Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА V

Івано-Франківськ

2017

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73
П 69

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" як навчальний посібник для студентів математичних та технічних напрямів підготовки (протокол № 1 від 14 вересня 2017 р.).

Рецензенти:

Мойсишин В.М., доктор технічних наук, професор (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу),

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка").

П 69 Практикум з математичного аналізу. – Частина V / А.В. Загороднюк, М.І. Копач, В.В. Кравців, Г.П. Малицька, М.В. Марцінків, А.В. Соломко, С.В. Шарин. – 3-тє вид., переробл. і доповн. – Івано-Франківськ : Сімик, 2017. – 169 с.

У посібнику наведені короткі відомості з теоретичного курсу математичного аналізу, а також вправи та приклади розв'язування деяких з них. П'ята частина посібника розкриває наступні теми: криволінійні інтеграли та їх застосування, кратні інтеграли, методи їх розв'язування та застосування в геометрії та фізиці, поверхневі інтеграли першого і другого роду та елементи теорії поля.

Для студентів математичних та технічних спеціальностей, які вивчають курси "математичний аналіз I", "математичний аналіз II".

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73

Зміст

Передмова

Навчальний посібник написано на підставі досвіду викладання практичного курсу математичного аналізу на факультеті математики та інформатики і фізико-технічному факультеті Прикарпатського національного університету для студентів математичних та технічних спеціальностей.

Матеріал п'ятої частини посібника охоплює поняття криволінійних інтегралів першого і другого роду та методів їх обчислення, властивості та застосування кратних інтегралів, дослідження невласних кратних інтегралів, властивості та застосування поверхневих інтегралів, а також застосування основних інтегральних формул та елементів теорії поля.

На початку кожного параграфу подаються короткі теоретичні відомості з кожної теми, які містять основні означення, формулювання важливих теорем та основні формули. Далі поміщено вправи для розв'язування. Друга частина кожного параграфу містить повне розв'язання вибраних вправ. В кінці кожного розділу подані індивідуальні завдання.

Маючи навчальний посібник зі зразками розв'язаних прикладів, викладач може зосередити увагу студентів на розв'язуванні більш складніших задач. Наявність теоретичного матеріалу та прикладів розв'язування задач допоможе студенту опрацьовувати матеріал посібника самостійно.

Слід зазначити, що для досконалого вивчення матеріалу перед тим, як починати розв'язувати вправи, необхідно добре засвоїти теоретичний матеріал з кожної теми. Потім розібрати наведені вправи з розв'язками і обов'язково закріпити знання розв'язуванням вправ для самостійного виконання.

РОЗДІЛ І. Криволінійні інтеграли. Застосування

§ 1.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Нехай функція $f(x,y)$ визначена на простій гладкій дузі (AB), яка задана параметрично $\begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l), \end{cases}$ де $l \in [0; L]$, причому за параметр l взято довжину дуги (AM), де M – довільна точка дуги (AB), тобто $L = l(AB)$.

Розглянемо довільне розбиття дуги кривої (AB) точками A_i, $i = \overline{1,n}$, причому точки поділу будемо нумерувати в напрямі від точки A до точки B : $A = A_0, A_1, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n = B$. В такому випадку відрізок $[0; L]$ розіб'ється значеннями $l_i = l(AA_i)$ $i = \overline{1,n}$, на частинки: $0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_i < l_{i+1} < \ldots < l_n = L$.

Складемо суму $S = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i))\Delta l_i$, де $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$, $\tau_i \in [l_i; l_{i+1}]$, τ_i – довільно вибране, $i = \overline{0, n-1}$, яку називають ***інтегральною сумою для функції*** $f(x,y)$ ***по дузі*** (AB).

Якщо при прямуванні $\lambda = \max\limits_i \Delta l_i$ до нуля інтегральна сума має скінченну границю I, що не залежить від способу поділу кривої (AB) і від вибору точок $A_i^*(x(\tau_i), y(\tau_i))$ на частинках (A_iA_{i+1}), $i = \overline{0, n-1}$, то вона називається ***криволінійним інтегралом першого роду від функції*** $f(x,y)$ ***по дузі*** (AB) і позначається

$$I = \int\limits_{(AB)} f(x,y)dl.$$

Отже, $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i))\Delta l_i$. Якщо $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl$ існує, то функцію $f(x,y)$ називають ***інтегровною на дузі*** (AB).

Зауважимо, що в наведеному означенні не відіграє роль напрям, за яким може бути проведене інтегрування. Якщо дуга кривої (AB) не замкнена і під (AB) та (BA) розуміти різні напрямлені криві, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_{(BA)} f(x,y)dl.$$

За аналогією можна визначити поняття криволінійного інтеграла першого роду від функції $f(x,y,z)$ по просторовій кривій (AB) :

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\Delta l_i.$$

Сума S є інтегральною сумою для функції $f(x(l), y(l))$ однієї змінної l на відрізку $[0;L]$. Тому, якщо існує визначений інтеграл $\int\limits_0^L f(x(l), y(l))dl$, то існуватиме і криволінійний інтеграл $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl$, причому

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_0^L f(x(l), y(l))dl.$$

Ця рівність справджується, зокрема, для функції $f(x(l), y(l))$, неперервної на відрізку $[0;L]$. Криволінійний інтеграл першого роду існує і тоді, коли функція $f(x,y)$ є неперервною в деякій області, якій належить дуга (AB).

Нехай крива (AB) задана параметрично рівнянням $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $t_0 \leqslant t \leqslant T$, і функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервні разом із своїми похідними $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, причому $A = A(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $B = B(\varphi(T), \psi(T))$. Тоді

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt.$$

Нехай крива (AB) задана в декартовій системі координат явно рівнянням $y = g(x),\ x \in [a;b]$, причому функція $g(x)$ є неперервною на $[a;b]$ разом зі своєю похідною $g'(x)$. Тоді отримаємо, що

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}dx.$$

Аналогічно, якщо крива (AB) задана рівнянням $x = h(y),\ y \in [c;d]$, і функції $h(y),\ h'(y)$ є неперервними на відрізку $[c;d]$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_c^d f(h(y), y)\sqrt{1 + (h'(y))^2}dy.$$

Нехай крива (AB) задана в полярній системі координат рівнянням $r = r(\varphi)$, де $\varphi \in [\alpha;\beta]$. Якщо $r(\varphi),\ r'(\varphi)$ є неперервними функціями для всіх $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то справедлива формула

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Зауважимо, що якщо в попередніх формулах взяти $f(x,y) = 1$, то

$$\int\limits_{(AB)} dl = l(AB),$$

тобто отримаємо формули для обчислення довжини дуги кривої в різних випадках.

Якщо кусково-гладка дуга (AB) складається із скінченної кількості простих гладких дуг $(A_iA_{i+1}),\ i = \overline{0, n-1}$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{(A_iA_{i+1})} f(x,y)dl.$$

Зауважимо, що надалі, де необхідно, дугу інтегрування (AB) будемо позначати через (Γ).

Вправи

1. Обчислити дані криволінійні інтеграли першого роду:

1) $\displaystyle\int\limits_{(AB)} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де (AB) – відрізок прямої $3y-2x+3=0$ від точки $A(0;-1)$ до точки $B(3;1)$;

2) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} y\,dl$, де $(\Gamma)=\{(x,y):\ y=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi\}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{(AB)} (3x+4y)dl$, де (AB) – відрізок прямої, що сполучає точки $A(1;2)$ та $B(4;3)$;

4) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} (y-x)dl$, де (Γ) – дуга кривої $y=x^3$ від точки $(-1;-1)$ до точки $(2;8)$;

5) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} (x+y)dl$, де (Γ) – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$;

6) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} x^2dl$, де (Γ) – верхня половина кола $x^2+y^2=9$;

7) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} x^2y\,dl$, де (Γ) – чверть еліпса $9x^2+4y^2=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;

8) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} y^2\,dl$, де (Γ) – арка циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

9) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} (x+y)\,dl$, де $(\Gamma)=\{(x,y):\ x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\}$;

10) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} (x^2+y^2)\,dl$, де $(\Gamma)=\{(x,y):\ x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$;

11) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,dl$, де $(\Gamma)=\{(x,y):\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\}$;

12) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} xy\,dl$, де (Γ) – дуга гіперболи $\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y=a\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant t_0$;

13) $\displaystyle\int\limits_{(\Gamma)} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де (Γ) – коло $x^2+y^2=ax$;

14) $\int\limits_{(\Gamma)} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$, де (Γ) – контур криволінійного сектора, обмеженого кривими $r = a,\ \varphi = 0,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

15) $\int\limits_{(\Gamma)} x\,dl$, де (Γ) – верхня половина кривої $r = 1 + \cos\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

16) $\int\limits_{(\Gamma)} (x^2 + y^2)\,dl$, де (Γ) – дуга логарифмічної спіралі $r = ae^{3\varphi}$ від точки $A(a;0)$ до точки $O(0;0)$;

17) $\int\limits_{(\Gamma)} x\,dl$, де (Γ) – частина логарифмічної спіралі $r = ae^{k\varphi},\ k > 0$, що знаходиться всередині круга $r \leqslant a$;

18) $\int\limits_{(\Gamma)} |y|\,dl$, де (Γ) – дуга лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

19) $\int\limits_{(\Gamma)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dl$, де (Γ) – частина гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

20) $\int\limits_{(\Gamma)} x^2 dl$, де (Γ) – коло, що утворюється при перетині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ площиною $x + y + z = 0$.

2. Обчислити довжини заданих кривих:

1) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 1$;

2) $y = 2(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1}),\ 0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

4) $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$;

5) $r = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

6) $r = a\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

7) $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$;

8) $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$ від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(3;3;2)$;

9) $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t}$ при $0 < t < +\infty$;

10) $x^2 + y^2 = cz,\ \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{z}{c}$ від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(x_0;y_0;z_0)$.

Приклади розв'язування вправ

1.7. Для спрощення обчислень запишемо параметричне рівняння заданого еліпса: $\begin{cases} x = \frac{2}{3}\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ За умовою $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$, тоді $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Отже, за формулою зведення криволінійного інтеграла до звичайного у випадку параметрично заданої кривої отримаємо

$$\int\limits_{(\Gamma)} x^2 y\, dl = \left| \begin{array}{c} x = \frac{2}{3}\cos t, \\ y = \sin t, \\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{4}{9}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \frac{4}{9}\sin^2 t dt} =$$

$$= -\frac{4}{9}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\cos^2 t d(\cos t)} = \left| \begin{array}{c} \cos t = z, \\ t_1 = 0,\ z_1 = 1, \\ t_2 = \frac{\pi}{2},\ z_2 = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{27}\int\limits_0^1 z^2 \sqrt{\frac{4}{5} + z^2 dz} = \left| \begin{array}{c} U = z, \qquad dU = dz, \\ dV = z\sqrt{\frac{4}{5} + z^2 dz},\ V = \frac{\sqrt{(\frac{4}{5}+z^2)^3}}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{27}\Big(\frac{z\sqrt{\left(\frac{4}{5}+z^2\right)^3}}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \sqrt{\left(\frac{4}{5}+z^2\right)^3 dz}\Big) =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{27}\Big(\frac{9}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{15}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{4}{5} + z^2 dz} - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 z^2\sqrt{\frac{4}{5} + z^2 dz}\Big).$$

Звідси

$$\frac{4\sqrt{5}}{27}\int\limits_0^1 z^2\sqrt{\frac{4}{5}+z^2 dz} = \frac{\sqrt{5}}{9}\Big(\frac{9}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{15}\Big(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{4}{5}+z^2} + \frac{2}{5}\ln\Big(z + \sqrt{\frac{4}{5}+z^2}\Big)\Big)\Big|_0^1\Big) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{9}\Big(\frac{9}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{8}{75}\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}\Big) = \frac{\sqrt{5}(21\sqrt{5}-8)}{675}\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}. \qquad \blacktriangleright$$

1.18. Перейдемо до полярної системи координат. Тоді рівняння лемніскати Бернуллі матиме вигляд $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, де $\varphi \in \big[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\big]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді

$$\int\limits_{(\Gamma)} |y| dl = \left| \begin{array}{c} x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi,\ r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \\ dl = a\sqrt{\dfrac{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi = \dfrac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \end{array} \right| =$$

$$= a^2\Big(-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - \int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \Big) =$$

$$= a^2\Big(-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin\varphi\, d\varphi + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi - \int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \Big) =$$

$$= a^2\Big(\cos\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - \cos\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \cos\varphi\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} + \cos\varphi\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \Big) = 2a^2(2-\sqrt{2}). \quad \blacktriangleright$$

2.9. Для параметрично заданої просторової кривої $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \lambda(t), \end{cases}$ де $t_0 \leqslant t \leqslant T$, використовуємо наступну формулу для обчислення довжини цієї кривої:

$$L = \int\limits_{(AB)} dl = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\lambda'(t))^2} dt.$$

В нашому випадку $\varphi'(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$, $\psi'(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$, $\lambda'(t) = -e^{-t}$. Тоді

$$L = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\sin t - \cos t)^2 + 1} dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}\sqrt{\cos^2 t + 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2\cos t\sin t + \cos^2 t + 1} dt =$$

$$\sqrt{3}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = \sqrt{3}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-t} dt = \sqrt{3}\lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+1) = \sqrt{3}\,(\text{лін.од.}). \quad \blacktriangleright$$

§ 1.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є визначеними на неперервній незамкненій простій кривій вигляду $(AB)=\{(x,y):\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[t_0;T]\}$, $A=A(\varphi(t_0),\psi(t_0)),\ B=B(\varphi(T),\psi(T))$.

Розглянемо довільне розбиття кривої (AB) на n частинок точками $A=A_0,A_1,\ldots,\ A_i,A_{i+1},\ldots,A_n=B$. При цьому розбитті відрізок $[t_0;T]$ поділиться на частинки точками $t_i,\ i=\overline{1,n}:\ t_0<t_1<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_n=T$.

Нехай (x_i,y_i) – координати точки A_i, $x_i=\varphi(t_i)$, $y_i=\psi(t_i)$, $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$, $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$, $\lambda=\max\limits_i\Delta t_i$, $\tau_i\in[t_i;t_{i+1}]$, τ_i – довільно вибране. Складемо інтегральні суми

$$S_x=\sum_{i=0}^{n-1}P(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\Delta x_i,\ \ S_y=\sum_{i=0}^{n-1}Q(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\Delta y_i.$$

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\lambda\to0}S_x$, яка не залежить ні від способу розбиття (AB) на частини, ні від способу вибору τ_i, то її називають ***криволінійним інтегралом другого роду від функції*** $P(x,y)$ ***по дузі кривої*** (AB) ***за абсцисою*** і позначають $\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\lambda\to0}S_y$, то її називають ***криволінійним інтегралом другого роду від функції*** $Q(x,y)$ ***по дузі кривої*** (AB) ***за ординатою*** і позначають $\int\limits_{(AB)}Q(x,y)dy$.

Загальний криволінійний інтеграл другого роду позначають

$$\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

При цьому

$$\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx+\int\limits_{(AB)}Q(x,y)dy.$$

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

Нехай функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні по неперервній незамкненій простій кривій (AB). Розглянемо три випадки задання кривої:

1) якщо крива (AB) задана параметрично на відрізку $[t_0;T]$ рівняннями $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ і функції $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ є неперервними, то виконується рівність

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{t_0}^{T}\big(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\,dt;$$

2) якщо крива (AB) в декартовій системі координат задана рівнянням $y=g(x)$, $x\in[a;b]$, і функція $g'(x)$ є неперервною, то

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{a}^{b}\big(P(x,g(x))+Q(x,g(x))g'(x)\big)\,dx;$$

3) якщо крива (AB) в полярній системі координат задана рівнянням $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, і функція $r'(\varphi)$ є неперервною для $\varphi\in[\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big(P(r(\varphi)\cos\varphi,r(\varphi)\sin\varphi)\times$$

$$\times(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)+Q(r(\varphi)\cos\varphi,r(\varphi)\sin\varphi)(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)\big)d\varphi.$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

1. $\int\limits_{(AB)} 0\cdot dx=\int\limits_{(AB)} 0\cdot dy=0.$

2. $\int\limits_{(AB)} dx=x_B-x_A,\quad \int\limits_{(AB)} dy=y_B-y_A.$

3. Якщо пряма (AB) паралельна до осі Ox, то $\int\limits_{(AB)} Q(x,y)dy=0$; якщо пряма (AB) паралельна до осі Oy, то $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx=0.$

4. Якщо $a,b\in\mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{(AB)}\big(aP(x,y)+bQ(x,y)\big)\,dx=a\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx+b\int\limits_{(AB)}Q(x,y)dx,$$

при умові існування інтегралів у правій частині рівності.

Цією властивістю володіють і криволінійні інтеграли другого роду за ординатою.

5. Якщо C – довільна точка кривої (AB), то

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{(AC)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{(CB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

при умові, що існують інтеграли в обидвох частинах рівності.

6. Справедлива рівність

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{(BA)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Зауважимо, що додатнім напрямом простої замкненої кривої вважають той, при русі вздовж якого область, обмежена дугою, залишається зліва.

7. Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні на кусково-гладкій кривій (AB), то

$$\Big|\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\Big| \leqslant ML,$$

де $M = \max\limits_{(x,y)\in(AB)} \sqrt{(P(x,y))^2 + (Q(x,y))^2}$, L – довжина дуги (AB).

8. Якщо функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні в замкненій області (D), що обмежена кусково-гладким контуром (Γ), то існує точка $M(\overline{x},\overline{y}) \in (D)$ така, що виконується рівність

$$\int\limits_{(\Gamma)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = D\cdot(Q'_x(\overline{x},\overline{y}) - P'_y(\overline{x},\overline{y})),$$

де D – площа області (D).

Нехай в деякій зв'язній області (D) задані дві неперервні функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$. Розглянемо криволінійний інтеграл $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, де

A, B – дві довільні точки із (D), а (AB) – довільна кусково-гладка крива, що сполучає A та B і повністю лежить в області (D).

Теорема 1. *Для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду не залежав від форми дуги інтегрування, необхідно і достатньо, щоб вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був в області (D) диференціалом від деякої однозначної функції двох змінних $F(x,y)$.*

При виконанні умов теореми 1 справедливою є рівність

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(x_B,y_B) - F(x_A,y_A) = F(x,y)\Big|_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)}.$$

Теорема 2. *Для того, щоб у всій області (D) вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $P'_y = Q'_x$.*

Теорема 3. *Для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не залежав від форми дуги інтегрування, необхідно і достатньо, щоб $P'_y = Q'_x$.*

Теорема 4. *Для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по замкненому контуру (Γ) в однозв'язній області (D) був рівний нулю, незалежно від форми замкненого контура, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $P'_y = Q'_x$ для довільної точки з області (D).*

Вправи

1. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

1) $\int\limits_{(\Gamma)} (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$, де (Γ) – парабола $y=x^2$, $x\in[-1;3]$;

2) $\int\limits_{(\Gamma)} \dfrac{y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, де $(\Gamma) = \{(x,y):\ y=2x-3,\ 0\leqslant x\leqslant 2\}$;

3) $\int\limits_{(\Gamma)} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, де (Γ) – крива $y=1-|1-x|$, $0\leqslant x\leqslant 2$;

4) $\int\limits_{(\Gamma)} (x+y)dx + (x-y)dy$, де (Γ) – еліпс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ в напрямі обходу проти годинникової стрілки;

5) $\int\limits_{(\Gamma)} 2x\,dy - 3y\,dx$, де (Γ) – контур трикутника з вершинами $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(4;7)$ з напрямом обходу проти годинникової стрілки;

6) $\int\limits_{(\Gamma)} 4x\sin^2 y\,dx + y\cos^2 2x\,dy$, де (Γ) – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(3;6)$;

7) $\int\limits_{(\Gamma)} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$, де $(\Gamma) = \{(x,y) :\ x^2+y^2 = 4\}$;

8) $\int\limits_{(\Gamma)} y\,dx + 2x\,dy$, де (Γ) – контур ромба зі сторонами $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1$ в напрямі обходу проти годинникової стрілки;

9) $\int\limits_{(\Gamma)} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, де (Γ) – контур квадрата з вершинами у точках $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$ в напрямі обходу проти годинникової стрілки;

10) $\int\limits_{(OmAnO)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx$, де (OmA) – частина параболи $y = x^2$, (AnO) – відрізок прямої $y = x$;

11) $\int\limits_{(\Gamma)} x\,dy - y\,dx$, де $(\Gamma) = \{(x,y) :\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$;

12) $\int\limits_{(\Gamma)} (x+y)dx$, де $(\Gamma) = \{(x,y) :\ x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi\}$;

13) $\int\limits_{(\Gamma)} xdy - ydx$, де $(\Gamma) = \{(x,y) :\ x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$;

14) $\int\limits_{(\Gamma)} x\,dy - y\,dx$, де $(\Gamma) = \Big\{(x,y) :\ x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3},\ t \in [0;+\infty)\Big\}$;

15) $\int\limits_{(\Gamma)} (y+x)dx - (x-y)dy$, де (Γ) – петля кривої $r = a\cos 3\varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$, $a > 0$, що перетинає полярну вісь з додатнім напрямом обходу контура;

16) $\int\limits_{(\Gamma)} xy^2dx + (y^2 - x^2)dy$, де (Γ) – крива $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, з додатнім напрямом обходу контура;

17) $\int\limits_{(\Gamma)} \dfrac{xy^2dx - x^2ydy}{x^2 + y^2}$ вздовж контуру правої пелюстки лемніскати $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ в додатньому напрямі обходу дуги кривої;

18) $\int\limits_{(AB)} xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$, де (AB) – відрізок прямої, що сполучає точки $A(3; -1; 1)$ і $B(-2; 2; 5)$;

19) $\int\limits_{(\Gamma)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, де $(\Gamma)=\Big\{(x, y, z) :\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,$ $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\Big\}$;

20) $\int\limits_{(\Gamma)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, де $(\Gamma)=\{(x, y, z) :\ x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt,$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$.

2. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити наступні криволінійні інтеграли:

1) $\int\limits_{(-1;-2)}^{(2;3)} x\,dy - y\,dx$; 2) $\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x + y)dx + (x - y)dy$;

3) $\int\limits_{(1;-1)}^{(1;1)} (x - y)(dx - dy)$; 4) $\int\limits_{(1;0)}^{(6;8)} \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

5) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$;

6) $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy.$

3. Визначити, чи є даний вираз повним диференціалом деякої функції двох змінних. Якщо так, то знайти цю функцію.

1) $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy$;

2) $\dfrac{y\,dx}{3x^2 - 2xy + 3y^2} - \dfrac{x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$;

3) $\dfrac{y}{x^2}\,dx + \dfrac{dy}{x}$;

4) $\Big(\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\Big)\,dx + 2xy\,dy$;

5) $e^x\big(e^y(x-y+2)+y\big)\,dx + e^x\big(e^y(x-y)+1\big)\,dy$;

6) $\big(y+\ln(x+1)\big)\,dx + \big(x+1-e^y\big)\,dy$;

7) $\big(e^{x+y}+\cos(x-y)\big)\,dx + \big(e^{x+y}-\cos(x-y)+2\big)\,dy$;

8) $\big(\arcsin x - x\ln y\big)\,dx + \Big(\arcsin y + \dfrac{x^2}{2y}\Big)\,dy$.

4. Довести, що якщо $f(u)$ – неперервна функція і (Γ) – кусково-гладкий замкнений контур, то

$$\int\limits_{(\Gamma)} f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0.$$

5. Оцінити модуль інтеграла $I_R = \displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}$ і показати, що $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$.

Приклади розв'язування вправ

1.10. Контур інтегрування $(OmAnO)$ зображений на рис. 1. За властивістю 5 для криволінійного інтеграла другого роду запишемо:

$$\int\limits_{(OmAnO)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx = \int\limits_{(OmA)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx + \int\limits_{(AnO)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx.$$

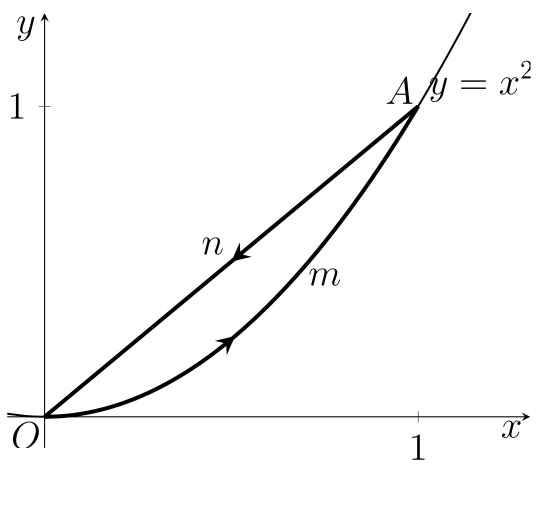

Рис. 1

Обчислимо кожен з інтегралів справа:

$$\int\limits_{(OmA)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx = \int\limits_0^1 (2x\operatorname{arctg} x - 1)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx - \int\limits_0^1 dx = \frac{\pi}{4} - 1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2 + \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 2;$$

$$\int\limits_{(AnO)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx = \int\limits_1^0 (\operatorname{arctg} 1 - 1)\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$\int\limits_{(OmAnO)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx = \frac{\pi}{4} - 1. \quad ◀$$

1.16. Крива інтегрування $r = a(1+\cos\varphi)$ зображена на рис. 2.

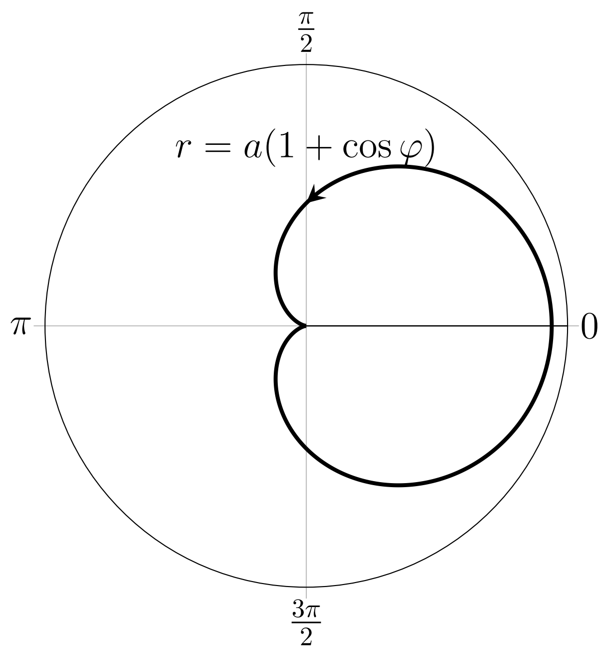

Рис. 2

Формули переходу від полярної системи координат до декартової матимуть вигляд

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Тоді $dx = -a\sin\varphi(1+2\cos\varphi)\,d\varphi,\ dy = a(\cos\varphi+\cos 2\varphi)\,d\varphi.$

Отже,

$$\int\limits_{(\Gamma)} xy^2dx + (y^2-x^2)\,dy = a^3\int\limits_0^{2\pi}\big(-a(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\sin^3\varphi(1+2\cos\varphi)-$$

$$-(1+\cos\varphi)^2\cos 2\varphi(\cos\varphi+\cos 2\varphi)\big)\,d\varphi = a^4\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3(1+2\cos\varphi)\times$$

$$\times\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi) - a^3\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\cos 2\varphi(\cos\varphi+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= -a^3\int\limits_0^{2\pi}(\cos 2\varphi\cos\varphi+\cos^2 2\varphi+2\cos^2\varphi\cos 2\varphi+2\cos\varphi\cos^2 2\varphi+$$

$$+\cos^3\varphi\cos 2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2 2\varphi)\,d\varphi = -a^3\Big(\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\cos 2\varphi\,d\varphi+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\cos^2 2\varphi\,d\varphi\Big) =$$

$$= -a^3\Big(\pi+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\varphi}{4}\,d\varphi\Big) = -\frac{5}{2}\pi a^3. \qquad \blacktriangleright$$

3.5. В нашому випадку

$$P(x,y) = e^{x+y}+\cos(x-y),\ \ Q(x,y) = e^{x+y}-\cos(x-y)+2.$$

Перевіримо умови теореми 2:

$$P'_y = e^{x+y}+\sin(x-y),\ \ Q'_x = e^{x+y}+\sin(x-y).$$

Отже, $P'_y = Q'_x$, тобто вираз

$$\big(e^{x+y}+\cos(x-y)\big)dx+\big(e^{x+y}-\cos(x-y)+2\big)dy$$

є повним диференціалом в області $(D)\equiv\mathbb{R}^2$.

Знайдемо первісну від цього диференціала:

$$F(x,y) = \int \big(e^{x+y} + \cos(x-y)\big)dx = e^{x+y} + \sin(x-y) + C(y).$$

Звідси

$$F'_y = Q(x,y) = e^{x+y} - \cos(x-y) + 2 = e^{x+y} - \cos(x-y) + C'(y).$$

Тоді $C'(y) = 2$ і $C(y) = 2y + C$. Отже,

$$F(x,y) = e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$$

є первісною функцією для заданого диференціала. ▶

4. Перевіримо, що вираз $f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy)$ є повним диференціалом.

Маємо

$$P(x,y) = xf(x^2+y^2),\;\; Q(x,y) = yf(x^2+y^2).$$

Тоді

$$P'_y = xf'(x^2+y^2)\cdot 2y = 2xyf'(x^2+y^2),$$

$$Q'_x = yf'(x^2+y^2)\cdot 2x = 2xyf'(x^2+y^2).$$

Отже, $P'_y = Q'_x$ в області (D), обмеженій замкненим кусково-гладким контуром (Γ).

Тоді за теоремою 4, враховуючи неперервність функції $f(x^2+y^2)$, отримаємо, що

$$\int\limits_{(\Gamma)} f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0,$$

що й треба було довести. ▶

§ 1.3. Застосування криволінійних інтегралів

Нехай на площині задана матеріальна неперервна проста крива (AB) і $\varrho(x,y)$ є густиною розподілу маси вздовж дуги (AB). Тоді масу дуги кривої

(AB), моменти інерції I_x, I_y, статичні моменти M_x, M_y відносно відповідних координатних осей і центр мас (x_c, y_c) матеріальної дуги кривої (AB) обчислюються за формулами:

$$m = \int\limits_{(AB)} \varrho(x,y)dl,$$

$$I_x = \int\limits_{(AB)} y^2\varrho(x,y)dl, \qquad I_y = \int\limits_{(AB)} x^2\varrho(x,y)dl,$$

$$M_x = \int\limits_{(AB)} y\varrho(x,y)dl, \qquad M_y = \int\limits_{(AB)} x\varrho(x,y)dl,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Зауважимо, що в попередніх формулах використовуються криволінійні інтеграли першого роду.

Якщо матеріальна крива (AB) задана в просторі і $\varrho(x,y,z)$ є густиною розподілу мас вздовж цієї дуги, то відповідні формули матимуть вигляд

$$m = \int\limits_{(AB)} \varrho(x,y,z)dl,$$

$$I_{yz} = \int\limits_{(AB)} x^2\varrho(x,y,z)dl, \quad I_{xz} = \int\limits_{(AB)} y^2\varrho(x,y,z)dl, \quad I_{xy} = \int\limits_{(AB)} z^2\varrho(x,y,z)dl,$$

$$M_{yz} = \int\limits_{(AB)} x\varrho(x,y,z)dl, \quad M_{xz} = \int\limits_{(AB)} y\varrho(x,y,z)dl, \quad M_{xy} = \int\limits_{(AB)} z\varrho(x,y,z)dl,$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

де моменти інерції просторової кривої та її статичні моменти шукаються відносно відповідних координатних площин, а точка (x_c, y_c, z_c) – центр мас просторової кривої.

Крім того, для просторової кривої (AB) можна знайти моменти інерції відносно координатних осей та початку координат за відповідними формулами:

$$I_x = \int\limits_{(AB)} (y^2 + z^2)\varrho(x,y,z)dl, \quad I_y = \int\limits_{(AB)} (x^2 + z^2)\varrho(x,y,z)dl,$$

$$I_z = \int\limits_{(AB)} (x^2 + y^2)\varrho(x,y,z)dl,$$

$$I_0 = \int\limits_{(AB)} (x^2 + y^2 + z^2)\varrho(x,y,z)dl.$$

Для обчислення площі плоскої фігури (D), яка обмежена кусково-гладким контуром (Γ), можна використовувати формули виду

$$D = \int\limits_{(\Gamma)} x\,dy = -\int\limits_{(\Gamma)} y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{(\Gamma)} x\,dy - y\,dx.$$

Зауважимо, що першу формулу можна легко вивести з властивості 8 (див. §1.2) для криволінійних інтегралів другого роду, взявши $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$, другу – взявши $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$, а третю – взявши $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$.

Криволінійні інтеграли другого роду застосовують також для обчислення роботи змінної сили вздовж криволінійного шляху. Робота сили $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки одиничної маси з точки A в точку B вздовж дуги (AB) обчислюється за формулою

$$\mathrm{A} = \int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Зауважимо, що подібна формула має місце для обчислення роботи сили при переміщенні матеріальної точки вздовж просторової кривої.

Вправи

1. Знайти масу, розподілену вздовж заданої кривої з густиною $\varrho(x,y)$:

1) $y = x^3$, $x \in [1;2]$, $\varrho(x,y) = xy$;

2) $y = \ln x,\ \ x \in [2;3],\ \ \varrho(x,y) = x^2;$

3) контура трикутника з вершинами в точках $A(0;0),\ B(2;0),\ C(0;3),$ $\varrho(x,y) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3};$

4) $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a},\ \ x \in [0;a],\ \ \varrho(x,y) = \dfrac{k}{y},\ \ k > 0;$

5) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ \ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \ \varrho(x,y) = xy;$

6) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ t \in [0;2\pi],\ \ \varrho(x,y) = k|xy|,\ \ k > 0;$

7) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ t \in [0;2\pi],\ \ \varrho(x,y) = |y|;$

8) $r = a(1+\cos\varphi),\ \ \varphi \in [0;2\pi],\ \ \varrho(r,\varphi) = k\sqrt{r},\ \ k > 0;$

9) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right],\ \ \varrho(r,\varphi) = kr,\ \ k > 0;$

10) $x = t,\ \ y = \dfrac{t^2}{2},\ \ z = \dfrac{t^3}{3},\ \ t \in [0;1],\ \ \varrho(x,y,z) = \sqrt{2y}.$

2. Знайти моменти інерції заданих однорідних матеріальних кривих (Γ) :

1) $(\Gamma) = \{(x,y) :\ 2x + y = 4,\ 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ відносно осі Ox;

2) $(\Gamma) = \{(x,y) :\ y = \sqrt{x},\ 4 \leqslant x \leqslant 9\}$ відносно осі Ox;

3) $(\Gamma) = \left\{(x,y) :\ x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$ відносно осі Ox;

4) $(\Gamma) = \{(x,y) :\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ 0 \leqslant x \leqslant a\}$ відносно осі Ox;

5) $(\Gamma) = \{(x,y) :\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ відносно осей Ox та Oy.

3. Знайти координати центра мас даних кривих:

1) $y = \mathrm{ch}\,x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \ln 3,\ \ \varrho(x,y) = 1;$

2) $x^2 + y^2 = 4,\ \ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \ \varrho(x,y) = 1;$

3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ \ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \ \varrho(x,y) = 1;$

4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ \ \varrho(x,y) = 1;$

5) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1-\cos t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ \ \varrho(x,y) = 1;$

6) $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{3},\ \ \varrho(x,y) = 1;$

7) $r = a(1+\cos\varphi),\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ \ \varrho(r,\varphi) = 1;$

8) $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = mt,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ \ \varrho(x,y,z) = 1;$

9) $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = bt,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \pi,\ \ \varrho(x,y,z) = kz,\ \ k > 0;$

10) $x = e^t\cos t,\ \ y = e^t\sin t,\ \ z = e^t,\ \ -\infty < t \leqslant 0,\ \ \varrho(x,y,z) = 1.$

4. Знайти площу фігури, обмеженої даними кривими:

1) контуром трикутника з вершинами $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(2;5)$;

2) контуром чотирикутника з вершинами $A(5;1)$, $B(4;4)$, $C(1;5)$, $D(-2;1)$;

3) $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ (фігура дотикається до початку координат);

4) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

5) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

6) $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, $t \in [0; 2\pi]$;

7) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $t \in [0; 2\pi]$;

8) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

5. Знайти роботу сили $\vec{F}(x,y)$ з переміщення одиничної маси вздовж даної кривої (Γ) :

1) $\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{i} + x^3\vec{j}$, (Γ) – пряма, що сполучає точки $A(1;1)$ та $B(2;7)$;

2) $\vec{F}(x,y) = (x+y)\vec{i} - x\vec{j}$, (Γ) – коло $x^2 + y^2 = 4$;

3) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x^2\vec{j}$, (Γ) – верхня половина еліпса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(-2;0)$;

4) $\vec{F}(x,y) = (x-y)\vec{i} + (2x+y)\vec{j}$, (Γ) – контур трикутника з вершинами $A(1;2)$, $B(3;3)$, $C(1;5)$;

5) $\vec{F}(x,y) = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$, (Γ) – контур квадрата, обмеженого прямими $x = \pm 3$, $y = \pm 3$.

6. Знайти роботу пружної сили, направленої до початку координат, величина якої є пропорційною відстані матеріальної точки від початку координат, якщо ця точка описує в напрямі, протилежному ходу годинникової стрілки, додатню чверть еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Точка масою m переміщується в силовому полі по дузі (AB) кривої $f(x,y) = 0$. Знайти роботу поля, якщо в кожній його точці (x,y) сила, що діє на одиницю маси, спрямована до початку координат і за модулем дорівнює відстані точки від початку координат.

Приклади розв'язування вправ

1.8. Оскільки густина матеріальної кривої $\varrho(r,\varphi) = k\sqrt{a(1+\cos\varphi)}$, $k, a > 0$, то маса цієї кривої обчислюється за формулою

$$m = \int\limits_{(\Gamma)} k\sqrt{a(1+\cos\varphi)}dl,$$

де $(\Gamma) = \{(r,\varphi) : r = a(1+\cos\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$. Тоді

$$m = \int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{a(1+\cos\varphi)} \cdot \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= ak\sqrt{a}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\varphi} \cdot \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = ak\sqrt{2a}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= ak\sqrt{2a}(\varphi + \sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi ak\sqrt{2a}\,(\text{мас. од.}). \quad \blacktriangleright$$

3.10. За умовою $\varrho(x,y,z) = 1$, тому задана крива є однорідною. Спочатку знайдемо масу кривої:

$$m = \int\limits_{(AB)} dl = \int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}}\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} e^t\sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1}\, dt = \sqrt{3}\int\limits_{-\infty}^{0} e^t dt =$$

$$= \sqrt{3}\lim_{a\to-\infty} e^t\Big|_a^0 = \sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}(1 - e^a) = \sqrt{3}\,(\text{мас. од.}).$$

Тепер знайдемо статичні моменти кривої відносно відповідних координатних площин:

$$M_{yz} = \int\limits_{(AB)} x\, dl = \sqrt{3}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\cos t\, dt = \sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^{2t}\cos t\, dt =$$

$$= \sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\frac{e^{2t}(2\cos t + \sin t)}{5}\Big|_a^0 = \sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2}{5} - \frac{e^{2a}(2\cos a + \sin a)}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5};$$

$$M_{xz}=\int\limits_{(AB)} y\,dl=\sqrt{3}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\sin t\,dt=\sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^{2t}\sin t\,dt=$$

$$=\sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\frac{e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{5}\Big|_a^0=\sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\Big(-\frac{1}{5}-\frac{e^{2a}(2\sin a-\cos a)}{5}\Big)=-\frac{\sqrt{3}}{5};$$

$$M_{xy}=\int\limits_{(AB)} z\,dl=\sqrt{3}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\,dt=\sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^{2t}\,dt=$$

$$=\sqrt{3}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\,e^{2t}\Big|_a^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{a\to-\infty}(1-e^{2a})=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В результаті координати центра мас матимуть вигляд

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{2}{5},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{m}=-\frac{1}{5},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{1}{2}.$$

Отже, центр мас даної просторової кривої знаходиться в точці $C\Big(\frac{2}{5};-\frac{1}{5};\frac{1}{2}\Big)$. ▶

4.8. Фігура, обмежена кривою $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, зображена на рис. 3. Для обчислення площі плоскої фігури скористаємось формулою $S=\int\limits_{(\Gamma)} x\,dy$. Тоді

$$S=2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\cdot\Big(-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,\sin\varphi+a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\Big)\,d\varphi=$$

$$=2a^2\Big(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\Big)=$$

$$=4a^2\Big(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\Big)=2a^2\Big(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi+$$

$$+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 2\varphi-\sin^2 2\varphi)\,d\varphi\Big)=2a^2\Big(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4\varphi\,d\varphi\Big)=$$

$$=2a^2\Big(\frac{1}{2}\,\sin 2\varphi+\frac{1}{4}\,\sin 4\varphi\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\,(\text{кв. од.}).\qquad ▶$$

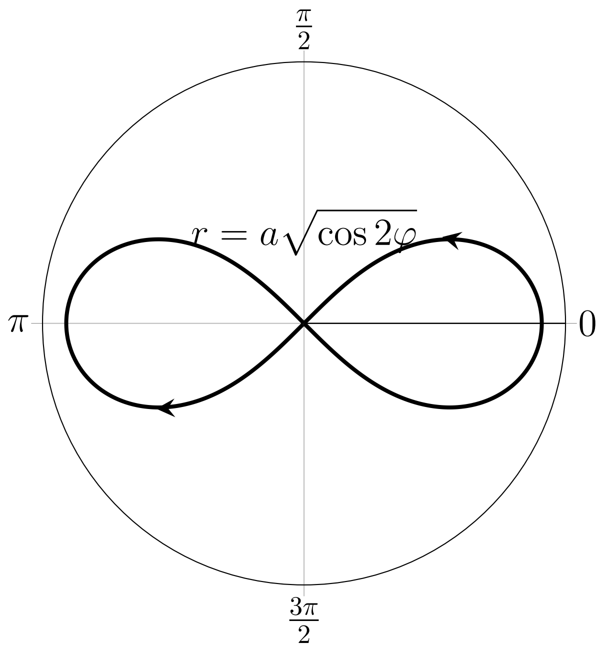

Рис. 3

5.5. Роботу сили $\vec{F}(x,y)$ з переміщення одиничної маси вздовж заданого контура квадрата (Г) (див. рис. 4) обчислюємо за формулою:

$$\text{A} = \int\limits_{(\Gamma)} (x-y)\,dx + x\,dy.$$

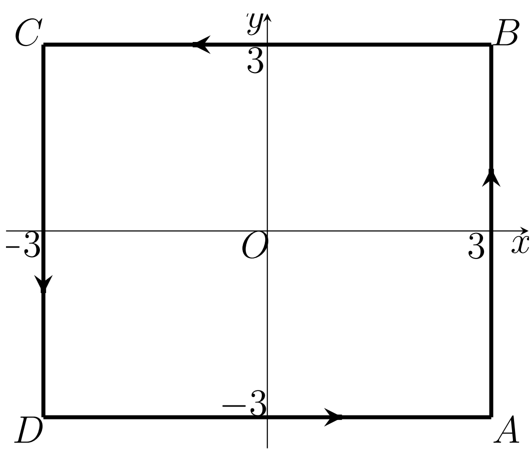

Рис. 4

Тоді

$$\text{A} = \int\limits_{(AB)} (x-y)\,dx + x\,dy + \int\limits_{(BC)} (x-y)\,dx + x\,dy +$$

$$+ \int\limits_{(CD)} (x-y)\,dx + x\,dy + \int\limits_{(DA)} (x-y)\,dx + x\,dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Обчислимо кожний із криволінійних інтегралів зокрема:

$$I_1 = \int\limits_{(AB)} (x-y)\,dx + x\,dy = \int\limits_{-3}^{3} 3\,dy = 3y\Big|_{-3}^{3} = 18;$$

$$I_2 = \int\limits_{(BC)} (x-y)\,dx + x\,dy = \int\limits_{3}^{-3} (x-3)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{3}^{-3} = 18;$$

$$I_3 = \int\limits_{(CD)} (x-y)\,dx + x\,dy = -3\int\limits_{3}^{-3} dy = -3y\Big|_{3}^{-3} = 18;$$

$$I_4 = \int\limits_{(DA)} (x-y)\,dx + x\,dy = \int\limits_{-3}^{3} (x+3)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-3}^{3} = 18.$$

Отже, А = 72 – робота заданої сили $\vec{F}(x,y)$ по переміщенню одиничної маси вздовж контура (Г). ►

Індивідуальні завдання до розділу I

1. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж прямої (L), що з'єднує точки A та B:

1) $\int\limits_{(L)} xydl,\ A(-1;-1),\ B(1;1);$

2) $\int\limits_{(L)} x\sqrt{y}dl,\ A(0;0),\ B(4;2);$

3) $\int\limits_{(L)} xy^2dl,\ A(0;1),\ B(2;2);$

4) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{2x-y},\ A(0;-2),\ B(4;0);$

5) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}},\ A(1;2),\ B(2;4);$

6) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}},\ A(0;0),\ B(1;2);$

7) $\int\limits_{(L)} (x^2-y)dl,\ A(0;0),\ B(1;2);$

8) $\int\limits_{(L)} \frac{x}{x+y}dl,\ A(2;-4),\ B(0;-3);$

9) $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)dl,\ A(3;2),\ B(4;4);$

10) $\int\limits_{(L)} y^2dl,\ A(-1;3),\ B(-2;4);$

11) $\int\limits_{(L)} \frac{x}{x-y}dl,\ A(2;-1),\ B(4;0);$

12) $\int\limits_{(L)} \frac{1}{\sqrt{y}}dl,\ A(1;1),\ B(3;2);$

13) $\int\limits_{(L)} \frac{2x}{3x+y}dl,\ A(2;-4),\ B(0;-3);$ 14) $\int\limits_{(L)} (x-y^2)dl,\ A(0;0),\ B(4;3);$

15) $\int\limits_{(L)} \sqrt{y}dl,\ A(2;0),\ B(4;2);$ 16) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{\sqrt{x-y}},\ A(0;-2),\ B(4;0);$

17) $\int\limits_{(L)} (x+y)dl,\ A(0;1),\ B(2;3);$ 18) $\int\limits_{(L)} (\sqrt{x}+\sqrt{y})dl,\ A(1;1),\ B(2;0);$

19) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{x+y^2},\ A(1;-3),\ B(1;-1);$ 20) $\int\limits_{(L)} \sqrt{x+y}dl,\ A(2;4),\ B(0;1);$

21) $\int\limits_{(L)} \frac{y}{\sqrt{x}}dl,\ A(2;3),\ B(8;1);$ 22) $\int\limits_{(L)} (x^2-y^2)dl,\ A(2;0),\ B(4;2);$

23) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{\sqrt{x+y}},\ A(1;0),\ B(4;3);$ 24) $\int\limits_{(L)} (x-y)dl,\ A(0;0),\ B(4;3);$

25) $\int\limits_{(L)} \sqrt{x-y}dl,\ A(0;-1),\ B(2;-5).$

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж дуги (L) :

1) $\int\limits_{(L)} (2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, де (L) – дуга кривої $x=\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

2) $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)^4 dl$, де (L) – коло $x^2+y^2=a^2$;

3) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{x-y}$, де (L) – відрізок прямої $y=x-2$, що з'єднує точки $A(0;-2)$ та $B(4;2)$;

4) $\int\limits_{(L)} (x-y)dl$, де (L) – коло $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$;

5) $\int\limits_{(L)} \sqrt{y^2+x^2}dl$, де (L) – коло $y^2+x^2=ay$, $(a>0)$;

6) $\int\limits_{(L)} xdl$, де (L) – дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(2;4)$ до точки $B(1;1)$;

7) $\int\limits_{(L)} xydl$, де (L) – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, що міститься в першому квадранті;

8) $\int\limits_{(L)} x^2 dl$, де (L) – верхня половина кола $x^2+y^2=a^2$ між точками $A(a;0)$ та $B(-a;0)$;

9) $\int\limits_{(L)} (x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{4}{3}})dl$, де (L) – астроїда $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

10) $\int\limits_{(L)} \sqrt{x^2+y^2}dl$, де (L) – параметрично задана крива $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

11) $\int\limits_{(L)} (x+y)dl$, де (L) – контур трикутника з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$;

12) $\int\limits_{(L)} (\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$, де (L) – астроїда $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$;

13) $\int\limits_{(L)} |y|dl$, де (L) – лемніската $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

14) $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2+z^2)dl$, де (L) – дуга кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

15) $\int\limits_{(L)} xyzdl$, де (L) – чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$, що лежить в першому октанті;

16) $\int\limits_{(L)} x\sqrt{x^2-y^2}dl$, де (L) – половина лемніскати $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\geqslant 0$;

17) $\int\limits_{(L)} (x+y)dl$, де (L) – чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, що лежить в першому октанті;

18) $\int\limits_{(L)} \dfrac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де (L) – дуга кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$;

19) $\int\limits_{(L)} xydl$, де (L) – контур прямокутника з вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$;

20) $\int\limits_{(L)} y dl$, де (L) – дуга параболи $y^2 = 2px$, що відтинається параболою $x^2 = 2py$;

21) $\int\limits_{(L)} (x+y) dl$, де (L) – права пелюстка лемніскати $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$;

22) $\int\limits_{(L)} \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, де (L) – коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ x = y$;

23) $\int\limits_{(L)} (x+y) dl$, де (L) – дуга кривої $x = t, \ y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}, \ z = t^3, \ (0 \leqslant t \leqslant 1)$;

24) $\int\limits_{(L)} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де (L) – коло $x^2 + y^2 = ax$;

25) $\int\limits_{(L)} y^2 dl$, де (L) – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t)$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж дуги (L) :

1) $\int\limits_{(L)} \dfrac{y^2+1}{y} dx - \dfrac{x}{y^2} dy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(1;2)$ до точки $B(2;4)$;

2) $\int\limits_{(L)} (x+y) dx - x dy$, де (L) – дуга кривої $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$;

3) $\int\limits_{(L)} y dx + z dy + x dz$, де (L) – дуга кривої $x = a \cos t, \ y = a \sin t, \ z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

4) $\int\limits_{(L)} (x+y) dx - (x-y) dy$, де (L) – ламана OAB, де $O(0;0), \ A(2;0)$, $B(4;5)$;

5) $\int\limits_{(L)} (x^2 - y) dx - (x - y^2) dy$, де (L) – дуга кривої $x = 5 \cos t, \ y = 5 \sin t$ від точки $A(5;0)$ до точки $B(0;5)$;

6) $\int\limits_{(L)} (2a - y) dx - (a - y) dy$, де (L) – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

7) $\int\limits_{(L)} \dfrac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, де (L) – дуга кривої $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

8) $\int\limits_{(L)} (x^2 + y)dx - (y^2 + x)dy$, де (L) – ламана ABC, де $A(1;2)$, $B(1;5)$, $C(3;5)$;

9) $\int\limits_{(L)} ydx + xdy$, де (L) – дуга кривої $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

10) $\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2)dx - (x^2 - y^2)dy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;2)$ до точки $B(2;0)$;

11) $\int\limits_{(L)} xdx - ydy + (x+y-1)dz$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$;

12) $\int\limits_{(L)} (x^2 - y^2)dx$, де (L) – дуга крива $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$;

13) $\int\limits_{(L)} \dfrac{y}{x}dx + xdy$, де (L) – крива $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$;

14) $\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2)dy$, де (L) – контур чотирикутника $ABCD$, де $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;4)$, $D(0;4)$;

15) $\int\limits_{(L)} (x^2y - 3x)dx + (y^2x + 2y)dy$, де (L) – дуга кривої $x = \sqrt[3]{3}\cos t$, $y = 2\sin t$ від точки $A(\sqrt[3]{3};0)$ до точки $B(\sqrt[3]{-3};0)$;

16) $\int\limits_{(L)} (xy - x^2)dx + xdy$, де (L) – дуга кривої $y = 2x^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$;

17) $\int\limits_{(L)} (x^2 - 2x)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де (L) – дуга кривої $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$;

18) $\int\limits_{(L)} ydx + \dfrac{x}{y}dy$, де (L) – дуга кривої $y = e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$;

19) $\displaystyle\int\limits_{(L)} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, де (L) – контур трикутника ABC, де $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$;

20) $\displaystyle\int\limits_{(L)} \frac{y}{2x}dx - xdy$, де (L) – дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e^2;2)$;

21) $\displaystyle\int\limits_{(L)} \sin ydx + \sin xdy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;\pi)$ до точки $B(\pi;0)$;

22) $\displaystyle\int\limits_{(L)} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, де (L) – дуга кривої $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;

23) $\displaystyle\int\limits_{(L)} -x\cos ydx + y\sin xdy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(\pi;2\pi)$;

24) $\displaystyle\int\limits_{(L)} x\cos ydx - y\sin xdy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(3;6)$;

25) $\displaystyle\int\limits_{(L)} xdy$, де (L) – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

4. Обчислити роботу силового поля $\vec{F}$ з переміщенням матеріальної точки вздовж лінії (L) від точки A до точки B :

1) $\vec{F} = xe^y\vec{i} + xy\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2$, $A(0;0)$, $B(1;1)$;

2) $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$, де (L) – пряма, $A(-2;0)$, $B(0;1)$;

3) $\vec{F} = y\vec{i} + (y - x)\vec{j}$, де (L) – крива $y = a - \dfrac{x^2}{a}$, $A(-a;0)$, $B(0;a)$;

4) $\vec{F} = y\vec{i} + \ln x\vec{j}$, де (L) – пряма, $A(2;0)$, $B(3;1)$;

5) $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + y^2\vec{j}$, де (L) – пряма, $A(2;0)$, $B(0;2)$;

6) $\vec{F} = (x^2 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2$, $A(0;0)$, $B(1;1)$;

7) $\vec{F} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 4$, $A(2;0)$, $B(0;2)$;

8) $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$, де (L) – пряма, $A(-4;0)$, $B(0;2)$;

9) $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + \vec{j}$, де (L) – верхня частина кривої $x^2 + y^2 = 4$, $A(2; 0)$, $B(-2; 0)$;

10) $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$, де (L) – пряма, $A(2; 3; 4)$, $B(3; 4; 5)$;

11) $\vec{F} = (xy - x)\vec{i} + \dfrac{x^2}{2}\vec{j}$, де (L) – крива $y = 2\sqrt{x}$, $A(0; 0)$, $B(1; 2)$;

12) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2$, $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$;

13) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 1$, $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$;

14) $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2$, $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$;

15) $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$, де (L) – крива $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$, $A(-4; 0)$, $B(0; 2)$;

16) $\vec{F} = xy\vec{i} + (1 - y)\vec{j}$, де (L) – крива $y = \cos x$, $A(0; 1)$, $B(\frac{\pi}{2}; 0)$;

17) $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 9$, $A(3; 0)$, $B(0; 3)$;

18) $\vec{F} = xy\vec{i}$, де (L) – крива $y = \sin x$, $A(\pi; 0)$, $B(0; 0)$;

19) $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 1$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$;

20) $\vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $A(1; 0)$, $B(0; 3)$;

21) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$, де (L) – верхня частина кривої $x^2 + y^2 = 4$, $A(2; 0)$, $B(-2; 0)$;

22) $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$, де (L) – пряма, $A(-4; 0)$, $B(0; 2)$;

23) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (1 - y)\vec{j}$, де (L) – крива $y = \sin x$, $A(0; 0)$, $B(\frac{\pi}{2}; 1)$;

24) $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^3$, $A(0; 0)$, $B(2; 8)$;

25) $\vec{F} = x^2y\vec{i} - y\vec{j}$, де (L) – пряма, $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$.

РОЗДІЛ II. Кратні інтеграли

§ 2.1. Подвійні інтеграли

Нехай в області (P) визначена функція $f(x, y)$. Розіб'ємо цю область сіткою кривих на скінченну кількість областей $(P_1), \ldots, (P_n)$, площі яких рівні $P_1, \ldots, P_n$. В області (P_i), $i = \overline{1, n}$, виберемо довільну точку (ξ_i, η_i), $i = \overline{1, n}$. Значення функції $f(\xi_i, \eta_i)$ помножимо на площу P_i і складемо суму виду $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i$, яку будемо називати ***інтегральною сумою*** для функції $f(x, y)$ в області (P). Позначимо через λ найбільший із діаметрів областей (P_i), $i = \overline{1, n}$.

Якщо існує скінченна границя $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i$, то число I називається ***подвійним інтегралом функції*** $f(x, y)$ ***в області*** (P) і позначається символом

$$I = \iint\limits_{(P)} f(x, y) dP.$$

Функція, для якої існує інтеграл, називається ***інтегровною*** в області (P).

Необхідною умовою існування подвійного інтеграла функції $f(x, y)$ в області (P) є її обмеженість в цій області. В супротивному випадку при довільному розбитті області (P) на частинки можна за рахунок вибору точок (ξ_i, η_i) зробити інтегральну суму як завгодно великою.

Аналогічно до звичайного інтеграла вводяться ***нижня і верхня суми Дарбу***

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i,$$

де m_i, M_i позначають відповідно точну нижню та точну верхню межу функції $f(x, y)$ в кожній з областей (P_i). При заданому способі розбиття області (P) на частинки, незалежно від вибору точок (ξ_i, η_i), буде виконуватись нерівність

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Отже, нижня і верхня суми Дарбу є, відповідно, точною нижньою і точною верхньою межами для інтегральних сум.

Для сум Дарбу справедливі властивості:

1) при подальшому дробленні частинок (P_i) із добавлянням нових ліній поділу нижня сума Дарбу не зменшується, а верхня – не збільшується;

2) кожна нижня сума Дарбу не перевищує кожної верхньої суми Дарбу, навіть якщо б вона відповідала іншому способу розбиття області (P) на частинки.

Вирази $I_* = \sup\{s\}$ і $I^* = \inf\{S\}$ називаються ***нижнім і верхнім інтегралом Дарбу***, при цьому $s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S$.

Теорема 1. *Для існування подвійного інтеграла необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0,$$

або

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i = 0,$$

де $\omega_i = M_i - m_i$ – коливання функції $f(x, y)$ в області (P_i).

Класи інтегровних функцій

1. Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в області (P), то вона в цій області є інтегровною.

2. Якщо обмежена функція $f(x, y)$ в області (P) має розриви лише по скінченній кількості кривих площею нуль, то вона є інтегровною в цій області.

Теорема 2. *Для того, щоб функція $f(x, y)$ була інтегровною в області (P), необхідно і достатньо, щоб $I_* = I^*$.*

Властивості інтегровних функцій і подвійних інтегралів

1. Якщо змінити значення інтегровної в області (P) функції $f(x, y)$ вздовж будь-якої кривої (Γ) з площею нуль (щоб змінена функція залишалась обмеженою), то нова функція є інтегровною в (P) і подвійний інтеграл цієї функції по області (P) дорівнює подвійному інтегралу від початкової функції по цій же області.

2. Якщо область (P), в якій задана функція $f(x, y)$, кривою (Γ) площею нуль розкладається на дві області (P') і (P''), то із інтегровності функції $f(x, y)$ у всій області (P) слідує її інтегровність в (P') і (P''), і навпаки, із інтегровності функції $f(x, y)$ в областях (P') і (P'') слідує її інтегровність в (P). При цьому виконується рівність

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y) dP = \iint\limits_{(P')} f(x, y) dP + \iint\limits_{(P'')} f(x, y) dP.$$

3. Якщо помножити інтегровну в (P) функцію $f(x, y)$ на сталу k, то функція $kf(x, y)$ є також інтегровною, і виконується рівність

$$\iint\limits_{(P)} kf(x, y) dP = k \iint\limits_{(P)} f(x, y) dP.$$

4. Якщо в області (P) інтегровні функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$, то інтегровною є функція $f(x, y) \pm g(x, y)$, причому

$$\iint\limits_{(P)} (f(x, y) \pm g(x, y)) dP = \iint\limits_{(P)} f(x, y) dP \pm \iint\limits_{(P)} g(x, y) dP.$$

5. Якщо для інтегровних в (P) функцій $f(x, y)$ та $g(x, y)$ виконується нерівність $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y) dP \leqslant \iint\limits_{(P)} g(x, y) dP.$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в (P), то є інтегровною в (P) і функція $|f(x,y)|$, причому

$$\Big|\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP\Big| \leqslant \iint\limits_{(P)} \big|f(x,y)\big|dP.$$

7. Якщо інтегровна в (P) функція $f(x,y)$ задовольняє нерівність $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$, то

$$mP \leqslant \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \leqslant MP.$$

Зауважимо, що якщо розділити всі частинки останньої нерівності на P, то

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP}{P} \leqslant M.$$

Позначимо через μ величину $\dfrac{\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP}{P}$. Тоді $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \mu P$, де $m \leqslant \mu \leqslant M$. Число μ називається ***середнім значенням подвійного інтеграла функції*** $f(x,y)$ ***по області*** (P).

Якщо для функції двох змінних $f(x,y)$, визначеної в прямокутній області $(P) = [a,b;c,d]$ існує подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$ і для кожного сталого значення x із $[a;b]$ існує звичайний інтеграл $\int\limits_c^d f(x,y)dy$, то існує повторний інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ і виконується рівність

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Розглянемо тепер область (P), обмежену знизу і зверху двома неперервними кривими $y = y_0(x)$, $y = Y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, а з боків двома прямими $x = a$, $x = b$. Якщо для функції $f(x, y)$, визначеної в області (P), існує подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP$, і при кожному фіксованому значенні x із $[a; b]$ звичайний інтеграл $I(x) = \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy$, то існує також повторний інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy$ і виконується рівність

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)dy.$$

Якщо область (P) має вигляд криволінійної трапеції, обмеженої кривими $x = x_0(y)$ і $x = X(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, прямими $y = c$ і $y = d$, то справедлива формула

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)dx,$$

при умові, що разом з подвійним інтегралом існує при кожному фіксованому значенні y звичайний інтеграл по змінній x.

У випадку складного контура область (P) розбивається на скінченну кількість частинок, що підпадають під розглянуті вище випадки. Тоді шуканий інтеграл записується у вигляді суми інтегралів по кожній із областей.

Надалі для позначення подвійного інтеграла використовуватимемо позначення

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy.$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

Розглянемо подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy$, де область (P) обмежена кусково-гладким контуром (Γ), а функція $f(x, y)$ неперервна в цій області або допускає розриви вздовж скінченної кількості кривих, зберігаючи при цьому обмеженість.

Припустимо, що область (P) зв'язана формулами $\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases}$ з деякою областю (Δ) на площині $\xi O\eta$. Тоді справедлива формула

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\big|J(\xi,\eta)\big|\,d\xi d\eta,$$

де $J(\xi,\eta) = \dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$ – якобіан переходу.

Отже, для того, щоб здійснити заміну змінних в подвійному інтегралі, потрібно не тільки підставити у функцію $f(x,y)$ замість x та y вирази, залежні від нових змінних, але і замінити елемент площі $dxdy$ елементом площі в криволінійній системі координат $\big|J(\xi,\eta)\big|\,d\xi d\eta$.

Зокрема, подвійний інтеграл у полярних координатах (r,φ) матиме вигляд

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Вправи

1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{(P)} xy\,dxdy$, $(P) = \{(x,y)\ :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, розглядаючи його, як границю інтегральної суми, розбиваючи область інтегрування на квадратики прямими $x = \dfrac{i}{n}$, $y = \dfrac{j}{n}$, $i,j = \overline{1,n}$, і вибираючи значення підінтегральної функції в правих верхніх вершинах цих квадратів.

2. Скласти нижню s і верхню S суми Дарбу для функції $f(x,y) = x^2 + y^2$ в області $(P) = \{(x,y)\ :\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$, розбиваючи останню на квадрати прямими $x = 1 + \dfrac{i}{n}$, $y = 1 + \dfrac{j}{n}$, $i,j = \overline{0,n-1}$. Чому рівні границі цих сум при $n \to \infty$?

3. Описати область інтегрування для заданих повторних інтегралів та обчислити їх:

1) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_2^6 \frac{dx}{(x+2y)^2}$; 2) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b xy\, dy$;

3) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2}^2 (2x^2+xy^2+3y)\, dy$; 4) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x+y)^2}$;

5) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^4 (x^4+y^2)\, dy$; 6) $\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^a r^2 \cos^\varphi\, dr$.

4. Який знак мають наступні інтеграли:

1) $\iint\limits_{(P)} \ln(x^2+y^2)\, dxdy,\ (P)=\{(x,y):\ |x|+|y|\leqslant 2\}$;

2) $\iint\limits_{(P)} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\, dxdy,\ (P)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 9\}$;

3) $\iint\limits_{(P)} \arcsin(x+y)\, dxdy,\ (P)=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1-x\}$.

5. Використовуючи теорему про середнє (властивість 7), оцінити інтеграли:

1) $\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{64+\cos^2 x+\cos^2 y},\ (P)=\{(x,y):\ |x|+|y|\leqslant 16\}$;

2) $\iint\limits_{(P)} (4+\sin xy)\, dxdy,\ (P)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 4\}$;

3) $\iint\limits_{(P)} (x^2-y^2)\, dxdy,\ (P)=\{(x,y):\ x^2+y^2-2x\leqslant 0\}$;

4) $\iint\limits_{(P)} \sin\frac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}\, dxdy,\ (P)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 16\}$.

6. Змінити порядок інтегрування в заданих повторних інтегралах:

1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)\, dy$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\, dx$;

3) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{0} f(x,y)\, dy$; 4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)\, dy$;

5) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x,y)\,dx;$ 6) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)\,dy;$

7) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy;$ 8) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)\,dx;$

9) $\int\limits_3^7 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{3} f(x,y)\,dx + \int\limits_7^9 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)\,dx;$

10) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dx.$

7. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного двома способами з різним порядком інтегрування, якщо:

1) (P) – трикутник з вершинами $O(0;0),\ A(2;1),\ B(3;5);$

2) (P) – трапеція з вершинами $O(0;0),\ A(1;0),\ B(2;1),\ C(0;1);$

3) (P) – круг $x^2+y^2 \leqslant y;$

4) (P) – кільце $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9;$

5) $(P) = \left\{(x,y):\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant x\right\};$

6) $(P) = \{(x,y):\ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1-y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\};$

7) (P) обмежена кривими $y^2 = ax,\ x^2+y^2 = 2ax,\ y=0,\ a>0,\ y>0;$

8) (P) – паралелограм зі сторонами $y=x,\ y=x-3,\ y=2,\ y=4;$

9) (P) обмежена кривими $x^2+y^2 = ax,\ x^2+y^2 = 2ax,\ y=0,\ a>0,$ $y>0;$

10) $(P) = \{(x,y):\ y^2 \leqslant x+2,\ y \geqslant x\}.$

8. Обчислити подвійні інтеграли по області (P), обмеженій даними кривими:

1) $\iint\limits_{(P)} xy^2\,dxdy,\ \ y^2 = 4x,\ \ x=1;$

2) $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\,dxdy,\ \ y=x,\ \ x+y=2a,\ \ x=0,\ \ a>0;$

3) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} xy\,dxdy,\ \ x+y=2,\ \ x^2+y^2=2y,\ \ x>0;$

4) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} |xy|\,dxdy,\ \ x^2+y^2\leqslant 4;$

5) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} x^2\,dxdy,\ \ |x|+|y|\leqslant 9;$

6) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} x\,dxdy,$ (P) – трикутник з вершинами $A(1;1),\ B(2;7),\ C(4;5);$

7) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \sqrt{4+x^2}\,dxdy,\ \ y^2-x^2=4,\ \ x=2,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ y>0;$

8) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} e^{x+y}\,dxdy,\ \ y=e^x,\ \ x=0,\ \ y=2;$

9) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} x\,dxdy,\ \ y=0,\ \ x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi;$

10) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} y\,dxdy,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}.$

9. Обчислити подвійні інтеграли за допомогою переходу до полярної системи координат:

1) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\,dxdy,\ \ (P)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 2ax\};$

2) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \ln(x^2+y^2)\,dxdy,\ \ (P)=\{(x,y):\ e^2\leqslant x^2+y^2\leqslant e^4\};$

3) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \ (P)=\left\{(x,y):\ \frac{\pi^2}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant \pi^2\right\};$

4) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\,dxdy,\ \ (P)=\{(x,y):\ ax\leqslant x^2+y^2\leqslant 4ax,\ y\geqslant 0\};$

5) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ \ (P)=\{(x,y):\ 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 6x\};$

6) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy,\ \ (P)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 9,\ x\leqslant y\leqslant \sqrt{2}x\};$

7) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, $(P) = \{(x,y) :\ 4x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9x,\ x \leqslant y \leqslant 2x\}$;

8) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} dxdy$, де (P) обмежена лемніскатою Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.

10. Обчислити подвійні інтеграли за допомогою заміни змінних:

1) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} x^2y^2\,dxdy$, де (P) обмежена кривими $xy = 1$, $xy = 3$, $y = x$, $y = 2x$, $x > 0$, $y > 0$;

2) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} (4x - 2y)\,dxdy$, де (P) – паралелограм, обмежений прямими $x+y = 1$, $x+y = 3$, $2x-y = 1$, $2x-y = 4$;

3) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} xy\,dxdy$, де (P) обмежена кривими $xy = 1$, $xy = 3$, $x+y = \dfrac{1}{2}$, $x+y = \dfrac{5}{2}$;

4) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} (x+y)^4(x-y)^3\,dxdy$, де (P) – квадрат, обмежений прямими $x+y = 1$, $x-y = -1$, $x+y = 3$, $x-y = 1$;

5) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} dxdy$, де (P) обмежена кривими $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$, $xy = 1$, $xy = 3$;

6) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{y^2}{x^2}\,dxdy$, де (P) обмежена кривими $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $y = 5x$.

11. Обчислити подвійні інтеграли:

1) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} (x+y)\,dxdy$, де (P) обмежена кривою $x^2+y^2 = x+y$;

2) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} (|x|+|y|)^3\,dxdy$, де $(P) = \{(x,y) :\ |x|+|y| \leqslant 4\}$;

3) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}\,dxdy$, де область (P) обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

4) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} (x+y)\,dxdy$, де (P) обмежена кривими $y^2 = 2x$, $x+y = 4$, $x+y = 9$;

5) $\iint\limits_{(P)} |\cos(x+y)|\,dxdy$, де $(P)=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi\}$;

6) $\iint\limits_{(P)} \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$, де $(P)=\{(x,y):\ |x|\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

12. Обчислити подвійні інтеграли від розривних функцій:

1) $\iint\limits_{(P)} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dxdy$, де $(P)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 4\}$;

2) $\iint\limits_{(P)} [x+y]\,dxdy$, де $(P)=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$;

3) $\iint\limits_{(P)} \sqrt{[y-x^2]}\,dxdy$, де $(P)=\{(x,y):\ -2\leqslant x\leqslant 2,\ x^2\leqslant y\leqslant 4\}$.

13. Довести, що якщо функція $f(x,y)$ є неперервною, то функція $U(x,y)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\,d\eta$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=f(x,y).$$

14. Вивести формулу для обчислення $\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dxdy$, в узагальнених полярних координатах $x=ar\cos^\alpha\varphi,\ y=br\sin^\alpha\varphi$, де $a,b,\alpha>0$ – фіксовані сталі.

Приклади розв'язування вправ

5.4. Функція $f(x,y)=\sin\dfrac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}$ є неперервною і обмеженою в області $(P)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 16\}$. Маємо, що

$$-1\leqslant\sin\frac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}\leqslant 1.$$

Тоді за теоремою про середнє можемо оцінити заданий подвійний інтеграл. Отже,

$$-16\pi\leqslant\iint\limits_{(P)}\sin\frac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}\,dxdy\leqslant 16\pi,$$

де 16π – площа області (P). ►

8.7. Задана область інтегрування зображена на рис. 5. Тоді

$$(P) = \{(x, y) : \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \ -\sqrt{4+x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4+x^2}\}.$$

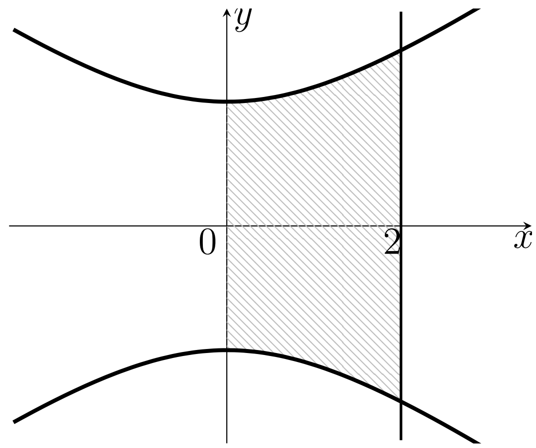

Рис. 5

Зведемо подвійний інтеграл до повторного і обчислимо його:

$$\iint\limits_{(P)} \sqrt{4+x^2}\, dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4+x^2}}^{\sqrt{4+x^2}} \sqrt{4+x^2}\, dy = \int\limits_0^2 \sqrt{4+x^2} \cdot y \Big|_{-\sqrt{4+x^2}}^{\sqrt{4+x^2}} dx =$$

$$= 2\int\limits_0^2 (4+x^2)\, dx = 2\Big(4x + \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2 = 2\Big(8 + \frac{8}{3}\Big) = \frac{64}{3}. \quad \blacktriangleright$$

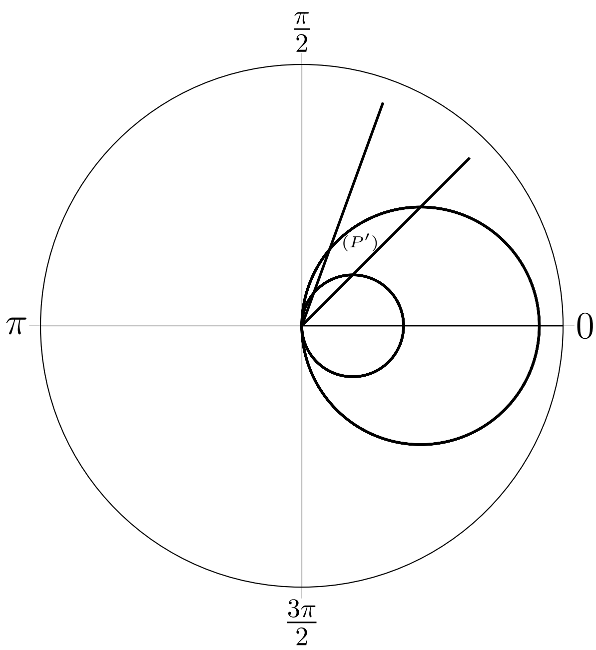

Рис. 6

9.7. Перейдемо до полярної системи координат за допомогою заміни змінних $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Тоді в новій системі координат отримаємо область інтегрування виду

$$(P) = \Big\{(r,\varphi):\ \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 2,\ 4\cos\varphi \leqslant r \leqslant 9\cos\varphi\Big\},$$

яка зображена на рис. 6.

Отже, за формулою заміни змінних в подвійному інтегралі запишемо:

$$\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} = \left| \begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi, & \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 2, & \\ y = r\sin\varphi, & 4\cos\varphi \leqslant r \leqslant 9\cos\varphi, & J(r,\varphi) = r \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{9\cos\varphi} \frac{r}{r^4}\,dr = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{1}{r^2}\Big|_{4\cos\varphi}^{9\cos\varphi} d\varphi = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2}\Big(\frac{1}{81}-\frac{1}{16}\Big)\frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{81}-\frac{1}{16}\Big)\ \operatorname{tg}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{81}-\frac{1}{8}-\frac{1}{81}+\frac{1}{16}\Big) = \frac{65}{2592}. \quad \blacktriangleright$$

11.3. Область інтегрування:

$$(P) = \Big\{(x,y):\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1\Big\}.$$

Зробимо заміну змінних $\begin{cases} x = 2r\cos\varphi, \\ y = 3r\sin\varphi. \end{cases}$ Тоді в новій системі координат область інтегрування матиме вид:

$$(\Delta) = \{(r,\varphi):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Обчислимо якобіан переходу до нової системи координат:

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{vmatrix} = 6r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = 6r.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(P)} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dxdy = \left| \begin{array}{l} x = 2r\cos\varphi, \\ y = 3r\sin\varphi \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot 6r\,dr =$$

$$= -3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2) = -2\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-r^2)^3}\,\Big|_0^1 d\varphi = 4\pi. \quad \blacktriangleright$$

§ 2.2. Потрійні інтеграли

Нехай в деякій просторовій області (V) задана функція $f(x, y, z)$. Розіб'ємо область за допомогою сітки поверхонь на скінченну кількість частинок (V_1), $(V_2), \ldots,$ (V_n), що мають відповідні об'єми V_1, $V_2, \ldots,$ V_n. В межах i-го елемента (V_i) візьмемо довільну точку (ξ_i, η_i, ζ_i) і значення функції в цій точці $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ помножимо на об'єм V_i. Складемо інтегральну суму $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i$.

Якщо існує скінченна границя I цієї суми при прямуванні до нуля найбільшого з діаметрів всіх областей (V_i), то вона називається ***потрійним інтегралом функції*** $f(x, y, z)$ ***в області*** (V). Позначається

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz,$$

де λ – максимальний із діаметрів областей (V_i).

Скінченна границя може існувати лише для обмеженої функції. Для інтегральних сум за аналогією до подвійних інтегралів можна ввести нижню і верхню суми Дарбу:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i V_i,$$

де $m_i = \inf\limits_{(V_i)} \{f\}$, $M_i = \sup\limits_{(V_i)} \{f\}$.

Теорема 1. *Для існування потрійного інтеграла від функції* $f(x, y, z)$ *по області* (V) *необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна із двох наступних умов:*

1) $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$,

2) $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i V_i = 0$, *де* $\omega_i = M_i - m_i$ *– коливання функції* $f(x, y, z)$ *в області* (V_i).

Теорема 2. *Будь-яка неперервна функція* $f(x, y, z)$ *в області* (V) *є інтегровною.*

Теорема 3. *Будь-яка обмежена функція $f(x, y, z)$ в області (V), всі розриви якої лежать на скінченній кількості поверхонь об'ємом нуль, є інтегровною в цій області.*

Властивості інтегровних функцій та потрійних інтегралів

1. Існування і значення потрійного інтеграла не залежить від значень, що приймає підінтегральна функція $f(x, y, z)$ вздовж скінченної кількості поверхонь об'ємом нуль.

2. Якщо $(V) = (V') + (V'')$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{(V')} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V'')} f(x,y,z)dV,$$

причому із існування інтеграла зліва випливає існування інтегралів справа і навпаки.

3. Якщо $k = \mathrm{const}$, то

$$\iiint\limits_{(V)} k \cdot f(x,y,z)dV = k \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV,$$

причому із існування інтеграла справа випливає існування інтеграла зліва і навпаки.

4. Якщо в області (V) інтегровні функції $f(x, y, z)$ і $g(x, y, z)$, то інтегровною є функція $f(x, y, z) \pm g(x, y, z)$, причому

$$\iiint\limits_{(V)} \big(f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\big)dV = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV \pm \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)dV.$$

5. Якщо для інтегровних в області (V) функцій $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ виконується нерівність $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV \leqslant \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)dV.$$

6. У випадку інтегровності функції $f(x, y, z)$ в області (V) інтегровною також в цій області є функція $|f(x, y, z)|$. При цьому має місце нерівність

$$\Big|\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV\Big| \leqslant \iiint\limits_{(V)} |f(x,y,z)|dV.$$

7. Якщо інтегровна в області (V) функція $f(x,y,z)$ задовольняє нерівність $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$, то

$$mV \leqslant \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV \leqslant MV,$$

або

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \mu V,$$

де $m \leqslant \mu \leqslant M$.

У випадку неперервності функції $f(x,y,z)$ попередню формулу можна записати у виді

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})V,$$

де точка $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in (V)$.

Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена в прямокутному паралелепіпеді $(T) = [a,b;c,d;e,f]$, який проектується на площину yOz в прямокутник $(R) = [c,d;e,f]$. Якщо для функції $f(x,y,z)$ існує потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dT$ і для кожного фіксованого значення x із $[a,b]$ для функції $f(x,y,z)$ існує подвійний інтеграл $I(x) = \iint\limits_{(R)} f(x,y,z)dR$, то існує також повторний інтеграл $\int\limits_a^b dx \iint\limits_{(R)} f(x,y,z)dR$, і виконується рівність

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dT = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{(R)} f(x,y,z)dR.$$

Якщо припустити існування звичайного інтеграла $\int\limits_e^f f(x,y,z)dz$ для будь-яких фіксованих значень $x \in [a,b]$ і $y \in [c,d]$, то

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dT = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^f f(x,y,z)dz.$$

Отже, обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення повторного інтеграла.

Очевидно, що з існування потрійного інтеграла і звичайного інтеграла $\int\limits_e^f f(x,y,z)dz$ випливатиме рівність

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dT = \iint\limits_{(Q)} dxdy \int\limits_e^f f(x,y,z)dz,$$

де $(Q) = [a,b;c,d]$.

Нехай тіло (V) обмежене знизу і зверху відповідними поверхнями $z = z_0(x,y)$ і $z = Z(x,y)$, що проектуються на площину xOy у фігуру (P), яка обмежена контуром (Γ) площею нуль; з боків тіло (V) обмежене циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz, і кривою (Γ), як напрямною. Тоді

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{(P)} dxdy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

при цьому вважаються визначеними відповідні інтеграли $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV$ і $\int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Якщо область (P) є криволінійною трапецією, обмеженою двома кривими $y = y_0(x)$ і $y = Y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant X$, та прямими $x = x_0$ і $x = X$, то попередня формула перепишеться у виді

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Зауважимо, що переставляючи змінні і враховуючи існування відповідних інтегралів, можна вивести інші формули зв'язку потрійного інтеграла з подвійним та повторними інтегралами, залежно від вигляду області (V).

Наприклад, для областей

$$(V)=\{(x,y,z):\ a\leqslant x\leqslant b,\ z_0(x)\leqslant z\leqslant Z(x),\ y_0(x,z)\leqslant y\leqslant Y(x,z)\},$$

$$(V)=\{(x,y,z):\ c\leqslant y\leqslant d,\ x_0(y)\leqslant x\leqslant X(y),\ z_0(x,y)\leqslant z\leqslant Z(x,y)\},$$

$$(V)=\{(x,y,z):\ c\leqslant y\leqslant d,\ z_0(y)\leqslant z\leqslant Z(y),\ x_0(y,z)\leqslant x\leqslant X(y,z)\},$$

$$(V)=\{(x,y,z):\ e\leqslant z\leqslant f,\ x_0(z)\leqslant x\leqslant X(z),\ y_0(x,z)\leqslant y\leqslant Y(x,z)\},$$

$$(V)=\{(x,y,z):\ e\leqslant z\leqslant f,\ y_0(z)\leqslant y\leqslant Y(z),\ x_0(y,z)\leqslant x\leqslant X(y,z)\},$$

можна записати відповідні формули:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{z_0(x)}^{Z(x)}dz\int\limits_{y_0(x,z)}^{Y(x,z)}f(x,y,z)dy,$$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_0(y)}^{X(y)}dx\int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)}f(x,y,z)dz,$$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_c^d dy\int\limits_{z_0(y)}^{Z(y)}dz\int\limits_{x_0(y,z)}^{X(y,z)}f(x,y,z)dx,$$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_e^f dz\int\limits_{x_0(z)}^{X(z)}dx\int\limits_{y_0(x,z)}^{Y(x,z)}f(x,y,z)dy,$$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_e^f dz\int\limits_{y_0(z)}^{Y(z)}dy\int\limits_{x_0(y,z)}^{X(y,z)}f(x,y,z)dx.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

Розглянемо потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$, де область (V) обмежена поверхнею об'ємом нуль, а функція $f(x,y,z)$ неперервна в цій області або має розриви на скінченній кількості поверхонь об'ємом нуль, залишаючись при цьому обмеженою. Припустимо, що область (V) в просторі xyz пов'язана формулами

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta), \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases}$$

з деякою областю (V') в просторі $\xi\eta\zeta$. Тоді справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta,$$

де $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$ – якобіан переходу.

Розглянемо окремі випадки формули заміни змінних:

1) потрійний інтеграл у циліндричних координатах (r, φ, z) :

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{vmatrix} = \iiint\limits_{(V')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz;$$

2) потрійний інтеграл у сферичних координатах (r, φ, θ) :

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \iiint\limits_{(V')} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Вправи

1. Використовуючи теорему про середнє, оцінити інтеграли:

1) $\iiint\limits_{(V)} e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}} dxdydz,\ (V) = \Big\{(x, y, z) :\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\Big\};$

2) $\iiint\limits_{(V)} (x + y - z + 10) dxdydz,\ (V) = \Big\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9\Big\};$

3) $\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)dxdydz,\ (V) = \{(x,y,z):\ 1 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 3, 1 \leqslant z \leqslant 4\}$;

4) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dxdydz}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}},\ (V) = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 9\}$.

2. Звести потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$ до повторного по змінних x, y, z будь-якими трьома з шести можливих способів, якщо область (V) обмежена даними поверхнями:

1) $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1-x,\ z=0,\ x+y+z=1$;

2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$;

3) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=x^2+y^2$;

4) $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2=16,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$;

5) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=\sqrt{16-x^2},\ z=x^2+y^2$.

3. Обчислити потрійні інтеграли по області (V), обмеженій поверхнями:

1) $\iiint\limits_{(V)} xy^2z^3dxdydz,\ z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0$;

2) $\iiint\limits_{(V)} xdxdydz,\ x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=3$;

3) $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz,\ x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

4) $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz,\ y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy,\ z=0$;

5) $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz,\ x^2+y^2=z^2,\ z=1$;

6) $\iiint\limits_{(V)} xy\sqrt{z}dxdydz,\ z=0,\ z=y,\ y=x^2,\ y=1$;

7) $\iiint\limits_{(V)} zdxdydz,\ z^2=\dfrac{4}{9}(x^2+y^2),\ 0 \leqslant z \leqslant 2$;

8) $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz,\ x^2+y^2+z^2=a\sqrt{3}x,\ x^2+y^2+z^2=ay,\ z\geqslant 0;$

9) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ x^2+y^2+z^2=9,\ y^2+z^2=x^2,\ x\geqslant 0;$

10) $\iiint\limits_{(V)} z^2dxdydz,\ x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2+z^2=8z.$

4. Обчислити потрійний інтеграл, перейшовши до циліндричних або сферичних координат:

1) $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\ (V)=\big\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant z\big\};$

2) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y+z^2)^2dxdydz,\ (V)=\big\{(x,y,z):\ x^2+z^2\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\big\};$

3) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)dxdydz,\ (V)=\big\{(x,y,z):\ \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\leqslant z\leqslant 2\big\};$

4) $\iiint\limits_{(V)} z^2dxdydz,\ (V)=\big\{(x,y,z):\ 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2},$ $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}\big\};$

5) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)dxdydz,\ (V)=\big\{(x,y,z):\ 4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 9,\ z\geqslant 0\big\};$

6) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)dxdydz,$ де (V) обмежена поверхнями $x^2+y^2=4,$ $x^2+y^2=9,\ z=0,\ z=1,\ x=0,\ y=0;$

7) $\iiint\limits_{(V)} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$ де (V) обмежена поверхнями $y=0,\ z=0,$ $z=2,\ x^2+y^2=2x;$

8) $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\ (V)=\big\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant x\big\};$

9) $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz,\ (V)=\big\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2\sqrt{3}x,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2y,$ $z\geqslant 0\big\};$

10) $\iiint\limits_{(V)} dxdydz,$ де (V) обмежена поверхнями $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2+z^2=16,$ $z=0.$

5. Виконавши відповідну заміну змінних, обчислити потрійні інтеграли:

1) $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}}dxdydz$, $(V)=\Big\{(x,y,z):\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}\leqslant 1\Big\}$;

2) $\iiint\limits_{(V)} x^2dxdydz$, де (V) обмежена поверхнями $z=ay^2,\ z=by^2,\ y>0,$ $z=\alpha x,\ z=\beta x,\ z=h,\ h>0,\ 0<a<b,\ 0<\alpha<\beta$;

3) $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz$, де (V) розміщена в першому октанті і обмежена поверхнями $z=\dfrac{x^2+y^2}{2},\ z=\dfrac{x^2+y^2}{5},\ xy=4,\ xy=9,\ y=2x,\ y=3x.$

6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)} x^my^nz^pdxdydz$, де $(V)=\{(x,y,z):$ $x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$, $m,\ n$ і p – цілі невід'ємні числа.

Приклади розв'язування вправ

3.7. Область інтегрування (V) зображена на рис. 7. При проектуванні на площину xOy утвориться круг $x^2+y^2\leqslant 9$.

Отже,

$$(V)=\Big\{(x,y,z):\ -3\leqslant x\leqslant 3,\ -\sqrt{9-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{9-x^2},\ \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2\Big\}.$$

Тоді потрійний інтеграл можна звести до повторного і обчислити його:

$$\iiint\limits_{(V)} zdxdydz=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dy\int\limits_{\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{2}zdz=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}z^2\Big|_{\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{2}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\Big(4-\frac{4}{9}(x^2+y^2)\Big)dy=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\Big(4-\frac{4}{9}(x^2+y^2)\Big)dy=$$

$$=\int\limits_{-3}^{3}\Big(4y-\frac{4}{9}\Big(x^2y+\frac{y^3}{3}\Big)\Big)\Big|_{0}^{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{16}{3}\int\limits_{0}^{3}\Big(\sqrt{9-x^2}-\frac{1}{9}x^2\sqrt{9-x^2}\Big)dx=$$

$$=\frac{16}{27}\int\limits_{0}^{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}dx=\left|\begin{array}{lll} x=3\sin t, & x_1=0, & x_2=3, \\ dx=3\cos tdt, & t_1=0, & t_2=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$= 48\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)^2 dt = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2t + \cos^2 2t)dt =$$

$$= 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\Big)dt = 12\Big(\frac{3t}{2} + \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 9\pi. \blacktriangleright$$

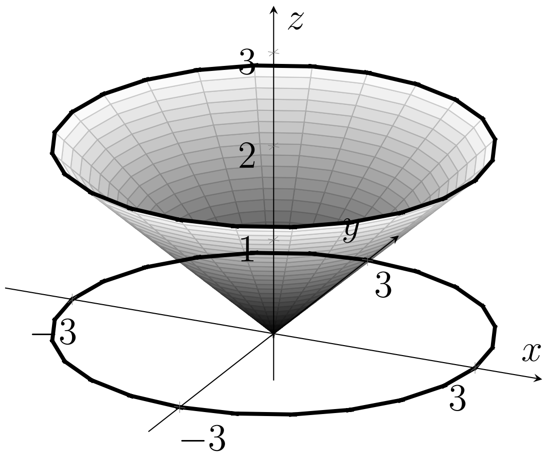

Рис. 7

4.10. Перейдемо до циліндричної системи координат. Тоді область (V') в новій системі координат (r,φ,z) матиме вигляд:

$$(V') = \Big\{(r,\varphi,z):\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 4\cos\varphi,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{16-r^2}\Big\}.$$

За формулою переходу до циліндричної системи координат отримаємо:

$$\iiint\limits_{(V)} dxdydz = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \quad J(r,\varphi,z) = r \\ z = z, \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} dr \int\limits_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} rz\Big|_0^{\sqrt{16-r^2}} dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} r\sqrt{16-r^2}dr =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16-r^2}d(16-r^2) = -\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(16-r^2)^3}\Big|_0^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= -\frac{64}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (|\sin^3\varphi| - 1)d\varphi = -\frac{64}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin^3\varphi)d\varphi - \frac{64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi + \frac{64}{3}\pi =$$

$$= -\frac{64}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi) + \frac{64}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi) + \frac{64}{3}\pi =$$

$$= \frac{64}{3}\pi - \frac{64}{3}\Big(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{64}{3}\Big(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{9}(3\pi-4). \blacktriangleright$$

5.3. Оскільки область (V) розміщена в першому октанті та обмежена поверхнями $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $z = \dfrac{x^2+y^2}{5}$, $xy = 4$, $xy = 9$, $y = 2x$ і $y = 3x$, то зробимо заміну змінних $\dfrac{z}{x^2+y^2} = \xi$, $xy = \eta$, $\dfrac{y}{x} = \zeta$. Тоді в просторі $\xi\eta\zeta$ область (V') матиме вигляд

$$(V') = \Big\{(\xi,\eta,\zeta) : 2 \leqslant \zeta \leqslant 3,\ 4 \leqslant \eta \leqslant 9,\ \frac{1}{5} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}\Big\}.$$

З системи $\begin{cases} \frac{z}{x^2+y^2} = \xi, \\ xy = \eta, \\ \frac{y}{x} = \zeta \end{cases}$ знайдемо залежність змінних x, y, z від ξ, η, ζ.

Тоді

$$\begin{cases} x = \eta^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}, \\ y = \eta^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}}, \\ z = \xi(\eta\zeta^{-1} + \eta\zeta), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = \eta^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}, \\ y = \eta^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}}, \\ z = \xi\eta(\zeta^{-1} + \zeta). \end{cases}$$

Обчислимо якобіан переходу до нової системи координат:

$$J(\xi,\eta,\zeta) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\zeta^{-\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}\zeta^{-\frac{3}{2}}\eta^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}\zeta^{\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\zeta^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}} \\ \eta(\zeta^{-1}+\zeta) & \xi(\zeta^{-1}+\zeta) & \xi\eta(-\zeta^{-2}+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\zeta^{-1}\eta(\zeta^{-1}+\zeta) + \frac{1}{4}\zeta^{-1}\eta(\zeta^{-1}+\zeta) = \frac{1}{2}\eta(\zeta^{-2}+1).$$

Отже,

$$\iiint\limits_{(V)} xyz\,dxdydz = \begin{vmatrix} x = \eta^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}, & y = \eta^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}}, \\ z = \xi\eta(\zeta^{-1}+\zeta), & J(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2}\eta(\zeta^{-2}+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}d\xi\int\limits_{4}^{9}d\eta\int\limits_{2}^{3}\eta^2\xi(\zeta^{-1}+\zeta)\cdot\frac{1}{2}\eta(\zeta^{-2}+1)d\zeta = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}d\xi\int\limits_{4}^{9}d\eta\int\limits_{2}^{3}\eta^3\xi(\zeta^{-3}+2\zeta^{-1}+\zeta)d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} d\xi \int\limits_{4}^{9} \eta^3\xi\Big(-\frac{\zeta^{-2}}{2}+2\ln\zeta+\frac{\zeta^2}{2}\Big)\Big|_2^3 d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} d\xi \int\limits_{4}^{9} \eta^3\xi\Big(\frac{185}{72}+2\ln\frac{3}{2}\Big)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{185}{72}+2\ln\frac{3}{2}\Big)\int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^4}{4}\,\xi\Big|_4^9 d\xi = \frac{65}{8}\Big(\frac{185}{72}+2\ln\frac{3}{2}\Big)\int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \xi d\xi =$$

$$= \frac{65}{16}\Big(\frac{185}{72}+2\ln\frac{3}{2}\Big)\xi^2\Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} = \frac{65}{16}\Big(\frac{185}{72}+2\ln\frac{3}{2}\Big)\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{25}\Big) = \frac{273}{320}\Big(\frac{185}{72}+2\ln\frac{3}{2}\Big). \qquad \blacktriangleright$$

§ 2.3. Невласні подвійні і потрійні інтеграли

Нехай область (P) на площині є необмеженою і функція $f(x,y)$ є неперервною на (P), тоді

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(P_n)} f(x,y)dxdy,$$

де $\{(P_n)\}$ – довільна послідовність обмежених замкнених квадрованих областей, що містяться в області (P).

Якщо границя в правій частині попередньої рівності існує і не залежить від вибору послідовності $\{(P_n)\}$, то відповідний інтеграл називається ***збіжним подвійним невласним інтегралом по необмеженій області***. Якщо границя рівна нескінченності або не існує, то подвійний невласний інтеграл називається ***розбіжним***.

За аналогією можна визначити потрійні невласні інтеграли від неперервної функції по необмеженій трьохвимірній області.

Розглянемо випадок, коли функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій і замкненій області (P) всюди, за винятком точки $M(a,b)$. Тоді

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{(P)\setminus(U_\varepsilon)} f(x,y)dxdy,$$

де (U_ε) – плоска область діаметром ε, що містить точку M.

Якщо існує скінченна границя в попередній рівності, то відповідний інтеграл називається ***збіжним подвійним невласним інтегралом від необмеженої функції в області*** (P). Якщо границя рівна нескінченності або не існує, то подвійний невласний інтеграл називається ***розбіжним***.

Аналогічно визначається невласний інтеграл, якщо функція $f(x, y)$ має лінію розриву.

Зауважимо, що поняття невласного інтеграла від розривної функції легко переноситься на випадок потрійних інтегралів.

Невласні подвійні або потрійні інтеграли від неперервної функції можна обчислювати зведенням до повторних інтегралів при умові, що відповідні повторні інтеграли від заданої функції існують.

Заміну змінних у збіжних невласних інтегралах від неперервних функцій виконують за аналогією до власних інтегралів. Наприклад, при обчисленні подвійних збіжних невласних інтегралів використовують перехід до полярної системи координат, а у збіжних потрійних невласних інтегралах можна переходити до циліндричних або сферичних координат.

Вправи

1. Дослідити на збіжність дані невласні інтеграли по необмежених областях:

1) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^3} dxdy, \quad (P) = \{(x, y) : \, x \geqslant 1, \, y \geqslant 1\};$

2) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^n}, \quad (P) = \{(x, y) : \, x^2 + y^2 \geqslant 1\};$

3) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \cos(x^2 + y^2) dxdy, \quad (P) = \{(x, y) : \, x \geqslant 0, \, y \geqslant 0\};$

4) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{y}{x} dxdy, \quad (P) = \{(x, y) : \, x \geqslant 1, \, -1 \leqslant y \leqslant 1\};$

5) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m}, \quad (P) = \{(x,y): -\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\};$

6) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{\cos x \cos y}{(x+y)^p} dxdy, \quad (P) = \{(x,y): x+y \geqslant 1\};$

7) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}, \quad p>0,\ q>0,\ (P) = \{(x,y): |x|+|y| \geqslant 1\};$

8) $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} e^{x+y+z} dxdydz, \quad (V) = \{(x,y,z): x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\};$

9) $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^n}, \quad (V) = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \geqslant 1\};$

10) $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r},\ (V) = \{(x,y,z): |x|+|y|+|z| \geqslant 1\},\ p>0,$ $q>0,\ r>0.$

2. Дослідити на збіжність дані невласні інтеграли від необмежених функцій:

1) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(x^2+xy+y^2)^n}, \quad (P) = \{(x,y): x^2+y^2 \leqslant 1\};$

2) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{x^2+y^2}, \quad (P) = \{(x,y): |y| \leqslant x^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\};$

3) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q},\ p>0,\ q>0,\ (P) = \{(x,y): |x|+|y| \leqslant 1\};$

4) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{|x-y|^p}, \quad (P) = \{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\};$

5) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad (P) = \{(x,y): x^2+y^2 \leqslant 1\};$

6) $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p}, \quad (P) = \{(x,y): x^2+y^2 \leqslant 1\};$

7) $\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(x-y)^n}$, $n > 0$, $(P) = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

8) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $n > 0$, $(V) = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$;

9) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x+y-z)^2}$, $\quad (V) = \{(x, y, z) : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1\}$;

10) $\iiint\limits_{(V)} \frac{(x+y-z)dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $\quad (V) = \{(x, y, z) : |x|+|y|+|z| \leqslant 1\}$.

3. Обчислити задані невласні інтеграли:

1) $\iint\limits_{(P)} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, $\quad (P) = \{(x, y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$;

2) $\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(x+y)^n}$, $\quad (P) = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, x+y \geqslant 1\}$;

3) $\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}$, $\quad (P) = \{(x, y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$;

4) $\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{\sqrt{(2-x)(x-y)}}$, $\quad (P) = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

5) $\iint\limits_{(P)} \ln \sin(x-y) dxdy$, $\quad (P) = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

6) $\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad (P) = \{(x, y) : x^2+y^2 \leqslant x\}$;

7) $\iiint\limits_{(V)} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz$, $\quad (V) = \{(x, y, z) : -\infty < x, y, z < +\infty\}$;

8) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^n}$, $n < 1$, $(V) = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$;

9) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{x^p y^q z^r}$, $\quad (V) = \{(x, y, z) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$;

10) $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad (V) = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \geqslant 1\}.$

4. Довести, що якщо:

1) функція $\varphi(x,y)$ неперервна в обмеженій області

$$(P) = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant A,\, b \leqslant y \leqslant B\},$$

2) функція $f(x)$ неперервна на сегменті $a \leqslant x \leqslant A$,

3) $p < 1$,

то інтеграл $\displaystyle\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p} dy$ збігається.

5. Показати, що

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{|x|\leqslant n,\, |y|\leqslant n} \sin(x^2+y^2)dxdy = \pi$$

і

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)dxdy = 0$$

при $n \in \mathbb{N}$.

6. Показати, що інтеграл $\displaystyle\iint\limits_{x\geqslant 1,\, y\geqslant 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ розбігається, однак повторні інтеграли $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy$ і $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx$ збігаються.

Приклади розв'язування вправ

1.5. Розглянемо послідовність областей

$$\{(P_n)\} = \{(x,y):\ -n \leqslant x \leqslant n,\, 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\iint\limits_{(P_n)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m} = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{(1+x^2+y^2)^m} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^m}.$$

Якщо $m \leqslant 0$, то $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{(P_n)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m} = +\infty$, тоді $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m}$ є розбіжним.

Якщо $m > 0$, то виконується нерівність:

$$\int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(2+x^2)^m} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(2+x^2)^m} \leqslant \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^m} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \int\limits_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2)^m}.$$

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^m} \leqslant \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^m} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m},$$

де $m > 0$.

За ознакою Коші маємо, що невласний інтеграл справа в останній нерівності збігається при $m > \dfrac{1}{2}$, і невласний інтеграл зліва розбігається при $m \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Отже, невласний інтеграл $\iint\limits_{(P)} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m}$, де $(P) = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, збігається, якщо $m > \dfrac{1}{2}$ і розбігається, якщо $m \leqslant \dfrac{1}{2}$. ▶

2.8. Зауважимо, що підінтегральна функція $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $n > 0$, є додатною і визначеною в області (V), за винятком точки $O(0,0,0)$. Тому

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{(V_\varepsilon)} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^n},$$

де $(V_\varepsilon) = (V) \setminus (R_\varepsilon),\ (R_\varepsilon) = \{(x,y,z) :\ x^2+y^2+z^2 \leqslant \varepsilon^2,\ 0 < \varepsilon < 1\}$.

Перейдемо до сферичної системи координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \text{ де } 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ \varepsilon \leqslant r \leqslant 1$.

Тоді при $n \neq 0$ отримаємо:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^n} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_{\varepsilon}^{1} r^{-2n} r^2 \sin\theta dr =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{r^{3-2n}}{3-2n}\bigg|_{\varepsilon}^{1} \sin\theta d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi\left(\frac{1}{3-2n} - \frac{\varepsilon^{3-2n}}{3-2n}\right) =$$

$$= 4\pi \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^{3-2n}}{3-2n} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-2n}, & n < \frac{3}{2}, \\ +\infty, & n > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Якщо $n = \dfrac{3}{2}$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{r}\sin\theta dr = 4\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \ln r\bigg|_{\varepsilon}^{1} = +\infty.$$

Отже заданий невласний інтеграл збіжний при $n < \dfrac{3}{2}$ і його значення рівне $\dfrac{4\pi}{3-2\pi}$. При $n \geqslant \dfrac{3}{2}$ невласний інтеграл є розбіжним. ▶

3.4. Функція $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(x-y)}}$ є необмеженою при $x = 2$ та $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, в області $(P) = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

Отже, $\displaystyle\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{\sqrt{(2-x)(x-y)}}$ є подвійним невласним інтегралом від необмеженої функції.

Тоді

$$\iint\limits_{(P)} \frac{dxdy}{\sqrt{(2-x)(x-y)}} = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{(2-x)(x-y)}} =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{(2-x)(x-y)}}\right) = \int\limits_0^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{2\sqrt{x-y}}{\sqrt{2-x}}\right)\Bigg|_0^{x-\varepsilon} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2-x}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}\right) dx = 2\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} \frac{x}{2-x} = t^2, & x = \frac{2t^2}{t^2+1}, & t_1 = 0 \\ x = t^2(2-x), & dx = \frac{4t(t^2+1)-2t\cdot 2t^2}{(t^2+1)^2}dt, & t_2 = +\infty \end{array} \right| = 8\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 8\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} - \int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^2}\right) = 8\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right)\Big|_0^b =$$

$$= 8\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} b - \frac{b}{2(b^2+1)}\right) = 2\pi. \quad \blacktriangleright$$

§ 2.4. Многократні інтеграли

Нехай (E) – обмежена множина простору $\mathbb{R}^n$, а (A) – n-вимірний (елементарний) прямокутник площі A, що містить цю множину. Розіб'ємо прямокутник (A) на n-вимірні прямокутники (A_i), $i = \overline{1, n}$, площами A_i. Позначимо $s = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, де $(A_i) \subset (E)$, а $S = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, де $(A_i) \cap (E) \neq \varnothing$. Якщо ввести до розгляду характеристичну функцію множини (E)

$$\lambda_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (E), \\ 0, & \text{якщо } x \notin (E), \end{cases}$$

то дістанемо $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_{x\in(A_i)} \lambda_E(x) A_i$ – нижня сума Дарбу, а $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{x\in(A_i)} \lambda_E(x) A_i$ – верхня сума Дарбу функції $\lambda_E(x)$.

Множину $(E) \subset \mathbb{R}^n$ називають ***вимірною за Жорданом***, якщо характеристична функція цієї множини інтегрована за Ріманом на n-вимірному прямокутнику $(A) \supset (E)$. Число $\operatorname{mes} E = \int\limits_{(A)} \lambda_E(x)dx$ називається ***мірою Жордана множини*** (E).

Наприклад, якщо $(E) \subset (A) \subset \mathbb{R}^2$, то $\operatorname{mes} E = \iint\limits_{(A)} \lambda_E(x,y)dxdy$ і (E) тоді називається ***квадрованою множиною***, а якщо $(E) \subset (A) \subset \mathbb{R}^3$, то $\operatorname{mes} E = \iiint\limits_{(A)} \lambda_E(x,y,z)dxdydz$ і (E) називається ***кубовною множиною***.

Зауважимо, що множина $(E) \subset \mathbb{R}^n$ вимірна за Жорданом тоді і тільки тоді, коли міра Жордана межі цієї множини дорівнює нулю (критерій вимірності множини за Жорданом).

Нехай функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена на вимірній за Жорданом множині $(E) \subset (A) \subset \mathbb{R}$, де (A) – n-вимірний прямокутник. Тоді, якщо

$\operatorname{mes} E = 0$, то функцію f називають ***інтегровною за Ріманом на множині*** (E), а її інтегралом Рімана (n-кратним інтегралом) вважають число нуль

$$\int\limits_{(E)} \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 0.$$

Якщо $\operatorname{mes} E > 0$, то функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$ називають ***інтегровною за Ріманом на множині*** (E) при умові, що функція

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{якщо } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (E), \\ 0, & \text{якщо } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin (E), \end{cases}$$

інтегровна на n-вимірному прямокутнику (A), а число

$$\int\limits_{(E)} \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{(A)} \cdots \int f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

називається ***інтегралом Рімана (n-кратним інтегралом) функції*** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***по множині*** (E).

Наприклад, якщо (E) – квадрована множина, то $\iint\limits_{(E)} f(x, y) dx dy$ – подвійний інтеграл функції $f(x, y)$ на множині $(E) \subset \mathbb{R}^2$, а якщо (E) – кубовна множина, то $\iiint\limits_{(E)} f(x, y, z) dx dy dz$ – потрійний інтеграл функції $f(x, y, z)$ на множині $(E) \subset \mathbb{R}^3$.

Якщо функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервна на замкненій вимірній множині $(E) \subset \mathbb{R}^n$, то вона є інтегровною на цій множині (достатня умова інтегровності функції).

Нехай задано узагальнене циліндричне тіло простору $\mathbb{R}^m$:

$$(E) = \{u = (x, y) : \, x \in (E_1), \, \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\},$$

де (E_1) – замкнена вимірна множина простору $\mathbb{R}^{m-1}$ а $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – неперервні функції на множині (E_1). Якщо функція f – неперервна на узагальненому циліндричному тілі (E), то

$$\int\limits_{(E)} f(u)du = \int\limits_{(E_1)} \Big(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Якщо $(E) = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^n :\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^1,\ y \in (E_1(x)) \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$ – замкнена вимірна множина для довільного $x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_{(E)} f(u)du = \int\limits_{a}^{b} \Big(\int\limits_{(E_1(x))} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Нехай функції

$$x = x(u,v,\ldots,w),\ y = y(u,v,\ldots,w),\ldots,\ z = z(u,v,\ldots,w)$$

неперервні разом із своїми частинними похідними у замкненій області $(P) \subset \mathbb{R}^n$ і здійснюють взаємнооднозначне відображення області (P) на область (P').

Якщо якобіан переходу

$$J(u,v,\ldots,w) = \frac{D(x,y,\ldots,z)}{D(u,v,\ldots,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & \ldots & x'_w \\ y'_u & y'_v & \ldots & y'_w \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z'_u & z'_v & \ldots & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

в області (P), то замкнена вимірна множина $(E) \subset (P)$ з кусково-гладкою межею ∂E відображається у замкнену вимірну множину $(E') \subset (P')$ і для функції $f(x,y,\ldots,z)$, неперервної на множині (E'), має місце формула

$$\int \cdots \int\limits_{(E')} f(x,y,\ldots,z)dxdy\ldots dz =$$

$$= \int \cdots \int\limits_{(E)} f\Big(x(u,v,\ldots,w), y(u,v,\ldots,w),\ldots,z(u,v,\ldots,w)\Big)\times$$

$$\times\Big|J(u,v,\ldots,w)\Big|dudv\ldots dw.$$

Зауважимо, що із цієї формули легко вивести формули заміни змінних для подвійного і потрійного інтегралів.

Нехай функція f визначена у замкненій області $(E) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ за винятком точок, що утворюють множину (E_0), яку можна покрити скінченною кількістю куль, суму мір яких можна зробити як завгодно малою, тобто

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists (B_k),\ k = \overline{1, m(\varepsilon)}) : \Big\{ \bigcup_{k=1}^{m(\varepsilon)} (B_k) \supset (E_0) \wedge \sum_{k=1}^{m(\varepsilon)} \operatorname{mes} B_k < \varepsilon \Big\}.$$

Якщо функція f інтегровна на множині $(E_\varepsilon) = (E) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m(\varepsilon)} (B_k)$, $\forall\, \varepsilon > 0$, то вираз

$$\int\limits_{(E)} f(x)dx = \int \cdots \int\limits_{(E)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

називається ***невласним кратним інтегралом функції*** f ***по замкненій вимірній області*** (E).

Невласний кратний інтеграл функції f по вимірній області (E) називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(E_\varepsilon)} f(x)dx,$$

яку називають ***значенням невласного інтеграла*** і позначають

$$\int\limits_{(E)} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(E_\varepsilon)} f(x)dx.$$

Нехай замкнена область $(E) \subset \mathbb{R}^n$ необмежена, але переріз $(B_r) \cap (E) = (E_r)$, де $(B_r) \in \mathbb{R}^n$ – замкнена куля з радіусом r і з центром в початку координат, є вимірною множиною для довільного $r > 0$. Тоді вираз

$$\int\limits_{(E)} f(x)dx = \int \cdots \int\limits_{(E)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

називається ***невласним кратним інтегралом функції*** f ***по необмеженій області*** (E).

Невласний кратний інтеграл f по необмеженій області (E) називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_{(E_r)} f(x)dx$, яку називають ***значенням невласного інтеграла по необмеженій області***.

Отже,

$$\int\limits_{(E)} f(x)dx = \lim_{r\to\infty}\int\limits_{(E_r)} f(x)dx.$$

Із розглянутих означень випливають означення подвійних і потрійних невласних інтегралів.

Вправи

1. Обчислити многократний інтеграл:

1) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)dx_1dx_2\ldots dx_n$;

2) $\int\cdots\int\limits_{(E)} dx_1dx_2\ldots dx_n$, $(E) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}, x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1\}$;

3) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2dx_1dx_2\ldots dx_n$;

4) $\int\cdots\int\limits_{(E)} x_1dx_1dx_2\ldots dx_n$, $(E) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}, x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1\}$;

5) $\int\limits_0^1 dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}} x_1x_2\ldots x_ndx_n$;

6) $\int\cdots\int\limits_{(E)} \sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}dx_1dx_2\ldots dx_n$, $(E) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1, x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}\}$.

2. Знайти міру заданого тіла (E) з простору $\mathbb{R}^n$:

1) $(E) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_6) : x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2 \leqslant \mathbb{R}^2\}$ (шестивимірна куля);

2) $(E) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}, x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1\}$ (n-вимірний симплекс);

3) (E) – обмежена площинами $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \pm h_i$, $i = \overline{1,n}$,
при $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ (n-вимірний паралелепіпед);

4) $(E) = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \geqslant 0, \ \dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n} \leqslant 1, \ a_i > 0, \ i = \overline{1,n}\Big\}$ (n-вимірна піраміда);

5) $(E) = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \geqslant 0, \ \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} \leqslant \dfrac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1$, $a_i > 0, \ i = \overline{1,n}\Big\}$ (n-вимірний конус).

3. Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неперервна функція в області $0 \leqslant x_i \leqslant a$, $i = \overline{1,n}$. Довести рівність

$$\int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int\limits_0^a dx_n \int\limits_{x_n}^a dx_{n-1} \ldots \int\limits_{x_2}^a f dx_1, \quad n \geqslant 2.$$

4. Обчислити інтеграл

$$\int \cdots \int\limits_{(E)} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2}},$$

де $(E) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$.

5. Довести рівність

$$\int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \Big(\int\limits_0^1 f(\tau) d\tau \Big)^n,$$

при умові, що функція f є неперервною.

6. Довести рівність

$$\int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int\limits_0^a f(u) \frac{(a-u)^{n-1}}{(n-1)!} du,$$

при умові, що функція f є неперервною.

7. Довести рівність

$$\int\limits_0^x x_1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} x_2 dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int\limits_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du,$$

де функція f є неперервною.

Приклади розв'язування вправ

1.5. Використавши послідовне інтегрування функцій, отримаємо:

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \ldots x_n dx_n =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot \frac{x_n^2}{2}\Big|_0^{x_{n-1}} dx_{n-1} =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \frac{x_{n-1}^2}{2} dx_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-3}} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot \frac{x_{n-1}^4}{4}\Big|_0^{x_{n-2}} dx_{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-3}} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-2}^5 dx_{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-4}} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-3}^7 dx_{n-3} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} x_1 x_2^{2n-2}\Big|_0^{x_1} dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 x_1^{2n-1} dx_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2^n \cdot n!}. \blacktriangleright$$

2.5. За означенням міри Жордана для заданого n-вимірного конуса запишемо

$$\operatorname{mes} E = \int \cdots \int_{(E)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Зробимо наступну заміну змінних:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}, \\ x_2 = a_2 r \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}, \\ \ldots \\ x_j = a_j r \cos\varphi_{j-1} \prod\limits_{i=j}^{n-2} \sin\varphi_i, \qquad j = \overline{2, n-2}; \\ \ldots \\ x_{n-1} = a_{n-1} r \cos\varphi_{n-2}, \\ x_n = x_n. \end{cases}$$

Обчислимо якобіан переходу:

$$J(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, x_n) = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, x_n)} = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} r^{n-2} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^{j-1}\varphi_j.$$

Тоді

$$\operatorname{mes} E = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi_2 d\varphi_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-3}\varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int\limits_0^1 r^{n-2} dr \times$$

$$\times \int\limits_{ra_n}^{a_n} dx_n = \frac{2\pi}{(n-1)^n} a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot 2^{n-3} \prod_{j=2}^{n-2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j d\varphi_j =$$

$$= \frac{2\pi}{(n-1)^n} a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot 2^{n-3} \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{(n-1) n \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

оскільки з формули

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j d\varphi_j = \frac{1}{2} B\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}$$

випливає, що

$$\prod_{j=2}^{n-2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1}\varphi_j d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma(2) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}. \quad \blacktriangleright$$

6. За формулою з прикладу 3 можемо записати:

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \int_0^a f(x_n)dx_n \int_{x_n}^a dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^a dx_{n-2} \ldots \int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1.$$

При $n = 3$ маємо, що

$$\int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1 = \frac{(a-x_3)^2}{2}.$$

За методом математичної індукції можна довести, що при $n = k$ виконується рівність

$$\int_{x_k}^a dx_{k-1} \int_{x_{k-1}}^a dx_{k-2} \ldots \int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1 = \frac{(a-x_k)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Отже,

$$\int_0^a f(x_n)dx_n \int_{x_n}^a dx_{n-1} \ldots \int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1 = \int_0^a f(x_n) \cdot \frac{(a-x_n)^{n-1}}{(n-1)!} dx_n =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x_n = u \\ dx_n = du \end{array} \right| = \int_0^a f(u) \cdot \frac{(a-u)^{n-1}}{(n-1)!} du,$$

що й треба було довести. $\blacktriangleright$

§ 2.5. Застосування кратних інтегралів у геометрії

Нехай задане тіло

$$(V) = \{(x,y,z) : (x,y) \in (P),\, 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

де (P) – замкнена квадрована область, і функція $f(x,y)$ є неперервною в цій області. Тоді

$$V = \iint\limits_{(P)} dxdy$$

– об'єм циліндричного тіла (V).

Зауважимо, що ця формула відображає геометричний зміст подвійного інтеграла.

З попередньої формули випливають наступні:

$$P = \iint\limits_{(P)} dxdy \text{ – площа квадрованої області } (P),$$

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz \text{ – об'єм кубовної області } (V).$$

Площа гладкої поверхні $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in (P)$, (P) – замкнена обмежена квадрована область, а функція f має в цій області неперервні частинні похідні f'_x і f'_y, обчислюється за формулою:

$$P = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dxdy.$$

Якщо рівняння поверхні задане у параметричному виді $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$ де $(u, v) \in (P)$, (P) – замкнена обмежена квадрована область і функції x, y, z неперервно диференційовні в області (P), то площа поверхні обчислюється за формулою

$$P = \iint\limits_{(P)} \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

де

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2,$$

$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$

$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v.$$

Вправи

1. Знайти площі плоских фігур, обмежених кривими:

1) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 2$, $y = 5$;

2) $xy = 4$, $x + y = 5$;

3) $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2$, $p > 0$, $q > 0$;

4) $y^2 = 4(1 - x)$, $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 1$;

5) $r = 1$, $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$, $r \geqslant 1$;

6) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $r = a\cos\varphi$, $a > 0$;

7) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geqslant a^2$, $a > 0$;

8) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$, $a > 0$;

9) $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$;

10) $x^3 + y^3 = axy$, $a > 0$;

11) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$, $0 < a < b$;

12) $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $my^2 = x^3$, $ny^2 = x^3$, $0 < a < b$, $0 < m < n$;

13) $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$, $y = 5x$, $y = 7x$;

14) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = a\sqrt{3}y$, $a > 0$;

15) $x + y = 2$, $x + y = 5$, $y = 3x$, $y = 7x$;

16) $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = 2x$, $y = 3x$, $x > 0$, $y > 0$;

17) $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$, $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 2$, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$, $4\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$, $a > 0$, $b > 0$;

18) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 4$, $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4}$, $8\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4}$, $x > 0$, $y > 0$.

2. Перейшовши до узагальнених полярних координат (r, φ) за формулами $\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\varphi \\ y = br\sin^\alpha\varphi, \end{cases}$ $r \geqslant 0$, де a, b, α – підібрані сталі і

$$J(r, \varphi) = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$$

– якобіан переходу, знайти площі плоских фігур, обмежених кривими:

1) $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^5 = \dfrac{x^2y^2}{c^4}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

2) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{xy}{c^2}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $h > 0$, $k > 0$;

4) $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^4 = \dfrac{x^2}{h^2} + \dfrac{y^2}{k^2}$, $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $h > 0$, $k > 0$;

5) $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^4 = \dfrac{x^2}{h^2} - \dfrac{y^2}{k^2}$, $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $h > 0$, $k > 0$;

6) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1,\ x=0,\ y=0,\ a>0,\ b>0;$

7) $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{y^3}{b^3}=\dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2},\ x=0,\ y=0,\ a>0,\ b>0,\ h>0,\ k>0;$

8) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^3=\dfrac{x^2}{h^2},\ y>0,\ a>0,\ b>0;$

9) $\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}\right)^{12}=\dfrac{xy}{c^2},\ a>0,\ b>0,\ c>0;$

10) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}\right)^3=\dfrac{xy}{16}.$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями:

1) $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0;$

2) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

3) $x+y+z=2,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

4) $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=z^2,\ z=0;$

5) $z=\sin\dfrac{\pi y}{2x},\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=\pi;$

6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

7) $z=x^2+y^2,\ x=x^2+y^2,\ 2x=x^2+y^2,\ z=0;$

8) $z=x+y,\ (x^2+y^2)^2=2xy,\ z=0,\ x>0,\ y>0;$

9) $z=x^2+y^2,\ z=x+y;$

10) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2);$

11) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2};$

12) $z^2=xy,\ xy=1,\ xy=4,\ y^2=x,\ y^2=3x,\ z=0;$

13) $z=e^{-(x^2+y^2)},\ z=y,\ x^2+y^2=4;$

14) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\geqslant a|x|,\ a>0;$

15) $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z;$

16) $z=\cos\dfrac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2},\ z=0,\ y=x\,\mathrm{tg}\alpha,\ y=x\,\mathrm{tg}\beta,\ 0\leqslant\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2};$

17) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$

18) $z=x^2+y^2,\ xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=\dfrac{x}{2},\ y=2x,\ z=0;$

19) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c},\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b},\ z=0;$

20) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z}{c}=1,\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\ z=0.$

4. Використовуючи перехід до узагальнених сферичних координат

$$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, \\ y = br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, \\ z = cr\sin^\beta\theta, \end{cases}$$

де a, b, c, α, β – відповідні сталі, знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2 = \dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $h>0$, $k>0$;

2) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=\dfrac{z}{k}$, $a,b,c,k>0$;

3) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x}{h}$, $a,b,c,h>0$;

4) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, $a,b,c>0$;

5) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{z}{c}}=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

5. Знайти площу поверхні (P), що визначається умовами:

1) (P) – частина поверхні $z^2 = xy$, що відтинається площинами $x+y=1$, $x=0$, $y=0$;

2) (P) – частина сфери $x^2+y^2+z^2=9$, що міститься всередині циліндра $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

3) (P) – частина поверхні конуса $x^2+y^2-z^2=0$, що вирізається циліндром $x^2-2x+y^2=0$;

4) (P) – частина площини $x+y+z=4$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2=4$ і міститься в першому октанті;

5) (P) – частина поверхні $x^2+y^2+z^2=a^2$, що міститься поза циліндром $x^2+y^2=\pm ax$ (задача Вівіані);

6) (P) – частина поверхні параболоїда $x^2+y^2=2z$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2=1$;

7) (P) – частина поверхні $x^2+y^2=a^2$, що відтинається площинами $x+z=0$, $x-z=0$, $x>0$, $y>0$;

8) (P) – частина поверхні $x^2+y^2+z^2=4$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2=4(x^2-y^2)$;

9) (P) – частина поверхні $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+z=1$, яка відтинається площиною $z=0$;

10) (P) – частина поверхні гелікоїда $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=h\varphi$, де $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

6. Знайти площу перетину поверхні $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ площиною $x+y+z=0$.

7. Знайти площу перетину поверхні $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ площиною $z=1-2(x+y)$.

Приклади розв'язування вправ

1.11. Плоска фігура обмежена кривими $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $y=0$, $y=x$, $0<a<b$ зображена на рис. 8.

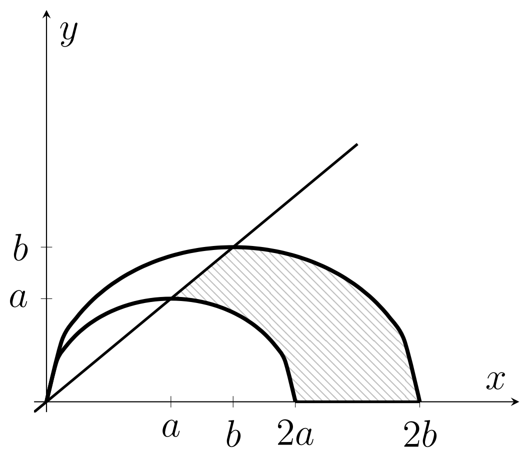

Рис. 8

Для спрощення обчислення площі плоскої фігури переходимо до полярної системи координат $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$

Отримаємо фігуру:

$$(P')=\{(r,\varphi):\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 2a\cos\varphi\leqslant r\leqslant 2b\cos\varphi\}.$$

Отже, за формулою обчислення площі плоскої фігури отримаємо:

$$P=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi}rdr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\Big|_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi}d\varphi=2(b^2-a^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$= 2(b^2 - a^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = (b^2-a^2)(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= (b^2-a^2)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{b^2-a^2}{4}\cdot(\pi+2) \quad \text{(кв. од.)}. \quad ▶$$

2.6. Оскільки крива, яка обмежує плоску фігуру, має вигляд $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{y}{b}} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $a > 0$, $b > 0$, то перейдемо до узагальнених полярних координат виду $\begin{cases} x = ar\cos^8\varphi, \\ y = br\sin^8\varphi. \end{cases}$

Тоді якобіан переходу

$$J(r,\varphi) = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^8\varphi & b\sin^8\varphi \\ 8ar\cos^7\varphi(-\sin\varphi) & 8br\sin^7\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= 8abr\sin^7\varphi\cos^9\varphi + 8abr\cos^7\varphi\sin^9\varphi = 8abr\sin^7\varphi\cos^7\varphi.$$

В новій системі координат (r,φ) плоска фігура (P) відобразиться на:

$$(P') = \{(r,\varphi):\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Тоді площа цієї фігури обчислюється за формулою

$$P = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 8abr\sin^7\varphi\cos^7\varphi dr = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi\cos^7\varphi d\varphi =$$

$$= 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi(1-\sin^2\varphi)^3 d(\sin\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\varphi = t, \\ t_1 = 0, \\ t_2 = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4ab\int\limits_0^1 t^7(1-3t^2+3t^4-t^6)dt = 4ab\int\limits_0^1 (t^7 - 3t^9 + 3t^{11} - t^{13})dt =$$

$$= 4ab\left(\frac{t^8}{8} - \frac{3t^{10}}{10} + \frac{t^{12}}{4} - \frac{t^{14}}{14}\right)\Big|_0^1 = 4ab\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14}\right) = \frac{ab}{70}\,\text{(кв. од.)}. \ ▶$$

3.18. Тіло, об'єм якого необхідно знайти, обмежене циліндричними поверхнями $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, площинами $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$, $z = 0$ та параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$. Тоді за формулою обчислення об'єму тіла отримаємо:

$$V = \iint\limits_{(P)} dxdy \int\limits_0^{x^2+y^2} dz = \iint\limits_{(P)} (x^2 + y^2)dxdy.$$

Для того, щоб обчислити інтеграл $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)dxdy$, зробимо заміну змінних $\begin{cases} xy = u, \\ \frac{y}{x} = v. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x = u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}, \\ y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$

Отже, якобіан переходу до нової системи координат (u, v) матиме вигляд:

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}u^{-1} - \frac{1}{4}u^{-1} = -\frac{1}{2}u^{-1}.$$

Область (P) в новій системі координат (u, v) відобразиться на:

$$(P') = \{(u,v) :\, a^2 \leqslant u \leqslant 2a^2,\, \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 2\}.$$

Отже,

$$V = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} dv \int\limits_{a^2}^{2a^2} (u^{-1}v + uv) \cdot \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} dv \int\limits_{a^2}^{2a^2} v\left(\frac{1}{u^2} + 1\right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} v\left(-\frac{1}{u} + u\right)\Big|_{a^2}^{2a^2} dv = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} v\left(-\frac{1}{2a^2} + 2a^2 + \frac{1}{a^2} - a^2\right) dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{2a^2}\right) \cdot \frac{v^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{2a^2}\right)\left(2 - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{15}{16}\left(a^2 + \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{15}{32a^2}(2a^4 + 1) \quad \text{(куб. од.)}. \quad \blacktriangleright$$

5.6. Для обчислення площі заданої поверхні скористаємося формулою:

$$P = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}dxdy,$$

де $(P) = \{(x,y) :\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $f'_x(x,y) = x$, $f'_y(x,y) = y$.

Тоді

$$P = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Перейдемо до полярної системи координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Тоді в новій системі координат область (P) відоразиться на:

$$(P') = \{(r, \varphi) : \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \, 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Отже,

$$P = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ y = r\sin\varphi, & 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1 + r^2} dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} (2\sqrt{2} - 1) d\varphi = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) \quad \text{(кв. од.)}. \quad \blacktriangleright$$

§ 2.6. Застосування кратних інтегралів у фізиці

1. Центр мас плоскої пластинки. Нехай $\varrho(x, y)$ – густина розподілу маси плоскої пластинки (P), що лежить на площині xOy. Тоді координати центра мас цієї пластинки (точка $C(x_0, y_0)$) обчислюється за формулами:

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y) x dxdy,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y) y dxdy,$$

де $m = \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y) dxdy$ – маса пластинки (P).

Зауважимо, що ***статичні моменти пластинки*** (P) відносно відповідних координатних осей виражаються формулами:

$$M_x = \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y) y dxdy, \quad M_y = \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y) x dxdy$$

2. Моменти інерції плоскої пластинки. Нехай $\varrho(x, y)$ – густина розподілу маси плоскої пластинки (P). Тоді ***моменти інерції пластинки*** (P) відносно відповідних осей Ox та Oy обчислюються за формулами:

$$I_x = \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y) y^2 dxdy, \quad I_y = \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y) x^2 dxdy.$$

Момент інерції плоскої пластинки (P) відносно початку координат виражається формулою:

$$I_0 = \iint\limits_{(P)} \varrho(x, y)(x^2 + y^2) dxdy.$$

3. Центр мас просторового тіла. Координати центра мас просторового тіла (V) (точка $C(x_0, y_0, z_0)$) з густиною розподілу маси $\varrho(x, y, z)$ обчислюються за формулами:

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) x dxdydz,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) y dxdydz,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) z dxdydz,$$

де $m = \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) dxdydz$ – маса тіла (V).

4. Моменти інерції тіла. Нехай $\varrho(x, y, z)$ – густина тіла (V). Тоді моменти інерції тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) z^2 dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) x^2 dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) y^2 dxdydz.$$

Момент інерції тіла відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} \varrho(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

Моменти інерції тіла (V) відносно координатних осей обчислюються за формулами:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

Очевидно, що

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

5. Потенціал поля тяжіння. Ньютоновим потенціалом тіла (V) в точці $P(x_0, y_0, z_0)$ називається величина

$$u(x_0,y_0,z_0) = \gamma \iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho(x,y,z)dxdydz}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

де γ – гравітаційна стала, $\varrho(x,y,z)$ – густина тіла (V).

6. Нехай $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – сила притягання матеріальної точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ масою m_0 матеріальним тілом (V). Тоді складові цієї сили обчислюються за формулами:

$$F_x = \gamma m_0 \iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho(x,y,z)(x-x_0)dxdydz}{\sqrt{\Big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\Big)^3}},$$

$$F_y = \gamma m_0 \iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho(x,y,z)(y-y_0)dxdydz}{\sqrt{\Big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\Big)^3}},$$

$$F_z = \gamma m_0 \iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho(x,y,z)(z-z_0)dxdydz}{\sqrt{\Big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\Big)^3}},$$

де $\varrho(x,y,z)$ – густина тіла (V), γ – гравітаційна стала.

Вправи

1. Знайти масу матеріальної пластинки (P), обмеженої заданими кривими і заданою густиною розподілу маси $\varrho(x,y)$:

1) $ay = x^2$, $x + y = 2a$, $a > 1$, $\varrho(x,y) = 1$;

2) $y^2 = x + 4$, $y^2 = 4 - x$, $y = 0$, $y \geqslant 0$, $\varrho(x,y) = y$;

3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$, $\varrho(x,y) = 1$;

4) $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 4y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\varrho(x,y) = x$;

5) $x^2 + y^2 = 4$, $\varrho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k > 0$;

6) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$, $\varrho(x,y) = 4x^2 + 9y^2$;

7) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\varrho(x,y) = x + y$;

8) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x > 0$, $y > 0$, $\varrho(x,y) = 1$;

9) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $x > 0$, $y > 0$, $\varrho(x,y) = 1$;

10) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$, $x \geqslant 0$, $\varrho(x,y) = x^2$.

2. Знайти координати центра мас однорідної матеріальної пластини (P), що визначається умовами:

1) (P) обмежена кривими $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$;

2) (P) обмежена кривими $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$;

3) (P) обмежена кривими $y = x^2$, $y^2 = x$;

4) (P) обмежена кривими $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

5) (P) обмежена кривими $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$;

6) (P) обмежена кривими $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

7) (P) обмежена кривою $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^3 = \dfrac{xy}{c^2}$;

8) (P) обмежена кривою $r = a(1 + \cos\varphi)$;

9) (P) обмежена кривою $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$;

10) (P) обмежена першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3. Знайти моменти інерції однорідної фігури (P):

1) відносно осей координат, якщо фігура (P) обмежена кривими $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$;

2) відносно осей координат, якщо (P) обмежена кривими $y^2=4x$, $x+y=3$, $y=0$;

3) відносно початку координат, якщо (P) обмежена прямими $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$, $x = 0$, $y=0$;

4) відносно осей координат, якщо (P) обмежена кривими $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$, $x>0$, $y>0$;

5) відносно осей координат і початку координат, якщо (P) обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

6) відносно полюса, якщо (P) обмежена кривою $r=a(1+\cos\varphi)$;

7) відносно осей координат, якщо фігура (P) обмежена кривою $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$;

8) відносно полюса, якщо (P) обмежена кривою $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

4. Знайти масу тіла (V), обмеженого даними поверхнями із густиною розподілу маси $\varrho(x,y,z)$:

1) $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$, $\varrho(x,y,z)=x+y+z$;

2) $x^2+y^2+z^2=4$, $\varrho(x,y,z)=2(2-\sqrt{x^2+y^2+z^2})$;

3) $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2+z^2=3$, $\varrho(x,y,z)=1$;

4) $x^2=2y$, $y+z=1$, $2y+z=2$, $\varrho(x,y,z)=y$;

5) $x^2+y^2+z^2=4$, $z=0$, $\varrho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

6) $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=4z$, $\varrho(x,y,z)=kz$, $k>0$.

5. Знайти координати центра мас однорідного тіла (V), обмеженого заданими поверхнями:

1) $z=0$, $x^2+y^2=2x$, $z=x^2+y^2$;

2) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

3) $z=x^2+y^2$, $y^2=4x$, $x=1$, $z=0$;

4) $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$;

5) $z=x^2+y^2$, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

6) $z=\dfrac{y^2}{2}$, $2x+3y-12=0$, $x=0$, $z=0$;

7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

8) $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$, $z \geqslant 0$;

9) $x^2=2z$, $z^2=2x$, $x=\dfrac{1}{2}$, $z=0$;

10) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{xyz}{abc}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

6. Знайти моменти інерції однорідного тіла (V):

1) відносно координатних площин, якщо (V) обмежене поверхнями $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) відносно координатних площин, якщо (V) обмежене поверхнею $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

3) відносно координатних площин, якщо (V) обмежене поверхнями $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{a}$;

4) відносно координатних площин, якщо (V) обмежене поверхнями $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, $z=c$;

5) відносно координатних площин, якщо (V) обмежене поверхнею $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$;

6) відносно осі Oz, якщо (V) обмежене поверхнями $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$, $z>0$;

7) відносно осі Oz, якщо (V) обмежене поверхнями $z=x^2+y^2$, $x+y=\pm 1$, $x-y=\pm 1$, $z=0$;

8) відносно осі Oz, якщо (V) обмежене поверхнями $z=0$, $y=\pm a$, $z=\dfrac{h}{a^2}(y^2-x^2)$;

9) відносно осі Oz, якщо (V) обмежене поверхнею $(x^2+y^2+z^2)^3=a^5 z$;

10) відносно початку координат, якщо (V) обмежене поверхнею $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$.

7. Знайти ньютоновий потенціал матеріального тіла (V) у заданій точці M_0:

1) (V) – однорідне тіло, обмежене еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$, $b>0$, $M_0(0,0,0)$;

2) (V) – верхня половина однорідної кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$, $M_0(0,0,z_0)$;

3) (V) – однорідний конус з радіусом основи r і висотою h, $M_0(x_0,y_0,z_0)$;

4) (V) – сферичний шар $a^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant b^2$, $\varrho(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

8. Прямий круговий циліндр, радіус основи якого a, а висота b, цілком занурений в рідину густини $\varrho(x,y,z)$ так, що центр його знаходиться на глибині h під поверхнею води, а вісь циліндра утворює кут α з вертикаллю. Визначити тиск рідини на нижню і верхню основи циліндра.

9. Визначити, з якою силою притягує однорідний циліндр $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, матеріальну точку $M(0,0,b)$, якщо маса циліндра дорівнює m, а маса матеріальної точки m_0.

10. З якою силою притягує однорідна куля $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ масою M матеріальну точку $A(0,0,a)$ масою m.

11. Знайти силу, з якою однорідний конус з радіусом основи R та висотою H притягує матеріальну точку одиничної маси, що міститься в його вершині.

12. З якою силою притягує однорідний циліндр $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, густиною $\varrho(x,y,z)$ матеріальну точку $A(0,0,z)$ одиничної маси.

Приклади розв'язування вправ

2.6. Оскільки плоска пластинка (P) є однорідною, то вважаємо, що $\varrho(x,y)=1$. Плоска фігура (P), центр мас якої потрібно знайти, зображена на рис. 9.

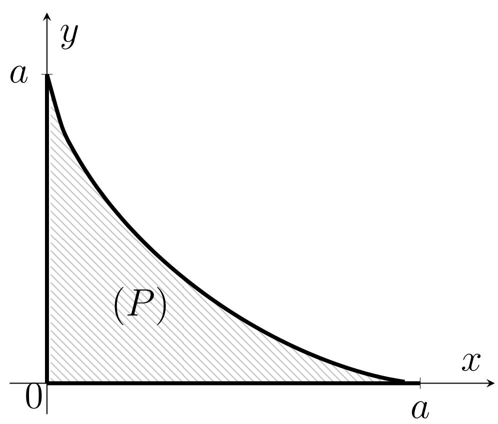

Рис. 9

Перейдемо до узагальнених полярних координат $\begin{cases} x = r\cos^3\varphi, \\ y = r\sin^3\varphi. \end{cases}$

Тоді в новій системі координат (r, φ) плоска фігура (P) відобразиться на:

$$(P') = \{(r,\varphi) :\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant a\},$$

а якобіан переходу

$$J(r,\varphi) = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & \sin^3\varphi \\ -3r\cos^2\varphi\sin\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

Спочатку знайдемо масу заданої пластинки:

$$m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi dr = \frac{3}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \frac{3}{8}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{3}{8}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{16}a^2 \left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

Далі обчислюємо статичні моменти плоскої пластинки (P) відносно осей координат:

$$M_x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi \cdot r\sin^3\varphi dr = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= -a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^2\varphi d(\cos\varphi) = -a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\varphi)^2\cos^2\varphi d(\cos\varphi) =$$

$$= -a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\varphi - 2\cos^4\varphi + \cos^6\varphi\right) d(\cos\varphi) =$$

$$= -a^3 \left(\frac{\cos^3\varphi}{3} - \frac{2}{5}\cos^5\varphi + \frac{1}{7}\cos^7\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -a^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{105}a^3,$$

$$M_y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi \cdot r\cos^3\varphi dr = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^4\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi) = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi + \sin^6\varphi\right) d(\sin\varphi) =$$

$$= a^3 \left(\frac{\sin^3\varphi}{3} - \frac{2}{5}\sin^5\varphi + \frac{1}{7}\sin^7\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{105}a^3.$$

Тоді

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{8}{105}a^3}{\frac{3\pi}{32}a^2} = \frac{256}{315\pi}a, \qquad y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{8}{105}a^3}{\frac{3\pi}{32}a^2} = \frac{256}{315\pi}a.$$

Отже, точка $C\Big(\dfrac{256}{315\pi}a, \dfrac{256}{315\pi}a\Big)$– центр мас плоскої пластинки (P). ▶

6.10. Без зменшення загальності вважаємо, що $\varrho(x,y,z) = 1$, оскільки тіло (V) за умовою однорідне.

Перейдемо до сферичної системи координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ з якобіаном переходу $J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\theta$.

Тоді тіло (V) в новій системі координат відобразиться на:

$$(V') = \{(r,\varphi,\theta) : \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant r \leqslant a\sin\theta\}.$$

Враховуючи перехід до сферичної системи координат, обчислюємо момент інерції тіла (V) відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \\ J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\theta \end{array} \right| =$$

$$= \iiint\limits_{(V')} r^2 \cdot r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{a\sin\theta} r^4 \sin\theta dr = \frac{a^5}{5} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^6\theta d\theta =$$

$$= \frac{2\pi a^5}{5} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^3 d\theta = \frac{\pi a^5}{20} \int\limits_0^{\pi} (1 - 3\cos 2\theta + 3\cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta) d\theta =$$

$$= \frac{\pi a^5}{20}\Big((\theta - \frac{3}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^\pi + \frac{3}{2}\int_0^\pi (1+\cos 4\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\sin^2 2\theta)d(\sin 2\theta)\Big) =$$

$$= \frac{\pi a^5}{20}\left(\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{\pi^2 a^5}{8}. \quad \blacktriangleright$$

7.4. Для зручності повернемо систему координат таким чином, щоб вісь Oz системи координат $x_1y_1z_1$ проходила через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тоді ньютоновий потенціал обчислюємо за формулою:

$$u(x_0,y_0,z_0) = u_1(0,0,d) = \iiint\limits_{a^2 \leqslant x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leqslant b^2} \frac{f(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2})}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+(z_1-z_0)^2}} dx_1dy_1dz_1,$$

де $d = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

Перейдемо до сферичної системи координат. Тоді $0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a \leqslant r \leqslant b$, $J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\theta$.

Отже,

$$u(x_0,y_0,z_0) = \int_a^b r^2 f(r)dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rd\cos\theta + d^2}} =$$

$$= 2\pi \int_a^b r^2 f(r) \frac{\sqrt{r^2-2rd\cos\theta+d^2}}{rd}\Bigg|_0^\pi dr = \frac{2\pi}{d}\int_a^b rf(r)(r+d-|d-r|)dr =$$

$$= \begin{cases} 4\pi \int\limits_a^b rf(r)dr, & \text{якщо } r > d, \\ \frac{4\pi}{d} \int\limits_a^b r^2 f(r)dr, & \text{якщо } r < d, \end{cases}$$

де $d = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. $\blacktriangleright$

Індивідуальні завдання до розділу II

1. Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах:

1) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$;

2) $$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx;$$

3) $$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx;$$

4) $$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx;$$

5) $$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_x^0 f(x,y)dy;$$

6) $$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)dx;$$

7) $$\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_0^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx;$$

8) $$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx;$$

9) $$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy;$$

10) $$\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y)dy;$$

11) $$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^1 f(x,y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy;$$

12) $$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx;$$

13) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)dx;$$

14) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy;$

15) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx;$

16) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

17) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

18) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx;$

19) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy;$

20) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx;$

21) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx;$

22) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy;$

23) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)dy;$

24) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx;$

25) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^3} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)dy.$

2. Обчислити подвійні інтеграли по області (D), обмеженій кривими:

1) $\iint\limits_{(D)} (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x};$

2) $\iint\limits_{(D)} (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2;$

3) $\iint\limits_{(D)} (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3;$

4) $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x};$

5) $\iint\limits_{(D)} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x};$

6) $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2;$

7) $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x};$

8) $\iint\limits_{(D)} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3;$

9) $\iint\limits_{(D)} (4xy + 3x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x};$

10) $\iint\limits_{(D)} (12xy + 9x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2;$

11) $\iint\limits_{(D)} (8xy + 9x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3;$

12) $\iint\limits_{(D)} (24xy + 18x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x};$

13) $\iint\limits_{(D)} (12xy + 27x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x};$

14) $\iint\limits_{(D)} (8xy + 18x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2;$

15) $\iint\limits_{(D)} \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;\ (D):\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x};$

16) $\iint\limits_{(D)} \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3;$

17) $\iint\limits_{(D)} (24xy - 48x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x};$

18) $\iint\limits_{(D)} (6xy + 24x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2;$

19) $\iint\limits_{(D)} (4xy + 16x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3;$

20) $\iint\limits_{(D)} (4xy + 16x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x};$

21) $\iint\limits_{(D)} (44xy + 16x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x};$

22) $\iint\limits_{(D)} (4xy + 17x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2;$

23) $\iint\limits_{(D)} (xy - 4x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x};$

24) $\iint\limits_{(D)} (4xy + 17x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3;$

25) $\iint\limits_{(D)} \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

3. Обчислити подвійні інтеграли по області (D), обмеженій кривими:

1) $\iint\limits_{(D)} ye^{\frac{xy}{2}}dxdy;\ (D):\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4;$

2) $\iint\limits_{(D)} y^2 \sin\frac{xy}{2}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2};$

3) $\iint\limits_{(D)} y\cos xy dxdy;\ (D):\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2;$

4) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{4}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=2,\ y=x;$

5) $\iint\limits_{(D)} y\sin xy dxdy;\ (D):\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2;$

6) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=\frac{x}{2};$

7) $\iint\limits_{(D)} 4ye^{2xy}dxdy;\ (D):\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{2},\ x=1;$

8) $\iint\limits_{(D)} 4y^2\sin xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x;$

9) $\iint\limits_{(D)} y\cos 2xydxdy;\ (D):\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1;$

10) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{8}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=2,\ y=\frac{x}{2};$

11) $\iint\limits_{(D)} 12y\sin 2xydxdy;\ (D):\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=2,\ x=3;$

12) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos 2dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x;$

13) $\iint\limits_{(D)} ye^{\frac{xy}{4}}dxdy;\ (D):\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8;$

14) $\iint\limits_{(D)} 4y^2\sin 2xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x;$

15) $\iint\limits_{(D)} 12y\cos 2xydxdy;\ (D):\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=1,\ x=2;$

16) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{2}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{2},\ y=x;$

17) $\iint\limits_{(D)} y\sin xydxdy;\ (D):\ y=\pi,\ y=2\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1;$

18) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos 2xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=\frac{x}{2};$

19) $\iint\limits_{(D)} 8ye^{4xy}dxdy;\ (D):\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{2};$

20) $\iint\limits_{(D)} 3y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},\ y=\frac{2x}{3};$

21) $\iint\limits_{(D)} y\cos xydxdy;\ (D):\ y=\pi,\ y=3\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1;$

22) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{2}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=1,\ y=\dfrac{x}{2};$

23) $\iint\limits_{(D)} y\sin 2xydxdy;\ (D):\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{3\pi}{2},\ x=\dfrac{1}{2},\ x=2;$

24) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x;$

25) $\iint\limits_{(D)} 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy;\ (D):\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=3,\ x=6.$

4. Обчислити потрійні інтеграли по області (V), обмеженій поверхнями:

1) $\iiint\limits_{(V)} 2y^2e^{xy}dxdydz;\ (V):\ x=0,\, y=1,\, y=x,\, z=0,\, z=1;$

2) $\iiint\limits_{(V)} x^2z\sin(xyz)dxdydz;\ (V):\ x=2,\, y=\pi,\, z=1,\, x=0,\, y=0,$ $z=0;$

3) $\iiint\limits_{(V)} y^2\mathrm{ch}\,(2xy)dxdydz;\ (V):\ x=0,\, y=-2,\, y=4x,\, z=0,\, z=2;$

4) $\iiint\limits_{(V)} 8y^2ze^{2xyz}dxdydz;\ (V):\ x=-1,\, y=2,\, z=1,\, x=0,\, y=0,\, z=0;$

5) $\iiint\limits_{(V)} x^2\mathrm{sh}\,(3xy)dxdydz;\ (V):\ x=1,\, y=2x,\, y=0,\, z=0,\, z=36;$

6) $\iiint\limits_{(V)} y^2z\cos(xyz)dxdydz;\ (V):\ x=1,\, y=\pi,\, z=2,\, x=0,\, y=0,$ $z=0;$

7) $\iiint\limits_{(V)} y^2\cos\big(\dfrac{\pi xy}{4}\big)dxdydz;\ (V):\ x=0,\, y=-1,\, y=\dfrac{x}{2},\, z=0,\, z=-\pi^2;$

8) $\iiint\limits_{(V)} x^2z\sin\big(\dfrac{xyz}{4}\big)dxdydz;\ (V):\ x=1,\, y=2\pi,\, z=4,\, x=0,$ $y=0,\, z=0;$

9) $\iiint\limits_{(V)} y^2e^{-xy}dxdydz;\ (V):\ x=0,\, y=-2,\, y=4x,\, z=0,\, z=1;$

10) $\iiint\limits_{(V)} 2y^2 z e^{xyz} dxdydz$; $(V): x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

11) $\iiint\limits_{(V)} y^2 \text{ch}\,(2xy) dxdydz$; $(V): x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 8$;

12) $\iiint\limits_{(V)} x^2 z\,\text{sh}\,(xyz) dxdydz$; $(V): x = 2, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

13) $\iiint\limits_{(V)} y^2 e^{\frac{xy}{2}} dxdydz$; $(V): x = 0, y = 2, y = 2x, z = 0, z = -1$;

14) $\iiint\limits_{(V)} y^2 z \cos\big(\frac{xyz}{3}\big) dxdydz$; $(V): x = 3, y = 1, z = 2\pi, x = 0, y = 0, z = 0$;

15) $\iiint\limits_{(V)} y^2 \cos\big(\frac{\pi xy}{2}\big) dxdydz$; $(V): x = 0, y = -1, y = x, z = 0, z = 2\pi^2$;

16) $\iiint\limits_{(V)} 2x^2 z\,\text{sh}\,(xyz) dxdydz$; $(V): x = 1, y = -1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

17) $\iiint\limits_{(V)} y^2 \cos(\pi xy) dxdydz$; $(V): x = 0, y = 1, y = 2x, z = 0, z = \pi^2$;

18) $\iiint\limits_{(V)} 2x^2 z\,\text{sh}\,(2xyz) dxdydz$; $(V): x = 2, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}, x = 0, y = 0, z = 0$;

19) $\iiint\limits_{(V)} x^2 \text{sh}\,(2xy) dxdydz$; $(V): x = -1, y = x, y = 0, z = 0, z = 8$;

20) $\iiint\limits_{(V)} x^2 z \sin\big(\frac{xyz}{2}\big) dxdydz$; $(V): x = 1, y = 4, z = \pi, x = 0, y = 0, z = 0$;

21) $\iiint\limits_{(V)} y^2 \text{ch}\,(xy) dxdydz$; $(V): x = 0, y = -1, y = x, z = 0, z = 2$;

22) $\iiint\limits_{(V)} y^2 z\,\text{ch}\,(xyz) dxdydz$; $(V): x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

23) $\iiint\limits_{(V)} y^2 \cos\big(\dfrac{\pi xy}{2}\big) dxdydz;\ (V):\ x=2,\ y=x,\ y=0,\ z=0,\ z=\pi;$

24) $\iiint\limits_{(V)} y^2 z \cos\big(\dfrac{xyz}{9}\big) dxdydz;\ (V):\ x=9,\ y=1,\ z=2\pi,\ x=0,$ $y=0,\ z=0;$

25) $\iiint\limits_{(V)} x^2 \sin(\pi xy) dxdydz;\ (V):\ x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=4\pi.$

5. Обчислити потрійний інтеграл по області (V), обмеженій поверхнями:

1) $\iiint\limits_{(V)} xdxdydz;\ (V):\ y=10x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0;$

2) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8})^4};\ (V):\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

3) $\iiint\limits_{(V)} 15(y^2+z^2) dxdydz;\ (V):\ z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

4) $\iiint\limits_{(V)} (3x+4y) dxdydz;\ (V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=5(y^2+z^2),\ z=0;$

5) $\iiint\limits_{(V)} (1+2x^3) dxdydz;\ (V):\ y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0;$

6) $\iiint\limits_{(V)} (27+54y^3) dxdydz;\ (V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0;$

7) $\iiint\limits_{(V)} ydxdydz;\ (V):\ y=15x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0;$

8) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3})^5};\ (V):\ \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

9) $\iiint\limits_{(V)} (3x^2+y^2) dxdydz;\ (V):\ z=10y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

10) $\iiint\limits_{(V)} (15x+30z) dxdydz;\ (V):\ z=5(x^2+3y^2),\ z=0,\ y=x,$ $y=0,\ x=1;$

11) $\iiint\limits_{(V)} (4+8z^3) dxdydz;\ (V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0;$

12) $\iiint\limits_{(V)}(1+2x^3)dxdydz;\ (V):\ y=36x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0;$

13) $\iiint\limits_{(V)}21xzdxdydz;\ (V):\ y=5x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0;$

14) $\iiint\limits_{(V)}\dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3})^6};\ (V):\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

15) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+3y^2)dxdydz;\ (V):\ z=10x,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

16) $\iiint\limits_{(V)}(60y+90z)dxdydz;\ (V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0;$

17) $\iiint\limits_{(V)}\Big(\dfrac{10}{3}x+\dfrac{5}{3}\Big)dxdydz;\ (V):\ y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0;$

18) $\iiint\limits_{(V)}(1+2x^3)dxdydz;\ (V):\ y=4x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0;$

19) $\iiint\limits_{(V)}3y^2dxdydz;\ (V):\ y=2x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0;$

20) $\iiint\limits_{(V)}\dfrac{dxdydz}{\big(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\big)^4};\ (V):\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

21) $\iiint\limits_{(V)}x^2dxdydz;\ (V):\ z=10(x+3y),\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

22) $\iiint\limits_{(V)}(8y+12z)dxdydz;\ (V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=3x^2+2y^2,\ z=0;$

23) $\iiint\limits_{(V)}(1+2\sqrt{y})dxdydz;\ (V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0;$

24) $\iiint\limits_{(V)}(x+y)dxdydz;\ (V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=30x^2+60y^2,\ z=0;$

25) $\iiint\limits_{V}\dfrac{dxdydz}{\big(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\big)^4};\ (V):\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

6. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями:

1) $y=\dfrac{3}{x},\ y=4e^x,\ y=3,\ y=4;$

2) $x=\sqrt{36-y^2},\ x=6-\sqrt{36-y^2};$

3) $x^2 + y^2 = 72,\ 6x = -x^2,\ (y \leqslant 0);$

4) $x = 8 - y^2,\ x = -2y;$

5) $y = \dfrac{3}{x},\ y = 8e^x,\ y = 3,\ y = 8;$

6) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y = \dfrac{1}{2x},\ x = 16;$

7) $x = 5 - y^2,\ x = -4y;$

8) $x^2 + y^2 = 12,\ -\sqrt{6}y = x^2,\ (y \leqslant 0);$

9) $y = \sqrt{12 - x^2},\ y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2},\ x = 0,\ (x \geqslant 0);$

10) $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2},\ y = \dfrac{3}{2x},\ x = 9;$

11) $y = \sqrt{24 - x^2},\ 2\sqrt{3}y = x^2,\ x = 0,\ (x \geqslant 0);$

12) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ (x \geqslant 0);$

13) $y = 20 - x^2,\ y = -8x;$

14) $y = \sqrt{18 - x^2},\ y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2};$

15) $y = 32 - x^2,\ y = -4x;$

16) $y = \dfrac{2}{x},\ y = 5e^x,\ y = 2,\ y = 5;$

17) $x^2 + y^2 = 36,\ 2\sqrt{3}y = x^2,\ (y \geqslant 0);$

18) $y = 3\sqrt{x},\ y = \dfrac{3}{x},\ x = 4;$

19) $y = 6 - \sqrt{36 - x^2},\ y = \sqrt{36 - x^2},\ x = 0,\ (x \geqslant 0);$

20) $y = \dfrac{25}{4} - x^2,\ y = x - \dfrac{5}{2};$

21) $y = \sqrt{x},\ y = \dfrac{1}{x},\ x = 16;$

22) $y = \dfrac{2}{x},\ y = 7e^x,\ y = 2,\ y = 7;$

23) $x = 27 - y^2,\ x = -6y;$

24) $x = \sqrt{72 - y^2},\ 6x = y^2,\ y = 0,\ (y \geqslant 0);$

25) $y = \sqrt{6 - x^2},\ y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}.$

7. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

3) $y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

4) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x;$

5) $y^2-8y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$

6) $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x;$

7) $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=x,\ y=0;$

8) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x;$

9) $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x,\ y=0;$

10) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$

11) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ x=0;$

12) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$

13) $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ x=0;$

14) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$

15) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x=0;$

16) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

17) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$

18) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

19) $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$

20) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=x;$

21) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x,\ y=0;$

22) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x;$

23) $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ y=0;$

24) $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x;$

25) $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ y=0.$

8. Пластинка (D) задана кривими, що її обмежують, μ – поверхнева густина. Знайти масу пластинки.

1) $(D):\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=7x^2+y;$

2) $(D):\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\, y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{x+y}{x^2+y^2};$

3) $(D):\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+5y;$

4) $(D):\ x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\, y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2};$

5) $(D): \ x=2,\ y=0,\ y^2=2x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{8}+2y;$

6) $(D): \ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{x+y}{x^2+y^2};$

7) $(D): \ x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2},\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+6y;$

8) $(D): \ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);\ \mu=\dfrac{x-y}{x^2+y^2};$

9) $(D): \ x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=x+3y^2;$

10) $(D): \ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);\ \mu=\dfrac{x-y}{x^2+y^2};$

11) $(D): \ x=1,\ y=0,\ y^2=x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=3x+6y^2;$

12) $(D): \ x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0,\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{2y-x}{x^2+y^2};$

13) $(D): \ x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2},\ (y\geqslant 0);\ \mu=2x+3y^2;$

14) $(D): \ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{2y-3x}{x^2+y^2};$

15) $(D): \ x=\dfrac{1}{2},\ y=0,\ y^2=8x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=7x+3y^2;$

16) $(D): \ x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{2y-5x}{x^2+y^2};$

17) $(D): \ x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=7x^2+2y;$

18) $(D): \ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2};$

19) $(D): \ x=2,\ y=0,\ y^2=2x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{4}+\dfrac{y}{2};$

20) $(D): \ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2};$

21) $(D): \ x=2,\ y=0,\ y^2=2x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{4}+y;$

22) $(D): \ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);\ \mu=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2};$

23) $(D): \ x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2},\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+8y;$

24) $(D): \ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);\ \mu=\dfrac{x-4y}{x^2+y^2};$

25) $(D): \ x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=6x+3y^2.$

9. Пластинка (D) задана нерівностями, μ – поверхнева густина. Знайти масу пластинки.

1) $(D): \ x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1;\ \mu=y^2;$

2) $(D): \ 1\leqslant \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 2,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant \dfrac{2}{3}x;\ \mu=y^2;$

3) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=x^2y;$

4) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=\dfrac{7}{18}x^2y;$

5) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{x}{2};\ \mu=8yx^{-3};$

6) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0;\ \mu=7xy^6;$

7) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1;\ \mu=4y^4;$

8) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{3x}{2};\ \mu=xy^{-1};$

9) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{x}{2};\ \mu=xy^{-1};$

10) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=x^3y;$

11) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=6x^3y^3;$

12) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 25,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{x}{2};\ \mu=xy^{-3};$

13) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1;\ \mu=x^2y^2;$

14) $(D):\ \dfrac{x^2}{16}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=5xy^7;$

15) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=30x^3y^7;$

16) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 3,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{2}{3}x;\ \mu=\dfrac{y}{x};$

17) $(D):\ x^2+\dfrac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=7x^4y;$

18) $(D):\ x^2+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=35x^4y^3;$

19) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1;\ \mu=x^2;$

20) $(D):\ 1\leqslant x^2+\dfrac{y^2}{16}\leqslant 9,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant 4x;\ \mu=yx^{-3};$

21) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0;\ \mu=11xy^8;$

22) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}\leqslant 5,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 2x;\ \mu=\dfrac{x}{y};$

23) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 5,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant\dfrac{2x}{3};\ \mu=\dfrac{x}{y};$

24) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=x^5y;$

25) $(D): \ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}\leqslant 1;\ \mu=x^4.$

10. Знайти об'єм тіла (V), обмеженого поверхнями:

1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ \dfrac{9z}{2}=x^2+y^2;$
2) $z=7,5\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=8,5-x^2-y^2;$
3) $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}};$
4) $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\ z=1,\ x^2+y^2=60,\ (x^2+y^2\leqslant 60);$
5) $z=\sqrt{\dfrac{16}{9}-x^2-y^2},\ 2z=x^2+y^2;$
6) $z=3\sqrt{x^2+y^2},\ z=10-x^2-y^2;$
7) $z=\sqrt{25-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}};$
8) $z=\sqrt{100-x^2-y^2},\ z=6,\ x^2+y^2=51,\ (x^2+y^2\leqslant 51);$
9) $z=10,5\sqrt{x^2+y^2},\ z=\dfrac{23}{2}-x^2-y^2;$
10) $z=\sqrt{16-x^2-y^2},\ 6z=x^2+y^2;$
11) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{80}};$
12) $z=\sqrt{81-x^2-y^2},\ z=5,\ x^2+y^2=45,\ (x^2+y^2\leqslant 45);$
13) $z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ \dfrac{3z}{2}=x^2+y^2;$
14) $z=6\sqrt{x^2+y^2},\ z=16-x^2-y^2;$
15) $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}};$
16) $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\ z=4,\ x^2+y^2=39,\ (x^2+y^2\leqslant 39);$
17) $z=\sqrt{144-x^2-y^2},\ 18z=x^2+y^2;$
18) $z=1,5\sqrt{x^2+y^2},\ z=\dfrac{5}{2}-x^2-y^2;$
19) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}};$
20) $z=\sqrt{49-x^2-y^2},\ z=3,\ x^2+y^2=33,\ (x^2+y^2\leqslant 33);$
21) $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ 9z=x^2+y^2;$
22) $z=9\sqrt{x^2+y^2},\ z=22-x^2-y^2;$
23) $z=\sqrt{16-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}};$
24) $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ z=2,\ x^2+y^2=27,\ (x^2+y^2\leqslant 27);$
25) $z=\sqrt{\dfrac{4}{9}-x^2-y^2},\ z=x^2+y^2.$

11. Знайти об'єм тіла (V), обмеженого поверхнями:

1) $z = 2 - 12(x^2 + y^2),\ z = 24x + 2;$

2) $z = 10((x-1)^2 + y^2) + 1,\ z = 21 - 20x;$

3) $z = 10(x^2 + y^2) + 3,\ z = 16x + 3;$

4) $z = 2 - 20((x+1)^2 + y^2),\ z = -40x - 38;$

5) $z = 4 - 14(x^2 + y^2),\ z = 4 - 28x;$

6) $z = 28((x+1)^2 + y^2) + 3,\ z = 56x + 59;$

7) $z = 32(x^2 + y^2) + 3,\ z = 3 - 64x;$

8) $z = 4 - 6((x-1)^2 + y^2),\ z = 12x - 8;$

9) $z = 2 - 4(x^2 + y^2),\ z = 8x + 2;$

10) $z = 22((x+1)^2 + y^2) + 3,\ z = 47 - 44x;$

11) $z = 24(x^2 + y^2) + 1,\ z = 48x + 1;$

12) $z = 2 - 18((x+1)^2 + y^2),\ z = -36x - 34;$

13) $z = -16(x^2 + y^2) - 1,\ z = -32x - 1;$

14) $z = 30((x+1)^2 + y^2) + 1,\ z = 60x + 61;$

15) $z = 26(x^2 + y^2) - 2,\ z = -52x - 2;$

16) $z = -2((x+1)^2 + y^2) - 1,\ z = 4x - 5;$

17) $z = -2(x^2 + y^2) - 1,\ z = -4y - 1;$

18) $z = 26((x-1)^2 + y^2) - 2,\ z = 50 - 52x;$

19) $z = 30(x^2 + y^2) + 1,\ z = 60y + 1;$

20) $z = -16((x+1)^2 + y^2) - 1,\ z = -32x - 33;$

21) $z = 2 - 18(x^2 + y^2),\ z = 2 - 36y;$

22) $z = 24((x+1)^2 + y^2) + 1,\ z = 48x + 49;$

23) $z = 22(x^2 + y^2) + 3,\ z = 3 - 44y;$

24) $z = 2 - 4((x-1)^2 + y^2),\ z = 8x - 6;$

25) $z = 4 - 6(x^2 + y^2),\ z = 12y + 4.$

12. Знайти об'єм тіла (V), заданого нерівностями:

1) $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 49,\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{35}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}},\ -x \leqslant y \leqslant 0;$

2) $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -\sqrt{3x} \leqslant y \leqslant 0;$

3) $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,\ z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant 0;$

4) $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 36,\ z \geqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},\ 0 \leqslant y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

5) $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 36,\ z \geqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ -\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

6) $25 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100,\ z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ -\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

7) $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 49,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},\ y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant -\sqrt{3}x;$

8) $25 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 121,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

9) $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ x \leqslant y \leqslant 0;$

10) $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100,\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ \sqrt{3}x \leqslant y \leqslant 0;$

11) $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100,\ z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

12) $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,\ z \geqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x;$

13) $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 49,\ z \geqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \leqslant 0,\ y \leqslant \sqrt{3}x;$

14) $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 121,\ z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \geqslant \sqrt{3}x,\ y \geqslant 0;$

15) $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},\ y \leqslant \sqrt{3}x,\ y \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

16) $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0,\ y \geqslant \sqrt{3}x,\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

17) $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}},\ 0 \leqslant y \leqslant -x;$

18) $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}},\ 0 \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x;$

19) $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,\ z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ \sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

20) $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100,\ z \geqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

21) $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64,\ z \geqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

22) $49 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144,\ z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \geqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

23) $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},\ y \leqslant 0,\ y \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

24) $49 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 169,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

25) $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}},\ 0 \leqslant y \leqslant x$.

13. Тіло (V) задано поверхнями, які його обмежують. Знайти масу тіла, якщо $\varrho(x,y,z)$ – густина тіла.

1) $64(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ y=0,\ z=0,\ (y \geqslant 0, z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=\dfrac{5}{4}(x^2+y^2)$;

2) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1,\ (x^2+y^2 \leqslant 1),\ x=0,\ (x \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=4|z|$;

3) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=10x$;

4) $x^2+y^2=\dfrac{16}{49}z^2,\ x^2+y^2=\dfrac{4}{7}z,\ x=0,\ y=0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=80yz$;

5) $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=20z$;

6) $36(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ z=0,\ (x \geqslant 0, z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=\dfrac{5}{6}(x^2+y^2)$;

7) $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4,\ (x^2+y^2 \leqslant 4);\ \varrho(x,y,z)=2|z|$;

8) $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=8z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=5x$;

9) $x^2+y^2=\dfrac{2}{25}z^2,\ x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z,\ x=0,\ y=0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=28xz$;

10) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ x=0,\ y=0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=6z$;

11) $25(x^2+y^2) = z^2$, $x^2+y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 2(x^2+y^2)$;

12) $x^2+y^2+z^2 = 9$, $x^2+y^2 = 4$, $(x^2+y^2 \leqslant 4)$, $y = 0$, $(y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = |z|$;

13) $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 6z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 90y$;

14) $x^2+y^2 = \dfrac{z^2}{25}$, $x^2+y^2 = \dfrac{z}{5}$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 14yz$;

15) $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x^2+y^2 = 9z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 10z$;

16) $9(x^2+y^2) = z^2$, $x^2+y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = \dfrac{5}{3}(x^2+y^2)$;

17) $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x^2+y^2 = 1$, $(x^2+y^2 \leqslant 1)$; $\varrho(x,y,z) = 6|z|$;

18) $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 10x$;

19) $x^2+y^2 = \dfrac{z^2}{49}$, $x^2+y^2 = \dfrac{z}{7}$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 10xz$;

20) $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x^2+y^2 = 4z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 10z$;

21) $16(x^2+y^2) = z^2$, $x^2+y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 5(x^2+y^2)$;

22) $x^2+y^2+z^2 = 16$, $x^2+y^2 = 4$, $(x^2+y^2 \leqslant 4)$; $\varrho(x,y,z) = |z|$;

23) $x^2+y^2 = 4$, $x^2+y^2 = 4z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 5y$;

24) $x^2+y^2 = \dfrac{z^2}{49}$, $x^2+y^2 = \dfrac{z}{7}$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 10xz$;

25) $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2 = z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z) = 32z$.

РОЗДІЛ III. Поверхневі інтеграли

§ 3.1. Поверхневі інтеграли першого роду

Множину $(S)=\{(x,y,z) : x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v), (u,v) \in (P)\}$, де функції x, y, z неперервні разом з частинними похідними першого порядку у замкненій квадрованій області (P) та $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, де

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix},$$

називають ***гладкою поверхнею***.

Вектор виду

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

називається ***вектором нормалі***, що задає верхню (зовнішню) сторону поверхні (S^+). Протилежний вектор $-\vec{n}$ задає нижню (внутрішню) сторону поверхні (S^-). В такому випадку поверхня (S) називається ***двосторонньою***.

Довжину і напрямні косинуси вектора нормалі $\vec{n}$ обчислюють відповідно за формулами:

$$|\vec{n}| = \sqrt{EG - F^2},$$
$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}) = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}},$$
$$\cos\beta = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}) = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}}) = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}},$$

де $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$, $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$, $F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'$.

Нехай в точках деякої двосторонньої гладкої (або кусково-гладкої) поверхні (S), обмеженої кусково-гладким контуром, визначена функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо поверхню (S) за допомогою сітки кусково-гладких кривих на частинки $(S_1),\dots,(S_n)$ і виберемо в кожній з частинок довільним чином точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=\overline{1,n}$, та обчислимо значення $f(x_i,y_i,z_i)$. Складемо суму виду $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)S_i$, де S_i – площа поверхні (S_i).

Якщо існує скінченна границя цієї суми при прямуванні максимального з діаметрів λ областей (S_i) до нуля, то вона називається ***поверхневим інтегралом першого роду від функції*** $f(x,y,z)$ ***по поверхні*** (S) і позначається

$$I = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS.$$

Якщо функція $f(x,y,z)$ визначена і неперервна на гладкій поверхні

$$(S) = \{(x,y,z):\ x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v)\in(P)\},$$

то виконується рівність

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{(P)} f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

при умові, що існує хоча б один з інтегралів.

Зокрема, якщо поверхню (S) задано рівнянням $z = z(x,y)$, $(x,y)\in(P')$, де (P') – проекція поверхні (S) на площину xOy, то попередня формула перепишеться у виді

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{(P')} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+\left(z_x'(x,y)\right)^2+\left(z_y'(x,y)\right)^2}dxdy.$$

Подібні формули можна отримати, якщо поверхня (S) задається рівнянням $x = x(y,z)$, $(y,z)\in(P'')$ або $y = y(x,z)$, $(x,z)\in(P''')$.

Зауважимо, що оскільки поверхневий інтеграл першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла, то властивості подвійного інтеграла за аналогією переносяться і на поверхневий інтеграл першого роду (див. § 2.1).

Вправи

1. Обчислити поверхневі інтеграли першого роду:

1) $\iint\limits_{(S)} z dS$, де (S) – частина поверхні $x^2+z^2=2z$, що вирізається поверхнею $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

2) $\iint\limits_{(S)} \dfrac{dS}{(1+x+z)^2}$, де (S) – частина площини $x+y+z=1,\ x,y,z\geqslant 0$;

3) $\iint\limits_{(S)} (x+y+z) dS$, де (S) – поверхня $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geqslant 0$;

4) $\iint\limits_{(S)} xyz dS$, де (S) – частина поверхні параболоїда обертання $z=x^2+y^2$, що міститься між площинами $z=1$ і $z=3$;

5) $\iint\limits_{(S)} z dS$, де (S) – частина поверхні гіперболічного параболоїда $z=xy$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2=4$;

6) $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2+y^2} dS$, де (S) – бічна поверхня конуса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0$, $0\leqslant z\leqslant b$;

7) $\iint\limits_{(S)} (xy+yz+zx) dS$, де (S) – частина конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що вирізається циліндром $x^2+y^2=2x$;

8) $\iint\limits_{(S)} y dS$, де (S) – частина поверхні циліндра $x=2y^2+1,\ y>0$, що вирізається поверхнями $x=y^2+z^2,\ x=2,\ x=3$;

9) $\iint\limits_{(S)} z dS$, де (S) – частина поверхні гелікоїда $x=u\cos v,\ y=u\sin v$, $z=v,\ 0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi$;

10) $\iint\limits_{(S)} z^2 dS$, де (S) – частина поверхні конуса $x=r\cos\varphi\sin\alpha$, $y=r\sin\varphi\sin\alpha,\ z=r\cos\alpha,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

2. Знайти різницю між двома інтегралами

$$I_1 = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2+z^2)dS \quad \text{і} \quad I_2 = \iint\limits_{(S_1)} (x^2+y^2+z^2)dS,$$

де (S) – поверхня сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ і (S_1) – поверхня октаедра $|x|+|y|+|z|=a$, вписаного в сферу.

3. Довести формулу Пуассона

$$\iint\limits_{(S)} f(ax+by+cz)dS = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du,$$

де (S) – поверхня сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

4. Обчислити інтеграл

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)dS,$$

де $f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{якщо} \quad z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, & \text{якщо} \quad z < \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

5. Обчислити інтеграл

$$F(t) = \iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)dS,$$

де $f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & \text{якщо} \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x^2+y^2+z^2 > 1. \end{cases}$ Побудувати графік функції $u=F(t)$.

6. Обчислити інтеграл

$$F(x,y,z,t) = \iint\limits_{(S)} f(\xi,\eta,\zeta)dS,$$

де $(S) = \{(\xi,\eta,\zeta):\ (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2\}$,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2 < a^2, \\ 0, & \text{якщо} \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant a^2, \end{cases}$$

вважаючи, що $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} > a > 0$.

Приклади розв'язування вправ

1.4. При проектуванні поверхні (S) на площину xOy утворюється кільце

$$(P) = \{(x, y) :\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}.$$

Тоді

$$\iint\limits_{(S)} xyzdS = \iint\limits_{(P)} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ J(r,\varphi) = r \\ y = r\sin\varphi,\ \ 1 \leqslant r \leqslant 3, \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^3 r^4 \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1+4r^2}rdr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^3 r^4 \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1+4r^2}d(r^2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d(\sin\varphi) \int\limits_1^3 r^4\sqrt{1+4r^2}d(r^2).$$

Оскількі $\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d(\sin\varphi) = \left.\dfrac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{2\pi} = 0$, то $\iint\limits_{(S)} xyzdS = 0.$ ▶

1.10. Оскільки частина поверхні конуса задана в параметричному виді $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\alpha, \\ y = r\sin\varphi\sin\alpha, \\ z = r\cos\alpha, \end{cases}$ то шукаємо величину $dS = \sqrt{EG - F^2}drd\varphi$.

Тоді

$$E = (x'_r)^2 + (y'_r)^2 + (z'_r)^2 = \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$G = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha + r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha = r^2\sin^2\alpha,$$

$$F = x'_r x'_\varphi + y'_r y'_\varphi + z'_r z'_\varphi = -r\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\alpha + r\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\alpha = 0.$$

Отже, $\sqrt{EG - F^2}\,drd\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\alpha}\,drd\varphi = r\sin\alpha\,drd\varphi$, бо за умовою $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Звідси

$$\iint\limits_{(S)} z^2 dS = \left| \begin{array}{cc} x = r\cos\varphi\sin\alpha, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ y = r\sin\varphi\sin\alpha, & 0 \leqslant r \leqslant a, \\ z = r\cos\alpha, & 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \cos^2\alpha \cdot r \sin\alpha dr = \frac{\cos^2\alpha \sin\alpha}{4} \int\limits_0^{2\pi} r^4 \Big|_0^a d\varphi =$$

$$= \frac{a^4 \cos^2\alpha \sin\alpha}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi a^4}{2} \cos^2\alpha \sin\alpha. \quad \blacktriangleright$$

3. Запишемо підінтегральну функцію $f(ax+by+cz)$ у вигляді

$$f(ax+by+cz) = f\Big(\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Big)$$

і проведемо заміну змінних, вибравши площину $ax+by+cz=0$, як область зміни змінних v, w, вважаючи, що $u = \dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Вибравши таким чином нову прямокутну систему координат, отримаємо, що одинична сфера $(S) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$ перетвориться в одиничну сферу $(S') = \{(v,w,u) : v^2+w^2+u^2=1\}$, тому $dS = dS'$.

Тоді

$$\iint\limits_{(S)} f(ax+by+cz)dS = \iint\limits_{(S')} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)dS.$$

З рівняння $v^2+w^2+u^2=1$ отримаємо, що $v^2+w^2=1-u^2$. Взявши $\dfrac{v}{\sqrt{1-u^2}} = \cos\varphi$, $\dfrac{w}{\sqrt{1-u^2}} = \sin\varphi$ отримаємо параметричне рівняння сфери (S') у вигляді $\begin{cases} v = \sqrt{1-u^2}\cos\varphi, \\ w = \sqrt{1-u^2}\sin\varphi, \quad |u| \leqslant 1, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \\ u = u, \end{cases}$

Тоді

$$E = (v'_u)^2 + (w'_u)^2 + (u'_u)^2 = \frac{u^2}{1-u^2}\cos^2\varphi + \frac{u^2}{1-u^2}\sin^2\varphi + 1 = \frac{1}{1-u^2},$$

$$G = (v'_\varphi)^2 + (w'_\varphi)^2 + (u'_\varphi)^2 = (1-u^2)\sin^2\varphi + (1-u^2)\cos^2\varphi = 1-u^2,$$

$$F = v'_u v'_\varphi + w'_u w'_\varphi + u'_u u'_\varphi = \frac{u\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Отже, $\sqrt{EG-F^2} = 1$.

Звідси

$$\iint\limits_{(S)} f(ax+by+cz)dS = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+z^2}u)\sqrt{EG-F^2}d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{0}^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+z^2}u)d\varphi = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+z^2}u)du,$$

що й треба було довести. ►

§ 3.2. Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай (S) – гладка або кусково-гладка двостороння поверхня і зафіксована одна з двох її сторін, що рівносильно вибору на поверхні визначеної орієнтації.

Для визначеності припускаємо, що поверхня задана рівнянням $z=z(x,y)$, причому точка (x,y) змінюється в області (P) на площині xOy, обмеженій кусково-гладким контуром. Тоді вибір можливий по верхній або по нижній стороні поверхні. У першому випадку – це напрям обходу області проти годинникової стрілки, у другому – зворотний напрям.

Нехай у точках поверхні (S) визначена функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо поверхню (S) на частинки $(S_1),\ldots,(S_n)$ за допомогою сітки кусково-гладких кривих і виберемо в кожній частинці (S_i) точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Складемо суму вигляду $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)D_i$, де D_i – площа проекції частинки (S_i) на площину xOy.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ при умові, що максимальний з діаметрів λ областей (S_i) прямує до нуля, то вона називається ***поверхневим інтегралом другого роду від функції*** $f(x,y,z)$ ***по вибраній стороні поверхні*** (S) і позначається

$$I = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdy.$$

Однак в інтегралах такого виду слід кожний раз зауважувати, по якій стороні поверхні береться інтеграл, бо в такому випадку знак інтеграла може змінюватися.

За аналогією можна визначити поверхневі інтеграли другого роду вигляду

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz \quad \text{i} \quad \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dxdz.$$

В загальному випадку поверхневий інтеграл другого роду по верхній (зовнішній) стороні поверхні (S^+) записується у виді

$$\iint\limits_{(S^+)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy,$$

де функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ неперервні на поверхні (S).

Зауважимо, що справедлива формула зв'язку між поверхневими інтегралами першого і другого роду вигляду

$$\iint\limits_{(S^+)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \Big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\Big)dS.$$

Нехай поверхню (S) задано явним рівнянням $z = z(x,y)$, $(x,y) \in (P')$, тоді, позначивши $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u,v), \end{cases}$ отримаємо

$$E = 1 + (z'_x)^2, \;\; G = 1 + (z'_y)^2, \;\; F = z'_x z'_y,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2},$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x\vec{i} - z'_y\vec{j} + \vec{k}.$$

В такому випадку

$$\iint\limits_{(S^+)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \big(- P(x,y,z)z'_x - Q(x,y,z)z'_y + R(x,y,z)\big) \cdot \frac{dS}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} =$$

$$= \iint\limits_{(P')} \big(- P\,(x,y,z(x,y))\,z'_x - Q\,(x,y,z(x,y))\,z'_y + R\,(x,y,z(x,y))\,\big)dxdy.$$

Зауважимо, що можна отримати аналогічні формули, якщо поверхню (S) задано рівнянням $x = x(y,z)$, $(y,z) \in (P'')$ або $y = y(x,z)$, $(x,z) \in (P''')$.

Вправи

1. Обчислити поверхневі інтеграли другого роду:

1) $\iint\limits_{(S)} (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$, де (S) – зовнішня сторона поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 3$;

2) $\iint\limits_{(S)} zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона поверхні еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

3) $\iint\limits_{(S)} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, де (S) – зовнішня сторона поверхні тетраедра, обмеженого площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$;

4) $\iint\limits_{(S)} xdydz + ydxdz + zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$;

5) $\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, де (S) – зовнішня поверхня півсфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geqslant 0$;

6) $\iint\limits_{(S)} \dfrac{dydz}{x} + \dfrac{dxdz}{y} + \dfrac{dxdy}{z}$, де (S) – внутрішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

7) $\iint\limits_{(S)} ydydz$, де (S) – внутрішня сторона поверхні частини параболоїда $z=x^2+y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 3$;

8) $\iint\limits_{(S)} \dfrac{dxdy}{z}$, де (S) – внутрішня поверхня сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$;

9) $\iint\limits_{(S)} x^2dydz$, де (S) – зовнішня сторона поверхні частини параболоїда $z = \dfrac{1}{4}(x^2+y^2),\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \leqslant 1$;

10) $\iint\limits_{(S)} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy$, де $f(x), g(y), h(z)$ – неперервні функції і (S) – внутрішня сторона поверхні паралелепіпеда з вимірами $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$.

Приклади розв'язування вправ

1.2. Еліпсоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ділиться площиною $z = 0$ на дві поверхні $z = c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ (верхня частина) і $z = -c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ (нижня частина).

Оскільки інтеграл береться по зовнішній стороні еліпсоїда, то позначивши

$$(S^+) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ (x,y) \in (P')\right\},$$

$$(S^-) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ (x,y) \in (P')\right\},$$

де $(P') = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$, отримаємо:

$$\iint\limits_{(S)} zdxdy = \iint\limits_{(S^+)} zdxdy + \iint\limits_{(S^-)} zdxdy = \iint\limits_{(P')} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy +$$

$$+\iint\limits_{(P')} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy = 2c\iint\limits_{(P')} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy = \left|\begin{array}{c} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi, \\ J(r,\varphi) = abr, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{array}\right| =$$

$$= 2abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}rdr = -abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}d(1-r^2) =$$

$$= -\frac{2abc}{3}\int_0^{2\pi}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{4\pi abc}{3}. \quad \blacktriangleright$$

1.10. Поверхня паралелепіпеда $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$ складається з шести частинок:

$$(S_1) = \{(x,y,z):\ z = c,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\},$$

$$(S_2) = \{(x,y,z):\ z = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\},$$

$$(S_3) = \{(x,y,z):\ y = b,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant c\},$$

$$(S_4) = \{(x,y,z):\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant c\},$$

$$(S_5) = \{(x,y,z):\ x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\},$$

$$(S_6) = \{(x,y,z):\ x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\}.$$

Обчислимо даний поверхневий інтеграл по кожній із частинок зокрема:

$$\iint\limits_{(S_1)} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy = \iint\limits_{(S_1)} h(c)dxdy =$$

$$= -\int_0^a dx\int_0^b h(c)dy = -h(c)ab,$$

$$\iint\limits_{(S_2)} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy = \iint\limits_{(S_2)} h(0)dxdy =$$

$$= \int_0^a dx\int_0^b h(0)dy = h(0)ab,$$

$$\iint\limits_{(S_3)} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy = \iint\limits_{(S_3)} g(b)dxdz =$$

$$= -\int_0^a dx\int_0^c g(b)dz = -g(b)ac,$$

$$\iint\limits_{(S_4)} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy = \iint\limits_{(S_4)} g(0)dxdz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^c g(0)dz = g(0)ac,$$

$$\iint\limits_{(S_5)} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy = \iint\limits_{(S_5)} f(a)dydz =$$

$$= -\int_0^b dy \int_0^c f(a)dz = -f(a)bc,$$

$$\iint\limits_{(S_6)} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy = \iint\limits_{(S_6)} f(0)dydz =$$

$$= \int_0^b dy \int_0^c f(0)dz = f(0)bc.$$

Отже, просумувавши інтеграли по кожній з частинок (S_i), $i = \overline{1,6}$, отримаємо:

$$\iint\limits_{(S)} f(x)dxdz + g(y)dxdz + h(z)dxdy =$$

$$= -h(c)ab + h(0)ab - g(b)ac + g(0)ac - f(a)bc + f(0)bc =$$

$$= -abc\left(\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c}\right). \quad \blacktriangleright$$

§ 3.3. Застосування поверхневих інтегралів

1. Нехай (S) – матеріальна поверхня, обмежена кусково-гладким контуром. Тоді формула

$$S = \iint\limits_{(S)} dS$$

позначає площу поверхні (S).

2. Нехай (S) – матеріальна поверхня з поверхневою густиною $\varrho(x,y,z)$ в довільній точці $(x,y,z) \in (S)$. Тоді маса поверхні обчислюється за формулою

$$m = \iint\limits_{(S)} \varrho(x,y,z)dS.$$

3. Статичні моменти поверхні (S) відносно відповідних координатних площин Oxy, Oxz і Oyz обчислюються за формулами:

$$M_{xy} = \iint\limits_{(S)} z\varrho(x,y,z)dS, \quad M_{xz} = \iint\limits_{(S)} y\varrho(x,y,z)dS,$$

$$M_{yz} = \iint\limits_{(S)} x\varrho(x,y,z)dS.$$

4. Координати центра мас поверхні (S) обчислюються за формулами:

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

5. Моменти інерції поверхні (S) з поверхневою густиною $\varrho(x,y,z)$ відносно відповідних координатних площин Oxy, Oxz і Oyz обчислюються за формулами:

$$I_{xy} = \iint\limits_{(S)} z^2\varrho(x,y,z)dS, \quad I_{xz} = \iint\limits_{(S)} y^2\varrho(x,y,z)dS,$$

$$I_{yz} = \iint\limits_{(S)} x^2\varrho(x,y,z)dS.$$

6. Моменти інерції поверхні (S) з поверхневою густиною $\varrho(x,y,z)$ відносно відповідних координатних осей Ox, Oy, Oz обчислюються за формулами:

$$I_x = \iint\limits_{(S)} (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)dS, \quad I_y = \iint\limits_{(S)} (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)dS,$$

$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)dS.$$

7. Моменти інерції поверхні (S) з поверхневою густиною $\varrho(x,y,z)$ відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$I_0 = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2+z^2)\varrho(x,y,z)dS.$$

8. Нехай $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – сила притягання матеріальної точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ масою m_0 матеріальною поверхнею (S) з поверхневою густиною $\varrho(x, y, z)$. Тоді складові цієї сили обчислюються за формулами:

$$F_x = \gamma m_0 \iint\limits_{(S)} \frac{(x - x_0)\varrho(x, y, z)dS}{\sqrt{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right)^3}},$$

$$F_y = \gamma m_0 \iint\limits_{(S)} \frac{(y - y_0)\varrho(x, y, z)dS}{\sqrt{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right)^3}},$$

$$F_z = \gamma m_0 \iint\limits_{(S)} \frac{(z - z_0)\varrho(x, y, z)dS}{\sqrt{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right)^3}},$$

де γ – гравітаційна стала.

9. Нехай тіло (V) обмежене кусково-гладкою поверхнею (S). Тоді об'єм цього тіла можна обчислювати за однією із чотирьох наступних формул:

$$V = \iint\limits_{(S)} xdydz, \;\; V = \iint\limits_{(S)} zdydz, \;\; V = \iint\limits_{(S)} ydydz,$$

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{(S)} xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

де кожний із інтегралів береться по зовнішній стороні поверхні (S), що обмежує тіло (V).

Зауважимо, що вводячи напрямлюючі косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ зовнішньої нормалі до поверхні (S), останню формулу для обчислення об'єму тіла можна переписати у виді:

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS.$$

Вправи

1. Знайти масу матеріальної поверхні із заданою поверхневою густиною $\varrho(x, y, z)$:

1) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $\varrho(x, y, z) = z$;

2) $x^2+y^2+z^2=9,\ z\geqslant 0,\ \varrho(x,y,z)=\dfrac{z}{3}$;

3) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0,\ \ z\geqslant 0,\ \ \varrho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$;

4) $2az=x^2-y^2$, що вирізається циліндром $x^2+y^2=a^2,\ \varrho(x,y,z)=k|z|$, $k>0$;

5) $|x|\leqslant 2,\ |y|\leqslant 2,\ |z|\leqslant 2,\ \varrho(x,y,z)=k\sqrt[3]{|xyz|},\ k>0$.

2. Знайти координати центра мас заданої матеріальної поверхні:

1) однорідної частини конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що вирізається поверхнею $x^2+y^2=2x$;

2) однорідної поверхні $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant a$;

3) однорідної частини поверхні $z=x^2+y^2$, обмеженої площиною $z=2$;

4) однорідної частини поверхні $4-2z=x^2+y^2,\ z\geqslant 0$;

5) конічної поверхні $z^2=x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant 1$, якщо густина у кожній точці пропорційна її відстані від осі конуса;

6) однорідного сегмента поверхні сфери радіуса R, з центром в початку координат, що відтинається площиною $z=H,\ H>0,\ z\geq H$.

3. Знайти моменти інерції однорідної матеріальної поверхні:

1) $x+y+z=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$, відносно координатних площин;

2) частини сфери $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geqslant 0$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2=2x$, відносно площини Oyz;

3) $0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant z\leqslant 2$, відносно початку координат;

4) конуса $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\leqslant z\leqslant 3$, відносно осі Oz;

5) $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geqslant 0$, відносно осі Oz та площини Oxy;

6) циліндра $x^2+y^2=R^2,\ 0\leqslant z\leqslant H$, відносно початку координат;

7) $x^2+y^2=4z,\ 0\leqslant z\leqslant 2$, відносно осі Oz;

8) частини циліндра $x^2+y^2=ax$, що міститься всередині сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ відносно площини Oxz.

4. З якою силою притягує однорідна конічна поверхня $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi,\ z=r,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0<b\leqslant r\leqslant a$, густини ϱ_0 матеріальну точку масою m, розміщену у вершині цієї поверхні.

5. Знайти потенціал однорідної сферичної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ густини ϱ_0 на точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тобто обчислити інтеграл

$$U = \iint\limits_{(S)} \frac{\varrho_0 dS}{r}, \quad \text{де} \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

6. За допомогою поверхневого інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 3z = x^2 + y^2;$

2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ y = z,\ z = 0;$

3) $y = x^2,\ y = 1,\ x + y + z = 4,\ z = 0;$

4) $x^2 + y^2 = 4 - z,\ 2z = 2 + x^2 + y^2;$

5) $x^2 + 4y^2 = 1 - z,\ z = 0;$

6) $\begin{cases} x = a\cos U\cos V + b\sin U\sin V, \\ y = a\cos U\sin V - b\sin U\cos V, \\ z = c\sin U, \end{cases} \qquad z = \pm c;$

7) $\begin{cases} x = U\cos V, \\ y = U\sin V, \\ z = -U + a\cos V, \end{cases} \qquad U \geqslant 0,\ x = 0,\ z = 0,\ a > 0;$

8) $\begin{cases} x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z = a\sin\psi, \end{cases} \qquad 0 < a \leqslant b.$

Приклади розв'язування вправ

2.4. Оскільки поверхня однорідна, то вважаємо, що $\varrho(x, y, z) = 1$.

Знайдемо масу матеріальної поверхні:

$$m = \iint\limits_{(S)} dS = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy,$$

де $z = 2 - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2),\ z'_x = -x,\ z'_y = -y,\ (P) = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$

Отже,

$$m = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ J(r,\varphi) = r, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 2 \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{1+r^2}rdr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{1+r^2}d(1+r^2) = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1+r^2)^3}\Big|_0^2 d\varphi = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

Обчислюємо статичні моменти матеріальної поверхні відносно координатних площин:

$$M_{xy} = \iint\limits_{(S)} zdS = \iint\limits_{(P)} \left(2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ J(r,\varphi) = r, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 2 \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}r^2\right)\sqrt{1+r^2}rdr =$$

$$= 2\pi\left(2\int\limits_0^2 r\sqrt{(1+r^2)}dr - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1) - \frac{1}{4}\int\limits_0^2 (r^2+1-1)\sqrt{1+r^2}d(1+r^2)\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{(1+r^2)^5}}{5}\Big|_0^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{(1+r^2)^3}}{3}\Big|_0^2\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1) - \frac{1}{10}(25\sqrt{5}-1) + \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{5}{3}\sqrt{5} - \frac{11}{15}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - \frac{11}{5}\right).$$

$$M_{yz} = \iint\limits_{(S)} xdS = \iint\limits_{(P)} x\sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ J(r,\varphi) = r, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^2\cos\varphi\sqrt{1 + r^2}dr = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^2 r^2\sqrt{(1 + r^2)}dr =$$

$$= (\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r^2\sqrt{1 + r^2}dr = 0.$$

$$M_{xz} = \iint\limits_{(S)} ydS = \iint\limits_{(P)} y\sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ J(r,\varphi) = r, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^2\sin\varphi\sqrt{1 + r^2}dr = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^2 r^2\sqrt{(1 + r^2)}dr =$$

$$= (-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r^2\sqrt{1 + r^2}dr = 0.$$

Отже, центр мас матеріальної поверхні міститься в точці $C\left(0; 0; \dfrac{25\sqrt{5} - 11}{25\sqrt{5} - 5}\right)$. ►

3.5. Поверхня $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$, проектується на площину Oxy плоску область $(P) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Для спрощення обчислень в силу однорідності поверхні вважаємо, що $\varrho(x, y, z) = 1$.

Моменти інерції відносно осі Oz обчислюємо за формулою:

$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)dS = \iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy.$$

Оскільки $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, то

$$I_z = \iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad J(r,\varphi) = r, \\ y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2 \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^2 \cdot \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = -2\pi\int\limits_0^2 r^2 \cdot \frac{d(4-r^2)}{\sqrt{4-r^2}} = 2\pi\int\limits_0^2 (4-r^2-4)\frac{d(4-r^2)}{\sqrt{4-r^2}} =$$

$$= 2\pi\left(\int\limits_0^2 \sqrt{4-r^2}d(4-r^2) - 4\int\limits_0^2 \frac{d(4-r^2)}{\sqrt{4-r^2}}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{(4-r^2)^3}\Big|_0^2 - 8\sqrt{4-r^2}\Big|_0^2\right) = 2\pi\left(-\frac{16}{3}+16\right) = \frac{64}{3}\pi.$$

Момент інерції відносно площини Oxy обчислюємо за формулою:

$$I_{xy} = \iint\limits_{(S)} z^2 dS = \iint\limits_{(P)} z^2\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy.$$

Підставивши замість $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, отримаємо

$$I_{xy} = \iint\limits_{(P)} (4-x^2-y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{(P)} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad J(r,\varphi) = r, \\ y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2 \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{4-r^2}rdr = -2\pi\int\limits_0^2 \sqrt{4-r^2}d(4-r^2) =$$

$$= -4\pi \frac{\sqrt{(4-r^2)^3}}{3}\Big|_0^2 = \frac{32}{3}\pi. \quad \blacktriangleright$$

6.6. Нехай $c > 0$. В площині xOy маємо, що $U = 0$ і $0 \leqslant V \leqslant 2\pi$. Отже, на xOy маємо круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Взявши $z = \pm c$, отримаємо, що $U = \pm\dfrac{\pi}{2}$ і $0 \leqslant V \leqslant 2\pi$. Отже, на площинах $z = \pm c$ маємо круги $x^2 + y^2 \leqslant b^2$.

В результаті отримаємо множину зміни змінних U та V виду

$$(P) = \Big\{(U, V) \in \mathbb{R}^2: \ -\frac{\pi}{2} \leqslant U \leqslant \frac{\pi}{2}, \ 0 \leqslant V \leqslant 2\pi\Big\}.$$

Зауважимо, що якщо $a > b$, то при $z > 0$ одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ в кожній точці верхньої частини бічної поверхні з віссю Oz утворює гострий кут, якщо $a < b$ – то тупий кут.

Для обчислення об'єму V тіла (V) скористаємося формулою

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS.$$

Оскільки тіло обмежене трьома поверхнями, то

$$V = \frac{1}{3}\Bigg(\iint\limits_{(S_1)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS + \iint\limits_{(S_2)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS +$$

$$+ \iint\limits_{(S_3)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS\Bigg),$$

де $(S_1), (S_2)$– верхня і нижня основи (круг радіуса b), (S_3) – бічна поверхня.

На поверхні (S_1) маємо, що

$$\iint\limits_{(S_1)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = c\iint\limits_{(P)} dxdy,$$

де $(P) = \{(x, y): \ x^2 + y^2 \leqslant b^2\}$, бо $\cos\alpha = 0, \ \cos\beta = 0, \ \cos\gamma = 1$.

Отже, $\displaystyle\iint\limits_{(S_1)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = \pi b^2 c.$

Аналогічно, на поверхні (S_2) маємо, що $\cos\alpha = 0, \ \cos\beta = 0, \ \cos\gamma = -1$ і

$$\iint\limits_{(S_2)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = c\iint\limits_{(P)} dxdy = \pi b^2 c,$$

де $(P) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant b^2\}$.

Обчислимо тепер напрямні косинуси нормалі $\vec{n}$ для поверхні (S_3):

$$A = \begin{vmatrix} y'_U & z'_U \\ y'_V & z'_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin U \sin V - b\cos U \cos V & c\cos U \\ a\cos U \cos V + b\sin U \sin V & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -c\cos U(a\cos U \cos V + b\sin U \sin V),$$

$$B = \begin{vmatrix} z'_U & x'_U \\ z'_V & x'_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c\cos U & -a\sin U \cos V + b\cos U \sin V \\ 0 & -a\cos U \sin V + b\sin U \cos V \end{vmatrix} =$$

$$= c\cos U(-a\cos U \sin V + b\sin U \cos V),$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_U & y'_U \\ x'_V & y'_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin U \cos V + b\cos U \sin V & -a\sin U \sin V - b\cos U \cos V \\ -a\cos U \sin V + b\sin U \cos V & a\cos U \cos V + b\sin U \sin V \end{vmatrix} =$$

$$= (b^2 - a^2)\sin U \cos U,$$

де $0 \leqslant U \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Якщо $a > b$, то $C < 0$ і оскільки $\cos\gamma > 0$, то $\cos\gamma = \dfrac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Якщо $a < b$, то $C > 0$ і оскільки $\cos\gamma < 0$, то $\cos\gamma = \dfrac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

З того, що $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dUdV$, маємо

$$\iint\limits_{(S_3)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = -\iint\limits_{(P)} (xA + yB + zC)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(P)} \Big(c\cos U(a\cos U \cos V + b\sin U \sin V)^2 + c\cos U(a\cos U \sin V -$$

$$-b\sin U \cos V)^2 + (a^2 - b^2)c\sin^2 U \cos U\Big)dUdV =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dU \int\limits_0^{2\pi} \Big(a^2 c\cos^3 U \cos^2 V + cb^2 \cos U \sin^2 U \sin^2 V + a^2 c\cos^3 U \sin^2 V +$$

$$+b^2 c\cos U \sin^2 U \cos^2 V + (a^2 - b^2)c\sin^2 U \cos U\Big)dV =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dU \int\limits_0^{2\pi} \Big(a^2 c\cos^3 U + b^2 c\cos U \sin^2 U + (a^2 - b^2)c\sin^2 U \cos U\Big)dV =$$

$$= a^2c\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dU \int\limits_0^{2\pi} \cos U dV = 2\pi a^2 c \sin U\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi a^2 c.$$

Отже, при $c > 0$ отримаємо

$$V = \frac{1}{3}(\pi b^2 c + \pi b^2 c + 4\pi a^2 c) = \frac{4}{3}\pi c\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

За аналогією, якщо $c < 0$, то

$$V = -\frac{4}{3}\pi c\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

Отже, в загальному випадку можемо записати, що

$$V = \frac{4}{3}\pi |c|\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right). \quad \blacktriangleright$$

§ 3.4. Основні інтегральні формули

Формула Гріна. Нехай (D) – кусково-гладка область, задана на площині xOy і обмежена замкненим простим кусково-гладким контуром (Γ). Якщо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$ і $Q'_x(x, y)$ є неперервними в області (D), то має місце формула

$$\int\limits_{(\Gamma)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

при умові, що напрям обходу контура (Γ) є додатнім, тобто при русі вздовж контура найближча частина області (D) залишається зліва.

Ця формула називається формулою Гріна і характеризує зв'язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом.

Формула Стокса. Нехай кусково-гладка двостороння поверхня (S) обмежена замкненим простим кусково-гладким контуром (Γ). Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ неперервні разом з частинними похідними $P'_y(x, y, z)$, $P'_z(x, y, z)$, $Q'_x(x, y, z)$, $Q'_z(x, y, z)$, $R'_y(x, y, z)$, $R'_x(x, y, z)$, то має місце формула:

$$\int\limits_{(\Gamma)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + (Q'_x - P'_y)dxdy,$$

або

$$\int\limits_{(\Gamma)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left((R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma\right) dS,$$

де напрям обходу контура (Γ) є додатним.

Ця формула називається формулою Стокса і характеризує зв'язок криволінійного інтеграла з поверхневим інтегралом.

Зауважимо, що якщо поверхня (S) паралельна до площини xOy, то $\int\limits_{(\Gamma)} R(x,y,z)dz = 0$ і з формули Стокса отримується формула Гріна.

Формула Гаусса-Остроградського. Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ неперервні разом з частинними похідними $P'_x(x,y,z)$, $Q'_y(x,y,z)$, $R'_z(x,y,z)$, у замкненій області (V), що обмежена кусково-гладкою двосторонньою поверхнею (S). Тоді має місце формула:

$$\iiint\limits_{(V)} (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy,$$

або

$$\iiint\limits_{(V)} (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right) dS,$$

де поверхневий інтеграл другого роду береться по зовнішній стороні поверхні.

Ця формула називається формулою Гаусса-Остроградського і характеризує зв'язок потрійного інтеграла з поверхневим інтегралом.

Зауважимо, що якщо $P'_x + Q'_y + R'_z = 1$, то отримаємо формулу для обчислення об'єму заданого тіла (V) за допомогою поверхневого інтеграла, наведену в § 3.3.

Вправи

1. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійні інтеграли:

1) $\int\limits_{(\Gamma)} (x+y)dx - (x-y)dy$, де (Γ) – еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) $\int\limits_{(\Gamma)} (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy$, де (Γ) – контур трикутника ABC з вершинами $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;5)$ в додатньому напрямі;

3) $\int\limits_{(\Gamma)} xy^2 dy - x^2 y dx$, де (Γ) – коло $x^2 + y^2 = a^2$;

4) $\int\limits_{(\Gamma)} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, де (Γ) – коло $x^2 + y^2 = 4$;

5) $\int\limits_{(\Gamma)} e^x \Big((1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy\Big)$, де (Γ) – контур, що обмежує фігуру $(D) = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$;

6) $\int\limits_{(AnOA)} (e^x \sin y - ny)dx + (e^x \cos y - n)dy$, де (AnO) – верхнє півколо $x^2 + y^2 = ax$ від точки $A(a;0)$ до точки $O(0;0)$, OA – відрізок осі Ox.

2. Застосовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{(\Gamma)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, де (Γ) – перетин поверхні куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ площиною $x + y + z = \dfrac{3}{2}a$;

2) $\int\limits_{(\Gamma)} y dx + z^2 dy + x^2 dz$, де (Γ) – коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = \sqrt{3}; \end{cases}$

3) $\int\limits_{(\Gamma)} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$, де (Γ) – коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$

4) $\int\limits_{(\Gamma)} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, де (Γ) – еліпс $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + z = 1; \end{cases}$

5) $\int\limits_{(\Gamma)} x^2y^3dx + dy + zdz$, де (Γ) – коло $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0; \end{cases}$

6) $\int\limits_{(\Gamma)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, де (Γ) – контур, що охоплює частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$;

7) $\int\limits_{(OA)} yzdx + 3xzdy + 2xydz$, де (OA) – крива $x = t\cos t,\ y = t\sin t,$ $z = t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ O(0;0;0),\ A(2\pi;0;4\pi^2)$;

8) $\int\limits_{(\Gamma)} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$, де (Γ) – еліпс $x = a\sin^2 t,$ $y = 2a\sin t\cos t,\ z = a\cos^2 t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$, в напрямі зростання параметра t.

3. Використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, обчислити дані поверхневі інтеграли:

1) $\iint\limits_{(S)} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, де (S) – зовнішня поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

2) $\iint\limits_{(S)} (x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz+(z-x+y)dxdy$, де (S) – зовнішня сторона поверхні $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$;

3) $\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, де (S) – зовнішня сторона границі куба $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant a$;

4) $\iint\limits_{(S)} xdydz + ydxdz - zdxdy$, де (S) – внутрішня частина поверхні $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

5) $\iint\limits_{(S)} xdydz + ydxdz + zdxdy$, де (S) – поверхня циліндра $x^2 + y^2 = a^2,$ $-H \leqslant z \leqslant H$;

6) $\iint\limits_{(S)} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, де (S) – поверхня конуса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2} = 0$;

7) $\iint\limits_{(S)} \left(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma\right) dS$, де (S) – поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

8) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} x^3dydz + y^3dxdz + z^2dxdy$, де (S) – внутрішня поверхня частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $2x - z = 0$;

9) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} \Big((z^n - y^n)\cos\alpha + (x^n - z^n)\cos\beta + (y^n - x^n)\cos\gamma\Big)dS$, де (S) – верхня половина поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

10) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} ydydz + zdxdz + xdxdy$, де (S) – поверхня піраміди, обмежена площинами $x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4. Якій умові повинна задовольняти диференційовна функція $F(x, y)$, щоб криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{(AmB)} F(x, y)(ydx + xdy)$$

не залежав від форми шляху інтегрування?

5. Знайти значення інтеграла

$$I = \int\limits_{(\Gamma)} \Big(x\cos(\vec{n}, x) + y\cos(\vec{n}, y)\Big)dS,$$

де (Γ) – проста замкнена крива, що обмежує скінченну область (S) і $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до неї.

6. Довести, що об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox простого замкненого контура (Γ), розміщеного у верхній півплощині $y \geqslant 0$, рівний

$$V = -\pi\int\limits_{(\Gamma)} y^2dx.$$

7. Довести, що об'єм конуса, обмеженого гладкою конічною поверхнею $F(x, y, z) = 0$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$, дорівнює

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

де S – площа основи конуса, розміщеної в даній площині, H – висота конуса.

8. Довести, що якщо $U = U(x, y, z)$ – гармонічна функція всередині сфери (S) радіуса R з центром в точці (x_0, y_0, z_0), то

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{(S)} U(x, y, z) dS.$$

9. Довести другу формулу Гріна в просторі

$$\iint\limits_{(V)} \begin{vmatrix} \Delta U & \Delta V \\ U & V \end{vmatrix} dxdydz = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial n} & \frac{\partial U}{\partial n} \\ U & V \end{vmatrix} dS,$$

де тіло (V) обмежене поверхнею (S), $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні (S) і функції $U = U(x, y, z)$, $V = V(x, y, z)$ двічі диференційовні в замкненій області (V).

10. Довести, що якщо U – гармонічна функція в скінченній замкненій області (V), обмеженій замкненою поверхнею (S), то справедливі формули:

а) $\iint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0,$

б) $\iiint\limits_{(V)} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) dxdydz = \iint\limits_{(S)} U \frac{\partial U}{\partial n} dS$, де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхній (S).

11. Довести, що якщо функція $U = U(x, y, z)$ – гармонічна функція в скінченній замкненій області (V), обмеженій гладкою поверхнею (S), то

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} \left(U \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, що сполучає внутрішню точку (x, y, z) області (V) і довільну точку (ξ, η, ζ) поверхні (S), $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, $\vec{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні (S) в точці (ξ, η, ζ).

Приклади розв'язування вправ

1.6. Контур інтегрування зображений на рис. 10. Область (D) обмежена верхньою частиною кола $x^2 + y^2 = ax$ і віссю Ox. Напрям обходу контура (Γ), що обмежує область (D) є додатнім.

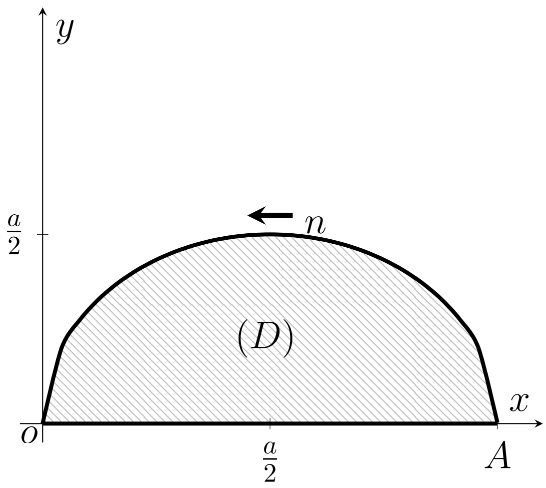

Рис. 10

Тоді $P(x,y)=e^x\sin y-ny,\ Q(x,y)=e^x\cos y-n,\ P'_y(x,y)=e^x\cos y-n,$ $Q'_x=e^x\cos y.$

Отже, за формулою Гріна запишемо

$$\int\limits_{(AnOA)}(e^x\sin y-ny)dx+(e^x\cos y-n)dy=\iint\limits_{(D)}ndxdy,$$

де $(D)=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}\}.$

Звідси

$$\iint\limits_{(D)}ndxdy=\left|\begin{array}{c}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ J(r,\varphi)=r,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0\leqslant r\leqslant a\cos\varphi\end{array}\right|=n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}rdr=\frac{n}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{na^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{na^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi=\frac{na^2}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi na^2}{8}.\ \blacktriangleright$$

2.7. Якщо t змінюється від 0 до 2π, то (OA) обмежує частину поверхні конуса $x^2+y^2=z^2,\ 0\leqslant z\leqslant4\pi^2.$

Тоді

$$P(x,y,z)=yz,\ Q(x,y,z)=3xz,\ R(x,y,z)=2xy,$$

$$P'_y(x,y,z)=z,\ P'_z(x,y,z)=y,\ Q'_x(x,y,z)=3z,$$

$$Q'_z(x,y,z) = 3x,\ \ R'_x(x,y,z) = 2y,\ \ R'_y(x,y,z) = 2x.$$

За формулою Стокса запишемо

$$I = \int\limits_{(OA)} yzdx + 3xzdy + 2xydz = \iint\limits_{(S)} (-x)dydz + (-y)dxdz + (-2z)dxdy,$$

де $(S) = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 4\pi^2\}$.

За правилом обчислення поверхневого інтеграла другого роду запишемо

$$I = \iint\limits_{(D)} (xz'_x + yz'_y + (-2z))dxdy,$$

де $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(D) = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2\}$.

Отже,

$$I = \iint\limits_{(D)} \Big(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\sqrt{x^2+y^2}\Big)dxdy = -\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, & J(r,\varphi) = r, \\ y = r\sin\varphi, & 0 \leqslant r \leqslant 2\pi & \end{matrix} \right| = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} r^2 dr =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} r^3\Big|_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{8\pi^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{16}{3}\pi^4. \quad \blacktriangleright$$

3.8. За формулою Гаусса-Остроградського, враховуючи, що поверхневий інтеграл береться по внутрішній поверхні частини параболоїда, що відтинається площиною $z = 2x$, запишемо

$$I = \iint\limits_{(S)} x^3dydz + y^3dxdz + z^2dxdy = \iiint\limits_{(V)} (3x^2+3y^2+2z)dxdydz,$$

де $(V) = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \leqslant 2x,\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 2x\}$.

Звідси,

$$I = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{2x} (3x^2+3y^2+2z)dz = \iint\limits_{(D)} \Big(3z(x^2+y^2)+z^2\Big)\Big|_{x^2+y^2}^{2x} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \left(6x(x^2+y^2) + 4x^2 - 4(x^2+y^2)^2\right) dxdy,$$

де $(D) = \{(x,y) : \ x^2+y^2 \leqslant 2x\}$.

Щоб обчислити подвійний інтеграл, перейдемо до полярної системи координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ $J(r,\varphi) = r$. Тоді в новій системі координат область інтегрування матиме вигляд $(D') = \left\{(r,\varphi) : -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi\right\}$.

Звідси

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \left(6r^4\cos\varphi + 4r^3\cos^2\varphi - 4r^5\right) dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{6}{5}r^5\cos\varphi + r^4\cos^2\varphi - \frac{2}{3}r^6\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{192}{5}\cos^6\varphi + 16\cos^6\varphi - \frac{128}{3}\cos^6\varphi\right) d\varphi = \frac{352}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{44}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^3 d\varphi = \frac{44}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{44}{15}\left(\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 4\varphi) d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 2\varphi) d(\sin 2\varphi)\right) =$$

$$= \frac{45}{15}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(\sin 2\varphi - \frac{1}{3}\sin^3 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{44}{15}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{44}{15}\cdot\frac{5}{4}\pi = \frac{11}{3}\pi. \quad \blacktriangleright$$

Індивідуальні завдання до розділу III

1. Обчислити поверхневий інтеграл по поверхні (S), де (S) – частина площини, що знаходиться в першому октанті.

1) $\iint\limits_{(S)} (7z+2)dS,\ (S):\ x+y+\dfrac{z}{2}=1;$

2) $\iint\limits_{(S)} (4x+7y+2z+1)dS,\ (S):\ 2x+\dfrac{y}{3}+2z=1;$

3) $\iint\limits_{(S)} (7x+y+2z+2)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+z=1;$

4) $\iint\limits_{(S)} (1+y+11z)dS,\ (S):\ x+y+\dfrac{z}{3}=1;$

5) $\iint\limits_{(S)} (y-2z+4)dS,\ (S):\ 2x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1;$

6) $\iint\limits_{(S)} (x+3y)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{3}+2y+z=1;$

7) $\iint\limits_{(S)} (3x+2z)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{9}=1;$

8) $\iint\limits_{(S)} (2x-y+3z-1)dS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1;$

9) $\iint\limits_{(S)} (7x+9y)dS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{3}+z=1;$

10) $\iint\limits_{(S)} (x+2y-z+1)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1;$

11) $\iint\limits_{(S)} 7xdS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{2}+4z=1;$

12) $\iint\limits_{(S)} (7x+4y+2z+1)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{3}+2y+z=1;$

13) $\iint\limits_{(S)} (5x+y+4z+1)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1;$

14) $\iint\limits_{(S)} (7x+y+z)dS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{3}+z=1;$

15) $\iint\limits_{(S)} (1-2z)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+z=1;$

16) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(3x+2y)dS,\ (S):\ x+y+2z=1;$

17) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}\frac{dS}{(1+x+z)^2},\ (S):\ x+y+z=1;$

18) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(5x-2y+4z+1)dS,\ (S):\ \frac{x}{2}+4y+\frac{z}{3}=1;$

19) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(x-2z)dS,\ (S):\ x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1;$

20) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(9x+5y+2z)dS,\ (S):\ 3x+y+\frac{z}{9}=1;$

21) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(3x+y)dS,\ (S):\ 2x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1;$

22) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(x+y-2z)dS,\ (S):\ x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1;$

23) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(x+2z+2)dS,\ (S):\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1;$

24) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(x+2y+2z)dS,\ (S):\ 8x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1;$

25) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}(x-2y+z)dS,\ (S):\ 2x+\frac{y}{6}+z=1;$

2. Обчислити:

1) координати центра мас однорідного параболоїда $2z=4-(x^2+y^2)$, розташованого над площиною Oxy;

2) $\displaystyle\iint\limits_{(S)}x^2dS$, де (S) – частина параболоїда $4z=x^2+y^2$ між площинами $y=0,\ z=4$;

3) масу півсфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(z\geqslant 0)$, якщо поверхнева густина $\varrho(x,y,z)=\dfrac{z}{R}$;

4) масу частини гіперболічного параболоїда $2z=x^2-y^2$, обмеженого циліндром $x^2+y^2=1$, якщо $\varrho(x,y,z)=|z|$;

5) $\iint\limits_{(S)} zdS$, де (S) – менший сегмент півсфери $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, обмежений площиною $z = 4$;

6) координати центра мас однорідної площини $z = x$, обмеженої площинами $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$;

7) $\iint\limits_{(S)} xyzdS$, де (S) – параболоїд $z = x^2 + y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

8) $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dS$, де (S) – частина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$;

9) $\iint\limits_{(S)} zdS$, де (S) – частина поверхні $x^2 + z^2 = 2az,\ (a > 0)$, що вирізана поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

10) $\iint\limits_{(S)} ydS$, де (S) – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

11) момент інерції еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ відносно осі Ox;

12) масу частини поверхні $z = xy$ всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$, якщо поверхнева густина $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2$;

13) координати центра ма однорідної півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

14) момент інерції відносно осі Oz бічної поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant a$;

15) $\iint\limits_{(S)} (x^2 - y^2)dS$, де (S) – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

16) момент інерції еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ відносно осі Oz;

17) масу, розподілену по поверхні куба $-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1$, якщо $\varrho(x, y, z) = \sqrt[3]{|xyz|}$;

18) $\iint\limits_{(S)} (x + y + z)dS$, де (S) – верхня частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

19) момент інерції відносно осі Ox частини параболоїда $2x = y^2 + z^2$, обмеженого площиною $x = 1$;

20) масу сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, якщо поверхнева густина $\varrho(x,y,z)=x^2+y^2$;

21) масу параболічної оболонки $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $(0\leqslant z\leqslant 1)$, якщо поверхнева густина $\varrho(x,y,z)=z$;

22) момент інерції відносно осі Ox частини параболоїда $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant 1$;

23) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} xdS$, де (S) – частина сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, що лежить у першому октанті;

24) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} x^2y^2dS$, де (S) – півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;

25) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} \frac{dS}{r^2}$, де (S) – циліндр $x^2+y^2=R^2$, обмежений площинами $z=0$, $z=H$, r – відстань від поверхні до початку координат.

3. Обчислити поверхневий інтеграл по поверхні (S) :

1) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x-y+z=1$ з координатними площинами;

2) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} xdxdz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x-y+z=1$ з координатними площинами;

3) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} yzdydz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $z=0$, $y=0$, $x=0$, $x+y+z=1$;

4) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} (x-y)dxdy$, де (S) – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$, $(0\leqslant z\leqslant 1)$;

5) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} (2x-y+z)dxdz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=5$ з координатними площинами;

6) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} (x+y+z)dxdz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=3$ з координатними площинами;

7) $\iint\limits_{(S)} xdydz$, де (S) – внутрішня сторона верхньої півсфери $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geqslant 0$;

8) $\iint\limits_{(S)} (x^2+2z)dydz$, де (S) – зовнішня сторона куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$;

9) $\iint\limits_{(S)} xydxdy$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=2$ з координатними площинами;

10) $\iint\limits_{(S)} y^2dxdz$, де (S) – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=4$, що лежить у першому октанті;

11) $\iint\limits_{(S)} ydydz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x-y+z=1$ з координатними площинами;

12) $\iint\limits_{(S)} xydxdz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

13) $\iint\limits_{(S)} xdydz+ydxdz+zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$;

14) $\iint\limits_{(S)} z^2dxdy$, де (S) – зовнішня частина еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

15) $\iint\limits_{(S)} (x+y)dydz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=3$ з координатними площинами;

16) $\iint\limits_{(S)} xzdxdz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=3$ з координатними площинами;

17) $\iint\limits_{(S)} x^2y^2zdxdz$, де (S) – додатня сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=9$;

18) $\iint\limits_{(S)} zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=9$;

19) $\iint\limits_{(S)} xzdxdz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$;

20) $\iint\limits_{(S)} yzdydz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x + y + z = 4$ з координатними площинами;

21) $\iint\limits_{(S)} ydxdz + zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона куба, обмеженого площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 2,\ z = 2$;

22) $\iint\limits_{(S)} (x + z)dydz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$;

23) $\iint\limits_{(S)} (y - z)dydz$, де (S) – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2,\ (0 \leqslant z \leqslant 2)$;

24) $\iint\limits_{(S)} x^2dydz$, де (S) – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, що лежить у першому октанті;

25) $\iint\limits_{(S)} (z - x)dxdz$, де (S) – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2,\ (0 \leqslant z \leqslant 3)$.

РОЗДІЛ IV. Елементи векторного аналізу

§ 4.1. Основні характеристики векторного поля

Нехай кожній точці $M(x, y, z) \in (V) \subset \mathbb{R}^3$ відповідає вектор $\vec{u}(M)$, то кажуть, що в області (V) задано ***векторне поле***.

Прикладами векторних полів є:

1) електричне поле електричних зарядів, яке характеризується в кожній точці вектором напруженості $\vec{E}$,

2) поле тяжіння, створене системою мас, яке характеризується у кожній точці вектором сили тяжіння $\vec{F}$, що діє в цій точці на одиницю маси;

3) поле швидкостей у потоці рідин, в якому кожній точці відповідає вектор швидкостей $\vec{U}$,

4) магнітне поле, створене електричним струмом, яке характеризується у кожній точці вектором магнітної індукції $\vec{H}$.

Вважаємо, що задане векторне поле виду

$$\vec{u}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де P, Q, R – скалярні функції, які є проекціями векторного поля $\vec{u}$ на відповідні координатні осі.

Зауважимо, що характеристикою векторного поля $\vec{u}$ є ***векторні лінії*** – криві, у кожній точці яких напрям векторного поля збігається з напрямом дотичної до кривої. Векторні лінії є інтегральними кривими, які зручно шукати як розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Для електричного і магнітного полів, а також поля тяжіння такі векторні лінії називаються ***силовими***, для векторного поля швидкостей – ***лініями течії***.

Циркуляцією векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (Γ) називається криволінійний інтеграл другого роду вигляду

$$L = \int\limits_{(\Gamma)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{(\Gamma)} \vec{u}d\vec{l},$$

де $d\vec{l} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$.

Якщо $\vec{u}$ – силове поле, то циркуляція цього поля по замкненому контуру (Γ) дорівнює роботі з переміщення точки у векторному полі $\vec{u}$ вздовж контура (Γ), який не обов'язково замкнений.

Величина

$$\delta(M_0) = \lim_{L\to M_0} \frac{\int\limits_{(\Gamma)} \vec{u}d\vec{l}}{\sigma},$$

де σ – площа поверхні (S), обмежена контуром σ, називається ***густиною циркуляції*** векторного поля $\vec{u}$ у точці M_0.

Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ – неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку в околі точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Тоді густина циркуляції в цій точці по довільній гладкій поверхні (S) в напрямі нормалі $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ визначається формулою

$$\delta(M_0) = \Big(R'_y(x_0,y_0,z_0) - Q'_z(x_0,y_0,z_0)\Big)\cos\alpha +$$

$$+\Big(P'_z(x_0,y_0,z_0) - R'_x(x_0,y_0,z_0)\Big)\cos\beta + \Big(Q'_x(x_0,y_0,z_0) - P'_y(x_0,y_0,z_0)\Big)\cos\gamma.$$

Отже, густина циркуляції $\delta(M_0)$ визначається вектором нормалі $\vec{n}$ і вектором

$$\operatorname{rot}\vec{u} = (R'_y - Q'_z)\vec{i} + (P'_z - R'_x)\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\vec{k},$$

який залежить від заданого векторного поля $\vec{u}$ і називається ***ротором (вихором)*** цього поля.

Звідси

$$\delta(M_0) = (\mathrm{rot}\vec{u}(M_0), \vec{n}) = |\mathrm{rot}\vec{u}(M_0)| \cos(\widehat{\mathrm{rot}\vec{u}, \vec{n}}).$$

Зауважимо, що $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ – це вектор, в напрямі якого густина циркуляції в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ є найбільшою.

Визначивши поняття ротора векторного поля $\vec{u}$, можна записати формулу Стокса у векторній формі

$$\int\limits_{(\Gamma)} \vec{u}\,\vec{dl} = \iint\limits_{(S)} (\mathrm{rot}\,\vec{u}, \vec{n}) dS.$$

Потоком векторного поля $\vec{u}$ через поверхню (S) у напрямі нормалі $\vec{n}$ називається поверхневий інтеграл першого роду

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_{(S)} (\vec{u}, \vec{n}) dS,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі $\vec{n}$.

Зауважимо, що якщо змінити орієнтацію поверхні, то вектор $\vec{n}$ змінить напрям на протилежний. В такому випадку поверхневий інтеграл змінить знак.

Величина

$$\mathrm{div}\,\vec{u}(M_0) = \lim_{V \to M_0} \frac{\iint\limits_{(S)} (\vec{u}, \vec{n}) dS}{V},$$

де (V) – область з об'ємом V, обмежена поверхнею (S), називається ***дивергенцією векторного поля*** $\vec{u}$ ***в точці*** M_0 і характеризує продуктивність цього поля в точці M_0.

Векторне поле $\vec{u}$ породжує скалярне поле $\mathrm{div}\,\vec{u}$. Точки векторного поля, в яких дивергенція додатна, називаються ***джерелами***, а точки, в яких дивергенція від'ємна, називаються ***стоками*** цього поля.

Безпосередньо з означення дивергенції випливає, що формула для обчислення її в довільній точці має вигляд

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Означення дивергенції дозволяє записати формулу Гаусса-Остроградського у векторній формі

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{u},\vec{n})dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{u}\, dxdydz.$$

Фізичний зміст формули Стокса. Циркуляція векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (Γ) дорівнює потоку ротора цього поля через поверхню (S), яка обмежена контуром (Γ).

Фізичний зміст формули Гаусса-Остроградського. Потік векторного поля $\vec{u}$ через замкнену поверхню (S) в напрямі нормалі $\vec{n}$ дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції цього поля через область (V), обмежену цією поверхнею.

Властивості дивергенції і ротора векторного поля

1. Якщо $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, де a, b, c – сталі, то $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$.

2. Якщо $\vec{w} = a\vec{u}(x,y,z) + b\vec{v}(x,y,z)$, де $\vec{u}$, $\vec{v}$ – векторні поля, то

$$\operatorname{div}\vec{w} = a\operatorname{div}\vec{u} + b\operatorname{div}\vec{v},$$

$$\operatorname{rot}\vec{w} = a\operatorname{rot}\vec{u} + b\operatorname{rot}\vec{v}.$$

3. Якщо $f(x,y,z)$ – скалярна функція, то

$$\operatorname{div}(f\vec{u}) = (\operatorname{grad} f, \vec{v}) + f\operatorname{div}\vec{u},$$

$$\operatorname{rot}(f\vec{u}) = [\operatorname{grad} f, \vec{u}] + f\operatorname{rot}\vec{u}.$$

4. Якщо $\vec{u}$ і $\vec{v}$ – векторні поля, то

$$\operatorname{div}[\vec{u},\vec{v}] = (\vec{v},\operatorname{rot}\vec{u}) - (\vec{u},\operatorname{rot}\vec{v}),$$

де $[\vec{u},\vec{v}]$– векторний добуток векторів $\vec{u}$ і $\vec{v}$.

5. Справедливі рівності

$$\operatorname{div}\vec{u} = (\nabla, \vec{u}),$$

$$\operatorname{rot}\vec{u} = [\nabla, \vec{u}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

де $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамільтона.

Вправи

1. Довести властивості 3, 4 і 5 для дивергенції і ротора довільного векторного поля $\vec{u}$.

2. Знайти ротор заданого векторного поля:

1) $\vec{u} = \dfrac{y}{x}\vec{i} + \dfrac{z}{y}\vec{j} + \dfrac{x}{z}\vec{k}$, $M_0(1;1;1)$;

2) $\vec{u} = \dfrac{y}{\sqrt{z}}\vec{i} - \dfrac{x}{\sqrt{z}}\vec{j} + \sqrt{xy}\vec{k}$, $M_0(1;1;1)$;

3) $\vec{u} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$;

4) $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;

5) $\vec{u} = r\vec{r}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

6) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

7) $\vec{u} = (\vec{r}, \vec{c})$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = a\vec{i} + b\vec{j} + d\vec{k}$;

8) $\vec{u} = [\vec{r}, \vec{c}]$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = a\vec{i} + b\vec{j} + d\vec{k}$.

3. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{u}$:

1) $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$, $\varphi = e^{x+y+z}$;

2) $\vec{u} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, $M_0(1;3;-1)$;

3) $\vec{u} = (x-y)(y-z)\vec{i} + (y-z)(z-x)\vec{j} + (z-x)(x-y)\vec{k}$, $M(1;2;1)$;

4) $\vec{u} = [\vec{v}, \vec{r}]$, $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

5) $\vec{u} = r[\vec{c}, \vec{r}]$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = a\vec{i} + b\vec{j} + d\vec{k}$;

6) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

4. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{u}$ вздовж вказаної кривої в додатному напрямі:

1) $\vec{u} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$, c – стала, $(\Gamma) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$;

2) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{j}$, (Γ) – замкнена крива, обмежена лініями $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

3) $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, (Γ) – лінія перетину поверхні $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ з площиною $z = 0$;

4) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, (Γ) – замкнений контур $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$;

5) $\vec{u} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, (Γ) – замкнена крива перетину параболоїда $x^2 + y^2 = 1 - y$ з координатними площинами;

6) $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, (Γ) – коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$;

7) $\vec{u} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$, (Γ) – контур трикутника з вершинами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$;

8) $\vec{u} = (y - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, (Γ) – дуга гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{b}{2\pi}t$, від точки $M(a; 0; 0)$ до точки $N(a; 0; b)$ відрізка NM;

9) $\vec{u} = y^2z^2\vec{i} + x^2z^2\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$, (Γ) – замкнена крива $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$;

10) $\vec{u} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$, (Γ) – замкнений контур навколо осі Oz.

5. Обчислити потік векторного поля $\vec{u}$ через поверхню (S):

1) $\vec{u} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, (S) – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = x$;

2) $\vec{u} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, (S) – зовнішня поверхня конуса $x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{R^2}{h^2}z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$;

3) $\vec{u} = xy\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}$, (S) – зовнішня частина площини $3x + y + z = 3$, яка міститься в першому октанті;

4) $\vec{u} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, (S) – зовнішня частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

5) $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, (S) – зовнішня сторона замкненої поверхні $y = x^2 + z^2$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $x \geqslant 0$;

6) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, (S) – зовнішня сторона куба $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$;

7) $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, (S) – зовнішня сторона частини параболоїда $y = x^2 + y^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, розміщена в першому октанті;

8) $\vec{u} = (x+z)\vec{i} + (z+y)\vec{k}$, (S) – зовнішня сторона замкненої поверхні $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = y$, $z \geqslant 0$;

9) $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{v}$, (S) – довільна замкнена поверхня;

10) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (S) – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

6. Довести формулу

$$\nabla^2(u,v) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v,$$

де $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\nabla^2 = \nabla\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

7. Довести формулу

$$\operatorname{grad} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

8. Виразити $\operatorname{rot}\vec{u}(x,y,z)$:

а) в циліндричних координатах,

б) в сферичних координатах.

9. Довести рівність

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\vec{v}}{2}\right)^2 + [\operatorname{rot}\vec{v}, \vec{v}],$$

де $\vec{v}(x,y,z,t)$ – нестаціонарне поле швидкостей потоку рідини.

10. Довести, що

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_{(V)} \nabla^2 u \, dxdydz,$$

де (S) обмежує тіло (V).

Приклади розв'язування вправ

2.6. Оскільки $r^3 = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$, то векторне поле $\vec{u}$ матиме вигляд

$$\vec{u} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{k},$$

де

$$P(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\ \ Q(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$
$$R(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Тоді

$$P'_y=\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y=-3xy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$P'_z=\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_z=-3xz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$Q'_x=\left(y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=-3xy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$Q'_z=\left(y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_z=-3yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$R'_x=\left(z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=-3xz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$R'_y=\left(z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y=-3yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

За означенням ротора векторного поля $\vec{u}$ запишемо:

$$\operatorname{rot}\vec{u}=(R'_y-Q'_z)\vec{i}+(P'_z-R'x)\vec{j}+(Q'_x-P'_y)\vec{k}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=0.$$ ►

4.8. За означенням циркуляції векторного поля $\vec{u}$ запишемо

$$L=\int\limits_{(lNM)}(y-x)dx+(z-y)dy+(x-z)dz=\int\limits_{(l)}(y-x)dx+(z-y)dy+(x-z)dz+$$
$$+\int\limits_{(NM)}(y-x)dx+(z-y)dy+(x-z)dz=I_1+I_2.$$

Обчислимо кожен з інтегралів зокрема:

$$I_1=\left|\begin{array}{c}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=\frac{b}{2\pi}t,\\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\end{array}\right|=\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2(\sin t-\cos t)(-\sin t)+\left(\frac{b}{2\pi}t-a\sin t\right)a\cos t+\right.$$
$$\left.+\left(a\cos t-\frac{b}{2\pi}t\right)\cdot\frac{b}{2\pi}\right)dt=\int\limits_0^{2\pi}\left(-a^2\sin^2 t+\frac{ab}{2\pi}t\cos t+\frac{ab}{2\pi}\cos t-\frac{b^2}{4\pi^2}t\right)dt=$$

$$= -a^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2\pi^2} dt + \frac{ab}{2\pi}(t+1)\sin t\Big|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos t dt - \frac{b^2t^2}{8\pi^2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2\pi}\sin t\Big|_0^{2\pi} - \frac{b^2}{2} = -a^2\pi - \frac{b^2}{2} = -\frac{1}{2}(2a^2\pi + b^2).$$

Для обчислення інтеграла I_2 складемо рівняння прямої (NM):

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-b}{-b}.$$

Запишемо його в параметричному виді $\begin{cases} x = a, \\ y = 0, \\ z = -bt + b. \end{cases}$ Якщо z змінюється від b до нуля, то t зніюється від 0 до 1.

Тоді

$$I_2 = \int\limits_0^1 (a + bt - b)(-b)dt = -b\left((a-b)t + \frac{bt^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -b\left(a - b + \frac{b}{2}\right) = -b\left(a - \frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2}(b - 2a).$$

Отже,

$$L = -\frac{1}{2}(2a^2\pi + b^2) + \frac{b}{2}(b - 2a) = -a(\pi a + b). \quad \blacktriangleright$$

5.8. Скористаємося формулою Гаусса-Остроградського. Потік векторного поля $\vec{u}$ через поверхню (S) обмежену $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0,\ z = y,\ z \geqslant 0$, дорівнює величині

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} (x+y)dydz + (z+y)dxdy = 2\iiint\limits_{(V)} dxdydz,$$

де $(V) = \{(x,y,z):\ x^2 + y^2 \leqslant 9,\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$.

Тоді

$$\Pi = 2\iiint\limits_{(V)} dxdydz = 2\iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_0^y dz,$$

де $(D) = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 9\}$.

Отже,

$$\Pi = 2\iint\limits_{(D)} y dx dy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ J(r,\varphi) = r, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 3 \end{array} \right| = 2\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^3 r^2 \sin\varphi dr =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^\pi r^3\Big|_0^3 \sin\varphi d\varphi = 18\int\limits_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 18(-\cos\varphi)\Big|_0^\pi = 36. \quad \blacktriangleright$$

§ 4.2. Спеціальні види векторних полів

Нехай задано векторне поле

$$\vec{u} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Векторне поле $\vec{u}$ називається ***потенціальним*** в області $(V) \subset \mathbb{R}^3$, якщо його можна подати в цій області як градієнт деякого скалярного поля φ: $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$.

Функцію φ в цьому випадку називають ***скалярним потенціалом*** векторного поля $\vec{u}$ і визначають з рівностей:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Це рівносильно твердженню, що вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом функції φ. Первісна функції φ називається ***потенціальною функцією*** (або ***скалярним потенціалом***) поля $\vec{u}$.

Для того, щоб поле $\vec{u}$ було потенціальним, необхідно і достатньо, щоб у всій розглядуваній області виконувались рівності

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Потенціальне поле характеризується тим, що циркуляція по простому замкненому контуру завжди рівна нулю, а криволінійний інтеграл по кривій (L), що з'єднує дві будь-які точки поля, не залежить від форми кривої.

Сама потенціальна функція з точністю до сталої визначається криволінійним інтегралом $\int\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz$, який береться від фіксованої точки M_0 до змінної точки M.

Векторне поле $\vec{u}$ називається ***безвихровим*** в області $(V) \subset \mathbb{R}^3$, якщо в цій області $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$.

Векторне поле $\vec{u}$ називається ***соленоїдальним*** в області $(V) \subset \mathbb{R}^3$, якщо в цій області $\operatorname{div} \vec{u} = 0$.

Оскільки $\operatorname{div} \vec{u}$ характеризує густину джерел поля $\vec{u}$, то в тій області, де поле $\vec{u}$ соленоїдальне, немає джерел цього поля.

Якщо поле соленоїдальне, то потік вектора $\vec{u}$ через будь-яку замкнену поверхню (S), що обмежує дане тіло (V), рівний нулю. Якщо взяти відрізок векторної трубки в якості тіла (V), між двома довільними її перерізами, то у випадку соленоїдального поля одержимо, що потік вектора через поперечні перерізи векторної трубки зберігає сталу величину. Цей потік називається інтенсивністю трубки.

Зауважимо, що якщо задане скалярне поле $\varphi(x, y, z)$, то над ним можна виконати тільки одну диференціальну операцію першого порядку, а саме $\operatorname{grad} \varphi$. Оскільки $\operatorname{grad} \varphi$ є вектором, то можна визначити диференціальні операції другого порядку по відношенню до скалярного поля, а саме $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ і $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$.

Якщо задане векторне поле $\vec{u}(x, y, z)$, то воно допускає дві диферецiальнi операції першого порядку: $\operatorname{div} \vec{u}$ і $\operatorname{rot} \vec{u}$. Оскільки $\operatorname{div} \vec{u}$ – скалярна величина, то вона допускає одну диференціальну операцію другого порядку по відношенню до поля $\vec{u}(x, y, z)$, а саме $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}$. Однак, $\operatorname{rot} \vec{u}$ є векторною величиною, тому над нею можна виконати дві диференціальні операції другого порядку по відношенню до $\vec{u}$: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u}$ і $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}$.

Операцію $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ називають ***оператором Лапласа*** і позначають Δ, тобто

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi.$$

За допомогою оператора Гамільтона оператор Лапласа записують у вигляді

$$\Delta\varphi = (\nabla(\nabla\varphi)) = \nabla^2\varphi.$$

Враховуючи, що

$$\nabla^2 = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

дістанемо

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Зауважимо, що функцію φ, яка задовольняє в деякій області рівняння Лапласа $\Delta\varphi = 0$, називається ***гармонічною*** в цій області.

Вправи

1. Довести, що дане векторне поле є потенціальним і знайти його потенціал:

1) $\vec{u} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$;

2) $\vec{u} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$;

3) $\vec{u} = \dfrac{2}{\sqrt{y+z}}\vec{i} - \dfrac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\vec{j} - \dfrac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\vec{k}$;

4) $\vec{u} = (3x^2y^2z + y^2z^3)\vec{i} + (2x^3yz + 2xyz^3)\vec{j} + (x^3y^2 + 3xy^2z^2)\vec{k}$;

5) $\vec{u} = \dfrac{4\vec{r}}{r^6}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

6) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

7) $\vec{u} = f(r)\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

8) $\vec{u} = \mathrm{grad}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{z}$.

2. Яке із заданих векторних полів є соленоїдальним:

1) $\vec{u} = e^{xy}(-x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k})$;

2) $\vec{u} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - (x^2+y^2)z\vec{k}$;

3) $\vec{u} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

4) $\vec{u} = \dfrac{y}{z}\vec{i} + \dfrac{z}{x}\vec{j} + \dfrac{x}{y}\vec{k}$;

5) $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

6) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. Яке із заданих векторних полів є безвихровим:

1) $\vec{u} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k}$;

2) $\vec{u} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{x + y + z}$;

3) $\vec{u} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$;

4) $\vec{u} = 2xy\vec{i} + (x^2 + 1)\vec{j}$;

5) $\vec{u} = \dfrac{y}{z}\vec{i} + \dfrac{z}{x}\vec{j} + \dfrac{x}{y}\vec{k}$.

4. Нехай u, v – скалярні поля, $\vec{a}$ – змінний вектор, $\vec{c}$ – сталий вектор. Вивести формули для обчислення наступних величин:

1) $\Delta(uv)$;	2) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$;
3) $\operatorname{div}\operatorname{grad}(uv)$;	4) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$;
5) $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u, \vec{a})$;	6) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u, \vec{c})$.

5. Довести, що для гармонічних в області (V) функцій u та w мають місце формули:

1) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} u\frac{\partial w}{\partial n} dS = \iiint\limits_{(V)} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w)\,dxdydz$;

2) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = 0$;

3) $\displaystyle\iint\limits_{(S)} \frac{\partial(uw)}{\partial n} dS = 2\iiint\limits_{(V)} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w)\,dxdydz$, де (S) – поверхня, що обмежує область (V).

6. Нехай $\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ – векторне поле задане в плоскій області (D), що обмежена кусково-гладким контуром (Γ). Довести формулу

$$\iint\limits_{(D)} \operatorname{div}\vec{a}\, dS = \int\limits_{(\Gamma)} (\vec{a}, \vec{n})\,dl,$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до (Γ).

Приклади розв'язування вправ

1.5. Враховуючи, що $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, векторне поле $\vec{u} = \dfrac{4\vec{r}}{r^6}$ можна записати у вигляді

$$\vec{u}(x,y,z) = \frac{4x}{(x^2+y^2+z^2)^3}\vec{i} + \frac{4y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\vec{j} + \frac{4z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\vec{k}.$$

Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{u}$:

$$P(x,y,z) = \frac{4x}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \ \ Q(x,y,z) = \frac{4y}{(x^2+y^2+z^2)^3},$$
$$R(x,y,z) = \frac{4z}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

Тоді

$$P'_y = -\frac{24xy}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \quad P'_z = -\frac{24xz}{(x^2+y^2+z^2)^4},$$
$$Q'_x = -\frac{24xy}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \quad Q'_z = -\frac{24yz}{(x^2+y^2+z^2)^4},$$
$$R'_x = -\frac{24xz}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \quad R'_y = -\frac{24yz}{(x^2+y^2+z^2)^4}.$$

Звідси $R'_y - Q'_z = 0$, $P'_z - R'_x = 0$, $Q'_x - P'_y = 0$. Тобто $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$. Отже, векторне поле $\vec{u}(x,y,z)$ є потенціальним.

Знайдемо скалярний потенціал $\varphi(x,y,z)$ векторного поля $\vec{u}(x,y,z)$.

Оскільки $\varphi'_x = P(x,y,z)$, $\varphi'_y = Q(x,y,z)$, $\varphi'_z = R(x,y,z)$, то $d\varphi = \vec{u}\,d\vec{r}$, де $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$.

Звідси,

$$\varphi(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \vec{u}\,d\vec{r} = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{4\vec{r}d\vec{r}}{r^6},$$

де (x_0, y_0, z_0) – фіксована точка.

З того, що $\vec{r}^2 = r^2$, маємо $\vec{r}\,d\vec{r} = rdr$. Тоді

$$\varphi(x,y,z) = 4\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{rdr}{r^6} = 4\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{dr}{r^5} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{1}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^2}$$

Отже, $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$, де $\varphi = -\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \dfrac{1}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^2}$ – скалярний потенціал заданого поля $\vec{u}(x,y,z)$. ▶

3.5. Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{u}$ заданого векторного поля $\vec{u}(x,y,z)$:

$$\operatorname{rot}\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{y}{z} & \dfrac{z}{x} & \dfrac{x}{y}\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x}\right)\right)+$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right)\right)=$$

$$=\vec{i}\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)+\vec{j}\left(-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{y}\right)+\vec{k}\left(-\frac{z}{x^2}-\frac{1}{z}\right)\neq 0.$$

Отже, векторне поле $\vec{u}(x,y,z)$ не є безвихровим. ▶

4.3. Нехай $u(x,y,z)$ і $v(x,y,z)$ – дві скалярні функції. Тоді

$$\operatorname{grad}(u\cdot v)=\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{i}+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{k}.$$

Звідси

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(u\cdot v))=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+$$

$$+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=v\Delta u+2(\operatorname{grad}u,\ \operatorname{grad}v)+u\Delta v.$$ ▶

Індивідуальні завдання до розділу IV

1. Обчислити потік векторного поля $\vec{u}$ через частину площини σ, розташованої в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).

1) $\vec{u}=y\vec{j}+z\vec{k}, \quad \sigma:\ x+y+z=1;$

2) $\vec{u}=x\vec{i}+2y\vec{j}+5z\vec{k}, \quad \sigma:\ x+2y+\dfrac{z}{2}=1;$

3) $\vec{u}=2x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \quad \sigma:\ x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1;$

4) $\vec{u} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + y + z = 1;$

5) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ \dfrac{x}{3} + y + \dfrac{z}{2} = 1;$

6) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + 3y + z = 1;$

7) $\vec{u} = y\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad \sigma: \ \dfrac{x}{2} + y + z = 1;$

8) $\vec{u} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

9) $\vec{u} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 8z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1;$

10) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1;$

11) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + 3y + z = 1;$

12) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

13) $\vec{u} = -x\vec{i} + y\vec{j} + 12z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1;$

14) $\vec{u} = x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}, \quad \sigma: \ \dfrac{x}{3} + y + \dfrac{z}{2} = 1;$

15) $\vec{u} = x\vec{i} + 4y\vec{j} + 5z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1;$

16) $\vec{u} = x\vec{i} + 9y\vec{j} + 8z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1;$

17) $\vec{u} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

18) $\vec{u} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1;$

19) $\vec{u} = x\vec{i} - y\vec{j} + 6z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1;$

20) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1;$

21) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

22) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

23) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + 3y + z = 1;$

24) $\vec{u} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1;$

25) $\vec{u} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1.$

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{u}$ через замкнену поверхню σ (нормаль зовнішня).

1) $\vec{u} = 2(z - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z, \ z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

2) $\vec{u} = 6x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} 3 - 2(x^2 + y^2) = z, \\ x^2 + y^2 = z^2, \ z \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\vec{u} = 8x\vec{i} - 2y\vec{j} + x\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0, \\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

4) $\vec{u} = 2x\vec{i} + z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z, \\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0; \end{cases}$

5) $\vec{u} = z\vec{i} - 4y\vec{j} + 2x\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1; \end{cases}$

6) $\vec{u} = (y + 2z)\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} 9 - \dfrac{2}{3}(x^2 + y^2) = z, \\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0; \end{cases}$

7) $\vec{u} = (y + z)\vec{i} + (x - 2y + z)\vec{j} + x\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

8) $\vec{u} = (x + z)\vec{i} + (z + y)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x,\ z = 0,\ z \geqslant 0; \end{cases}$

9) $\vec{u} = (z + y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ y = 2; \end{cases}$

10) $\vec{u} = -2x\vec{i} + z\vec{j} + (x + y)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

11) $\vec{u} = (2x + y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} z = 2 - 4(x^2 + y^2), \\ z = 4(x^2 + y^2); \end{cases}$

12) $\vec{u} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} y = 2x,\ y = 4x, \\ x = 1,\ z = y^2,\ z = 0; \end{cases}$

13) $\vec{u} = x\vec{i} - (x + 2y)\vec{j} + y\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z,\ z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6; \end{cases}$

14) $\vec{u} = z\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z, \\ z = 4; \end{cases}$

15) $\vec{u} = 3x\vec{i} - z\vec{j},\ \sigma : \begin{cases} 6 - x^2 - y^2 = z, \\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0; \end{cases}$

16) $\vec{u} = y\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + x\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

17) $\vec{u} = (2x - 3z)\vec{i} + (3x + 2z)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4 - x - y,\ z = 0; \end{cases}$

18) $\vec{u} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} 4 - 2(x^2 + y^2) = z, \\ 2(x^2 + y^2) = z; \end{cases}$

19) $\vec{u} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2x; \end{cases}$

20) $\vec{u} = (z + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 3x + 4y + z = 12,\ z = 0; \end{cases}$

21) $\vec{u} = (3x - y - z)\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2y; \end{cases}$

22) $\vec{u} = z\vec{i} + (3y - x)\vec{j} - z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + 2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

23) $\vec{u} = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 3x + y = 6,\ x + y + z = 6,\ y = 0,\ z = 0; \end{cases}$

24) $\vec{u} = (2y - 15x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} - (x - 3y)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4},\ z = 0; \end{cases}$

25) $\vec{u}=2x\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k},\ \sigma:\begin{cases} y=x^2,\ y=4x^2,\ y=1,\\ x\geqslant 0,\ z=y,\ z=0.\end{cases}$

3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (L), використовуючи формулу Гріна.

1) $\vec{u}=(xy+x+y)\vec{i}+(xy+x-y)\vec{j},\quad (L):\ (x-1)^2+y^2=1;$

2) $\vec{u}=(2y-x)\vec{i}+xy\vec{j},\quad (L):\ x=0,\ y=0,\ x+y=2;$

3) $\vec{u}=(1-x^2)\vec{i}+x(1+y^2)\vec{j},\quad (L):\ x^2+y^2=1;$

4) $\vec{u}=2xy\vec{i}-(x+y)\vec{j},\quad (L):\ y=3,\ y=x^2-1;$

5) $\vec{u}=(x^2-y^2)\vec{i}-2xy\vec{j},\quad (L):\ y=4-x^2,\ y=0.$

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (L), використовуючи формулу Стокса.

6) $\vec{u}=(x+2z)\vec{i}+(x+3y+z)\vec{j}+(5x+y)\vec{k},\quad (L):\ x+y+z=2,$ $x=0,\ y=0,\ z=0;$

7) $\vec{u}=(x+y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y+z)\vec{k},\quad (L):\ x+y+z=2,\ x=0,$ $y=0,\ z=0;$

8) $\vec{u}=z\vec{j}-y\vec{k},\quad (L):\ x^2+y^2=4,\ x+2z=5;$

9) $\vec{u}=x^2y^3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k},\quad (L):\ x^2+y^2=9,\ z=0;$

10) $\vec{u}=(2z-x)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+3z\vec{k},\quad (L):\ x+4y+z=4,\ x=0,$ $y=0,\ z=0;$

11) $\vec{u}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k},\quad (L):\ x^2+y^2=1,\ x+y+z=1;$

12) $\vec{u}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k},\quad (L):\ 2(1-x^2-y^2)=z,\ z=0;$

13) $\vec{u}=(z^2-x^2)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+(y^2-z^2)\vec{k},\quad (L):\ x^2+y^2+z=6,\ x^2+y^2=z^2;$

14) $\vec{u}=(x-y+3z)\vec{i}+(y-3x+z)\vec{j}+(x-3y+z)\vec{k},\ (L):\ 2x+3y+6z=3,$ $x=0,\ y=0,\ z=0;$

15) $\vec{u}=(x+3y+2z)\vec{i}+(2x+z)\vec{j}+(x-y)\vec{k},\quad (L):\ 3x+2y+6z=6,$ $x=0,\ y=0,\ z=0;$

16) $\vec{u}=(x-2z)\vec{i}+(x+3y+z)\vec{j}+(5x+y)\vec{k},\quad (L):\ x+y+z=1,$ $x=0,\ y=0,\ z=0;$

17) $\vec{u}=-y\vec{i}+2x\vec{j}+z\vec{k},\quad (L):\ (x-2)^2+y^2=1,\ z=0;$

18) $\vec{u} = (y-x)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$, $\quad (L): \ x+y+z=1, \ x=0, \ y=0, \ z=0$;

19) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{j} + 2\vec{k}$, $\quad (L): \ x^2+y^2=z, \ z=1$;

20) $\vec{u} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$, $\quad (L): \ x^2+y^2=1, \ z=0$.

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (L).

21) $\vec{u} = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad (L): \ x=2\cos t, \ y=2\sin t, \ z=3$;

22) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{k}$, $\quad (L): \ x=2\cos^3 t, \ y=2\sin^3 t, \ z=0$;

23) $\vec{u} = z\vec{i} - x\vec{k}$, $\quad (L)$ – відрізок прямої між точками $A(1;1;1)$, $B(3;2;1)$;

24) $\vec{u} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + x\vec{k}$, $\quad (L): \ x=y^2+z^2, \ x=9$;

25) $\vec{u} = 2x^2\vec{i} - y\vec{k}$, $\quad (L)$ – відрізок прямої між точками $A(2;0;1)$, $B(3;2;2)$.

4. Перевірити, чи буде векторне поле $\vec{u}$ потенціальним і соленоїдним. Якщо поле $\vec{u}$ потенціальне, знайти його потенціал.

1) $\vec{u} = (3x-yz)\vec{i} + (3y-xz)\vec{j} + (3z-xy)\vec{k}$;

2) $\vec{u} = (8x-5yz)\vec{i} + (8y-5xz)\vec{j} + (8z-5xy)\vec{k}$;

3) $\vec{u} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

4) $\vec{u} = (x^2+yz)\vec{i} + (y^2+xz)\vec{j} + (z^2+xy)\vec{k}$;

5) $\vec{u} = 6xy\vec{i} + (3x^2-2y)\vec{j}$;

6) $\vec{u} = (10x-3yz)\vec{i} + (10y-3xz)\vec{j} + (10z-3xy)\vec{k}$;

7) $\vec{u} = (6x+7yz)\vec{i} + (6y+7xz)\vec{j} + (6z+7xy)\vec{k}$;

8) $\vec{u} = (8x+5yz)\vec{i} + (8y+5xz)\vec{j} + (8z+5xy)\vec{k}$;

9) $\vec{u} = (x+yz)\vec{i} + (y+xz)\vec{j} + (z+xy)\vec{k}$;

10) $\vec{u} = yz^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$;

11) $\vec{u} = (4x-7yz)\vec{i} + (4y-7xz)\vec{j} + (4z-7xy)\vec{k}$;

12) $\vec{u} = (11x-3yz)\vec{i} + (11y-3xz)\vec{j} + (11z-3xy)\vec{k}$;

13) $\vec{u} = (2x+7yz)\vec{i} + (2y+7xz)\vec{j} + (2z+7xy)\vec{k}$;

14) $\vec{u} = (x-2yz)\vec{i} + (y-2xz)\vec{j} + (z-2xy)\vec{k}$;

15) $\vec{u} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$;

16) $\vec{u} = (4x-2yz)\vec{i} + (4y-7xz)\vec{j} + (4z-7xy)\vec{k}$;

17) $\vec{u} = (x+2yz)\vec{i} + (y+2xz)\vec{j} + (z+2xy)\vec{k}$;

18) $\vec{u} = (9x + 5yz)\vec{i} + (9y + 5xz)\vec{j} + (9z + 5xy)\vec{k}$;

19) $\vec{u} = (3x + yz)\vec{i} + (3y + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$;

20) $\vec{u} = (7x - 3yz)\vec{i} + (7y - 3xz)\vec{j} + (7z - 3xy)\vec{k}$;

21) $\vec{u} = (x + 7yz)\vec{i} + (y + 7xz)\vec{j} + (z + 7xy)\vec{k}$;

22) $\vec{u} = (7x - 2yz)\vec{i} + (7y - 2xz)\vec{j} + (7z - 2xy)\vec{k}$;

23) $\vec{u} = (3x + 4yz)\vec{i} + (3y + 4xz)\vec{j} + (3z + 4xy)\vec{k}$;

24) $\vec{u} = (12x + yz)\vec{i} + (12y + xz)\vec{j} + (12z + xy)\vec{k}$;

25) $\vec{u} = (5x + 4yz)\vec{i} + (5y + 4xz)\vec{j} + (5z + 4xy)\vec{k}$.

Рекомендована література

1. *Виноградова И.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 352 с.
2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
3. *Денисьєвський М.О.* Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних / М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський. — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2012. — 276 с.
4. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ. Сборник задач / А.Я. Дороговцев. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.
5. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навчальний посібник / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч.2. – 470 с.
6. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз: Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.
7. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – К.: Вища школа, 1992. – Ч.1. – 495 с.
8. *Никольський С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольський. – М.: Наука, 1983. – Т.2. – 448 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.3. – 662 с.
10. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: Підручник / М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – Ч.2. – 510 с.