Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА II

Івано-Франківськ

2015

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73
П 69

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" як навчальний посібник для студентів математичних та технічних напрямів підготовки (протокол № 1 від 4 вересня 2014 р.).

Рецензенти:

Бігун Я.Й., доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича),

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка").

П 69 Практикум з математичного аналізу. – Частина II. / А.В. Загороднюк, М.І. Копач, В.В. Кравців, Г.П. Малицька, А.В. Соломко, С.В. Шарин. – Вид. 2-ге, стереотипне. – Івано-Франківськ : Сімик, 2015. – 97 с.

У посібнику наведені короткі відомості з теоретичного курсу математичного аналізу, а також вправи та приклади розв'язування деяких з них. Друга частина посібника розкриває наступні теми: границя та неперервність функції багатьох змінних, диференціювання функцій багатьох змінних, похідна функції за напрямом, градієнт функції, дослідження функції багатьох змінних на екстремум, умовний екстремум функції багатьох змінних, властивості неявних функцій та знаходження їх похідних.

Для студентів математичних та технічних напрямів підготовки, які вивчають курси "математичний аналіз I", "математичний аналіз II".

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73

Зміст

Передмова

Навчальний посібник написано на підставі досвіду викладання практичного курсу математичного аналізу на факультеті математики та інформатики і фізико-технічному факультеті Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника для студентів математичних та технічних напрямів підготовки.

Матеріал другої частини посібника охоплює границю та неперервність функції багатьох змінних, частинні похідні і диференціали першого та вищих порядків для функції багатьох змінних, неявні функції та дослідження функцій багатьох змінних на екстремум і умовний екстремум.

На початку кожного розділу подаються короткі теоретичні відомості з кожної теми, які містять основні означення, формулювання важливих теорем та основні формули. Далі поміщено приклади розв'язування задач. Остання частина кожного розділу містить задачі і вправи для самостійної роботи. В кінці посібника подані варіанти індивідуальних завдань, а також зразок розв'язування типового варіанта.

Слід зазначити, що для досконалого вивчення матеріалу перед тим, як починати розв'язувати вправи, необхідно добре засвоїти теоретичний матеріал з кожної теми. Потім розібрати наведені вправи з розв'язками і обов'язково закріпити знання розв'язуванням вправ для самостійного виконання.

РОЗДІЛ I. Границя функції багатьох змінних

§ 1.1. Основні поняття і теореми

Назвемо m-вимірною точкою M впорядковану систему із m дійсних чисел $(x_1, \ldots, x_m)$, а числа $x_1, \ldots, x_m$ – координатами точки M. Множину всіх m-вимірних точок називають ***m-вимірним простором*** і позначають $\mathbb{R}^m$.

Число $\varrho(M_1,\, M_2)$, що визначається формулою

$$\varrho(M_1,\, M_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2}, \tag{1}$$

називається ***відстанню*** між двома точками $M_1(x_1, \ldots, x_m)$, $M_2(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Ця відстань задовольняє такі умови:

1) $\varrho(M_1, M_2) \geq 0, \quad \forall M_1, M_2$, (невід'ємність);

2) $\varrho(M_1, M_2) = 0 \Longleftrightarrow M_1 = M_2$, (рівність нулю);

3) $\varrho(M_1, M_2) = \varrho(M_2, M_1), \quad \forall M_1, M_2$, (симетричність);

4) $\varrho(M_1, M_3) \leq \varrho(M_1, M_2) + \varrho(M_2, M_3), \quad \forall M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}^m$, (нерівність трикутника).

Простір $\mathbb{R}^m$ є прикладом ***метричного простору***, відстань, введена за формулою (1) – ***метрикою***, а властивості 1)-4) – ***аксіомами метричного простору***.

Точка $A(a_1, \ldots, a_m)$ називається ***границею послідовності точок*** $\{M_n\} = \{(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)\}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(M_n,\, A) = 0$.

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$, або $M_n \to A$ при $n \to \infty$. При цьому послідовність $\{M_n\}$ називають ***збіжною*** до точки A, або просто збіжною.

Під околом точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ будемо розуміти будь-яку із двох множин:

1) $\{M : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \ldots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\} = (x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; \ldots; x_m^0 - \delta_m, x_m^0 + \delta_m)$ – відкритий прямокутний паралелепіпед, де $\delta_i \in \mathbb{R},\ \ \delta_i > 0,\ \ i = \overline{1, m}$;

2) $\{M : 0 < \varrho(M,\, M_0) < \delta,\ \ \delta > 0\}$ – відкрита сфера з центром у точці M_0 і радіусом δ. Останню називають ще ***δ-околом*** точки M_0.

Відмітимо, що означення границі послідовності точок $\{M_n\} \subset \mathbb{R}^m$ ґрунтується на понятті границі числової послідовності. Відповідно до означення границі числової послідовності слідує, що $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$ таке, що $(\forall n > N(\varepsilon))$ виконується умова $\{\varrho(M_n,\, A) < \varepsilon\}$. Геометрично це означає, що в будь-якому ε-околі точки A знаходяться всі точки послідовності $\{M_n\}$, починаючи з деякого номера $N(\varepsilon)$ (залежного, взагалі кажучи, від ε).

Назвемо точку $M(x_1, \ldots, x_m)$ ***внутрішньою точкою множини*** D, якщо вона належить множині D разом з деяким достатньо малим її околом.

Множину точок, яка складається тільки з внутрішніх точок, будемо називати ***відкритою областю***.

Точка M_0 називається ***точкою скупчення*** множини D, якщо в будь-якому її околі міститься хоч одна точка множини D, відмінна від M_0. Точки скупчення для відкритої області, які не належать їй, називають ***межовими точками*** цієї області. Сукупність усіх межових точок утворює ***межу області***. Відкрита область разом з її межею називається ***замкненою областю***. Множина точок D називається ***обмеженою***, якщо вона цілком міститься в деякому прямокутному паралелепіпеді.

В m-вимірному просторі можна розглядати неперервні криві. Нехай

$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, $\varphi_j(t)$ – неперервні функції, $j = \overline{1,m}$. Тоді множина точок $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$, що одержується при різних значеннях параметра t, приймається за неперервну криву в m-вимірному просторі, яка з'єднує точки $M_0(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0))$, $M_1(\varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_m(t_1))$. Якщо всі функції $\varphi_j(t)$ – лінійні, крива переходить в пряму: $x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \ldots, x_m = \alpha_m t + \beta_m$, де коефіцієнти $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не повинні одночасно перетворюватись в нуль, а $t \in (-\infty;\ +\infty)$. Будемо вважати, що точки слідують одна за другою в порядку зростання параметра t. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M'(x_1', \ldots, x_m')$ і $M''(x_1'', \ldots, x_m'')$ очевидно може бути записане у вигляді $x_1 = x_1' + t(x_1'' - x_1'), \ldots, x_m = x_m' + t(x_m'' - x_m')$, $-\infty < t < +\infty$. Якщо $t \in [0;\ 1]$, то будемо мати прямолінійний відрізок, що з'єднує ці точки.

Лінія, що складається із скінченного числа прямолінійних відрізків, називається ***ламаною***.

Область називається ***зв'язною***, якщо будь-які її дві точки можна з'єднати ламаною, що повністю міститься в цій області.

Якщо маємо множину точок $\{M\} \subset \mathbb{R}^m$ і кожній точці $M(x_1, \ldots, x_m)$ поставлено у відповідність деяке число $u \in \mathbb{R}$, то говорять, що на множині $\{M\}$ визначена функція m змінних і пишуть $u = f(M)$, або $u = f(x_1, \ldots, x_m)$.

Нехай функція $u = f(M)$ визначена на множині $\{M\}$ і точка A – точка скупчення для $\{M\}$. Число b називається ***границею функції*** $f(M)$ ***в точці*** A при $M \to A$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$ таке, що для довільної точки M, яка задовольняє умовам $0 < \varrho(M,\, A) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Це означення називається означенням границі функції ***за Коші*** або "мовою $\varepsilon - \delta$".

Означення границі функції в точці A ***за Гейне*** або "мовою послідовностей" формулюється наступним чином: число b називається ***границею функції*** $f(M)$ ***в точці*** A, якщо для будь-якої збіжної до A послідовності $\{M_n\}$

такої, що $M_n \in \{M\}$, $M_n \neq A$ відповідна послідовність значень функції $\{f(M_n)\}$ збігається до b.

Позначення: $\lim\limits_{M\to A} f(M) = b$, або $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_m\to a_m}} f(x_1, \dots, x_m) = b$.

Зауважимо, що означення границі функції $f(x_1, \dots, x_m)$ в точці A за Коші і за Гейне є еквівалентними.

Теорема 1. *Нехай функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені на множині $\{M\}$ і нехай $\lim\limits_{M\to A} f(M) = b$, $\lim\limits_{M\to A} g(M) = c$. Тоді:*

$$\lim_{M\to A}(f(M) \pm g(M)) = b \pm c, \quad \lim_{M\to A} f(M)\cdot g(M) = b\cdot c, \quad \lim_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)} = \frac{b}{c},$$

причому в останньому випадку при умові, що $c \neq 0$.

У випадку $b = +\infty$, або $b = -\infty$ в означенні границі функції за Коші нерівність $|f(M)-b| < \varepsilon$ замінюється відповідно нерівністю виду $f(M) > E$, або $f(M) < -E$, де E – довільне наперед вибране додатне число.

Функція $u = f(M)$ називається ***нескінченно малою*** при $M \to A$ (в точці A), якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M) = 0$.

Можна поширити поняття точки скупчення $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ області D і на той випадок, коли хоч одна із координат чи всі координати цієї точки нескінченні. Наприклад, точка $(+\infty, \dots, +\infty)$ є точкою скупчення для множини D, якщо в цій множині знайдуться точки з усіма як завгодно великими додатними координатами. Точка $(a_1, \dots, a_{k-1}, +\infty, a_{k+1}, \dots, a_m)$ називається точкою скупчення для множини D, якщо в цій множині є точки $M(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$, в яких x_j як завгодно близькі до a_j, $j \neq k$ і x_k – k-та координата як завгодно велика.

Функція $f(M)$ має границею число b при прямуванні всіх змінних $x_1, \dots, x_m$ до $+\infty$, якщо для $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists\triangle > 0)$ таке, що нерівність $|f(M) - b| < \varepsilon$ має місце як тільки $x_1 > \triangle, \dots, x_m > \triangle$. В такому випадку використовують позначення $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\ \dots\\ x_m\to+\infty}} f(M) = b$.

Символом ∞ будемо позначати точку скупчення точок простору $\mathbb{R}^m$, в якому хоча б одна з координат рівна $+\infty$ чи $-\infty$.

Для функції багатьох змінних, крім розглянутої вище границі, при одночасному прямуванні всіх аргументів до визначених значень, досить часто мають справу з границями другого роду, які одержуються в результаті ряду послідовних граничних переходів по кожному аргументу зокрема в тому чи іншому порядку. Перша границя називається ***m-кратною***, границі другого роду – ***повторними***.

Розглянемо це поняття на прикладі функції двох змінних $u = f(x, y)$. Припустимо, що область зміни змінних x та y така, що x (незалежно від y) може приймати значення в деякій множині $\mathfrak{X}$, для якої a служить точкою скупчення, але a не обов'язково належить множині $\mathfrak{X}$. І аналогічно y (незалежно від x) може приймати значення в деякій множині $\mathcal{Y}$, для якої b – точка скупчення, але b не обов'язково належить множині $\mathcal{Y}$. Таку область символічно позначимо $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$. Якщо для довільного $y \in \mathcal{Y}$ існує $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$, то ця границя буде залежати від наперед зафіксованого $y : \lim\limits_{x\to a} f(x, y) = \varphi(y)$. Якщо існує границя

$$\lim_{y\to b} \varphi(y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y),$$

то її називають ***повторною границею***.

Можна розглядати граничні переходи і в зворотному порядку, а саме: $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} f(x, y)$.

Теорема 2. *Якщо:*

1) існує (скінченна або нескінченна) подвійна границя $p = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$,

2) для довільного $y \in \mathcal{Y}$ *існує скінченна звичайна границя по* x

$$\lim_{x\to a} f(x, y) = \varphi(y),$$

то існує повторна границя $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y) = \lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$, *яка рівна подвійній границі.*

Зауважимо, що якщо разом з умовами 1), 2) для кожного $x \in \mathfrak{X}$ існує і скінченна звичайна границя по y: $\psi(x) = \lim\limits_{y \to b} f(x,\, y)$, то існує і друга повторна границя

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,\, y),$$

яка рівна тому ж числу p. В цьому випадку

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,\, y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x,\, y).$$

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте означення границі функції в точці (за Гейне і за Коші). Що означає еквівалентність цих означень?
2. Для кожного із двох означень границі функції в точці сформулюйте заперечення означення.
3. Чи може бути так, що $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$, $\lim\limits_{M \to A} g(M) = c$, а $\lim\limits_{M \to A} (f(M) + g(M)) \neq b + c$?
4. Дайте означення нескінченно малої функції в точці M. Наведіть приклад нескінченно малої функції в точці $O(0, \ldots, 0)$.
5. Дайте означення границі функції $f(M)$ при $M \to \infty$.
6. Наведіть приклад функції, відмінної від сталої, для якої $\lim\limits_{M \to \infty} f(M) = 1$.
7. Дайте означення повторної границі функції $f(x,\, y)$ в точці $M_0(x_0,\, y_0)$.
8. Відомо, що функція $f(x,\, y)$ має в даній точці подвійну і повторні границі. Чи може бути, що якісь дві із них нерівні?
9. Сформулюйте означення повторної границі:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to +\infty} f(x,\, y),$$

$$\lim_{y \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f(x,\, y),$$

$$\lim_{x \to +\infty} \lim_{y \to -\infty} f(x,\, y).$$

§ 1.2. Приклади розв'язування задач

1. Довести, що функція $f(x,\, y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ є нескінченно малою в точці $O(0,\, 0)$

Розв'язок. Згідно з означенням нескінченно малої функції, потрібно довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\, y) = 0$. Відмітимо, що функція $f(x,\, y)$ не визначена на осях координат, але точка $O(0,\, 0)$ є точкою скупчення для області визначення функції $f(x,\, y)$ і тому можна ставити питання про границю функції в точці O.

Використаємо означення границі функції в точці за Коші. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді, якщо $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, то

$$|f(x,\, y)| = |x+y|\Big|\sin\frac{1}{x}\Big|\Big|\sin\frac{1}{y}\Big| \le |x| + |y| < 2\delta.$$

Поклавши $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, одержимо $|f(x,\, y)| < \varepsilon$. Це і означає, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\, y) = 0$. ▶

2. Обчислити границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}.$$

Розв'язок. Зобразимо функцію у вигляді

$$\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2xy}{x^2+xy}}.$$

Оскільки $z = xy \to 0$ при $x \to 0$ і $y \to 2$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Далі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2y}{x+y} = 2$ (в силу теореми 1). Тому шукана границя рівна e^2. ▶

3. Чи існує границя

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}?$$

Розв'язок. Нехай точка $M(x,\, y) \to O(0,\, 0)$ по прямій $y = kx$, що проходить через точку $O(0,\, 0)$. Тоді отримаємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+kx^2} = \frac{k}{1+k}.$$

При різних k одержимо різні значення виразу. Звідси випливає, що границі даної функції в точці $O(0,\,0)$ не існує. ▶

4. Обчислити границю

$$\lim_{M\to\infty}\frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}.$$

Розв'язок. Перейдемо до полярної системи координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тоді

$$\frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}=\frac{1}{r}\frac{\cos\varphi+2\sin\varphi}{\cos^2\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi+2\sin^2\varphi}=\frac{1}{r}\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)},$$

де $0\le\varphi\le 2\pi$ і $0\le r<+\infty$.

Умова $M\to\infty$ еквівалентна умові $r\to+\infty$, тому $\dfrac{1}{r}\to 0$. Доведемо обмеженість співмножника $\dfrac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$. Очевидно, що $|f(\varphi)|\le 3$, а $g(\varphi)=(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\sin^2\varphi>0$ для $\varphi\in[0,\,2\pi]$ і неперервна на цьому відрізку. Тому за першою теоремою Вейєрштраса про неперервну функцію $g(\varphi)\ge\alpha>0$. Отже, $\left|\dfrac{f(\varphi)}{g(\varphi)}\right|\le\dfrac{3}{\alpha}$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$, тому $\lim\limits_{M\to\infty}\dfrac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}=0$. ▶

5. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, 3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

Розв'язок. 1) Оскільки $x^2-xy+y^2\ge xy$, для досить великих x та y $x+y>0$, то

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\le\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\to 0$$

при $x\to+\infty$ і $y\to+\infty$. Тому

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

2) Справедлива оцінка

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2},$$

звідки $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$.

3) Використовуючи те, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, маємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=a. \ \blacktriangleright$$

6. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-x-y}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$, 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Розв'язок. 1) При $x>0,\ y>0$ отримаємо

$$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\frac{x^2}{e^xe^y}+\frac{y^2}{e^xe^y}\le\frac{x^2}{e^x}+\frac{y^2}{e^y}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$, $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^2}{e^y}=0$ (за правилом Лопіталя), то

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-x-y}=0.$$

2) Оскільки $x^2+y^2\ge 2xy$ і $xy>0$, то

$$\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\to 0$$

при $x\to+\infty$.

3) Оскільки $x\to 0$ і $y\to 0$, то можна вважати, що $x^2+y^2\le 1$. Тоді з нерівності $\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2\ge x^2y^2$ маємо

$$1\ge(x^2+y^2)^{x^2y^2}\ge(x^2+y^2)^{\frac14(x^2+y^2)^2}=e^{\frac14(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)}.$$

Позначимо $x^2+y^2=t$. Одержимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}t^2\ln t.$$

Використаємо правило Лопіталя:

$$\lim_{t\to 0}t^2\ln t=\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{t^{-2}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}:(-2t^{-3})=0.$$

Тому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}e^{\frac14(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)}=1$.

За теоремою про границю проміжної змінної будемо мати, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1. \ \blacktriangleright$$

7. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Розв'язок. 1) Використаємо нерівність

$$\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{x^2+y^2}\to+\infty$ при $x\to0$ і $y\to0$, то

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\infty.$$

2) Перетворимо дріб $\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$, помноживши чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Одержимо вираз $\dfrac{x^2y^2}{(\sqrt{x^2y^2+1}+1)(x^2+y^2)}$. Оскільки

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}=\frac{1}{2},$$

то перейшовши до полярних координат, отримаємо, що

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2}{4}\sin^2 2\varphi=0.$$

Тому $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=0.$ ▶

8. Обчислити повторні границі функції $f(x,\,y)=\dfrac{ax+by}{cx+dy}$ в точці $O(0;0)$ при умові, що $c\neq0$ і $d\neq0$ одночасно.

Розв'язок. Маємо

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,\,y)=\lim_{x\to0}\left(\lim_{\substack{y\to0\\x\neq0}}\frac{ax+by}{cx+dy}\right)=\lim_{x\to0}\lim_{\substack{y\to0\\x\neq0}}\frac{a+b\frac{y}{x}}{c+d\frac{y}{x}}=\frac{a}{c}.$$

Аналогічно одержуємо, що $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,\,y)=\dfrac{b}{d}$. ▶

9. Чи існують повторні границі функції $f(x,\,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ в точці $O(0;0)$?

Розв'язок. Розглянемо внутрішню границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\neq 0}} f(x,\,y)$ у повторній границі $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\,y)$. Запишемо $f(x,\,y)$ у вигляді суми двох доданків:

$$f(x,\,y) = x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{x}.$$

При фіксованому $y \neq 0$ перший доданок $x\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} \to 0$ при $x \to 0$. У другому доданку добуток $y\sin\dfrac{1}{y}$ є сталим, відмінним від нуля, якщо $y \neq \dfrac{1}{\pi n}$, $(n \in \mathbb{Z})$, а співмножник $\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі при $x \to 0$ (в як завгодно малому околі точки $x = 0$ функція $\sin\dfrac{1}{x}$ приймає всі значення від -1 до 1). Отже, другий доданок $y\sin\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{1}{x}$, а значить і вся функція $f(x,\,y)$ не має границі при $x \to 0$ і фіксованому y не рівному 0 і $\dfrac{1}{\pi n}$. Таким чином, шукана внутрішня границя не існує, а тому не існує повторна границя $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\,y)$. Аналогічно показуємо, що не існує $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$. ▶

10. Обчислити повторні границі функції $f(x,\,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точці $O(0;0)$.

Розв'язок. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{\substack{y\to 0\\ x\neq 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Аналогічно одержуємо $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$. ▶

Зауваження. В прикладі 3 було доведено, що границя функції $f(x,\,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точці $O(0,\,0)$ не існує. Таким чином, на основі прикладів 3 і 10 можна зробити висновок: із існування і рівності повторних границь в даній точці ще не випливає існування границі функції в цій точці. Якщо ж повторні границі існують і різні (приклад 8), то із теореми 2 випливає, що границя $f(x,\,y)$ в точці $M(a,\,b)$ не існує.

§ 1.3. Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що функція $f(x,\,y)$ нескінченно мала в точці $O(0,\,0)$, якщо:

$$1)\ f(x,\,y)=\frac{x^2}{(|x|+|y|)},\qquad 2)\ f(x,\,y)=\sin{(x+y)}\ln{(x^2+y^2)}.$$

2. Обчислити границі:

$$1)\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\operatorname{tg}2xy}{x^2y^2},\qquad 2)\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to3}}(1+xy^2)^{\frac{y}{x+y+xy^2}},$$

$$3)\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to\infty}}\frac{ax+by}{x^2+xy+y^2},\qquad 4)\ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{|x|^3+|y|^3},$$

$$5)\ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x+y)e^{-(x^2+y^2)},\qquad 6)\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)^{|x|}.$$

3. Довести, що не існують границі:

$$1)\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2},\qquad 2)\ \lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{\ln{(x+y)}}{y},$$

$$3)\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\sin{(x+y)}}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad 4)\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}.$$

4. Доведіть, що функція $f(x,\,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ має такі властивості:
а) при $M(x,\,y)\to O(0,\,0)$ по будь-якій прямій, що проходить через точку $O(0,\,0)$ границя функції дорівнює нулю;
б) границя функції в точці $O(0,\,0)$ не існує.

5. Обчислити повторні границі $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\,y)$ і $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,\,y)$, якщо:

1) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

2) $f(x,\,y)=\dfrac{\sin x+y}{2x+3y},\ x_0=0,\ y_0=0,$

3) $f(x,\,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

4) $f(x,\,y)=\dfrac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x_0=0,\ y_0=0,$

5) $f(x,\,y)=\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}{6x+3y},\ x_0=0,\ y_0=0,$

6) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4},\ x_0=\infty,\ y_0=\infty,$

7) $f(x,\,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y},\ x_0=+\infty,\ y_0=\infty,$

8) $f(x,\,y)=\sin\pi\dfrac{x+y}{2x+3y},\ x_0=\infty,\ y_0=\infty.$

6. Чи існують повторні та подвійна границі функції $f(x,\,y)$ в точці $(x_0,\,y_0)$, якщо:

1) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

2) $f(x,\,y)=\ln(x+y),\ x_0=1,\ y_0=0,$

3) $f(x,\,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y},\ x_0=0,\ y_0=0,$

4) $f(x,\,y)=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y},\ x_0=0,\ y_0=0,$

5) $f(x,\,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y},\ x_0=0,\ y_0=0,$

6) $f(x,\,y)=x\sin\dfrac{1}{y},\ x_0=0,\ y_0=0,$

7) $f(x,\,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

8) $f(x,\,y)=x^2e^{-x^2-y},\ x_0=\infty,\ y_0=\infty,$

9) $f(x,\,y)=\log_2(x+y),\ x_0=1,\ y_0=0,$

10) $f(x,\,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1},\ x_0=0,\ y_0=0,$

11) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y},\ x_0=2,\ y_0=2,$

12) $f(x,\,y)=(xy+1)^{(|x|+|y|)^{-1}},\ x_0=0,\ y_0=0,$

13) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2-y^2}{|x|+|y|},\ x_0=0,\ y_0=0,$

14) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

15) $f(x,\,y)=\dfrac{x-y}{x+y},\ x_0=0,\ y_0=0,$

16) $f(x,\,y)=\dfrac{y-x^2}{x^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

17) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},\ x_0=0,\ y_0=0,$

18) $f(x,\,y)=\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

19) $f(x,\,y)=\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)(x^2y^2)},\ x_0=0,\ y_0=0,$

20) $f(x,\,y)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4},\ x_0=0,\ y_0=0,$

21) $f(x,\,y)=(1+xy^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}},\ x_0=0,\ y_0=0,$

22) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

23) $f(x,\,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4},\ x_0=0,\ y_0=0,$

24) $f(x,\,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2},\ x_0=0,\ y_0=0,$

25) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4},\ x_0=0,\ y_0=0.$

РОЗДІЛ II. Неперервність функції багатьох змінних

§ 2.1. Основні поняття і теореми

Нехай функція m змінних $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=f(M)$ визначена на множині $\{M\}$ і нехай точка $A(a_1,\ldots,a_m)$ – точка скупчення множини $\{M\}$ і $A\in\{M\}$.

Функція $f(M)$ називається ***неперервною*** в точці A, якщо

$$\lim_{M\to A} f(M)=f(A). \tag{2}$$

Приростом (або ***повним приростом***) функції $u=f(M)$ в точці A називається функція $\triangle u=f(M)-f(A)$, $M\in\{M\}$.

Нехай $\triangle x_i=x_i-a_i$, $i=\overline{1,m}$, то $\triangle u=f(a_1+\triangle x_1,\ldots,a_m+\triangle x_m)-f(a_1,\ldots,a_m)$. Очевидно, що умова неперервності функції $f(M)$ в точці A

еквівалентна умові

$$\lim_{M\to A} \triangle u = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \triangle u = 0. \tag{3}$$

Точки скупчення області визначення функції $f(M)$, в яких не виконується умова (2) чи (3), називаються ***точками розриву функції***.

Зафіксуємо всі аргументи функції $f(M)$, крім одного, наприклад, x_k, взявши $x_i = a_i$, при $i \neq k$. Аргументу x_k надамо довільного приросту $\triangle x_k$ так, щоб $(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k + \triangle x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) \in \{M\}$. Функція $u = f(M)$ отримає приріст $\triangle_{x_k} u = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \triangle x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m)$. Цей приріст називають ***частинним приростом*** функції $f(M)$ в точці A, що відповідає приросту $\triangle x_k$ аргументу x_k.

Функція u називається ***неперервною в деякій точці по змінній*** x_k, якщо $\lim\limits_{\triangle x_k \to 0} \triangle_{x_k} u = 0$.

Функція $f(x_1, \ldots, x_m)$ називається ***неперервною по змінній*** x_k в точці $A(a_1, \ldots, a_m)$, якщо функція $f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m)$ однієї змінної x_k неперервна в точці a_k.

Зауважимо, що два попередні означення неперервності функцій в точці по змінній x_k є еквівалентними.

Очевидно, що якщо функція неперервна в точці A, то вона неперервна по кожній змінній, по кожній парі змінних, по кожній групі змінних.

Функція $f(M)$ називається ***неперервною на множині*** $\{M\}$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Нехай функції $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)$ визначені на множині $\{T(t_1, \ldots, t_k)\} \subset \mathbb{R}^k$ і кожній точці $T(t_1, \ldots, t_k) \in \{T\}$ ставиться у відповідність точка $M(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Позначимо множину всіх таких точок через $\{M\}$. Нехай на множині $\{M\}$ визначена функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$. Тоді кажуть, що на множині $\{T\}$ визначена складена функція $u = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k))$.

Теорема 1 (про неперервність складеної функції). *Нехай функції* $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)$ *є неперервними в точці* $A(a_1, \ldots, a_k)$, *а функція* $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ *неперервна у відповідній точці* $B(b_1, \ldots, b_m)$, *де* $b_i = \varphi_i(a_1, \ldots, a_k)$, $i = \overline{1, m}$. *Тоді складена функція* $u = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k))$ *неперервна в точці* A.

Функція $u = f(M)$ називається ***обмеженою на множині*** $\{M\}$, якщо існують сталі числа c і C такі, що для довільної точки $M \in \{M\}$ виконується нерівність $c \le f(M) \le C$.

Число α називається ***точною верхньою межею функції*** $u = f(M)$ на множині $\{M\}$, якщо:

1) $(\forall M \in \{M\})$ виконується нерівність $f(M) \le \alpha$,

2) $(\forall \alpha' < \alpha)$, $(\exists M' \in \{M\})$ така, що $f(M') > \alpha'$.

Позначення: $\alpha = \sup\limits_{\{M\}} f(M)$.

Аналогічно дається означення ***точної нижньої межі функції*** на множині $\{M\}$. Її позначають $\inf\limits_{\{M\}} f(M)$.

Теорема 2 (перша теорема Вейєрштраса). *Неперервна на замкнутій обмеженій множині функція обмежена на цій множині.*

Теорема 3 (друга теорема Вейєрштраса). *Неперервна на замкнутій обмеженій множині функція досягає на цій множині своїх точних меж.*

Функція $u = f(M)$ називається ***рівномірно неперервною на множині*** $\{M\}$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists\, \delta(\varepsilon) > 0)$ таке, що $(\forall M_1,\, M_2 \in \{M\})$, які задовольняють нерівність $\rho(M_1,\, M_2) < \delta$, виконується нерівність

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 4 (теорема Кантора). *Неперервна на замкненій обмеженій множині функція є рівномірно неперервною.*

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення неперервної функції в точці.

2. Що таке повний приріст функції $u = f(M)$ точці A? Як записати умови неперервності функції в точці A, використовуючи приріст функції в точці? Запишіть приріст функції $u = xy$ в точці $A(1;\, 2)$ через прирости $\triangle x$ і $\triangle y$ її аргументів.
3. Які точки називаються точками розриву функції $u = f(M)$? Наведіть приклади точок розриву функції двох і трьох змінних.
4. Що називається частинним приростом функції $u = f(M)$ в точці $A(a_1, \ldots, a_m)$? Як одержати частинний приріст функції із її повного приросту? Запишіть частинні прирости функції $u = xy$ в точці $A(1;\, 2)$ через прирости її аргументів.
5. Сформулюйте два означення неперервності функції $u = f(M)$ точці A по окремих змінних і доведіть їх еквівалентність.
6. Як пов'язана неперервність функції в точці по сукупності аргументів і неперервність функції в цій точці по окремих змінних?
7. Сформулюйте теорему про арифметичні дії над неперервними функціями. Доведіть цю теорему, використовуючи теорему 1 з розділу I.
8. Сформулюйте поняття складеної функції і теорему про неперервність складеної функції.
9. Дайте означення неперервної на даній множині функції. Чи є функція
$$u = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$$
неперервна на всій площині?
10. Дайте означення обмеженої на даній множині функції. Чи є функція
$$u = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
обмеженою: а) в крузі $\{(x,\, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$; б) на осі OX.
11. Сформулюйте означення необмеженої на даній множині функції.

12. Сформулюйте першу теорему Вейєрштраса про властивість неперервної функції.
13. Чи є справедливим твердження: "Неперервна в ε-околі точки A функція $u = f(M)$ обмежена в цьому околі"?
14. Чи може необмежена на множині $\{M\}$ функція бути неперервною на цій множині, якщо: а) $\{M\}$–m-вимірна сфера; б) $\{M\} = \{(x, y) : x^2+y^2 \le 1\}$; в) $\{M\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.
15. Дайте означення точної верхньої і точної нижньої меж функції на даній множині. Чи має функція $u = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ точні межі на всій площині?
16. Сформулюйте другу теорему Вейєрштраса.
17. Чи справедливе твердження: "Якщо функція $u = f(M)$ досягає на множині $\{M\}$ своїх точних меж, то вона неперервна на цій множині"?
18. Чи вірне твердження: "Неперервна в паралелепіпеді функція має в цьому паралелепіпеді максимальне і мінімальне значення"?
19. Дайте означення рівномірної неперервності функції. Як пов'язані між собою неперервність і рівномірна неперервність функції на даній множині?
20. Дайте заперечення означення рівномірної неперервності.
21. Сформулюйте теорему Кантора.
22. Чи вірне твердження: "Неперервна в ε-околі точки M функція $u = f(M)$ рівномірно неперервна в цьому околі"?

§ 2.2. Приклади розв'язування задач

1. Знайти точки розриву функції $u = \dfrac{x - y}{x^3 - y^3}$.

Розв'язок. Дана функція не визначена в тих точках, де знаменник дробу рівний нулю, тобто на прямій $y = x$. В інших точках площини функція визначена. Оскільки кожна точка прямої $y = x$ є граничною точкою області визначення і в ній функція не визначена, то в кожній точці прямої $y = x$ функція має розрив. В будь-якій іншій точці площини функція неперервна.

Якщо точка $A(a;\, a) \neq O(0;\, 0)$, то

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{3a^2}.$$

Тому точку $A(a;\, a)$, $a \neq 0$, можна назвати точкою усувного розриву. Якщо доозначити $u(a,\, a) = \dfrac{1}{3a^2}$, то функція $u(x,\, y)$ буде неперервною в точці $A(a;\, a)$. В точці $O(0;\, 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = +\infty.$$

Точка $O(0;\, 0)$ – точка неусувного розриву. ▶

2. Довести, що функція

$$u = f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

є неперервною в точці $O(0;\, 0)$ по кожній змінній, але не є неперервною в цій точці по сукупності змінних.

Розв'язок. Розглянемо частинний приріст функції $f(x,\, y)$ в точці $O(0;\, 0)$, що відповідає приросту $\triangle x$ аргументу x :

$$\triangle_x u = f(\triangle x,\, 0) - f(0,\, 0) = 0 - 0 = 0.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{\triangle x\to 0} \triangle_x u = 0$, а це означає, що $f(x,\, y)$ неперервна в точці $O(0;\, 0)$ по змінній x. Аналогічно одержимо, що $f(x,\, y)$ неперервна в точці $O(0;\, 0)$ по y.

Щоб довести, що функція $f(x,\, y)$ не є неперервною в точці $O(0;\, 0)$ по сукупності аргументів, використаємо приклад 3 з §1.3. В цьому прикладі було доведено, що границя функції $u = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точці $O(0;\, 0)$ не існує. Звідси випливає, що функція не є неперервною в точці $O(0;\, 0)$. ▶

3. Дослідити функцію

$$u(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos{(x-y)} - \cos{(x+y)}}{2xy}, & xy \neq 0,\\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

на неперервність по окремих змінних і по сукупності змінних: а) в точці $O(0;\,0)$; б) в точці $A(1;\,0)$.

Розв'язок. Використовуючи формулу для різниці косинусів, запишемо функцію $u(x,\,y)$ у вигляді

$$u(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\sin y}{y}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$$

а) Оскільки

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,\,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1=u(0,\,0),$$

то $u(x,\,y)$ неперервна в точці $O(0;\,0)$, а отже і неперервна по кожній змінній зокрема.

б) Розглянемо функцію $u(x,\,0)$, яка рівна одиниці для всіх x. Тоді функція $u(x,\,0)$ в точці $x=1$ неперервна, бо $\lim\limits_{x\to 1}u(x,\,0)=1=u(1,\,0)$. Отже, $u(x,\,y)$ неперервна в $A(1;\,0)$ по x.

Розглянемо тепер функцію

$$u(1,\,y)=\begin{cases}\sin 1\dfrac{\sin y}{y}, & y\neq 0,\\ 1, & y=0.\end{cases}$$

Оскільки

$$\lim_{y\to 0}u(1,\,y)=\lim_{y\to 0}\sin 1\frac{\sin y}{y}=\sin 1\neq 1=u(1,\,0),$$

то $u(1,\,y)$ розривна в точці $y=0$. Це означає, що функція $u(x,\,y)$ розривна в точці $A(1;\,0)$ по сукупності аргументів. ►

4. Довести, що функція $u(x,\,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ обмежена на множині $\Omega=\{(x,\,y):\ 0<x^2+y^2\leq 1\}$. Знайти її точні межі на цій множині.

Розв'язок. Для дослідження зручно перейти до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді $u=\rho^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=\rho^2(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi)$. Оскільки $0<\rho\leq 1$, то $0<u\leq 1$, тобто $u(x,\,y)$ обмежена на множині Ω.

При $\rho=1$, $\varphi=0$, тобто в точці з координатами $x=1$, $y=0$ функція $u(x,\,y)$ досягає свого найбільшого значення $\sup\limits_{\Omega}u(x,\,y)=1$. Оскільки $u\to 0$

при $\rho \to 0$, то $u(x,\, y)$ приймає як завгодно малі додатні значення: $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists (x_0,\, y_0) \in \Omega)$ така, що $u(x_0,\, y_0) < \varepsilon$. Із нерівності $u(x,\, y) > 0$ випливає, що $\inf\limits_{\Omega} u(x,\, y) = 0$, але $u(x,\, y)$ не досягає свого мінімального значення ні в одній точці Ω. Значить $u(x,\, y)$ не має свого мінімального значення в Ω. ▶

5. Довести, що функція $u = x + 2y + 3$ рівномірно неперервна на всій площині.

Розв'язок. Для доведення використаємо означення рівномірної неперервності функції. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Тоді для довільних точок $M_1(x_1,\, y_1),\ M_2(x_2,\, y_2)$, що задовольняють нерівність $\rho(M_1,\, M_2) < \delta$, будуть виконуватись нерівності $|x_1 - x_2| < \delta,\ |y_1 - y_2| < \delta$.

Отже,

$$|u(M_1) - u(M_2)| \le |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| < \delta + 2\delta = 3\delta.$$

Щоб $|u(M_1) - u(M_2)|$ було меншим за ε, достатньо взяти $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$. Із означення рівномірної неперервності випливає, що $u(x,\, y)$ рівномірно неперервна на всій площині. ▶

6. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $u(x,\, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ на множині $\Omega = \{(x,\, y) :\ 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$.

Розв'язок. За означенням тут складно перевіряти на рівномірну неперервність. Область Ω не замкнена, тому не можна використати теорему Кантора, але $u(x,\, y)$ можна по неперервності доозначити в точці $O(0;\, 0)$. Перейшовши до полярної системи координат, маємо $u = \rho(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$, тому $u \to 0$ при $\rho \to 0$. Отже, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x,\, y) = 0$.

Розглянемо функцію $u^*(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & (x, y) \ne (0; 0), \\ 0, & (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

Функція $u^*(x,\, y)$ неперервна в крузі $\overline{\Omega} = \{(x,\, y) :\ 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$. За теоремою Кантора $u^*(x,\, y)$ рівномірно неперервна. Тому $u(x,\, y)$ рівномірно неперервна в проколеному крузі $\Omega = \{(x,\, y) :\ 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$. ▶

§ 2.3. Задачі і вправи для самостійної роботи

1. Знайти точки розриву функцій:

$$1)\ u = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad 2)\ u = \ln(4 - x^2 - y^2),$$
$$3)\ u = \frac{1}{x^2+y^2-z^2}, \qquad 4)\ u = \sin\frac{x}{y},$$
$$5)\ u = \frac{\sin x \sin y}{xy}.$$

2. Дослідіть функцію $u(x,\, y)$ на неперервність в точці $O(0;\, 0)$ і в точці $A(x,\, y)$ по кожній змінній і по сукупності змінних, якщо:

$$1)\ u = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & x^4+y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4+y^4 = 0, \end{cases} \quad A(1;\, 2),$$

$$2)\ u = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & x^4+y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4+y^4 = 0, \end{cases} \quad A(10^{-4};\, 10^{-5}),$$

$$3)\ u = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0, \end{cases} \quad A(0;\, -1),$$

$$4)\ u = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0, \end{cases} \quad A(0;\, 1),$$

$$5)\ u = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin y}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 1, & x+y = 0, \end{cases} \quad A(\tfrac{\pi}{3};\, -\tfrac{\pi}{3}),$$

$$6)\ u = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos y}{x-y}, & x-y \neq 0, \\ 0, & x-y = 0, \end{cases} \quad A_1(\tfrac{\pi}{4};\, \tfrac{\pi}{4}),\ A_2(\pi;\, \pi).$$

3. Чи обмежені дані функції:

1) $u = x^2 - y^2$ в крузі $\{(x,\, y):\ x^2+y^2 \leq 49\}$,

2) $u = x^2 - y^2$ ззовні круга $\{(x,\, y):\ x^2+y^2 \geq 49\}$,

3) $u = \dfrac{ax^2 + by^2}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$, a, $b \in \mathbb{R}$,

4) $u = \dfrac{\cos(x + y) - \cos(x - y)}{xy}$ при $xy \neq 0$,

5) $u = \dfrac{\sin(x + y) - \sin(x - y)}{xy}$ при $xy \neq 0$,

6) $u = \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$ при $x \neq y$?

4. Доведіть обмеженість функції на вказаній множині, знайдіть її точні межі та встановіть, чи досягає функція свого найменшого і найбільшого значень:

1) $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$,

2) $u = \dfrac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$ на множині $\{(x, y) :\ 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}$,

3) $u = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$ при $x^4 + y^4 \neq 0$,

4) $u = xye^{-xy}$ на множині $\{(x, y) :\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$,

5) $u = \dfrac{a(x^2 + y^2) + bz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ при $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, $a > b$.

5. Користуючись означенням рівномірної неперервності, доведіть рівномірну неперервність функції на даній множині:

1) $u = ax + by + c$ на всій площині $\mathbb{R}^2$, $a \neq 0$ і $b \neq 0$ одночасно,

2) $u = x^2 + y^2$ в крузі $\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$,

3) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в $\mathbb{R}^3$,

4) $u = x^3 - y^3$ в квадраті $\{(x, y) :\ 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

6. Дослідити функцію на рівномірну неперервність на заданій множині:

1) $u = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ на множині $\{(x, y) :\ 0 < x^2 + y^2 < 25\}$,

2) $u = \dfrac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2}$ на множині $\{(x, y) :\ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$,

3) $u = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$ на множинах $\Omega_1 = \{(x, y) :\ 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ і $\Omega_2 = \{(x, y) :\ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$,

4) $u=\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ на множинах $\Omega_1=\{(x,\,y,\,z):10^{-2}<x^2+y^2+z^2<100\}$ і $\Omega_2=\{(x,\,y,\,z):\ 0<x^2+y^2+z^2<10^{-2}\}$,

5) $u=x\sin\dfrac{1}{y}$ на множині $\{(x,\,y):\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$.

РОЗДІЛ III. Частинні похідні і диференційовність функції

§ 3.1. Основні поняття і теореми

Нехай $M(x_1,\ldots,x_m)$ – внутрішня точка області визначення функції $f(x_1,\ldots,x_m)$. Надамо приросту Δx_k змінній x_k так, щоб точка $M(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_m)$ належала області визначення функції $f(x_1,\ldots,x_m)$. Розглянемо частинний приріст цієї функції в точці $M(x_1,\ldots,x_m)$, що відповідає приросту Δx_k аргументу x_k :

$$\Delta_{x_k}u=f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_m)-f(x_1,\ldots,x_m).$$

Відношення $\dfrac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}$ є функцією однієї змінної Δx_k при фіксованій точці $M(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_m)$.

Частинною похідною функції $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ по аргументу x_k в точці M називають границю

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}$$

при умові, що вона існує.

Частинна похідна позначається будь-яким із символів:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(M),\quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(M),\quad u'_{x_k}(M),\quad f'_{x_k}(M).$$

Розглянемо повний приріст $\Delta u = f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_m+\Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$ функції $f(x_1, \dots, x_m)$ у внутрішній точці $M(x_1, \dots, x_m)$ області визначення, Δu – функція аргументів $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$. Функція $u = f(x_1, \dots, x_m)$ називається ***диференційовною в точці*** $M(x_1, \dots, x_m)$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m, \qquad (4)$$

де A_i, $i = \overline{1,m}$, – деякі числа, α_i – функції аргументів Δx_i, нескінченно малі при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0$ і рівні нулю при $\Delta x_1 = 0, \dots, \Delta x_m = 0$.

Умову диференційовності (4) можна подати і в іншій еквівалентній формі

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha(\rho), \qquad (5)$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$ – відстань між точками $M(x_1, \dots, x_m)$, $M_1(x_1+\Delta x_1, \dots, x_m+\Delta x_m)$, $\alpha(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \to 0$, $\alpha(0) = 0$.

Теорема 1. *Якщо функція $u = f(x_1, \dots, x_m)$ диференційовна в точці M, то вона неперервна в цій точці.*

Обернена теорема невірна, тобто неперервність функції в точці є тільки необхідною умовою диференційовності.

Нагадаємо, що для функції $u = f(x)$ існування похідної в точці x_0 є необхідною і достатньою умовою диференційовності функції в точці.

Теорема 2 (необхідна умова диференційовності). *Якщо функція u диференційовна в точці M, то вона має в цій точці частинні похідні по кожному аргументу. При цьому $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M) = A_k$, $k = \overline{1,m}$, де A_k – числа із рівності (4) чи (5).*

Умову диференційовності (4) можна записати у вигляді

$$\Delta u(M) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m.$$

Обернена теорема не вірна, тобто існування частинних похідних не забезпечує диференційованості функції.

Теорема 3 (достатня умова диференційовності). *Якщо функція $u = f(x_1, \dots, x_m) = f(M)$ має частинні похідні по кожному аргументу*

$x_1, \ldots, x_m$ в деякому околі точки M і ці частинні похідні неперервні в точці M, то ця функція диференційовна в точці M.

Зауважимо, що неперервність частинних похідних є тільки достатньою, але не необхідною умовою диференційовності функції. Функція буде диференційовною в точці, якщо її приріст в цій точці можна подати у формі

$$\Delta u(M) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m + o\Big(\sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_m^2}\Big).$$

Функція $u = f(x, y)$, визначена в деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$, задає в D поверхню S. Якщо $u = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ існує дотична площина до поверхні S (графіка цієї функції), причому рівняння дотичної площини записується у такому вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y - y_0) - (u - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Вектор $\vec{n}$ нормалі до дотичної площини, тобто

$$\vec{n} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), -1\right\}$$

називають ***вектором нормалі*** (або ***нормаллю***) до поверхні S в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Теорема 4. *Нехай функції $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)$ диференційовні в точці $A(a_1, \ldots, a_k)$, функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ диференційовна у відповідній точці $B(b_1, \ldots, b_m)$, де $b_i = \varphi_i(a_1, \ldots, a_k)$, $i = \overline{1, m}$. Тоді складена функція $u = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k))$ диференційовна в точці $A(a_1, \ldots, a_n)$ і її частинні похідні в цій точці виражаються формулами*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(B)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(A) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(B)\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_i}(A) + \ldots +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_m}(B)\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_i}(A) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(B)\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(A), \quad i = \overline{1, k}. \tag{6}$$

Першим диференціалом функції $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точці M називається лінійна функція аргументів $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ вигляду

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m.$$

Диференціал dx_i незалежної змінної x_i рівний Δx_i. Тоді диференціал функції $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точці M можна записати:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)dx_m. \tag{7}$$

Якщо аргументи x_i не незалежні змінні, а диференційовні функції, то dx_i – диференціали функцій $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_k)$, але формула (7) має той же вигляд, що й у випадку, коли x_i – незалежні змінні. Така властивість диференціала називається ***інваріантністю форми першого диференціала***.

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення частинної похідної функції $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ по аргументу x_i у внутрішній точці області.
2. Дайте означення диференційовності функції в даній точці. Доведіть еквівалентність умов диференційованості (4) і (5). Доведіть диференційовність функції $u = x_1 x_2$ в точці $(0;0)$, зобразивши приріст функції в цій точці у вигляді (4).
3. Доведіть,що диференційовна в даній точці функція неперервна в цій точці. Приведіть приклад,що обернене твердження невірне.
4. Сформулюйте теорему про достатні умови диференційовності.
5. Нехай дана функція

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{на осях координат,} \\ 1, & \text{в інших точках площини .} \end{cases}$$

Вона має такі властивості: $u'_x(0,0) = u'_y(0,0) = 0$ в будь-якій точці $M(x, 0)$, де $x \neq 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, а $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ не існує; в будь-якій точці $M(0, y)$, $y \neq 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, а $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ не існує в інших точках площини $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

(обґрунтуйте цю властивість). Разом з тим функція розривна в точці $O(0;0)$ (поясніть чому), а значить і не диференційовна в цій точці. Поясніть ілюзорне "протиріччя" цього прикладу з теоремою про достатні умови диференційовності.

6. Який геометричний зміст диференційовності функції в точці? Дайте означення дотичної площини до поверхні $u=f(x,y)$ в точці $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Напишіть рівняння дотичної площини в цій точці.
7. Що таке диференціал функції $u = f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ в даній точці? Від яких аргументів він залежить?
8. Який геометричний зміст диференціала функції в точці $M(x,y)$?
9. Що розуміємо під інваріантністю форми першого диференціала?

§ 3.2. Приклади розв'язування задач

1. Довести, що функція

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

в точці $O(0;0)$ має частинні похідні, але не диференційовна в цій точці.

Розв'язок. Оскільки $\Delta_x u(0,0) = \Delta x,\ \Delta_y u(0,0) = \Delta y$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = 1 = u'_x(0,0), \qquad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y} = 1 = u'_y(0,0).$$

Отже, функція має частинні похідні в точці $(0;0)$. Доведемо, що $u(x,y)$ не диференційовна в точці $O(0;0)$. Припустимо протилежне. Тоді $\Delta u(0,0) = u(\Delta x,\Delta y) - u(0,0)$ можна подати у вигляді $\Delta u = u'_x(0,0)\Delta x + u'_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$, де $\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Оскільки $u'_x(0,0) = u'_y(0,0) = 1$, то із умови диференційовності маємо

$$\frac{\Delta x^3+\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \Delta x + \Delta y + o(\rho),$$

або

$$\frac{\Delta x^3+\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2} - \Delta x - \Delta y = o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

Тут $\dfrac{o(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ незалежно одне від другого. Покажемо, що в нашому випадку це не так. Дійсно, взявши $\Delta y = k\Delta x$, $k \neq 0$ маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left(\frac{\Delta x^3+\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2} - \Delta x - \Delta y\right) : \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \frac{-(k^2+k)}{(k^2+1)^{\frac{3}{2}}},\ k \neq 0,$$

тобто границя взагалі не існує. Отже припущення, що функція $u(x,y)$ в точці $O(0;0)$ диференційовна – невірне. ▶

2. Довести, що функція

$$u(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

має частинні похідні в околі точки $O(0;0)$ і диференційовна в цій точці, але частинні похідні розривні в точці $O(0;0)$.

Розв'язок. У всіх точках, крім $O(0,0)$, частинні похідні обчислюються за правилами обчислення похідних, не використовуючи означення частинної похідної. Тому

$$u'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\Big(-\frac{2x}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\Big) =$$
$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

при $x^2+y^2 \neq 0$.

В точці $O(0;0)$ ця формула втрачає сенс, але це не означає, що $u'_x(0,0)$ не існує. Для знаходження $u'_x(0,0)$ використаємо означення частинної похідної. Частинний приріст по x

$$\Delta_x u(0,0) = \Delta x^2 \sin\frac{1}{\mid \Delta x \mid}$$

Звідси $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x u(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\dfrac{1}{\mid \Delta x\mid} = 0$, тобто $u'_x(0,0) = 0$. Аналогічно одержуємо, що $u'_y(0,0) = 0$. Доведемо, що функція $u(x,y)$ диференційовна в точці $O(0;0)$, тобто

$$\Delta u(0,0) = u'_x(0,0)\Delta x + u'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

де $o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \to 0$ при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Безпосереднім обчисленнями одержуємо

$$\Delta u(0,0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

З умови диференційовності маємо, що

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

Перевіримо, чи $o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \to 0$ при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$. Дійсно

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0.$$

Таким чином, $u(x,y)$ диференційовна в точці $O(0;0)$. Доведемо, що $u'_x(x,y)$ розривна в точці $O(0;0)$. Оскільки $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не має границі при $x \to 0,\ y \to 0$, то $u'_x(x,y)$ розривна в точці $O(0;0)$. Аналогічно знаходимо $u'_y(x,y)$ в околі точки $O(0;0)$ і показуємо, що вона має розрив у цій точці.

Цей приклад показує, що умова неперервності частинних похідних достатня для диференційовності функції, але не необхідна. ▶

§ 3.3. Задачі і вправи для самостійної роботи

1. Знайдіть частинні похідні таких функцій:

1) $u = x^2 + y^3 + 3x^2y^3$, 2) $u = xyz + \dfrac{x}{yz}$, 3) $u = \sin(xy + yz)$,

4) $u = \dfrac{\cos x}{\cos y}$, 5) $u = \operatorname{tg}(x+y)\exp^{\frac{x}{y}}$, 6) $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

7) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, 8) $u = xy\ln(xy)$, 9) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$,

10) $u = z^{\frac{x}{y}}$, 11) $u = x^{y^z}$, 12) $u = x^y y^z z^x$.

2. Чи існує частинна похідна $u'_x(0,1)$ функції $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$?

3. Дослідіть, чи має функція $u(x,y)$ частинні похідні в точці $(0;0)$ і чи диференційовна вона в цій точці, якщо:

1) $u = \sqrt{x^2+y^2}$, 2) $u = \sqrt{x^4+y^4}$,

3) $u = \sqrt[3]{xy}$, 4) $u = \sqrt[3]{y^2x^2}$,

5) $u = \sqrt[4]{x^4+y^4}$, 6) $u = \sqrt[3]{x^3+y^3}$,

7) $u = \sqrt[3]{x^4+y^4}$, 8) $u = \sqrt[5]{x^3+y^3}$,

9) $u = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 10) $u = \sqrt[3]{x}\sin y$,

11) $u = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{th}\, y$, 12) $u = \sqrt[3]{y}\,\mathrm{tg}\, x$,

13) $u = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 14) $u = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{|x|+|y|}, & |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & |x|+|y| = 0. \end{cases}$

4. Складіть рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x,y)$ в точці $N(x_0;y_0;z_0)$, якщо:

1) $z = xy$, $N(1;0;0)$, 2) $z = x+y^2$, $N(0;1;1)$,

3) $z = x^3+y^3$, $N(1;-1;0)$, 4) $z = \sin(xy)$, $N\Big(1;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)$,

5) $z = e^{x+y}$, $N(1;-1;1)$.

5. Чи є площина $z = 0$ дотичною в точці $O(0;0;0)$:

1) до параболоїда обертання $z = x^2+y^2$,

2) до конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$,

3) до гіперболічного параболоїда $z = xy$?

6. Знайдіть частинні похідні складених функцій ($f(u,v)$ і $g(u,v)$ – диференційовні):

1) $u = f(x+y, x^2+y^2)$, 2) $u = f\Big(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\Big)$,

3) $u = f(x-y, xy)$, 4) $u = f(xy)g(yz)$,

5) $u = (f(x-y))^{g(x-y)}$, 6) $u = f(x-y^2, y-x^2, xy)$,

7) $u = f\big(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{z^2+x^2}\big)$.

РОЗДІЛ IV. Похідна функції за напрямом. Ґрадієнт

§ 4.1. Основні поняття і теореми

Нехай $f(M)$ визначена в деякій відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$. Розглянемо довільну точку $M_0 \in D$ і будь-яку напрямлену пряму ℓ, що проходить через цю точку. Виберемо довільну точку $M(x, y, z) \in \ell$. Довжину відрізка M_0M візьмемо із знаком плюс, якщо напрям M_0M співпадає з напрямом ℓ і зі знаком мінус в іншому випадку.

Якщо існує границя

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M},$$

то її називають ***похідною від функції*** $f(M)$ ***по напряму*** ℓ (або вздовж осі ℓ) і позначають $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \ell} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \ell}$.

Ця похідна характеризує "швидкість зміни" функції в точці M_0 за напрямом ℓ. Частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ можна розглядати як похідні за напрямом координатних осей. Якщо вісь ℓ утворює з координатними осями кути α, β, γ, то при існуванні неперервних частинних похідних в точці M_0 маємо

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \cos\gamma. \quad (8)$$

Якщо

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = c \qquad (9)$$

одночасно не рівні нулю, то (8) можна переписати

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\times$$
$$\times\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cos\beta + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cos\gamma\right).$$

Дроби в дужках можна розглядати як напрямні косинуси деякого вектора $\vec{g}$. Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = |\vec{g}|\cos(\widehat{\vec{g},\ell}). \qquad (10)$$

Вектор, що має проекції (9) на координатні осі, називається ***ґрадієнтом функції*** $f(M)$ в точці M_0.

Він визначає напрям найбільш швидкого зростання функції, а його довжина дає величину відповідної похідної.

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення похідної функції за напрямом.
2. Дайте означення ґрадієнта функції в точці.
3. Визначити, чи правильні дані твердження:

   1) частинний приріст $\Delta_y f(M_0)$ є приростом функції f в точці M_0 в напрямі орта $\vec{j}$,

   2) існування похідної $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \ell}$ є достатньою умовою неперервності в точці M_0 функції $f(M)$, яка розглядається на прямій M_0M, паралельній до прямої ℓ,

   3) якщо функція $f(M)$ в точці M_0 має похідну за напрямом $\vec{\ell}$, то в цій точці існує похідна і за будь-яким іншим напрямом,

   4) з існування похідної функції $f(M)$ в точці M_0 за будь-яким напрямом випливає диференційовність функції $f(M)$ в точці M_0,

   5) якщо функція $f(M)$ диференційовна в точці M_0, то в цій точці вона має похідну за будь-яким напрямом.
4. З'ясувати характер зміни функції $f(x,y) = x^2y + 2y^2 - 5$ у напрямі від точки $(2;1)$ до точки $(0;0)$.

5. Довести, що функція $z = x^3 + 8x^2 + 8xy + y^2$ має рівні нулю похідні в точках $(0;0)$, $\left(\frac{16}{3};\frac{64}{3}\right)$ для будь-якого напряму $\vec{\ell}$.

§ 4.2. Приклади розв'язування задач

1. Чи правильним є твердження: існування похідної $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \ell}$ за будь-яким напрямом $\vec{\ell}$ є достатньою умовою неперервності в точці M_0 функції $f(M)$, яка розглядається в околі точки M_0.

Розв'язок. Розглянемо функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} 5, & \text{якщо}\, y = x^2, (x,y) \neq (0;0), \\ 0, & \text{в інших точках площини.} \end{cases}$$

Ця функція на довільній прямій, що проходить через точку $(0;0)$ набуває нульових значень, за винятком можливо лише однієї точки, яка лежить на параболі. Тому можна вказати окіл точки $O(0;0)$ такий, що приріст функції в точці $O(0;0)$ вздовж будь-якої прямої, яка проходить через початок координат, дорівнює нулю.

Отже, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \ell} = 0$ для будь-якого напрямку $\vec{\ell}$. Разом з тим, коли точка (x,y) рухається по параболі до точки $O(0;0)$, то функція $f(x,y)$, будучи тотожно рівною 5, має границю в точці $O(0;0)$ також рівну 5, що не співпадає із значенням функції в точці, тобто функція в точці $O(0;0)$ має розрив. ▶

2. Знайти похідну функції $z = x^2y + y^2x$ в точці $M_0(1;1)$ за напрямом $\vec{\ell}$, що утворює кут $135°$ з додатнім напрямом осі Ox.

Розв'язок. Згідно формули (8)

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial \ell} = \frac{\partial z(1,1)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(1,1)}{\partial y}\cos\beta.$$

В нашому випадку $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy$. Отже,

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial \ell} = (2xy + y^2)\Big|_{(1;1)} \cos 135° + (x^2 + 2xy)\Big|_{(1;1)} \cos 45° = 0. \ ▶$$

§ 4.3. Задачі і вправи для самостійної роботи

1. Знайти похідну функції в точці M_0 за напрямом $\bar{\ell}$:

1) $z = yx^2 - xy^2$, $M_0(3;1)$, $\bar{\ell}$ утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha = 120°$;

2) $z = \operatorname{arctg} xy$, $M_0(2;1)$, $\bar{\ell}$ збігається з напрямом бісектриси першого координатного кута;

3) $u = xyz$, $M_0(1;1;1)$, $\bar{\ell}$ співнапрямлений з вектором $\bar{\ell}_1 = \bar{i} + \bar{k}$;

4) $u = x^2 + y^2 - z^2$, $M_0(1;1;1)$, $\bar{\ell}$ протилежно напрямлений до вектора $\bar{\ell}_1 = -\bar{j} + \bar{k}$;

5) $u = x^2y + y^2z + z^2x$, $M_0(2;1;1)$, $\bar{\ell}$ утворює з координатними осями кути відповідно $60°$, $45°$, $60°$;

6) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(2;1;3)$, $\bar{\ell}$ утворює з координатними осями однакові кути.

2. Знайти кут між ґрадієнтами функцій:

1) $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ у точках $(1;1)$ і $(2;3)$,

2) $u = x^3 + y^3 + z^3$ у точках $(0;1;0)$ і $(0;0;1)$,

3) $z = y(x^2 + 1)$ і $u = x^2y + x$ у точці $(1;1)$,

4) $u = xy + yz + xz$ і $v = x^3yz^2 - x + z$ у точці $(1;1;1)$.

РОЗДІЛ V. Частинні похідні і диференціали вищих порядків функції багатьох змінних

§ 5.1. Основні поняття і теореми

Частинні похідні вищих порядків. Нехай функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ має частинну похідну $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, i = \overline{1, m}$ (вона називається частинною похідною першого порядку) в кожній точці деякого околу точки M.

Якщо $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ має в точці M похідну по аргументу x_k, $k = \overline{1, m}$, то ця похідна називається ***частинною похідною другого порядку*** (або ***другою частинною похідною***) і позначається одним із символів

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(M), \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(M), \ \ u_{x_k x_i}(M), \ \ f_{x_k x_i}(M).$$

Якщо $i \neq k$, то частинна похідна другого порядку називається ***мішаною***. Якщо $i = k$, то використовуються такі позначення для другої частинної похідної

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(M), \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M), \ \ u_{x_i^2}(M), \ \ f_{x_i^2}(M).$$

Частинні похідні третього порядку означаються як похідні від похідних другого порядку і т.д. ***Частинна похідна n-го порядку*** функції $f(x_1, \ldots, x_m)$ по аргументах $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ визначається формулою

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \Big(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \Big).$$

Якщо не всі індекси $i_1, i_2, \ldots, i_n$ рівні між собою, то частинну похідну n-го порядку називають ***мішаною***.

Теорема 1. *Якщо всі змішані похідні n-го порядку функції m-змінних $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ існують в деякому околі точки M_0 і неперервні в точці M_0, то вони не залежать від порядку диференціювання.*

Функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ називається диференційовною n раз в точці M_0, якщо всі частинні похідні $(n-1)$-го порядку диференційовні в цій точці.

Теорема 2. *Якщо $u = f(x, y)$ двічі диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Диференціали вищих порядків. Нехай функція $u(x, y)$ диференційовна в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і двічі диференційовна в точці M_0. Перший диференціал функції

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)dy$$

залежить від чотирьох змінних x, y, dx, dy. ***Другий диференціал*** (або ***диференціал другого порядку***) в точці M_0 означається як диференціал в точці M_0 від першого диференціала. При цьому повинні враховуватися такі умови:

а) du розглядається як функція тільки незалежних змінних x і y, а dx і dy розглядаються як сталі множники,

б) при обчисленні диференціалів від u'_x і u'_y прирости незалежних змінних x і y беруться такими, як у виразі для du, тобто рівними dx, dy.

Тому

$$d^2u(M_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)dy^2,$$

де $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$. Для зручності запису введемо символ, який назвемо оператором частинної похідної по змінній x_k : $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$. Відповідно оператором змішаної похідної $(k+l)$-го порядку l раз по x_j і k раз по x_i назвемо символ

$$\frac{\partial^{x+l}}{\partial x_i^k \partial x_j^l} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^l$$

а символ $d = \dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy$ – оператором диференціала функції двох змінних. Дія останнього оператора на $u(x,y)$ дає перший диференціал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Диференціал n-го порядку $d^n u$ визначається індуктивно за формулою

$$d^n u = d(d^{n-1}u).$$

Для диференціала n-го порядку функції $u(x,y)$ справедлива операторна формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u,$$

де $d^n = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$ – оператор n-го диференціала. Якщо x і y не незалежні змінні, а функції, диференційовні (потрібну кількість разів) по незалежних змінних $t_1, \ldots, t_k$, то другий диференціал має вигляд:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2 y,$$

де dx, dy, d^2x, d^2y – диференціали першого та другого порядків функцій $x(t_1, \ldots, t_k)$, $y(t_1, \ldots, t_k)$. У випадку функцій m незалежних змінних $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ диференціал n-го порядку визначається індуктивно при виконанні умов, аналогічних умовам а), б) для диференціала першого порядку. Оператор диференціала має вигляд

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m,$$

і справедлива операторна рівність

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^m u.$$

Теорема 3 (формула Тейлора). *Якщо функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ диференційовна $n+1$ раз в деякому ε-околі точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, то для будь-якої точки $M(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)$ із цього околу має місце рівність*

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0) = du(M_0) + \frac{1}{2!}d^2u(M_0) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}d^n u(M_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u(N), \tag{11}$$

де N – деяка точка, що належить відрізку M_0M, $dx_i = \Delta x_i$, $i = \overline{1,m}$.

Формула (11) називається ***формулою Тейлора***. При $n = 0$ із (11) одержуємо формулу Лагранжа скінченних приростів для функції багатьох змінних. Вираз

$$f(x_1^0, \ldots, x_m^0) + du(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n u(M_0) = P_n(x_1, \ldots, x_m)$$

називається ***многочленом Тейлора***. $f(M) - P_n(M) = R_{n+1}$ – ***залишковий член*** формули Тейлора, $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u(N)$ — залишковий член, записаний у ***формі Лагранжа***. Залишковий член може бути записаний і у ***формі Пеано***: $R_{n+1} = o(\rho)$. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано може бути записана при слабших умовах, ніж у теоремі 3, зокрема функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ повинна бути $n-1$ раз диференційована в деякому ε-околі точки M_0 і диференційована n раз в самій точці M_0.

Контрольні запитання і завдання

1. Відомо, що функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ має всі частинні похідні n-го порядку в точці M_0. Що можна сказати про існування частинних похідних нижчого порядку в точці M_0 і в околі цієї точки?
2. Доведіть, що коли функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ має в деякому околі точки M_0 всі частинні похідні до n-го порядку і ці частинні похідні неперервні в точці M_0, то функція диференційована n раз в цій точці.
3. Що таке многочлен Тейлора? Чому дорівнюють частинні похідні від многочлена $P_n(x_1, \ldots, x_m)$ в точці M_0?
4. Коли зберігається інваріантність форми другого диференціала функції $u = f(x, y)$, якщо $x = x(t_1, \ldots, t_m)$, $y = y(t_1, \ldots, t_m)$?

§ 5.2. Приклади розв'язування задач

1. Довести, що функція

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

має в точці $O(0;0)$ змішані частинні похідні другого порядку, але при цьому $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Розв'язок. Спочатку обчислимо $f'_x(x,y)$. У всіх точках, крім $O(0;0)$ можна це зробити, безпосередньо диференціюючи по x функцію $u(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Одержимо

$$f'_x(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + yx\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + yx\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{yx^4-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

при $x^2+y^2 \neq 0$.

Знайдемо $f'_x(0,0)$. Оскільки $\Delta_x f(0,0) = 0$, то $f'_x(0,0) = 0$. Для знаходження $f''_{xy}(0,0)$ потрібно мати $f'_x(0,y)$ в точці $y \neq 0$. Очевидно, що $f'_x(0,y) = -y$ для всіх $y \neq 0$. Отже, $f''_{xy}(0,0) = \dfrac{d}{dy}f'_x(0,y)\Big|_{y=0} = -1$. Аналогічно шукаємо

$$f'_y(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-y^4x-4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2},$$

при $x^2+y^2 \neq 0$, $f'_y(0,0) = 0$.

Для всіх $x \neq 0$ маємо, що $f'_y(x,0) = x$. Отже, $f''_{yx}(0,0) = 1$. Тоді

$$f''_{yx}(0,0) \neq f''_{xy}(0,0). \ \blacktriangleright$$

2. Довести, що якщо функція $f(x,y)$ диференційовна в опуклій області G, і її частинні похідні $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ обмежені в цій області, то $f(x,y)$ рівномірно неперервна в області G.

Розв'язок. Нехай $|f'_x(x,y)| \leq C$, $|f'_y(x,y)| \leq C$, $C = \text{const}$, у опуклій області. Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і покладемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C}$. Нехай $M_1(x_1,y_1)$,

$M_2(x_2, y_2)$ – будь-які точки області G, для яких $\rho(M_1, M_2) < \delta$. Із означення опуклості слідує, що відрізок M_1M_2 повністю лежить в G (для цього досить ε вибрати малим), тому до різниці $f(M_1) - f(M_2)$ можна застосувати формулу Лагранжа:

$$f(M_1) - f(M_2) = f'_x(N)(x_1 - x_2) + f'_y(N)(y_1 - y_2).$$

Оскільки $\rho(M_1M_2) < \delta$, то $|x_1 - x_2| < \delta$ і $|y_1 - y_2| < \delta$.

Отже, $|f(M_1) - f(M_2)| < 2C\delta = \varepsilon$. Згідно означення рівномірної неперервності це означає, що $f(x, y)$ рівномірно неперервна в області G. ▶

3. Доведіть, що функція

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

рівномірно неперервна на всій площині.

Розв'язок. Спочатку покажемо, що дана функція має обмежені похідні u'_x, u'_y на всій площині. Дійсно

$$u'_x = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

при $x^2 + y^2 \neq 0$ і $u'_x(0, 0) = 1$.

Переходячи до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, одержимо

$$u'_x = 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \cos^4\varphi - 2\cos\varphi\sin^3\varphi$$

при $\rho \neq 0$ і $u'_x(0, 0) = 1$.

Звідси видно, що $u'_x(x, y)$ обмежена функція на всій площині. Аналогічно показуємо, що $u'_y(x, y)$ обмежена. Функція $u(x, y)$ не диференційовна в точці $O(0; 0)$, тому не можемо використати попередній приклад. Але прості міркування дозволяють довести рівномірну неперервність. Якщо точки M_1 і M_2 такі, що точка $O(0; 0)$ не лежить на відрізку M_1M_2, то можна використати формулу Лагранжа. Якщо ж точка O лежить на відрізку M_1M_2, то різниця $u(M_1) - u(M_2)$ може бути оцінена сумою двох різниць

$$(u(M_1) - u(M_3)) + (u(M_3) - u(M_2)),$$

причому M_3 вибрана так, щоб точка O не лежала на відрізках M_1M_3, M_2M_3. Кожну з різниць можна оцінити з допомогою формули Лагранжа. В обох випадках одержимо $|u(M_1) - u(M_2)| < \varepsilon$, якщо $\rho(M_1, M_2) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{4C}$, де $C = \text{const}$, що задовольняє умовам $|u'_x| < C$, $|u'_y| < C$. Це і доводить, що $u(x, y)$ рівномірно неперервна на всій площині. ▶

§ 5.3. Задачі і вправи для самостійної роботи

1. Дослідіть на рівномірну неперервність такі функції:

1) $u = \sin x \cos y$,

2) $u = e^{-(x^2+y^2)}$,

3) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$,

4) $u = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

5) $u = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & x^4 + y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0. \end{cases}$

2. Чи існує $f''_{xy}(0, 0)$, якщо $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0? \end{cases}$

3. Доведіть, що якщо функція $u = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ і змішана частинна похідна неперервна в точці M_0, то в цій точці існує змішана частинна похідна $f''_{yx}(x_0, y_0)$ і справедлива рівність $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

РОЗДІЛ VI. Локальний екстремум функції багатьох змінних

§ 6.1. Основні поняття і теореми

Означення і необхідні умови локального екстремуму. Нехай функція $u = f(M)$ визначена в деякому околі точки M_0. Кажуть, що функція $u = f(M)$ має в точці M_0 ***локальний максимум (мінімум)***, якщо існує такий окіл точки M_0, в якому при $M_0 \neq M$ виконується нерівність $f(M) \leq f(M_0)$ $(f(M) \geq f(M_0))$. Якщо функція має в точці M_0 локальний максимум або мінімум, то кажуть, що вона має в цій точці ***локальний екстремум*** (або просто ***екстремум***).

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму). *Якщо функція $u = f(M)$ має в точці M_0 локальний екстремум і в цій точці існує частинна похідна по аргументу x_k, то $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$.*

Наслідок. *Якщо функція $u = f(M)$ має в точці M_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то*

$$du(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m = 0$$

при будь-яких значеннях диференціалів незалежних змінних $dx_1, \ldots, dx_m$.

Точки, в яких перший диференціал функції дорівнює нулю, називають ***точками можливого екстремуму*** або ***стаціонарними точками***.

Для знаходження точок можливого екстремуму потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_m) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f'_{x_m}(x_1, \ldots, x_m) = 0. \end{cases}$$

Якщо функція має екстремум, то частинні похідні в цій точці можуть не існувати. Точки, в яких функція визначена, але хоча б одна з частинних похідних не існує, також є підозрілими на екстремум.

Квадратичні форми. Функція вигляду

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{mm}x_m^2 = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j,$$

де a_{ij} – числа, причому $a_{ij} = a_{ji}$, називається ***квадратичною формою*** від змінних $x_1, \ldots, x_m$, а матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

– ***матрицею квадратичної форми***.

Визначники

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \delta_m = |A|,$$

називаються ***кутовими мінорами*** матриці A.

Квадратична форма називається ***додатно визначеною (від'ємно визначеною)***, якщо для довільних значень змінних $x_1, \ldots, x_m$, одночасно не рівних нулю, вона приймає додатні (від'ємні) значення.

Квадратична форма називається ***знаковизначеною***, якщо вона або додатно або від'ємно визначена.

Квадратична форма $Q(x_1, \ldots, x_m)$ називається ***знакозмінною***, якщо вона приймає як додатні так і від'ємні значення.

Зауважимо, що $Q(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Критерій Сильвестра для знаковизначеної квадратичної форми. *Для того, щоб квадратична форма була додатно визначена, необхідно і достатньо, щоб усі кутові мінори її матриці були додатні:*

$$\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0,\ \ldots,\ \delta_m > 0,$$

а для того, щоб квадратична форма була від'ємно визначена, необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів чергувалися, причому

$$\delta_1 < 0,\ \delta_2 > 0,\ \delta_3 < 0,\ \delta_4 > 0, \ldots.$$

Достатні умови локального екстремуму. Другий диференціал функції в точці M_0 можна записати у вигляді

$$d^2u(M_0) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j,$$

де частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)$ – коефіцієнти квадратичної форми, яку задає другий диференціал.

Теорема 2 (достатні умови екстремуму). *Нехай функція $u = f(M)$ диференційовна в деякому околі точки M_0 і двічі диференційовна в точці M_0 і точка M_0 – стаціонарна $(df(M_0) = 0)$. Тоді якщо диференціал другого порядку $d^2u(M_0)$ є додатно визначеною (від'ємно визначеною) квадратичною формою від змінних $dx_1, \ldots, dx_m$, то функція $f(M)$ має в точці M_0 локальний мінімум (максимум). Якщо $d^2u(M_0)$ – знакозмінна квадратична форма, то в точці M_0 функція $f(M)$ не має локального екстремуму. Якщо ж квадратична форма квазізнаковизначена, то в точці M_0 функція $f(M)$ може мати локальний екстремум, а може і не мати локального екстремуму.*

У випадку, коли теорема не дає відповіді на питання про наявність чи відсутність екстремуму в досліджуваній точці, застосовують інші критерії. Наприклад, для функцій $u_1 = x^4 + y^4$, $u_2 = x^3 y^3$ теорема "не працює" в точці $O(0;0)$, однак $u_1(x,y)$ має в точці $O(0;0)$ мінімум, бо в проколеному околі точки приймає додатні значення, а в самій точці приймає значення рівне нулю. Функція $u_2(x,y)$ в проколеному околі точки $O(0;0)$ приймає як додатні так і від'ємні значення, а в самій точці перетворюється в нуль, тому в цій точці екстремуму немає.

Випадок функції двох змінних. Введемо позначення:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0),\; a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0),\; a_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(M_0),\; a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y}(M_0).$$

Із критерію Сильвестра і теореми 2 випливають такі твердження:

1. Якщо $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то в точці M_0 функція $u = f(x,y)$ має локальний екстремум (максимум при $a_{11} < 0$ і мінімум при $a_{11} > 0$).

2. Якщо $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то в точці M_0 функція $u = f(x,y)$ не має екстремуму.

3. Якщо $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то в точці M_0 функція $u = f(x,y)$ може мати локальний екстремум, а може і не мати його.

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення локального екстремуму функції.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про необхідні умови екстремуму і наслідок з цієї теореми. Приведіть приклад функції $u = f(x,y)$, що в деякій точці M_0 $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) = 0$, а функція в цій точці не має екстремуму.
3. Які точки називаються точками можливого екстремуму? Наведіть приклад функції $u = f(x,y)$, що має локальний екстремум в деякій точці M_0, при цьому $u'_x(M_0) = 0$, а $u'_y(M_0)$ – не існує?
4. Яка функція називається квадратичною формою? Що таке матриця квадратичної форми? Випишіть матрицю квадратичної форми
$$Q(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2x_3 - x_2^2 + 2x_3x_1 + 3x_3^2.$$
Обчисліть її кутові (головні) мінори.
5. Сформулюйте критерій Сильвестра. Чи є знаковизначеною квадратична форма $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_3x_2 + 8x_3^2$?

6. Запишіть вираз для другого диференціала функції $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точці M_0. Квадратичною формою від яких змінних є $d^2u(M_0)$?
7. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму. Чи є вони і необхідними умовами екстремуму?
8. Сформулюйте достатні умови локального максимуму (мінімуму) і відсутності екстремуму функції $u = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.
9. Наведіть приклад функції $u = f(x, y)$, що в деякій точці M_0 задовольняє умовам $du = 0,\ D = 0$, причому ця функція в точці M_0 : а) має локальний екстремум; б) не має локального екстремуму.

§ 6.2. Приклади розв'язування задач

1. Знайдіть точки локального екстремуму функції

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Розв'язок. Для знаходження точок можливого екстремуму знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} u'_x = 4x - y + 2z = 0, \\ u'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ u'_z = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо: $M_1\Big(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\Big),\ M_2\Big(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\Big)$. Скористаємося достатніми умовами екстремуму. Для цього обчислимо частинні похідні другого порядку: $u''_{x^2} = 4,\ u''_{xy} = -1,\ u''_{xz} = 2,\ u''_{yz} = 0,\ u''_{z^2} = 2,$ $u''_{y^2} = 6y$.

Складемо матрицю квадратичної форми в точці M_1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Головні мінори $\delta_1 = 4 > 0,\ \delta_2 = 15 > 0,\ \delta_3 = 14 > 0$. Отже функція $u(x, y, z)$ має локальний мінімум в точці M_1.

Дослідимо тепер точку M_2. Матриця квадратичної форми $d^2u(M_2)$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Звідси одержуємо, що $\delta_1 = 4 > 0$, $\delta_2 = -13 < 0$, $\delta_3 = -14 < 0$. Значить функція $u(x, y, z)$ в точці M_2 не має локального екстремуму. ▶

2. Знайти точки локального екстремуму функції $u = x^2 - 2xy + 4y^3$.

Розв'язок. Обчислимо перші частинні похідні і прирівнюємо до нуля:

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2y = 0, \\ u'_y = -2x + 12y^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержуємо, що $M_1(0;0)$, $M_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$ – стаціонарні точки.

Знайдемо частинні похідні другого порядку: $u''_{x^2} = 2$, $u''_{xy} = -2$, $u''_{y^2} = 24y$. В точці $M_1:\ u''_{x^2} = 2$, $u''_{xy} = -2$, $u''_{y^2} = 0$, $D = -4 < 0$. В точці $M_2:\ u''_{x^2} = 2$, $u''_{xy} = -2$, $u''_{y^2} = 4$, $D = 4 > 0$, $a_{11} = 2 > 0$.

Отже, в точці M_1 функція не має локального екстремуму, а в точці M_2 має локальний мінімум. ▶

3. Знайти точки локального екстремуму функції $u = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Розв'язок. Знайдемо перші похідні і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} u'_x = -3x^2 + 6xy = 0, \\ u'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знаходимо що точки $M_1(0;0)$, $M_2(6;3)$ – підозрілі на екстремум. Знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції:

$$u''_{x^2} = -6x + 6y,\ \ u''_{xy} = 6x,\ \ u''_{y^2} = -12y^2.$$

В точці $M_1:\ a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, тому потрібно провести ще додаткове дослідження поведінки функції в околі точки $M_1(0;0)$.

При $x < 0$, $y = 0$, маємо $u(x,0) = -x^3 > 0$, а при $x = 0$, $y \neq 0$, – $u(0,y) = -y^4 < 0$. Отже, в будь-якому околі точки $M_1(0;0)$ функція приймає як додатні, так і від'ємні значення, тому в цій точці немає екстремуму. В точці $M_2: a_{11} = -18,\ a_{12} = 30,\ a_{22} = -108,\ D = 64 > 0$. Оскільки $a_{11} < 0,\ D > 0$, то в точці M_2 функція має локальний максимум. ►

§ 6.3. Задачі і вправи для самостійної роботи

1. Знайдіть точки локального екстремуму функцій:

1) $u = x^2 - xy + y^2$,
2) $u = x^2 - xy - y^2$,
3) $u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$,
4) $u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$,
5) $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$,
6) $u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$,
7) $u = xy + \dfrac{1}{2(x+y)}$,
8) $u = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$,
9) $u = e^{x-y}(x^2 + 2y^2 - 2xy)$,
10) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y$,
11) $u = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,
12) $u = (x - 2y)e^{-(x^2+y^2)}$,
13) $u = x^2 - 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 6z - 1$,
14) $u = xy\ln(x^2 + y^2)$,
15) $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$,
16) $u = xyz(1 - x - y - z)$,
17) $u = x^3 + xy - y^2 - 2xz - 2z^2 - 3y - 1$,
18) $u = \dfrac{2x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$,
19) $u = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

2. Доведіть, що функція $u = (x - y^2)(2x - y^2)$ має в точці $O(0;0)$ локальний мінімум вздовж кожної прямої, що проходить через цю точку, але не має локального екстремуму в самій точці.

РОЗДІЛ VII. Неявні функції

§ 7.1. Неявні функції однієї змінної та їх властивості

Нехай значення двох змінних x і y зв'язані між собою рівнянням

$$F(x, y) = 0. \tag{12}$$

Кажуть що в прямокутнику (a, b, c, d) рівняння (12) визначає y як функцію від x, якщо для кожного $x \in (a, b)$ існує одне чи кілька значень $y \in (c, d)$, які разом з x задовольняють рівняння (12), то цим визначається однозначна чи многозначна функція $y = f(x)$, для якої рівність

$$F(x, f(x)) = 0 \tag{13}$$

є тотожністю.

Теорема 1 (про існування та неперервність неявної функції). *Нехай:*

1) функція $F(x, y)$ визначена і неперервна в деякому прямокутнику $D = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta,\ y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$ з центром в точці (x_0, y_0);

2) $F(x, y)$ в цій точці перетворюється в нуль: $F(x_0, y_0) = 0$;

3) при фіксованому x функція $F(x, y)$ монотонно зростає (або монотонно спадає) із зростанням y.

Тоді

a) в деякому околі точки (x_0, y_0) рівняння (12) визначає y як однозначну функцію від $x:\ y = f(x)$;

б) при $x = x_0$ ця функція приймає значення $y_0: \ f(x_0) = y_0$;

в) функція $f(x)$ неперервна.

Теорема 2 (про диференційовність неявної функції). *Нехай:*

1) функція $F(x, y)$ визначена і неперервна в деякому прямокутнику $D = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta, \ y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$ з центром в точці (x_0, y_0);

2) $F(x, y)$ в цій точці перетворюється в нуль: $F(x_0, y_0) = 0$;

3) частинні похідні F'_x, F'_y існують і неперервні в D;

4) похідна $F'_y(x_0, y_0)$ відмінна від нуля.

Тоді

а) в деякому околі точки (x_0, y_0) рівняння (12) визначає y як однозначну функцію від $x: \ y = f(x)$;

б) при $x = x_0$ ця функція приймає значення $y_0: \ f(x_0) = y_0$;

в) функція $f(x)$ неперервна;

г) функція $f(x)$ має неперервну похідну в точці x_0.

§ 7.2. Неявні функції від кількох змінних

Розглянемо рівняння

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0. \tag{14}$$

При певних умовах цим рівнянням визначається однозначна чи багатозначна функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ така, що $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, f(x_1, x_2, \ldots, x_m)) = 0$ є тотожністю.

Кажуть, що в $(m+1)$-вимірному паралелепіпеді $(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m, c, d)$ рівняння (14) визначає y як однозначну функцію від $x_1, \ldots, x_m$, якщо для кожної точки $(x_1, \ldots, x_m)$, що міститься в m-вимірному паралелепіпеді $(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m)$ рівняння (14) має один і тільки один корінь в проміжку (c, d).

Теорема 3. *Нехай:*

1) функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ визначена і неперервна в $(m+1)$ вимірному паралелепіпеді $D = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1, x_2^0 - \Delta_1, x_2^0 + \Delta_1, \ldots, x_m^0 - \Delta_1, x_m^0 + \Delta_1, y^0 - \Delta', y^0 + \Delta']$ з центром в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y^0)$;

2) функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y^0)$ перетворюється в нуль;

3) частинні похідні $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_m}$ існують і неперервні в D;

4) похідна F'_y в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y^0)$ не перетворюється в нуль.

Тоді

а) в деякому околі точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y^0)$ рівняння (14) визначає y як однозначну функцію від $x_1, x_2, \ldots, x_m: \ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$;

б) при $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_m = x_m^0$ ця функція приймає значення y_0 : $y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$;

в) функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ неперервна по сукупності своїх аргументів;

г) функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ має неперервні частинні похідні.

В більш загальному випадку може бути задана система рівнянь із n рівнянь з $n+m$ змінними

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Кажуть, що в $(n+m)$-вимірному паралелепіпеді $(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m, c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n)$ система (15) визначає $y_1, \ldots, y_n$ як однозначні функції від $x_1, \ldots, x_m$, якщо для кожної точки $(x_1, \ldots, x_m)$ в m-вимірному паралелепіпеді $(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m)$ система рівнянь (15) має одну і тільки одну систему розв'язків $(y_1, \ldots, y_n)$, що належить n-вимірному паралелепіпеду $(c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n)$.

В питанні про існування однозначних неявних функцій $y_1, \ldots, y_n$, що визначаються системою рівнянь (15) важливу роль відіграє визначник

Остроградського-Якобі

$$J = \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{16}$$

Теорема 4. *Нехай:*

1) всі функції $F_1, \ldots, F_n$ визначені і неперервні в $(n+m)$-вимірному паралелепіпеді $D = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1, x_2^0 - \Delta_2, x_2^0 + \Delta_2, \ldots, x_m^0 - \Delta_m, x_m^0 + \Delta_m, y_1^0 - \Delta_1', y_1^0 + \Delta_1', y_2^0 - \Delta_2', y_2^0 + \Delta_2', \ldots, y_n^0 - \Delta_n', y_n^0 + \Delta_n']$ з центром в точці $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$;

2) точка $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ задовольняє систему (15);

3) існують і неперервні в D частинні похідні функцій $F_1, \ldots, F_n$ по всіх аргументах;

4) визначник Остроградського-Якобі (16) в цій точці відмінний від нуля.

Тоді:

а) в деякому околі точки $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ система (15) визначає $y_1, \ldots, y_n$ як однозначні функції від $x_1, \ldots, x_m$:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m),\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_m),\ \ldots,\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m);$$

б) при $x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ \ldots,\ x_m = x_m^0$ ці функції приймають відповідно значення $y_1^0, \ldots, y_n^0$:

$$y_1^0 = f_1(x_1^0, \ldots, x_m^0),\ y_2^0 = f_2(x_1^0, \ldots, x_m^0),\ \ldots,\ y_n^0 = f_n(x_1^0, \ldots, x_m^0);$$

в) функції $f_1(x_1, \ldots, x_m),\ f_2(x_1, \ldots, x_m),\ \ldots,\ f_n(x_1, \ldots, x_m)$ неперервні;

г) функції $f_1(x_1, \ldots, x_m),\ f_2(x_1, \ldots, x_m),\ \ldots,\ f_n(x_1, \ldots, x_m)$ мають неперервні частинні похідні.

§ 7.3. Обчислення похідних неявних функцій

Нехай маємо рівняння (12), в якому $F(x, y)$ задовольняє умови теореми 2. Якщо неявну функцію $y = f(x)$ підставити в (12), то одержимо тотожність

$F(x, f(x)) = 0$. Складена функція в лівій частині тотожно рівна нулю, тому і її похідна рівна нулю. Диференціюючи її як складену функцію, маємо

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y'_x = 0. \tag{17}$$

Звідси

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{18}$$

оскільки $F'_y(x, y) \neq 0$.

Якщо функція $F(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, то диференціюючи праву частину (18) і підставляючи замість y'_x вираз (18) для неї, матимемо

$$y''_{x^2} = \frac{(F''_{xy} + F''_{y^2}y'_x)F'_x - (F''_{x^2} + F''_{xy}y'_x)F'_y}{(F'_y)^2} = \frac{2F'_xF'_y - (F'_y)^2F''_{x^2} - (F'_x)^2F''_{y^2}}{(F'_y)^3}.$$

Методом математичної індукції доводимо, що існування неперервних частинних похідних функції $F(x, y)$ до k-го порядку включно $(k > 1)$ забезпечує існування неперервної похідної k-го порядку неявної функції.

На практиці зручніше знаходити похідні вищих порядків неявної функції шляхом повторного диференціювання тотожності (17) з врахуванням того, що y є функцією від x.

Подібну ситуацію маємо і у випадку неявної функції з більшою кількістю невідомих. Вважаючи виконаними умови теореми 4.3, диференціюємо (14), наприклад, по x_1, маючи на увазі, що замість y підставили $f(x_1, \ldots, x_m)$ і рівність (14) стала тотожністю $F'_{x_1} + F'_y y'_{x_1} = 0$. Звідси $y'_{x_1} = -\dfrac{F'_{x_1}}{F'_y}$.

Якщо потрібно знайти всі похідні першого і вищих порядків, то простіше зразу рахувати dy, $d^2y, \ldots$. Диференціюючи (14) і враховуючи інваріантність форми першого диференціала, маємо

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,$$

звідки

$$dy = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}dx_1 - \ldots - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_m}}{\frac{\partial F}{\partial y}}dx_m.$$

З іншого боку
$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_m}dx_m.$$
Оскільки $dx_1, \ \ldots, \ dx_m$ довільні, то матимемо, що
$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \ \ldots, \ \frac{\partial y}{\partial x_m} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_m}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$
Диференціюючи ще раз, одержимо
$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_m}dx_m + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y}dy\right]dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y}d^2y = 0.$$

Підставляючи сюди вираз для dy, та визначаючи d^2y, одержимо вирази для $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$. Подібним чином знаходимо вирази для похідних третього і вищих порядків.

Нехай функція $F(x, y, z)$ в околі точки (x_0, y_0, z_0), яка належить області визначення функції, задовольняє умови теореми існування та диференційовності неявної функції $z = f(x, y)$, що визначається рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Тоді графік цієї неявної функції має в точці (x_0, y_0, z_0) дотичну площину і нормаль, рівняння яких мають відповідно вигляд
$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$
$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення неявної функції однієї змінної.
2. Дайте означення неявної функції кількох змінних.
3. Дайте означення системи неявних функцій кількох змінних.
4. Визначити чи правильні дані твердження:

   1) кожне рівняння (12) задає хоча б одну неявну функцію;

   2) рівняння $y^3 - y = 0$ задає нескінченну множину неявних функцій $y = f(x), \ x \in \mathbb{R}$;

   3) рівняння (12) задає одну неявну функцію;

4) рівняння $x^3 + y^3 - 4axy = 0$ в околі точки $x_0 = a\sqrt[3]{9}$, $y_0 = a\sqrt[3]{3}$ задає єдину неперервну функцію $y = f(x)$;

5) система

$$\begin{cases} 8x^2 - z^3 - 3y^4 = 0, \\ x^3 + 5y - z^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

задає єдину пару функцій $y = y(x)$ та $z = z(x)$, неперервних в достатньо малому околі точки $x_0 = 1$ і таких, що $y(1) = 0$, $z(1) = 2$.

§ 7.4. Приклади розв'язування задач

1. Дослідити чи визначає рівняння $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$ в околі точки $M_0(0; 0)$ єдину неперервну неявну функцію $y = f(x)$.

Розв'язок. Функція $F(x, y)$ неперервна в околі точки $(0; 0)$ разом із частинними похідними $F'_x = 3x^2 + y^2 - 2ax$ та $F'_y = 2xy + 2ay$. Оскільки $F'_y(0; 0) = 0$, то застосовуючи теорему про існування неявної функції не можна.

Розглянемо рівняння

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - ax^2 + ay^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - a) + y^2(x + a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2(a - x)}{a + x} \Leftrightarrow y = \pm x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}},$$

якщо $a > 0$ і $x \in (-a; a)$. Якщо $a = 0$, то рівняння набуває вигляду $x(x^2 + y^2) = 0$, тому не має розв'язку відносно y. Отже, для будь-якого a рівняння $F(x, y) = 0$ або не задає неявної функції $y = f(x)$, або задає більше ніж одну таку функцію. ▶

2. Показати, що дане рівняння в околі деякої точки визначає єдину неявну диференційовну функцію $z = f(x, y)$, та знайти вказані повні диференціали:

$$x + y + z = e^z, \ dz, \ d^2z.$$

Розв'язок. Оскільки дане рівняння можна переписати у вигляді $x + y + z - e^z = 0$, то $F(x, y, z) = x + y + z - e^z$. Ця функція неперервна в $\mathbb{R}^3$

разом з частинними похідними $F'_x = 1, F'_y = 1$ і $F'_z = 1 - e^z$, причому $F'_z \neq 0$, якщо $z \neq 0$. Точки (x_0, y_0, z_0), в яких $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, існують. Наприклад, такою точкою є $(1; e; 1)$. Отже, існують точки, в околі яких виконано всі умови теореми існування та диференційовності неявної функції $z = f(x, y)$.

За цією теоремою

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z} \Rightarrow dz = -\frac{1}{1-e^z}(dx+dy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2z = d(dz) = d\left(-\frac{1}{1-e^z}(dx+dy)\right) = (dx+dy)\frac{d(1-e^z)}{(1-e^z)^2} =$$

$$= (dx+dy)\frac{-e^z dz}{(1-e^z)^2} = \frac{e^z}{(1-e^z)^3}(dx+dy)^2. \ \blacktriangleright$$

3. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ у точці $M_0(1; 1; 1)$.

Розв'язок. Для даної поверхні маємо $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$, тому $F'_x = 2x,\ F'_y = 2y,\ F'_z = 2z$, і рівняння дотичної площини має вигляд:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow x + y + z = 3.$$

Рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}. \ \blacktriangleright$$

§ 7.5. Задачі і вправи для самостійної роботи

1. Дослідити, чи визначає рівняння $F(x, y) = 0$ в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ єдину неперервну неявну функцію $y = f(x)$, якщо:

1) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy,\ \ x_0 = a\sqrt[3]{4},\ \ y_0 = a\sqrt[3]{2}$,
2) $F(x, y) = xe^{2y} - y\ln x - 8,\ \ (x_0, y_0) :\ F(x_0, y_0) = 0$ і $y_0 \neq \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\ln x_0}{2x_0}$,
3) $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ \ (x_0, y_0) :\ F(x_0, y_0) = 0$ і $y_0 \neq x_0$,
4) $F(x, y) = x^2\ln y - y^2\ln x,\ \ (x_0, y_0) :\ F(x_0, y_0) = 0$ і $y_0^2 \neq \dfrac{x_0^2}{\ln x_0^2}$.

2. Показати, що дане рівняння в околі деякої точки визначає єдину неявну диференційовну функцію $z = f(x, y)$, та знайти вказані частинні похідні або повні диференціали:

1) $z^3 + 3x^2 z = 2xy,\ z'_x,\ z'_y,$

2) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1,\ z''_{x^2},$

3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ dz,\ d^2 z,$

4) $\dfrac{x}{z} = \ln \dfrac{z}{y} + 6,\ dz,\ d^2 z,$

5) $z = x - \operatorname{arctg} \dfrac{y}{z - x}, d^2 z.$

РОЗДІЛ VIII. Найбільше і найменше значення функції. Умовний екстремум

§ 8.1. Найбільше і найменше значення функції

При знаходженні найбільшого і найменшого значень функції кількох змінних, яка неперервна на замкнутій множині, слід мати на увазі, що ці значення досягаються або в точках екстремуму, або на межі цієї множини. Тому для того, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в області D необхідно знайти всі внутрішні точки, підозрілі на екстремум, обчислити значення функції в них, якщо це можливо і порівняти із значеннями функції в межових точках області, якщо це також можливо.

В загальному випадку навіть для функції двох змінних задача дослідження на межі області є досить складною. Знаходження екстремальних значень спрощується, якщо досліджується опукла функція.

Підмножину D n-вимірного простору будемо називати ***опуклою***, якщо для будь-яких двох точок A та B що належать D, відрізок, що їх сполучає, також повністю належить D.

Функція $z = f(x, y)$ задана на опуклій множині D називається ***опуклою вниз (опуклою вверх)***, якщо для будь-яких двох точок (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$ виконується нерівність

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\Big) \le \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}$$

$$\left(f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\Big) \ge \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}\right).$$

Для опуклої функції рівність нулю частинних похідних є не тільки необхідною, але і достатньою умовою екстремуму. Більш того, екстремуми опуклої функції є глобальними, тобто найменші значення досягаються, коли функція опукла вниз, найбільші – опукла вверх.

§8.2. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

Для функції багатьох змінних специфічною є задача, коли її екстремум шукається не на всій області визначення, а на множині, що задовольняє певній умові. Для простоти викладу розглянемо випадок функції двох змінних $z = f(x, y)$, аргументи якої задовольняють умову $g(x, y) = C$, яку називають ***рівнянням зв'язку***.

Точка (x_0, y_0) називається ***точкою умовного максимуму (мінімуму)***, якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх точок (x, y) з цього околу, які задовольняють умову $g(x, y) = 0$, виконується нерівність

$$f(x_0, y_0) \ge f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \le f(x, y)).$$

Найбільш простим способом знаходження умовного екстремуму функції двох змінних є зведення до задачі відшукання екстремуму функції однієї змінної. Якщо рівняння зв'язку $g(x, y) = C$ вдалось розв'язати відносно однієї із змінних, наприклад, y виразити через $x : y = \varphi(x)$, то підставляючи одержаний вираз у функцію двох змінних, одержимо $z = f(x, y) = f(x, \varphi(x))$, тобто одержимо функцію однієї змінної. Її екстремум і буде умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$. Більше того, у випадку функції трьох і більше змінних рівнянь зв'язку може бути кілька.

Нехай маємо функцію m змінних $y = f(x_1, \ldots, x_m)$. Треба дослідити на екстремум цю функцію, якщо змінні задовольняють рівняння зв'язку $\varphi_i(x_1, \ldots, x_m) = 0$, $i = \overline{1, n}$, $n < m$. Означення умовного максимуму (мінімуму) для n змінних даємо аналогічно випадку двох змінних. Якщо із системи рівнянь зв'язку $m - n$ змінних можна виразити через решту змінних, то підставивши вирази для цих змінних у функцію, задачу на умовний екстремум можна звести до задачі на звичайний екстремум функції n змінних. У більш складніших випадках ефективним є ***метод множників Лагранжа***. Має місце теорема, яка виражає суть методу.

Теорема 1. *Якщо точка* $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *як точка умовного екстремуму функції* $y = f(x_1, \ldots, x_m)$ *задовольняє рівняння*

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_m) = 0, \;\; j = \overline{1, n}, \;\; n < m,$$

то існують сталі множники λ_j, $j = \overline{1, n}$, *одночасно не рівні нулю такі, що точка* $(x_1^0, \ldots, x_m^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ *є точкою екстремуму функції*

$$L(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j(x_1, \ldots, x_m).$$

Функцію L часто називають ***функцією Лагранжа***. Ця теорема виражає ***необхідну умову умовного екстремуму***. Застосування теореми приводить нас до необхідності розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, & i = \overline{1, m}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Рівняння з $(m + 1)$-го до $(n + m)$-го співпадають з рівняннями зв'язку.

Економічні задачі про оптимальний розподіл ресурсів, вибір оптимального портфелю цінних паперів та ін. є прикладами задач знаходження умовного екстремуму.

Достатні умови умовного екстремуму. Припустимо, що функції f і φ_j двічі неперервно диференційовні. Питання наявності умовного екстремуму залежить від знаку різниці

$$\Delta = f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1^0, \ldots x_m^0)$$

при умові, що точки $(x_1, \ldots, x_m)$, $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ задовольняють рівняння зв'язку в досить малому околі точки $(x_1^0, \ldots x_m^0)$, підозрілої на екстремум. Для таких точок приріст функції f може бути замінений приростом функції L, де всі множники λ_j вважаємо рівними λ_j^0. В такому випадку приріст наближено дорівнює другому диференціалу (бо перші похідні рівні нулю). Різниця між ними – нескінченно мала вищого порядку, ніж dx_i, $i = \overline{1, m}$. Другий диференціал функції Лагранжа – квадратична форма відносно $dx_1, \ldots, dx_m$, причому ці диференціали задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} dx_m = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} dx_m = 0, \end{cases}$$

Якщо другий диференціал функції Лагранжа, як квадратична форма, додатно визначений, то маємо умовний мінімум, від'ємно визначений – умовний максимум, якщо не знаковизначений, то умовного екстремуму не існує.

§ 8.3. Приклади розв'язування задач

1. Знайти найбільше значення функції $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ в трикутнику, обмеженому віссю OX, віссю OY і прямою $x + y = 2\pi$.

Розв'язок. Всередині області маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знаходимо, що всередині області знаходиться єдина точка $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$. На прямих $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 2\pi$ наша функція рівна 0, тому в точці $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ найбільше значення рівне $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ▶

2. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + y^2$, аргументи якої задовольняють рівняння $3x + 2y = 11$.

Розв'язок. Розв'яжемо рівняння зв'язку відносно змінної y. Маємо $y = \frac{11 - 3x}{2}$. Підставляючи у функцію, одержуємо $z = x^2 + 2(\frac{11-3x}{2})^2$ – функція однієї змінної.

Дослідимо дану функцію на екстремум, як функцію від однієї змінної. Знайдемо похідну і прирівняємо її до нуля:

$$z' = 2x + 4\frac{11 - 3x}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 2x - 33 + 9x = 11x - 33 = 0.$$

Отримаємо, що $x = 3$, причому це точка мінімуму. Тоді $y = 1$.

Отже, точкою умовного мінімуму є точка $(3; 1)$. ▶

3. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + y^2$, аргументи якої задовольняють рівняння $3x + 2y = 1$.

Розв'язок. Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3x + 2y - 1).$$

З необхідних умов екстремуму

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x - 2y - 1 = 0,$$

маємо $x = 3$, $y = 1$, $\lambda = -2$.

Точкою умовного екстремуму може бути (3;1). Перевіримо виконання достатніх умов. Знаходимо, що

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

Отже, $d^2L = 2dx^2 + 4dy^2$ є додатно визначеною квадратичною формою, тому в точці $(3; 1)$ маємо умовний мінімум. ▶

§ 8.4. Задачі і вправи для самостійної роботи

1. Дослідити на екстремум задану функцію:

1) $z = y^3 - x^2 - 27y + 3x + 16$,

2) $z = \sqrt{e^x}(x + xy + y^2)$,

3) $z = 2\ln x + 4\ln y + \ln(7 - x - y)$,

4) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$,

5) $z = \sin(x + y)$,

6) $z = 1 - \sqrt{z^2 + y^2}$,

7) $u = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6z$,

8) $u = x^3 - 2y^2 - z^2 - 3x + 8y + 2z - 9$.

2. Знайти умовний екстремум даної функції:

1) $z = xy$, якщо $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,\ a > 0,\ b > 0$,

2) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, якщо $x + y = a,\ a > 0$,

3) $u = \sin x \sin y \sin z$, якщо $x + y + z = \dfrac{\pi}{2},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$,

4) $u = xy + yz$, якщо $x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

Варіанти індивідуальних завдань

1. Знайти і зобразити область визначення вказаних функцій:

1) $z = \dfrac{3xy}{2x - 5y}$, 2) $z = \dfrac{2}{6 - x^2 - y^2}$,

3) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, 4) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$,

5) $z = \arcsin(x - y)$, 6) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$,

7) $z = \dfrac{4xy}{x-3y+1}$, 8) $z = 3x + \dfrac{y}{2-x+y}$,

9) $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$, 10) $z = \ln(x^2+y^2-5)$,

11) $z = \sqrt{2x^2-y^2}$, 12) $z = \arccos(x+y)$,

13) $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$, 14) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$,

15) $z = \ln(y^2-x^2)$, 16) $z = \ln(2x-y)$,

17) $z = \arccos(x+2y)$, 18) $z = \arcsin(2x-y)$,

19) $z = \ln(9-x^2-y^2)$, 20) $z = \sqrt{3-x^2-y^2}$,

21) $z = 4x + \dfrac{y}{2x-5y}$, 22) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$,

23) $z = \dfrac{5}{4-x^2-y^2}$, 24) $z = \dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$,

25) $z = \dfrac{x^3y}{3+x-y}$, 26) $z = \dfrac{7x^3y}{x-4y}$,

27) $z = e^{\sqrt{1-x-y}}$, 28) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$,

29) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2-6}$, 30) $z = \dfrac{4xy}{x^2-y^2}$.

2. Знайти частинні похідні і частинні диференціали по кожній змінній від таких функцій:

1) $z = \ln(y^2-e^{-x})$, 2) $z = \mathrm{tg}(x^3+y^2)$,

3) $z = \mathrm{arctg}(x^2+y^2)$, 4) $z = e^{-x^2+y^2}$,

5) $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$, 6) $z = \cos\sqrt{\dfrac{y}{x}}$,

7) $z = \mathrm{ctg}\sqrt{xy^3}$, 8) $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$,

9) $z = \ln(3x^2-y^4)$, 10) $z = \mathrm{tg}(x^3y^4)$,

11) $z = \sin\sqrt{x-y^3}$, 12) $z = e^{2x^2-y^5}$,

13) $z = \mathrm{arcctg}(xy^2)$, 14) $z = \arcsin(2x^3y)$,

15) $z = \mathrm{ctg}(3x-2y)$, 16) $z = \cos(x-\sqrt{xy^3})$,

17) $z = \ln(\sqrt{xy}-1)$, 18) $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$,

19) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x^2}{y^3}$, 20) $z = \mathrm{tg}\dfrac{2x-y^2}{x}$,

21) $z = \sin\dfrac{x+y}{x-y}$, 22) $z = \mathrm{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$,

23) $z = \operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$, 24) $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$,

25) $z = \ln(3x^2 - y^2)$, 26) $z = \cos(y^2 - e^{-x})$,

27) $z = \arcsin\sqrt{x^3 y}$, 28) $z = \arccos(x - y^2)$,

29) $z = e^{\cos(x^3 - 2xy)}$, 30) $z = e^{-(x^3+y^3)}$.

3. Обчислити значення частинних похідних $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для заданої функції $f(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ з точністю до двох знаків після коми:

1) $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(0;-1;1)$,

2) $f(x,y,z) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2z}\right)$, $M_0(1;2;1)$,

3) $f(x,y,z) = (\sin x)^{yz}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{6};1;2\right)$,

4) $f(x,y,z) = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$, $M_0(2;1;0)$,

5) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $M_0(1;0;1)$,

6) $f(x,y,z) = \ln\cos(x^2y^2 + z)$, $M_0\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$,

7) $f(x,y,z) = 27\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$, $M_0(3;4;2)$,

8) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xy^2 + z)$, $M_0(2;1;0)$,

9) $f(x,y,z) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y} - z\right)$, $M_0(2;5;0)$,

10) $f(x,y,z) = \sqrt{z}\sin\dfrac{y}{x}$, $M_0(2;0;4)$,

11) $f(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$, $M_0(-1;1;0)$,

12) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{xz}{y^2}$, $M_0(2;1;1)$,

13) $f(x,y,z) = \ln\sin\left(x - 2y + \dfrac{z}{4}\right)$, $M_0\left(1;\dfrac{1}{2};\pi\right)$,

14) $f(x,y,z) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}$, $M_0(1;1;2)$,

15) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}} + z$, $M_0(1;2;2)$,

16) $f(x,y,z) = \ln(x + y^2) - \sqrt{x^2 - z^2}$, $M_0(5;2;3)$,

17) $f(x,y,z) = \sqrt{z}x^y$, $M_0(1;2;4)$,

18) $f(x,y,z) = -\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2})$,

19) $f(x,y,z)=\ln(x^3+\sqrt[3]{y}-z),\quad M_0(2;1;8),$

20) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^4+y^2},\quad M_0(2;3;25),$

21) $f(x,y,z)=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z},\quad M_0(3;2;1),$

22) $f(x,y,z)=\ln(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z),\quad M_0(1;1;1),$

23) $f(x,y,z)=-\dfrac{2x}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad M_0(3;0;1),$

24) $f(x,y,z)=ze^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad M_0(0;0;1),$

25) $f(x,y,z)=\dfrac{\sin(x-y)}{z},\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3};\sqrt{3}\right),$

26) $f(x,y,z)=\sqrt{z}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y}),\quad M_0(4;1;4),$

27) $f(x,y,z)=\dfrac{xz}{x-y},\quad M_0(3;1;1),$

28) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z},\quad M_0\left(3;4;\dfrac{\pi}{2}\right),$

29) $f(x,y,z)=ze^{-xy},\quad M_0(0;1;1),$

30) $f(x,y,z)=\arcsin(x\sqrt{xy})-yz^2,\quad M_0(0;4;1).$

4. Знайти повні диференціали вказаних функцій:

1) $z=2x^3y-4xy^5,$

2) $z=x^2y\sin x-3y,$

3) $z=\operatorname{arctg}x+\sqrt{y},$

4) $z=\arcsin(xy)-3xy^2,$

5) $z=5xy^4+2x^2y^7,$

6) $z=\cos(x^2-y^2)+x^3,$

7) $z=\ln(3x^2-2y^2),$

8) $z=5xy^2-3x^3y^4,$

9) $z=\arcsin(x+y),$

10) $z=\operatorname{arctg}(2x-y),$

11) $z=7x^3y-\sqrt{xy},$

12) $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy},$

13) $z=e^{x+y-4},$

14) $z=\cos(3x+y)-x^2,$

15) $z=\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{x-y},$

16) $z=\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x},$

17) $z=xy^4-3x^2y+1,$

18) $z=\ln(x+xy-y^2),$

19) $z=2x^2y^2+x^3-y^3,$

20) $z=\sqrt{3x^2-2y^2+5},$

21) $z=\arcsin\dfrac{x+y}{x},$

22) $z=\arccos\dfrac{x-y}{y},$

23) $z=\sqrt{3x^2-y^2+x},$

24) $z=y^2-3xy-x^4,$

25) $z=\arccos(x+y),$

26) $z=\ln(y^2-x^2+3),$

27) $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$, 28) $z = 7x - x^3y^2 + 5x$,

29) $z = e^{y-x}$, 30) $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

5. Обчислити значення похідної складної функції $u = u(x, y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ з точністю до двох знаків після коми:

1) $u = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0,$

2) $u = \ln(e^x + e^{-y}), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1,$

3) $u = y^x, \quad x = \ln(t-1), \quad y = e^{\frac{1}{2}}, \quad t_0 = 2,$

4) $u = e^{y-2x+2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2},$

5) $u = x^2e^y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \pi,$

6) $u = \ln(e^x + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = 1,$

7) $u = x^y, \quad x = e^t, \quad y = \ln t, \quad t_0 = 1,$

8) $u = e^{y-2x}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0,$

9) $u = x^2e^{-y}, \quad x = \sin t, \quad y = \sin^2 t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2},$

10) $u = \ln(e^{-x} + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1,$

11) $u = e^{y-2x-1}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2},$

12) $u = \arcsin \dfrac{x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi,$

13) $u = \arccos \dfrac{2x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi,$

14) $u = \dfrac{x^2}{y+1}, \quad x = 1 - 2t, \quad y = \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 0,$

15) $u = \dfrac{x}{y}, \quad x = e^t, \quad y = 2 - e^{2t}, \quad t_0 = 0,$

16) $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y}), \quad x = t^2, \quad y = \dfrac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 1,$

17) $u = \sqrt{x + y^2 + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1,$

18) $u = \arcsin \dfrac{x^2}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi,$

19) $u = \dfrac{y^2}{x}, \quad x = 1 - 2t, \quad y = 1 + \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 0,$

20) $u = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4},$

21) $u = \sqrt{x^2 + y + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 0,$

22) $u = \arcsin\dfrac{x}{2y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi,$

23) $u = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}, \quad x = \sin 2t, \quad y = \operatorname{tg}^2 t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{4},$

24) $u = \sqrt{x+y+3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1,$

25) $u = \dfrac{y}{x}, \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{2t}, \quad t_0 = 0,$

26) $u = \arcsin\dfrac{2x}{y}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \pi,$

27) $u = \ln(e^{2x} + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^4, \quad t_0 = 1,$

28) $u = \operatorname{arctg}(x+y), \quad x = t^2 + 2, \quad y = 4 - t^2, \quad t_0 = 1,$

29) $u = \sqrt{x^2+y^2+3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 1,$

30) $u = \operatorname{arctg}(xy), \quad x = t+3, \quad y = e^t, \quad t_0 = 0.$

6. Обчислити значення частинних похідних функції $z(x,y)$, заданої неявно, в деякій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з точністю до двох знаків після коми:

1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4, \quad M_0(2;1;1),$

2) $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2, \quad M_0(-1;0;1),$

3) $3x - 2y + z = xz + 5, \quad M_0(2;1;-1),$

4) $e^z + x + 2y + z = 4, \quad M_0(1;1;0),$

5) $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0, \quad M_0(1;1;-1),$

6) $x^3 + 3xyz + 3y = 7, \quad M_0(1;1;1),$

7) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \dfrac{3}{2}, \quad M_0\Big(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\Big),$

8) $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1, \quad M_0\Big(0; \dfrac{\pi}{2}; 1\Big),$

9) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0, \quad M_0(1;2;1),$

10) $xy = z^2 - 1, \quad M_0(0;1;-1),$

11) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2, \quad M_0(1;1;1),$

12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5, \quad M_0(0;2;1),$

13) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \dfrac{\pi}{2}, \quad M_0\Big(0; \dfrac{\pi}{2}; \pi\Big),$

14) $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4, \quad M_0(2;1;2),$

15) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0, \quad M_0(1;1;1),$

16) $x + y + z + 2 = xyz, \quad M_0(2;-1;-1),$

17) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2, \quad M_0(0; 1; -1),$

18) $e^z - xyz - x + 1 = 0, \quad M_0(2; 1; 0),$

19) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0, \quad M_0(1; -1; 2),$

20) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + 2z^2 + 20 = 0, \quad M_0(0; -2; 2),$

21) $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3, \quad M_0(1; 2; 0),$

22) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0, \quad M_0(1; -1; 1),$

23) $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0, \quad M_0(0; 1; -1),$

24) $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3, \quad M_0(4; 3; 1),$

25) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59, \quad M_0(3; 1; 4),$

26) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = 17, \quad M_0(-2; -1; 2),$

27) $x^3 + 3xyz - z^3 = 27, \quad M_0(3; 1; 3),$

28) $\ln z = x + 2y - z + \ln 3, \quad M_0(1; 1; 3),$

29) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0, \quad M_0(2; 1; 1),$

30) $z^2 = xy - z + x^2 - 4, \quad M_0(2; 1; 1).$

7. Записати рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

1) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, \quad M_0(2; 1; -1),$

2) $S : x^2 - 4y^2 + z^2 = -2xy, \quad M_0(-2; 1; 2),$

3) $S : x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, \quad M_0(1; 2; 1),$

4) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8, \quad M_0(-1; 1; 2),$

5) $S : 2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13, \quad M_0(2; 1; -1),$

6) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2; 1; -1),$

7) $S : x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46, \quad M_0(1; 2; -3),$

8) $S : x^2 + y^2 - xz - yz = 0, \quad M_0(0; 2; 2),$

9) $S : x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2, \quad M_0(1; 1; 1),$

10) $S : x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x = z, \quad M_0(1; 1; 1),$

11) $S : z = x^2 + y^2 - 2xy - y, \quad M_0(-1; -1; -1),$

12) $S : z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y, \quad M_0(1; -1; 1),$

13) $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y, \quad M_0(-1; 1; 1),$

14) $S: x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13, \quad M_0(3; 1; 2),$

15) $S: 4y^2 - z^2 + 4xy - 3z = 9, \quad M_0(1; -2; 1),$

16) $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2, \quad M_0(2; 1; 0),$

17) $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3, \quad M_0(1; 2; 1),$

18) $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14, \quad M_0(3; 1; 4),$

19) $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4, \quad M_0(1; 1; 2),$

20) $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5, \quad M_0(-2; 1; 0),$

21) $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11, \quad M_0(1; 4; -1),$

22) $S: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8, \quad M_0(0; 2; 0),$

23) $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0, \quad M_0(-1; -1; 1),$

24) $S: x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z, \quad M_0(1; 0; 1),$

25) $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0, \quad M_0(1; -1; 1),$

26) $S: x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8, \quad M_0(1; 1; 0),$

27) $S: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10, \quad M_0(-1; 1; 3),$

28) $S: z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15, \quad M_0(-1; 3; 4),$

29) $S: z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, \quad M_0(-7; 1; 8),$

30) $S: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, \quad M_0(1; -1; 2).$

8. Знайти другі частинні похідні вказаних функцій. Переконатися в тому, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

1) $z = \sin(x^2 - y)$, 2) $z = \ln(3xy - 4)$,

3) $z = \arccos(2x + y)$, 4) $z = \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$,

5) $z = \arcsin\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$, 6) $z = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right)$,

7) $z = \operatorname{ctg}(x + y)$, 8) $z = \operatorname{arcctg}(x - 3y)$,

9) $z = \ln\sqrt{3x^2 - 2y^2}$, 10) $z = e^{2x^2 + y^2}$,

11) $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$, 12) $z = \cos(x^2y^2 - 5)$,

13) $z = \cos(xy^2)$, 14) $z = \arccos(4x - y)$,

15) $z = \arcsin(x - 2y)$, 16) $z = \operatorname{tg}\sqrt{xy}$,

17) $z = \arccos x - 5y$, 18) $z = \operatorname{arctg}(5x + 2y)$,

19) $z = \sin\sqrt{x^3 y}$, 20) $z = \cos(3x^2 - y^3)$,

21) $z = \ln(4x^2 - 5y^3)$, 22) $z = e^{\sqrt{x+y}}$,

23) $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$, 24) $z = \arcsin(4x + y)$,

25) $z = \sin\sqrt{xy}$, 26) $z = e^{x^2 - y^2}$,

27) $z = \operatorname{arctg}(3x + 2y)$, 28) $z = \operatorname{tg}(xy^2)$,

29) $z = \operatorname{arctg}(x + y)$, 30) $z = \operatorname{arcctg}(x - 4y)$.

9. Перевірити, чи задовольняє вказане рівняння задана функція $u(x, y)$:

1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = \dfrac{xy}{x+y}$,

2) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{xy}$,

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

4) $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = \sin^2(x - ay)$,

5) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$,

6) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$,

7) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \dfrac{y}{x}$,

8) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3), \quad u = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$,

9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$,

10) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = x^y$,

11) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

12) $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = e^{\cos(x - ay)}$,

13) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = (x - y)(y - z)(z - x)$,

14) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, \quad u = x\ln\dfrac{y}{x}$,

15) $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = \ln(x^2+y^2)$,

16) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0, \quad u = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$,

17) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xyu = 0, \quad u = e^{xy}$,

18) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$,

19) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln(x^2+y^2+2x+1)$,

20) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \quad u = \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$,

21) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1, \quad u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

22) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = (x^2+y^2)\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$,

23) $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{-(x+3y)\sin(x+3y)}$,

24) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xyu = 0, \quad u = xe^{\frac{y}{x}}$,

25) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xyu = 0, \quad u = \ln(x+e^{-y})$,

26) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$,

27) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{u}{y^2}, \quad u = \dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$,

28) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x+y}{x-y}, \quad u = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$,

29) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{u}, \quad u = \sqrt{2xy+y^2}$,

30) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln(x^2-y^2)$.

10. Дослідити на екстремум такі функції:

1) $z = x^3+y^3-3xy$,

2) $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$,

3) $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$,

4) $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$,

5) $z = xy(12-x-y)$,

6) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$,

7) $z = xy - x^2 - y^2 + 9$,

8) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$,

9) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$,

10) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$,

11) $z = xy(6 - x - y)$,
12) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$,
13) $z = (x-1)^2 + 2y^2$,
14) $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$,
15) $z = xy - 3x^2 - 2y^2$,
16) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$,
17) $z = x^2 + 3(y+2)^2$,
18) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$,
19) $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$,
20) $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$,
21) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$,
22) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$,
23) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$,
24) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$,
25) $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$,
26) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$,
27) $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$,
28) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$,
29) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$,
30) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

11. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області $\overline{D}$, обмеженій заданими лініями:

1) $z = 3x + y - xy, \quad \overline{D}:\ y = x,\ y = 4,\ x = 0$,
2) $z = xy - x - 2y, \quad \overline{D}:\ x = 3,\ y = x,\ y = 0$,
3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2$,
4) $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$,
5) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}:\ x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0$,
6) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$,
7) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 6$,
8) $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$,
9) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0$,
10) $z = x^2 + 2xy - 10, \quad \overline{D}:\ y = 0,\ y = x^2 - 4$,
11) $z = xy - 2x - y, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 4$,
12) $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad \overline{D}:\ y = 8,\ y = 2x^2$,
13) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \quad \overline{D}:\ x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$,
14) $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad \overline{D}:\ y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2},\ y = 0$,
15) $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad \overline{D}:\ x = -3,\ y = 0,\ x + y + 1 = 0$,

16) $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad \overline{D}: \ x = 5,\ y = 0,\ x - y - 1 = 0,$

17) $z = 2x^2 + 2xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \ y = 2x,\ y = 2,\ x = 0,$

18) $z = x^2 - 2xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x, \quad \overline{D}: \ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2,$

19) $z = xy - 3x - 2y, \quad \overline{D}: \ x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 4,$

20) $z = x^2 + xy - 2, \quad \overline{D}: \ y = 4x^2 - 4,\ y = 0,$

21) $z = x^2y(4 - x - y), \quad \overline{D}: \ x = 0,\ y = 0,\ y = 6 - x,$

22) $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \overline{D}: \ x = 0,\ x = 2,\ y = -1,\ y = 2,$

23) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \quad \overline{D}: \ x + 2y = 4,\ x - 2y = 4,\ x = 0,$

24) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \ x = 3,\ y = 0,\ y = x + 1,$

25) $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad \overline{D}: \ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2,$

26) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad \overline{D}: \ y = x + 2,\ y = 0,\ x = 2,$

27) $z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad \overline{D}: \ y = 0,\ y = \sqrt{1 - x^2},$

28) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad \overline{D}: \ x = -1,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 1,$

29) $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad \overline{D}: \ x + y + 2 = 0,\ x = 0,\ y = 0,$

30) $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad \overline{D}: \ x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6.$

12. Розв'язати задачі:

1) З усіх трикутників з однією і тією самою основою і одним і тим самим кутом α при вершині знайти той, у якого площа найбільша.
2) Усередині чотирикутника знайти точку, сума квадратів відстаней якої від його вершин є найменшою.
3) Між сторонами даного кута, що дорівнює α, провести відрізок завдовжки ℓ так, щоб трикутник, утворений ним і сторонами кута, мав найбільшу площу (знайти її).
4) З усіх прямокутних паралелепіпедів, повна поверхня яких дорівнює S, знайти той, у якого найбільший об'єм.
5) З усіх прямокутних паралелепіпедів, сума ребер яких дорівнює L, знайти той, у якого об'єм найбільший.

6) Визначити зовнішні розміри закритого ящика, що має форму прямокутного паралелепіпеда, товщина стінок якого дорівнює α, а об'єм V, так, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу.
7) З усіх кругових циліндрів з однією й тією самою поверхнею S знайти той, що має найбільший об'єм.
8) У прямий круговий конус з радіусом основи R і висотою H вписати паралелепіпед найбільшого об'єму.
9) З усіх кругових конусів із заданою бічною поверхнею S знайти той, що має найбільший об'єм.
10) Півколо поділити на три дуги так, щоб сума синусів їх градусних мір була найбільшою.
11) У коло радіуса R вписати трикутник так, щоб сума квадратів його сторін була найбільшою.
12) У коло радіуса R вписати чотирикутник, один з кутів якого дорівнює α, так, щоб його площа була найбільшою (знайти її).
13) З усіх трикутників з однією і тією самою площею, що дорівнює S, знайти той, у якого найменший периметр.
14) З усіх еліпсів, сума осей яких дорівнює $2l$, знайти той, у якого площа найбільша.
15) З усіх вписаних у коло радіуса R трикутників знайти той, що має найбільшу площу.
16) З усіх вписаних у коло радіуса R чотирикутників знайти той, що має найбільшу площу.
17) З усіх трикутників з одним і тим самим периметром $2p$ знайти той, що має найбільшу площу.
18) Об'єм прямого кругового конуса дорівнює V. За яких розмірів конуса його бічна поверхня буде найменшою?
19) У сферу радіуса R вписати циліндр, що має найбільшу повну поверхню.

20) Знайти тіло найбільшого об'єму, утвореного обертанням навколо однієї зі своїх сторін трикутника, периметр якого дорівнює $2p$.
21) Знайти відстань від точки $(p;4p)$ до параболи $y^2 = 2px$.
22) Знайти відстань між точкою $(5;1)$ і кривою $y = 3 - x - x^2$.
23) Навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами $2a, 2b, 2c$ описати еліпсоїд найменшого об'єму.
24) З усіх прямокутних паралелепіпедів, об'єм яких дорівнює V, знайти той, площа поверхні якого найменша.
25) Знайти відстань між точкою $(-2;3)$ і кривою $y = \ln x$.
26) З усіх прямокутних трикутників, площа яких дорівнює S, знайти той, що має найменший периметр.
27) У півсферу радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед так, щоб його об'єм був найбільшим.
28) Знайти відстань між точкою $(1;0)$ і кривою $9x^2 + 16y^2 = 144$.
29) На кривій $y = \dfrac{4}{x}$ знайти координати двох точок, рівновіддалених від точки $B(5;5)$.
30) Знайти відстань між точкою $(4;1)$ і кривою $y = x^3 + 1$.

13. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці M за напрямом нормалі до поверхні S, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі Oz :

1) $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz, \quad S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, \quad M(1;1;1),$
2) $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}, \quad S: 4z + 2x^2 - y^2 = 0, \quad M(2;4;4),$
3) $u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz, \quad S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, \quad M(1;1;1),$
4) $u = \dfrac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}, \quad S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4, \quad M\Big(-2; \dfrac{1}{2}; 1\Big),$
5) $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}, \quad S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0, \quad M(2;2;4),$
6) $u = x\sqrt{y} - yz^2, \quad S: x^2 + y^2 = 4z, \quad M(2;1;-1),$
7) $u = 7\ln\left(\dfrac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz, \quad S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, \quad M(1;1;1),$
8) $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - 8xyz, \quad S: x^2 + y^2 - 2z^2 = 10, \quad M(2;2;-1),$

9) $u = \ln(1+x^2) - xy\sqrt{z}, \quad S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16, \quad M(1;-2;4),$

10) $u = \sqrt{x^2+y^2} - z, \quad S: x^2 + y^2 = 24z, \quad M(3;4;1),$

11) $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}, \quad S: x^2 - y^2 + z^2 = 4, \quad M(1;1;-2),$

12) $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4-z^2}, \quad S: z = x^2 - y^2, \quad M(1;1;0),$

13) $u = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad M(0;-3;4),$

14) $u = \ln(1+x^2+y^2) - \sqrt{x^2+z^2}, \; S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4, \; M(3;0;-4).$

Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці M за напрямом вектора ℓ :

15) $u = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \ell = i - j + k, \quad M(1;1;1),$

16) $u = x + \ln(z^2+y^2), \quad \ell = -2i + j - k, \quad M(2;1;1),$

17) $u = x^2y - \sqrt{xy+z^2}, \quad \ell = 2j - 2k, \quad M(1;5;-2),$

18) $u = y\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} z, \quad \ell = 2i - 3j - 2k, \quad M(0;1;1),$

19) $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z), \quad \ell = 8i + 4j + 8k, \quad M(-2;1;-1),$

20) $u = \ln(3-x^2) + xy^2z, \quad \ell = -i + 2j - 2k, \quad M(1;3;2),$

21) $u = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}, \quad \ell = 4i + 3j, \quad M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right),$

22) $u = x^2y^2z - \ln(z-1), \quad \ell = 5i - 6j + 2\sqrt{5}k, \quad M(1;1;2),$

23) $u = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}, \quad \ell = j - k, \quad M(1;-3;4),$

24) $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x+\sqrt{y}}, \quad \ell = 2i + k, \quad M(4;1;-2),$

25) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}, \quad \ell = -2i + 2j - k, \quad M(1;1;0),$

26) $u = 2\sqrt{x+y} + y\operatorname{arctg} z, \quad \ell = 4i - 3k, \quad M(3;2;-1),$

27) $u = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x-y), \quad \ell = i + 2j - 2k, \quad M(1;2;-1),$

28) $u = \ln(x^2+y^2) + xyz, \quad \ell = i - j + 5k, \quad M(1;-1;2),$

29) $u = xy - \dfrac{x}{z}, \quad \ell = 5i + j - k, \quad M(-4;3;-1),$

30) $u = \ln(x + \sqrt{z^2+y^2}), \quad \ell = -2i - j + k, \quad M(1;-3;4).$

Розв'язування типового варіанта

1. Знайти область визначення функції $z = \ln(x^2 - 3y + 6)$.

Розв'язок. Логарифмічна функція визначена тільки для додатних значень аргументу, тому $x^2 - 3y + 6 > 0$, або $y < \dfrac{1}{3}x^2 + 2$, а це означає, що межею області визначення буде парабола.

Неперервна крива $y = \dfrac{1}{3}x^2 + 2$ ділить площину на дві частини (D_1) і (D_2). Якщо координати будь-якої точки, наприклад з (D_1) задовольняють нерівність $y < \dfrac{1}{3}x^2 + 2$, то і всі точки $(x, y) \in (D_1)$ задовольняють цю нерівність. Отже, областю визначення заданої функції є множина всіх точок, які знаходяться під параболою (див. рис. 1). ▶

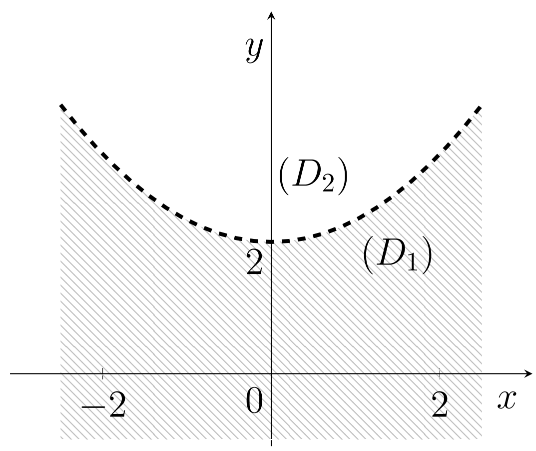

Рис. 1

2. Знайти частинні похідні і частинні диференціали по кожній змінній від функції $z = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$.

Розв'язок. Функція визначена на всій площині. При знаходженні похідної по змінній x інша змінна вважається фіксованою (сталою), а тому застосувавши формулу диференціювання складеної функції однієї змінної, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-\frac{2}{3}}2x\right) = -\frac{2xe^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}.$$

При цьому враховуємо $\dfrac{\partial}{\partial x}(-\sqrt[3]{x^3+5y^2})$ існує у всіх точках площини, крім $O(0;0)$.

Аналогічно знаходимо частинну похідну по змінній y (в цьому випадку змінна x вважається сталою):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-\frac{2}{3}}10y\right) = -\frac{10ye^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}.$$

Тепер знаходимо частинні диференціали

$$d_xz = \frac{\partial z}{\partial x}dx = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-\frac{2}{3}}2x\right)dx = -\frac{2xe^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dx.$$

$$d_yz = \frac{\partial z}{\partial y}dy = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-\frac{2}{3}}10y\right)dy = -\frac{10ye^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dy,$$

крім точки $O(0;0)$. ▶

3. Обчислити значення частинних похідних $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для функції $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\cos z$ в точці $M_0\left(1;1;\dfrac{\pi}{3}\right)$ з точністю до двох знаків після коми.

Розв'язок. Функція визначена для всіх точок (x,y,z), в яких координати x та y мають однакові знаки, або хоч одна з них рівна нулю. Розглянемо множину точок з області визначення для яких $x > 0, y > 0, z \in \mathbb{R}$. Цій множині належить $M_0\left(1;1;\dfrac{\pi}{3}\right)$ разом з деяким околом. Знаходимо частинні похідні заданої функції по кожній змінній, а потім обчислюємо їх значення в точці $M_0\left(1;1;\dfrac{\pi}{3}\right)$:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cos z, \qquad f'_x\left(1;1;\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} = 0,25,$$

$$f'_y(x,y,z)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\cos z, \qquad f'_y\Big(1;1;\frac{\pi}{3}\Big)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}=0,25,$$

$$f'_z(x,y,z)=-\sqrt{xy}\sin z, \qquad f'_z\Big(1;1;\frac{\pi}{3}\Big)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx -0,86. \blacktriangleright$$

4. Знайти повний диференціал функції $z=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Розв'язок. Функція визначена у всіх точках (x,y) площини, координати яких мають однакові знаки або абсциса яких рівна нулю. Повний диференціал функції знаходимо за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{19}$$

Частинні похідні шукатимемо як як похідні складеної функції. Похідна $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ як по x так і по y не існує в точках, абсциса яких рівна нулю, тому обмежимось точками, координати яких мають однакові знаки.

Знайдемо спочатку частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}}=\frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{2(x+y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\Big(-\frac{x}{y^2}\Big)=-\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{x}{y^2}=-\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{2(x+y)},$$

що після підстановки у формулу (19) дає

$$dz=\frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{2(x+y)}dx-\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{2(x+y)}dy. \blacktriangleright$$

5. Обчислити значення похідної складеної функції $u=\arccos\dfrac{x^2}{y}$, де $x=1+\ln t$, $y=-2e^{-t^2+1}$, при $t_0=1$, з точністю до двох знаків після коми.

Розв'язок. Складена функція буде функцією однієї змінної: $u=\arccos\dfrac{(1+\ln t)^2}{-2e^{-t^2+1}}$. Значенню параметра $t_0=1$ відповідає $x_0=1$, $y_0=-2$. В околі точки $(1;-2)$ функція $u=\arccos\dfrac{x^2}{y}$ має неперервні частинні похідні, а функції $x=1+\ln t$ та $y=-2e^{-t^2+1}$ диференційовні в точці $t_0=1$. У цьому випадку похідну знаходимо за формулою

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Тут

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{2x}{y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \qquad \frac{dy}{dt} = -2e^{-t^2+1}(-2t) = 4te^{-t^2+1}.$$

Тоді

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{2x}{y} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot 4te^{-t^2+1},$$

а

$$\frac{du}{dt}(1) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1^4}{(-2)^2}}} \cdot (-1) - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1^4}{(-2)^2}}} \cdot \left(-\frac{1^2}{(-2)^2}\right) \cdot 4 \cdot e^{-1^2+1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,31. \ \blacktriangleright$$

6. Обчислити значення частинних похідних функції $z(x,y)$, заданої неявно рівнянням $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz = 3 - z^2$ в точці $M_0(0;1;-1)$ з точністю до двох знаків після коми.

Розв'язок. У цьому випадку $F(x,y,z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3$ задовольняє умови теореми про існування частинних похідних неявно заданої функції $z(x,y)$.

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z, \quad F'_y = -9y^2 + 2xz, \quad F'_z = 2xy - 4x + 2z,$$

причому $F'_z(0;1;-1) = -2 \neq 0$, отже відмінна від нуля і в деякому околі.

Частинні похідні по x і y від неявно заданої функції $z(x,y)$ знаходимо за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Тепер обчислюємо значення цих похідних в точці M_0 :

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -\frac{12 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1)}{2 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -\frac{-9 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0 \cdot (-1)}{2 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)} = -4,5. \ \blacktriangleright$$

7. а) Записати рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні $S: z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ в точці $M_0(-1;0;1)$;

б) Записати рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 + z^2 + xz - yz = 5$ в точці $M_0(1; -1; 1)$.

Розв'язок. а) Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до цієї поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{20}$$

а канонічне рівняння нормалі –

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{21}$$

У нашому випадку поверхня задана явно, а тому використаємо формули (20) і (21). Для цього знаходимо частинні похідні від функції z по x і y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = 2x + 3y - 4, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = -2y + 3x + 2.$$

Підставляючи в отримані вирази координати точки $M_0(-1; 0; 1)$, обчислюємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = f'_x(-1; 0) = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 4 = -6,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = f'_y(-1; 0) = -2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 2 = -1.$$

Отже, $z - 1 = -6 \cdot (x + 1) - 1 \cdot (y - 0)$, або

$$6x + y + z + 5 = 0$$

– рівняння дотичної площини, а

$$\frac{x + 1}{-6} = \frac{y - 0}{-1} = \frac{z - 1}{-1}$$

або

$$\frac{x + 1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{1}$$

– рівняння нормалі.

б) У випадку коли рівняння гладкої поверхні задано в неявному вигляді: $F(x, y, z) = 0$, і $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{22}$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (23)$$

Тут поверхня задана неявно

$$F(x,y,z)=0,$$

де $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xz-yz-5$.

Отже застосовуємо формули (22) і (23). Знаходимо частинні похідні

$$F'_x=2x+z, \qquad F'_y=2y-z, \qquad F'_z=2z+x-y$$

і обчислюємо їх значення в точці $M_0(1,-1,1)$:

$$F'_x(M_0)=2+1=3, \qquad F'_y(M_0)=-2-1=-3, \qquad F'_z(M_0)=2+1+1=4.$$

Підставляючи отримані значення у формулу (22), маємо

$$3(x-1)-3(y+1)+4(z-1)=0.$$

Після спрощень отримаємо рівняння дотичної площини

$$3x-3y+4z-10=0.$$

Підставляючи значення похідних в точці $M_0(1;-1;1)$ у формулу (23), отримаємо рівняння нормалі

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{4}. \blacktriangleright$$

8. Знайти другі частинні похідні функції $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Переконатися в тому, що $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Розв'язок. Функція визначена у всіх точках площини, що задовольняють системи нерівностей

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ x-y\leq 0, \\ y>0, \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} x\leq 0, \\ x-y\geq 0, \\ y<0. \end{cases}$$

Спочатку знаходимо перші частинні похідні від функції z по кожній змінній:

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{2y}\frac{|y|}{\sqrt{(y-x)x}}$$

при додатковій умові $x \neq 0$ та $y - x \neq 0$. Після спрощень маємо, що $z'_x = -\dfrac{1}{2x}\sqrt{\dfrac{x}{y-x}}$ при

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - y > 0, \\ y > 0, \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ x - y < 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

При цих же умовах

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{2y}\sqrt{\frac{x}{y-x}}.$$

Знаходимо тепер другі частинні похідні

$$z''_{x^2} = \frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{y-x}} - \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y-x}}}\frac{y-x+x}{(y-x)^2} = \frac{y-2x}{4x\sqrt{x(y-x)^3}},$$

$$z''_{y^2} = \frac{1}{2y^2}\sqrt{\frac{x}{y-x}} + \frac{1}{2y}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y-x}}}\left(-\frac{x}{(y-x)^2}\right) = \frac{2x^2-3xy}{4y^2\sqrt{x(y-x)^3}},$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{2x}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y-x}}}\frac{-x}{(y-x)^2} = \frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^3}},$$

$$z''_{yx} = \frac{1}{2y}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y-x}}}\frac{y-x+x}{(y-x)^2} = \frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^3}}.$$

Очевидно, що змішані частинні похідні z''_{xy} і z''_{yx} однакові. ▶

9. Перевірити чи задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

функція $u = \ln(x^2+y^2)$.

Розв'язок. Функція визначена, неперервна і має неперервні частинні похідні у всіх точках площини, крім точки $O(0;0)$. Знаходимо частинні похідні першого і другого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Підставляючи отримані значення частинних похідних в ліву частину вихідного рівняння, отримаємо

$$\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

а права частина рівняння дає

$$\frac{4y^2}{x^2+y^2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Порівнюючи отримані результати, робимо висновок, що задана функція u не задовольняє вихідне рівняння. ▶

10. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$z = xy(x+y-2).$$

Розв'язок. Функція визначена, неперервна і має частинні похідні у всіх точках площини. Знаходимо перші частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 - 2y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy - 2x.$$

Прирівнюючи їх до нуля, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(2x+y-2)=0, \\ x(x+2y-2)=0, \end{cases}$$

з якої знаходимо координати стаціонарних точок заданої функції: $M_1(0;0)$, $M_2(2;0)$, $M_3(0;2)$, $M_4\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Щоб вияснити, які з цих точок є точками екстремуму, необхідно використати достатні умови екстремуму.

Отже, для подальшого дослідження заданої функції на екстремум знаходимо другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 2y - 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x.$$

Підставляючи в отримані вирази для других частинних похідних координати знайдених стаціонарних точок і використовуючи достатні умови екстремуму, отримаємо

<u>для точки M_1 :</u>

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 2 \cdot 0 = 0, \qquad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 = -2,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = 2 \cdot 0 = 0, \qquad \triangle = 0 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0,$$

тому екстремуму немає;

<u>для точки M_2 :</u>

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2) = 2 \cdot 0 = 0, \qquad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_2) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2 = 2,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_2) = 2 \cdot 2 = 4, \qquad \triangle = 0 \cdot 4 - 2^2 = -4 < 0,$$

тому екстремуму немає;

<u>для точки M_3 :</u>

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_3) = 2 \cdot 2 = 4, \qquad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_3) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2 = 2,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_3) = 2 \cdot 0 = 0, \qquad \triangle = 4 \cdot 0 - 2^2 = -4 < 0,$$

тому екстремуму немає;

<u>для точки M_4 :</u>

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_4) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0, \qquad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_4) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3},$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_4) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \qquad \triangle = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{9} > 0,$$

тому маємо точку локального мінімуму функції, в якій

$$z_{\min} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2\right) = -\frac{8}{27}. \blacktriangleright$$

11. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ в області $\overline{D}$, яка обмежена лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

Розв'язок. Знаходимо стаціонарні точки із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y + 3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

Такою точкою є $M(-10; -3)$. Ця точка знаходиться поза областю $\overline{D}$ (див. рис. 2).

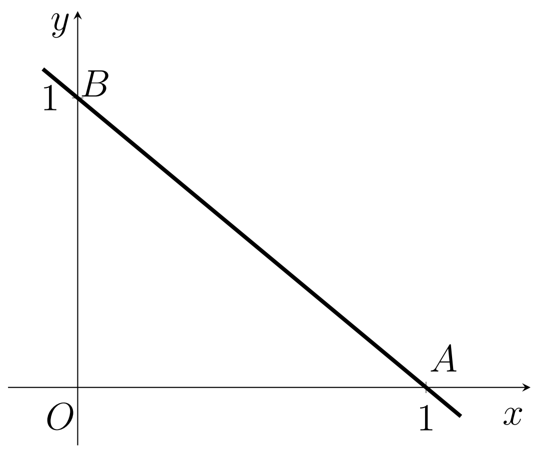

Рис. 2

Дослідимо значення функції на межі області $\overline{D}$. На стороні OA ($y = 0$, $0 \le x \le 1$) трикутника OAB функція z має вигляд $z = 3x$ (лінія перетину поверхні з площиною xOz). Отже на відрізку OA ми маємо справу з функцією однієї змінної. Для функції $z = 3x, z' = 3 \neq 0$, а це означає, що стаціонарних точок на відрізку OA немає. Обчислюємо значення функції на кінцях відрізка: в точці O, $z(0) = 0$, а в точці A, $z(1) = 3$. Отже, на відрізку OA найменше значення функції дорівнює 0, а найбільше – 3.

Аналогічно на стороні OB $(x = 0,\ 0 \le y \le 1)$ трикутника OAB маємо функцію однієї змінної $z = -y^2 + 4y$. Знаходимо стаціонарну точку з умови $z' = 0$, а оскільки $z' = -2y + 4$, то з рівняння $-2y + 4 = 0$ маємо, що $y = 2$, $2 \notin [0; 1]$. Значення функції в точці O $z(0) = 0$, а в точці B $z(1) = 3$. Отже, на відрізку OB найменше значення функції дорівнює 0, а найбільше – 3.

Залишилося знайти найбільше і найменше значення функції на стороні AB, рівняння якої $x + y = 1$. Звідки знаходимо, що $y = 1 - x$, $x \in [0; 1]$. Підставляючи у функцію, маємо

$$z = x(1-x) - (1-x)^2 + 3x + 4(1-x) = -2x^2 + 2x + 3.$$

Тоді $z' = -4x + 2$ і з рівняння $z' = 0$ випливає, що $x = \dfrac{1}{2}$.

Оскільки похідна зліва від цієї точки є додатною, а справа – від'ємною, то точка M_2 є точкою локального максимуму на відрізку AB і $z\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3,5$. Порівнюючи значення функції на кінцях цього відрізка $z(0) = 3$ та $z(1) = 3$ і значення локального екстремуму, отримаємо, що на відрізку AB найменше значення функції дорівнює 3, а найбільше – $3,5$.

Тепер, вибираючи серед найменших значень, знайдених на кожному відрізку, найменше, серед найбільших – найбільше, остаточно отримаємо, що

$$z_{\min} = 0, \qquad z_{\max} = 3,5. \quad \blacktriangleright$$

12. З усіх трикутників з одним і тим самим периметром $2p$ знайти той, у якого площа найбільша.

Розв'язок. Скористаємось формулою Герона для площі трикутника $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр. Оскільки площа – додатна величина, то для зручності врахуємо те, що якщо вона приймає найбільше значення, то її квадрат також буде приймати найбільше значення. Отже досліджуватимемо функцію $u = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

I спосіб. З рівності $a+b+c=2p$ одну з сторін виразимо через інші, наприклад, $a=2p-b-c$ і підставляємо в нашу функцію

$$u=p(-p+b+c)(p-b)(p-c).$$

Маємо функцію двох змінних, яку дослідимо на екстремум.

$$\begin{cases} u'_c=p(p-b)(p-c+p-b-c)=0, \\ u'_b=p(p-c)(p-b+p-b-c)=0. \end{cases}$$

Жодна з сторін трикутника не може бути рівною півпериметру, тому маємо

$$\begin{cases} 2p-2c-b=0, \\ 2p-2b-c=0. \end{cases}$$

Звідси $c=\dfrac{2p}{3}$, $b=\dfrac{2p}{3}$.

Знаходимо другі похідні

$$u''_{c^2}=p(p-b)(-2),\quad u''_{b^2}=p(p-c)(-2),\quad u''_{bc}=p(2p-2b-c)(-1)+p(p-c)(-1).$$

$$u''_{c^2}\Big(\frac{2p}{3};\frac{2p}{3}\Big)=-\frac{2p^2}{3}<0,\quad u''_{b^2}\Big(\frac{2p}{3};\frac{2p}{3}\Big)=-\frac{2p^2}{3}<0,$$

$$u''_{bc}\Big(\frac{2p}{3};\frac{2p}{3}\Big)=-p\Big(2p-\frac{4p}{3}-\frac{2p}{3}+\frac{p}{3}\Big)=-\frac{p^2}{3}.$$

Оскільки $\Delta=\dfrac{4}{9}p^4-\dfrac{p^4}{9}=\dfrac{p^4}{3}>$, $a_{11}=-\dfrac{2}{3}p^2<0$, то маємо максимум.

Область опукла, функція опукла, тому в цій точці маємо найбільше значення $S_{\max}=\dfrac{p^2\sqrt{3}}{9}$.

Отже, найбільшу площу при заданому периметрі має рівносторонній трикутник.

II спосіб. Маємо рівняння зв'язку $a+b+c=2p$ і функцію $u=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Утворимо функцію Лагранжа.

$$L=p(p-b)(p-c)(p-a)+\lambda(a+b+c-2p).$$

Необхідна умова:

$$\begin{cases} L'_a = p(p-b)(p-c)(-1) + \lambda = 0, \\ L'_b = p(p-c)(p-a)(-1) + \lambda = 0, \\ L'_c = p(p-b)(p-a)(-1) + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = a + b + c - 2p = 0. \end{cases}$$

З перших трьох рівнянь маємо, що $p-b = p-c = p-a$, тобто $a = b = c$. Підставляючи в останнє рівняння, знаходимо, що $a = b = c = \dfrac{2p}{3}$. Знаходимо $\lambda = p(p-b)(p-c) = \dfrac{p^3}{9}$.

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$L''_{a^2} = L''_{b^2} = L''_{c^2} = 0, \quad L''_{ab} = p(p-c), \quad L''_{ac} = p(p-b), \quad L''_{bc} = p(p-a),$$

$$d^2L = 2p(p-c)dadb + 2p(p-b)dadc + 2p(p-a)dbdc.$$

Диференціали da, db, dc довільні і задовольняють рівняння виду $da+db+dc = 0$. З останнього рівняння отримаємо, наприклад, $dc = -da-db$. Підставимо в другий диференціал функції Лагранжа

$$d^2L = 2p(p-c)dadb + 2p(p-b)da(-da-db) + 2p(p-a)db(-da-db),$$

$$d^2L\left(\frac{2p}{3}; \frac{2p}{3}; \frac{2p}{3}\right) = \frac{2p^2}{3}dadb + \frac{2p^2}{3}(-da^2 - dadb) + \frac{2p^2}{3}(-dadb - db^2) =$$

$$= \frac{2p^2}{3}(dadb - da^2 - dadb - db^2 - dadb) = -\frac{2p^2}{3}(da^2 + dadb + db^2) < 0$$

– маємо максимум.

Область опукла, функція опукла, тому в цій точці маємо найбільше значення $S_{\max} = \dfrac{p^2\sqrt{3}}{9}$.

Отже, найбільшу площу при заданому периметрі має рівносторонній трикутник. ▶

13. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці M за напрямом нормалі до поверхні S, що утворює кут з додатнім напрямом осі Oz, якщо:

$$u = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad S: \ x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4, \quad M(5;1;5).$$

Розв'язок. Функція $u = f(x,y,z)$ задає в області $U = D(u) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ деяке скалярне поле. Поверхня S задана неявно функцією $F(x,y,z) = x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 - 4z - 4$. Координати вектора нормалі до поверхні S згідно формули (23) рівні відповідно $F'_x(M)$, $F'_y(M)$ та $F'_z(M)$. Тоді

$$F'_x(M) = (2x-6)\Big|_M = 4, \qquad F'_y(M) = 18y\Big|_M = 18, \qquad F'_z(M) = (2z-4)\Big|_M = 6.$$

Знайдемо довжину вектора нормалі:

$$|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 18^2 + 6^2} = \sqrt{376}.$$

Похідна функції $f(x,y,z)$ за напрямом ℓ в точці (x_0, y_0, z_0) обчислюється за формулою

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Знайдемо частинні похідні функції u та їх значення в точці M :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x\Big|_M = \frac{3}{2}(5^2+1^2+5^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 5 = 15\sqrt{51},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y\Big|_M = \frac{3}{2}(5^2+1^2+5^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 1 = 3\sqrt{51},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z\Big|_M = \frac{3}{2}(5^2+1^2+5^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 5 = 15\sqrt{51}.$$

Отже,

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \ell} = 15\sqrt{51} \cdot \frac{4}{\sqrt{376}} + 3\sqrt{51} \cdot \frac{18}{\sqrt{376}} + 15\sqrt{51} \cdot \frac{6}{\sqrt{376}} = 204\sqrt{\frac{51}{376}}. \ \blacktriangleright$$

Рекомендована література

1. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 416 с.

2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.

3. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – Ч.1. – 320 с.

4. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навчальний посібник / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч.2. – 470 с.

5. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз: Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.

6. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – К.: Вища школа, 1992. – Ч.1. – 495 с.

7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1983. – Т.1. – 461 с.

8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. – 616 с.

9. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: Підручник / М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – Ч.2. – 510 с.