Первісна функції

В цій частині лекційного матеріалу основною буде задача, обернена до задачі відшукання похідної, а саме відшукання невідомої функції за її похідною.

Розв'язком кожної такої задачі є функція (первісна), яка подається в скінченному вигляді через елементарні функції і похідна якої на певному заданому проміжку дорівнює початковій функції.

Задача вважається розв'язаною, якщо знайдено всі розв'язки (невизначений інтеграл). Питання існування розв'язку не виникає, якщо знайдено хоч одну первісну. У протилежному випадку перевіряється умова належності початкової функції до класу функцій, інтегрування яких є можливим.

Таким чином, найважливішими є методи інтегрування і виділення класів функцій, первісні яких подаються в скінченному виді через елементарні функції.

§1.1. Невизначений інтеграл

Означення 1.1. *Функція $F(x)$ в даному проміжку $\mathfrak{X}$ називається первісною функції $f(x)$ або інтегралом від $f(x)$, якщо на всьому цьому проміжку $f(x)$ є похідною для $F(x)$, або, що одне і те ж, що $f(x)dx$ є для $F(x)$ диференціалом, тобто справедливі співвідношення:*

$$F'(x) = f(x) \ \textit{або} \ dF(x) = f(x)dx.$$

Відшукання для функції всіх її первісних називається її ***інтегруванням*** і є однією з основних задач інтегрального числення.

Теорема 1.1. *Якщо в деякому (скінченному або нескінченному, замкненому або ні) проміжку $\mathfrak{X}$ функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то і функція $F(x)+C$, де C – стала, також буде первісною. Навпаки, кожна функція, первісна для $f(x)$ в проміжку $\mathfrak{X}$, може бути зображена в такій формі.*

Доведення. Очевидно, що $\big(F(x)+C\big)' = F'(x) = f(x)$.

Нехай тепер $\Phi(x)$ є будь-якою первісною для $f(x)$ функцією, тоді в проміжку $\mathfrak{X}$ виконується рівність $\Phi'(x) = f(x)$.

Оскільки функції $F(x)$ та $\Phi(x)$ в заданому проміжку $\mathfrak{X}$ мають одну і ту ж похідну, то вони відрізняються на сталу

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

що й треба було довести. •

В силу цієї теореми вираз $F(x)+C$, де $C = \mathrm{const}$, являє собою загальний вигляд функції, яка має похідну $f(x)$ або диференціал $f(x)dx$. Цей вираз називається ***невизначеним інтегралом функції*** $f(x)$ і позначається символом $\displaystyle\int f(x)dx$.

Вираз $f(x)dx$ називається ***підінтегральним виразом***, а $f(x)$ – ***підінтегральною функцією***.

Для невизначеного інтеграла виконуються наступні властивості:

1) $d\displaystyle\int f(x)dx = f(x)dx$.

2) *Оскільки* $F(x)$ *– первісна для* $F'(x)$, *то*

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \ \ \textit{або} \ \ \int dF(x) = F(x) + C.$$

Таблиця основних інтегралів

Для запису таблиці основних інтегралів використовуємо формулу

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

вважаючи, що інтеграл такої функції існує.

1) $\int 0 \cdot dx = C;$

2) $\int 1 \cdot dx = x + C;$

3) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \ (\mu \neq -1);$

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

5) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

7) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C;$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

9) $\int \cos x = \sin x + C;$

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

11) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12) $\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x + C;$

13) $\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C;$

14) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

15) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

§1.2. Найпростіші правила інтегрування

1) *Якщо* $a = const$, *то*

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

Дійсно, диференціюючи вираз справа, отримаємо

$$d\Big[a \int f(x)dx\Big] = a\, d\Big[\int f(x)dx\Big] = af(x)dx,$$

тобто цей вираз є первісною для диференціала $af(x)dx$.

Отже, сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла.

2) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Диференціюючи вираз справа в попередній рівності, отримуємо:

$$d\Big[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\Big] = d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx = (f(x) \pm g(x))dx,$$

тобто цей вираз є первісною для останнього диференціалу.

Отже, невизначений інтеграл від суми (різниці) диференціалів рівний сумі (різниці) інтегралів від кожного диференціала зокрема.

3) *Якщо* $\displaystyle\int f(t)dt = F(t) + C,$ *то* $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Дійсно, $\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t)$. Але тоді $\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b)\cdot a = a\cdot f(ax+b)$ і $\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{a}F(ax+b)\Big] = f(ax+b)$. Отже, $\frac{1}{a}F(ax+b)$ дійсно є первісною для функції $f(ax+b)$.

Зокрема,

якщо $a = 1$, то $\displaystyle\int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$

якщо $b = 0$, то $\displaystyle\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$

Приклад 1.1. *Обчислити інтеграли*

1) $\displaystyle\int (6x^3 - x + 5)dx;$

2) $\displaystyle\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx.$

Розв'язання. Використовуючи вище виведені правила, отримаємо:

$$1)\ \int (6x^3 - x + 5)dx = \int 6x^3dx - \int xdx + \int 5dx =$$

$$= 6\int x^3dx - \int xdx + 5\int dx = \frac{3}{2}x^4 - \frac{x^2}{2} + 5x + C.$$

$$2)\ \int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx =$$

$$= \int x^{\frac{7}{6}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}dx = \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C.$$

Зауважимо, що на основі виведених правил можемо продовжити таблицю основних невизначених інтегралів:

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C;$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}dx = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C;$

18) $\displaystyle\int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C, \quad m \neq 0;$

19) $\displaystyle\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx + C, \quad m \neq 0;$

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

21) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C;$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

§1.3. Заміна змінних у невизначеному інтегралі

Теорема 1.2. *Якщо виконується співвідношення* $\displaystyle\int g(t)dt = G(t) + C$, *то* $\displaystyle\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C$, *при умові, що всі підінтегральні функції є неперервними.*

Ця теорема безпосередньо випливає з правила диференціювання складеної функції

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x)) = G'(\omega(x))\omega'(x) = g(\omega(x))\cdot\omega'(x),$$

якщо врахувати, що $G'(t) = g(t)$. Якщо тепер від обидвох частин взяти невизначений інтеграл, то отримаємо потрібну рівність

$$G(\omega(x)) + C = \int g(\omega(x))\cdot\omega'(x)dx.$$

Приклад 1.2. *Обчислити інтеграл* $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x dx$.

Розв'язання. Оскільки $d\sin x = \cos x dx$, то

$$\int \sin^3 x\cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = |t = \sin x| =$$

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

§1.4. Метод інтегрування частинами

Нехай $U = f(x)$, $V = g(x)$ – дві функції, які мають неперервні похідні $U' = f'(x)$ і $V' = g'(x)$. Тоді за правилом диференціювання добутку отримаємо

$$d(UV) = UdV + VdU.$$

Для виразу $d(UV)$ первісна буде рівною UV, тому має місце формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Ця формула виражає правило інтегрування частинами. Вона зводить інтегрування виразу $UdV = UV'dx$ до інтегрування виразу $VdU = VU'dx$.

Приклад 1.3. *Обчислити інтеграл* $\int x \cos x \, dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x \cos x \, dx = \begin{vmatrix} U = x, & dU = dx, \\ dV = \cos x \, dx, & V = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Повторне правило інтегрування частинами приводить до узагальненої формули інтегрування частинами. Нехай функції U та V мають похідні всіх порядків до $(n+1)$-го порядку включно:

$$U', V', U'', V'', \dots, U^{(n)}, V^{(n)}, U^{(n+1)}, V^{(n+1)},$$

тоді отримаємо

$$\int UV^{(n+1)} dx = \int UdV^{(n)} = UV^{(n)} - \int V^{(n)} dU = UV^{(n)} - \int U'V^{(n)} dx.$$

Аналогічно

$$\int U'V^{(n)} dx = U'V^{(n-1)} - \int U''V^{(n-1)} dx,$$

$$\int U''V^{(n-1)}dx = U''V^{(n-2)} - \int U'''V^{(n-2)}dx,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\int U^{(n)}V'dx = U^{(n)}V - \int U^{(n+1)}V\,dx.$$

Помноживши ці рівності почергово на $+1$ та -1 і додавши їх, остаточно отримаємо

$$\int UV^{(n+1)}dx = UV^{(n)} - U'V^{(n-1)} + U''V^{(n-2)} - \ldots +$$

$$+(-1)^n U^{(n)}V + (-1)^{n+1}\int U^{(n+1)}V dx.$$

Особливо зручно користуватись цією формулою, коли одним із множників підінтегрального виразу є многочлен. Якщо U – многочлен n-го степеня, то $U^{(n+1)} \equiv 0$ і для інтеграла випливає остаточний вираз.

Приклад 1.4. *Обчислити інтеграл* $\int x^3 \ln^2 x\,dx$.

Розв'язання. Послідовно використовуючи метод інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x^3 \ln^2 x\,dx = \left| \begin{matrix} U = \ln^2 x, & dU = \frac{2\ln x}{x}dx, \\ dV = x^3\,dx, & V = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\,x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = \ln x, & dU = \frac{dx}{x}, \\ dV = x^3\,dx, & V = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\,x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8}\,x^4 \ln x + \frac{1}{8}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8}\,x^4 \ln x + \frac{x^4}{32} + C.$$

Приклад 1.5. *Вивести рекурентну формулу для інтеграла*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Розв'язання. Отримаємо

$$I_n = \left| \begin{matrix} U = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, & dU = -\frac{2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ dV = dx, & V = x \end{matrix} \right| = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

Звідси

$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\, I_n.$$

§1.5. Інтегрування раціональних виразів

I. Прості дроби та їх інтегрування. Оскільки від неправильного раціонального дробу можна виділити цілу частину, інтегрування якої не викликає труднощів, то ми розглянемо одразу способи інтегрування правильних раціональних дробів. Серед цих дробів виділяються прості дроби чотирьох типів:

$$1)\ \frac{A}{x-a},\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n},\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},\ \ n,m=2,3,\ldots$$

В цих дробах A, M, N, p, q – дійсні числа і вважається, що x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$ або $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$.

Розглянемо інтегрування кожного з наведених простих дробів.

1) $A\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

2) $A\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

В 3) і 4) інтегрування полегшується шляхом виділення повного квадрату в знаменнику:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Зробимо заміну $x + \dfrac{p}{2} = t,\ dx = dt,\ a = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$, тоді

$$x^2+px+q = t^2+a^2, \quad Mx+N = Mt + N - \frac{Mp}{2}.$$

Отже, у випадку 3) будемо мати

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Для простого дробу 4) ця ж сама підстановка дасть такий результат:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}\,dt=$$
$$=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Перший з інтегралів обчислюється легко:

$$\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}=\left|t^2+a^2=U\right|=\frac{M}{2}\int\frac{dU}{U^m}=$$
$$=-\frac{M}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{U^{m-1}}+C=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C.$$

До другого інтеграла $\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ застосовуємо рекурентну формулу, виведену в попередньому параграфі.

Вкінці, щоб отримати остаточний результат, повертаємось до змінної x, застосовуючи зворотню заміну $t=\frac{2x+p}{2}$.

II. Розклад правильних дробів на прості.

Теорема 1.3. *Кожний правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ може бути зображений у вигляді суми простих дробів.*

Розклад правильного дробу на прості дроби безпосереднім чином пов'язаний з розкладом знаменника $Q(x)$ на прості множники. Тобто в загальному випадку

$$Q(x)=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^m\cdot\ldots,$$

де k,m – натуральні числа.

Перед тим, як довести цю теорему, наведемо деякі допоміжні твердження.

а) Розглянемо лінійний множник $x-a$, що входить в розклад знаменника із степенем $k\geq 1$ так, що $Q(x)=(x-a)^kQ_1(x)$, де $Q_1(x)$ вже на $x-a$ не ділиться. Тоді дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$ може бути зображений у вигляді суми правильних дробів $\dfrac{A}{(x-a)^k} + \dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$, з яких перший дріб є простим, а знаменник другого дробу містить множник $x-a$ меншого степеня.

Дійсно, для розкладу достатньо підібрати число A і многочлен $P_1(x)$ так, щоб виконувалась рівність

$$P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x).$$

За теоремою Безу ліва частина останньої рівності ділиться на $x-a$ без остачі, тобто $A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$. Зауважимо, що цей дріб має зміст, бо $Q_1(x) \neq 0$.

Знаючи A легко з рівності знайти многочлен $P_1(x)$.

б) Нехай тепер x^2+px+q входить в розклад знаменника із степенем $m \geq 1$, тобто $Q(x) = (x^2+px+q)^m Q_1(x)$, де знову $Q_1(x)$ не ділиться на x^2+px+q. Тоді даний дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}$ може бути зображений у вигляді суми правильних дробів

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)},$$

перший з яких буде простим дробом, а другий містить в знаменнику тричлен, нижчого на одиницю степеня.

Для визначення цього розкладу достатньо підібрати числа M і N та многочлен $P_1(x)$, щоб виконувалась тотожність

$$P(x) - (Mx+N)Q_1(x) = (x^2+px+q) \cdot P_1(x). \tag{1}$$

Визначимо числа M і N так, щоб цього разу ліва частина ділилась на x^2+px+q. Нехай остачами від ділення $P(x)$ і $Q_1(x)$ на цей тричлен будуть відповідно вирази $\alpha x+\beta$ і $\gamma x+\delta$. Тоді все зведеться до питання, чи ділиться на тричлен вираз

$$\alpha x + \beta - (Mx+N)(\gamma x+\delta) = -\gamma M x^2 + (\alpha - \delta M - \gamma N)x + \beta - \delta N.$$

Виконавши ділення виразу на x^2+px+q, отримаємо остачу

$$((p\gamma - \delta)M - \gamma N + \alpha)x + q\gamma M - \delta N + \beta.$$

Прирівнюємо обидва коефіцієнти до нуля і отримуємо систему з двох рівнянь для визначення M і N :

$$\begin{cases} (p\gamma - \delta)M - \gamma N = -\alpha, \\ q\gamma M - \delta N = -\beta. \end{cases}$$

Визначник

$$\begin{vmatrix} p\gamma - \delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2 - p\gamma\delta + q\gamma^2 \neq 0,$$

бо $\gamma^2\Big(\Big(-\frac{\delta}{\gamma}\Big)^2 + p\Big(-\frac{\delta}{\gamma}\Big) + q\Big) \neq 0$. Навіть, якщо $\gamma = 0$, то $\delta \neq 0$,

Отже, система має єдиний розв'язок, з якого знаходимо M і N. Тоді з рівності (1) знаходимо многочлен $P_1(x)$.

В результаті наша теорема легко доводиться шляхом повторного застосування міркувань а) та б), яке забезпечує послідовне виділення простих дробів із правильного дробу аж до повного розкладу.

Тобто, якщо множник $x - a$ входить в $Q(x)$ лише в першому степені, то враховуючи твердження а), ми ставимо йому у відповідність єдиний простий дріб $\dfrac{A_1}{x-a}$, якщо показник $x-a$ є $k > 1$, то виділивши простий дріб $\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$, ми до залишеного дробу застосуємо а) і виділимо простий дріб $\dfrac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}$, і т.д., поки множник $x - a$ не зникне у знаменнику. Тоді множнику $(x - a)^k$ буде відповідати сума простих дробів

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Аналогічні міркування використаємо, коли маємо в знаменнику тричлен $(x^2 + px + q)^m$, де $m > 1$. Тоді в цьому випадку отримаємо

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m},$$

а це і завершує доведення теореми.

III. Метод невизначених коефіцієнтів. Знаючи форму розкладу правильного раціонального дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $Q(x)$ – многочлен n-го степеня, його записують справа у вигляді суми простих дробів з невідомими коефіцієнтами в чисельнику кожного з них. Спільним знаменником для всіх дробів буде многочлен $Q(x)$. Зводячи всі дроби до спільного знаменника отримуємо правильний дріб. Якщо відкинути з обох крайніх частин рівності знаменники, то отримаємо рівність двох многочленів $(n-1)$-го степеня. Коефіцієнтами при різних степенях x многочлена справа будуть лінійні однорідні многочлени відносно невідомих коефіцієнтів, позначених буквами. Прирівнюючи їх до відповідних числових коефіцієнтів многочлена $P(x)$ отримуємо систему n рівнянь, з якої ці коефіцієнти однозначно знаходяться. Оскільки наперед встановлена можливість розкладу правильного дробу на прості дроби, то ця система завжди буде мати єдиний розв'язок.

Приклад 1.6. *Знайти інтеграл* $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

Розв'язання. Згідно теореми маємо:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{Ax^3+Ax^2-2A+Bx^2+2Bx+2B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Звідси

$$(A+C)x^3+(A+B-2C+D)x^2+(2B+C-2D)x+(2B-2A+D)=x.$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+C=0, \\ A+B-2C+D=0, \\ 2B+C-2D=1, \\ 2B-2A+D=0, \end{cases}$$

з якої

$$D=-\frac{8}{25}, \quad C=-\frac{1}{25}, \quad B=\frac{1}{5}, \quad A=\frac{1}{25}.$$

Тоді

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{25}\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{50}\int \frac{d((x+1)^2+1)}{(x+1)^2+1} - \frac{7}{25}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Отже, інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається в скінченному вигляді – за допомогою раціональної функції, логарифма і арктангенса.

IV. Виділення раціональної частини інтеграла. Існує спосіб, що належить математику Остроградському М.В., за допомогою якого знаходження інтеграла від правильного раціонального дробу значно спрощується. Цей спосіб дозволяє алгебраїчним шляхом виділити раціональну частину інтеграла.

Вже відомо, що раціональні члени в інтегралі отримуються при інтегруванні простих дробів 2) і 4). В першому випадку інтеграл одразу можна записати у вигляді

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{(k-1)}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Визначимо тепер, який вигляд буде мати раціональна частина інтеграла $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx,\ (m>1,\ q-\frac{p^2}{4}>0)$.

На першому кроці, якщо використаємо заміну $x+\frac{p}{2}=t$ і рекурентну формулу, будемо мати

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

де M', N' і α – деякі сталі коефіцієнти.

Далі в цій формулі замінимо m на $m-1$. Якщо $m>2$, то отримаємо

$$\int \frac{\alpha\,dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}\,dx = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}}.$$

Цей процес виділення раціональної частини застосовуємо доти, поки в останньому інтегралі не отримаємо степінь x^2+px+q, який рівний одиниці. Об'єднавши тепер всі кроки, отримаємо:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda\int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

де $R(x)$ – многочлен меншого степеня за $m-1$, λ – стала.

В загальному випадку правильний дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можна зобразити у вигляді

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx.$$

Це співвідношення називається формулою Остроградського.

Раціональна частина інтеграла $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, утворена від додавання виділених вище раціональних частин. Отже, вона є правильним дробом, знаменник якого $Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^{m-1} \cdot \ldots$ Дріб, який знаходиться під інтегралом також є правильним і утворюється від додавання дробів $\dfrac{A}{x-a}, \ldots$ і $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}, \ldots$, тобто $Q_2(x) = (x-a) \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q) \cdot \ldots$ Очевидно, що $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$.

Диференціюючи обидві частини формули Остроградського, отримаємо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Зауважимо, що многочлени $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ можуть бути знайдені і без розкладу многочлена $Q(x)$. Дійсно, оскільки похідна $Q'(x)$ містить всі прості множники, на які розкладається $Q(x)$, з показниками на одиницю меншими, то $Q_1(x) = \text{НСД}(Q(x), Q'(x))$. Тоді $Q_2(x) = \dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}$.

Для знаходження $P_1(x)$ та $P_2(x)$ використаємо метод невизначених коефіцієнтів. Нехай n_1, n_2, n – відповідні степені многочленів $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ і $Q(x)$, тобто $n = n_1 + n_2$. Тоді степені многочленів $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ будуть відповідно не вище чисел $n-1$, n_1-1 і n_2-1. Підставимо замість $P_1(x)$ та $P_2(x)$ многочлени степеня n_1-1 і n_2-1 з буквенними коефіцієнтами. Всього цих коефіцієнтів буде $n_1+n_2=n$. Виконаємо диференціювання формули Остроградського, тоді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x) \cdot Q_1(x) - P_1(x) \cdot Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Покажемо, що перший дріб справа можна звести до знаменника $Q(x)$. Дійсно,

$$\frac{P_1'(x)\cdot Q_1(x) - P_1(x)\cdot Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} = \frac{P_1'(x)\cdot Q_2(x) - P_1(x)\cdot \frac{Q_1'(x)\cdot Q_2(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)\cdot Q_2(x)} =$$

$$= \frac{P_1'(x)\cdot Q_2(x) - P_1(x)\cdot H(x)}{Q(x)},$$

де чисельник многочлена $H(x)$ націло ділиться на знаменник $Q_1(x)$. Тоді

$$P_1'(x)\cdot Q_2(x) - P_1(x)\cdot H(x) + P_2(x)\cdot Q_1(x) = P(x).$$

Звідси маємо систему n рівнянь для визначення n невідомих коефіцієнтів. Визначник цієї системи відмінний від нуля, тобто вона має єдиний розв'язок.

§1.6. Інтегрування деяких виразів, які містять радикали

І. Інтегрування виразів виду $R\Big(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\Big)$. Вище ми навчились інтегрувати раціональні диференціали. В подальшому основним способом інтегрування тих або інших класів диференціалів буде відшукання таких підстановок $t=\omega(x)$, які зводили б підінтегральний вираз до раціонального виду. Тоді використавши обернену підстановку, інтеграл можна виразити в скінченному вигляді у функціях, залежних від змінної x.

Нехай задано $\int R\Big(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\Big)dx$, де R – означає раціональну функцію від двох аргументів m – натуральне число, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – сталі.

Покладемо

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

Тоді інтеграл перетвориться до вигляду $\displaystyle\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt$. Підінтегральний вираз має раціональний вид, оскільки R,φ,φ'– раціональні функції. Обчислюючи цей інтеграл попередніми методами і повернувшись до змінної x, отримаємо первісну.

До інтеграла цього виду зводяться і більш загальні інтеграли

$$\int \Big(x, \Big(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\Big)^r, \Big(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\Big)^s, \ldots\Big) dx,$$

де всі показники $r, s, \ldots$ – раціональні. Потрібно звести всі показники до спільного знаменника m, щоб під знаком інтеграла отримати раціональну функцію від від радикала $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Приклад 1.7. *Обчислити інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Розв'язання. Використовуючи вище наведені міркування, отримаємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, & x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \\ dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} & \end{matrix} \right| =$$

$$= -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = \int \Big(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\Big) dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

де $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

§1.7. Інтегрування біноміальних диференціалів

Біноміальними називаються диференціали вигляду $x^m(a+bx^n)^p dx$, де a, b – будь-які сталі, а показники m, n, p – раціональні числа. Вияснимо, в яких випадках цей вираз можна проінтегрувати.

Перший випадок зрозумілий: якщо p – ціле, то позначивши через λ – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n, зробимо заміну в інтегралі $t = \sqrt[\lambda]{x}$ або $x = t^\lambda$.

Тоді

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \lambda \int t^{\lambda m}(a+bt^{\lambda n})^p \cdot t^{\lambda-1} dt$$

є інтегралом від раціональної функції.

Перетворимо тепер вираз підстановкою $z = x^n$, тоді

$$x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Позначивши $q = \frac{m+1}{n} - 1$, отримаємо

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q dz.$$

Якщо q – ціле число, то знову повертаємось до вже вивченого типу інтеграла. Дійсно, якщо позначити через ν знаменник дробу p, то підінтегральний вираз матиме вигляд $R(z, \sqrt[\nu]{a+bz})$. Цей вираз зводиться до раціональної функції заміною $t = \sqrt[\nu]{a+bz} = \sqrt[\nu]{a+bx^n}$.

Якщо перепишемо інтеграл $\displaystyle\int (a+bz)^p z^q dz$ у вигляді $\displaystyle\int \Big(\frac{a+bz}{z}\Big)^p z^{p+q} dz$, то при $p+q \in \mathbb{Z}$ знову маємо відомий випадок, бо підінтегральний вираз має вигляд $R\Big(z, \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\Big)$. Знову цю функцію зводимо до раціональної підстановкою $t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}$.

Отже, інтеграл від біноміального диференціала інтегрується в скінченному вигляді, якщо цілим буде одне з чисел p, q, $p+q$, або одне з чисел p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n} + p$.

Приклад 1.8. *Знайти інтеграл* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Розв'язання. Використовуючи вище наведені міркування, запишемо

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3}, & \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbb{Z} \\ t=(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}},\ x=(t^3-1)^4, & dx = 4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt \end{array}\right| = 12\int (t^6 - t^3)dt =$$

$$= 12\Big(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\Big) + C = 12\left(\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}}{7} - \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}}{4}\right) + C.$$

§1.8. Інтегрування виразів виду $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Підстановки Ейлера

Перейдемо до розгляду інтегралів вигляду $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Припускаємо, що квадратний тричлен під коренем не має однакових розв'язків, бо в такому випадку він може бути замінений на раціональний вираз. Вивчимо три підстановки, які називаються ***підстановками Ейлера***, і за допомогою яких завжди можна звести до раціонального підінтегральний вираз.

Першу підстановку можна застосовувати тоді, коли $a > 0$. Тоді використовують заміну $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ або $t + \sqrt{a}x$.

Піднісши обидві частини рівності до квадрату, отримаємо

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2, \ \ bx + 2\sqrt{a}tx = t^2 - c.$$

Звідси

$$x = \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}, \ \ \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}, \ \ dx = 2\cdot\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$

Тобто в цьому випадку для визначення x отримуємо рівняння першого степеня, і радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ виражається раціонально через t. Після інтегрування раціональної функції від змінної t вкінці замість t підставляють вираз $\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x$.

Друга підстановка застосовується, якщо $c > 0$. В цьому випадку можна провести заміну $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ або $xt - \sqrt{c}$.

Якщо знову обидві частини рівності піднести до квадрату, то отримаємо

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c,$$

звідси

$$xa + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t, \ \ x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}, \ \ dx = 2\cdot\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

Підставивши ці значення в початковий інтеграл знову отримаємо інтеграл від раціональної функції. В ньому після знаходження первісної робимо зворотню заміну $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$.

Випадки для $a > 0$ та $c > 0$ зводяться один до другого підстановкою $x = \dfrac{1}{z}$.

Третя підстановка Ейлера застосовується тоді, коли квадратний тричлен ax^2+bx+c має різні дійсні корені λ і μ. Тоді можна записати

$$ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu).$$

В цьому випадку проводимо заміну $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ або $t(x-\mu)$.

Обидві частини рівності знову піднесемо до квадрату. Тоді отримаємо $a(x-\mu) = t^2(x-\lambda)$. Звідси

$$x = \frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2-a}, \ \ \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}, \ \ dx = \frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

Зауважимо, що якщо квадратний тричлен має дійсні різні корені λ і μ, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = (x-\lambda)\sqrt{a\cdot\frac{x-\mu}{x-\lambda}},$$

тобто $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R\Big(x, \sqrt{a\cdot\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\Big)$ і ми знову маємо справу з раніше вивченим типом інтеграла.

Покажемо, що першої і третьої підстановок Ейлера достатньо, щоб провести раціоналізацію підінтегрального виразу у всіх можливих випадках. Дійсно, якщо ax^2+bx+c має дійсні корені, то застосовна третя підстановка. Якщо дійсних коренів немає, тобто $b^2-4ac<0$, то вираз

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\big((2ax+b)^2+4ac-b^2\big)$$

при всіх значеннях змінної x має знак a. Випадок $a<0$ нас не цікавить, бо тоді радикал взагалі не мав би дійсних значень. У випадку $a>0$ застосовується перша підстановка Ейлера.

Приклад 1.9. *Обчислити інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Розв'язання. Для заданого інтеграла використовуємо першу підстановку Ейлера:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2-x+1} = t-x, \\ x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \ dx = 2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt =$$

$$= \int \Big(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\Big)\,dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + C,$$

де $t = x+\sqrt{x^2-x+1}$.

§1.9. Інші способи знаходження інтегралів, що містять радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$

В багатьох випадках підстановки Ейлера приводять до більш складних випадків. Тому розглянемо інші способи обчислення таких інтегралів.

Для зручності зробимо заміну $Y = ax^2+bx+c$ і $y=\sqrt{Y}$. Раціональна функція $R(x,y)$ може бути зображена у вигляді частки двох цілих многочленів відносно x та y. Замінюючи всюди y^2 на Y ми зведемо $R(x,y)$ до виразу $R(x,y) = \dfrac{P_1(x)+P_2(x)y}{P_3(x)+P_4(x)y}$, де $P_i(x)$, $(i=\overline{1,4})$ – цілі многочлени.

Помноживши чисельник і знаменник цього дробу на вираз $P_3(x)-P_4(x)y$ і знову замінюючи y^2 на Y, прийдемо до нової форми запису для $R(x,y)$:

$$R(x,y) = R_1(x) + R_2(x)y.$$

Інтеграл від першого доданка ми вже вміємо знаходити, тому розглянемо способи знаходження інтеграла від другого доданка. Помноживши і поділивши його на y отримаємо вираз виду $R^*(x)\cdot\dfrac{1}{y} = R^*(x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, інтегрування якого і розглянемо.

З раціональної функції $R^*(x)$ виділяємо цілу частину і отриману правильну дробову частину розбиваємо на прості дроби. В цьому випадку інтегрування отриманого виразу зведеться до обчислення інтегралів трьох типів:

I. $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$,

II. $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

III. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$,

де всі коефіцієнти дійсні, а корені многочлена x^2+px+q – уявні. Зупинимось на кожному з випадків окремо.

I. Позначимо (для $m=0,1,2,\ldots$)

$$V_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{Y}}.$$

Легко вивести рекурентну формулу для таких інтегралів. Для $m>1$ візьмемо похідну

$$\left(x^{m-1}\sqrt{Y}\right)'=(m-1)x^{m-2}\sqrt{Y}+\frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}}=$$
$$=\frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2+bx+c)+x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y}}=$$
$$=ma\cdot\frac{x^m}{\sqrt{Y}}+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\cdot\frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}}+(m-1)c\cdot\frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}}.$$

Проінтегрувавши крайні частини попередньої рівності, отримаємо

$$x^{m-1}\sqrt{Y}=maV_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bV_{m-1}+(m-1)cV_{m-2}.$$

Беручи $m=1$, отримаємо $V_1=\dfrac{1}{a}\sqrt{Y}-\dfrac{b}{2a}V_0$. Підставляючи $m=2$ і застосовуючи вираз для V_1, отримаємо

$$V_2=\frac{1}{4a^2}(2ax-3b)\sqrt{Y}+\frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)V_0.$$

За аналогією отримаємо загальну формулу

$$V_m=p_{m-1}(x)\sqrt{Y}+\lambda_mV_0,$$

де $p_{m-1}(x)$ – многочлен $(m-1)$-го степеня, а $\lambda_m=\mathrm{const}$. Отже, всі інтеграли V_m зводяться до V_0.

Якщо в інтегралі виду I многочлен $P(x)$ буде n-го степеня, то інтеграл буде зображатися у вигляді лінійної комбінації інтегралів $V_0,\ V_1,\ldots,V_n$. Отже, інтеграл запишеться у вигляді

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{Y}}dx=Q(x)\sqrt{Y}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{Y}},$$

де $Q(x)$ – многочлен $(n-1)$-го степеня, $\lambda = \mathrm{const}$. Многочлен $Q(x)$ і стала λ знаходяться за методом невизначених коефіцієнтів. Диференціюючи обидві частини попередньої рівності і помноживши обидві частини отриманого співвідношення на $\sqrt{Y}$, отримаємо

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax+b) + \lambda.$$

В обидвох частинах будемо мати многочлени n-го степеня.

Цей метод забезпечує виділення алгебраїчної частини із інтеграла $\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}\,dx$.

II. Інтеграл $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{Y}}$ зводиться підстановкою $x-\alpha = \frac{1}{t}$ до розглянутого раніше випадку. Дійсно, маємо

$$dx = -\frac{dt}{t^2},\;\; ax^2+bx+c = \frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2}.$$

Отже, якщо рахувати $x>\alpha$ і $t>0$, то

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}.$$

III. Розглянемо спочатку особливий випадок, коли тричлен ax^2+bx+c лише множником a відрізняється від тричлена x^2+px+q. Тоді шуканий інтеграл має вигляд $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx$. Його легко зобразити у вигляді суми двох інтегралів:

$$\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}},$$

з якої перший береться підстановкою $t = ax^2+bx+c$.

Для обчислення другого інтеграла зручно застосувати підстановку Абеля

$$t = \left(\sqrt{Y}\right)' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Піднісши крайні частинки рівності до квадрату і помноживши на $4Y$, отримаємо співвідношення $4t^2Y = 4a^2x^2+4abx+b^2$, яке віднімемо від рівності $4aY = 4a^2x^2+4abx+4ac$. Тоді отримаємо $4(a-t^2)Y = 4ac-b^2$, звідки $Y^m = \left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^m \cdot \frac{1}{(a-t^2)^m}$.

Диференціюючи тепер рівність $t\sqrt{Y} = ax + \dfrac{b}{2}$, знайдемо

$$\sqrt{Y}dt + t^2dx = adx,$$

звідси $\dfrac{dx}{\sqrt{Y}} = \dfrac{dt}{a-t^2}$. В результаті отримаємо

$$\frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m (a-t^2)^{m-1}dt.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m \int (a-t^2)^{m-1}dt,$$

який легко знайти.

В загальному випадку вважаємо, що $ax^2+bx+c = a(x^2+p'x+q')$, де $p' \neq p$, $q' \neq q$. Тоді інтеграл виду III можна знайти за допомогою підстановки $x = \dfrac{\mu t+\nu}{t+1}$, де числа μ і ν є розв'язками квадратного рівняння

$$(p-p')z^2 + 2(q-q')z + (p'q-pq') = 0.$$

Це випливає з підстановки $x = \dfrac{\mu t+\nu}{t+1}$ в многочлени x^2+px+q і $x^2+p'x+q'$ та підборі значень μ та ν таких, щоб коефіцієнти при змінній t були рівні нулю, тобто

$$\mu+\nu = -2\cdot\frac{q-q'}{p-p'}, \quad \mu\cdot\nu = \frac{p'q-pq'}{p-p'}.$$

Після проведення даної підстановки отримаємо інтеграл

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}},$$

де $P(t)$ – многочлен степеня $2m-1$ і $\lambda > 0$.

Розклавши дріб $\dfrac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$ на прості дроби, зведемо задачу знаходження первісної до знаходження інтегралів виду $\displaystyle\int \frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\,dt$, $k = \overline{1,m}$.

Для випадку $k = m$ маємо

$$\int \frac{At+B}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\,dt = \frac{A}{\alpha}\int \frac{\alpha t dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}} + B\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}.$$

$$\frac{A}{\alpha}\int\frac{\alpha t dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\left|\begin{matrix}U=\sqrt{\alpha t^2+\beta}\\ \alpha t dt=UdU\end{matrix}\right|=\frac{A}{\alpha}\int\frac{UdU}{\left(\frac{U^2-\beta}{\alpha}+\lambda\right)^m\cdot U}=$$

$$=\frac{A}{\alpha}\int\frac{dU}{\left(\frac{U^2-\beta}{\alpha}+\lambda\right)^m}$$ – інтеграл від раціональної функції.

$$B\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\left|\begin{matrix}U=\frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\\ \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\frac{dU}{\alpha-U^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=B\alpha^m\int\frac{(\alpha-U^2)^{m-1}}{((\beta-\alpha\lambda)U^2+\lambda\alpha^2)^m}dU$$ – інтеграл від раціональної функції.

Приклад 1.10. *Обчислити інтеграл* $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

Розв'язання. В заданому інтегралі проведемо заміну $x=\dfrac{\mu t+\nu}{t+1}$. Тоді

$$x^2\pm x+1=\frac{(\mu^2\pm\mu+1)t^2+(2\mu\nu\pm(\mu+\nu)+2)t+(\nu^2\pm\nu+1)}{(t+1)^2},$$

звідки

$$2\mu\nu\pm(\mu+\nu)+2=0,\;\; \mu+\nu=0,\;\; \mu\cdot\nu=-1.$$

Отже, $\mu=1,\ \nu=-1$. Маємо $x=\dfrac{t-1}{t+1},\ dx=\dfrac{2dt}{(t+1)^2}$, тоді

$$\int\frac{x+3}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{8t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}+\int\frac{4\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

$$\int\frac{8t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}=\left|\sqrt{3t^2+1}=U\right|=\sqrt{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}}+C_1,$$

$$\int\frac{4\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}=\left|U=\frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}\right|=$$

$$=18\int\frac{dU}{27-8U^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}U}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}U}\right|+C_2.$$

§1.10. Інтеграли, що містять диференціали $R(\sin x,\cos x)dx$

Диференціали такого виду завжди можуть бути зведені до раціональної функції підстановкою $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ -\pi<x<\pi$. Дійсно,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\;\; \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

тоді

$$R(\sin x, \cos x)dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Отже, інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди беруться у скінченному вигляді. Дана підстановка називається ***універсальною підстановкою*** і в деяких випадках приводить до громіздких інтегралів.

Однак, можна розглянути окремі випадки, використовуючи які вдасться дещо спростити знаходження інтегралів, що містять диференціали виду $R(\sin x, \cos x)dx$.

Нагадаємо деякі відомості з курсу алгебри. Якщо ціла або дробова раціональна функція $R(U, V)$ не змінює свого знаку при зміні знаку одного із аргументів, наприклад U, тобто якщо $R(-U, V) = R(U, V)$, то вона може бути зведена до вигляду $R(U, V) = R_1(U^2, V)$, що містить парні степені U.

Якщо навпаки, при зміні знаку U функція $R(U, V)$ також змінює знак, тобто $R(-U, V) = -R(U, V)$, то вона зводиться до функції вигляду $R(U, V) = R_2(U^2, V)U$. Цей факт випливає з попередніх міркувань, якщо розглядати функцію $\dfrac{R(U, V)}{U}$.

Вважаємо тепер, що $R(U, V)$ не змінює свого знаку при одночасній зміні знаків U та V, тобто $R(-U, -V) = R(U, V)$. В цьому випадку, замінюючи U на $\dfrac{U \cdot V}{V}$, будемо мати $R(U, V) = R\Big(\dfrac{U}{V} \cdot V, V\Big) = R^*\Big(\dfrac{U}{V}, V\Big)$. За властивістю функції R, якщо змінити знаки U та V, то $R^*\Big(\dfrac{U}{V}, -V\Big) = R^*\Big(\dfrac{U}{V}, V\Big)$ а тоді, як ми знаємо $R^*\Big(\dfrac{U}{V}, V\Big) = R_1^*\Big(\dfrac{U}{V}, V^2\Big)$. Отже, для диференціала $R(\sin x, \cos x)dx$ можливі три випадки.

I. Нехай $R(\sin x, \cos x)dx$ змінює знак при зміні знаку $\sin x$, тоді

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx = -R_0(1-\cos^2 x, \cos x)d(\cos x),$$

і раціоналізація інтеграла досягається підстановкою $t = \cos x$.

II. Аналогічно, якщо $R(\sin x, \cos x)dx$ змінює знак при зміні знаку $\cos x$, то

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx = R_1(\sin x, 1 - \sin^2 x)d(\sin x),$$

і раціоналізація інтеграла досягається підстановкою $t = \sin x$.

III. Нехай $R(\sin x, \cos x)dx$ не змінює знаку при одночасній зміні знаків $\sin x$ і $\cos x$. Тоді $R(\sin x, \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_2\Big(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\Big)$, тобто $R(\sin x, \cos x) = \widetilde{R}(\operatorname{tg} x)$. Отже, раціоналізація інтеграла досягається підстановкою $t = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Зауважимо, що яка б не була раціональна функція $R(U, V)$, її завжди можна зобразити у вигляді суми трьох виразів, тобто

$$R(U,V) = \frac{R(U,V) - R(-U,V)}{2} + \frac{R(-U,V) - R(-U,-V)}{2} + \frac{R(-U,-V) + R(U,V)}{2}.$$

Перший з доданків змінює знак при зміні знаку U, другий змінює знак при зміні знаку V, а третій зберігає знак при одночасній зміні знаків U та V. Розбивши вираз $R(\sin x, \cos x)$ на відповідні доданки, можна до першого доданка застосувати підстановку $t = \cos x$, до другого – підстановку $t = \sin x$ і до третього – підстановку $t = \operatorname{tg} x$. Отже, для обчислення інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ достатньо проаналізованих вище випадків.

§1.11. Інтегрування виразів $\sin^\nu x \cos^\mu x dx$

Вважаємо, що ν і μ – раціональні числа, а $x \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$. Зробивши підстановку $z = \sin^2 x$, $dz = 2\sin x \cos x dx$, перетворюємо вираз

$$\sin^\nu x \cos^\mu x dx = \frac{1}{2}\sin^{\nu-1} x (1 - \sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot 2\sin x \cos x dx = \frac{1}{2}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz.$$

Тоді

$$\int \sin^\nu x \cos^\mu x dx = \frac{1}{2}\int (1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz$$

і все зводиться до інтегрування біноміального диференціала. Зокрема, цей інтеграл береться у скінченному виді: 1) якщо $\dfrac{\mu-1}{2}$ (або $\dfrac{\nu-1}{2}$) є цілим числом, тобто, якщо μ або ν є непарне ціле число; 2) якщо $\dfrac{\mu+\nu}{2}$ – ціле число, тобто $\mu+\nu$ – парне.

Сюди ж відноситься випадок, коли обидва показники μ та ν є цілими. В такому випадку вираз $\sin^\nu x \cos^\mu x$ є раціональним відносно $\sin x$ і $\cos x$. Якщо ν (або μ) – непарне, то раціоналізація одразу досягається підстановкою $t = \cos x$ (або $t = \sin x$). Якщо обидва показники ν та μ є парними (або непарними), то застосовується підстановка $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

Однак, якщо показники ν та μ обидва додатні парні числа, то зручнішим є інший спосіб, в якому використовуються формули пониження степеня:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \ \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

А саме, якщо $\nu = 2n, \ \mu = 2m$, то при $\nu \geq \mu$ записують

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cdot \cos x)^{2m} \sin^{2(n-m)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2m} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n-m},$$

а при $\nu < \mu$

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cdot \cos x)^{2n} \cos^{2(m-n)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{m-n}.$$

В розгорнутому вигляді під інтегралом отримується сума елементів вигляду $C \sin^{\nu'} 2x \cos^{\mu'} 2x$, де $\nu' + \mu' \leq n + m = \frac{\nu+\mu}{2}$. Ті елементи, у яких хоча б один із показників ν' або μ' є непарним числом, легко інтегруються вище наведеним способом. Решта доданків розкладаються знову за формулами пониження степеня і т.п.

Приклад 1.11. *Знайти інтеграли: 1)* $\displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\, dx$, *2)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Розв'язання. 1) Використовуючи вище наведені міркування, бачимо, що для функції $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin^7 x}{\cos^4 x}$ виконується умова $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тоді для знаходження заданого інтеграла зручно застосувати заміну $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\, dx = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^3 d(\cos x)}{\cos^4 x} = |t = \cos x| =$$

$$= -\int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1)dt = \frac{t^{-3}}{3} - \frac{2}{t} - t + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.$$

2) Оскільки для функції $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}$ виконується умова $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то зручною є підстановка $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\, dt =$$

$$= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

§1.12. Інші випадки інтегрування

Ми вже знаємо, як інтегруються вирази виду $P(x)e^{bx}dx$, $P(x)\sin bx\, dx$, $P(x)\cos bx\, dx$, де $P(x)$ – цілий многочлен. Однак, слід відмітити, що дробові вирази $\dfrac{e^x}{x^n}\, dx$, $\dfrac{\sin x}{x^n}\, dx$, $\dfrac{\cos x}{x^n}\, dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, уже не інтегруються в скінченному виді.

За допомогою відповідних рекурентних формул, вони можуть бути зведені до трьох основних інтегралів:

I. $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\, dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \operatorname{li} y$ – інтегральний логарифм;

II. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{Si} x$ – інтегральний синус;

III. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\, dx = \operatorname{Ci} x$ – інтегральний косинус.

Використовуючи інтеграли

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C,$$

легко знайти в скінченному виді інтеграли $\displaystyle\int x^n e^{ax}\sin bx\, dx$ і $\displaystyle\int x^n e^{ax}\cos bx\, dx$. А саме, інтегруючи їх частинами, отримаємо

$$\int x^n e^{ax}\sin bx\, dx = x^n\, \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} -$$

$$-\frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\, dx + \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\, dx,$$

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx = x^n\,\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} -$$

$$-\frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\,dx + \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Ці рекурентні формули дозволяють звести інтеграли до випадку $n = 0$.

Якщо під $P(\ldots)$ розуміти цілий многочлен, то як загальний результат, можна стверджувати, що в скінченному вигляді беруться інтеграли

$$\int P(x, e^{a'x}, e^{a''x}, \ldots, \sin b'x, \sin b''x, \ldots, \cos b'x, \cos b''x, \ldots)dx,$$

де $a', a'', \ldots, b', b'', \ldots$ – сталі.

Дійсно, все зводиться до інтегрування виразів

$$x^n e^{ax}\sin^{k'} b'x \cdot \sin^{k''} b''x \cdot \ldots \cdot \cos^{m'} b'x \cdot \cos^{m''} b''x \cdot \ldots$$

Якщо використовувати формули

$$\sin^2 b'x = \frac{1-\cos 2b'x}{2},\ \ \sin b'x \cdot \sin b''x = \frac{1}{2}(\cos(b'-b'')x - \cos(b'+b'')x)$$

і їм подібні, то легко розбити вирази на доданки виду $Ax^n e^{ax}\sin bx\,dx$, $Bx^n e^{ax}\cos bx\,dx$, які вже вміємо інтегрувати.