{a}_{\text{К}} = 2\left[\vec{\omega}\vec{\upsilon}_{\text{відн}}\right] \Rightarrow \vec{F}_{\text{К}} = -m\vec{a}_{\text{К}}$.

5.3.15. *Коли сила Коріоліса дорівнює нулю?*

Сила Коріоліса, яка діє на МТ масою m, дорівнює нулю у випадках, коли:

- немає обертання СВ, у якій розглядається рух МТ: $\omega = 0$;
- немає поступального руху МТ відносно НІСВ: $\upsilon_{\text{відн}} = 0$;
- кут між вектором кутового прискорення $\vec{\omega}$ і вектором $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ дорівнює нулю або π (ці вектори колінеарні).

5.3.16. *Чи можна стверджувати, що сила Коріоліса найбільша на полюсі Землі? Чому?*

Різні випадки, що відбуваються, наприклад, на поверхні Землі, і пов'язані з дією сили Коріоліса, потребують індивідуального підходу до розгляду напрямків векторів $\vec{\omega}$ та $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$. Тому, відповідаючи на запитання, у якому місці Землі (на полюсі чи на екваторі) сила Коріоліса більша, необхідно враховувати умови руху в місці події з даною географічною широтою для кожного конкретного випадку окремо. Наприклад, на полюсі прояв сили Коріоліса на маятник Фуко максимальний, а на відхилення тіла, що падає з вежі, – нульовий.

5.3.17. *Чим відрізняється відцентрова сила $F_{\text{відц}}$ від доцентрової сили $F_{\text{доц}}$?*

Доцентрова сила $F_{\text{доц}}$ – реальна сила. Вона є мірою взаємодії тіл, має носія, прикладена до МТ, направлена до центра кривизни. Сила $F_{\text{доц}}$ існує в ІСВ. Окрім того, в ІСВ згідно з ІІІ законом Ньютона поряд з доцентровою силою $F_{\text{доц}}$ має існувати ще одна реальна сила, яку називають відцентровою силою взаємодії $F_{\text{відц}}$. Відцентрова сила взаємодії та доцентрова сила взаємодії в ІСВ пов'язані між собою співвідношенням $\vec{F}_{\text{відц}} = -\vec{F}_{\text{доц}}$, $\left(\left|\vec{F}_{\text{відц}}\right| = \left|\vec{F}_{\text{доц}}\right|\right)$.

Наприклад, у випадку обертання тіла, що прив'язане до мотузки, навколо деякої точки, в ІСВ діють такі сили взаємодії: $F_{\text{доц}}$ – це сила, яка діє на тіло з боку мотузки; $F_{\text{відц}}$ – це сила, яка діє на мотузку з боку тіла (сила натягу мотузки). Якщо цей випадок обертання тіла розглядати в НІСВ, пов'язаній із цим тілом, то кажуть про існування тільки відцентрової сили інерції $F_{\text{відц}}$. Вона не є мірою взаємодії тіл, не має носія, хоча і прикладена до матеріального тіла. Відцентрова сила інерції не має своєї пари – сили, яка розглядається як протидіюча їй сила. На відцентрову силу інерції, як і на всі сили інерції, не поширюється ІІІ закон Ньютона. Відцентрова сила інерції, як і відцентрова сила взаємодії, направлена вздовж лінії, що проходить через тіло та центр кривизни траєкторії руху.

Звернемо увагу на відмінність відцентрової сили інерції та відцентрової сили взаємодії: відцентрова сила інерції прикладена до тіла, що обертається, а відцентрова сила взаємодії прикладена з боку тіла, що обертається, до іншого тіла, наприклад, до мотузки, до якої воно прив'язане.

5.3.18. *Спробуйте назвати відомі вам фізичні явища, що спостерігаються на Землі, у природі, у повсякденному житті, які обумовлені силами інерції.*

Проявів дії сил інерції дуже багато. Ось деякі з них:

- прискорений рух пасажирів і багажу в транспорті, який гальмується, прискорюється або повертає;
- розмиття правих берегів річок у північній напівкулі і лівих берегів – у південній, яке залежить від напрямку і швидкості течії;
- демонстрація властивостей маятника Фуко;
- доцільність наближення місць запуску космічних апаратів до екватора;
- відхилення місця падіння предметів, що падають з відносно великої висоти;
- викликана дією сили Коріоліса корекція прицільної стрільби в далекобійній артилерії та траєкторії польоту балістичних ракет;
- відхилення виска від напрямку на центр Землі під дією відцентрової сили, яке максимальне в місцях з географічною широтою $\varphi = 45^0$;

5.3.19. *Чи можна вважати земну поверхню ІСВ?*

У багатьох випадках земну поверхню можна вважати ІСВ. Однак існує низка явищ, пояснити які в межах ІСВ важко або неможливо. Для цього слід залучати властивості НІСВ. До таких явищ належать, наприклад, зміна площини коливань маятника Фуко тощо (див. запитання 5.3.18).

5.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1. *Гвинтівку навели на вертикальну лінію на мішені, яка розташована точно в північному напрямку, і вистрілили. Нехтуючи опором повітря, знайдіть, на скільки сантиметрів і в який бік відхилиться куля, яка влучає в мішень, відносно вертикальної лінії на ній. Постріл відбувається в горизонтальному напрямку на широті* $\varphi = 60^0$. *Швидкість кулі* $\upsilon = 900$ м/с. *Відстань до мішені* $s = 1$ км.

Розв'язання: На кулю в системі відліку, що пов'язана із Землею, буде діяти сила Коріоліса $F_К = 2m\upsilon\omega \cdot \sin\left(\vec{\upsilon}\,\hat{}\,\vec{\omega}\right)$, де m – маса кулі; ω – кутова швидкість обертання Землі; $\left(\vec{\upsilon}\,\hat{}\,\vec{\omega}\right)$ – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ та $\vec{\omega}$. За правилом "лівої руки" можна пересвідчитись, що сила Коріоліса діє на схід (рис. 5.2).

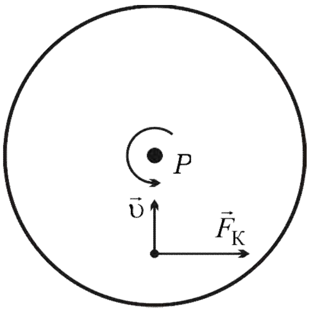


Рис. 5.2. Визначення напрямку дії сили Коріоліса за правилом "лівої руки" (погляд на Землю вздовж осі обертання, яка проходить через Полюс – точку *P*), до прикладу 5.1

Із рис. 5.3 видно, що кут $\left(\vec{\upsilon}\,\hat{}\,\vec{\omega}\right)$ дорівнює куту φ, який характеризує географічну широту, тобто $F_К = 2m\upsilon\omega \cdot \sin\varphi$. На полюсі $\vec{\upsilon} \perp \vec{\omega}$, $\varphi = 90^0$, а сила Коріоліса $F_К = 2m\upsilon\omega$. На екваторі вектори $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\omega}$ – паралельні, тому $F_К = 0$. Для випадку, який розглядається, $F_К \sim \sin\varphi$.

Іншою силою інерції – відцентровою силою, яка діє на кулю, що летить до мішені, нехтуємо. Прискорення, якого набуває куля під дією сили Коріоліса, дорівнює

$$a_К = \frac{F_К}{m} = 2\upsilon\omega \cdot \sin\varphi . \tag{5.12}$$

За час t руху кулі остання під дією сили Коріоліса відхилиться щодо вертикальної лінії на мішені на відстань

$$h_К \approx \frac{a_К t^2}{2}. \tag{5.13}$$

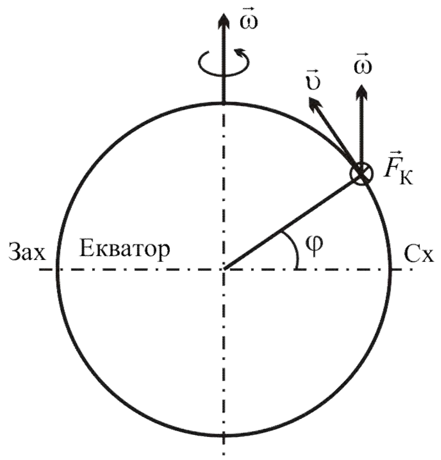


Рис. 5.3. До прикладу5.1

З іншого боку, час t перебування кулі в польоті можна знайти також з умови її руху в напрямку пострілу від гвинтівки до мішені:

$$t = \frac{s}{\upsilon}. \tag{5.14}$$

Підставивши (5.12) і (5.14) у (5.13), отримуємо

$$h_К \approx \frac{2\upsilon\omega s^2 \cdot \sin\varphi}{\upsilon^2 \cdot 2} = \frac{\omega \cdot s^2}{\upsilon}\sin\varphi .$$

З урахуванням того, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а $T = 24 \text{год} = 8400 \text{с} \;\; 86400\text{с}$, остаточно маємо

$$h_К \approx \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^6}{8400 \cdot 900} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}07 \text{м} = 7 \text{см} \;\; 86400 \quad \text{та} \approx 7\text{см}$$

Приклад 5.2. *Гладенький горизонтальний диск обертається з кутовою швидкістю* $\omega = 5{,}0 \text{рад/с}$ *навколо вертикальної осі, яка проходить через його центр. У центрі диска розмістили невелике тіло масою* $m = 60$ г *і надали йому поштовхом горизонтальної швидкості* $\upsilon_0 = 2{,}6$ м/с. *Знайдіть модуль сили Коріоліса, що діє на тіло в СВ, пов'язаній із диском, через час* $t = 0{,}5$ с *після початку руху тіла.*

Розв'язання: Тертя немає ("гладенький" диск). Відносно диска (у НІСВ) тіло рухається прямолінійно зі швидкістю υ_0 та обертається в протилежний від напрямку обертання диска бік (рис. 5.4). Вектор лінійної швидкості $\vec{\upsilon}_{об}$ обертання тіла відносно диска дорівнює $\vec{\upsilon}_{об} = \left[(-\vec{\omega})\vec{r}\,\right] \equiv \left[\vec{r}\,\vec{\omega}\right]$. Вектор $\vec{\upsilon}_0$ у будь-якій точці траєкторії руху тіла направлений уздовж радіус-вектора $\vec{r}$.

Модуль вектора $\vec{\upsilon}_{об}$ дорівнює

$$\upsilon_{об} = \omega r = \omega\left(\upsilon_0 t\right). \qquad (5.15)$$

Як видно з рис. 5.4, результуючу лінійну швидкість υ, з якою тіло рухається відносно диска, можна знайти зі співвідношення $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + \upsilon_{об}^2$. З урахуванням (5.15) швидкість υ дорівнює

$$\upsilon = \upsilon_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2} \; . \qquad (5.16)$$

У випадку, коли кут між векторами $\vec{\upsilon}$ та $\vec{\omega}$ дорівнює 90^0, як в цьому прикладі, сила Коріоліса $F_К = 2m\omega\upsilon = 2m\omega\upsilon_0\sqrt{1+\left(\omega t\right)^2}$. Таким чином,

$$F_К = 2 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 2{,}6\sqrt{1 + 25 \cdot 25 \cdot 10^{-2}} = 4{,}2 \text{ Н} .$$

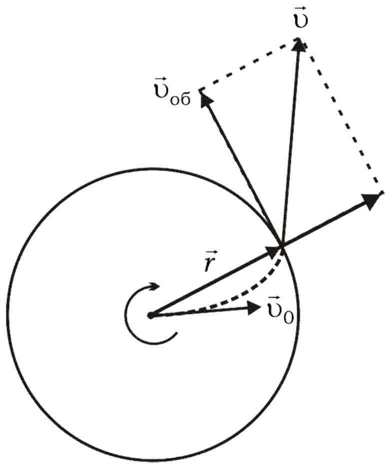


Рис. 5.4. До прикладу 5.2
Дорисовать вектор ве нулевое

Приклад 5.3. *Горизонтальний диск обертається з кутовою швидкістю* $\omega = 6{,}0$ рад/с *навколо вертикальної осі, яка проходить через його центр. По одному із діаметрів диска рухається невелике тіло масою* $m = 0{,}5$ кг *з постійною відносно диска швидкістю* $\upsilon = 50$ см/с. *Які сили діють на тіло? Знайдіть силу, з якою диск діє на це тіло в момент, коли тіло перебуває на відстані* $r_0 = 30$ см *від осі обертання. З якою силою в цей момент тіло тисне на диск?*

Розв'язання: На рис. 5.5 наведено схему розміщення тіла масою m на диску, що обертається, і позначена відстань $r(t)$ від центра диска до тіла, що змінюється із часом.

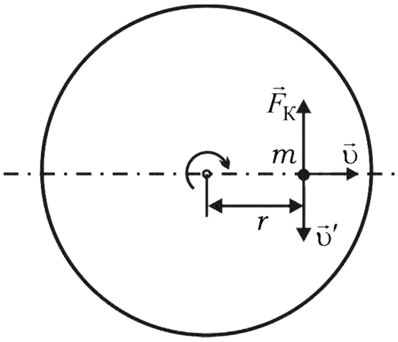


Рис. 5.5. Схема руху тіла масою m на диску, що обертається, до прикладу 5.3

Звернемо увагу на дві обставини, які випливають з аналізу умови задачі:

По-перше, у запитанні йдеться про те що треба знайти силу, з якою "диск діє на тіло". Це означає, що ця сила не належить до сил інерції: останні (за визначенням) прикладаються до тіл, але не мають носія, вони пов'язані з властивостями СВ.

По-друге, як сказано в умові, тіло "рухається з постійною відносно диска швидкістю".

Проаналізуємо, які сили діють у двох системах відліку: в ІСВ, яка пов'язана, наприклад, із поверхнею стола, на якому обертається диск, і в неінерціальній системі відліку (НІСВ), яка пов'язана з самим диском. В ІСВ на тіло діють такі сили: сила тяжіння (вага тіла) $\vec{P} = m\vec{g}$; сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$; сила $\vec{N}$ реакції диска на тіло $(\vec{N} = -\vec{P})$ і доцентрова сила взаємодії $\vec{F}_{\text{доц}}$, яка діє з боку тіла на диск. У НІСВ, окрім сил $\vec{F}_g$, $\vec{F}_{\text{тер}}$, $\vec{N}$, на тіло діють сили інерції: сила Коріоліса $F_К = 2m\omega\upsilon$ і відцентрова сила інерції $F_{\text{відц}} = m\omega^2 r$.

Зауважимо, що введення до розгляду і врахування сили тертя не випадкове. Це необхідно було зробити через той факт, взятий з умови, що тіло рухається вздовж діаметра диска з постійною відносно диска швидкістю $\vec{\upsilon}$. Це означає, що на тіло, яке рухається по діаметру диска, діє не тільки відцентрова сила $\vec{F}_{\text{відц}}$, але й сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, яка врівноважує відцентрову силу $\vec{F}_{\text{тер}} = -\vec{F}_{\text{відц}}$. Якщо б $F_{\text{тер}} = 0$ і діяла б тільки відцентрова сила, то швидкість υ тіла змінювалась би при зміні координати r.

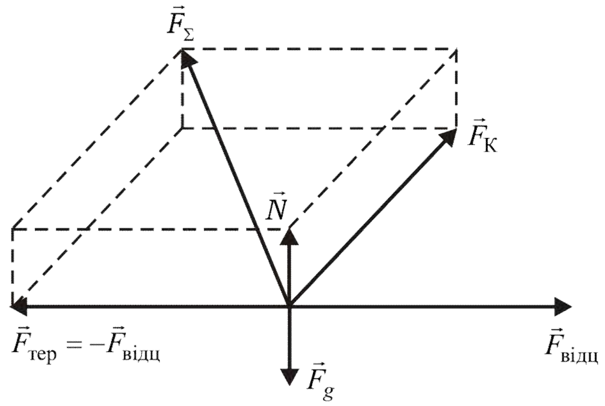


Рис. 5.6. Утворення результуючої сили F_Σ, що діє на тіло з боку диска в НІСВ, до прикладу 5.3

Сила тертя має свій носій – диск. Ця сила діє на тіло з боку диска і для даного прикладу дорівнює $F_{тер}(r) = F_{відц} = \dfrac{m\upsilon'^2}{r^2} = m\omega^2 r$, де $\upsilon'(r)$ – лінійна швидкість тіла в ІСВ. Ця швидкість виникає внаслідок обертання диска зі швидкістю ω. Швидкість руху тіла по диску $\upsilon = \text{const} = 50$ см/с не залежить від координати r. Швидкість $\upsilon'(r)$ змінює свою величину при зміні координати r так, що: при $r = 0$ величина $\upsilon'(0) = 0$; при $r_0 = 30$ см величина $\upsilon' = \omega \cdot r_0 = 180$ см/с .

Результуюча сила F_Σ, що діє на тіло з боку диска, у НІСВ складається з трьох сил (рис. 5.6), які взаємно перпендикулярні одна до одної: сили реакції диска на тіло $\vec{N} = -\vec{P} = -m\vec{g}$; сили тертя $F_{тер}(r) = m\omega^2 r$ і сили Коріоліса $F_К = 2m\omega\upsilon$:

$$F_\Sigma = \sqrt{N^2 + F_{тер}^2 + F_К^2} = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r_0^2 + (2\upsilon\omega)^2} .$$

Напрямок $\vec{F}_\Sigma$ не збігається з напрямками ні однієї з перелічених вище сил. Величина вектора $\vec{F}_\Sigma$ дорівнює

$$F_\Sigma = 0,5\sqrt{9,8^2 + 1296 \cdot 9 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 25 \cdot 10^{-2} \cdot 36} \approx 7,9\,\text{Н}$$

Приклад 5.4. *Горизонтально розташований гладенький стрижень АВ обертається з кутовою швидкістю* $\omega = 2,0$ рад/с *навколо вертикальної осі, яка проходить через кінець стрижня – точку А. По стрижню вільно сковзає муфта масою* $m = 0,5$ кг, *яка рухається із точки А з початковою швидкістю* $\upsilon_0 = 1,0$ м/с. *Знайдіть силу Коріоліса, що діє на муфту, у момент, коли муфта опинилась на відстані* $r = 50$ см *від осі обертання.*

Розв'язання: Розв'язуватимемо в НІСВ, яка пов'язана зі стрижнем, що обертається (рис. 5.7).

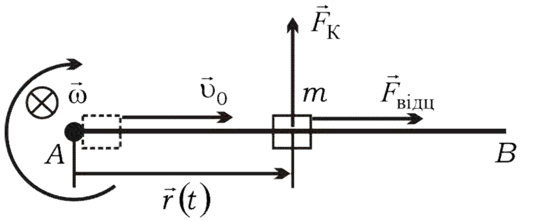


Рис. 5.7. До прикладу 5.4, (вигляд зверху)

Швидкість муфти в міру її віддалення від осі обертання стрижня змінюється (збільшується). Знайдемо залежність $\upsilon(r)$. На муфту під час її руху по стрижню діє відцентрова сила, яку буде характеризувати відцентрове прискорення

$$a_{\text{відц}} = \frac{d\upsilon}{dt} = \omega^2 r \;\Rightarrow\; d\upsilon = \omega^2 r \cdot dt\,. \tag{5.17}$$

З іншого боку, за визначенням,

$$\upsilon = \frac{dr}{dt} \;\Rightarrow\; dt = \frac{dr}{\upsilon}\,. \tag{5.18}$$

Підставимо (5.18) у (5.17): $d\upsilon = \omega^2 r \cdot \dfrac{dr}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon \cdot d\upsilon = \omega^2 r \cdot dr$. У результаті інтегрування останнього виразу маємо $\dfrac{1}{2}\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}\omega^2 r^2 + C$.

Для відшукання сталої інтегрування C скористаємось початковими умовами: для $r = 0$ величина $\upsilon = \upsilon_0 \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}\upsilon_0^2$. Таким чином,

$$\upsilon^2 = \omega^2 r^2 + \upsilon_0^2 \Rightarrow \upsilon(r) = \sqrt{(\omega r)^2 + \upsilon_0^2}\,.$$

Для випадку $\vec{\upsilon} \perp \vec{\omega}$, як у цьому прикладі, і з урахуванням знайденого значення $\upsilon(r)$ сила Коріоліса дорівнює

$$F_{\text{К}} = 2m\omega\upsilon = 2m\omega\sqrt{(\omega r)^2 + \upsilon_0^2}\,.$$

Таким чином, $F_{\text{К}} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2\sqrt{(2 \cdot 0{,}5)^2 + 1} = 2{,}8\ \text{Н}$.

Приклад 5.5. *Людина масою $m = 60\,\text{кг}$ рухається рівномірно по периферії горизонтальної круглої платформи радіуса $R = 3{,}0\,\text{м}$, яка обертається з кутовою швидкістю $\omega = 1{,}0$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. Знайдіть горизонтальну складову сили, що діє на людину з боку платформи, якщо результуюча сил інерції, прикладених до людини в СВ "платформа", дорівнює нулю.*

Розв'язання: Із відомих сил інерції найбільш суттєвий внесок у НІСВ, пов'язаній з платформою, будуть здійснювати сила Коріоліса та відцентрова сила. Відцентрова сила завжди направлена вздовж радіуса кола від його центра (рис. 5.8).

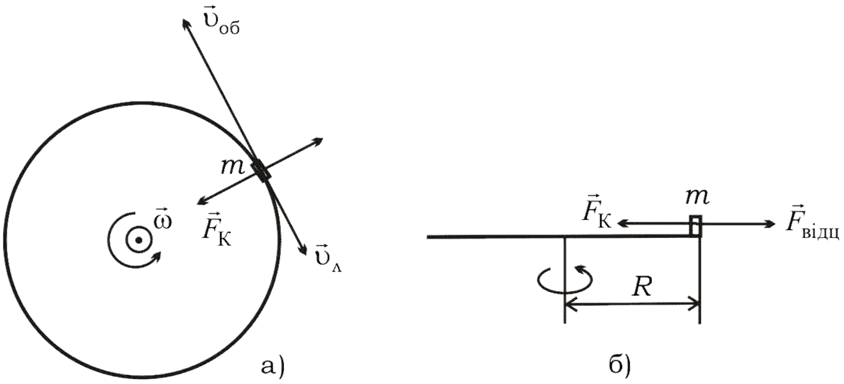


Рис. 5.8. До прикладу 5.5: схема досліду, вигляд зверху (а) і збоку (б)

Якщо сили інерції скомпенсовані, то сила Коріоліса також має бути направлена вздовж радіуса кола, але до його центра, і за величиною дорівнювати величині сили інерції: $\left|\vec{F}_К\right| = \left|\vec{F}_{відц}\right|$ (рис. 5.8). За допомогою правила "лівої руки" можна знайти напрямок руху людини $\left(\vec{\upsilon}_л\right)$: для визначеного напрямку $\vec{F}_К$ рух людини на платформі має бути протилежним до напрямку її обертання (рис. 5.8).

Сили інерції дорівнюють $F_К = 2m\omega\upsilon_л$; $F_{відц} = m\omega^2 R$. Із рівності сил інерції випливає, що $2m\omega\upsilon_л = m\omega^2 R \Rightarrow \upsilon_л = \dfrac{\omega R}{2} = \dfrac{\upsilon_{об}}{2}$. Таким чином, щоб компенсувати відцентрову силу, що діє на людину, їй необхідно рухатись у напрямку, протилежному від напрямку руху платформи, зі швидкістю у два рази меншою від лінійної швидкості точки на периферії платформи.

Сила, що діє на людину з боку платформи, діє лише в ІСВ, пов'язаній, наприклад, з лабораторією, де проводиться дослід. В ІСВ людина відносно платформи рухається зі швидкістю $\upsilon_{відн} = \upsilon_{об} - \upsilon_л$. З урахуванням отриманого вище маємо

$$\upsilon_{відн} = \omega R - \upsilon_л = \omega R - \frac{\omega R}{2} = \frac{1}{2}\omega R. \qquad (5.19)$$

Яка природа горизонтальної складової сили, що діє на людину з боку платформи в ІСВ? Згідно з ІІІ законом Ньютона платформа діє на людину із силою, що дорівнює за величиною та протилежною за напрямком силі, з якою людина діє на платформу. Єдиною силою, яка діє з боку платформи на людину в горизонтальному напрямку, є доцентрова сила взаємодій

$$F_{відц.л} = \frac{m\upsilon_{відн}}{R} = \frac{m\left(\omega R/2\right)^2}{R} = \frac{m\omega^2 R}{4}.$$ Відн шв в квадр

Це і є відповідь. Таким чином,

$$F_{\text{відц.л}} = \frac{60 \cdot 1 \cdot 3}{4} = 45\,\text{Н} .$$

Зауважимо, що з боку платформи на людину в ІСВ діє ще одна, досить велика $(\sim 600\,\text{Н})$ сила реакції платформи на вагу людини. Проте ця сила не має горизонтальної складової й до уваги у відповіді братись не може.

6. РОБОТА, ЕНЕРГІЯ, ПОТУЖНІСТЬ. ПОТЕНЦІАЛЬНЕ ПОЛЕ СИЛ

6.1. Короткі теоретичні відомості

- Робота сили F на відрізку прямолінійного шляху s дорівнює

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha = F_s \cdot s , \tag{6.1}$$

де α – кут між напрямками сили $\vec{F}$ і прямої, уздовж якої відбувається переміщення; F_s – проекція вектора сили на напрямок руху.

- Якщо матеріальна точка під дією сили $\vec{F}$ здійснює переміщення між точками 1 та 2 по криволінійній траєкторії (рис. 6.1), то, вважаючи силу незмінною в межах елементарного переміщення $d\vec{r}$, елементарна робота сили F з переміщення $d\vec{r}$ дорівнює

$$\Delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = F_s \cdot dr . \tag{6.2}$$

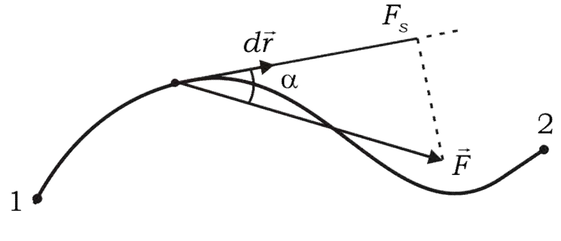


Рис. 6.1. До визначення роботи сили $\vec{F}$

- Сумуючи (інтегруючи) вираз (6.2) за всіма елементарними ділянками шляху від точки 1 до точки 2, знайдемо роботу сили $\vec{F}$ з даного переміщення

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_s \cdot ds . \tag{6.3}$$

Одиниця вимірювання роботи в системі СІ – джоуль (Дж).

- Для характеристики швидкості, з якою здійснюється робота, вводять потужність сили. Потужність – це робота сили, яка виконується за одиницю часу:

$$P = \frac{A}{t}. \quad (6.4)$$

Одиниця вимірювання потужності в системі СІ – ват (Вт).

- Якщо напрямки сили і переміщення збігаються, то потужність

$$P = F \cdot \upsilon, \quad (6.5)$$

де υ – швидкість переміщення матеріального тіла.

- При довільному куті між силою і переміщенням потужність записується через скалярний добуток

$$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} = F \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha .$$

- При змінному куті між силою і переміщенням вводять поняття миттєвої потужності

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (6.6)$$

- Знаючи потужність сили, можна знайти роботу, яку виконує ця сила за проміжок часу t:

$$A = \int_0^t P \cdot dt . \quad (6.7)$$

- Для обертального руху робота сили дорівнює

$$A = M \cdot \varphi, \quad (6.8)$$

де M – момент сили, яка діє на тіло (вважається, що M не змінюється у часі); φ – кут повороту за час t, протягом якого була виконана ця робота.

- Для обертального руху потужність моменту сил дорівнює

$$P = M \cdot \frac{\varphi}{t} = M\omega . \quad (6.9)$$

- Кінетична енергія тіла, що рухається поступально, дорівнює

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}. \quad (6.10)$$

- Кінетична енергія тіла, що обертається, дорівнює

$$T = \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \quad (6.11)$$

- Зв'язок між потенціальною енергією U частинки та силою $\vec{F}$, що діє на неї, у даній точці поля здійснюється через співвідношення

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (6.12)$$

• Напруженість потенціального поля в точці, де на МТ масою m діє сила $\vec{F}$, дорівнює

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (6.13)$$

• Потенціал гравітаційного поля в точці, де МТ масою m має потенціальну енергію U:

$$\varphi = \frac{U}{m}. \qquad (6.14)$$

• Зв'язок між напруженістю $\vec{G}$ потенціального поля в точці з радіус-вектором $\vec{r}$ і потенціалом φ поля в цій самій точці здійснюється через співвідношення

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}). \qquad (6.15)$$

• Потенціальна енергія U і робота A_{12} сили поля пов'язані з потенціалом φ і різницею потенціалів формулами

$$U = m \cdot \varphi \quad \text{та} \quad A_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (6.16)$$

6.2. Методичні вказівки та поради

1. Кажучи про роботу (або потужність) необхідно в кожному конкретному випадку чітко визначати, робота якої саме сили розглядається.

2. Потенціальне поле може бути описане або у векторному вигляді $\vec{G}(\vec{r})$, або у скалярному $\varphi(\vec{r})$. Обидва методи еквівалентні. Проте функція $\varphi(\vec{r})$ у деякому сенсі більш зручна, оскільки:

• замість трьох компонентів функції $\vec{G}(\vec{r})$, вона задається однією скалярною функцією;

• знаючи $\varphi(\vec{r})$, можна за формулами (6.16) обчислити потенціальну енергію U і роботу A сили поля;

• коли потенціальне поле створюється багатьма джерелами, знайти потенціал $\varphi(\vec{r})$ зазвичай легше, ніж вектор напруженості. Це пов'язано з тим, що потенціали – скалярні величини і їх можна просто арифметично додавати, на відміну від векторного додавання величин напруженості;

• знаючи функцію $\varphi(\vec{r})$, можна за формулою (6.15) легко знайти функцію $\vec{G}(\vec{r})$;

3. Потенціальна енергія $U(\vec{r})$ – це функція, яка визначається з точністю до деякої довільної сталої. Ця обставина, однак, не суттєва, оскільки усі основні робочі

формули містять різницю значень $U(\vec{r})$ для двох положень тіла.

4. Формула (6.3) справедлива не тільки для матеріальної точки, але й для будь-якого матеріального тіла або системи тіл. При застосуванні формули (6.3) до матеріального тіла або системи тіл під величиною $d\vec{r}$ (або ds) слід розуміти переміщення точки прикладання сили $\vec{F}$. Ігнорування цією обставиною часто призводить до помилкових результатів.

5. Розв'язуючи задачі або даючи відповіді на запитання з цього розділу, треба розрізняти:

- потенціальну енергію одного матеріального тіла або системи матеріальних тіл;
- потенціальну енергію взаємодії між матеріальними тілами;
- гравітаційну енергію одного матеріального тіла.

6.3. Запитання та відповіді

6.3.1. *Проаналізуйте формулу (6.1) для роботи сили F на відрізку прямолінійного шляху для випадків різних напрямків дії сили відносно напрямку руху.*

Робота сили F на відрізку поступального переміщення довжиною s дорівнює (6.1): $A = F \cdot s \cdot \cos\alpha = F_s \cdot s$, де α – кут між напрямками сили та переміщення; F_s – проекція вектора сили на напрямок руху.

Якщо сила діє в напрямку руху тіла ($\alpha = 0;\ \cos\alpha = 1$), то кажуть про "корисну" роботу A, оскільки величина A додатна $A = F \cdot s$.

Якщо сила діє протилежно напрямку руху тіла ($\alpha = \pi;\ \cos\alpha = -1$), то робота буде від'ємною $A = -F \cdot s$.

Якщо сила діє в напрямку, перпендикулярному напрямку руху тіла ($\alpha = \pi/2;\ \cos\alpha = 0;\ F_s = 0$), то робота сили буде дорівнювати нулю $A = 0$.

6.3.2. *Визначте: 1) роботу сили при прямолінійному русі МТ; 2) роботу моменту сили при обертальному русі МТ; 3) кінетичну енергію матеріального тіла при обертальному русі; 4) роботу моменту сили при обертальному русі твердого тіла.*

Робота сили при прямолінійному русі МТ. При переміщенні МТ на відстань $d\vec{\ell}$ під дією сили $\vec{F}$ виконується робота dA, що дорівнює скалярному добутку векторів $\vec{F}$ і $d\vec{\ell}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x \cdot d\ell_x + F_y \cdot d\ell_y + F_z \cdot d\ell_z .$$

При виконанні роботи (ΔA) сили у випадку прямолінійного руху МТ відбувається зміна повної енергії МТ (ΔE):

$$-\Delta A = E_2 - E_1 = (T_2 + E_{п2}) - (T_1 + E_{п1}) =$$
$$= (T_2 - T_1) + (E_{п2} - E_{п1}) = \Delta T + \Delta E_{п} ,$$

де T та $E_{п}$ – кінетична та потенціальна енергії МТ, відповідно.

Робота моменту сили при обертальному русі МТ. При повороті МТ на кут $\Delta\varphi$ (рис. 6.2) виконується робота, яка дорівнює

$$\Delta A = \left(\vec{F}\,\Delta\vec{r}\right) = \left(\vec{F}\,\vec{\upsilon}\right)\Delta t = \left(\vec{F}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}\,]\right)\Delta t = \left(\vec{\omega}[\vec{r}\,\vec{F}\,]\right)\Delta t = \left(\vec{\omega}\vec{M}\right)\Delta t =$$
$$= M\omega\cdot\cos\alpha\,\Delta t = M_z\cdot\Delta\varphi \quad\Rightarrow\quad dA = M_z\cdot d\varphi\,,$$

де M_z – величина проекції на вісь обертання вектора моменту сили відносно осі обертання $\left(M_z = M\cdot\cos\alpha\right)$.

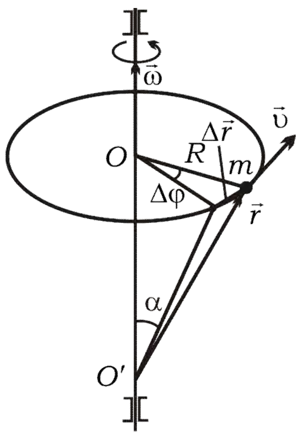


Рис 6.2. До запитання 6.3.2

Кінетична енергія твердого тіла при його обертанні. Якщо уявити тверде тіло у вигляді системи матеріальних точок, то при обертанні тіла кінетична енергія i-ї МТ дорівнюватиме

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}m_i[\vec{\omega}\vec{r}_i]^2 = \frac{1}{2}m_i\,\omega^2\,R_i^2\,.$$

Як випливає із рис. 6.2, величина $R_i = r_i\,\sin\alpha$.

Якщо просумувати кінетичні енергії всіх МТ, які складають тверде тіло, то отримаємо його кінетичну енергію

$$T = \sum_i T_i = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i\cdot R_i^2 = \frac{I\cdot\omega^2}{2}\,,$$

де момент інерції твердого тіла $I = \sum\limits_i m_i\cdot R_i^2$.

Робота $\left(A\right)$ *моменту сили при обертальному русі твердого тіла пов'язана з кінетичною енергією* $\left(T\right)$ *співвідношенням*

$$A = -T = -\frac{I\cdot\omega^2}{2}\,,$$

де I – момент інерції твердого тіла; ω – кутова швидкість обертання твердого тіла.

6.3.3. *Що таке потенціальні сили, консервативні сили, дисипативні сили, центральні сили?*

Консервативні сили можна визначити кількома способами, наприклад:

1) це сили, робота яких не залежать від шляху, яким МТ переходить з одного положення в інше;

2) це сили, робота яких будь-яким замкненим шляхом дорівнює нулю.

Потенціальні сили – це сили, які можна описати функцією $\Pi(x,y,z)$, градієнт якої визначає силу в кожній точці поля як $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}\,\Pi(x,y,z)}$. Функція $\Pi(x,y,z)$ називається потенціальною функцією. У випадку, коли функція $\Pi(x,y,z)$ не залежить явно від часу, потенціальне поле виявляється стаціонарним, а його сили – консервативними. У цьому випадку $\Pi(x,y,z) = -U(x,y,z)$, де $U(x,y,z)$ – потенціальна енергія МТ і сила дорівнює $\vec{F} = -\text{grad}\,U(x,y,z)$, відповідно.

Таким чином, консервативні сили є окремим випадком потенціальних сил. Усі консервативні сили є потенціальними силами, але не навпаки. Для переважної більшості випадків, з якими ми будемо мати справу в межах курсу "Загальна фізика. Механіка", потенціальні поля – стаціонарні, і різниці між потенціальними і консервативними силами ми робити не будемо.

Дисипативні сили – це такі сили, робота яких при русі МТ призводить до перетворення механічної енергії МТ на теплову енергію середовища, у якому рухається МТ, і самого МТ. Робота дисипативних сил завжди від'ємна $(A < 0)$: робота дисипативних сил завжди призводить до зменшення механічної енергії. Дисипативна сила спричиняє опір руху МТ.

Центральна сила – сила, яка характеризується тим, що її напрямок у будь-якій точці поля цієї сили проходить через нерухомий центр (напр., матеріальну точку масою m або електричний заряд q), а її величина F залежить лише від відстані r до цього центра. Прикладами центральних сил є сили гравітації, кулонівські та пружні сили.

6.3.4. *Доведіть, що центральні сили є консервативними силами.*

Нагадаємо, що у випадку дії центральної сили її напрямок у будь-якій точці поля проходить через точку O – силовий центр поля, а величина залежить лише від відстані до цього центра, тобто $\vec{F} = f(r)\cdot\vec{e}_r$, де $f(r)$ – проекція вектора $\vec{F}$ на напрямок радіус-вектора $\vec{r}$; $\vec{e}_r$ – одиничний радіус-вектор (рис. 6.3).

Для сили відштовхування функція $f(r)$ – додатна (як на рис. 6.3), для сили притягування – від'ємна. Початок координат (точка, з якої виходить радіус-вектор) розміщений У точці O – силовому центрі.

Знайдемо роботу центральної сили у випадку, коли нерухомий силовий центр розташований у точці О.

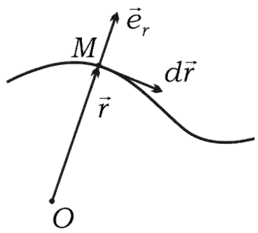


Рис 6.3. До запитання 6.3.4

Елементарна робота сили з переміщення $d\vec{r}$ дорівнює $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(r) \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$. Скалярний добуток $\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = dr$, де dr – проекція вектора $d\vec{r}$ на вектор $\vec{e}_r$ або на радіус-вектор $\vec{r}$, тоді $dA = f(r) \cdot dr$. Робота сили від точки 1 до точки 2 силового поля дорівнює $A = \int_1^2 f(r) \cdot dr$.

Отриманий вираз залежить тільки від значень r_1 та r_2, від виду функції $f(r)$, тобто від характеру взаємодії, а також від відстані r між точками M і O (рис. 6.3). Від шляху робота не залежить. Такими властивостями характеризуються консервативні сили. Висновок: центральні сили є консервативними силами.

6.3.5. *Які з перелічених нижче сил є консервативними, а які дисипативними: сила тяжіння, пружна сила, сила тертя?*

Перші дві з трьох перелічених вище сил (це сила тяжіння та пружна сила) є консервативними: роботи цих сил не залежать від шляху, по якому відбувається переміщення. Сила тертя не є консервативною силою, це дисипативна сила (див. запитання 6.3.6 та 6.3.7, а також приклад 6.1).

6.3.6. *Отримайте формулу залежності потенціальної енергії деформованої пружини від коефіцієнта пружності k і величини деформації Δx. Чи можна з отриманої формули зробити висновок про приналежність пружної сили до консервативних чи дисипативних сил?*

За законом Гука пружна сила $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$, де k – коефіцієнт пружності (властивість пружини); x – подовження (стиснення) пружини (величина деформації). Знайдемо елементарну роботу сили $\vec{F}$ з елементарного переміщення $d\vec{x}$: $dA = \vec{F}\, d\vec{x} = -k \cdot \vec{x} \cdot d\vec{x}$. Скалярний добуток $\vec{x} \cdot d\vec{x} = x \cdot (d\vec{x})_x$, де $(d\vec{x})_x$ – проекція $d\vec{x}$ на вектор $\vec{x}$. Ця проекція дорівнює dx – приросту модуля вектора $\vec{x}$. Тому $\vec{x} \cdot d\vec{x} = x \cdot dx \Rightarrow dA = -k \cdot x \cdot dx = -d\left(\frac{k \cdot x^2}{2}\right)$.

Тепер обчислимо роботу пружної сили на шляху 1–2. Для цього проінтегруємо останній вираз від точки 1 до точки 2:

$$A = -\int_1^2 d\left(\frac{k \cdot x^2}{2}\right) = \frac{k \cdot x_1^2}{2} - \frac{k \cdot x_2^2}{2} = -\frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}.$$

Відповідно, енергія пружної сили дорівнює

$$U = -A = \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}.$$

Як бачимо з останнього виразу, енергія пружної сили не залежить від шляху, по якому відбувається рух від точки 1 до точки 2. Величина U залежить від результату переміщення $(\Delta x)^2$. Висновок: пружна сила належить до консервативних сил.

6.3.7. *Доведіть, що сила тертя – дисипативна сила.*

Відомо, що найпростішими прикладами сил тертя є сили тертя спокою, сили тертя ковзання, сили тертя кочення, сили в'язкого тертя (див. [1] п. 36). Розглянемо, наприклад, силу в'язкого тертя, яка виникає при русі твердого тіла в рідині або газі: $\vec{F}_{\text{тер}} = -k \cdot \vec{\upsilon}$, де k – коефіцієнт тертя; $\vec{\upsilon}$ – швидкість тіла, що рухається. Обмежмось розглядом одновимірного руху МТ уздовж осі OX у полі консервативної сили $\vec{F}$ при дії сили в'язкого тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$. Запишемо в скалярному вигляді рівняння руху:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F + F_{\text{тер}} = -\frac{dU}{dx} - k \cdot \upsilon.$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння на швидкість тіла $\upsilon = \frac{dx}{dt}$:

$$\upsilon m\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{dU}{dx}\upsilon - k \cdot \upsilon^2 \;\Rightarrow\; m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -k \cdot \upsilon^2 \;\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{2} + U(x)\right) = -k \cdot \upsilon^2 \;\Rightarrow\; \frac{dE}{dt} = -k \cdot \upsilon^2,$$

де $E = \frac{m\upsilon^2}{2} + U(x)$ – повна механічна енергія МТ. Похідною за часом від енергії є потужність $P = \frac{dE}{dt}$, тобто $P = -k \cdot \upsilon^2$.

Таким чином, урахування сили тертя привело до висновку, що похідна від енергії за часом (потужність) для сили в'язкого тертя – величина від'ємна в будь-який момент часу. Це означає, що енергія як функція часу є величиною, яка монотонно зменшується. Тобто в системі існує дисипативна сила – сила, робота якої призводить до того, що енергія впорядкованого механічного руху МТ або системи МТ перетворюється на енергію хаотичного теплового руху атомів (молекул) того середовища, у якому рухається МТ. Дисипативна сила створює опір руху МТ.

На прикладі сили в'язкого тертя показали, що сила тертя – дисипативна сила. Це можна показати і для інших типів сил тертя.

6.3.8. *Відомо, що сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тер}}$ і швидкість $\vec{\upsilon}$ тіла мають протилежні напрямки. Тому робота сили тертя на кожній ділянці шляху – від'ємна. Сили тертя – типовий приклад дисипативних сил. Чи може робота сили тертя бути додатною?*

Розглянемо сили тертя ковзання, які виникають між поверхнею тіла, що рухаються по негладкій поверхні, дорівнює $\vec{F}_{\text{тер}} = -k\left(\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right)\cdot N$, де k – коефіцієнт тертя; N – сила, з якою на тіло діє поверхня; $\vec{\upsilon}$ – швидкість тіла, що рухається; $\left(\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right)$ – одиничний вектор.

Коли кажуть про протилежні напрямки сили тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і швидкості $\vec{\upsilon}$ тіла, мають на увазі тертя між рухомим тілом і тілом, яке відносно системи відліку нерухоме. Однак у випадку, коли сила тертя обумовлена взаємодією даного тіла з іншим тілом, яке також рухається в тому самому напрямку, що і перше тіло, але з більшою швидкістю, напрямки сили тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і відносної швидкості $\vec{\upsilon}$ тіла будуть збігатися, а робота сили тертя буде додатною. Це означає, що сила тертя в цьому випадку допомагає руху тіла з меншою швидкістю, викликає його рух. При цьому робота сили тертя, яка виконується щодо тіла з більшою швидкістю, – від'ємна. Зауважимо, що додатний знак роботи сили тертя не означає що вона перестає бути дисипативною силою.

6.3.9. *Дайте визначення потенціальної енергії? Як вона пов'язана із силою в тривимірному просторі?*

Можна дати принаймні два базових визначення потенціальної енергії:

1. Кожній точці потенціального поля можна зіставити значення деякої функції $U(x,y,z)$ такої, щоб різниця значень цієї функції в точках 1 і 2 поля визначала роботу сил при переміщенні МТ із точки 1 у точку 2:

$$A_{12} = U_1 - U_2 .$$

2. Для одновимірного руху МТ, який відбувається вздовж осі OX, потенціальна енергія – це скалярна функція $U(x)$, яка, якщо на неї подіяти оператором $-\left(\frac{d}{dx}\vec{i}\right)$, дає значення сили: $\vec{F}_x = -\frac{dU(x)}{dx}\vec{i}$.

3. Аналогічно для тривимірного випадку

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}\right) \equiv -\text{grad}\, U(x,y,z)$$

6.3.10. *Що таке еквіпотенціальна поверхня?*

Еквіпотенціальна поверхня – це поверхня, у всіх точках якої потенціальна енергія U має однакове значення. Кожному значенню U відповідає своя еквіпотенціальна поверхня. На рис. 6.4 розглянуто двовимірний випадок функції $U(x, y)$.

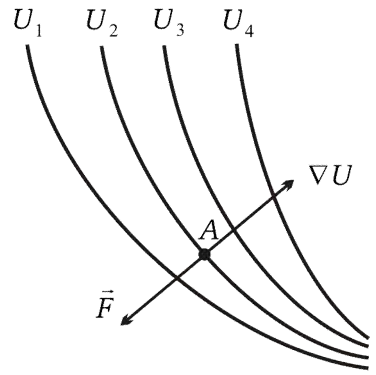


Рис. 6.4. До запитань 6.3.10 і 6.3.11

6.3.11. *Який фізичний зміст має вектор* $\operatorname{grad} U$ *? Як визначити напрямок вектора* $\operatorname{grad} U$ *?*

Із формули $\vec{F}_x = -\dfrac{\partial U(x, y)}{\partial x}\vec{i}$ або $\vec{F}_y = -\dfrac{\partial U(x, y)}{\partial y}\vec{j}$ для двовимірного випадку, згадавши основні властивості перших похідних за просторовою координатою, можна зробити висновок, що проекція вектора сили $\vec{F}$ на напрямок, дотичний до еквіпотенціальної поверхні в даній точці, дорівнює нулю. Це означає, що *вектор* $\vec{F}$ *перпендикулярний до еквіпотенціальної поверхні* $(U = \text{const})$ *у цій точці*. Якщо взяти переміщення dx по нормалі до еквіпотенціальної поверхні в бік зменшення величини U $(dU(x) < 0)$, то величина $F_x > 0$, тобто *вектор* $\vec{F}$ *направлений у бік зменшення* U. Оскільки вектор $\vec{F}$ протилежний за напрямком вектору $\overrightarrow{\nabla U} \equiv \overbrace{\operatorname{grad} U}^{\rightarrow}$, можна зробити висновок: *градієнт потенціальної енергії* U *– це вектор, який напрямлений по нормалі до еквіпотенціальної поверхні в бік збільшення величини* U.

На рис. 6.4 розглянуто двовимірний випадок функції U. На ньому зображена система еквіпотенціальних ліній $U_1 < U_2 < U_3 < U_4$, а також вектор градієнта потенціальної енергії $\overrightarrow{\nabla U}$ і відповідний вектор сили $\vec{F}$ у точці A.

Зауважимо, що висновки, зроблені вище щодо властивостей градієнта потенціальної енергії, можна застосувати, безумовно, і до градієнта будь-якої іншої скалярної функції координат. Поняття градієнта широко використовується в різних розділах фізики.

6.3.12. *Знайдіть потенціальну енергію взаємодії двохматеріальних тіл і визначте її властивості.*

Досі ми розглядали поведінку однієї частинки (матеріальної точки) у потенціальному полі. У поставленому запитанні йдеться про систему матеріальних точок. Кількість МТ у системі може бути дві, три, аж до нескінченності. Це може бути газ, Сонячна система, будь-який механізм, і навіть тверде тіло.

Розглянемо замкнену систему, що складається з двох частинок (1 і 2), між якими діють лише центральні сили, тобто сили, які залежать лише від відстані між частинками і напрямлені по прямій, що проходить через них. Сила $\vec{F}_1$, з якою частинка 2 діє на частинку 1, і сила $\vec{F}_2$, з якою частинка 1 діє на частинку 2, пов'язані між собою III законом Ньютона $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

У нерухомій інерціальній *К*-СВ за час dt частинки 1 і 2 здійснюють переміщення $d\vec{r}_1$ і $d\vec{r}_2$, відповідно. Визначимо алгебраїчну суму елементарних робіт dA_{12} сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, з якими ці частинки взаємодіють. Шукана робота дорівнює

$$dA_{12} = \vec{F}_1\, d\vec{r}_1 + \vec{F}_2\, d\vec{r}_2 = \vec{F}_1\, (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2)\,.$$

Величина $(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2)$ означає відносне переміщення частинок у нерухомій *К*-СВ. Якщо перейти в рухому інерціальну K'-СВ, у якій частинка 2 нерухома, то переміщення $d\vec{r}_1$ частинки 1 у K-СВ можна представити за допомогою перетворень Галілея у вигляді $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1'$, де dr_1' – переміщення частинки 1 у K-СВ. Значить $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d\vec{r}_1'$ і $dA_{12} = \vec{F}_1\, d\vec{r}_1'$.

З останньої залежності можна зробити висновок про те, що алгебраїчна сума елементарних робіт пари сил взаємодії dA_{12} у довільній *К*-СВ, де обидві частинки рухаються, дорівнює елементарній роботі, яку здійснює сила, що діє на одну частинку в K'-СВ, де друга частинка покоїться. Тобто *робота* dA_{12} *однакова в усіх інерціальних СВ*.

На початку ми домовлялись, що сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ – центральні, тобто і консервативні. Тому сума елементарних робіт dA_{12} цих сил дорівнює зміні потенціальної енергії взаємодії двох частинок зі знаком "мінус": $dA_{12} = -dU_{12}$, де dU_{12} – функція, що залежить від відстані між цими частинками.

Якщо перейти від нескінченно малих переміщень dr до переміщень скінченної величини Δr, то робота A_{12} сил взаємодії двох частинок дорівнює $A_{12} = -\Delta U_{12}$. Згадавши попередній висновок щодо збереження роботи в усіх ІСВ, можна зробити висновок про адитивність і величини потенціальної енергії взаємодії двох МТ: вона однакова в усіх ІСВ. Величини потенціальної енергії взаємодії двох МТ дорівнює $\Delta U_{12} = -F_1 \cdot \Delta r_{12} \equiv -F_2 \cdot \Delta r_{21}$, де $\Delta r_{12} = \Delta r_{21}$ – відстань між МТ.

6.3.13. *На прикладі системи трьох тіл знайдіть внутрішню потенціальну енергію СМТ і визначте її властивості.*

Розглянемо замкнену систему, що складається з трьох МТ, між якими діють лише центральні сили, тобто сили, які напрямлені вздовж прямої, що проходить через ці частинки, і залежать від відстані між частинками. Робота, яку здійснюють всі сили взаємодії при переміщенні всіх трьох частинок, може бути представлена як алгебраїчна сума робіт всіх трьох сил взаємодії: 1–2, 1–3, 2–3: $A = A_{12} + A_{13} + A_{23}$.

Для кожної пари ($i - j$) цих сил робота A_{ij} з переміщення може бути представлена, як зменшення потенціальної енергії частинки i в полі частинки j: $A_{ij} = -\Delta U_{ij}$. Тому робота A з переміщення всіх трьох частинок усередині системи пов'язана зі зміною потенціальних енергій взаємодії кожної частинки з кожною частинкою:

$$A = -\Delta U_{12} - \Delta U_{13} - \Delta U_{23} \equiv -\Delta(U_{12} + U_{13} + U_{23}) \equiv -\Delta U_{\text{вн}},$$

де $U_{\text{вн}} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$ – внутрішня потенціальна енергія системи МТ (інколи її називають власною потенціальною енергією системи МТ або потенціальною енергією взаємодії системи МТ). Методику, за якою обчислюють значення U_{ij}, викладено в запитанні 6.3.12.

Оскільки кожний доданок суми, яка становить $U_{\text{вн}}$, залежить від відстані між відповідними частинками системи МТ, то, напевно, і сама сума, тобто і *внутрішня потенціальна енергія СМТ $U_{\text{вн}}$ залежить від відносного розташування частинок системи у фіксований момент часу (або від конфігурації системи).*

Подібні висновки можна зробити для системи, яка складається з будь-якої кількості МТ.

Висновки:

- Кожній конфігурації ізольованої системи МТ відповідає своє значення внутрішньої потенціальної енергії.
- Робота всіх внутрішніх центральних (консервативних) сил при зміні конфігурації СМТ дорівнює зменшенню внутрішньої потенціальної енергії системи

$$A_{\text{вн}} = -\Delta U_{\text{вн}} \equiv -(U_{\text{вн}2} - U_{\text{вн}1}) \equiv U_{\text{вн}1} - U_{\text{вн}2},$$

де $U_{\text{вн}1}$ і $U_{\text{вн}2}$ – внутрішні потенціальні енергії системи з початковою і кінцевою конфігураціями, відповідно.

- Сумарна робота внутрішніх центральних сил не залежить від шляху переходу між конфігураціями СМТ.
- Внутрішня потенціальна енергія системи – величина не адитивна: вона не дорівнює сумі внутрішніх потенціальних енергій її окремих фрагментів.

6.3.14. *Що таке нормування потенціальної енергії? Яка властивість простору дозволяє проводити нормування потенціальної енергії?*

Як відомо, проекція сили пов'язана з потенціальною енергією формулою $F_x = -\frac{dU(x)}{dx}$. Якщо замість функції $U(x)$ узяти іншу функцію $U(x)+C$, яка відрізняється від першої на сталу величину C, то значення сили від цього не зміниться:

$$F_x = -\frac{d\left(U(x)+C\right)}{dx} = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Як бачимо, потенціальна енергія визначається з точністю до адитивної сталої. Звідки можна стверджувати, що потенціальна енергія в деякій точці поля дорівнює будь-якому наперед заданому значенню. Тому фізичний зміст має не саме значення потенціальної енергії, а лише різниця потенціальних енергій між двома точками. Для того, щоб надати однозначності потенціальній енергії в усьому обраному просторі, достатньо довільно обрати ("призначити") її значення хоча б в одній довільній точці цього простору.

Процедура надання потенціальній енергії однозначності називається її нормуванням. Формально нормувати потенціальну енергію можна нескінченною кількістю варіантів, але практично це робиться шляхом приписування значення нульової енергій для точки, що лежить на поверхні Землі, на поверхні полички, з якої падає тіло, у найвищій точці підйому тіла, на нескінченності тощо.

Нормування потенціальної енергії можливе через існування фундаментальних властивостей простору – його однорідності та ізотропності. Це означає, що фізичні закономірності в ізольованій системі МТ не зміняться, якщо початок системи координат змістити на довільну величину $\vec{a}$.

Потенціальна енергія взаємодії двох МТ описує фізичні властивості ізольованої системи МТ. Тому ця величина не повинна змінюватись при зміщенні початку системи координат на довільну величину $\vec{a}$:

$$U(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = U(\vec{r}_1+\vec{a},\vec{r}_2+\vec{a}) \;\Rightarrow\; U(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = U(\vec{r}_1-\vec{r}_2).$$

6.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1. *Обчисліть роботу різних сил: а) пружної сили; б) гравітаційної сили; в) однорідної сили тяжіння. Оцініть, чи є ці сили консервативними чи дисипативними.*

***Розв'язання*:** а) розглянемо частинку, яка рухається відносно точки O по відповідній криволінійній траєкторії від точки 1 до точки 2 (рис. 6.5) і на неї діє пружна сила $\vec{F} = -\chi\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор; χ – коефіцієнт пружності.

Знайдемо елементарну роботу сили $\vec{F}$ з елементарного переміщення $d\vec{r}$: $\Delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\chi\vec{r}\cdot d\vec{r}$. Скалярний добуток $\vec{r}\cdot d\vec{r} = r\cdot(dr)_{\vec{r}}$, де $(dr)_{\vec{r}}$ – проекція вектора елементарного переміщення $d\vec{r}$ на напрямок радіус-вектора $\vec{r}$. Ця проекція дорівнює приросту модуля радіус-вектора $\vec{r}$, тому $\vec{r}\cdot d\vec{r} = r\cdot dr$. Таким чином,

$$\Delta A = -\chi r\cdot dr = -\chi\cdot d\left(\frac{r^2}{2}\right). \tag{6.18}$$

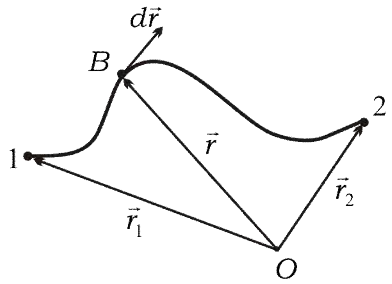


Рис. 6.5. До обчислення роботи пружної та гравітаційної сил: до прикладу 6.1

Робота пружної сили на всьому шляху від точки 1 до точки 2 знаходимо шляхом інтегрування (6.18):

$$A = -\chi\int_1^2 d\left(\frac{r^2}{2}\right) = \frac{\chi}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right); \tag{6.19}$$

б) визначимо роботу гравітаційної сили, яка виконується при переміщенні точкової маси m_1 із точки 1 у точку 2 по довільному шляху в гравітаційному полі, яке створює нерухома точкова маса m_2, що розташована в точці O (рис. 6.5). Сила, яка діє на точкову масу m_1, коли вона розташована в точці B траєкторії, дорівнює (7.1):

$$\vec{F} = -\gamma\frac{m_1\cdot m_2}{r^3}\vec{r},$$

де γ – гравітаційна стала. Якщо позначити $(-\gamma\cdot m_1\cdot m_2) = \alpha$, то цей закон перепишеться так: $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$. Елементарна робота цієї сили з елементарного переміщення $d\vec{r}$ дорівнює

$$\Delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{\alpha}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}. \tag{6.20}$$

Як і у попередньому випадку $\vec{r}\cdot d\vec{r} = r\cdot dr$, тому

$$\Delta A = \frac{\alpha}{r^3}r\cdot dr = -\alpha\cdot d\left(\frac{1}{r}\right). \tag{6.21}$$

Робота цієї сили (сили гравітації) на всьому шляху від точки 1 до точки 2 дорівнює

$$A = -\alpha\int_1^2 d\left(\frac{1}{r}\right) = \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right); \tag{6.22}$$

в) однорідна сила тяжіння, коли прискорення вільного падіння не залежить від координати z, яка визначається вздовж напрямку прикладання сили тяжіння з урахуванням одиничного вектора (орта) $\vec{k}$ уздовж осі Oz (рис. 6.6) дорівнює $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$. Елементарна робота сили тяжіння в разі елементарного переміщення $d\vec{r}$ дорівнює $\Delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg\vec{k} \cdot d\vec{r}$.

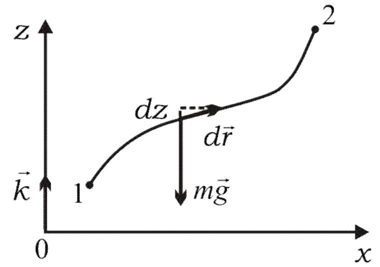


Рис. 6.6. До обчислення роботи однорідної сили тяжіння: до прикладу 6.1

Скалярний добуток $\vec{k} \cdot d\vec{r} = (d\vec{r})_{\vec{k}}$, де $(d\vec{r})_{\vec{k}}$ – проекція вектора $d\vec{r}$ на орт $\vec{k}$, яка дорівнює dz – приросту координати z з елементарного переміщення $d\vec{r}$. Тому елементарна робота сили тяжіння матиме вигляд

$$\Delta A = -mg\vec{k} \cdot d\vec{r} = -mg \cdot dz .$$

Робота сили тяжіння на всьому шляху від точки 1 до точки 2 дорівнює

$$A = -mg\int_1^2 \cdot dz = mg(z_1 - z_2) . \qquad (6.23)$$

Висновки:

1. Роботи різних досліджених у прикладі сил (пружної сили, гравітаційної сили, однорідної сили тяжіння) залежать від координат точок, між якими відбувається переміщення, хоча ці залежності різні за характером (див. формули (6.18), (6.22) та (6.23)).

2. Усі три залежності об'єднує те, що роботи розглянутих сил, як видно із формул (6.18), (6.22) та (6.23), не залежать від форми шляху між точками початку руху 1 і кінця руху 2, а залежать лише від положення цих точок. Це дозволяє вважати ці сили консервативними (потенціальними) силами. Ця досить важлива особливість розглянутих тут сил не універсальна, існують сили, яким вона не властива. Наприклад, сили тертя цю властивість не мають: робота сили тертя залежить не тільки від положення початкової та кінцевої точок, але й від форми шляху між ними. Це було показано в запитанні 6.3.7.

Приклад 6.2. *Визначте роботу сили $\vec{F} = ay^2\vec{i} + bx\vec{j}$ при переміщенні МТ між точками площини xy з координатами $(0,0)$ та $(1,2)$ по прямій лінії L_1, рівняння* *якої* $y = 2x$*, і по параболі, рівняння якої* $y = 2x^2$*. Чи потенціальне поле, яке характеризується такою силою?*

Розв'язання: Нагадаємо, що потенціальне поле – це поле сил, які характеризуються тим, що їхні роботи не залежать від шляху, а лише від переміщення (від координат початкової та кінцевої точок).

Відомо (6.12), що для потенціального поля енергія пов'язана із силою формулою

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Для поля сили $\vec{F} = ay^2\vec{i} + bx\vec{j}$ проекції вектора $\vec{F}$ на відповідні осі дорівнюють

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = ay^2; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = bx; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Робота з переміщення МТ уздовж лінії L_1, рівняння якої $y = 2x$, дорівнює

$$A_1 = \int_{L_1} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{L_1} F_x\, dx + \int_{L_1} F_y\, dy = \int_{L_1} ay^2\, dx + \int_{L_1} bx\, dy =$$

$$= \int_{L_1} a(2x^2)^2\, dx + \int_{L_1} b\left(\frac{y}{2}\right)^{1/2} dy = 4a\int_0^1 x^4 dx + \frac{b}{2}\int_0^2 y^{1/2}\, dy =$$

$$= 4a\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \frac{b}{2}\cdot\frac{2y^{3/2}}{3}\bigg|_0^2 = \frac{4}{5}a + \frac{2\sqrt{2}}{3}b.$$

Робота з переміщення МТ уздовж лінії L_2, рівняння якої $y = 2x^2$, дорівнює

$$A_2 = \int_{L_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{L_2} F_x\, dx + \int_{L_2} F_y\, dy = \int_{L_1} ay^2\, dx + \int_{L_1} bx\, dy =$$

$$= \int_{L_1} a(2x)^2\, dx + \int_{L_1} b\frac{y}{2}\, dy = 4a\int_0^1 x^2 dx - \frac{b}{2}\int_0^2 y\, dy =$$

$$= 4a\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{b}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}a + b.$$

Як бачимо, роботи з переміщення МТ уздовж L_1 і L_2 – різні, вони залежать від форми шляху (траєкторії). Із цього можна зробити висновок про те, що тут маємо справу з полем неконсервативної (не потенціальної) сили.

Приклад 6.3. *Яку роботу слід виконати, щоб витягнути тіло масою* m *на гірку з довжиною основи* L *і кутом нахилу* α*, якщо коефіцієнт тертя між тілом* *та поверхнею гірки дорівнює k ? Яка частина виконаної роботи "корисна", а яка пов'язана з переходом механічної енергії в теплову?*

Розв'язання: Щоб зрушити тіло з місця і воно почало підніматись на гірку, треба прикласти до тіла силу $F_{\min}$, щоб подолати складову сили тяжіння $(mg \cdot \sin\alpha)$ і силу тертя $F_{\text{тер}}$, які заважають руху тіла вгору (рис. 6.7):

$$F_{\min} = mg \cdot \sin\alpha + F_{\text{тер}} . \tag{6.24}$$

Розглянуті сили направлені вздовж однієї прямої, тому (6.24) записано у скалярному вигляді з урахуванням знаків сил.

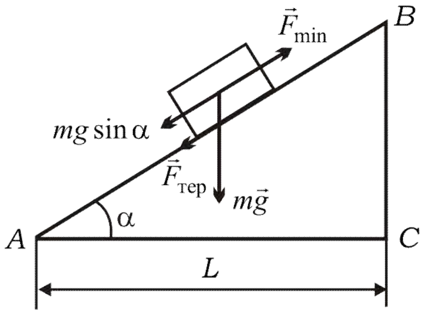


Рис. 6.7. До прикладу 6.3

Робота сили $F_{\min}$ за визначенням дорівнює

$$A_{\min} = F_{\min} \cdot AB = F_{\min} \cdot \frac{L}{\cos\alpha} = (mg \cdot \sin\alpha + kmg \cdot \cos\alpha) \cdot \frac{L}{\cos\alpha} = Lmg(\operatorname{tg}\alpha + k).$$

Корисна робота пов'язана лише зі збільшенням потенціальної енергії тіла й дорівнює роботі потенціальної сили тяжіння

$$A_{\text{кор}} = mg \cdot CB = mg \cdot L \cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

У виконаній роботі $(A_{\min})$ лише її частина є "корисною", а саме:

$$\frac{A_{\text{кор}}}{A_{\min}} = \frac{mg \cdot L \cdot \operatorname{tg}\alpha}{Lmg(\operatorname{tg}\alpha + k)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + k} = \frac{1}{1 + k/\operatorname{tg}\alpha} .$$

Якщо, наприклад, $\alpha = 30^0$, а $k = 0,8$, то

$$\frac{A_{\text{кор}}}{A_{\min}} = \frac{1}{1 + k/\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{1 + 0,8 \cdot \sqrt{3}} \approx \frac{1}{2,39} \approx 0,4.$$

Це означає, що в обраному прикладі лише 40 % витраченої енергії йде на виконання корисної роботи, а саме, на підняття тіла на визначену висоту, і ця частина роботи пов'язана з подоланням потенціального поля тяжіння. Залишок у 60 % енергії йде на подолання сил тертя і переходить у теплову енергію.

7. ЗАКОН ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ. ГРАВІТАЦІЙНЕ ПОЛЕ

7.1. Короткі теоретичні відомості

- Закон всесвітнього тяжіння:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} , \tag{7.1}$$

де γ – гравітаційна стала ($\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11}$ м^3 / кг $\cdot$ с^2) .

- Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок масами m_1 і m_2 :

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} . \tag{7.2}$$

- Напруженість поля тяжіння, яке утворене точковою масою M на відстані r :

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r} . \tag{7.3}$$

- Потенціал гравітаційного поля, яке утворене точковою масою M на відстані r :

$$\varphi = -\gamma M / r. \tag{7.4}$$

- Теорема Остроградського – Гаусса:

$$\Phi = -4\pi\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i , \tag{7.5}$$

де Φ – повний потік вектора напруженості через замкнену поверхню, яка охоплює сукупність тіл, маса яких $m_1, m_2, ..., m_n$.

- Принцип суперпозиції (накладання) гравітаційних полів:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i . \tag{7.6}$$

7.2. Методичні вказівки та поради

1. Теорема (закон) Остроградського – Гаусса широко використовується при розв'язуванні задач з електростатики. У підручниках з механіки ця теорема зазвичай не розглядається, хоча це потужний спосіб визначення напруженості полів твердих тіл скінченних розмірів. Для розрахунку напруженості полів системи точкових тіл добре "працює" принцип суперпозиції.

Розгляд теореми Остроградського – Гаусса наведено в запитанні 7.3.17.

2. Треба розрізняти і не плутати такі фізичні поняття, як:

- потенціальна енергія частинки в силовому гравітаційному полі;
- потенціальна енергія взаємодії двох тіл;
- внутрішня СМТ;
- гравітаційна енергія тіла (в деяких підручниках, ця енергія називається власною потенціальною енергією гравітаційної взаємодії речовини, яка утворює конкретне тіло).

Фізичний зміст цих понять розглянуто в запитаннях 6.3.12,. 6.3.13, 7.3.10 та 7.3.13.

7.3. Запитання та відповіді

7.3.1. *Що таке принцип далекодії? Чим він відрізняється від принципу близькодії? Яким принципом – далекодії чи близькодії – користуються в сучасній фізиці?*

Р. Декарт зводив усі взаємодії до механічного зіткнення тіл. Відкриття І. Ньютоном закону всесвітнього тяжіння ввело поняття далекодії. Принцип далекодії базується на тому, що взаємодія між тілами передається миттєво і може здійснюватися безпосередньо через порожній простір, який не бере участі в передачі взаємодії. Із принципу далекодії випливало, наприклад, що переміщення Землі має одразу ж призводити до зміни сили тяжіння, що діє на Місяць.

Ідея про можливість передачі взаємодії через порожній простір була настільки революційною, що сучасники Ньютона вважали її абсолютно неприйнятною. Наприклад, Х. Гюйгенс вважав ідею далекодії абсурдом, оскільки порожній простір виключає будь-який механізм передачі сил. Г. В. Лейбніц також заперечував ідею далекодії. Та і сам І. Ньютон вважав це неможливим.

Уявлення про далекодію були спростовані після відкриття і дослідження електромагнітного поля, яке виступає транслятором взаємодії і здійснює це з дуже великою, але кінцевою швидкістю $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Таких поглядів дотримувались вчені (напр., М. Фарадей і Дж. Максвелл), які сповідували ідеї існування матерії у вигляді поля і насамперед – електромагнітного поля (радіохвиль і світла). Така концепція, яка називається принципом близькодії, базується на уявленнях про кінцеву швидкість передачі взаємодії та участі у безконтактній взаємодії на відстані, наприклад, двох тіл третьої субстанції, яка оточує ці тіла у вигляді полів (поля гравітації, електричного, електромагнітного полів тощо).

Тільки ідеями принципу близькодії користуються в сучасній фізиці. Принцип далекодії має зараз більш історичне значення.

7.3.2. *Чи можна застосувати принцип суперпозиції до гравітаційних сил?*

Так, можна, хоча принцип суперпозиції не такий тривіальний, як його інколи формулюють. Окрім тієї частини його змісту, яка стосується векторного додавання сил при знаходженні результуючої сили (7.6), принцип суперпозиції ще містить неочевидне твердження про те, що на гравітаційну взаємодію двох тіл ніяк не впливає взаємодія цих тіл з іншими тілами.

7.3.3. *Як у математичному вигляді записати твердження принципу суперпозиції про спосіб знаходження результуючої сили при взаємодії декількох МТ?*

Розглянемо випадок існування замкненої систем МТ, яка складається із n матеріальних точок, коли на МТ масою m діє не одна, а $(n-1)$ МТ. Сила взаємодії такої МТ з будь-якою однією МТ, наприклад, з масою m_i, описується виразом $\vec{F}=\gamma\dfrac{m\cdot m_i}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}\right|^2}\cdot\dfrac{\vec{r}_i-\vec{r}}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}\right|}$, де $\vec{r}_i$ та $\vec{r}$ – радіус-вектори МТ з масами m_i та m, відповідно; $\left|\vec{r}_i-\vec{r}\right|$ – відстань між відповідними МТ; $\left(\vec{r}_i-\vec{r}\right)$ – вектор, що з'єднує ці МТ і направлений від МТ з масою m до МТ з масою m_i (рис. 7.1, а).

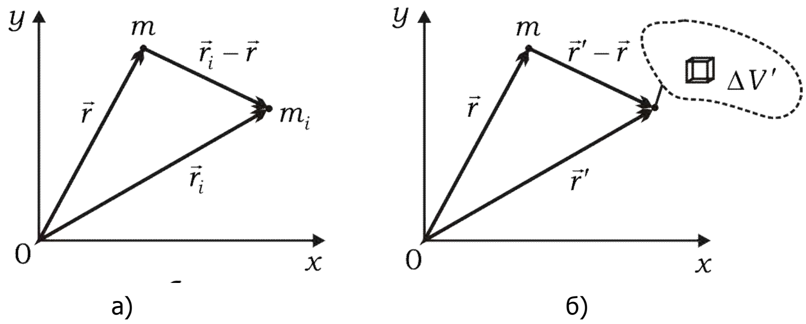


Рис. 7.1. До визначення принципу суперпозиції

Повна сила, що діє на МТ з масою m з боку інших МТ, є векторною сумою всіх сил і має такий вигляд:

$$\vec{F}_\Sigma=\gamma m\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}_i-\vec{r}}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}\right|}. \qquad (7.7\ )$$

Вираз (7.7) і є математичним формулюванням принципу суперпозиції у вигляді векторної суми сил взаємодії кожного тіла з кожним.

7.3.4. *Як знайти силу гравітаційної взаємодії точкової маси з тілом, яке не можна вважати матеріальною точкою?*

Для цього треба уявно розбити масивне тіло на n елементарних об'ємів ΔV_i, кожний з яких можна вважати за точкову масу (МТ) з масою $\rho\cdot\Delta V_i$, де ρ – густина тіла. Застосуємо для цієї МТ формулу (7.1), а потім усі знайдені сили просумуємо. Після переходу до границі $n\to\infty$ та $\Delta V'\to 0$ отримуємо вираз з об'ємним інтегралом

$$\vec{F}(\vec{r}) = \gamma m \lim_{\Delta V' \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho(\vec{r}_i)\cdot \Delta V_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}\right|^2} \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}\right|} = \gamma m \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|^2} \cdot \frac{\vec{r}\,' - \vec{r}}{\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|} dV',$$

де $\vec{r}\,'$ – плинний радіус-вектор елементарних об'ємів тіла (рис. 7.1, б).

Питання про обчислення об'ємного інтеграла тут не розглядається.

7.3.5. *Чи відрізняються інертна та гравітаційна маси?*

Сили $F_{вз}$, які характеризують взаємодію тіл і описуються II законом Ньютона, сили інерції $F_{ін}$ і гравітаційні сили $F_{гр}$ пропорційні масам тіл ($F_{вз} \sim m$, $F_{ін} \sim m$ і $F_{гр} \sim m$). У випадках сил, пов'язаних із взаємодією тіл, і сил інерції маса, яка тут називається інертною $m_{ін}$, виступає як міра інертності МТ і характеризує здатність МТ "протидіяти" силі. У випадку гравітаційної сили маса ($m_{гр}$) – міра напруженості поля гравітації. На сьогодні немає ані експериментальних, ані теоретичних підстав вважати, що ці різні за природою маси ($m_{ін}$ і $m_{гр}$) відрізняються за величиною.

7.3.6. *У чому полягає принцип еквівалентності в механіці?*

З того факту, що сили інерції, як і сили гравітації, пропорційні масі МТ $F_{ін} \sim m$, $F_{гр} \sim m$, сформульовано *принцип еквівалентності*: ніякими дослідами при вільному русі тіл не можна відрізнити рух тіла в однорідному полі тяжіння від рівномірно прискореного руху тіла під дією інших тіл або сил інерції.

Наприклад, перебуваючи всередині закритого об'єму кабіни ліфта, дослідно неможливо встановити, чим викликана дія на тіло сили $m\vec{g}$: тим, що кабіна рухається з прискоренням $-\vec{g}$ чи тим, що нерухома кабіна розташована поблизу поверхні Землі. *Еквівалентність сил інерції та гравітаційних сил становить зміст принципу еквівалентності.*

7.3.7. *Поясніть, як ви розумієте принцип еквівалентності, формулювання якого базується на твердженні про пропорційність інертної та гравітаційної мас?*

При формулюванні принципу еквівалентності правильно казати не про рівність, а про пропорційність інертної $m_{ін}$ і гравітаційної $m_{гр}$ мас, про те, що їхнє відношення стале й однакове для всіх тіл.

Дійсно, якщо дослідити два точкових матеріальних тіла, які перебувають у гравітаційному полі Землі, то для них можна записати такі співвідношення:

$$m_{1ін} \cdot a_1 = \gamma \frac{m_{1g} M}{r^2} \qquad \text{та} \qquad m_{2ін} \cdot a_2 = \gamma \frac{m_{2g} M}{r^2}.$$

Оскільки $a_1 = a_2 = g$, де g – прискорення вільного падіння, то

$$\frac{m_{1ін}}{m_{1g}} = \frac{m_{2ін}}{m_{2g}}.$$

Коефіцієнт пропорційності між інертною і гравітаційною масами може бути довільним, його величина вплине лише на величину гравітаційної сталої γ. Найзручніше прирівняти інертну і гравітаційну маси. Саме для такого вибору стала γ за результатами сучасних вимірювань дорівнює $6{,}672\cdot 10^{-11}$ м^3/кг$\cdot$с^2. Дуже близьке до цього значення γ (з точністю до декількох відсотків) у 1798 р. уперше виміряв Г. Кавендиш, хоча першу оцінку величини γ $\left(7{,}35\cdot 10^{-11}\text{ м}^3/\text{кг}\cdot\text{с}^2\right)$ зробив І. Ньютон.

Завдання для самостійної роботи: вивчіть, за допомогою якого методу Г. Кавендиш виміряв значення γ.

7.3.8. *З якою точністю підтверджується сучасна дослідна перевірка принципу еквівалентності?*

Принцип еквівалентності через його важливе фундаментальне значення для науки неодноразово перевірявся: при дослідженні падіння тіл, за допомогою маятників тощо. Точність вимірювань весь час покращувалась: у Ньютона це було 10^{-3}, у 1898 р. – 10^{-9}, у 1964 р. – 10^{-11}, у 1971 р. – 10^{-12}.

7.3.9. *Чи існує фізичне пояснення принципу еквівалентності?*

Пояснень, чому інертна маса $m_{\text{ін}}$ пропорційна гравітаційній маси $m_{\text{гр}}$ на сьогодні не існує. Проте це не завадило А. Ейнштейну підняти цей принцип, який базується на експериментальному факті, до рівня постулату і зробити відправним пунктом розробленої ним загальної теорії відносності (релятивістської теорії гравітації).

7.3.10. *Дайте визначення і поясніть фізичний зміст таких понять, як потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох тіл і потенціальна енергія тіла в гравітаційному полі.*

Потенціальну енергію взаємодії двох тіл пов'язують з їх гравітаційною взаємодією, її величину знаходять за формулою $U=-\gamma\dfrac{m_1 m_2}{r}$, де m_1 та m_2 – маси тіл; r – відстань між тілами; γ – гравітаційна стала.

Для пояснення фізичного змісту потенціальної енергії тіла в силовому полі уявімо собі стаціонарне поле консервативних сил будь-якої природи (у тому числі, і гравітаційне поле), у якому переміщується частинка із точки поля P у деяку фіксовану точку O. Оскільки робота сил поля не залежить від шляху, то залишається її залежність тільки від положення точки P відносно фіксованої точки O. Це означає, що дана робота буде функцією радіус-вектора $\vec{r}$, який має початок у точці O. Позначивши цю функцію $U(\vec{r})$, запишемо її: $A_{PO}=\int\limits_P^O \vec{F}\cdot d\vec{r}=U(\vec{r})$. Функція $U(\vec{r})$ називається потенціальною енергією тіла в силовому полі. Таким чином, кожній точці силового поля зіставляють своє значення потенціальної енергії тіла в цьому полі.

З різницею саме потенціальної енергії тіла в силовому полі пов'язана робота сил поля на шляху 1–2: $A_{12} = -(U_2 - U_1)$.

Нормована на одиницю маси потенціальної енергії тіла в силовому полі приводить до поняття потенціалу точки поля $\varphi = \dfrac{U}{m}$.

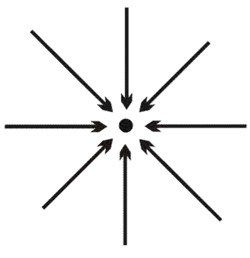
7.3.11. *Що таке силова лінія? Які основні властивості силових ліній?*

- Силова лінія – одна із характеристик потенціального поля у вигляді уявної лінії, дотична до якої в кожній точці простору збігається з напрямком вектора напруженості $\vec{G}$, тобто і з напрямком вектора гравітаційної сили $\vec{F}_{\text{гр}}$, яка діє на точкову пробну масу в цій точці простору.
- Силова лінія напрямлена в той самий бік, що і вектори $\vec{G}$ та $\vec{F}_{\text{гр}}$.
- Силові лінії, створені одним матеріальним тілом, не можуть перетинатись, тому що в точці перетину сила $\vec{F}_{\text{гр}}$ мала б два різних напрямки, що неможливо.
- Силові лінії – неперервні, це пов'язано з тим, що їхні розриви вказували на те, що в точках розриву неможливо визначити вектор $\vec{G}$ (або $\vec{F}_{\text{гр}}$), а це не так: напрямок вектора $\vec{G}$ (або $\vec{F}_{\text{гр}}$) визначений у всіх точках поля.
- Силові лінії приходять з нескінченності й закінчуються на масових тілах.
- Щоб за допомогою картини силових ліній характеризувати величину поля, домовились проводити їх густіше там, де величина поля більша.
- Силові лінії перпендикулярні до еквіпотенціальних ліній (про еквіпотенціальні лінії див. запитання 6.3.10).

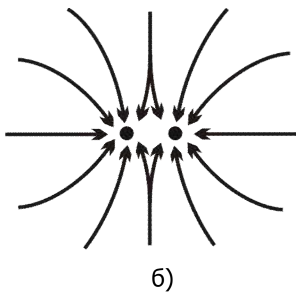
7.3.12. *Зобразіть силові лінії для точкової маси та двох точкових мас.*

Побудовані на засадах, викладених у попередньому запитанні, силові лінії (рис. 7.2) дозволяють побачити, як направлене гравітаційне поле. Звертає на себе увагу той факт, що розподіл силових ліній для точкової маси (рис. 7.2, а) має такий самий вигляд, що і картина просторового розподілу силових ліній для електричного поля для випадку точкового негативного заряду.

Для випадку двох точкових мас (рис. 7.2, а) розподіл силових ліній має більш складний характер.



а)



б)

Рис. 7.2. Силові лінії для точкової маси (а)
і для двох однакових точкових мас (б)

7.3.13. *Який фізичний сенс вкладається в означення гравітаційної енергії тіла?*

Якщо уявити собі, що взаємодія частинок, з яких складається матеріальне тіло або система матеріальних тіл, пов'язана лише з гравітаційними силами, то таке тіло або систему тіл можна характеризувати гравітаційною енергією. Безумовно, при цьому нехтують усіма іншими силами – ядерними, молекулярними, електромагнітними тощо, які можуть бути суттєвими і навіть визначальними, як у випадку матеріальних тіл (твердого тіла, рідини). Таким чином, гравітаційна енергія – це енергія гравітаційної взаємодії (притягання) частинок, з яких складається матеріальне тіло або система матеріальних тіл. Гравітаційна енергія пов'язана з роботою, яку необхідно виконати, щоб розщепити матеріальне тіло або систему матеріальних тіл на елементарні маси і перенести їх на нескінченну відстань.

Розрахована (див., напр., [1] п. 43) за таким визначенням гравітаційна енергія $U_{гр}$ суцільної кулі масою M і радіуса R дорівнює $U_{гр} = -\frac{3}{5}\gamma\frac{M^2}{R}$, де γ – гравітаційна стала.

7.3.14. *Що таке гравітаційний радіус? Який сенс введення гравітаційного радіуса? Коли цією величиною є сенс користуватись (коли вона має реальний фізичний зміст)?*

Існує теорія, згідно з якою енергія спокою тіла, що дорівнює Mc^2, є гравітаційною енергією тіла масою M, яка перетворилась на енергію спокою при стягуванні матерії, що складає тіло, з розсіяного на нескінченності стану, коли ніякої взаємодії між частинками не було. Якщо це так, то $\gamma\frac{M^2}{R} = Mc^2$. Обчислений із цієї рівності радіус називається гравітаційним радіусом $R_{гр} = \gamma\frac{M}{c^2}$.

Обчислений гравітаційний радіус для Землі становить 0,4 см, для Сонця ~ 1 км. Порівняння значень $R_{гр}$ з реальними значеннями радіусів цих астрономічних об'єктів свідчить про те, що в загальному енергетичному балансі матеріальних тіл гравітаційна енергія відіграє незначну роль. Проте існують об'єкти, до яких такий підхід виявився дуже плідним. Це – космічний простір (системи планет навколо зірок, зіркові утворення у вигляді Галактик, увесь Всесвіт). Для таких об'єктів вплив інших взаємодій, окрім гравітаційної, зведений до мінімуму. Це дозволяє обрахувати такі фундаментальні величини, як радіус Всесвіту або принаймні зробити його оцінку. Для таких розрахунків необхідно знати середню густину матерії у Всесвіті, яка в даний час за порядком становить величину $\rho \approx 10^{-25}$ кг/м^3. Це дозволяє знайти величину, яка в даний час вважається радіусом Всесвіту $R_U \approx \frac{c}{\sqrt{\gamma\rho}} \approx 10^{26}$ м (на цю тему читайте, напр., [1] п. 43).

Ще один приклад того, коли враховується радіус гравітації в астрофізиці, пов'язаний з існуванням чорних дірок. Якщо маса об'єкта зосереджена в об'ємі з радіусом, меншим від гравітаційного радіуса $\left(R \le R_{\text{гр}} = \frac{\gamma M}{c^2} \right)$, то навіть світло не вийде за межі такого тіла.

7.3.15. *Поясніть природу чорних дірок.*

У звичайних умовах для речовини, яка утворена з атомів і молекул, вирішальну роль відіграють електромагнітні сили. Ці сили зумовлюють густину речовини $\sim 10^4$ кг/м^3 (напр., для заліза $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, для платини $\rho = 21{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3). У такому конденсованому стані речовини гравітаційні сили, як і електричні, далекодіючі, тобто реалізуються за допомогою полів і швидко спадають при збільшенні відстані $\left(\sim r^{-2}\right)$.

Електричні сили, на відміну від гравітаційних сил, мають різні знаки. Тому в системах, які складаються з однакової кількості позитивно і негативно заряджених частинок, ці сили скомпенсовані. А гравітаційні сили – це сили, пов'язані тільки з притяганням. Тому зі збільшенням кількості частинок ці сили тільки зростають.

Розрахунки показують, що, коли б маса твердого тіла збільшилась до маси Сонця $M_c \sim 2 \cdot 10^{30}$ кг, то гравітаційні сили зумовили б ущільнення тіла до густини $\rho \sim 10^9$ кг/м^3 (густина збільшилася б на 5 порядків). У майбутньому до такого стану має прийти Сонце. Зараз воно гаряче, тому його густина мала.

Сонце – зірка невеликих розмірів. Що ж відбувається із зіркою великих розмірів після її охолодження? Чим більша маса зірки, тим більші гравітаційні сили, тим більше стиснення зірки. З іншого боку, відбувається протилежний процес: стиснення зірки призводить до зростання енергії електронів, які протидіють стисненню завдяки силам відштовхування. Окрім того, енергія електронів при цьому може стати такою великою, що вони можуть вступати в ядерні реакції, перетворюючи протони на нейтрони. Розрахунок показує, що таке відбувається при густині речовини $\rho \sim 10^{10}$ кг/м^3. Так були передбачені, а пізніше відкриті нейтронні зірки – пульсари. Новий якісний стан зірки виникає за маси, більшій ніж три маси Сонця. Відповідно до загальної теорії відносності гравітаційне поле такої зірки утримуватиме фотони – утворюється чорна дірка.

7.3.16. *Як можна виявити чорну дірку, якщо вона все поглинає, у тому числі і світло?*

По-перше, чорну дірку можна було б виявити за спостереженням тіла, що світиться, при його наближенні до чорної дірки. Рух такого тіла був би дуже прискореним, виникало б значне червоне зміщення його спектра і спостерігався б спад інтенсивності випромінювання до нуля при наближенні тіла до чорної дірки.

По-друге, чорну дірку можна виявити за її впливом на сусідні космічні тіла, за збуреннями їх руху, зміною моменту імпульсу сусідів чорних дірок.

За останніми астрофізичними спостереженнями до чорних дір належить нововідкрита зірка Лебідь Х-1.

7.3.17. *Поясніть фізичний зміст теореми Остроградського – Гаусса.*

Для пояснення теореми Остроградського – Гаусса необхідно ввести поняття потоку вектора напруженості $\Delta\Phi = \vec{G} \cdot \Delta S \cdot \vec{n}$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор, нормальний до елемента площі ΔS (рис. 7.3).

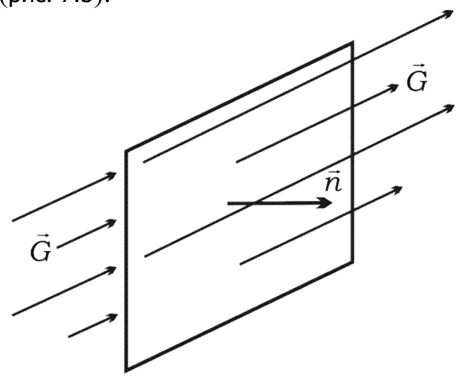


Рис. 7.3. До визначення потоку вектора напруженості

Вибір додатного напрямку вектора $\vec{n}$ довільний. Якщо в полі виділяється об'єм, обмежений деякою замкненою поверхнею, через яку обраховується потік, то за додатний напрямок вектора $\vec{n}$ обирається напрямок зовнішньої до поверхні нормалі. Таким чином, потік буде додатним, якщо вектори напруженості виходять назовні з обмеженого поверхнею довільно вибраного об'єму.

Знайдемо потік вектора напруженості через замкнену поверхню, яка охоплює точкове тіло масою M (рис. 7.4).

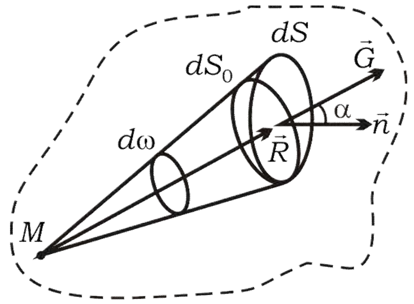


Рис. 7.4. До теореми Остроградського – Гаусса (запитання 7.3.17)

Оберемо елемент поверхні площею ΔS таких розмірів, щоб можна було вважати, що в її межах напруженість $\vec{G}$ є сталою як за напрямком, так і за величиною. Тоді елементарний потік напруженості $d\Phi$ через елемент площі dS визначається співвідношенням

$$d\Phi = \vec{G}\cdot\vec{n}\cdot dS = -\gamma\frac{M}{R^3}\vec{R}\cdot dS\cdot\vec{n} = -\gamma\frac{M}{R^2}\cdot dS\cdot\cos\alpha = -\gamma\frac{M}{R^2}\cdot dS_0, \qquad (7.8)$$

де dS_0 – проекція dS на площину, перпендикулярну до радіус-вектора $\vec{R}$; α – кут між векторами $\vec{G}$ та $\vec{n}$. Оскільки величина $\frac{dS_0}{R^2} = d\omega$ є тілесний кутом, під яким видно елемент dS_0 з місця розташування точкового тіла M, то вираз (7.8) можна переписати у вигляді

$$d\Phi = -\gamma M\, d\omega.$$

Повний потік через замкнену поверхню

$$\Phi = -\int_0^{4\pi}\gamma\cdot M\cdot d\omega = -4\pi\gamma M. \qquad (7.9)$$

Коли поверхня охоплює сукупність (систему) тіл, маси яких $M_1, M_2, ..., M_n$, то теорема Остроградського – Гаусса запишеться у вигляді

$$\Phi = -4\pi\gamma\sum_{i=1}^{n} M_i, \qquad (7.10)$$

тобто потік вектора напруженості через замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі всіх мас, розміщених усередині поверхні, помноженій на $(-4\pi\gamma)$.

7.3.18. *"Напруженість поля гравітації в порожнині, що зроблена в кулі, дорівнює нулю." Чи правильна ця сентенція і яких уточнень вона потребує?*

Дійсно, напруженість поля гравітації в порожнині, що зроблена в кулі, дорівнює нулю (див. приклад 7.2) Але таке визначення потребує деяких уточнень:

- порожнина, що зроблена в кулі, повинна мати сферичну форму;
- центр сферичної порожнини має збігатися із центром кулі;
- куля має бути однорідною;
- під напруженістю поля гравітації в порожнині слід розуміти гравітаційний вплив самої кулі (система має бути ізольованою);
- необхідно підкреслити той факт, що наведена властивість напруженості поля гравітації стосується *будь-якої точки* порожнини;

- розмір порожнини не впливає на результат. (Зміна співвідношення радіусів кулі та порожнини не змінює результат).

Поясніть фізику всіх цих уточнень.

7.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 7.1. *Частинка, яку слід розглядати як матеріальну точку масою* m*, розташована поза однорідної кулі масою* M *на відстані* ℓ *від її центра. Знайдіть: а) потенціальну енергію гравітаційної взаємодії частинки і кулі; б) силу, з якою взаємодіють куля і частинка.*

Розв'язання: Вважатимемо, що куля характеризується не тільки масою M, але й радіусом R_0. (Далі побачимо, що в кінцевий результат величина R_0 не ввійде). Розглянемо (подумки виділимо) у кулі тонкий сферичний приповерхневий шар радіусом r. Маса цього шару dM, а товщина – dr (рис. 7.5).

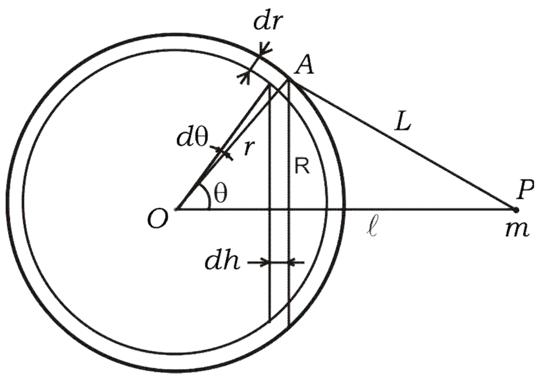


Рис. 7.5. До прикладу 7.1

Виділимо в цьому шарі у площині, що перпендикулярна до відрізка OP, який з'єднує центр кулі та матеріальну частинку, пояс у вигляді кільця радіуса R, шириною dh і площею ds. Величина площі поясу дорівнює

$$ds = 2\pi R \cdot dh,$$

де $R = r\sin\theta$; $dh = r \cdot d\theta$; θ – кут між напрямками ℓ та r (рис. 7.5). Таким чином,

$$ds = 2\pi(r \cdot \sin\theta) r \cdot d\theta = 2\pi r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta. \quad (7.11)$$

Маси тонкого сферичного шару (dM) та елементарного поясу (dM') пропорційні їх площам:

$$\frac{dM'}{dM} = \frac{ds}{4\pi r^2}. \quad (7.12)$$

З урахуванням (7.11) вираз (7.12) набуває вигляду

$$dM' = dM\frac{2\pi r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta}{4\pi r^2} = \frac{dM}{2} \cdot \sin\theta \cdot d\theta \, . \tag{7.13}$$

Оскільки кожна точка елементарного поясу рівновіддалена від матеріальної частинки, для характеристики їх взаємодії можна скористатись формулами, які вводились для точкових мас. Зокрема, потенціальна енергія гравітаційної взаємодії частинки з поясом з урахуванням (7.13) дорівнює

$$dU' = -\gamma\frac{m \cdot dM'}{L} = -\gamma\frac{m \cdot dM}{2L} \cdot \sin\theta \cdot d\theta \, , \tag{7.14}$$

де L – відстань від будь-якої точки поясу до матеріальної частинки (рис. 7.5).

Для трикутника OAP теорема косинусів має вигляд

$$L^2 = \ell^2 + r^2 - 2\ell \cdot r \cdot \cos\theta \, . \tag{7.15}$$

Продиференцюємо (7.15) (ℓ та r – сталі):

$$2L \cdot dL = 2\ell \cdot r \cdot \sin\theta \, d\theta \;\Rightarrow\; \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{L} = \frac{dL}{\ell \cdot r} \tag{7.16}$$

$(7.16) \rightarrow (7.14)$:

$$dU' = -\gamma\frac{m \cdot dM}{2\ell \cdot r} \cdot dL \, . \tag{7.17}$$

Зваживши на те, що величина L, як видно з рис. 7.3, змінюється від $(\ell - r)$ до $(\ell + r)$, проінтегруємо (7.17) у цих межах. Цей інтеграл буде визначати потенціальну енергію гравітаційної взаємодії частинки з тонким сферичним шаром

$$dU = \int dU' = -\int\limits_{\ell-r}^{\ell+r} \gamma\frac{m \cdot dM}{2\ell \cdot r} \cdot dL = -\gamma\frac{m \cdot dM}{2\ell \cdot r} \cdot (\ell + r - \ell + r) = -\,\gamma\frac{m \cdot dM}{\ell} \, . \tag{7.18}$$

Інтегруючи (7.18) за всіма тонкими шарами в межах кулі, знайдемо шукану потенціальну енергію гравітаційної взаємодії матеріальної частинки з кулею:

$$U = -\gamma\frac{m}{\ell}\int dM = -\gamma\frac{Mm}{\ell} \, . \tag{7.19}$$

Потенціальна сила – це градієнт потенціальної енергії зі знаком "мінус": $F_r = -\dfrac{\partial U}{\partial \ell}$. Тому шукана сила, з якою куля діє на частинку, дорівнює

$$F = -\gamma\frac{mM}{\ell^2} \, . \tag{7.20}$$

В и с н о в о к: Вирази (7.19) і (7.20) дуже схожі на такі у випадку взаємодії двох точкових мас. Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії та сила взаємодії матеріальної точки й кулі, такі ж самі, як і у випадку, коли б уся маса кулі була б зосереджена в одній точці – центрі кулі.

Приклад 7.2. *Доведіть, що сила тяжіння, яка діє на пробну масу всередині однорідного сферичного шару, дорівнює нулю.*

Розв'язання: Будемо вважати, що пробна маса міститься в довільній точці A сферичної порожнини. Побудуємо два подібних конуси з малим кутом розвороту та вершинами, що дотикаються в точці A (рис. 7.6). Висота конусів r_1 і r_2, відповідно. Основи конусів розташовані на сферичному шарі. Площі основ конусів – dS_1 та dS_2. Тілесні кути розвороту обох конусів рівні $\Omega_1 = \Omega_2$. Враховуючи визначення тілесного кута, цю рівність можна переписати таким чином:

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} \;\Rightarrow\; \frac{dS_1}{dS_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{7.21}$$

Якщо товщина сферичного шару – h, а густина матеріалу шару – ρ, то домноживши ліву частину (7.21) на $1 = \dfrac{h \cdot \rho}{h \cdot \rho}$, отримаємо $\dfrac{h \cdot \rho \cdot dS_1}{h \cdot \rho \cdot dS_2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$.

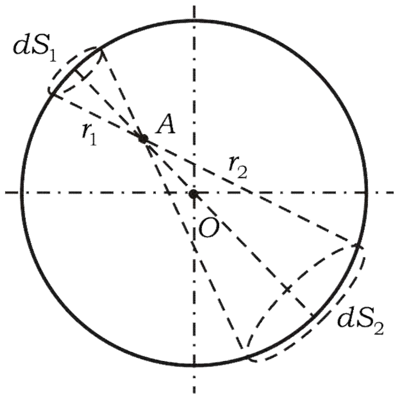


Рис. 7.6. До прикладу 7.2

Врахуємо, що $h \cdot \rho \cdot dS_1 = dM_1$; $h \cdot \rho \cdot dS_2 = dM_2$, де dM_1 та dM_2 – маси відповідних основ конусів. Звідси випливає, що

$$\frac{dM_1}{dM_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \;\Rightarrow\; \frac{dM_1}{dM_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = 1. \tag{7.22}$$

Виходячи із визначення сил гравітації dF_1 та dF_2, які діють між точковими масами – пробною масою m і масами відповідних основ конусів dM_1 та dM_2, запишемо

$$dF_1 : dF_2 = \gamma \frac{m \cdot dM_1}{r_1^2} : \gamma \frac{m \cdot dM_2}{r_2^2} = \frac{dM_1 \cdot r_2^2}{dM_2 \cdot r_1^2}. \tag{7.23}$$

Зіставивши (7.22) і (7.23), маємо

$$dF_1 : dF_2 = 1 \;\Rightarrow\; dF_1 = dF_2 . \tag{7.24}$$

Із (7.24) видно, що сила тяжіння dF_1, яка діє між пробною масою m і ділянкою сферичного шару площею dS_1, компенсується силою dF_2, яка діє на пробну масу m з боку ділянки сферичного шару площею dS_2. Поширюючи цей результат на всю поверхню сферичного шару, можна дійти висновку, що гравітаційної взаємодії між пробною масою m і сферичним шаром не існує. Сила тяжіння, яка діє на пробна масу *A* всередині однорідного сферичного шару, дорівнює нулю.

Звернемо увагу на такі обставини:

1. Точка *A*, у якій розташовувалась пробна маса, обиралась довільно. Це означає, що напруженість гравітаційного поля всередині симетричного відносно центра однорідного сферичного шару дорівнює нулю *в будь-якій точці* порожнини.

2. Товщина шару не впливає на результат. (Зміна співвідношення радіусів кулі та порожнини не змінить результат).

3. Важливим для справедливості отриманого результату є припущення про збіг центрів кулі та порожнини. Важливим є також однорідність шару та рівномірність його товщини.

4. Розглядаючи напруженість гравітаційного поля всередині однорідного сферичного шару і довівши, що вона дорівнює нулю в будь-якій точці порожнини, ми розглядали лише поле гравітації, яке утворює сферичний шар. Безумовно, це не означає, що всередині сферичного шару немає гравітаційних полів від інших джерел, зокрема, від Землі.

Доповнення: Подумайте і дайте відповідь, навіщо при розв'язуванні задачі, коли будувались подібні конуси ми називали умову про "малі кути розвороту"?

Приклад 7.3. *Усередині однорідної кулі з густиною* ρ *існує сферична порожнина, центр якої розташований на відстані* $\vec{\ell}$ *від центра кулі (*рис. 7.7, а*). Знайдіть напруженість* $\vec{G}$ *поля тяжіння всередині порожнини.*

Розв'язання: Нагадаємо, що у випадку суцільної кулі (без порожнини) напруженість $\vec{G}$ гравітаційного поля, яке утворюється всередині однорідної кулі, описується таким законом:

$$\vec{G} = -\gamma\frac{M'}{r^3}\vec{r} = -\gamma\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^3}\vec{r} = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho\vec{r}\,, \tag{7.25}$$

де r – відстань точки A, у якій визначається напруженість, до центра кулі; M' – маса кулі радіуса r. Висновком з (7.25) є той факт, що $G \sim r$. Таким чином, на пробну точкову частинку діє сила притягання, яка визначається лише тією частиною кулі, що розташована під пробною частинкою, тобто кулею радіуса r.

Приступаючи до розв'язування запропонованої задачі, звернемось до прийому, який полягає у використанні так званої "від'ємної" маси. Будемо вважати, що порожнина заповнена матеріалом з густиною $(-\rho)$. Чому "від'ємна" маса? Чому $(-\rho)$? Чому, наприклад, не вважати, що порожнина "заповнена" речовиною з $\rho = 0$?

Характеризувати порожнину умовою $\rho = 0$, напевно, неправильно, оскільки тоді вплив порожнини на шуканий результат був би нульовим: якщо $\rho = 0$, то і сила $F = 0$. Тому шлях, який приводить до усунення з розгляду впливу порожнини, очевидно, є хибним.

Розглянемо варіант, пов'язаний з "від'ємною" масою. Вважаючи, що знак густини речовини всередині порожнини формально змінюється на протилежний $(-\rho)$, ми тим самим змінюємо знак сили гравітації: у цьому випадку напрямки векторів сили та радіус-вектора збігаються, замість сили притягання, яка існує між двома матеріальними тілами, у разі появи порожнини виникає сила відштовхування. На пробну частинку у випадку появи порожнини в кулі вплив порожнини пов'язаний з дією сили відштовхування. На відміну від додатних сил тяжіння, між матеріальними тілами з масами m_1 і m_2, між якими може існувати лише притягання, при електростатичній взаємодії між електричними зарядами можуть виникати сили і притягання, і відштовхування.

Виходячи із (7.25), шукана напруженість $\vec{G}$ поля тяжіння в точці A буде складатись із напруженості, що утворює внутрішня частина однорідної кулі радіуса $\vec{r}_1$, і з напруженості, що утворює внутрішня частина порожнини радіуса $\vec{r}_2$, де $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ – радіус-вектори точки A відносно центра O кулі та центра O' порожнини, відповідно (рис. 7.7, б).

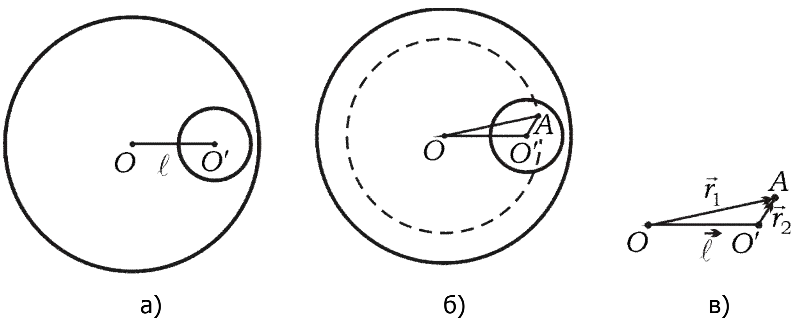


Рис. 7.7. До прикладу 7.3

У силу принципу суперпозиції вектор напруженості $\vec{G}$ поля тяжіння в точці A визначиться векторною сумою двох векторів $\vec{G}_1$ та $\vec{G}_2$, де $\vec{G}_1$ – напруженість поля в точці A, яку створює внутрішня частина кулі з радіусом r_1; $\vec{G}_2$ – напруженість поля в точці A, яку створює частина порожнини з радіусом r_2. Із вищенаведеного розгляду властивостей "від'ємної" маси знаки у векторів $\vec{G}_1$ та $\vec{G}_2$ – різні. Таким чином, скориставшись (7.25), маємо

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho\vec{r}_1 - \frac{4\pi}{3}\gamma(-\rho)\vec{r}_2 = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho\vec{\ell} . \tag{7.26}$$

Висновки та аналіз (7.26):

1. Напруженість поля тяжіння в порожнині визначається відстанню між центром кулі і центром порожнини.
2. Напруженість поля тяжіння в порожнині залежить від густини матеріалу, з якого зроблена куля.
3. Від розмірів кулі та від розмірів порожнини напруженість поля тяжіння в порожнині не залежить.
4. Поле тяжіння в порожнині однорідне, тобто в усіх точках порожнини напруженість поля тяжіння однакова за величиною і напрямком. (Це випливає з того, що в (7.26) відсутня залежності від $\vec{r}_2$, існує лише залежність від $\vec{\ell}$).
5. Якщо порожнина буде розташована в кулі симетрично її центру (якщо центри кулі й порожнини збігаються), то напруженість поля тяжіння від кулі всередині порожнини дорівнює нулю. Це випливає з такого факту: якщо в (7.26) покласти $\ell = 0$, то $\vec{G} = 0$. До такого ж висновку ми дійшли іншим шляхом в прикладі 7.2.

Приклад 7.4. *Визначте напруженість поля тяжіння, яке утворює тонкий однорідний стрижень масою M і довжиною ℓ, уздовж осі його симетрії* (рис. 7.8).

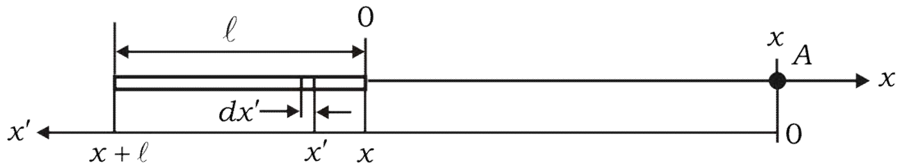


Рис. 7.8. До прикладу 7.4

Розв'язання: Розмістимо на відстані x від краю стрижня пробне точкове тіло (МТ) масою m. Зрозуміло, що закон, за яким змінюється сила, що діє з боку стрижня на МТ, застосувати в простій формі (7.1) тут не можна: стрижень – не є матеріальною точкою.

Виділимо в довільному місці стрижня елементарну ділянку довжиною dx', яка розташована від пробного тіла на відстані x'. Ця ділянка – точкове тіло, маса якого $dm = \rho \cdot S \cdot dx'$, де ρ – густина матеріалу, з якого зроблений стрижень; S – площа перерізу стрижня.

Оскільки обрана елементарна ділянка стрижня – точкове тіло, модуль вектора напруженості поля тяжіння, яке утворює ця ділянка на відстані x' від МТ, можна записати у вигляді

$$dG = \gamma \frac{dm}{x'^2} = \gamma \frac{\rho \cdot S \cdot dx'}{x'^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G = \int_x^{x+\ell} \gamma \frac{\rho \cdot S \cdot dx'}{x'^2} = -\gamma\rho \cdot S \cdot \frac{1}{x'}\Big|_x^{x+\ell} = \gamma\rho S \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\ell} \right) =$$

$$= \frac{\gamma\rho S\ell}{x(x+\ell)} = \frac{\gamma M}{x(x+\ell)}.$$

8. ОСНОВИ НЕБЕСНОЇ МЕХАНІКИ. РУХ У КОСМОСІ

8.1. Короткі теоретичні відомості

- Перший закон Кеплера: кожна планета Сонячної системи рухається навколо Сонця по еліптичній орбіті, в одному із фокусів якої міститься Сонце.
- Другий закон Кеплера: рух планет по орбіті не рівномірний; радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, описує рівні площі за однакові проміжки часу.
- Третій закон Кеплера: квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих напівосей їхніх еліптичних орбіт $T^2 \sim a^3$.
- Перша космічна швидкість (υ_{I}) – це швидкість, яку треба надати тілу, щоб воно стало супутником планети:

$$\upsilon_{\mathrm{I}} = \sqrt{gR}, \tag{8.1}$$

де R – радіус планети; g – прискорення вільного падіння, яке характерне для планети. Для Землі $\upsilon_I \approx 8\ \text{км/с}$.

- Друга космічна швидкість (υ_{II}) – це швидкість, за якої тіло переборює гравітаційне поле планети і переходить із замкненої орбіти на параболічну:

$$\upsilon_{\mathrm{II}} = \sqrt{2gR} = \upsilon_{\mathrm{I}}\sqrt{2}, \tag{8.2}$$

Для Землі $\upsilon_{\mathrm{II}} \approx 11{,}2\ \text{км/с}$.

- Третя космічна швидкість $(\upsilon_{\mathrm{III}})$ – це швидкість, яку необхідно надати тілу, щоб воно покинуло межі Сонячної системи.

Формула для знаходження III-ї космічної швидкості υ_{III} та її числове значення залежать від деталей визначення υ_{III} і напрямку запуску тіла відносно напрямку руху Землі по навколосонячній орбіті. Її значення лежить у межах від ≈ 17 км/с до ≈ 72 км/с (див. запитання 8.3.10).

8.2. Методичні вказівки та поради

1. Треба мати на увазі, що з питаннями небесної механіки безпосередньо пов'язані теоретичні відомості з розділів "Закони збереження", "Закон всесвітнього тяжіння" та "Рух тіл у центральному полі сил".
2. Розрахунки III-ї космічної швидкості ускладнені неоднозначним її визначенням. Окрім того, її величина істотно залежить від напрямку запуску. Тому слід більш детально, ніж у "коротких теоретичних відомостях", розібратися в особливостях розрахунку υ_{III} (див. запитання 8.3.10).
3. При розгляді руху космічного об'єкта зазвичай зручно розглядати його в системі відліку, пов'язаній з тим небесним тілом, у полі тяжіння якого перебуває цей космічний об'єкт.

8.3. Запитання та відповіді

8.3.1. *Що таке фінітний та інфінітний рухи МТ? На що вказує такий рух для космічних об'єктів?*

Якщо рух МТ обмежений у просторі (траєкторії мають форми еліпса або кола), то такий рух називається *фінітним*. Для фінітного руху повна механічна енергія становить $E = T + U < 0$, де T та U – кінетична та потенціальна енергії МТ, відповідно.

Якщо рух МТ не обмежений у просторі (траєкторії – гіпербола, парабола), то такий рух називається *інфінітним.* Для інфінітного руху повна механічна енергія становить $E = T + U \geq 0$.

Для космічних об'єктів можливі такі траєкторії руху:

- еліптична орбіта за $E < 0$;
- кругова орбіта за $E = 0$;
- гіперболічна орбіта за $E > 0$;
- прямолінійна траєкторія, що проходить через центр сил за $L = 0$, де $L = m\upsilon r = m\omega r^2$ – момент імпульсу МТ.

8.3.2. *Від чого залежить висота навколоземної орбіти супутника?*

Висота навколоземної орбіти супутника залежить від імпульсу dp, який отримав супутник під час роботи двигунів ракети $dp = F \cdot dt$, де F – сила тяги ракети; dt – час роботи двигуна. У підсумку це визначить швидкість υ_p ракети при виводі супутника на орбіту. Чим більше швидкість υ_p, тим вище орбіта. При цьому, безумовно, необхідно, щоб $\upsilon_I < \upsilon_p < \upsilon_{II}$, де υ_I та υ_{II} – I-ша та II-га космічні швидкості, відповідно. (У випадку $\upsilon_p \geq \upsilon_{II}$ супутник Землі вийде на навколосонячну орбіту).

Такий висновок ні в якому разі не випливає з умови стаціонарної орбіти – рівності $\frac{m\upsilon^2}{R} = \gamma\frac{mM}{R^2} \;\Rightarrow\; R = \gamma\frac{M}{\upsilon^2}$. Якщо спиратись на цю формулу, то можна дійти до протилежного, неправильного висновку про те, що: чим більша швидкість, тим менший радіус має орбіта, а це не так.

Пояснення того, чому висота навколоземної орбіти супутника залежить від швидкості виводу супутника на орбіту, треба шукати в залежності потенціальної енергії $U = \frac{L}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}$ від відстані r між центром Землі і супутником.

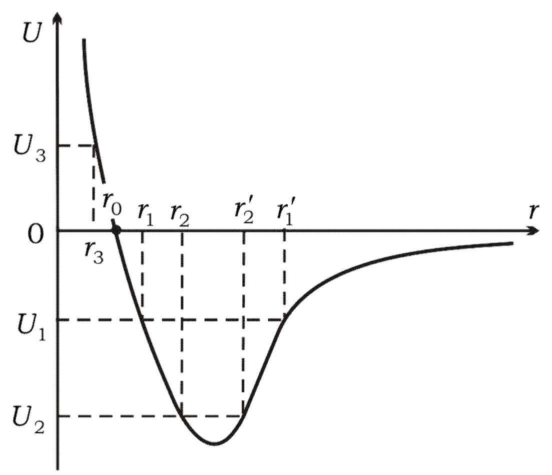


Рис. 8.1. Залежність потенціальної енергії $U = \frac{L}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}$ від відстані r між силовим центром і МТ

Прокоментуйте залежність, зображену на рис. 8.1, і поясніть, чому висота навколоземної орбіти супутника залежить від швидкості виводу супутника на орбіту. Рекомендуємо ознайомитись з [2] п. 57, 58.

8.3.3. *Якої траєкторії набуде ракета, яка запускається з поверхні Землі зі швидкістю* $\upsilon_{II} < \upsilon_p < \upsilon_{III}$*, де* υ_{II} *та* υ_{III} – II-*га та* III-*тя космічні швидкості, відповідно;* υ_p *– швидкість ракети?*

Така ракета стає супутником Сонця. Швидкість $\upsilon_p = \upsilon_{II} \approx 11{,}2\text{ км/с}$ – це мінімальна швидкість ракети для того, щоб вона стала супутником Сонця. При збільшенні швидкості ракети до III-ї космічної швидкості $\upsilon_p < \upsilon_{III}$ буде збільшуватись велика напіввісь еліптичної орбіти, по якій ракета буде рухатись навколо Сонця. По досягненні ракетою III-ї космічної швидкості вона полетить за межі Сонячної системи.

8.3.4. *Які практичні наслідки має той факт, що ексцентриситет орбіт планет Сонячної системи дуже малий?*

Планети Сонячної системи згідно з I-м законом Кеплера рухаються по еліптичних орбітах (рис. 8.2). В одному із полюсів еліпса розташоване Сонце. Ексцентриситет ε дорівнює відношенню відстані h між полюсом і центром еліпса до великої напівосі еліпса a: $\varepsilon = \frac{h}{a}$.

Астрономи встановили, що ексцентриситет ε орбіт планет Сонячної системи дуже малий: наприклад для Венери $\varepsilon = 0,006$, для Землі $\varepsilon = 0,016$ тощо. Це означає, що орбіти планет Сонячної системи – майже колові. На практиці цей факт часто використовується, наприклад, при розв'язуванні задач, у яких не потрібна велика точність результату.

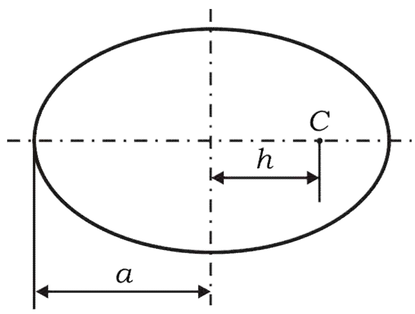


Рис. 8.2. Планети Сонячної системи рухаються по еліптичних орбітах

8.3.5. *Доведіть, що рух планет відбувається в одній площині.*

Врахуємо, що рух планет відбувається в полі центральних сил. Розглянемо рух МТ маси m у такому полі. Нагадаємо, що у випадку дії центральної сили її напрямок у будь-якій точці поля проходить через точку O – силовий центр поля, а її величина залежить лише від відстані до цього центра, тобто $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{e}_r$, де $f(r)$ – модуль вектора $\vec{F}$; $\vec{e}_r$ – одиничний радіус-вектор (див. рис. 4.8).

Для сили відштовхування функція $f(r)$ додатна (як на рис. 4.8), для сили притягання – від'ємна. Початок координат (точка, з якої виходить радіус-вектор) розміщений у точці O – силовому центрі поля.

Момент $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки O дорівнює нулю $\vec{M} = 0$. Це випливає з того, що плече центральної сили дорівнює нулю. Із рівняння моментів $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, де $\vec{L}$ – момент імпульсу, випливає, що за умови $\vec{M} = 0$ величина $\vec{L} = \text{const}$, тобто вектор $\vec{L}$ незмінний за величиною та орієнтацією. При обертальному русі МТ у кожний момент часу вектор $\vec{L}=[\vec{r}\ \vec{p}]$ перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$ (див. рис. 4.9). Проте, якщо $\vec{L}=\mathrm{const}$, то і площина з векторами $\vec{r}$ та $\vec{p}$ буде зберігатись у часі незмінною. Таким чином, траєкторія МТ лежить в одній площині – рух плоский.

Зауважимо, що у площині, у якій відбувається рух, розташований і силовий центр поля. Результати, отримані тут, свідчать про те, що рух планет навколо Сонця відбувається в одній площині (має місце плоский рух).

8.3.6. *Чому рух орбітальної станції навколо Землі не відбувається в одній площині (не є плоским рухом) на відміну від руху планет навколо Сонця?*

Рух орбітальної станції навколо Землі не плоский з декількох причин:

По-перше, у випадку Сонячної системи в основі плоского руху планет навколо Сонця лежить наближення центральних сил. Сонце являє собою в цьому випадку матеріальну точку, силовий центр, на який направлена сила в будь-якій точці поля, чітко визначений і незмінний у часі (стаціонарний чи принаймні квазістаціонарний). Цього не можна сказати про систему Земля – орбітальна станція. Форма Землі аж ніяк не відповідає формі ідеальної кулі. Окрім того, Земля не однорідна. Тому її поле тяжіння не еквівалентне полю тяжіння точкової маси, розміщеній у геометричному центрі Землі.

По-друге, орбітальна станція перебуває на "низькій" орбіті – близько 200 км над поверхнею Землі. Прояви земної атмосфери на таких висотах призводять до гальмування станції, унаслідок чого її орбіта змінює свою форму та розміри.

8.3.7. *Чому закони Кеплера не описують (погано описують) рух штучних супутників Землі по навколоземній орбіті?*

Основні причини, які пояснюють, чому закони Кеплера не описують (погано описують) рух штучних супутників Землі по навколоземній орбіті, викладені у відповіді на попереднє запитання. Варто додати, що дані про відхилення руху штучних супутників Землі від кеплеровських законів вивчаються з метою зробити з них висновки про форму Землі, про розподіл густини в її об'ємі, про характеристики навколоземної атмосфери. Про результати таких досліджень можна прочитати в [1] п. 45.

8.3.8. *Наслідком якого закону збереження є* II *закон Кеплера?*

II закон Кеплера стверджує, що радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, описує за однакові проміжки часу однакові площі. На рис. 8.3 це виглядає як рівність площ секторів з кутами розвороту $d\varphi$ та $d\varphi'$, які "замітає" радіус-вектор за однакові проміжки часу.

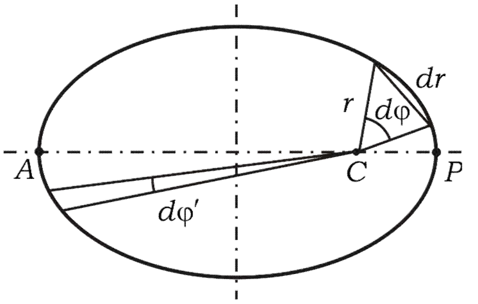


Рис. 8.3. До визначення ІІ-го закону Кеплера

Спробуємо довести ІІ закон Кеплера. Площа одного із секторів (з кутом розвороту $d\varphi$) дорівнює

$$ds = \frac{1}{2} r\,dr = \frac{1}{2} r^2\, d\varphi \;\Rightarrow\; \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}. \tag{8.3}$$

Планета, що обертається навколо Сонця характеризується моментом імпульсу

$$L_z = r \cdot p = r\, m\upsilon = r^2 \cdot m\omega = r^2 \cdot m \frac{d\varphi}{dt}. \tag{8.4}$$

Порівняємо (8.3) і (8.4), маємо $\frac{ds}{dt} = \frac{L_z}{2m}$.

Для ізольованої системи виконується закон збереження моменту імпульсу $L_z = \text{const} \;\Rightarrow\; \frac{ds}{dt} = \text{const} \;\Rightarrow$ швидкість зміни площі секторів, яку "замітає" радіус-вектор, є величиною сталою в часі, тобто за однаковий час радіус-вектор "замітає" однакові площі. Таким чином, ІІ закон Кеплера випливає із ЗЗМІ.

8.3.9. *У літературі можна знайти декілька значень* ІІІ *космічної швидкості, які суттєво відрізняються одне від іншого. Поясніть причину цього факту.*

По-перше, існують декілька альтернативних визначень ІІІ-ї космічної швидкості, а тому й декілька числових її значень, які суттєво відрізняються:

1) ІІІ-тя космічна швидкість (υ_{III}) – швидкість, необхідна для того, щоб тіло, стартуючи з поверхні Сонця, могло вийти за межі Сонячної системи. Це визначення описується такою умовою: $\frac{m\upsilon_{\text{III}}^2}{2} = \gamma \frac{m M_{\text{C}}}{R_{\text{C}}} \;\Rightarrow\; \upsilon_{\text{III}} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{C}}}{R_{\text{C}}}} \cong 42\ \text{км/с}$, де M_{C} і R_{C} – маса та радіус Сонця, відповідно;

2) ІІІ-тя космічна швидкість (υ_{III}) – швидкість тіла, яку йому необхідно надати біля поверхні Землі, щоб це тіло могло вийти за межі Сонячної системи.

По-друге, при розрахунках ІІІ-ї космічної швидкості необхідно враховувати, що Земля рухається відносно Сонця з досить великою швидкістю $\upsilon_3 \approx 30\ \text{км/с}$. У зв'язку з цим у визначенні ІІІ-ї космічної швидкості можливі два випадки запуску тіла з поверхні Землі:

• тіло запускається в напрямку, який збігається з напрямком руху Землі навколо Сонця. Тоді для виходу тіла за межі Сонячної системи необхідно, щоб виконувалась умова

$$\frac{m(\upsilon_{\text{III}}+\upsilon_{З})^2}{2}=\gamma\frac{mM_{\text{С}}}{R_{\text{З–С}}},$$

де $R_{\text{З–С}}$ – відстань від Землі до Сонця ($R_{\text{З–С}} \approx 150$ млн км) $\Rightarrow$ $\upsilon_{\text{III}} \cong 16{,}5$ км/с ;

• тіло запускається в напрямку, протилежному напрямку руху Землі навколо Сонця. Тоді виконується умова

$$\frac{m(\upsilon_{\text{III}}-\upsilon_{З})^2}{2}=\gamma\frac{mM_{\text{С}}}{R_{\text{З–С}}}, \Rightarrow \upsilon_{\text{III}} \cong 72 \text{ км/с} .$$

Радимо на цю тему прочитати [2] п. 61 та [6] С. 90.

8.3.10. *На підставі чого можна стверджувати, що* III-*тя космічна швидкість для Землі збігається з* II-*ю космічною швидкістю для Сонця?*

III космічна швидкість для Землі – це швидкість тіла, яку воно повинно мати, щоб при запуску з поверхні Землі тіло могло вийти за межі Сонячної системи.

II космічна швидкість для Сонця – це швидкість тіла, яку воно повинно мати, щоб покинути орбіту навколо Сонця, тобто вийти за межі Сонячної системи.

Як бачимо, визначення тотожні. Проблеми можуть виникнути у разі прив'язки швидкості тіла до відповідної системи відліку (Земля, Сонце, зірки).

8.3.11. *Якими факторами можна скористатись для того, щоб значно зменшити тривалість космічного перельоту, хоча при цьому траєкторія польоту визначається помітно більшим шляхом?*

Найбільш простий ("прямий") спосіб запуску космічного апарата із Землі (З.), для польоту в бік деякої планети (Пл.), її обльоту, повернення та посадки на Землю показаний на рис. 8.4.

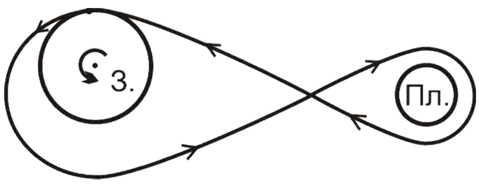


Рис. 8.4. До запитання 8.3.11

Така схема передбачає, що час, який треба витратити для того, щоб долетіти до планети, досить значний. Наприклад, для польоту, наприклад, до Урану потрібно 16 років (розрахунок див. у [1] п. 44). Проте ця схема польоту не враховує сил тяжіння інших планет, орбіти яких перетинаються траєкторією космічного апарата. Цей фактор можна використати для збільшення середньої швидкості, тобто і для скорочення часу польоту, хоча при цьому може спостерігатись помітне збільшення шляху. Наприклад, в одному із варіантів польоту до Урану траєкторія космічного апарата проходить поблизу Юпітера, за рахунок чого час польоту до Урану скорочується з 16 років до 5.

8.3.12. *Якими властивостями обертання Землі навколо своєї осі користуються при запусках і посадках космічних апаратів? У якому місця Землі краще всього розташовувати космодром? Чому?*

Краще всього розташовувати космодром на екваторі або поблизу нього. Це дозволяє при запусках використовувати відцентрову силу інерції, яка максимальна на екваторі. При посадках космічних апаратів, які здійснюються у східному напрямку (за напрямком обертання Землі, яке відбувається також у східному напрямку), швидкість космічного апарата відносно Землі зменшується, що також відіграє позитивну роль.

8.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 8.1. *Супутник Місяця, який рухається по колу радіуса r, після короткотривалого гальмування почав рухатись по еліптичній орбіті, яка дотична до поверхні Місяця. Знайдіть час падіння супутника на поверхню Місяця.*

Розв'язання: Час падіння супутника на Місяць $t = \frac{T_н}{2}$, де $T_н$ – новий період обертання супутника (після гальмування, по еліптичній орбіті), рис. 8.5.

Відповідно до III закону Кеплера справедливе співвідношення

$$\left(\frac{T_н}{T_{ст}}\right)^2 \equiv \left(\frac{2t}{T_{ст}}\right)^2 = \left(\frac{r+R}{2r}\right)^3, \tag{8.5}$$

де $T_{ст}$ – старий період обертання супутника (до гальмування, для руху по коловій орбіті); R – радіус Місяця (рис. 8.5).

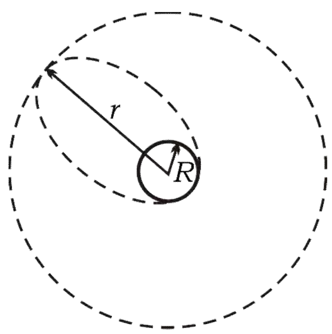


Рис. 8.5. До прикладу 8.1

Для стаціонарної орбіти по колу відцентрова сила, що діє на супутник, за модулем дорівнює силі тяжіння між Місяцем і супутником:

$$\frac{m\upsilon^2}{r}=\gamma\frac{Mm}{r^2}, \tag{8.6}$$

де m – маса супутника; M – маса Місяця.

З урахуванням того, що лінійна швидкість υ супутника на орбіті пов'язана з кутовою швидкістю ω співвідношенням $\upsilon=\omega r=2\pi fr=2\pi\frac{1}{T_{\text{ст}}}r$, вираз (8.6) перепишеться як:

$$m\frac{4\pi^2}{T_{\text{ст}}^2}\cdot\frac{r^2}{r}=\gamma\frac{Mm}{r^2}\ \Rightarrow\ T_{\text{ст}}^2=\frac{4\pi^2 mr^3}{\gamma Mm}. \tag{8.7}$$

Із (8.5) маємо

$$T_{\text{ст}}^2=\left(\frac{2r}{R+r}\right)^3\cdot(2t)^2. \tag{8.8}$$

Прирівняємо праві частини (8.7) та (8.8):

$$\frac{4\pi^2 mr^3}{\gamma Mm}=\left(\frac{2r}{R+r}\right)^3\cdot(2t)^2\ \Rightarrow\ t^2=\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M4}\left(\frac{R+r}{2r}\right)\equiv\frac{\pi^2}{\gamma M}\left(\frac{R+r}{2}\right)^3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{\pi}{\sqrt{\gamma M}}\left(\frac{R+r}{2}\right)^{3/2}.$$

Як бачимо, час падіння супутника на Місяць залежить від радіуса Місяця R і радіуса орбіти r: $t\sim(R+r)^{3/2}$, а також від маси Місяця $t\sim\frac{1}{\sqrt{M}}$.

Приклад 8.2. *Чому дорівнює період обертання супутника, який рухається навколо деякої планети поблизу її поверхні, якщо середня густина планети* $\rho=3{,}3\,\text{г}/\text{см}^3$ *?*

Розв'язання: Маса M планети з урахуванням її радіуса R і густини ρ дорівнює $M=\frac{4\pi}{3}R^3\rho$. Враховуючи, що супутник обертається навколо деякої планети поблизу її поверхні, тобто радіус орбіти приблизно дорівнює радіусу планети, сила $F_{\text{гр}}$ тяжіння між планетою та супутником, масу якого позначимо через m, дорівнює

$$F_{\text{гр}}=\gamma\frac{Mm}{R^2}=\gamma\frac{\frac{4\pi}{3}R^3\rho m}{R^2}=\gamma\frac{4\pi R\rho m}{3}. \tag{8.9}$$

Якщо перейти в НІСВ, то можна записати вираз для відцентрової сили інерції, яка діє на супутник, який обертається по орбіті відчуває дію

$$F_{\text{відц}} = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R, \qquad (8.10)$$

де T – період обертання супутника.

Умовою перебування супутника на стаціонарній орбіті є рівність сили тяжіння (8.9) і відцентрової сили (8.10):

$$\gamma\frac{4\pi R\rho m}{3} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \ \Rightarrow\ T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}.$$

З отриманої формули видно, що період T обертання не залежить від маси планети, її розмірів (радіуса), маси супутника, а залежить від густини планети.

Якщо в останню формулу підставити числові значення величин, то отримуємо значення періоду обертання супутника:

$$T = \sqrt{\frac{3\cdot 3,14}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 3,3\cdot 10^3}} \approx \frac{3\cdot 10^4}{4,7}c \approx 1,8\ \text{год}.$$

Приклад 8.3. *Деяка планета масою m рухається по коловій орбіті навколо Сонця зі швидкістю $\upsilon = 34,9\ \text{км/с}$ (відносно геліоцентричної системи відліку). Знайдіть період обертання цієї планети і визначте, що це за планета.*

Розв'язання: Умова утримування планети на орбіті навколо Сонця полягає в рівності сили гравітації та відцентрової сили:

$$\gamma\frac{M_\text{C}\cdot m}{R^2} = \frac{m\upsilon^2}{R} \ \Rightarrow\ \text{радіус орбіти } R = \gamma\frac{M_\text{C}}{\upsilon^2}, \text{ де } M_\text{C} \text{ – маса Сонця.} \qquad (8.11)$$

Підставивши (8.11) у формулу для періоду T обертання тіла по колу, що дорівнює довжині кола, поділеному на лінійну швидкість тіла, отримаємо шукану величину:

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi\gamma M_\text{C}}{\upsilon^3}. \qquad (8.12)$$

Маса Сонця $M_\text{C} = 2\cdot 10^{30}\ \text{кг}$. Підставивши в (8.12) цю величину, а також інші відомі з таблиці фундаментальних величин і з умови задачі величини, отримуємо

$$T = \frac{2\cdot 3,14\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}{(34,9\cdot 10^3)^3} \approx 19,4\cdot 10^6\ \text{с} \approx 224,5\ \text{доби (земні)}.$$

Період обертання Землі навколо Сонця – $T_3 = 365$ діб. Яка планета Сонячної системи має період обертання T = 224,5 земних доби? Порівняємо періоди обертання цих двох планет:

$$\frac{T_x}{T_3} = \frac{224,5}{365} = 0,614$$

Із [9] (табл. 2) можна зробити висновок, що такий період обертання навколо Сонця має Венера.

Приклад 8.4. *Супутник, який рухається в екваторіальній площині Землі із заходу на схід по коловій орбіті радіуса* $R = 2\cdot 10^4$ км*, з'являється над деяким пунктом на екваторі через кожні* $\tau = 11{,}6$ год. *Знайдіть масу Землі.*

Розв'язання: Земля обертається, якщо дивитись на вісь обертання Землі з її Північного полюсу, проти годинникової стрілки, тобто із заходу на схід (рис. 8.6). Напрямки обертання Землі і супутника збігаються.

Введемо такі позначення: $\vec{\upsilon}$ – швидкість супутника відносно нерухомих зірок; $\vec{\upsilon}_З$ – лінійна швидкість обертання Землі, виміряна в точці, яка розташована на орбіті супутника: $\upsilon_З = \omega R = 2\pi \frac{1}{T} R$, де $T = 24$ год; $\vec{\upsilon}_{відн}$ – швидкість супутника відносно поверхні Землі. Ці швидкості пов'язані між собою співвідношенням

$$\upsilon_{відн} = \upsilon - \upsilon_З = \frac{2\pi R}{\tau} \;\Rightarrow\; \upsilon = \frac{2\pi R}{\tau} + \upsilon_З = \frac{2\pi R}{\tau} + \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{T}\left(1 + \frac{T}{\tau}\right).$$

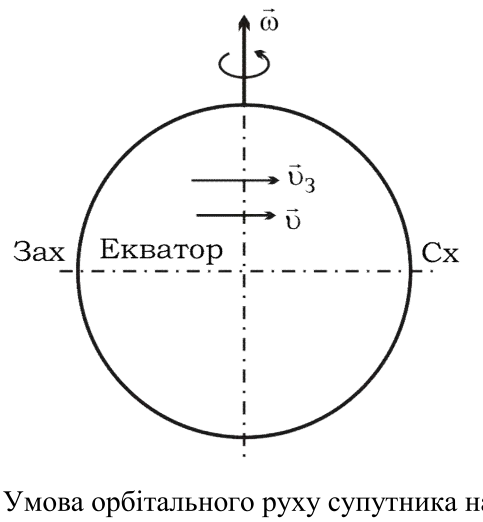


Рис. 8.6. До прикладу 8.4

Умова орбітального руху супутника навколо Землі має вигляд

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = \gamma \frac{mM_З}{R^2} \;\Rightarrow\; M_З = \frac{R\upsilon^2}{\gamma} = \frac{R}{\gamma}\frac{4\pi^2 R^2}{T^2}\left(1 + \frac{T}{\tau}\right)^2.$$

Числове значення маси Землі, знайдене за отриманою формулою, дорівнює

$$M_З = \frac{4\cdot(3{,}14)^2\cdot(2\cdot 10^4)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(24\cdot 3600)^2}\left(1 + \frac{24}{11{,}6}\right)^2 \approx \frac{8\cdot 10^{21}\cdot 4\cdot 10\cdot 3^2}{10^{-11}\cdot 6{,}67\cdot(86400)^2} \approx 6\cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Табличне значення маси Землі дорівнює $M_З = 5{,}98\cdot 10^{24}$ кг .

Приклад 8.5. *Чому дорівнює повна енергія планети в Сонячній системі? Обчисліть цю величину для Землі.*

Розв'язання: Згідно з моделлю Сонячної системи, створеною І. Кеплером (1609), планети рухаються навколо Сонця по плоскій еліптичній орбіті, а Сонце перебуває в одному із фокусів еліпса (рис. 8.7). Сила тяжіння між планетою та Сонцем описується законом $F = -\gamma \frac{M \cdot m}{r^2}$, де r – відстань між планетою та Сонцем; γ – гравітаційна стала; M – маса Сонця; m – маса планети.

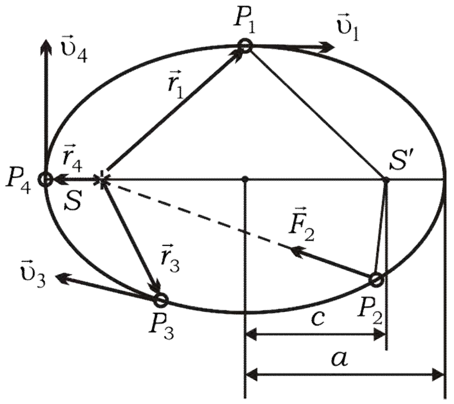


Рис. 8.7. До прикладу 8.5

Планета рухається в силовому потенціальному полі центральних сил, центр якого збігається з положенням Сонця. Тобто на планету за будь-якого її положення на орбіті навколо Сонця діє тільки сила тяжіння з боку Сонця. Ця сила напрямлена по прямій, яка з'єднує планету і Сонце, і залежить від відстані між планетою і Сонцем, тобто від радіус-вектора $\vec{r}$ (рис. 8.7).

Рух планети навколо Сонця можна характеризувати відповідними величинами потенціальною U і кінетичною $E_к$ енергіями, значення яких у кожній точці орбіти різні. При цьому повна енергія E і момент імпульсу L планети в замкненій системі залишаються сталими.

Зміна потенціальної енергії dU визначається роботою dA сил поля тяжіння, взятою зі зворотним знаком:

$$dU = -dA = -F(r) \cdot dr, \quad (8.13)$$

де $F(r)$ – сила тяжіння, яка діє на планету з боку Сонця. Ця сила різна в різних точках орбіти не тільки за напрямком, але й за величиною. Сила $\vec{F}(r)$, з якою планета притягується до Сонця, направлена до центра силового поля, тобто на Сонце, у протилежний від напрямку вектора $\vec{r}$ бік. Окрім того, відомо що $F(r) \sim -\frac{1}{r^2}$. Таким чином, запишемо $F(r) = -\frac{B}{r^2}$, де стала $B = \gamma M m$.

Знайдемо потенціальну енергію планети в будь-якій точці поля, пронормувавши потенціальну енергію так: $U(\infty) = 0$.

Інтегруючи (8.13) з урахування вибору точки, де $U = 0$, отримуємо

$$U(\infty) - U(r) = -\int_r^\infty F\, dr \;\Rightarrow\; U(r) = \int_r^\infty F\, dr \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(r) = -B\int_r^\infty \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{B}{r}. \qquad (8.14)$$

Як видно з (8.14), при виборі початку відліку потенціальної енергії в нескінченності потенціальна енергія планети на навколосонячній орбіті завжди від'ємна. У протилежному випадку (за додатної повної енергії) планета вийшла б за межі дії тяжіння Сонця і її рух став би, замість фінітного, інфінітним – необмеженим у просторі (див. [2] п. 57, 58).

Повна енергія планети в будь-якій точці поля дорівнює

$$E(r) = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{B}{r}, \qquad (8.15)$$

де υ – швидкість планети на орбіті в точці з координатою $\vec{r}$.

Розглянемо поведінку планети в точках орбіти: наприклад, P_1 та P_4 (рис. 8.7). Точка P_1 рівновіддалена від обох фокусів еліпса, тобто $2r_1 = 2a$, де a – довжина великої напівосі еліпса. Це випливає із фундаментальної властивості еліпса: сума відстаней від будь-якої точки еліпса до обох фокусів еліпса є величиною сталою і дорівнює $2a$.

Повна енергія планети в точці P_1 дорівнює

$$E_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{B}{a}. \qquad (8.16)$$

Момент імпульсу планети в цій точці дорівнює

$$\vec{L}_1 = \left[\vec{r}_1, m\vec{\upsilon}_1\right].$$

Кут між вектором $\vec{r}_1$ і вектором швидкості $\vec{\upsilon}_1$ у цій точці, як видно з рис. 8.7, дорівнює

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{r_1^2 - c^2}}{r_1}\right),$$

де c – відстань від центра еліпса до одного із фокусів еліпса. Таким чином, з урахуванням, що $a = r_1$ (як було показано вище), для модуля вектора $\vec{L}_1$ маємо

$$L_1 = r_1 \cdot m\upsilon_1 \cdot \sin\alpha = r_1 \cdot m\upsilon_1 \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{r_1} = m\upsilon_1\sqrt{a^2 - c^2} . \qquad (8.17)$$

У точці P_4 (рис. 8.7) модуль радіус-вектора $r_4 = a - c$, а повна енергія планети

$$E_4 = \frac{m\upsilon_4^2}{2} - \frac{B}{a - c}. \qquad (8.18)$$

Кут між радіус-вектором $\vec{r}_4$ і вектором швидкості $\vec{\upsilon}_4$, як видно з рис. 8.7, дорівнює $\pi/2$. Момент імпульсу планети в цій точці

$$L_4 = m\upsilon_4 \cdot (a - c). \qquad (8.19)$$

У замкненій системі, що розглядається, виконуються закон збереження моменту імпульсу

$$L_1 = L_4 \;\Rightarrow\; m\upsilon_1\sqrt{a^2 - c^2} = m\upsilon_4 \cdot (a - c) \qquad (8.20)$$

і закон збереження повної енергії

$$E_1 = E_4 \Rightarrow \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{B}{a} = \frac{m\upsilon_4^2}{2} - \frac{B}{a - c}. \qquad (8.21)$$

Із (8.20) знайдемо $\upsilon_4 = \upsilon_1\dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a - c}$ і підставимо це значення в (8.21):

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{B}{a} = \frac{m\upsilon_1^2}{2}\cdot\frac{a + c}{a - c} - \frac{B}{a - c} \;\Rightarrow\; \frac{m\upsilon_1^2}{2}\left(1 - \frac{a + c}{a - c}\right) = B\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a - c}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m\upsilon_1^2}{2}\left(\frac{a - c - a - c}{a - c}\right) = B\left(\frac{a - c - a}{a(a - c)}\right) \;\Rightarrow\; \frac{m\upsilon_1^2}{2}2c = B\frac{c}{a} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{B}{2a}. \qquad (8.22)$$

Формула (8.22) дає значення кінетичної енергії в точці P_1, виражене через параметри орбіти (a) і характеристики силового поля $(B = \gamma Mm)$. Врахувавши (8.22) у (8.16), отримуємо значення повної енергії в точці P_1:

$$E_1 = \frac{B}{2a} - \frac{B}{a} = -\frac{B}{2a}. \tag{8.23}$$

Це значення повної енергії планети Сонячної системи зберігається в усіх точках орбіти. Як видно із (8.23), повна енергія різних планет на навколосонячній орбіті залежить тільки від одного параметра їх еліптичних орбіт – від великої напівосі еліпса a та від маси планети m. Залежність від інших параметрів орбіт (напр., від їх ексцентриситету, який для різних планет різний) відсутня.

Для Землі

$$B = \gamma Mm = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \approx 7,9 \cdot 10^{44} \text{ м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2};$$

Для величини $a \approx 150 \cdot 10^9$ м значення повної механічної енергій планети при її обертанні навколо Сонця дорівнює

$$E = -\frac{B}{2a} = -\frac{7,9 \cdot 10^{44}}{3 \cdot 10^{11}} \approx -2,65 \cdot 10^{33} \text{ Дж}.$$

9. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ (РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА)

9.1. Короткі теоретичні відомості

- Перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{\upsilon x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{9.1}$$

Вважається, що система відліку K' рухається зі швидкістю υ у додатному напрямку вздовж осі x системи відліку K. Осі x та x' збігаються, а осі y та y', z та z' паралельні; c – швидкість світла у вакуумі.

- Релятивістське сповільнення ходу годинника:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{9.2}$$

де Δt – проміжок часу між двома подіями, який відраховується за годинником, який розташований у лабораторній (нерухомій) K-СВ; $\Delta t'$ – проміжок часу між тими ж подіями, що відраховується за годинником, який відносно рухомої K'-СВ покоїться (годинник рухається разом із тілом відліку, у цьому випадку годинник показує власний час).

- Релятивістське скорочення довжини:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \tag{9.3}$$

де l_0 – довжина стрижня, виміряна в K'-СВ, відносно якої стрижень нерухомий (власна довжина); l – довжина стрижня, виміряна в системі відліку, відносно якої стрижень рухається зі швидкістю υ (у K-СВ).

- Релятивістський закон перетворення швидкостей:

$$u'_x = \frac{u_x-\upsilon}{1-\dfrac{\upsilon u_x}{c^2}};\quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\dfrac{\upsilon u_x}{c^2}};\quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\dfrac{\upsilon u_x}{c^2}}, \tag{9.4}$$

де вважається, що система відліку K' рухається зі швидкістю υ у додатному напрямку осі x K-системи відліку. Осі x та x' збігаються, а осі y та y', z та z' паралельні.

- Інтервал між подіями 1 та 2 описується величиною, квадрат якої дорівнює

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2, \tag{9.5}$$

де t_{12} – проміжок часу між подіями 1 та 2; l_{12}^2 – відстань між точками, у яких відбулись події. Інтервал є величиною інваріантна в усіх ІСВ.

- Релятивістський імпульс частинки:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{9.6}$$

де m – маса частинки; $\vec{\upsilon}$ – швидкість частинки.

- Релятивістська енергія частинки:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}; \tag{9.7}$$

- Релятивістський імпульс (p) і релятивістська енергія (E) частинки, яка рухається зі швидкістю υ, пов'язані між собою співвідношенням

$$p = E \cdot \frac{\upsilon}{c^2}. \tag{9.8}$$

- Основний закон релятивістської динаміки:

$$\vec{F} = m\left[\gamma\,\vec{a} + \vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)\right], \quad \text{де } \gamma = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} \text{ – коефіцієнт Лоренца; } \beta = \frac{\upsilon}{c}. \tag{9.9}$$

- Повна релятивістська енергія E пов'язана з кінетичною енергією T та енергією спокою $E_0 = mc^2$ співвідношенням

$$E = T + E_0. \tag{9.10}$$

- Зв'язок між енергією (E), кінетичною енергією (T) та імпульсом (p) релятивістської частинки здійснюється через співвідношення:

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2; \tag{9.11}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(T + 2mc^2\right)}. \tag{9.12}$$

9.2. Методичні вказівки та поради

1. За домовленістю вважають, що K'-СВ – це рухома система, а K-СВ – нерухома (лабораторна) система.

2. Треба пам'ятати, що час тече повільніше в рухомій (K') системі відліку. Тобто проміжок часу між двома подіями в рухомій (K') системі завжди менший, ніж проміжок часу між цими ж подіями в нерухомій (лабораторній) системі $\Delta t' < \Delta t$.

3. Кінематичні формули СТВ пов'язують "власну" довжину з довжиною в лабораторній системі відліку та "власний" час із часом у лабораторній системі відліку дуже простими формулами через коефіцієнт Лоренца $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Вирішуючи, треба ділити чи множити на $\sqrt{1-\beta^2}$ (де $\beta = \dfrac{v}{c}$), слід пам'ятати, що величина $\sqrt{1-\beta^2}$ завжди менша від одиниці. Тому результатом множення на $\sqrt{1-\beta^2}$ будь-якої величини (це може бути проміжок часу або геометрична довжина відрізків) буде зменшення цієї величини, а операція ділення приведе до її збільшення. Далі треба пам'ятати, що під часу руху тіла його довжина зменшується, а під час руху годинника його хід сповільнюється (проміжки часу збільшуються).

4. Задачі, які розв'язуються в курсі загальної фізики "Механіка" з розділу "Релятивістька механіка. СТВ", пов'язані з розглядом руху тіл тільки в інерціальних системах відліку.

5. Концепція двох мас – маси спокою та релятивістської маси, яку можна зустріти в деяких книжках, застаріла. Сучасна фізика оперує з однією – інваріантною масою[1]. Користуючись ідеями та формулами із застарілих підручників з фізики, можна отримати правильну або майже правильну відповідь (див. приклад 9.3). Однак, незважаючи на це, розв'язувати задачі завжди треба, виходячи з поглядів і досягнень сучасної фізики.

Так само неприпустиме введення двох мас – поздовжньої та поперечної, як це робиться в деяких застарілих підручниках. З погляду сучасної фізики і тут треба брати до уваги, що маса є величиною інваріантною, що існує одна маса, "просто" маса, без будь-яких прикмет типу "маса спокою", "релятивістська маса", "поперечна маса", "поздовжня маса" тощо. (При цьому, безумовно, не відмовляються від розгляду гравітаційної та інертної маси).

6. Звернемо увагу на те, що визначення квадрата інтервалу між двома подіями в псевдоевклідовому 4-вимірному просторі в більшості підручників (напр., у [3]) визначається як $s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta \ell^2$.

Часоподібним інтервалом вважається дійсний інтервал $s_{12}^2 > 0$. Такі інтервали характеризують події з причино-наслідковим зв'язком.

Просторовоподібним інтервалом вважається уявний інтервал $s_{12}^2 < 0$. Такі інтервали характеризують події без причино-наслідкового зв'язку.

У деяких підручниках (напр., [1]) квадрат інтервалу визначається в інший спосіб: $s^2 = \Delta \ell^2 - c^2 \cdot \Delta t^2$. Це призводить до діаметрально протилежних визначень часоподібного та просторовоподібного інтервалів, однак висновки відносно їх можливості або неможливості описувати події з причино-наслідковим зв'язком збігаються. Основна властивість інтервалу – його інваріантність залишається незмінною в обох випадках визначення інтервалу. Будемо використовувати визначення інтервалу (9.5), яке наведене, наприклад, у [3].

9.3. Запитання та відповіді

Релятивістська кінематика

9.3.1. *Коротко сформулюйте сучасні уявлення про простір-час. Який зміст вкладається у висловлення про властивості простору-часу як єдиного континуума?*

Спеціальна теорія відносності (СТВ) виявила залежності простору і часу від швидкості руху об'єктів відносно нерухомої СВ. СТВ об'єднала простір і час в єдиний 4-вимірний просторово-часовий континуум (суцільне матеріальне утворення, властивості якого змінюються неперервно).

---

[1] Про це можна прочитати, наприклад, у журналі "Успехи физических наук" (1999, Т. 158, № 3, С. 511; 2000, Т. 170, № 12, С.1363).

9.3.2. *Які постулати покладені в основу доведення перетворень Лоренца?*

В основу доведення перетворень Лоренца покладено два постулати: принцип відносності ("усі ІСВ рівноправні") і твердження про інваріантність швидкості світла у вакуумі, виміряну в будь-якій (в усіх) ІСВ.

9.3.3. *Що таке постулат? Чому принцип відносності називається постулатом?*

Ознаки постулату:

- постулат – це базове твердження (припущення), що має принципово важливий характер для великого класу явищ;
- постулат – це твердження (припущення), яке не потребує експериментальної перевірки (доведення);
- постулат є висновком багатьох експериментальних даних і не суперечить жодному з них;
- постулат, хоча і базується на всіх існуючих експериментальних фактах, виходить за межі експериментальної перевірки. Тобто постулат має абсолютний характер. Це випливає з того, що експеримент дозволяє отримати результати лише з певною точністю, доступною для вимірювання на даному етапі розвитку науки. У зв'язку з цим постулат припускає, що при будь-якому (навіть значному, але завжди скінченному) підвищенні точності результати експерименту будуть узгоджуватись із постулатом;
- постулат не виключає, що в майбутньому будуть отримані нові невідомі на сьогодні експериментальні факти, які зроблять цей постулат окремим випадком іншого більш широкого постулату, як це трапилось із принципом відносності Галілея, який був "поглинений" іншим постулатом – принципом відносності Ейнштейна. Ця характеристика постулату не принижує його фундаментального значення. Дійсно, всі наукові поняття, закони, теорії, у тому числі, і постулати справедливі в певних межах. Однак вихід за межі їх застосування не робить їх неправильними. Про це свідчить багато прикладів з історії фізики.

До постулатів належать, наприклад, твердження про сталість швидкості світла, про рівноправність усіх інерціальних СВ, постулати Бора в атомній фізиці.

9.3.4. *Яка деталь у перетвореннях Лоренца вказує на зв'язок між простором і часом?*

Перехід від часу t', який відраховується в рухомій K'-СВ, до часу t у нерухомій K-СВ, відбувається за допомогою формули

$$t = \frac{t' + \frac{\upsilon}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Ця формула свідчить про відносність часу. З неї видно, що: по-перше, час залежить від швидкості руху власної СВ (існує сповільнення ходу рухомого годинника); по-друге, час залежить від просторової координати (x') місця, у якому розташований годинник (рис. 9.1).

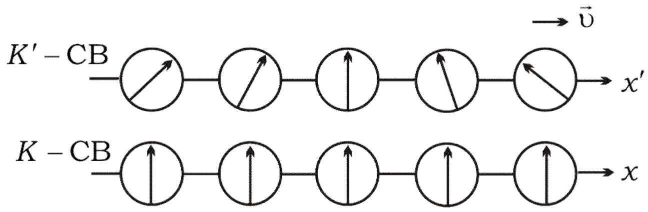


Рис. 9.1. До запитання 9.3.4

Залежність часу від координати – важлива обставина, яка вказує на нерозривний зв'язок між простором і часом. Фактично, уже з перетворень Лоренца видно, що розглядати окремо час і простір не можна. Слід казати про єдиний простір-час, у якому відбуваються всі фізичні явища (див. запитання 9.3.1).

9.3.5. *У чому полягає принципова різниця у вимірюванні тривалостей процесу, що відбувається в одній точці простору, і процесу, що починається в одній точці й закінчується в іншій?*

Як випливає з перетворень Лоренца, тривалість процесу, що відбувається в *К*-СВ, в одній точці простору із фіксованою координатою x протягом часу Δt, у K'-СВ цей процес відбувається протягом часу, величина якого визначається формулою $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1-\beta^2}$.

Тривалість процесу, що в *К*-СВ починається в одній точці простору з координатою x_1, а закінчується в іншій точці з координатою x_2 і триває протягом часу Δt, у K'-СВ визначається формулою

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (x_2 - x_1)\upsilon / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

9.3.6. *У науково-популярній літературі з СТВ описаний "ефект близнюків". Чому його ще називають "парадоксом близнюків"? Що в ньому парадоксального?*

Нагадаємо, у чому ж полягає "ефект близнюків". Якщо б один із двох близнюків вирушив у космічну подорож на ракеті зі субсвітловою швидкістю, а другий залишився б на Землі, то після повернення ракети на Землю під час зустрічі перший близнюк був би молодшим за другого.

"Парадокс" виникає внаслідок того, що тут не враховується відносність руху, згідно з якою, можна стверджувати, що в подорож вирушив другий близнюк, а близнюк, який перебував на ракеті, нікуди не полетів. Тоді виходить, що після зустрічі молодшим має бути той близнюк, що залишався на Землі, а не той, що перебував у ракеті. Хто з них буде дійсно молодшим? У цьому і полягає парадокс. Вихід із нього слід шукати в тому, що системи відліку тут не еквівалентні: одна з них, пов'язана із Землею, – інерціальна, друга СВ, пов'язана з ракетою, – неінерціальна. Формули для сповільнення часу в рухомій СВ справедливі тільки для інерціальної СВ. Тому, напевно, все ж можна стверджувати, що молодшим під час зустрічі буде близнюк, який перебував у ракеті.

9.3.7. *Швидкість МТ є величиною інваріантною чи неінваріантною?*

Швидкість МТ – неінваріантна величина відносно як перетворень Галілея $\left(u_x = u'_x + \upsilon\right)$, так і перетворень Лоренца:

$$\left(u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon u'_x}{c^2}}\right).$$

9.3.8. *Чому твердження про сталість швидкості світла у вакуумі в усіх ІСВ є постулатом, хоча це твердження можна строго довести (див.* запитання 9.3.9*)?*

Рівність швидкості світла у вакуумі (c) для всіх інерціальних СВ як постулат є базовим принципом СТВ. І вже потім у межах створеної СТВ із перетворень Лоренца, як один із їх наслідків, можна отримати (строго довести, як це буде зроблено в запитанні 9.3.9,) інваріантність величини швидкості поширення світла у вакуумі c.

9.3.9. *Доведіть, що швидкість світла у вакуумі в усіх інерціальних СВ однакова.*

Існує система відліку K', яка рухається зі швидкістю υ у додатному напрямку осі x відносно нерухомої K-системи відліку. Напрямки осей x та x' збігаються. У K-СВ зі швидкістю u_x рухається МТ. Її швидкість у K'-СВ дорівнює u'_x. Відомий закон (9.4) для перетворення швидкостей має вигляд

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \dfrac{\upsilon u_x}{c^2}}.$$

Будемо вважати, що розглянута тут МТ – квант світла, фотон. Як відомо, швидкість фотона у вакуумі дорівнює c. Таким чином, у K-СВ швидкість МТ дорівнює $u_x = c$. У K'-СВ швидкість такої МТ дорівнює

$$u'_x = \frac{c - \upsilon}{1 - \dfrac{\upsilon c}{c^2}} = \frac{c - \upsilon}{c - \upsilon} \cdot c = c.$$

Тобто $u'_x = u_x = c$ – швидкість світла у вакуумі для всіх інерціальних СВ незмінна (інваріантна).

9.3.10. *Чому результат досліду І.-Л. Фізо (1851), який уперше показав, фактично, неточність перетворень Галілея, не викликав серед вчених того резонансу, як це сталось з результатом експерименту Майкельсона – Морлі (1881)?*

Дослід І.-Л. Фізо полягав у вимірюванні зміни швидкості світла в рухомому середовищі залежно від збігу чи протилежності напрямків поширення світла та руху середовища, наприклад, води. Детально про дослід Фізо можна прочитати, наприклад, у [1], п. 12, 17.

Дослід Фізо показав, що закон додавання швидкості, який використовується в класичній механіці, тут не виконується. Цей несподіваний і дуже важливий результат за своїм значенням, як видно зараз, мав би відігравати не менш суттєву роль у створенні СТВ, ніж відомий результат експерименту Майкельсона – Морлі. Однак у середині XIX ст. пояснення результатів досліду Фізо знайшли в залученні ідеї О.-Ж. Френеля про те, що середовище, яке рухається в ефірі, може частково захоплювати ефір. Саме цим (неправильно) і пояснили результати досліду Фізо.

Лише після створення в 1905 р. А. Ейнштейном СТВ стало зрозумілим, що в досліді Фізо вперше була експериментально доведена неспроможність додавання швидкостей за класичними правилами перетворень Галілея. Фактично, уже після досліду Фізо можна було б поставити під сумнів факт існування ефіру з усіма наслідками, які з цього випливають.

9.3.11. *Проілюструйте декількома прикладами застосування релятивістського закону додавання швидкостей.*

Релятивістський закон додавання швидкостей випливає зі співвідношень (9.4): при колінеарному русі двох тіл, швидкість яких у нерухомій системі відліку відома і дорівнює відповідно $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_2$, швидкість одного тіла відносно другого дорівнює

$$\upsilon_{\text{відн}} = \frac{\left|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right|}{1 + \dfrac{\upsilon_1 \upsilon_2}{c^2}}.$$

За допомогою цієї формули можна переконатись, що, умовно кажучи, виконуються такі співвідношення:

1) $2 \text{ км/год} + 2 \text{ км/год} = 4{,}0 \text{ км/год}$;

2) $200\,000 \text{ км/с} + 200\,000 \text{ км/с} \approx 277\,000 \text{ км/с}$;

3) $200\,000 \text{ км/с} - 100\,000 \text{ км/с} \approx 82\,000 \text{ км/с}$.

9.3.12. *Уявімо собі, що ракета летить зі швидкістю* $100\,000$ км/с *відносно Землі. Із цієї ракети в напрямку її руху вилітає деякий предмет зі швидкістю* $100\,000$ км/с *відносно ракети. Якою буде швидкість цього предмета відносно Землі? Розв'яжіть цю ж задачу, частково змінивши умову: ракета летить зі швидкістю* $250\,000$ км/с *відносно Землі.*

Будемо вважати Землю нерухомою інерціальною СВ. У цій K-СВ швидкість ракети $\upsilon = 100\,000$ км/с. Швидкість предмета відносно ракети (у K'-СВ) дорівнює $u'_x = 100\,000$ км/с. Швидкість u_x предмета відносно Землі за законом додавання швидкостей дорівнює

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}} .$$

Підставимо числові значення

$$u_x = \frac{2 \cdot 10^5}{1 + \frac{10^5 \cdot 10^5}{\left(3 \cdot 10^5\right)^2}} = \frac{2 \cdot 10^5}{1 + \frac{1}{9}} = 180\,000 \text{ км/с} .$$

Якщо ракета летить із швидкістю $250\,000$ км/с відносно Землі, то

$$u_x = \frac{3{,}5 \cdot 10^5}{1 + \frac{2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 10^5}{\left(3 \cdot 10^5\right)^2}} = \frac{3{,}5 \cdot 10^5}{1 + \frac{2{,}5}{9}} \approx 274\,000 \text{ км/с.}$$

Як і слід було очікувати, величина швидкості предмета відносно Землі менша від швидкості світла у вакуумі: $u'_x = 274000$ км/с < 300000 км/с.

9.3.13. *Що спільного і що відрізняє принципи відносності Галілея та Ейнштейна?*

Принципи відносності, сформульовані Галілеєм та Ейнштейном, поєднує те, що вони, фактично, дають визначення ІСВ. За Галілеєм: ніякими *механічними* дослідами не можна розрізнити одну ІСВ від іншої. За Ейнштейном: ніякими *фізичними (механічними, електричними, оптичними тощо)* дослідами не можна розрізнити одну ІСВ від іншої. Принципи відносності Ейнштейна узагальнює механічні принципи відносності Галілея на будь-які (усі) фізичні процеси.

9.3.14. *Чи можна використовувати принцип відносності для НІСВ?*

І в класичній, і в релятивістській механіках принципи відносності, сформульовані Галілеєм та Ейнштейном, фактично, дають визначення ІСВ, і тому вони прямо не стосуються НІСВ. Проте введення Ейнштейном у релятивістську механіку НІСВ призвело до появи загальної теорії відносності та формулюванню, зокрема, принципу еквівалентності (див. розд. 7).

9.3.15. *Доведіть, що існує границя швидкості руху МТ і вона дорівнює швидкості світла у вакуумі c?*

У перетвореннях Лоренца і висновках з них обов'язково в тій чи іншій формі використовується коефіцієнт Лоренца

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} .$$

Щоб не втрачався фізичний сенс усіх перетворень і формул, у які входить γ, треба вимагати дійсного значення від величини γ. Для цього необхідно, щоб підкореневе значення в γ було додатним: $1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}>0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\upsilon^2}{c^2}<1 \;\Rightarrow\; \upsilon^2<c^2 \;\Rightarrow\; \upsilon<c$. Як бачимо, максимальна швидкість, з якою може рухатись МТ, обмежена швидкостю світла у вакуумі. Фактично, це обмеження пов'язане із зрозумілою неможливістю для матеріального тіла мати нескінченно велику енергію та імпульс, для геометричного відрізку мати нульову довжину вздовж напрямку руху, а для годиника, який рухається, показувати «нульовий» час. Як кажуть: «Із швидкістю світла може рухатись лише світло».

9.3.16. *Доведіть, що існує гранична швидкість передачі інформації (взаємодії), і вона дорівнює швидкості світла у вакуумі* c *?*

Нехай існують дві події, що пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком. У нерухомій інерціальній K-СВ у момент часу t_1 у точці з координатою x_1 уздовж осі OX відбувається перша подія. Ця подія викликає другу подія–наслідок, яка в K-СВ відбувається в точці з координатами t_2, x_2 (рис. 9.2). Ці дві події в K'-СВ, що рухається зі швидкістю υ відносно K-СВ уздовж осі OX, відбуваються в точках з координатами t'_1, x'_1 та t'_2, x'_2, відповідно, (рис. 9.2).

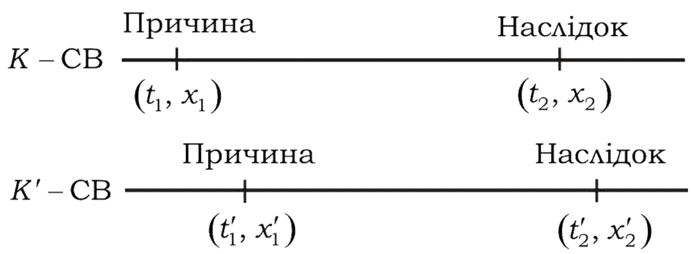


Рис. 9.2. До запитання 9.3.16

Оскільки події пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком, вони не можуть помінятись у часі місцями: тобто завжди $t_2>t_1$ та $t'_2>t'_1$. Швидкість передачі інформації в K-СВ дорівнює

$$\upsilon_c=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}. \qquad (9.13)$$

Користуючись перетвореннями Лоренца (9.1), знайдемо інтервал часу між двома подіями в K'-СВ

$$t'_2-t'_1=\frac{t_2-\frac{\upsilon}{c^2}\cdot x_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-\frac{t_1-\frac{\upsilon}{c^2}\cdot x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{t_2-t_1-\frac{\upsilon}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

З урахуванням (9.13) маємо

$$\frac{t_2 - t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{\upsilon \cdot \upsilon_c}{c^2}\right).$$

Виходячи із того, що $t_2 > t_1$ та $t'_2 > t'_1$, а γ – додатна величина, справедлива нерівність

$$1 - \frac{\upsilon \cdot \upsilon_c}{c^2} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{\upsilon \cdot \upsilon_c}{c^2} < 1 \;\Rightarrow \upsilon_c < \frac{c}{\upsilon}c\,.$$

Якщо врахувати, що $\frac{c}{\upsilon} \geq 1$ (див. запитання 9.3.15), то можна зробити висновок, що $\upsilon_c \leq c$, тобто швидкість передачі інформації υ_c не може перевищувати швидкість світла у вакуумі c.

Зауважимо, що під передачею інформації ми маємо на увазі і передачу взаємодії (фізичного впливу) одного тіла на інше, яку застосовуємо, зокрема, при поясненні ІІІ-го закону Ньютона, розгляді принципу близькодії (див. запитання 7.3.1) тощо.

9.3.17. *Доведіть, що квадрат інтервалу* $s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta\ell^2$ *є інваріантом відносно перетворень Лоренца.*

Квадрат інтервалу у вигляді $s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta\ell^2$ записаний для K-СВ. Скориставшись перетвореннями Лоренца (9.1)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \cdot \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z; \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

запишемо квадрат інтервалу для K'-СВ:

$$s'^2 = c^2 \cdot \Delta t'^2 - \Delta\ell'^2 = c^2 \cdot \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 =$$

$$= c^2\left(\frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{\Delta x - \upsilon \cdot \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}\left(c^2\Delta t^2-2\upsilon\Delta x\cdot\Delta t+\frac{\upsilon^2}{c^2}\Delta x^2-\Delta x^2+2\upsilon\Delta t\cdot\Delta x-\upsilon^2\Delta t^2\right)-\Delta y^2-\Delta z^2=$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}\left(c^2\cdot\Delta t^2+\beta^2\cdot\Delta x^2-\Delta x^2-\upsilon^2\cdot\Delta t^2\right)-\Delta y^2-\Delta z^2=$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2\cdot\Delta t^2-\Delta x^2\left(1-\beta^2\right)-\upsilon^2\cdot\Delta t^2\right]-\Delta y^2-\Delta z^2=$$

$$=c^2\frac{\Delta t^2}{1-\beta^2}-\Delta x^2-\frac{\upsilon^2\cdot\Delta t^2}{1-\beta^2}-\Delta y^2-\Delta z^2=$$

$$=c^2\frac{\Delta t^2}{1-\beta^2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)-\Delta\ell^2=c^2\cdot\Delta t^2-\Delta\ell^2\equiv s^2.$$

Таким чином, доведено, що квадрат інтервалу, тобто й інтервал, відносно перетворень Лоренца залишається сталою величиною в будь-якій інерціальній системі відліку, тобто є величиною інваріантною.

9.3.18. *Відомо, що інтервали ($s^2=c^2\cdot\Delta t^2-\Delta\ell^2$) бувають трьох типів: просторовоподібні, часоподібні та нульові. Чи залежить тип інтервалів від вибору системи відліку, у якій відбуваються події? (Чи можна змінити тип інтервалу вибором системи відліку, у якій відбуваються події?).*

Ні, не залежать. Тип інтервалу визначається властивостями (характером) самих подій, які бувають пов'язаними причинно-наслідковим зв'язком і без нього. Нульові інтервали пов'язують події, інформація (взаємодія) між якими передається зі швидкістю світла.

9.3.19. *Чи залежить тип інтервалу, який описує дві події, від того, пов'язані ці події причинно-наслідковим зв'язком чи ні?*

Так, залежать. Події, які пов'язані причинно-наслідковим зв'язком (народження-смерть, батьки-діти, вибух-руйнування тощо) описуються тільки часоподібними інтервалами ($s^2>0$). Події, які не пов'язані причинно-наслідковим зв'язком, (незалежні один від одного постріли з двох гармат, незалежні співудари двох пар куль тощо) описуються тільки просторовоподібними ($s^2<0$) або нульовими інтервалами ($s^2=0$).

9.3.20. *Доведіть, що часоподібні інтервали ($s^2>0$) можуть характеризувати тільки події, пов'язані причинно-наслідковим зв'язком.*

Для часоподібних інтервалів ($s^2=c^2\cdot\Delta t^2-\Delta\ell^2>0$) можна обрати таку СВ, у якій події в одній і тій самій точці простору ($\Delta\ell=0$) відбуваються тільки послідовно: $s^2=c^2\cdot\Delta t^2>0$. Проте не існує такої СВ, у якій ці самі події відбувались би одночасно. Тоді при $\Delta t=0$ було б інакше: квадрат інтервалу $s^2=-\Delta\ell^2<0$, що суперечить умові $s^2 > 0$. Послідовно та з незмінним знаком послідовності, але ні в якому разі не одночасно, можуть відбуватися тільки події, пов'язані причинно-наслідковим зв'язком. Ця властивість залишається незмінною в усіх інерціальних СВ.

9.3.21. *У якому випадку заздалегідь можна сказати, що дві події пов'язані причинно-наслідковим зв'язком?*

Тільки події, пов'язані причинно-наслідковим зв'язком, мають часоподібний ($s^2 > 0$) інтервал. У випадку, коли $s^2 > 0$, заздалегідь можна казати, що дві події пов'язані причинно-наслідковим зв'язком.

9.3.22. *Покажіть, що можна вибрати таку рухому інерціальну СВ, щоб дві події, які відбулись у різних точках простору і були в нерухомій СВ послідовними в заданому порядку (напр., подія 2 відбулась після події 1: спочатку вистрілила гармата 1, а потім незалежно від неї – гармата 2), стали б одночасними.*

Завжди можна обрати рухому інерціальну СВ, у якій такі дві незалежні одна від одної події відбувались би одночасно, або навіть їх послідовність змінилася б. Але це можливо лише у випадку, коли інтервал між подіями – просторовоподібний ($s^2 < 0$). Це може стосуватись лише подій, не пов'язаних причинно-наслідковим зв'язком, для них $\Delta\ell^2 > c^2 \cdot \Delta t^2$. За такої відстані події за час Δt, розділені відстанню $\Delta\ell$, ніколи не можуть обмінюватись інформацією або взаємодіяти, тобто бути пов'язаними причинно-наслідковим зв'язком. Адже максимальна швидкість передачі взаємодії обмежена швидкістю світла у вакуумі.

Часові проміжки між такими подіями в K-СВ (Δt) і K'-СВ $(\Delta t')$ пов'язані між собою часовим співвідношенням із перетворень Лоренца (9.1):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{\upsilon \cdot \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

У разі, коли $\upsilon \cdot \Delta x = \Delta t \cdot c^2$, події в K'-СВ збігатимуться в часі. Коли буде виконуватись нерівність $\upsilon \cdot \Delta x > \Delta t \cdot c^2$, послідовність подій зміниться: подія 1 відбудеться після події 2.

9.3.23. *Якщо дві події відбуваються послідовно (подія 2 після події 1) в одній і тій самій точці простору, то чи можна знайти таку систему відліку, у якій ці події відбуваються одночасно або у зворотному порядку (1 після 2)?*

Ні, не можна. Проміжки часу між двома подіями, які відбулись в одній точці простору, у різних ІСВ пов'язані між собою співвідношенням (9.2): $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$. Як бачимо, змінити знак часового проміжку $\Delta t'$ у K'-СВ або зробити $\Delta t' = 0$ ніякими діями неможливо.

9.3.24. *Уявімо собі, що тіло сферичної форми рухається із субсвітловою швидкістю. Якої форми тіло спостерігатиметься при його фотографуванні або при візуальному спостереженні?*

Виходячи із перетворень Лоренца, розміри тіла в напрямку його руху скорочуються тим більше, чим більша швидкість руху тіла. Насправді ж адекватну зміну форми об'ємного тіла, що рухається, як ми сподівались, сфотографувати або побачити неможливо. Пов'язано це з тим, що в око чи на поверхню фотоплівки одночасно надходять кванти світла від більш віддалених точок тіла, а також кванти, що були випромінені раніше від більш близьких точок тіла.

Таким чином, фотографуючи або спостерігаючи візуально будь-яке об'ємне тіло, ми у фіксований момент часу реєструємо кванти світла від різних ділянок тіла, які одночасно досягають ока або фотоплівки. Випромінюються ці кванти світла неодночасно. Це призводить до того, що під час руху тіла в оці або на фотоплівці отримується спотворене зображення тіла. Якщо б лоренцівського скорочення не було, рух тіла мав би приводити до того, що тіло виглядало б витягнутим у напрямку руху. Відповідний розрахунок показує, що таке спотворення компенсується лоренцівським скороченням. У результаті здається, що тіло свою форму не спотворює. Тіло сферичної форми, яке рухається із субсвітловою швидкістю, буде сприйматись візуально або на фотоплівці як тіло сферичного контуру або принаймні воно не виглядатиме таким сплющеним у напрямку руху, як випливає з перетворень Лоренца. Більш детальну інформацію щодо розглянутого випадку можна отримати в [1, п. 15, с. 80–81 та п. 17, с. 92–93] або [2, п. 64, с. 226–227].

9.3.25. *Чи треба враховувати релятивістські поправки в розрахунках руху сучасних космічних ракет? Яка величина відносної похибки виникає в разі неврахування релятивістських ефектів у цьому випадку?*

Якщо не враховувати релятивістські ефекти, а робити розрахунки, виходячи суто із законів Ньютона, то відносна похибка за швидкості ракети 8 км/с становить величину порядку $\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 = \left(\frac{8}{3\cdot 10^5}\right)^2 \approx 10^{-9}$, тобто забезпечується велика точність обчислень. Таким чином, вводити поправки на релятивістські ефекти не треба, хоча б тому, що початкові умови, необхідні для розрахунків, визначаються з незрівнянно меншою точністю.

Релятивістська динаміка

9.3.26. *Доведіть основний закон релятивістської динаміки.*

У СТВ зберігаються ньютонівське співвідношення $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, але в ньому використовується релятивістські імпульс (9.6), та енергія (9.7):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \qquad \text{та} \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{\upsilon},$$

де $\gamma = \left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ – коефіцієнт Лоренца.

Розпишемо основне рівняння динаміки для релятивістського випадку:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(\gamma m\vec{\upsilon})}{dt}=m\left(\gamma\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\frac{d\gamma}{dt}\right)=m\left[\gamma\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\frac{d\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2}}{dt}\right]=$$

$$=m\left[\gamma\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2\upsilon}{c^2}\right)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]=m\left(\gamma\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\frac{\upsilon^2}{c^2}\gamma^3\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)=$$

$$=m\left[\gamma\vec{a}+\vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)\right],\quad \text{де } \vec{\beta}=\frac{\vec{\upsilon}}{c}.$$

Таким чином, *основне рівняння релятивістської динаміки* має вигляд виразу (9.9):

$$\vec{F}=m\left[\gamma\vec{a}+\vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\vec{a}\right)\right].$$

9.3.27. *Зробіть фізичні висновки з основного закону релятивістської динаміки.*

Проаналізуємо вираз (9.9) основного закону релятивістської динаміки у вигляді $\vec{F}=m\left[\gamma\vec{a}+\vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\vec{a}\right)\right]$:

1. Позначивши доданки з (9.9) як складові сили $\vec{F}_1=m\gamma\vec{a}$ та $\vec{F}_2=m\vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)$, бачимо, що $\vec{F}_1\parallel\vec{a}$; $\vec{F}_2\parallel\vec{\upsilon}$.

2. Оскільки $\vec{F}_1\parallel\vec{a}$ і $\vec{F}_2\parallel\vec{\upsilon}$, а також, враховуючи, що при криволінійному русі напрямки векторів прискорення $\vec{a}$ і швидкості $\vec{\upsilon}$ не збігаються між собою, можна зробити висновок: на відміну від руху частинок, який розглядається в межах класичної механіки (рис. 9.3, а), напрямок вектора прискорення релятивістської частинки в загальному випадку не збігається з напрямком сили $\vec{F}$, яка викликала це прискорення (рис. 9.3, б).

3. Вектори $\vec{F}$ та $\vec{a}$ колінеарні $\left(\vec{F}\parallel\vec{a}\right)$ у випадку, коли $\vec{F}\perp\vec{\upsilon}$ (коли $\vec{F}_2=0$). Покажемо це на рис. 9.3, в). У складовій сили $\vec{F}_2=m\vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)$ є скалярний добуток $\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)=\beta\cdot a\cdot\cos\left(\vec{\beta},\vec{a}\right)=\beta\cdot a\cdot\cos\left(\vec{\upsilon},\vec{a}\right)$. У разі, коли $\vec{F}\perp\vec{\upsilon}$, продовжуючи розписувати скалярний добуток $\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)$, можна записати $\beta\cdot a\cdot\cos\left(\vec{\upsilon},\vec{a}\right)=\beta\cdot a\cdot\sin\left(\vec{F},\vec{a}\right)$.

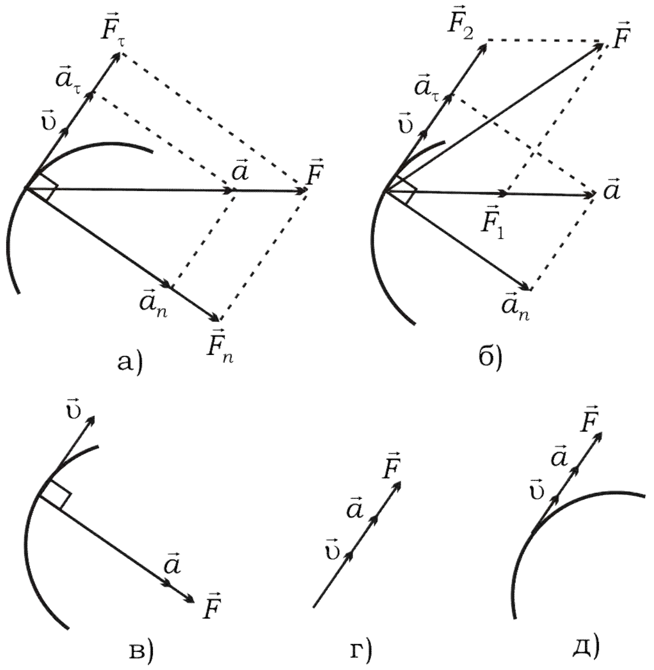


Рис. 9.3. До запитання 9.3.26:
взаємне розташування векторів швидкості $\vec{\upsilon}$, прискорення $\vec{a}$, сили $\vec{F}$ у випадку класичної механіки, коли $\vec{F} \parallel \vec{a}$ (а) і релятивістської механіки $\left(\vec{F} = m\left[\gamma\,\vec{a} + \vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\vec{a}\right)\right]\right)$ загальний випадок (б); випадок $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$ $\left(\vec{F} = m\vec{a}\gamma\right)$ руху зарядженої частинки під дією магнітної сили Лоренца (в); випадок $\vec{F} \| \vec{\upsilon}$ $\left(F = ma\gamma + ma\beta^2\gamma^3 = ma\gamma^3\right)$ для прямолінійного (г) та обертального під дією сили Кулона (д) руху частинки

Для виконання умови $\sin\left(\vec{F},\vec{a}\right) = 0$ необхідно, щоб кут $\left(\vec{F},\vec{a}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F} \| \vec{a}$. Таким чином, для випадку $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$ виконується умова $\vec{F} \| \vec{a}$. У цьому разі $\vec{F}_2 = 0$, $\vec{F} = \vec{F}_1 = \gamma\, m\vec{a}$ (рис. 9.3, в). Такому випадку відповідає дія сили Лоренца на рухому по колу в кільцевому прискорювачі заряджену частинку. Ця сила не змінює величини швидкості $\left(\vec{a}_\tau = 0\right)$, а змінює її напрямок.

4. Вектори $\vec{F}$ та $\vec{a}$ колінеарні $\left(\vec{F} \| \vec{a}\right)$ також у випадку, коли $\vec{F} \| \vec{\upsilon}$. Така ситуація можлива у випадку, коли вектори $\vec{F}, \vec{\upsilon}, \vec{a}$ – колінеарні. Це так у випадку прямолінійного прискореного руху (рис. 9.3, г) релятивістської частинки або при дії сили

Кулона на заряджену частинку, яка перебуває між обкладинками конденсатора і при цьому обертається, як це відбувається в кільцевому прискорювачі (колайдері) (рис. 9.3, д).

5. Як бачимо, вектор прискорення $\vec{a}$ збігається за напрямком з вектором сили $\vec{F}$ у двох випадках: коли $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$ або $\vec{F} \| \vec{\upsilon}$. В усіх інших випадках до складової сили $\vec{F}_1$, що паралельна вектору $\vec{a}$, додається складова сили $\vec{F}_2 \| \vec{\upsilon}$, яка робить вектори $\vec{F}$ і $\vec{a}$ неколінеарними (рис. 9.3, б).

6. Складова сили $\vec{F}_1 = m\gamma\vec{a}$ ніколи, на відміну від складової $\vec{F}_2 = m\vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)$, не стає рівною нулю.

7. Можна показати, що рівняння $\vec{F} = m\left[\gamma\vec{a} + \vec{\beta}\gamma^3\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)\right]$, записане в скалярному вигляді для випадку $\vec{F} \| \vec{\upsilon}$ (рис. 9.3, г), набуває вигляду

$$F = ma\gamma + ma\beta^2\gamma^3 = ma\gamma^3\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) = ma\gamma^3 .$$

8. У релятивістській динаміці треба розрізняти поперечну $\left(\vec{F}_\perp\right)$ і поздовжню $\left(\vec{F}_{||}\right)$ відносно напрямку вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ складові сили, які описуються виразами $F_\perp = F_1 = ma\gamma$, коли $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$, і $F_{||} = ma\gamma^3$, коли $\vec{F} \| \vec{\upsilon}$. Таким чином,

$$\begin{cases} F_\perp = ma\gamma \\ F_{||} = ma\gamma^3. \end{cases} \tag{9.14}$$

9. Як бачимо з (9.14), поздовжня сила $\vec{F}_{||}$ надає частинці прискорення в γ^2 разів менше, ніж така сама за модулем поперечна сила $\vec{F}_\perp$.

10. Поперечна сила викликає зміну швидкості частинки тільки за напрямком, а поздовжня сила змінює модуль швидкості.

11. На відміну від класичної механіки, де мірою інертності є маса, у релятивістській механіці маса перестає бути єдиною мірою інертності, нею стає величина $\left(m\gamma + m\beta^2\gamma^3\right)$.

12. Якщо визначити "інертну масу" як відношення $\dfrac{\vec{F}}{\vec{a}}$, то в релятивістській механіці ця величина залежить від взаємного розташування (напрямків) векторів $\vec{F}$ та $\vec{\upsilon}$. Єдиної міри для визначення інертності релятивістської частинки не існує,

"опір" релятивістської частинки силі, що прискорює її, залежить не тільки від її маси m, але й від швидкості та кута між $\vec{F}$ та $\vec{\upsilon}$.

13.Інертність релятивістської частинки має дві складові: уздовж напрямку руху $\frac{F_\tau}{a_\tau}=m\beta^2\gamma^3$ і перпендикулярно до напрямку руху $\frac{F_n}{a_n}=m\gamma$. Інертність релятивістської частинки в різних напрямках різна $m\gamma\neq m\beta^2\gamma^3$. Останнє є причиною того, що напрямки $\vec{F}$ та $\vec{a}$ в релятивістській динаміці не збігаються.

14.Введення двох мас – поздовжньої $m_{||}$ і поперечної $m_\perp$, як це робилось у деяких підручниках, виданих у попередні роки, з погляду сучасної фізики неправильне. Треба казати про різну інертність релятивістської частинки, яка залежить від кута між $\vec{F}$ та $\vec{\upsilon}$.

15.Складові сили в основному рівнянні релятивістської динаміки (9.9) $\vec{F}_1\sim\gamma$ і $\vec{F}_2\sim\beta^2$. Тому у випадку $\upsilon<<c$, коли $\gamma\to 1$, а $\beta\to 0$, із цими складовими сили відбуваються такі зміни: $\vec{F}_2\to 0$, $\vec{F}_1\to m\vec{a}$. У результаті отримуємо основне рівняння класичної динаміки: $\vec{F}=m\vec{a}$.

Незвичне щодо ньютонівської механіки і надзвичайно важливе для релятивістської механіки рівняння (9.9) правильно описує рух релятивістських частинок, що протягом останніхвже понад 100 років підтверджується всіма результатами їх досліджень.

9.3.28. *Поясніть, чому в релятивістській теорії не можливо уявити собі прискорений рух абсолютно твердого тіла?*

Відомі результати (див., напр., [7, С. 97]) застосування перетворень Лоренца до прискорення матеріальної точки (МТ), що має всі три складові швидкості ($\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z$), а рух K'-СВ відбувається зі швидкістю υ уздовж осі OX. Формули для значень складових прискорення при переході від K-СВ до K'-СВ мають вигляд

$$a'_x=\frac{d\upsilon'_x}{dt}=a_x\left(\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon\cdot\upsilon_x}{c^2}}\right)^3; \qquad (9.15)$$

$$a'_y = \frac{d\upsilon'_y}{dt} = \left[\left(1 - \frac{\upsilon \cdot \upsilon_x}{c^2}\right) a_y + \frac{\upsilon \cdot \upsilon_y}{c^2} a_x\right] \frac{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\upsilon \cdot \upsilon_x}{c^2}\right)^3}; \qquad (9.16)$$

$$a'_z = \frac{d\upsilon'_z}{dt} = \left[\left(1 - \frac{\upsilon \cdot \upsilon_x}{c^2}\right) a_z + \frac{\upsilon \cdot \upsilon_z}{c^2} a_x\right] \frac{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\upsilon \cdot \upsilon_x}{c^2}\right)^3}. \qquad (9.17)$$

Як бачимо, прискорення МТ складно і по-різному вздовж різних напрямків залежить від швидкості МТ і швидкості СВ. Особливо це стосується складових прискорення a'_y та a'_z. Тому важко, і навіть неможливо уявити собі прискорений рух абсолютно твердого тіла, який передбачає в силу визначення абсолютно твердого тіла, що всі його точки прискорюються однаково. Прискорений рух твердого тіла в релятивістській механіці можливий лише за умови його деформації (зміни розмірів, об'єму і форми).

9.3.29. *Чому матеріальному тілу принципово неможливо надати швидкості, яка б дорівнювала швидкості світла?*

Як видно із формули (9.16), для релятивістської енергії $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ за $\upsilon \to c$ величина $E \to \infty$. Це означає, що при намаганні надати матеріальному тілу швидкості, яка б дорівнювала швидкості світла треба було б витрачати все більше і більше енергії, аж до нескінченності, що, звичайно, неможливо. Зі швидкістю світла може рухатись лише світло (фотони).

Фактично, ми скористались тією ж ідеєю, що лежить в основі відповіді до запитання 9.3.15.

9.3.30. *Доведіть, що в релятивістській механіці маса – неадитивна величина.*

Користуючись ЗЗІ та перетвореннями Галілея, у розд. 2 (див. запитання 2.3.10), було показано, що в класичній механіці маса – адитивна величина. Чи адитивна маса в релятивістській механіці?

Відомо, що в релятивістській механіці енергія та імпульс – адитивні величині. Тобто у випадку двох частинок сумарна енергія системи, яка складається із двох релятивістських частинок, дорівнює сумі їх енергій у вільному стані $E = E_1 + E_2$. Аналогічно можна записати для імпульсів $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Окрім того, завжди справедливий один із найважливіших інваріантів СТВ $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$. Із цього інваріанта маємо $m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}$. Для системи з двох релятивістських частинок, енергії яких E_1 та E_2, а імпульси p_1 та p_2, величина m^2 дорівнює

$$m^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{(p_1 + p_2)^2}{c^2} = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{p_1{}^2 + 2\vec{p}_1\vec{p}_2 + p_2{}^2}{c^2}. \tag{9.18}$$

Враховуючи залежність (9.8) $\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{\upsilon}$, можна вираз (9.18) продовжити таким чином:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{\left(E_1 + E_2\right)^2}{c^4} - \frac{1}{c^2}\left(p_1{}^2 + p_2{}^2\right) - \frac{2E_1 \cdot E_2}{c^4}\vec{\upsilon}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 = \\ &= m_1^2 + m_2^2 - \frac{2E_1 \cdot E_2}{c^4}\vec{\upsilon}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 = m_1^2 + m_2^2 - \frac{2E_1 \cdot E_2}{c^4}\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 \cdot \cos\left(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2\right). \end{aligned} \tag{9.19}$$

Проаналізуємо отриманий результат:

1. Наявність третього доданка в (9.19) свідчить про те, що в релятивістській механіці маса є неадитивною величиною $m \neq m_1 + m_2$.

2. Маса системи релятивістських частинок, яка складається, наприклад, із двох частинок, залежить від кута між векторами їх швидкостей $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_2$ (імпульсів).

3. Маса системи з двох релятивістських частинок залежно від кута між $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_2$ може змінюватись від $m = 0$ до $m = m_1 + m_2$.

4. Маса системи двох фотонів з енергіями E у кожного дорівнює $2E/c^2$, якщо вони летять в протилежні боки, і дорівнює нулю, якщо вони летять в один бік.

9.3.31. *Доведіть, що фотон – безмасова частинка.*

Релятивістська динаміка оперує з релятивістським імпульсом

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

і релятивістською енергією

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Із порівняння цих двох виразів можна побачити, що $p = E \cdot \frac{\upsilon}{c^2}$. Для квантів світла – фотонів, швидкість яких $\upsilon = c$, імпульс $p = \frac{E}{c}$. Застосуємо один із інваріантів СТВ

$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, який для фотонів з урахуванням виразу $p = \dfrac{E}{c}$ набуде вигляду $E^2 - \dfrac{E^2}{c^2}c^2 = m^2c^4 \;\Rightarrow\; m^2c^4 = 0$; величина $c \neq 0$, звідси $m = 0$.

Висновок: фотон – безмасова частинка.

9.3.32. *Доведіть, що: 1) величина mc^2 має розмірність енергії; 2) величина mc^2 є енергією спокою; 3) закон, який у релятивістській механіці пов'язує між собою релятивістську енергію E, кінетичну енергію T та енергію спокою E_0, має свій аналог у класичній механіці у вигляді закону збереження енергії.*

Вираз для коефіцієнта Лоренца

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

розкладемо в ряд:

$$\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \ldots .$$

З урахуванням цього розкиду в ряд релятивістська енергія (9.7) запишеться у вигляді

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \ldots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\frac{\upsilon^2}{c^2} + \ldots = mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2} + \ldots \qquad (9.20)$$

Зробимо висновки з отриманого виразу (9.20):

1) Величина $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ – кінетична енергія. Тобто величина mc^2 також має розмірність енергії.

2) Якщо частинка не рухається $(\upsilon = 0)$, то із (9.20), позначивши енергію нерухомої частинки через E_0, маємо $E_0 = mc^2$, де E_0 – енергія спокою.

3) Обмежившись двома доданками в (9.20), маємо $E = mc^2 + \dfrac{m\upsilon^2}{2} = E_0 + T$, де E – релятивістська енергія частинки; T – кінетична енергія; E_0 – енергія спокою. Тут вбачається аналогія із законом збереження повної енергії E в класичній механіці $E = U + \dfrac{m\upsilon^2}{2} = U + T$, де U – потенціальна енергія; T – кінетична енергія.

9.3.33. *Назвіть відомі вам інваріанти, які складаються із відповідних комбінацій неінваріантних величин.*

Хоча відстань $\Delta\ell$ і проміжок часу Δt між подіями неінваріантні щодо перетворень Лоренца величини, їх відповідна комбінація разом зі швидкістю світла у вигляді (9.5) складає інваріант "простору-часу" $\left(c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta\ell^2\right)$ щодо перетворень Лоренца, який у релятивістській механіці називається інтервалом (квадратом інтервалу) (див. запитання 2.3.17).

Подібно до останього в релятивістській динаміці існує інваріант "енергії-імпульсу". Хоча енергія E та імпульс p неінваріантні щодо перетворень Лоренца величини, їх відповідна комбінація разом зі швидкістю світла (інваріантом) складає інваріант $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$.

9.3.34. *Доведіть, що величина $E^2 - p^2c^2$ є інваріантом щодо перетворень Лоренца.*

Довести цей інваріант можна декількома способами:

1-й спосіб. В основу доведення покладемо визначення релятивістського імпульсу (9.6) і релятивістської енергії (9.7). У виразі (9.6) домножимо праву частину на величину, що дорівнює одиниці $1 = \frac{c}{c}$, де c – швидкість світла у вакуумі

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{c}{c} = \frac{cm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{c^2m^2\beta^2}{1-\beta^2}. \qquad (9.21)$$

Окрім того, проробимо деякі алгебраїчні маніпуляції з виразом

$$1 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2},$$

у якому домножимо ліву і праву частини на m^2c^4:

$$m^2c^4 = \frac{m^2c^4}{1-\beta^2} - \frac{m^2c^4\beta^2}{1-\beta^2},$$

і з урахуванням отриманого вище виразу (9.21) для p^2 маємо

$$m^2c^4 = \frac{m^2c^4}{1-\beta^2} - p^2c^2 \Rightarrow m^2c^4 = E^2 - p^2c^2.$$

Таким чином, доведено рівність $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, у якій праворуч від знака рівності стоїть вираз m^2c^4, що складається з інваріантних величин і, напевно, є інваріантом. Якщо це так, то і ліворуч від знака рівності є інваріант.

2-й спосіб. Можна зробити безпосередньо розгляд того, чому дорівнює величина $E^2 - p^2c^2$ у нерухомій і рухомій системах відліку та переконатися, що вони незмінні (інваріантні). Зробимо це.

Виходимо з того, що перетворення Лоренца пов'язують енергію E та імпульс p у K -СВ та K' -СВ співвідношеннями:

$$E' = \left(E - \vec{\upsilon}\,\vec{p}\right)\gamma\,, \tag{9.22}$$

$$p' = \left(p - \frac{\upsilon E}{c^2}\right)\gamma\,. \tag{9.23}$$

Скориставшись цим, отримуємо:

$$E'^2 - p'^2c^2 = \left(E - \upsilon p\right)^2\gamma^2 - \left(p - \frac{\upsilon E}{c^2}\right)^2\gamma^2c^2 =$$

$$= \gamma^2\left(E^2 - 2\upsilon pE + \upsilon^2p^2 - c^2p^2 + 2\upsilon pE - \frac{\upsilon^2E^2}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\left[E^2\left(c^2 - \upsilon^2\right) - c^2p^2\left(c^2 - \upsilon^2\right)\right] = E^2 - c^2p^2\,.$$

Як бачимо, вираз $E^2 - c^2p^2$ є величиною інваріантною в усіх ІСВ. Висловимо припущення про базову властивість 4-векторів утворювати інваріант із суми квадратів елементів 4-вектора, як це ми бачили на прикладі з квадратом інтервалу 4-вектора "простору-часу" і розглянутим тут 4-вектором "енергія-імпульс" (p_x, p_y, p_z, icE).

9.3.35. *Чи виконується закон збереження імпульсу в релятивістській механіці?*

Як відомо, виконання ЗЗІ обумовлене одним із симетрій простору-часу, а саме – однорідністю простору. Остання справедлива і в класичній, і в релятивістській механіці. Відмінність, яку необхідно враховувати при розв'язуванні конкретних задач механіки із використанням ЗЗІ, полягає в особливостях визначення класичного ($p_{кл}=m\upsilon$) та релятивістського ($p=\gamma\cdot m\upsilon$) імпульсів.

9.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 9.1. *З якою швидкістю рухався годинник, якщо за час* 5,0 с*, виміряний у нерухомій К-системі, він запізнився відносно нерухомого годинника на* 0,1 с*?*

Розв'язання: Проміжок часу Δt у нерухомій системі відліку буде меншим від проміжка часу $\Delta t'$ у рухомій системі відліку (9.2):

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

тобто $\Delta t = 5$ с (у К-системі) буде величиною $\Delta t' < 5$ с (у K'-системі відліку). Позначимо $\delta t = \Delta t - \Delta t'$, $\delta t = 0{,}1$ с. Тоді (9.2) буде набуде вигляду

$$\Delta t = \frac{\Delta t - \delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\Rightarrow\; \Delta t^2 \cdot (1-\beta^2) = (\Delta t - \delta t)^2 \;\Rightarrow\; \Delta t^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{c^2} = 2\Delta t \cdot \delta t - \delta t^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = c^2\left(\frac{2\delta t}{\Delta t} - \frac{\delta t^2}{\Delta t^2}\right) \;\Rightarrow\; \upsilon = c\sqrt{\frac{\delta t\left(2 - \dfrac{\delta t}{\Delta t}\right)}{\Delta t}}\,.$$

Підставивши в отриманий вираз для швидкості значення з умови задачі, маємо

$$\upsilon = c\sqrt{\frac{0{,}1\left(2 - \dfrac{0{,}1}{5}\right)}{5}} = \frac{c}{5}\sqrt{\frac{9{,}9}{10}} \approx \frac{c}{5} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$$

Приклад 9.2. *У К-системі відліку мюон, який рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}990$ с, пролетів від місця свого народження до місця розпаду відстань $L = 3{,}0$ км. Визначте:*

а) власний час життя цього мюона;

б) відстань, яку пролетів мюон у К-системі відліку з "його точки зору".

Розв'язання: У *К*-системі відліку час життя мюона

$$\Delta t = \frac{L}{\upsilon}\,. \tag{9.24}$$

Час Δt життя мюона в К-системі і власний час $\Delta t'$ життя мюона (у K'-системі) пов'язані між собою співвідношенням (9.2):

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Об'єднавши (9.2) і (9.24), отримуємо

$$\Delta t' = \frac{L}{\upsilon}\sqrt{1-\beta^2}\,.$$

Підставимо в отриману формулу дані з умови

$$\Delta t' = \frac{3 \cdot 10^3}{0{,}99 \cdot 3 \cdot 10^8}\sqrt{1-(0{,}99)^2} = 1{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ с}\,.$$

Відстань, яку пролетів мюон у *К*-системі відліку з "його точки зору" дорівнює

$$L' = L\sqrt{1-\beta^2}\,.$$

Підставивши в отриманий вираз дані з умови, маємо $L' = 3 \cdot 10^3 \sqrt{1-(0,99)^2} = 423$ м. Той самий результат можна отримати за формулою $L' = \Delta t' \cdot \upsilon$.

Таким чином, відстань, яку вимірюють у лабораторії (3 км), більша за відстань (432 м), якою вона "здається" мюону, що рухається із субсвітловою швидкістю $\upsilon = 0,990\,c$.

Приклад 9.3. *Частинка масою m рухається вздовж осі X у К-системі відліку за законом $x = \sqrt{d^2 + c^2 t^2}$, де d – деяка стала; c – швидкість світла; t – час. Знайдіть силу, яка діє на частинку в цій системі відліку.*

Розв'язання. Отримати правильну відповідь в цій задачі можна двома способами:

1-й спосіб заснований на застарілих, але, на жаль, широко вживаних уявленнях про існуванням двох мас: маси спокою m_0 і релятивістської маси m, які пов'язані між собою співвідношенням $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Такі уявлення про неінваріантну масу існували досить тривалий час після створення СТВ і встигли ввійти в більшість підручників.

Як відомо, вираз для основного закону динаміки має однаковий вигляд для класичної та релятивістської динамік

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Окрім того, як завжди $\upsilon = \frac{dx}{dt}$. З урахуванням закону $x(t)$, узятому з умови прикладу, швидкість частинки дорівнює

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{2c^2 t}{\sqrt{d^2 + c^2 t^2}}. \qquad (9.25)$$

Якщо вважати, що

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

то з урахуванням (5.25) маємо

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{c^4 t^2}{c^2 (d^2 + c^2 t^2)}}} = \frac{m_0 \sqrt{d^2 + c^2 t^2}}{d}.$$

Нарешті

$$F = \frac{d(m\upsilon)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c^2 t m_0 \sqrt{d^2 + c^2 t^2}}{d\sqrt{d^2 + c^2 t^2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{c^2 t m_0}{d}\right) = \frac{m_0 c^2}{d}.$$

Зауважимо, якщо користуватись "концепцією двох мас", то в умові задачі слід було вказати, що йдеться про "масу спокою". Цього в умові прикладу зроблено не було, і нам не залишається нічого кращого, ніж відмітити невідповідність умови та отриманої відповіді.

2-й спосіб – правильний, пов'язаний із сучасними уявленнями про існування однієї, інваріантної маси. Релятивістський імпульс запишемо як (9.6):

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Швидкість частинки з урахуванням умови задачі дорівнює

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{2c^2 t}{2\sqrt{d^2 + c^2 t^2}}.$$

З урахуванням останнього виразу релятивістський імпульс (9.6) запишеться у вигляді

$$p = \frac{mc^2 t}{\sqrt{d^2 + c^2 t^2}\sqrt{1 - \dfrac{c^4 t^2}{(d^2 + c^2 t^2)c^2}}} = \frac{mc^2 t}{d}. \tag{9.26}$$

Використаємо (9.26) в основному законі динаміки, який і в ньютонівській і в релятивістській механіках має вигляд $F = \dfrac{dp}{dt}$:

$$F = \frac{mc^2}{d}.$$

Як бачимо, обидва способи, маючи різні початкові уявлення про фізичний зміст базових величин, які суперечать навіть один одному, але завдяки математичним "аналогіям" дають однаковий (чи з урахуванням зауваження в кінці 1-го способу розв'язування, майже однаковий) результат. Цим, зокрема, можна пояснити, чому так "болісно" приживається правильне, сучасне уявлення про існування однієї – інваріантної маси.

Приклад 9.4. *На скільки зміниться маса* 1 т *води при її нагріванні від* 0 ^{0}C *до* 100 ^{0}C*?*

Розв'язання: Згідно з формулою $E_0 = mc^2$ маса тіла змінюється (Δm) завжди, коли змінюється його внутрішня енергія (ΔE):

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} \quad .$$

Зміна внутрішньої енергії тіла пов'язана зі зміною його температури (ΔT) за рахунок надання тілу теплової енергії, кількість якої визначається як

$$Q = mc_{\text{в}} \cdot \Delta T \, ,$$

де $c_{\text{в}}$ – питома теплоємкість речовини (для води $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/кг $\cdot$ К). Якщо вважати, що все надане тілу тепло пішло на зміну його внутрішньої енергії (енергії спокою) $Q = \Delta E_0$, то

$$\Delta m = \frac{mc_{\text{в}}\,\Delta T}{c^2} = \frac{10^3 \cdot 4200 \cdot 100}{9 \cdot 10^{16}} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ кг} = 5 \text{мкг} \, .$$

Відносна зміна маси становить украй малу величину

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{10^3} \sim 10^{-12} \quad .$$

Приклад 9.5. *Відомо, що в ньютонівській механіці зв'язок між кінетичною енергією T та імпульсом p описується виразом $T = \dfrac{p^2}{2m}$ або $p = \sqrt{2mT}$. Знайдіть зв'язок між T і p у релятивістській механіці.*

Розв'язання: Скористаємось формулою релятивістської динаміки для інваріанта "енергія-імпульс" (9.11):

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \, .$$

З іншого боку, відома формула (9.10) для повної енергії E , яка складається з енергії спокою $E_0 = mc^2$ і кінетичної енергії T :

$$E = mc^2 + T \, .$$

Якщо (9.10) $\to$ (9.11), то отримуємо

$$\left(mc^2 + T\right)^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \;\Rightarrow\; m^2c^4 + 2Tmc^2 + T^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\left(T + 2mc^2\right) = p^2c^2 \;\Rightarrow \text{(9.12): } p = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(T + 2mc^2\right)} \, .$$

З отриманого виразу для $p(T)$, який відповідає (9.12), можна знайти залежність $T(p)$:

$$T = mc^2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1 \right]. \qquad (9.27)$$

Аналіз (9.12):

1. За $T << mc^2$ (нерелятивістській випадок) можна отримати: $p = \frac{1}{c}\sqrt{2mc^2 T} = \sqrt{2mT} = \sqrt{2m\frac{m\upsilon^2}{2}} = m\upsilon$, що повністю відповідає очікуваному результату.

2. За $T >> mc^2$ (релятивістський випадок, коли кінетична енергія частинки набагато більша за її енергію спокою)

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T^2} = \frac{T}{c}. \qquad (9.28)$$

Отримано важливу формулу релятивістської динаміки, але вона порівняно з (9.12) має більш обмежену область застосування (виконується для $T >> mc^2$).

Приклад 9.6. *Релятивістська частинка з масою m і кінетичною енергією T налітає на частинку, яка перебуває в стані спокою і має таку саму масу m. Знайдіть масу і швидкість системи, складеної з двох частинок після співудару.*

Розв'язання: Позначимо масу системи, яку слід знайти, як M. Співвідношення (9.11) для системи запишеться як

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4. \qquad (9.29)$$

Закон збереження енергії в цьому випадку полягає в тому, що енергія окремих частинок до удару, яка складається із кінетичної енергії T однієї частинки та енергії спокою обох частинок, дорівнює релятивістській (повній) енергії системи

$$T + 2\left(mc^2\right) = E. \qquad (9.30)$$

Підставивши (9.12) і (9.30) у (9.29) та урахувавши зв'язок між T та p у релятивістській механіці у вигляді (9.12), маємо

$$\left(T + 2mc^2\right)^2 - T\left(T + 2mc^2\right) = M^2c^4 \Rightarrow \left(T + 2mc^2\right)2mc^2 = M^2c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{c}\sqrt{\left(T + 2mc^2\right)2m}.$$

Отриманий вираз показує, що маса системи, утвореної із частинок після співудару, складним способом залежить від параметрів частинок до удару: від маси частинок m і кінетичної енергії T рухомої частинки.

Швидкість руху утвореної системи знайдемо із формули (9.8), урахувавши (9.12) та (9:30):

$$\upsilon = c^2\frac{p}{E} = c^2\frac{1}{c}\sqrt{\left(T + 2mc^2\right)T}\cdot\frac{1}{T + 2mc^2} = c\sqrt{\frac{T}{T + 2mc^2}}.$$

Приклад 9.7. *Яку мінімальну швидкість повинен мати нейтрон, щоб при зіткненні з ядром, що покоїться і маса якого M, збільшити його внутрішню енергію на ΔE.*

Розв'язання: Скористаємось законом збереження імпульсу

$$m\upsilon = (m+M)\upsilon', \tag{9.31}$$

де m – маса нейтрона; υ – швидкість нейтрона до його зіткнення з ядром; υ' – швидкість системи "ядро–нейтрон", яка утворилась після удару (вважаємо, що відбувся непружний удар). Із (9.31) маємо

$$\upsilon' = \frac{m\upsilon}{m+M}. \tag{9.32}$$

Запишемо закон збереження енергії

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{(m+M)\upsilon'^2}{2} + \Delta E. \tag{9.33}$$

Із (9.33) з урахуванням (9.32) маємо

$$m\upsilon^2 = \frac{m^2\upsilon^2}{m+M} + 2\Delta E \Rightarrow \upsilon^2\left(m - \frac{m^2}{m+M}\right) = 2\Delta E \Rightarrow \upsilon^2\frac{mM}{m+M} = 2\Delta E \text{ або } \upsilon^2\mu = 2\Delta E,$$

де $\mu = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^{-1} = \frac{mM}{m+M}$ – зведена маса системи двох частинок. Остаточно маємо $\upsilon = \sqrt{\frac{2\Delta E}{\mu}}$.

Приклад 9.8. *За якої швидкості кінетична енергія частинки дорівнює її енергії спокою?*

Розв'язання: Зробимо два зауваження:

1. Напевно в цьому прикладі йдеться про релятивістську частинку. Про це свідчить, наприклад, згадування про "енергію спокою", яке для класичного випадку зазвичай недоречне.

2. Інколи студенти спрощують розв'язування такої задачі до запису рівності кінетичної енергії T та енергії спокою E_0 і приходять до парадоксального висновку, у якому швидкість частинки більша за швидкість світла у вакуумі. У чому хибність такого підходу?

Закон, який пов'язує релятивістську (повну) енергію E з кінетичною енергією T та енергією спокою $E_0 = mc^2$, задається співвідношенням (9.10) $E = T + E_0$. Величина енергії T, звичайно, залежить від швидкості υ частинки, величина E_0 від швидкості не залежить, але від швидкості залежить сума цих енергій – релятивістська енергія частинки (9.7):

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

тобто завжди правильно записувати так:

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = E_0 + T\ . \qquad (9.34)$$

Саме тому спрощення, як в цьому прикладі, у вигляді $T = E_0$ спотворює фізику процесів. Для даного прикладу $T = E - E_0 = E_0$. Урахувавши це та (9.34), маємо

$$E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right) = E_0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-1=1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{\upsilon^2}{c^2}=\frac{1}{4} \ \Rightarrow\ \upsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{c} \approx 0{,}85\ \text{c} \approx 2{,}6\cdot 10^8\ \text{м/с}\ .$$

10. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

10.1. Короткі теоретичні відомості

- Рівняння вільних гармонічних коливань:

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \qquad (10.1)$$

і його розв'язок

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \qquad (10.2)$$

де x – величина зміщення від положення рівноваги; A – амплітуда коливання; ω_0 – частота власних коливань; φ_0 – початкова фаза.

- Рівняння вільних гармонічних коливань матеріальної точки з масою m:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ , \quad \text{де } k \text{ – коефіцієнт пружності } (k = \omega_0{}^2 m)\ . \qquad (10.3)$$

- Період коливань пружного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ , \qquad (10.4)$$

- Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ , \quad \text{де } l \text{ – довжина маятника.} \qquad (10.5)$$

- Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{зв}}{g}}\,, \qquad (10.6)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через точку підвісу; l – відстань між точкою підвісу і центром мас маятника; $L_{зв} = \frac{I}{ml}$ – зведена довжина фізичного маятника; g – прискорення вільного падіння.

- Амплітуда A результуючого коливання, яке утворюється при складанні двох гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти, визначається зі співвідношення

$$A^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\,, \qquad (10.7)$$

де A_1, A_2 – амплітуди коливань, що додаються; φ_1, φ_2 – їх початкові фази.

- Початкова фаза результуючого коливання, яке утворюється при складанні двох гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти, визначається зі співвідношення:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}\,. \qquad (10.8)$$

- Рівняння траєкторії результуючого руху точки, що здійснює одночасне коливання у двох взаємно перпендикулярних напрямках з однаковою частотою, має вигляд

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\Delta\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta\varphi\,, \qquad (10.9)$$

де A і B – амплітуди коливань, що додаються; $\Delta\varphi$ – різниця фаз обох коливань $(\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1)$.

- Диференціальне рівняння згасаючих коливань лінійної системи

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^{\,2} x = 0 \qquad (10.10)$$

і його розв'язок

$$x = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad (10.11)$$

де x – зміщення величини, яка характеризує коливання; γ – коефіцієнт згасання; ω_0 – циклічна частота вільних незгасаючих коливань тієї самої коливальної системи; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частота згасаючих коливань; $A_0 e^{-\gamma t}$ – амплітуда згасаючих коливань; φ_0 – початкова фаза; ω_0 – частота власних коливань.

- Декремент згасання:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\gamma T}, \tag{10.12}$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, які відповідають моментам часу, які відрізняються на період.

- Логарифмічний декремент згасання

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \gamma T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \tag{10.13}$$

де $\tau = \dfrac{1}{\gamma}$ – час релаксації; N_e – кількість коливань, які здійснюються за час зменшення амплітуди у e разів (за час релаксації).

- Добротність коливної системи

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}, \quad \text{де } 2\Delta\omega \text{ – ширина резонансної кривої.} \tag{10.14}$$

- Диференціальне рівняння вимушених гармонічних коливань

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = f_0 \cos\omega t \tag{10.15}$$

і його розв'язок

$$x = A_0 \cos(\omega t - \varphi), \tag{10.16}$$

де x – зміщення; $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ у випадку механічних коливань тіла з масою m під дією змушувальної сили $F = F_0 \cos\omega t$.

- Амплітуда і фаза вимушених коливань відповідно дорівнюють

$$A_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}; \tag{10.17}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \tag{10.18}$$

- Максимум амплітуди зміщення у вимушених коливаннях досягається за резонансної частоти $\omega_{рез}$. Ці величини визначають за формулами:

$$\omega_{рез} = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\gamma^2}, \tag{10.19}$$

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}, \tag{10.20}$$

де ω_0 – резонансна частота вільних коливань; γ – коефіцієнт згасання.

10.2. Методичні вказівки та поради

1. Задачі з цього підрозділу пов'язані з механічними коливаннями, які мають загальні закономірності, що притаманні електричним, магнітним, електромагнітним коливанням, коливанням електронів і атомів у речовині тощо. Усі коливальні процеси незалежно від їх природи описуються схожими рівняннями.

2. Підкреслимо, що всі коливання поділяється на три типи коливань: вільні (або власні), згасаючі та вимушені. Тому, розв'язуючи задачу або відповідаючи на запитання, необхідно з самого початку зорієнтуватись, який із типів коливань розглядається в цій задачі або запитанні.

3. Звернемо увагу на те, що, на відміну від власних коливань, згасаючі коливання – негармонічні. Казати про їх період можна лише умовно (див. запитання 10.3.12).

4. При розгляді гармонічних коливань як функції, що їх описують, можна використовувати або $\sin$, або $\cos$. Конкретний вибір функції зазвичай визначається початковими умовами (початковою фазою).

5. Якщо в задачі як кінцевий або проміжний результат слід знайти резонансну частоту власних коливань ω_0, треба намагатись записати рівняння руху у вигляді (10.1) і коефіцієнт біля x прирівняти до ω_0^2.

6. При розв'язуванні задач, пов'язаних зі згасаючими коливаннями, треба пам'ятати, що формулами (10.12) – (10.14) можна користуватись лише у випадку, коли виконується співвідношення $\gamma << \omega_0$. При достатньо великому згасанні $\gamma >> \omega_0$ коливання мають аперіодичний характер: виведене зі стану рівноваги тіло повертається в рівноважне положення, не здійснюючи коливань. Для такого порівняння треба знати або знайти значення γ та ω_0. Значення ω_0 знаходимо за відомими формулами: наприклад, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ для фізичного маятника; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ для пружних коливань тощо. Зазвичай шлях пошуку значення γ полягає у визначенні відношення η двох значень енергії за відомий період часу t_0 і подальших розрахунках типу

$$\eta = \frac{E_0}{E} = e^{2\gamma t_0} \Rightarrow \ln\ \eta = 2\gamma t_0 \Rightarrow \gamma = \frac{\ln\eta}{2t_0}.$$

10.3. Запитання та відповіді

10.3.1. *У літературі з механіки коливань зустрічаються посилання на "коефіцієнт опору" і "коефіцієнт згасання". Чим відрізняються ці величини?*

Коефіцієнт опору (β) – це коефіцієнт пропорційності між силою опору, яка діє на тіло, що рухається, і його швидкістю $F_{оп} = \beta\upsilon$. Пронормована на масу тіла, помножену на 2, величина β визначає величину коефіцієнта згасання (γ): $\gamma = \dfrac{\beta}{2m}$.

Таким чином, рівняння згасаючих коливань записується через коефіцієнт згасання γ у вигляді (10.10) або через коефіцієнт опору β у вигляді $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$, де k – коефіцієнт пружності.

10.3.2. *За яким законом змінюється енергія вільних гармонічних коливань?*

Якщо коливання відбувається за законом $x = A \cdot \cos\omega t$, то кінетична енергія коливань змінюється за законом $E_к = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2\omega t \equiv \dfrac{1}{4}m\omega^2 A^2 (1 - \cos 2\omega t)$, а потенціальна енергія – за законом $U = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2\omega t \equiv \dfrac{1}{4}m\omega^2 A^2 (1 + \cos 2\omega t)$. Повна енергія коливань $E = E_к + U = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \text{const}$ – це незмінна в часі величина. Бачимо, що кінетична і потенціальна енергії також осцилюють, але з частотою, вдвічі більшою за частоту коливань.

Кінетична і потенціальна енергії осцилюють у протифазі: мінімум однієї енергії відповідає максимуму іншої. Максимальні значення потенціальної та кінетичної енергій мають однакову величину $E_{к\,\max} = U_{\max} = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2$. Кінетична і потенціальна енергії періодично переходять одна в одну. Середні за період значення кінетичної та потенціальної енергій однакові й кожна з них дорівнює половині значення повної енергії коливань $\langle E_к \rangle = \langle U \rangle = \dfrac{1}{2}E = \dfrac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \text{const}$.

10.3.3. *Гармонічні коливання можна зобразити графічно за допомогою вектора, який обертається у площині. Як це робиться і навіщо?*

Гармонічні коливання можна зобразити графічно за допомогою вектора, який обертається у площині XY навколо нерухомої точки O (рис. 10.1). Для цього з початку координат O у площині XY проводять вектор $\vec{A}$ (рис. 10.1), довжина якого дорівнює амплітуді коливань, напрямок вектора утворює з віссю OX кут, який дорівнює початковій фазі φ_0 коливань, а величина $(\omega t + \varphi_0)$ відіграє роль фази коливань у даний момент часу.

Кут $(\omega t + \varphi_0)$ збільшується так, що вектор $\vec{A}$ рівномірно обертається навколо точки O з кутовою швидкістю, яка дорівнює циклічній частоті коливань ω. Проекції вектора $\vec{A}$ на осі OX та OY, які дорівнюють, відповідно, $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ та $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, здійснюють гармонічні коливання.

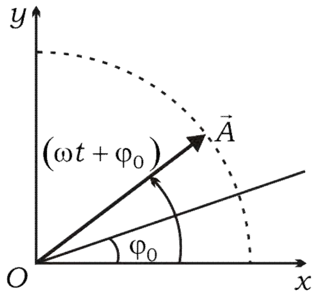


Рис. 10.1. До запитання 10.3.3

Методом векторних діаграм широко користуються, наприклад, при додаванні гармонічних коливань.

10.3.4. *Гармонічні коливання можна представити у вигляді комплексного числа? Як це робиться і навіщо?*

Відомо, що комплексні числа (к. ч.) можна представляти у вигляді $z = \rho\, e^{i\varphi}$ або $z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Перехід від однієї форми запису к. ч. до іншого здійснюється за допомогою формул Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{10.21}$$

Гармонічні коливання можна записати у вигляді к. ч.:

$$x = A\cdot\cos(\omega t + \varphi) \text{ або } x = A\, e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Така форма запису гармонічних коливань тісно пов'язана з подачею гармонічних коливань у вигляді вектора (запитання 10.3.3). При цьому запис гармонічних коливань у формі дійсних чисел $x = A\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ та $y = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$ можна замінити записом у формі к. ч. $z = x + i\cdot y$, де x – дійсна частина к. ч. $(\mathrm{Re}\, z)$; y – уявна частина к. ч. $(\mathrm{Im}\, z)$.

Запис гармонічних коливань у вигляді к. ч. дозволяє скористатись добре розробленим математичним апаратом функцій комплексних змінних для отримання результатів з різноманітних операцій із коливаннями. Позитивні наслідки такого запису в межах нашого курсу можна побачити, наприклад, при додаванні гармонічних коливань з однаковими та різними частотами, в одному та взаємно перпендикулярних напрямках коливань тощо.

10.3.5. *Застосуйте метод векторних діаграм для додавання двох однаково напрямлених гармонічних коливань з різними частотами* ω_1 *і* ω_2 *та початковими фазами* φ_1 *і* φ_2.

Коливання, які задані законами $x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ та $x_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$, можна представити векторами $\vec{A}_1(t)$ та $\vec{A}_2(t)$ (рис. 10.2). Ці вектори записуються у вигляді $\vec{A}_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ та $\vec{A}_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$. Їх амплітуди A_1 та A_2 незмінні в часі, а фази дорівнюють $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1$ та $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$, відповідно.

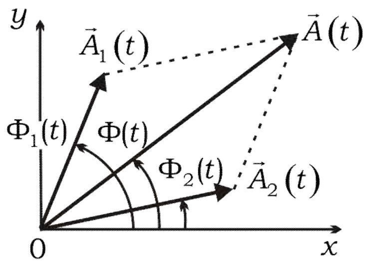


Рис. 10.2. До запитання 10.3.5

Результуючим коливанням відповідає вектор $\vec{A}(t) = \vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)$, проекція якого на вісь OY дорівнює $y(t) = A(t) \cdot \sin \Phi(t)$.

Із теореми косинусів (рис. 10.2) маємо

$$\left|\vec{A}(t)\right|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\right]; \qquad (10.22)$$

$$\operatorname{tg}\Phi(t) = \frac{A_1 \cdot \sin \Phi_1(t) + A_2 \cdot \sin \Phi_2(t)}{A_1 \cdot \cos \Phi_1(t) + A_2 \cdot \cos \Phi_2(t)}. \qquad (10.23)$$

Отримані результати збігаються з презентованими без доведення формулами (10.7) та (10.8).

10.3.6. *Які коливальні процеси називаються когерентними?*

Два коливальні процеси називаються когерентними, якщо вони так погоджено відбуваються в часі, що різниця їх фаз залишається сталою $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \text{const}$. Різниця фаз двох гармонічних коливань $y_1(t) = A_1(t) \cdot \sin \mathit{\Phi}_1(t)$ і $y_2(t) = A_2(t) \cdot \sin \mathit{\Phi}_2(t)$ дорівнює

$$\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (10.24)$$

Різниця початкових фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ у (10.24) завжди є сталою величиною. Для дотримування сталості величини $\Phi_2(t) - \Phi_1(t)$ у (10.24) необхідно, щоб доданок $(\omega_2 - \omega_1)t = \text{const}$. У будь-який момент часу це можливо лише у випадку, коли $(\omega_2 - \omega_1) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \omega_2$.

Таким чином, два гармонічних коливання когерентні, якщо їх частоти однакові, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. У цьому разі в будь-який момент часу різниця фаз когерентних гармонічних коливань дорівнює різниці їх початкових фаз $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \varphi_2 - \varphi_1$.

10.3.7. *З'ясуйте особливості додавання двох когерентних коливань.*

Додаються два гармонічні когерентні коливання $y_1(t) = A_1 \cdot \sin \Phi_1(t)$ та $y_2(t) = A_2 \cdot \sin \Phi_2(t)$ за законами (10.22) і (10.23). Результуюче коливання також буде гармонічним і відбуватиметься з тією самою циклічною частотою ω, що й коливання, які додаються, тобто

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad \text{та} \quad \mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}.$$

Залежно від різниці початкових фаз коливань, що додаються, амплітуда A результуючих коливань змінюється в межах від $A = |A_1 - A_2|$ за $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ до $A = A_1 + A_2$ за $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, де $m = 0, 1, 2, ...$ – будь-яке ціле невід'ємне число.

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, то результуюче коливання відбувається в результаті додавання коливань, що перебувають в одній фазі (синфазних коливань). Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$, то коливання додаються у протифазі.

10.3.8. *Чи можуть бути когерентними гармонічні коливання, частоти яких різні* ($\omega_1 \neq \omega_2$)*?*

Гармонічні коливання, частоти яких різні, є некогерентними, тому що різниця їх фаз $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$ неперервно змінюється із плином часу. При додаванні таких коливань отримують негармонічні результуючі коливання. Вектори $\vec{A}_1(t)$ та $\vec{A}_2(t)$, що додаються, обертаються з різними кутовими швидкостями, так що побудований на них паралелограм неперервно деформується, а його діагоналлю є вектор $\vec{A}(t)$, що характеризує результуючі коливання. який весь час змінюється за довжиною й обертається зі змінною кутовою швидкістю.

Водночас вважають, що два гармонічні коливання з різними частотами ω_1 та ω_2 $(\omega_1 \neq \omega_2)$ можна вважати частково когерентними, але лише в проміжок часу Δt, за який різниця фаз цих коливань істотно не змінюється у межах, які визначаються співвідношенням $|\omega_2 - \omega_1| \cdot \Delta t < \pi$.

Якщо ввести таку характеристику, як *час когерентності* коливань $\tau_{\text{ког}} = \dfrac{\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$, то можна стверджувати, що коливання залишаються когерентними протягом часу $\Delta t < \tau_{\text{ког}}$.

10.3.9. *Яке фізичне явище з розділу "Коливання" називають биттям? Розгляньте властивості биття.*

Биття – це явище, яке спостерігається при додаванні двох гармонічних коливань одного напрямку з різними, але близькими за значеннями частотами. Нехай уздовж осі OX відбуваються коливання $x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ та $x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ з частотами $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$, але $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$. Для спрощення обчислень зазвичай припускають, що $A_1 = A_2 = A_0$. У результаті додавання $x_1 + x_2 = x$ отримують коливання, які описуються законом, що має вигляд

$$x = 2A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_0\right) \approx 2A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right). \quad (10.25)$$

Амплітуда результуючих коливань – це вираз, який стоїть у (10.25) біля $\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$:

$$A(t) = 2A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = 2A_0 \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right). \quad (10.26)$$

Таким чином, амплітуда цих коливань, які називають биттям, модульована. Амплітуда результуючого коливання періодично змінюється від 0 до $2A_0$ за гармонічним законом $A(t) = 2A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$. Як бачимо, биття є періодичними коливаннями.

10.3.10. *З якою частотою змінюється амплітуда биття? Поясніть.*

Виходячи з (10.26), здається, що частота биття дорівнює $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\Omega}{2}$? Однак це не так. Відповідаючи на це запитання, треба враховувати, що амплітуда за визначенням не може бути від'ємною, це зажди додатне число. Тому правильно амплітуду биття записувати через модуль: $A(t) = \left|2A_0 \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right)\right|$. Як відомо, період функції $\cos\alpha$ дорівнює 2π, а період функції $\left|\cos\alpha\right|$ дорівнює π. Ось чому частота, з якою модульована амплітуда биття, дорівнює не $\frac{\Omega}{2}$, як здавалось, а $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, тобто період модуляції амплітуди биття дорівнює $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, а не $\frac{2\pi}{\left(\omega_1 - \omega_2\right)/2}$, як ми думали раніше, виходячи з (10.26).

10.3.11. *Що називають амплітудою згасаючих коливань?*

Згасаючі коливання описуються рівнянням $x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$. Величину $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ називають амплітудою згасаючих коливань, де A_0 – максимальне значення величини, що здійснює згасаюче коливання, яке вона досягає в перший період коливань (рис. 10.3). Фактично, амплітуда згасаючих коливань показує закон, за яким змінюється обвідна до максимальних значень величини, що здійснює коливання в різні періоди $\left(A_1, A_2, A_3 ... A_n ...\right)$, рис. 10.3. (Зверніть увагу, що згасаючими в часі коливання можуть бути величини зміщення, швидкості, прискорення тощо).

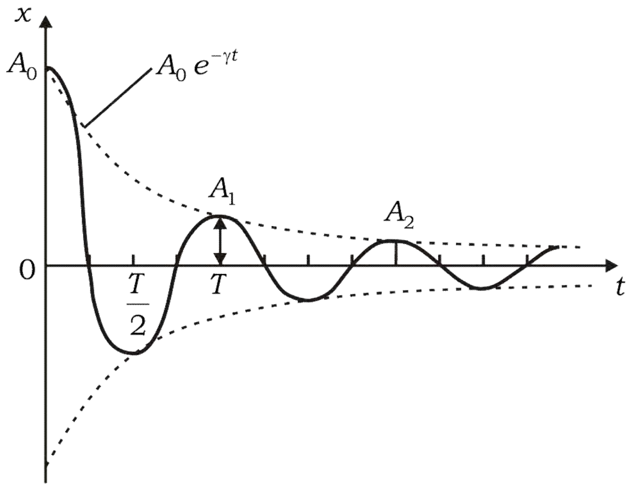


Рис. 10.3. До запитання 10.3.11

10.3.12. *Чому період згасаючих коливань інколи називають умовним періодом коливань?*

Така назва викликана тим, що згасаючі коливання не є періодичними. За означенням періодичним є процес, при якому через деякий час, що називається періодом коливань, повністю повторюється стан коливальної системи. Однак у згасаючих коливаннях стан коливної системи взагалі повністю ніколи не повторюється. Навіть у два послідовних моменти часу t_1 і t_2 $\left(t_2 > t_1\right)$, коли зміщення системи однакове й дорівнює нулю, то швидкості в ці моменти часу будуть неоднаковими $\left(\upsilon_2 < \upsilon_1\right)$. Максимальне значення величини x, що коливається, виміряне в деякий момент часу t_1, у наступний момент часу (за $t > t_1$) також ніколи не повторюється. Тому, хоча при згасаючих коливаннях величина x й обертається на нуль і досягає максимальних та мінімальних значень через *рівні* проміжки часу $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2}}$, строго кажучи, вважати згасаючі коливання періодичними неможна. Тому і величину T інколи називають *умовним періодом* згасаючих коливань, а величину $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2}$ – *умовною циклічною частотою* згасаючих коливань.

10.3.13. *Що таке логарифмічний декремент згасання?*

За визначенням, логарифмічний декремент згасання θ – це безрозмірна величина, що дорівнює натуральному логарифму відношення значень амплітуди згасаючих коливань у моменти часу t та $t+T$ (10.13):

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \gamma T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

де T – умовний період коливань; $\tau = \frac{1}{\gamma}$ – час релаксації; N_e – кількість коливань, які здійснюються за час зменшення амплітуди у e разів (за час релаксації).

10.3.14. *Дайте визначення добротності коливальної системи?*

Добротність Q – безрозмірна величина. Існують декілька рівноправних визначень добротності Q коливальної системи.

1. Визначення Q " через енергії":

Добротність Q – безрозмірна величина, що дорівнює добутку 2π на відношення енергії $E_{\text{накоп}}$ коливань, накопиченої в системі на момент вимірювання, до втрат цієї енергії за один умовний період згасаючих коливань

$$Q = 2\pi\frac{E_{\text{накоп}}}{E_{\text{витр}T}}, \qquad (10.27)$$

2. Визначення Q "через амплітуди":

Добротність

$$Q = \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{стат}}}, \qquad (10.28)$$

де $A_{\text{рез}}$ – максимальна (резонансна) амплітуда коливань у коливальній системі; $A_{\text{стат}}$ – амплітуда коливань у резонансній системі, які виникають під дією квазістатичної сили (за $\omega \to 0$).

3. *Визначення Q "через ширину резонансної кривої":*

Добротність

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}, \qquad (10.29)$$

де ω_0 – резонансна частота коливальної системи; $2\Delta\omega$ – ширина резонансної кривої ($\Delta\omega = \gamma$, де γ – коефіцієнт згасання).

4. Визначення Q "через логарифмічний декремент згасання":

Добротність

$$Q = \frac{\pi}{\theta}, \qquad (10.30)$$

де $\pi = 3{,}14..$; θ – логарифмічний декремент згасання.

10.3.15. *Доведіть і проаналізуйте формулу для добротності* $Q = \frac{\pi}{\theta}$.

Якщо повернутись до базового визначення добротності Q коливної системи "через енергії" (10.27) $Q = 2\pi \frac{E_{\text{накоп}}}{E_{\text{витр}T}}$, то можна, скориставшись (10.12), отримати

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{накоп}}}{E_{\text{витр}T}} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} =$$

$$= 2\pi \frac{1}{1 - \frac{A^2(t+T)}{A^2(t)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\theta}}.$$

За малих значень логарифмічного декремента згасання ($\theta \ll 1$) величина $1 - e^{-2\theta} \approx 2\theta$, тоді $Q \approx \frac{\pi}{\theta}$.

Зробимо декілька зауважень:

1. Формулу $Q = \frac{\pi}{\theta}$ можна вважати наближеною. Вона може дати правильне значення добротності лише при малому згасанні, хоча це не є "сильним" обмеженням: більшість практичних задач і теоретичних прикладів розв'язуються саме в такому наближенні.

2. При малому згасанні $(\gamma << \omega_0)$ частота згасаючих коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0$ практично дорівнює частоті власних (незгасаючих) коливань. Тому $Q \approx \frac{\pi}{\theta} \approx \frac{\pi}{\gamma T_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$, тобто отримали також визначення Q "через ширину резонансної кривої" (10.29).

10.3.16. *Як, маючи амплітудно-частотну характеристику коливального процесу, знайти коефіцієнт згасання системи?*

Маючи амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) вимушених коливань, тобто залежність квадрата амплітуди A^2 коливань від частоти ω, знаходять на напіввисоті $\frac{1}{2}A^2$ ширину $2\Delta\omega$ АЧХ. Величина $2\Delta\omega$ дорівнює подвоєному значенню коефіцієнта згасання γ або $\Delta\omega = \gamma$.

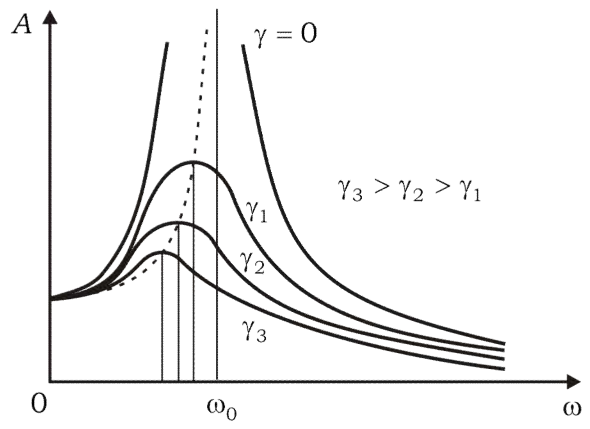


Рис. 10.4. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) вимушених коливань

10.3.17. *Чому дорівнює зсув фаз між вимушеними коливаннями і змушувальною силою в резонансі?*

УВ резонансі зсув фаз між вимушеними коливаннями і змушувальною силою дорівнює $\pi/2$. Це видно, наприклад, із фазочастотної характеристики (рис. 10.5).

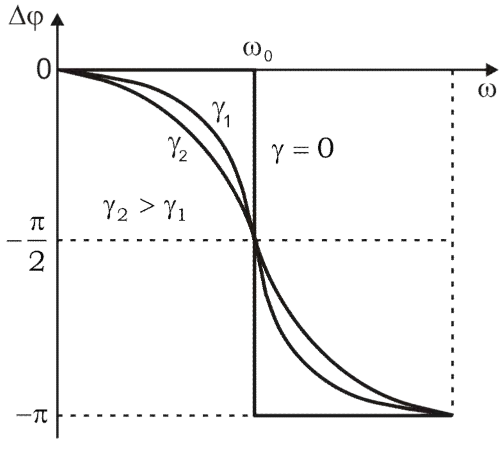


Рис. 10.5. Фазочастотна характеристика (ФЧХ) вимушених коливань

10.3.18. *У якому випадку зміна змушувальної сили і вимушених коливань відбувається в однаковій фазі? У протифазі?*

Як видно із ФЧХ (рис. 10.5), зсув між фазою змушувальної сили і фазою вимушених коливань дорівнює нулю (зміна змушувальної сили і вимушених коливань відбувається в однаковій фазі) далеко від резонансу у випадку, коли $\omega << \omega_0$ (дія квазистатичної сили). У протифазі змушувальна сила і вимушені коливання змінюються за дуже високих частот $(\omega >> \omega_0)$.

10.3.19. *Що таке гармонічний аналіз (фур'є-аналіз) періодичних коливань?*

Гармонічний аналіз (*фур'є-аналіз*) періодичних коливань полягає в представленні періодичної функції $f(t)$, яка описує коливання, у вигляді ряду Фур'є. Періодичні коливання мають дискретний (лінійчастий) спектр фур'є-гармонік. Члени ряду Фур'є, що відповідають гармонічним коливанням із частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$, називаються першою (основною), другою, третьою і т. д. гармоніками періодичного коливання, яке описується функцією $f(t)$.

Склад спектра залежить від виду періодичної функції $f(t)$. Фактично, спектр коливань складається із сукупності гармонічних коливань різних кратних частот з різними амплітудами. При додаванні гармонічних коливань різних кратних частот з різними амплітудами отримується складне коливання $f(t)$, тобто здійснюється фур'є-синтез.

10.3.20. *Чи можна проводити фур'є-аналіз неперіодичних коливань?*

Неперіодичні коливання мають неперервний (суцільний) спектр фур'є-гармонік. Неперіодичні коливання можна представити як результат накладання нескінченної кількості гармонічних коливань, частоти яких набувають усіляких значень в інтервалі від 0 до ∞. На відміну від періодичних коливань, які записуються в ряд Фур'є, неперіодичні коливання записуються в інтеграл Фур'є.

10.3.21. *Чим хвилі відрізняються від коливань?*

Хвилі – це процес поширення коливань у просторі, у результаті якого передається енергія. Коливання – це процес, який повторюється через певні проміжки часу. У результаті коливань енергія в просторі не поширюється, а перерозподіляється між кінетичною і потенціальною її складовими. Порівняння властивостей хвиль і коливань наведено в таблиці.

Хвилі	**Коливання**
Процес розвивається в просторі	Процес розвивається в часі
Енергія переноситься в просторі	Енергія локалізована в просторі, відбуваються лише періодичний перерозподіл енергії з одного її виду в інший (напр., з потенціальної енергії в кінетичну, і навпаки)
Описуються хвильовим рівнянням $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2x}{dt^2}$ або $\ddot{x} = \upsilon^2 \cdot \frac{d^2x}{dy^2}$	Описуються рівнянням типу $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$
Потенціальна і кінетична енергії коливаються синфазно	Потенціальна і кінетична енергії коливаються у протифазі
Періодичні в просторовий	Періодичні в часі
Характеристика періодичності – довжина хвилі λ (просторова періодичність)	Характеристика періодичності – частота f або період T (часова періодичність

10.3.22. *Яким рівнянням описується плоска хвиля? Доведіть.*

Плоска хвиля – це хвиля, у якої хвильові поверхні, виміряні в різні довільні моменти часу, являють собою сукупність площин, паралельних одна одній.

У плоскій хвилі, яка поширюється вздовж осі OY (рис. 10.6), величина зміщення x, або якісь інші величини, що характеризують коливальний рух частинок або якогось із параметрів середовища, (напр., густина) залежать тільки від часу t і координати y точки середовища. Коливання в точці B, яке характеризується зміщенням x_B, відрізняється від коливань у початку координат зі зміщенням x_O відставанням на час $\tau = \dfrac{\ell}{\upsilon}$, де ℓ – відстань між точками O та B уздовж OY; υ – швидкість поширення хвилі вздовж OY. Обидві точки O та B коливаються за гармонічним законом

$$x_O = A\cos\omega t \quad \text{та} \quad x_B = A\cos\left[\omega(t-\tau)\right] = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{\ell}{\upsilon}\right)\right],$$

якщо вважати, що немає поглинання хвилі в середовищі $\left(A = \text{const}\right)$.

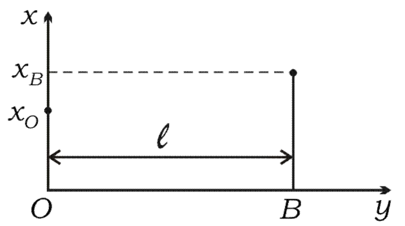


Рис. 10.6. До запитання 10.3.20

Для довільної точки з координатою y уздовж осі OY хвиля описується рівнянням

$$x = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{y}{\upsilon}\right)\right] = A\cos\left(\omega t-\frac{\omega y}{\upsilon}\right) = A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi y}{T\cdot\upsilon}\right) =$$

$$= A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot y\right) = A\cos\left(\omega t-k\cdot y\right).$$

У розгляді було враховано, що $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; $T\cdot\upsilon = \lambda$, де $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число. Таким чином, отримано *рівняння плоскої хвилі:*

$$x = A\cos\left(\omega t-k\cdot y\right). \tag{10.31}$$

10.3.23. *Доведіть хвильове рівняння для плоскої хвилі.*

Розглянемо плоску хвилю, яка поширюється вздовж осі OY (рис. 10.7). У точці з координатою y хвиля характеризується зміщенням x, у точці з координатою $\left(y+dy\right)$ – зміщенням $\left(x+dx\right)$.

Із рівняння плоскої хвилі $x = A\cos(\omega t - k\cdot y)$ для точки простору з координатою y можна знайти першу і другу похідні за часом:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon = \dot{x} = -A\,\omega\sin(\omega t - kx); \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\,\omega^2\cos(\omega t - kx). \qquad (10.32)$$

Перша і друга похідні за координатою y, визначені для рівняння плоскої хвилі (10.31), мають вигляд

$$\frac{dx}{dy} = A\frac{\upsilon}{\omega}\sin(\omega t - ky); \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -A\frac{\upsilon^2}{\omega^2}\cos(\omega t - ky). \qquad (10.33)$$

При отриманні (10.33) було враховано, що $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon\cdot T} = \frac{2\pi}{\upsilon}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\upsilon}$.

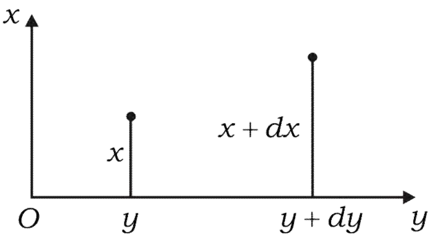


Рис. 10.7. До запитання 10.3.23

Порівнюючи (10.32) і (10.33), отримуємо хвильове рівняння для хвилі, яка поширюється вздовж осі OY:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (10.34)$$

10.3.24. *Чим відрізняється поведінка енергій коливання і хвилі?*

У коливаннях потенціальна енергія $E_п$ змінюється при зміні кінетичної енергії $E_к$. Значення $E_п$ і $E_к$ змінюються у протифазі: чим більша $E_п$, тим менша $E_к$. Коли величина $E_п$ набуває мінімального значення, величина $E_к$ – максимальна. Значення повної енергії $E_{повн} = E_п + E_к$ при цьому залишається незмінною величиною.

Для хвиль потенціальна енергія $E_п$ і кінетична енергія $E_к$ змінюються синфазно: чим більша $E_п$, тим більша $E_к$. Коли величина $E_п$ набуває мінімального значення, величина $E_к$ також мінімальна. Максимуми $E_п$ і $E_к$ також досягаються одночасно. Значення повної енергії для хвилі

$$E_{повн} = E_п + E_к = \rho A^2 V\omega^2 \sin\omega\left(t - \frac{y}{\upsilon}\right) \neq \mathrm{const}.$$

Повною енергією хвилі є функція $E_{повн}(\rho, A^2, V, \omega^2, t, y)$.

Таким чином, у хвилі величина повної енергії $E_{\text{повн}}$ у просторі і часі змінюється від $E_{\text{повн}}^{\min}$ до $E_{\text{повн}}^{\max}$ на відміну від повної енергії коливань, де $E_{\text{повн}} = \text{const}$.

10.3.25. *Якщо при поширенні хвилі у фіксованій точці простору енергія хвилі* $E_{\text{повн}}$ *змінюється від* $E_{\text{повн}}^{\min}$ *до* $E_{\text{повн}}^{\max}$*, то куди зникає енергія хвилі в той момент, коли енергія хвилі відповідає значенню* $E_{\text{повн}}^{\min}$*? Як виконується закон збереження енергії в цьому випадку?*

Енергія хвилі нікуди не зникає, вона переноситься в просторі: у кожній точці простору з відомою періодичністю з'являється максимум повної енергії, на заміну якого приходить мінімум і т. д. У якийсь фіксований момент часу в одній точці простору спостерігається мінімальне значення повної енергії $E_{\text{повн}}^{\min}$, у сусідній точці простору, яка відстоїть від першої точки на відстані $\lambda/2$, спостерігається максимальне значення повної енергії $E_{\text{повн}}^{\max}$.

10.3.26. *Проаналізуйте, які фізичні висновки можуть випливати із формули Релея для групової швидкості?*

Нагадаємо, що формула Релея пов'язує фазову (υ) і групову (u) швидкості: $u = \upsilon - \lambda \dfrac{d\upsilon}{d\lambda}$, де λ – довжина хвилі; $\dfrac{d\upsilon}{d\lambda}$ – дисперсія середовища, у якому поширюється хвиля. Розглянемо різні випадки дисперсії:

1) Коли дисперсія нормальна $\left(\dfrac{d\upsilon}{d\lambda} > 0\right)$, маємо випадок $u < \upsilon$.

2) В області аномальної дисперсії $\left(\dfrac{d\upsilon}{d\lambda} < 0\right)$, маємо випадок $u > \upsilon$.

3) У випадку відсутності дисперсії (у вакуумі), маємо випадок $u = \upsilon$.

У природі можливі хвилі, які мають різну фізичну природу. Наприклад, на поверхні "глибокої" води закон дисперсії хвилі має вигляд $\upsilon = C\sqrt{\lambda}$, де C – стала. Групова швидкість має вигляд

$$u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda} = \upsilon - \lambda \frac{C}{2\sqrt{\lambda}} = \upsilon - \frac{1}{2} C\sqrt{\lambda} = \upsilon - \frac{1}{2}\upsilon = \frac{\upsilon}{2} \;\Rightarrow\; u < \upsilon .$$

Звідси випливає, що для цього типу хвиль дисперсія нормальна $\left(\dfrac{d\upsilon}{d\lambda} > 0\right)$.

10.3.27. *Як, знаючи закон дисперсії та величину фазової швидкості хвилі з довжиною* λ*, знайти величину групової швидкості хвилі для цього ж значення* λ*?*

Закон дисперсії може бути заданий в аналітичному вигляді $\left(\dfrac{d\upsilon}{d\lambda}\right)$. Тоді за формулою Релея знаходять групову швидкість. У разі, коли закон дисперсії заданий у вигляді графіка залежності $\upsilon(\lambda)$, існує спосіб визначення групової швидкості, який запропонував П. Еренфест (рис. 10.8).

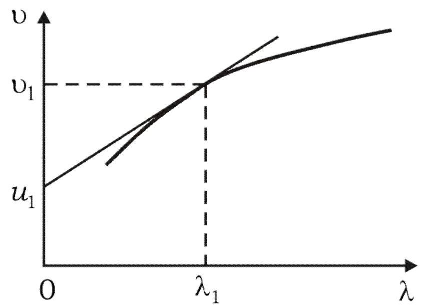


Рис. 10.8. Визначення величини групової швидкості методом Еренфеста9+

Спочатку за дисперсійною кривою $\upsilon(\lambda)$ знаходять для заданого значення довжину хвилі λ_1 величину фазової швидкості υ_1. Потім у цій самій точці дисперсійної кривої будують дотичну, яка перетинає вертикальну координатну вісь у точці, що відповідає значенню групової швидкості u_1.

10.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 10.1. *Уявімо собі шахту, прориту в Землі вздовж її осі обертання. Вважаючи Землю однорідною кулею і нехтуючи опором повітря, знайдіть: а) рівняння руху тіла, яке впало у шахту; б) час, який буде необхідний цьому тілу, щоб воно досягло протилежного кінця шахти; в) швидкість тіла в центрі Землі.*

Розвя'зання: а) На поверхні Землі на тіло масою m діє сила тяжіння, яка дорівнює вазі тіла

$$F(R) = -\gamma \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g(R), \qquad (10.35)$$

де R – радіус Землі (рис. 10.9). На відстані r від центра Землі на тіло масою m діє сила

$$F(r) = -\gamma \frac{M' \cdot m}{r^2} = m \cdot g(r), \qquad (10.36)$$

де M' – маса частини земної кулі радіусом $r < R$.

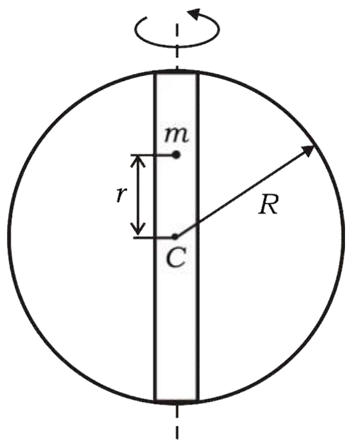


Рис. 10.9. До прикладу 10.1

Із (10.35) та (10.36) отримуємо $g(R) = -\gamma \frac{M}{R^2}$ та $g(r) = -\gamma \frac{M'}{r^2}$. Враховуючи, що маса земної кулі $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$, де ρ – густина земної матерії, маємо

$$g(R) = -\gamma \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho}{R^2}, \qquad (10.37)$$

$$g(r) = -\gamma \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{r^2}. \qquad (10.38)$$

Із (10.37) та (10.38) маємо

$$\frac{g(R)}{g(r)} = \frac{R}{r} \Rightarrow g(r) = g(R) \cdot \frac{r}{R}. \qquad (10.39)$$

Перевіримо правильність (10.39):

$$g(r = R) = g(R) \cdot \frac{R}{R} = g(R) \text{ – правильно; } g(r = 0) = g(R) \cdot 0 = 0 \text{ – правильно.}$$

Як і будь-яке прискорення при поступальному русі тіла за визначенням прискорення вільного падіння, з яким рухається тіло в даному випадку, можна записати через другу похідну за часом від координати у вигляді

$$g(r) = \frac{d^2 r}{dt^2} \qquad (10.40)$$

Із (10.39) та (10.40) маємо

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = g(R)\cdot\frac{\vec{r}}{R}. \qquad (10.41)$$

З якісного розгляду руху тіла, кинутого у шахту, можна зробити висновок про те, що тіло на першій частині шляху рухається з додатним прискоренням, а на другій – з від'ємним прискоренням, гальмуючись. Таким чином, тіло перебуває в коливальному русі. При нехтуванні опором повітря та іншими силами тертя такі коливання можна розглядати як вільні. Рівняння вільних гармонічних коливань має вигляд (10.1):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_0\vec{r} = 0,$$

де ω_0 – частота власних коливань з урахуванням (10.41) дорівнює

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g(R)}{R}}.$$

Оскільки $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ період коливання тіла у шахті дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g(R)}}, \qquad (10.42)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6300\ \text{км}}{9{,}8\ \text{м/с}^2}} = 84\,\text{хв.}$$

Цей час збігається з часом обльоту Землі по "низькій" навколоземній орбіті. Приблизно такий час (108 хв) перебував у Космосі Ю. О. Гагарін, який у 1961 р. уперше в історії людства на космічному кораблі здійснив 1 оберт навколо Землі. Проте збіг величини часу не випадковий: формула (10.42) збігається із формулою для визначення періоду обертання супутника навколо Землі (див. розд. 8).

Період коливання тіла у шахті – T. Час, який необхідний тілу, кинутому у шахту, щоб воно досягло протилежного кінця шахти матиме вигляд

$$t = \frac{T}{2} = 42\ \text{хв.}$$

Швидкість тіла при його проходженні точки рівноваги, яка розташована в центрі Землі, можна знайти за формулою, відомою з теорії коливань (можна довести):

$$\upsilon_{max} = A\cdot\omega = R\cdot\omega. \qquad (10.43)$$

$$(10.42) \to (10.43):\ \upsilon_{max} = R\cdot\sqrt{\frac{g(R)}{R}} = \sqrt{R\cdot g(R)}.$$

Швидкість тіла в центрі Землі дорівнює

$$\upsilon_{max} = \sqrt{6300\,\text{км} \cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2} = 7{,}8 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Це величина 1-ї космічної швидкості?!

Приклад 10.2. *Дошка, на якій лежить брусок, здійснює горизонтальні гармонічні коливання з амплітудою* $a = 10$ см. *Знайдіть коефіцієнт тертя між дошкою та бруском, якщо останній починає сковзати по дошці, коли її період коливань стає меншим* $T = 1{,}0$ с.

Розв'язання: Брусок починає рухатись, коли сила F, яка діє на нього, стає рівною силі тертя: $F = F_{\text{тер}} \equiv k \cdot mg$ (рис. 10.8). З урахуванням II закону Ньютона для одновимірного випадку, який має вигляд $F = m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2}$ (де m – маса бруска), умова початку руху виглядає так:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = k \cdot mg \;\Rightarrow\; k = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{1}{g}. \tag{10.44}$$

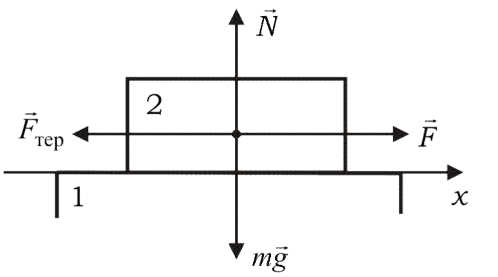


Рис. 10.10. До прикладу 10.2

Коливання дошки – гармонічні (за умовою задачі), тобто маємо

$$x = a \cdot \cos\ \omega t \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin\ \omega t \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos\ \omega t.$$

Порівнюючи останній вираз з (10.44), бачимо, що коефіцієнт тертя в цьому випадку змінюється із часом за гармонічним законом.

Максимальне значення прискорення (амплітуда прискорення) дошки дорівнює

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{max} = a\omega^2. \tag{10.45}$$

Якщо (10.45) підставити в (10.44), отримуємо амплітудне (максимальне) значення коефіцієнта тертя

$$k = \frac{a\omega^2}{g} = \frac{a}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 a}{gT^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 0{,}1}{9{,}8 \cdot 1} \approx \frac{4 \cdot 1}{10} = 0{,}4.$$

Приклад 10.3. *Частинку змістили з положення рівноваги на відстань* $L = 1{,}0\,\text{см}$ *і залишили. Який шлях пройде, коливаючись, ця частинка до повної зупинки, якщо логарифмічний декремент згасання для її коливань дорівнює* $\theta = 0{,}20$*?*

Розв'язання: Відбуватимуться згасаючі коливання навколо положення рівноваги (рис. 10.3), максимальне відхилення частинки в один бік при *i*-му коливанні за визначенням дорівнює

$$a_i = a_{i-1} \cdot e^{-\gamma\frac{T}{2}} = a_{i-1} \cdot e^{-\frac{\theta}{T}\cdot\frac{T}{2}} = a_{i-1} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}, \tag{10.48}$$

де γ – коефіцієнт згасання, а θ – логарифмічний декремент згасання $(\theta = \gamma T)$.

Таким чином, максимальне значення згасаючих коливань, які змінюються за експоненціальним законом (10.48), можна записати у вигляді

$$\begin{cases} a_1 = L \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}; \\ a_2 = a_1 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}} = L \cdot e^{-\theta}; \\ a_3 = a_2 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}} = L \cdot e^{-3\frac{\theta}{2}}; \\ a_i = L \cdot e^{-i\frac{\theta}{2}}. \end{cases} \tag{10.49}$$

Як бачимо, утворюється нескінченна спадна геометрична прогресія, яка складається з ряду, що збігається. Сума її членів дорівнює

$$\sum_i a_i = \frac{a_1}{1-q}, \quad \text{де знаменник прогресії } q = e^{-\frac{\theta}{2}}. \tag{10.50}$$

Шлях, який частинка пройде до зупинки, дорівнює $s = L + 2\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Коефіцієнт 2 біля другого доданка вказує на те, що частинка, коливаючись, проходить один і той самий шлях двічі. Скориставшись (10.50), маємо

$$s = L + 2\frac{L \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}}{1 - e^{\frac{\theta}{2}}} = L\left(1 + 2\frac{e^{-\frac{\theta}{2}}}{1 - e^{-\frac{\theta}{2}}}\right) = L\left(\frac{1 - e^{-\frac{\theta}{2}} + 2e^{-\frac{\theta}{2}}}{1 - e^{-\frac{\theta}{2}}}\right) = L\left(\frac{1 + e^{-\frac{\theta}{2}}}{1 - e^{-\frac{\theta}{2}}}\right).$$

$$s = 0{,}01\left(\frac{1 + e^{-\frac{0{,}2}{2}}}{1 - e^{-\frac{0{,}2}{2}}}\right) \approx 0{,}01\left(\frac{1 + 0{,}9}{1 - 0{,}9}\right) = 0{,}19\,\text{м}.$$

Приклад 10.4. *Стрілка чутливого приладу коливається біля положення рівноваги. Її послідовні крайні положення такі:* $n_1 = 26,4$; $n_2 = 10,7$; $n_3 = 20,5$. *Знайдіть: 1) поділку, яка відповідає рівноважному положенню стрілки, якщо її декремент згасання сталий у часі; 2) наступне після* n_3 *крайнє положення стрілки* (n_4).

Розв'язання: Крайні положення стрілки досягаються через час $T/2$ (де T – період коливань стрілки) спочатку в один, а потім в інший бік від n_0 (рис. 10.11).

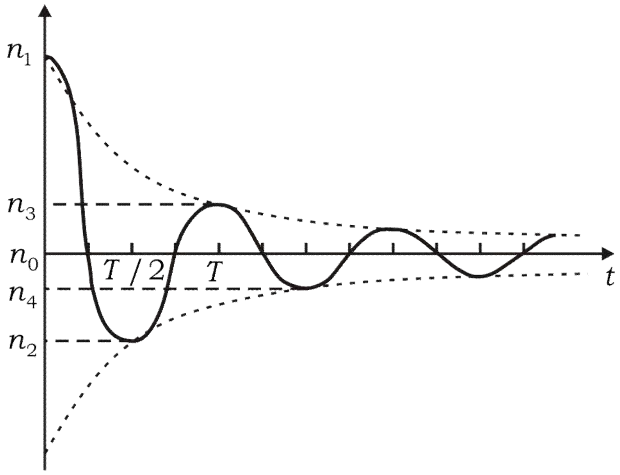


Рис. 10.11. До прикладу 10.4

Позначимо рівноважне положення стрілки через n_0. Послідовні показання приладу при максимальному відхиленні стрілки n_1, n_2, n_3,...n_i описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} n_1 = n_0 + a_1 \\ n_2 = n_0 - a_2 \\ n_3 = n_0 + a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_0 + a_0 e^{-\gamma t_1} \\ n_2 = n_0 - a_0 e^{-\gamma(t_1 + T/2)} \\ n_3 = n_0 + a_0 e^{-\gamma(t_1 + T)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{10.51}$$

де γ – коефіцієнт згасання; a_0 – амплітуда коливань стрілки в момент часу $t = 0$; t_1 – момент відліку положення стрілки n_1; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – амплітуди послідових коливань стрілки.

Із визначення декремента згасання (10.12) маємо

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot a_3 = a_2{}^2. \tag{10.52}$$

Із (10.51)

$$\begin{cases} a_1 = n_1 - n_0 \\ a_2 = n_0 - n_2 \\ a_3 = n_3 - n_0 \\ . \ . \ .. \ . \ .. \ . \ . \ .. \ . \ . \ .. \ . \ . \end{cases} \tag{10.53}$$

Підставимо (10.53) у (10.52):

$$(n_1 - n_0)(n_3 - n_0) = (n_0 - n_2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot n_3 - n_1 \cdot n_0 - n_0 \cdot n_3 + n_0^2 = n_0^2 - 2n_0 \cdot n_2 + n_2^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot n_3 - n_2^2 = n_0(n_1 + \cdot n_3 - 2n_2) \ \Rightarrow \ n_0 = \frac{n_1 \cdot n_3 - n_2^2}{n_1 + \cdot n_3 - 2n_2}.$$

$$n_0 = \frac{26,4 \cdot 20,5 - 10,7^2}{26,4 + \cdot 20,5 - 2 \cdot 10,7} \approx 16,7 \ .$$

Знайдемо наступне після n_3 крайнє положення стрілки (n_4). Для цього подібно до (10.52) запишемо пропорцію

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \ \Rightarrow \ a_4 = \frac{a_3^2}{a_2}. \tag{10.54}$$

Згідно з (10.53) знайдемо числові значення амплітуд відхилення стрілки a_2 та a_3:

$$a_2 = n_0 - n_2 = 16,7 - 10,7 = 6,0$$

$$a_3 = n_3 - n_0 = 20,5 - 16,7 = 3,8\ .$$

Після підстановки отриманих значень a_2 та a_3 в (10.54) маємо

$$a_4 = \frac{(3,8)^2}{6,0} = 2,4 \ \Rightarrow \ n_4 = n_0 - a_4 = 16,7 - 2,4 = 14,3\ .$$

ЛІТЕРАТУРА

Підручники

1. *Матвєєв, А. Н.* Механіка і теорія відносності / А. Н. Матвєєв. – К. : Вища шк., 1993.

2. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1989.

3. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная фізика / И. В. Савельев. – М. : Высш. шк., 1987.

4. *Кучерук, І. М.* Загальний курс фізики. Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика / І. М.Кучерук, Горбачук І. Т. – К. : Техніка, 1999.

5. *Стрелков, С. П.* Механика / С. П. Стрелков. – М. : Наука, 1975.

6. *Бушок, Г.Ф.* Курс фізики. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка / Г. Ф. Бушок, Є. Ф. Венгер. – К. : Вища шк., 2002.

7. *Детлаф, А. А.* Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 2001.

8. *Элементарный* учебник физики : в 3 т. – Т. 1. Механика / под ред. Г. С. Ландсберга. – М., 1964.

Збірники задач

9. *Иродов, И. Е.* Задачи по общей физике /Иродов, И. Е. . – М. : Наука, 1988.

10. *Загальний* курс фізики : збірник задач / под ред. І. П. Гаркуши, І.Т. Горбачука, В. П. Курінного та ін. – К., 2004.

11. *Задачи* по физике / под ред. О.Я. Савченко. – М., 1988.

12. *Сборник* задач по общему курсу физики / под ред. В. А. Овчинкина. – М.: Физматкнига, 2004. – Ч. 2.

13. *Сахаров, Д. И.* Сборник задач по физике / Д. И. Сахаров. – М., 2003.

14. *Волькенштейн, В. С.* Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М., 1969.

15.*Остроухов, А. А.* Розв'язування задач з курсу загальної фізики (практикум) / А. А. Остроухов , В. Л. Стрижевський, М. Г. Цвелих та ін. – К. : Рад. шк., 1966.

16.*Иродов, И.Е.* Механика. Основные законы : учеб. пособие для вузов / И. Е. Иродов. – М., 1999. – С. 320.

17.*Белянкин, А. Г.* Методика решения задач механіки / А. Г. Белянкин, А. Н. Матвеев, И. М. Сараева ; под ред. А. Н. Матвеева. – М. : изд-во МГУ, 1980.

18.*Беликов, Б. С.* Решение задач по физике. Общие методы / Б. С. Беликов. – М. : Высш. шк., 1986.

19.*Новодворская, Е. М.* Методика проведения упражнений по физике во втузе / Е. М. Новодворская , Э. М. Дмитриев. – М. : Высш. шк., 1981.

20.*Мин, Чен*. Задачи по физике с решениями / Мин Чен. – М. : Мир, 1978.

ЗМІСТ

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Валерій Фадейович

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА В ПРИКЛАДАХ, ЗАПИТАННЯХ І ВІДПОВІДЯХ

МЕХАНІКА

Підручник

Редактор *Л. П. Львова*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Підписано до друку 29.03.11. Формат 60х84 1/16. Вид. № Рф11. Гарнітура Times. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 200. Ум. друк. арк. 18,1. Обл.-вид. арк. 18,0. Зам. № 211-0000.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (3044) 239 32-22; (3044) 239 31-61; тел./факс (3044) 234 31-28.
http://vpc.univ.kiev.ua
vpc@univ.kiev.ua
Свідоцтво внесено до державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02.