Інтеграли, залежні від параметра

Нехай $f(x,y)$ — функція двох змінних, визначена для всіх $x \in [a;b]$ та $y \in \mathcal{Y}$, причому для довільного $y \in \mathcal{Y}$ існує інтеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Цей інтеграл є функцією від змінної y, яку називають параметром. Природньо постає питання: за яких умов виконується кожне із співвідношень:

1) $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(x) \implies \lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \int\limits_a^b g(x)dx;$
2) $f \in C_{[a;b]\times\mathcal{Y}} \implies F \in C_{\mathcal{Y}};$
3) $F'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx;$
4) $\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big)dx.$

1.1. Рівномірна збіжність функції двох змінних до граничної функції

Нехай $E, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$, $f: E\times\mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ — функція двох змінних, а y_0 — гранична точка множини $\mathcal{Y}$. Позначимо через $\overset{o}{U}_\delta(y_0) \overset{def}{=} \{y : 0 < |y - y_0| < \delta\}$ — проколений окіл точки y_0.

Означення 1. *Нехай $g: E \to \mathbb{R}$ – деяка функція. Функцію $f(x,y)$ називають рівномірно збіжною щодо $x \in E$ при $y \to y_0$ до $g(x)$ і записують $f(x,y) \underset{E}{\overset{y\to y_0}{\rightrightarrows}} g(x)$, якщо $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in E)(\forall y \in \mathcal{Y} : y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0)) : \{|f(x,y) - g(x)| < \varepsilon\}$.*

Запис $f(x,y) \overset{y\to y_0}{\underset{E}{\rightrightarrows}} g(x)$ рівносильний такому

$$\lim_{y\to y_0} \sup_{x\in E} |f(x,y) - g(x)| = 0.$$

Зауважимо, що з рівномірної збіжності випливає поточкова збіжність, але не навпаки.

Теорема 1. *Функція $f(x,y)$ при $y \to y_0$ рівномірно щодо $x \in E$ збігається до функції $g(x)$ тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності $\{y_n\} \subset \mathcal{Y}\backslash\{y_0\}$ такої, що $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, функціональна послідовність $\{f_n\}$, де $f_n(x) = f(x,y_n)$ збігається рівномірно на множині E до граничної функції g.*

Доведення. *1) Необхідність.* Нехай $f(x,y)$ прямує до $g(x)$ рівномірно на E при $y \to y_0$, а послідовності $\{f_n\}$ та $\{y_n\}$ такі, як в умові теореми. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, щоб

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in E)(\forall y \in \mathcal{Y} : y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0)) : \{|f(x,y) - g(x)| < \varepsilon\}.$$

Оскільки $y_n \to y_0$, то

$$(\exists N = N(\delta))(\forall n > N) : \{|y_n - y_0| < \delta\},$$

звідси і з попередньої умови випливає, що

$$(\forall x \in E)(\forall n > N) : \{|f(x,y_n) - g(x)| < \varepsilon\}.$$

Отже, $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\underset{E}{\rightrightarrows}} g(x)$

2) Достатність. Нехай для довільної послідовності $\{y_n\}$, яка задовольняє умови теореми, послідовність $f_n(x) = f(x,y_n)$ рівномірно на E збігається до функції $g(x)$. Припустимо, що $f(x,y)$ не є рівномірно збіжною на E до $g(x)$ при $y \to y_0$, тобто

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x_\delta \in E)(\exists y_\delta \in \overset{o}{U}_\delta(y_0)) : \{|f(x_\delta, y_\delta) - g(x_\delta)| \geq \varepsilon\}.$$

Нехай δ_n — послідовність додатних чисел, збіжна до нуля. Тоді для послідовностей $\{y_n\}$, $\{x_n\}$, де $y_n = y_{\delta_n}$, $x_n = x_{\delta_n}$ виконуються нерівності $0 < |y_n - y_0| < \delta_n$ і $|f(x_n,y_n) - g(x_n)| \geq \varepsilon$.

Отже, послідовність $\{y_n\}$ збігається до y_0, а послідовність f_n, де $f_n(x) = f(x, y_n)$, не збігається до g рівномірно на E. Отже, ми прийшли до суперечності. Теорему доведено. $\bullet$

Теорема 2. ***(Критерій Коші):*** *Функція $f(x,y)$ при $y \to y_0$ рівномірно щодо $x \in E$ збігається до деякої функції $g(x)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)(\forall y, y' \in \mathcal{Y} \cap \overset{o}{U}_\delta(y_0)) : \{|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon\}.$$

Доведення. *1) Необхідність.* Нехай $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = g(x)$ справджується рівномірно щодо $x \in E$. Змінивши в означенні рівномірної збіжності ε на $\frac{\varepsilon}{2}$ переконуємось в існуванні числа $\delta > 0$ такого, що для всіх $x \in E$ та $y, y' \in \overset{o}{U}_\delta(y_0)$ справджуються нерівності

$$|f(x,y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ і } |f(x,y') - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$|f(x,y) - f(x,y')| < \varepsilon.$$

2) Достатність. З умови теореми та з критерію Коші існування границі функції в точці слідує, що для довільного $x \in E$ існує скінченна границя $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = g(x)$. Переходячи в умові

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)(\forall y, y' \in \mathcal{Y} \cap \overset{o}{U}_\delta(y_0)) : \{|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon\}$$

до границі при $y' \to y_0$ і фіксованому $y \in \mathcal{Y} \cap \overset{o}{U}_\delta(y_0)$ отримуємо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)(\forall y \in \mathcal{Y} \cap \overset{o}{U}_\delta(y_0)) : \{|f(x,y) - g(x)| < \varepsilon\},$$

тобто $f(x,y)$ при $y \to y_0$ і $x \in E$ рівномірно збігається до функції $g(x)$. $\bullet$

Наслідок. ***(Неперервність граничної функції):*** *Якщо функція $f(x,y)$ для будь-якого $y \in \mathcal{Y}$ є неперервною за змінною x на проміжку $E = [a;b]$ і при $y \to y_0$ рівномірно збігається до функції $g(x)$, то $g(x) \in C_{[a;b]}$.*

Теорема 3. *Нехай функція* $f(x,y)$ *неперервна на прямокутнику*

$$\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ c \le y \le d\}, \ -\infty < c < d < \infty.$$

Тоді для кожного $y_0 \in [c;d]$ *виконується співвідношення*

$$f(x,y) \underset{[a;b]}{\overset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} g(x).$$

Доведення. За теоремою Кантора:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in [a;b] : \ |x' - x''| < \delta)$$

$$(\forall y', y'' \in [c;d] : \ |y' - y''| < \delta) : \{|f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon\}.$$

Нехай $x' = x'' = x, \ y' = y$, і $y'' = y_0$. Тоді

$$(\forall x \in [a;b])(\forall y \in [c;d] : \ |y - y_0| < \delta) : \ \{|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon\}.$$

А це означає, що $f(x,y)$ прямує до $f(x,y_0)$ рівномірно щодо $x \in [a;b]$ при $y \to y_0$. $\bullet$

1.2. Власні інтеграли, залежні від параметра

Вважаємо, що $f : [a;b] \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < +\infty, \ \mathcal{Y} \subset \mathbb{R})$ — функція двох змінних, причому для довільного $y \in \mathcal{Y}$ існує інтеграл

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Функцію $F(y)$ називають ***інтегралом, залежним від параметра*** y.

Розглянемо ряд властивостей цього інтеграла.

Теорема 4. ***(Граничний перехід під знаком інтеграла):*** *Нехай* $y_0 \in \mathcal{Y}$ *— гранична точка множини* $\mathcal{Y}$. *Якщо для будь-якого* $y \in \mathcal{Y}$ *функція* $x \to f(x,y)$ *є інтегровною на* $[a;b]$ *і* $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = g(x)$ *рівномірно щодо* $x \in [a;b]$, *то функція* g *є інтегровною на* $[a;b]$ *і можна переходити до границі під знаком інтеграла:*

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доведення. Нехай $y_n \in \mathcal{Y} \setminus \{y_0\}$, $n \in \mathbb{N}$ і $y_n \to y_0$. З теореми 1 випливає, що $f(x, y_n) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} g(x)$, тому $g(x)$ є інтегровною на відрізку $[a; b]$ і має місце рівність

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x, y)dx.$$

З того, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, отримуємо, що

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx. \quad \bullet$$

Наслідок. *Нехай y_0 — гранична точка множини $\mathcal{Y}$. Якщо для будь-якого $y \in \mathcal{Y}$ функція $x \to f(x, y)$ неперервна відносно x на $[a; b]$, а для будь-якого $x \in [a; b]$ функція $y \to f(x, y)$ монотонна щодо y і $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) = g(x)$, де $g(x) \in C_{[a;b]}$, то*

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Теорема 5. ***(Неперервність інтеграла, залежного від параметра):*** *Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна на множині*

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b,\ c \le y \le d\},\ (-\infty < c < d < +\infty).$$

Тоді функція $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ є неперервною на $[c; d]$.

Доведення. З теореми про граничний перехід під знаком інтеграла та про рівномірну збіжність функції $f(x, y)$ при $y \to y_0$ на відрізку $[a; b]$ маємо, що

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx = \int\limits_a^b f(x, y_0)dx,$$

тобто функція $F(y)$ є неперервною в точці y_0. Оскільки y_0 — довільна точка відрізка $[c; d]$, то $F(y)$ — неперервна на цьому відрізку. $\bullet$

Теорема 6. ***(Інтегровність інтеграла, залежного від параметра):*** *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна в прямокутнику* Π, *то функція* $F(y)$ *— інтегровна на* $[c;d]$, *причому*

$$\int\limits_c^d F(y)dy \equiv \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (1)$$

Доведення. З попередньої теореми $F(y)$ неперервна на $[c;d]$, а, отже, $F(y)$ інтегровна на цьому проміжку. Співвідношення (1) випливає з теореми про рівність повторних інтегралів, які рівні подвійному. •

Теорема 7. ***(Диференційовність інтеграла, залежного від параметра):*** *Нехай функції* $f(x,y)$ *і* $f'_y(x,y)$ *неперервні на прямокутнику* Π. *Тоді функція* $F(y)$, *визначена як* $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, *диференційовна на* $[c;d]$, *причому*

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx. \qquad (2)$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $y_0 \in [c;d]$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости для довільного $h \in \mathbb{R}$, такого, що $y_0 + h \in [c;d]$ існує $0 < \theta < 1$ таке, що

$$\frac{F(y_0+h) - F(y_0)}{h} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h}dx = \int\limits_a^b f'_y(x,y_0+\theta h)dx.$$

Далі, за теоремою Кантора, функція f'_y є рівномірно неперервною на $[c;d]$, тобто

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x', x'' \in [a;b] : \ 0 < |x' - x''| < \delta)$$

$$(\forall y', y'' \in [a;b] : \ 0 < |y' - y''| < \delta) : \ \{|f'_y(x',y') - f'_y(x'',y'')| < \varepsilon\}.$$

Взявши в попередній нерівності $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y_0 + \theta h$, $|h| < \delta$, отримуємо, що $|f'_y(x,y_0+\theta h) - f'_y(x,y_0)| < \varepsilon$, тобто

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in [a;b])(\forall h \in \mathbb{R} : \ |h| < \delta) :$$

$$\left\{\left|\frac{f(x,y_0+\theta h)-f(x,y_0)}{h}-f'_y(x,y_0)\right|<\varepsilon\right\}.$$

Це означає, що функція $\frac{f(x,y_0+\theta h)-f(x,y_0)}{h}$ при $h\to 0$ рівномірно щодо $x\in[a;b]$ збігається до $f'_y(x,y_0)$. Для завершення доведення достатньо застосувати теорему про граничний перехід під знаком інтеграла. •

Формулу (2) називають ***правилом Лейбніца***.

Тепер розглянемо випадок, коли межі інтегрування в $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ залежать від параметра. Вважаємо, що $f(x,y)$ визначена на прямокутнику

$$\Pi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\, c\le y\le d\}$$

і графіки кривих $x=\alpha(y),\ x=\beta(y),\ (c\le y\le d)$, не виходять за межі Π.

Теорема 8. *Нехай $f(x,y)$ визначена і неперервна на Π, а функції $\alpha,\beta\in C_{[c;d]}$. Тоді інтеграл $F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ є неперервною функцією на $[c;d]$.*

Доведення. Нехай $y_0\in[c;d]$. Тоді для довільного $y\in[c;d]$ маємо

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx-\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx.$$

Використовуючи теорему про граничний перехід під знаком інтеграла, запишемо

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx=F(y_0).$$

Крім того, враховуючи неперервність функцій $\alpha(y)$ та $\beta(y)$, запишемо

$$\Big|\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx\Big|\le\max_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|\cdot|\alpha(y)-\alpha(y_0)|\to 0,$$

$$\Big|\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\Big|\le\max_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|\cdot|\beta(y)-\beta(y_0)|\to 0$$

при $y \to y_0$.

Отже, $\lim\limits_{y \to y_0} F(y) = F(y_0)$, тобто функція $F(y)$ є неперервною на $[c;d]$. •

Теорема 9. ***(Узагальнене правило Лейбніца):*** *Нехай справджуються всі умови попередньої теореми і, крім того, існують похідні* $f'_y \in C_{\Pi}$, $\alpha', \beta' \in C_{[c;d]}$. *Тоді функція* $F(y)$ *диференційовна на* $[c;d]$, *причому*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y),y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y),y).$$

Доведення. Враховуючи умови теореми, маємо, що

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx.$$

Перший з цих інтегралів має похідну $\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y)dx$. Для другого інтеграла з теореми про середнє маємо:

$$\frac{1}{y-y_0} \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y-y_0} f(\xi, y), \text{ де } \xi \in (\beta(y_0), \beta(y)).$$

Тому похідна від другого інтеграла при $y = y_0$ дорівнює $\beta'(y_0) \cdot f(\beta(y_0), y_0)$.

Аналогічно доводимо, що похідна від третього інтеграла буде рівною $-\alpha'(y_0) \cdot f(\alpha(y_0), y_0)$. •

1.3. Рівномірна збіжність інтегралів

Розглянемо випадок невласних інтегралів, залежних від параметра і виведемо поняття рівномірної збіжності невласних інтегралів.

Нехай $f(x,y)$ визначена на множині $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a;+\infty), y \in \mathcal{Y}\}$, $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ і для будь-якого $y \in \mathcal{Y}$ існує інтеграл

$$I(y) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Інтеграл $I(y)$ називається ***невласним інтегралом I-го роду, залежним від параметра***. Згідно з означенням запишемо, що

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^{t} f(x,y)dx.$$

Отже, інтеграл $F(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$ є функцією двох змінних, яка для фіксованого $y_0 \in \mathcal{Y}$ збігається до $I(y)$ при $t \to +\infty$.

Означення 2. *Невласний інтеграл $I(y)$ називається рівномірно збіжним на множині $\mathcal{Y}$, якщо $F(t,y) \overset{t\to+\infty}{\underset{\mathcal{Y}}{\rightrightarrows}} I(y)$, тобто*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0 \geq a)(\forall t > t_0)(\forall y \in \mathcal{Y}): \ \Big\{\Big|\int\limits_a^t f(x,y)dx\Big| < \varepsilon\Big\}.$$

Зрозуміло, що

$$F(t,y) \overset{t\to+\infty}{\underset{\mathcal{Y}}{\rightrightarrows}} I(y) \Longleftrightarrow \lim_{t\to+\infty}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\Big|\int\limits_a^t f(x,y)dx\Big| = 0.$$

Розглянемо декілька ознак рівномірної збіжності інтеграла.

Теорема 10. ***(Критерій Коші):*** *Інтеграл $I(y)$ є рівномірно збіжним на множині $\mathcal{Y}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0 \geq a)(\forall t', t'' \in (t_0; +\infty))(\forall y \in \mathcal{Y}): \Big\{\Big|\int\limits_{t'}^{t''} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon\Big\}.$$

Доведення. Справедливість цього критерію випливає з теореми — критерію Коші рівномірної збіжності функції $f(x,y)$, застосованої до інтеграла $F(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$. $\bullet$

Теорема 11. ***(Ознака Вейєрштрасса):*** *Нехай для будь-яких значень $x \in [a; +\infty)$ та $y \in \mathcal{Y}$ справджується нерівність $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$ та інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ — збіжний. Тоді $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ — рівномірно збіжний на множині $\mathcal{Y}$.*

Доведення. Справедливість твердження випливає з попередньої теореми і нерівності

$$\Big|\int\limits_{t'}^{t''} f(x,y)dx\Big| \le \int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x)dx. \bullet$$

Теорема 12. ***(Ознака Діріхле):*** *Нехай функції двох змінних f та g визначені на множині $[a;+\infty)\times\mathcal{Y}$, причому:*

1) інтеграл $\int\limits_a^t f(x,y)dx$ рівномірно обмежений, тобто

$$(\exists K>0)(\forall t\ge a)(\forall y\in\mathcal{Y}):\ \Big\{\Big|\int\limits_a^t f(x,y)dx\Big|\le K\Big\};$$

2) для довільного $y\in\mathcal{Y}$ функція $g(x,y)$ монотонна на $[a;+\infty)$ і $g(x,y)\overset{x\to+\infty}{\underset{\mathcal{Y}}{\rightrightarrows}}0$. Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)dx$ рівномірно збіжний на $\mathcal{Y}$.

Теорема 13. ***(Ознака Абеля):*** *Нехай функції двох змінних f та g визначені на множині $[a;+\infty)\times\mathcal{Y}$, причому:*

1) інтеграл $\int\limits_a^t f(x,y)dx$ рівномірно збіжний щодо $y\in\mathcal{Y}$;

2) для кожного $y\in\mathcal{Y}$ функція $g(x,y)$ монотонна по x на $[a;+\infty)$ і рівномірно обмежена на $[a;+\infty)\times\mathcal{Y}$, тобто:

$$(\exists M>0)(\forall x\ge a)(\forall y\in\mathcal{Y}):\ \Big\{\Big|\int\limits_a^t g(x,y)dx\Big|\le M\Big\}.$$

Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)dx$ рівномірно збіжний на множині $\mathcal{Y}$.

Доведення останніх двох теорем проводиться за тією ж схемою, що і доведення ознак Діріхле та Абеля для звичайних невласних інтегралів.

1.4. Властивості невласних інтегралів, залежних від параметра

Нехай функція $f(x,y)$ визначена на множині $[a;+\infty)\times\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}\subset\mathbb{R}$, а невласний інтеграл $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$.

Теорема 14. ***(Граничний перехід під знаком інтеграла):*** *Нехай:*

1) для довільного $b > a$: $f(x,y) \underset{[a;b]}{\overset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} g(x)$, *де* y_0 — *гранична точка множини* $\mathcal{Y}$;

2) інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *рівномірно збіжний на множині* $\mathcal{Y}$.

Тоді

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $g(x)$ невласно інтегровна на $[a;+\infty)$. З умови 2) теореми отримуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $t_0 > a$ таке, що для довільних $t' > t_0$, $t'' > t_0$ і для всіх $y \in \mathcal{Y}$ виконується умова

$$\Big| \int\limits_{t'}^{t''} f(x,y)dx \Big| < \varepsilon.$$

Звідси і з теореми про граничний перехід під знаком інтеграла, залежного від параметра та умови 1) випливає

$$\Big| \lim_{y \to y_0} \int\limits_{t'}^{t''} f(x,y)dx \Big| = \Big| \int\limits_{t'}^{t''} g(x)dx \Big| \le \varepsilon.$$

За критерієм Коші збіжності невласного інтеграла отримаємо інтегровність функції $g(x)$ на $[a;+\infty)$.

Нехай $\{t_n\}$ — довільна послідовність така, що $t_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Розглянемо функціональну послідовність $\{I_n(y)\}$, де $I_n(y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx$. Послідовність $\{I_n(y)\}$ рівномірно на множині $\mathcal{Y}$ збігається до інтеграла $I(y)$, тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо:

$$\lim_{y \to y_0} I_n(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx = \int\limits_a^{t_n} \lim_{y \to y_0} f(x,y)\, dx = \int\limits_a^{t_n} g(x)dx.$$

Звідси

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{n \to \infty} I_n(y) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^{t_n} g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx,$$

що і доводить теорему. •

Теорема 15. ***(Неперервність невласного інтеграла):*** *Нехай:*

1) функція $f(x,y)$ *неперервна на* $[a;+\infty)\times[c;d]$;

2) інтеграл $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *рівномірно збіжний на відрізку* $[c;d]$. *Тоді інтеграл* $I(y)$ *є неперервною функцією на* $[c;d]$.

Доведення. Для довільних значень $b>a$ та $y_0\in[c;d]$ маємо, що $f(x,y)\overset{y\to y_0}{\underset{[a;b]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$. Тоді з попередньої теореми випливає, що

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx=I(y_0).$$

Що й треба було довести. •

Теорема 16. ***(Інтегровність невласного інтеграла):*** *Нехай:*

1) функція $f(x,y)$ *неперервна на* $[a;+\infty)\times[c;d]$;

2) інтеграл $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *рівномірно збіжний на відрізку* $[c;d]$. *Тоді* $I(y)$ *інтегровна на* $[c;d]$, *причому*

$$\int\limits_c^d I(y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Доведення. З теореми 15 випливає, що $I(y)$ є неперервною на відрізку $[c;d]$, отже, є інтегровною на ньому. Доведемо рівність. Для функціональної послідовності $\{I_n(y)\}$, де $I_n(y)=\int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx$ маємо

$$\int\limits_c^d I_n(y)dy\equiv\int\limits_c^d dy\int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx=\int\limits_a^{t_n} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Оскільки на $[c;d]$ послідовність $\{I_n(y)\}$ рівномірно збіжна до $I(y)$, то під знаком інтеграла, що стоїть зліва, можемо зробити граничний перехід при $n\to\infty$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_c^d I_n(y)dy=\int\limits_c^d I(y)dy=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{t_n} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy=\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy. \quad \bullet$$

Теорема 17. ***(Диференційовність невласного інтеграла):*** *Нехай:*

1) функції $f(x,y)$ *та* $f'_y(x,y)$ *неперервні на* $[a;+\infty)\times[c;d]$;

2) інтеграл $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *збіжний на* $[c;d]$;

3) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ *рівномірно збіжний на* $[c;d]$. *Тоді функція* $I(y)$ *диференційовна на* $[c;d]$, *причому*

$$I'(y)=\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

Доведення. Якщо $I_n(y)=\int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx$, де $t_n\to+\infty$ при $n\to\infty$, то $I'_n(y)=\int\limits_a^{t_n} f'_y(x,y)dx$. Оскільки послідовність $I_n(y)$ збіжна на $[c;d]$ до функції $I(y)$, а послідовність функцій $I'_n(y)$ рівномірно збіжна на $[c;d]$, то

$$I'(y)=\big(\lim_{n\to\infty} I_n(y)\big)'=\lim_{n\to\infty} I'_n(y)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{t_n} f'_y(x,y)dx=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx. \bullet$$

Доведемо тепер теорему про інтегровність невласного інтеграла вздовж нескінченного проміжка зміни параметра y.

Теорема 18. *Нехай:*

1) функція $f(x,y)$ *неперервна на множині* $[a;+\infty)\times[c;+\infty)$;

2) для довільного $\eta>c:\ F(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *— рівномірно збіжний на* $[c;\eta]$;

3) для довільного $b>a$ *функція* $\Phi(x)=\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$ *є рівномірно збіжною на* $[a;b]$;

4) збіжний один із інтегралів $\int\limits_c^{+\infty} dy\int\limits_a^{+\infty}|f(x,y)|dx$ *або* $\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^{+\infty}|f(x,y)|dy$. *Тоді збіжні і дорівнюють одному два інтеграли* $\int\limits_c^{+\infty} F(y)dy$ *і* $\int\limits_a^{+\infty}\Phi(x)dx$.

Доведення. Розглянемо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dx,\ c<\eta<+\infty$. Завдяки умовам 1), 2) і теореми про інтегровність невласного інтеграла отримуємо, що

$$\int_c^{\eta} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{\eta} f(x,y)dy.$$

Доведемо, що можливий граничний перехід під знаком інтеграла в останній рівності при $\eta \to +\infty$. Функція $\Phi(x,\eta) = \int\limits_c^{\eta} f(x,y)dy$ з умови 3) рівномірно збігається до $\Phi(x)$ на проміжку $[a;b]$ при $\eta \to +\infty$, де $b > a$. Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \Phi(x,\eta)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_a^{\eta} f(x,y)dy$ — рівномірно збіжний щодо η на $[c;+\infty)$, оскільки за ознакою Вейєрштрасса маємо

$$\sup_{c\le\eta<+\infty} |\Phi(x,\eta)| \le \sup_{c\le\eta<+\infty} \int_c^{\eta} |f(x,y)|dy \le \int_c^{+\infty} |f(x,y)|dy,$$

а $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|dy$ — збіжний за припущенням.

Отже, за теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла маємо

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_a^{+\infty} \Phi(x,\eta)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{\eta\to+\infty} \Phi(x,\eta)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy,$$

що і доводить теорему. •

Функцію $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, де $f(x,y)$ визначена на множині $[a;b] \times \mathcal{Y}$ і для кожного фіксованого значення $y \in \mathcal{Y}$ задана функція $f(x,y) \to +\infty$ при $x \to a+0$, називається ***невласним інтегралом другого роду, залежним від параметра***. За допомогою заміни $x = a + \dfrac{1}{t}$ цей інтеграл другого роду зводиться до невласного інтеграла першого роду, тобто:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\Big(a + \frac{1}{t}, y\Big) \cdot \frac{1}{t^2}\,dt.$$

Тоді на цей інтеграл можуть бути поширені основні теореми про граничний перехід під знаком невласного інтеграла, про умови його неперервності, про інтегровність та диференційовність за параметром.

Інтеграл виду

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y)dx + \int_b^{+\infty} f(x,y)dx,$$

де перший доданок є інтегралом від необмеженої функції, а другий — інтеграл I-го роду, називається ***рівномірно збіжним***, якщо рівномірно збігаються обидва інтеграли, що стоять справа.

1.5. Інтеграли Ейлера

Інтегралом Ейлера I-го роду або “бета-функцією” називається інтеграл

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

У цьому інтегралі α і β є параметрами, і якщо $\alpha < 1$, $\beta < 1$, то інтеграл $B(\alpha,\beta)$ буде невласним, причому підінтегральна функція має дві особливі точки $x = 0$ і $x = 1$.

Інтегралом Ейлера II-го роду або “гама-функцією” називається інтеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

При $\alpha < 1$ інтеграл $\Gamma(\alpha)$ має дві особливі точки $x = 0$ та $x = +\infty$. Дослідимо спочатку гама-функцію.

1) *Функція* $\Gamma(\alpha)$ *неперервна на* $(0;+\infty)$.

Дійсно

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2.$$

Оскільки підінтегральна функція $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ є неперервною на $[0;+\infty) \times (0;+\infty)$, $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha_0-1}$ для $x \in [0;1]$, $\alpha \ge \alpha_0 > 0$, $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha_1-1}e^{-x}$ для $x \in [1;+\infty)$ і $\alpha \le \alpha_1 < +\infty$, то за ознакою Вейєрштрасса інтеграли I_1 та I_2 рівномірно збіжні щодо α на $[\alpha_0;\alpha_1]$. З огляду на довільність вибору $\alpha_0 > 0$ і $\alpha_1 < +\infty$ отримаємо неперервність гама-функції на $(0;+\infty)$.

2) *Функція* $\Gamma(\alpha)$ *є нескінченно диференційовною на проміжку* $(0;+\infty)$, *причому*

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n x e^{-x}dx.$$

Це твердження доводимо аналогічно до властивості 1), при цьому використовуючи такі оцінки підінтегральної функції $(\varepsilon > 0,\ \delta > 0,\ \eta > 0)$:

$$\left|\ln^n x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}\right| \le x^{\alpha_0-\varepsilon-1},\ x \in (0;\delta),\ \alpha \ge \alpha_0 > 0,$$

$$\left|\ln^n x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}\right| \le x^{\alpha_1}e^{-x},\ x \in [\eta;+\infty),\ \alpha \le \alpha_1,$$

які випливають з рівностей

$$\lim_{x\to 0+}\left(x^{\varepsilon}\ln x\right) = 0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = 0.$$

3) *Справджується формула зведення*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha > 0.$$

Справді, проінтегрувавши частинами, маємо

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx = -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Якщо $n-1 < \alpha < n$, то застосувавши послідовно формулу зведення, отримаємо

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1).$$

Ця рівність показує, що достатньо знайти $\Gamma(\alpha)$ на проміжку $(0;1)$, щоб обчислити її значення для довільного $\alpha > 0$.

Для $\alpha = n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!,$$

оскільки $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$

Дослідимо тепер бета-функцію. Виконаємо заміну $x = \dfrac{t}{t+1}$. Тоді $t = \dfrac{1}{1-x} - 1$, $dx = \dfrac{1}{(1+t)^2}\,dt$, і тому

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\beta-1}} \cdot \frac{dt}{(t+1)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

Як і для гама-функції неважко довести, що:

1) *Функція* $B(\alpha,\beta)$ *неперервна при* $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$.

2) *Функція* $B(\alpha,\beta)$ *нескінченно диференційовна при* $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$.

3) *Функція* $B(\alpha,\beta)$ *– симетрична, тобто* $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$ *для всіх* $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$.

4) *Справджується формула зведення*

$$B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta), \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Властивість 3) випливає з означення бета-функції (потрібно в інтегралі зробити заміну $t = 1 - x$). Далі:

$$B(\alpha+1,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx = -\frac{1}{\beta}\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 + \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx - \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha,\beta) - \frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha+1,\beta).$$

Отже, $\left(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\beta}$, звідки отримуємо формулу зведення для функції $B(\alpha,\beta)$. З властивості симетрії для довільних $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ маємо формулу

$$B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta).$$

У разі застосування послідовно цих формул зведення можна виразити довільне значення $B(\alpha,\beta)$ через значення цієї функції у прямокутнику $\Pi = \{(\alpha,\beta):\ 0 \le \alpha \le 1,\ 0 \le \beta \le 1\}$.

Властивості 1), 2) випливають з теореми, яка пов'язує інтеграли Ейлера.

Теорема 19. *Для* $\alpha > 0,\ \beta > 0$ *справедлива рівність:*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Доведення. Зробимо заміну $x = (1 + \nu)t,\ \nu > 0$. Тоді

$$\Gamma(\alpha + \beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx = (1 + \nu)^{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+\nu)t} dt.$$

Звідки

$$\Gamma(\alpha + \beta) \cdot \frac{\nu^{\alpha-1}}{(1 + \nu)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+\nu)t} \nu^{\alpha-1} dt.$$

Припустимо спочатку, що $\alpha > 1,\ \beta > 1$ і розглянемо для значень $t \geq 0$, $\nu \geq 0$ функцію $f(t, \nu) = t^{\alpha+\beta-1} \nu^{\alpha-1} e^{-(1+\nu)t}$. Очевидно, що $f(t, \nu) \geq 0$, і вона є неперервною для вказаних t і ν.

Інтеграл

$$F(\nu) = \int_0^{+\infty} f(t, \nu) dt = \Gamma(\alpha + \beta) \cdot \frac{\nu^{\alpha-1}}{(1 + \nu)^{\alpha+\beta}}$$

є неперервною функцією для $\nu \geq 0$, а інтеграл

$$\Phi(t) = \int_0^{+\infty} f(t, \nu) d\nu = t^{\beta-1} e^{-t} \int_0^{+\infty} (\nu t)^{\alpha-1} e^{-t\nu} d(t\nu) = t^{\beta-1} e^{-t} \Gamma(\alpha)$$

є неперервною функцією для $t \geq 0$. Нарешті, існує інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t) dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(t, \nu) d\nu = \int_0^{+\infty} \Gamma(\alpha) t^{\beta-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta).$$

Отже, справедливою є рівність

$$\int_0^{+\infty} F(\nu) d\nu = \int_0^{+\infty} \Phi(t) dt.$$

Тоді отримаємо

$$\int_0^{+\infty} F(\nu) d\nu = \Gamma(\alpha + \beta) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\nu^{\alpha-1}}{(1 + \nu)^{\alpha+\beta}} d\nu = \Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta),$$

тобто $\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$, що і доводить формулу у випадку $\alpha>1$ і $\beta>1$.

Нехай тепер $\alpha>0$ і $\beta>0$. За доведеним правильною є формула

$$B(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}. \tag{3}$$

Використовуючи формулу зведення, отримуємо

$$B(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\,B(\alpha,\beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \ \Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2)=(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)=(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

Підставивши ці вирази у (3), отримаємо формулу зв'язку між інтегралами Ейлера для $\alpha>0$ і $\beta>0$.

Теорема 20. *Для* $0<\alpha<1$ *справджується формула доповнення:*

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Рекомендована література

1. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 416 с.
2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
3. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – Ч.1. – 320 с.
4. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навчальний посібник / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч.1. – 462 с.
5. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз: Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.
6. *Коновалова Н.Р.* Математичний аналіз: приклади і задачі: Навчальний посібник / Н.Р. Коновалова, Т.Г. Стрижак. – К.: Либідь. – 1995. – 240 с.
7. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – К.: Вища школа, 1992. – Ч.1. – 495 с.
8. *Никольський С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольський. – М.: Наука, 1983. – Т.1. – 484 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т.1. – 680 с.
10. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: Підручник / М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – Ч.1. – 447 с.