РЯДИ ФУР'Є

§1. Ортогональні системи функцій

Означення 1. *Дві функції* $\varphi(x)$ *та* $\psi(x)$, *визначені на відрізку* $[a,b]$, *називаються ортогональними на цьому відрізку, якщо*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Розглянемо систему функцій $\{\varphi_n(x)\}$, визначених на відрізку $[a,b]$ та інтегровних на ньому разом із своїм квадратом.

Означення 2. *Система функцій* $\{\varphi_n(x)\}$ *називається ортогональною, якщо будь-які дві функції з цієї системи є попарно ортогональними, тобто*

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad (n,m = 0,1,2,\ldots,\ n \neq m).$$

Враховуючи це означення, будемо вважати, що для довільної функції $\varphi_n(x)$ з ортогональної системи виконується умова

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \lambda_n > 0.$$

Якщо $\lambda_n = 1$, $(n = 0,1,2\ldots)$, то система функцій $\{\varphi_n\}$ називається нормальною. Якщо ця умова не виконується, то можна перейти до системи $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, яка вже буде нормальною.

Прикладом ортогональної системи є система тригонометричних функцій $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ на відрізку $[-\pi,\pi]$, бо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

для $n \neq m$. Однак, оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi,$$

то ця система не буде нормальною.

Враховуючи вище наведене зауваження, можемо перетворити попередню тригонометричну систему до виду

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\},$$

яка вже є нормальною.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана довільна ортогональна система функцій $\{\varphi_n(x)\}$. Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a, b]$, розкладається в ряд за функціями φ_n виду

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{1}$$

Для визначення коефіцієнтів цього розкладу помножимо обидві частини розкладу на $\varphi_m(x)$ і проінтегруємо обидві частини рівності в межах від a до b :

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Звідси, враховуючи ортогональність системи $\{\varphi_n\}$, отримуємо

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int\limits_a^b f(x)\varphi_m(x)dx, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Означення 3. *Ряд (1) з коефіцієнтами (2) називається узагальненим рядом Фур'є заданої функції, а самі коефіцієнти її узагальненими коефіцієнтами Фур'є відносно системи* $\{\varphi_n(x)\}$.

Узагальнений ряд Фур'є, побудований для заданої функції $f(x)$, пов'язаний з нею лише формально. В загальному випадку зв'язок між функцією $f(x)$ та її узагальненим рядом позначають

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

Збіжність ряду до функції $f(x)$ потребує додаткового дослідження.

§2. Розклад функції в ряд Фур'є

Нехай функція $f(x)$ є періодичною з періодом 2π і абсолютно інтегровною на проміжку $[-\pi,\pi]$. Обчислимо коефіцієнти Фур'є виду:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\, du, (m=0,1,2,\ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\, du, (m=1,2,\ldots)$$

і за ними складемо ряд Фур'є для функції $f(x)$:

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx). \tag{3}$$

Для того, щоб дослідити поведінку ряду (3) у визначеній точці $x=x_0$, розглянемо частинну суму ряду (3) в цій точці:

$$s_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0+b_m\sin mx_0).$$

Підставимо замість a_m та b_m їх інтегральні вирази:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)du+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos mu\cos mx_0+\sin mu\sin mx_0)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x_0)\right]du.$$

Оскільки $\frac{1}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}\cos m(u-x_0)=\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}$, то

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}du.$$

Останній інтеграл називається інтегралом Діріхле. Зробивши заміну в ньому $t=u-x_0$, отримаємо

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Розбиваючи цей інтеграл на два $\int\limits_0^\pi$ і $\int\limits_{-\pi}^0$, зведемо другий інтеграл до проміжка $[0,\pi]$. В результаті отримаємо вираз для $s_n(x_0)$ виду

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Візьмемо $f(x)\equiv 1$, тоді $s_n(x_0)\equiv 1$. Звідси

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{4}$$

Якщо обидві частини рівності (4) помножити на число S_0, яке є сумою ряду Фур'є, то отримаємо

$$S_0 = \frac{2}{\pi}S_0\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Звідси

$$s_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt, \tag{5}$$

де $\varphi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0$.

Якщо інтеграл (5) прямує до нуля при $n\to\infty$, то S_0 є сумою ряду Фур'є.

Ознака Діні. *Ряд Фур'є функції $f(x)$ в точці x_0 збігається до суми S_0, якщо існує число $h>0$ таке, що $\int\limits_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$ існує.*

Ознака Ліпшиця. *Ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається в точці x_0, в якій вона неперервна, до суми $f(x_0)$, якщо для достатньо малих t виконується нерівність*

$$|f(x_0\pm t) - f(x_0)| \le Lt^\alpha,$$

де L і α – додатні сталі, $\alpha\le 1$.

Ознака Діріхле *Якщо функція $f(x)$ періоду 2π є кусково монотонною на відрізку $[-\pi,\pi]$ і має в ньому не більш, ніж скінченну кількість точок розриву, то її ряд Фур'є збігається до суми $f(x_0)$ в кожній точці неперервності і до суми $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в кожній точці розриву.*

§3. Випадок неперіодичної функції

Якщо функція $f(x)$ є неперіодичною, то замість неї розглядаємо допоміжну функцію $f^*(x)$, яка рівна функції $f(x)$ на проміжку $[-\pi, \pi]$, а на іншу частину дійсної осі розповсюджуємо $f^*(x)$ за законом періодичності. Однак при цьому вважаємо, що $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$, тобто $f^*(x) = f(x)$ для всіх $x \in (-\pi, \pi]$.

Таким чином, до побудованої функції $f^*(x)$ з періодом 2π можна застосувати розклад в ряд Фур'є. Якщо говорити про проміжок $(-\pi, \pi)$, то коефіцієнти розкладу шукаються за заданою функцією $f(x)$.

Отже, в загальному випадку тригонометричний ряд Фур'є збігається в проміжку $(-\pi, \pi)$ до функції $f(x)$. При цьому оскільки його елементи мають період 2π, то він збігається на всій дійсній осі. Його сума $S(x)$ є періодичною з періодом 2π, але не співпадає з функцією $f(x)$ поза межами проміжка $(-\pi, \pi)$.

§4. Ряд Фур'є у випадку довільного проміжка

Нехай функція $f(x)$ задана на проміжку $[-l, l]$ довільної довжини $2l$, $(l > 0)$. Якщо зробити заміну $\dfrac{ly}{\pi}$, $(-\pi \le y \le \pi)$, то отримаємо функцію $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$, до якої можна застосувати розклад в ряд Фур'є:

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

де

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\, dy, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\, dy, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Якщо повернутись до змінної x, взявши $y = \frac{\pi x}{l}$, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Зауважимо, що проміжок $[-l, l]$ може бути замінений проміжком $[0, 2l]$. Тоді формули для відшукання коефіцієнтів ряду Фур'є матимуть вигляд:

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{0}^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{0}^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

§5. Розклад функції в ряд Фур'є лише за синусами або за косинусами

Якщо $f(x)$ є парною функцією на відрізку $[-\pi, \pi]$, то в такому випадку добуток $f(x)\sin nx$ є непарною функцією і $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Отже, ряд Фур'є парної функції містить лише косинуси:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Оскільки $f(x)\cos nx$ при цьому є парною функцією, то

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Якщо $f(x)$ є непарною функцією на $[-\pi, \pi]$, то $f(x)\cos nx$ є непарною і $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Отже, ряд Фур'є непарної функції містить лише синуси:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Оскільки $f(x)\sin nx$ при цьому є парною функцією, то

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Якщо функція $f(x)$ задана лише в проміжку $[0, \pi]$, то продовжуючи її парним або непарним чином на відрізок $[-\pi, 0]$, отримаємо розклад функції в ряд Фур'є відповідно за косинусами або за синусами.

Аналогічні міркування можна застосувати до функції $f(x)$, заданої на проміжку $[0, l]$.

§6. Почленне диференціювання та інтегрування ряду Фур'є

Нехай функція $f(x)$ є абсолютно інтегровною на відрізку $[-\pi, \pi]$. Розглянемо її ряд Фур'є:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Введемо в розгляд для $x \in [-\pi, \pi]$ функцію $F(x) = \int\limits_0^x \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx$, яка є неперервною і має період 2π, бо $F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \pi a_0 = 0$.

Отже, функція $F(x)$ розкладається на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фур'є:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

де

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} F(x) \left. \frac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

тобто $A_n = -\frac{b_n}{n}$.

Аналогічно отримаємо, що $B_n = \frac{a_n}{n}$ і $\frac{A_0}{2} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$.

В результаті, підставивши всі значення A_0, A_n, B_n в початковий ряд, отримаємо

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n(1 - \cos nx)}{n}.$$

Звідки

$$\int\limits_0^x f(x)dx = \int\limits_0^x \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

Очевидно, що для довільного проміжка $[x_1, x_2]$, де $-\pi \le x_1 < x_2 \le \pi$ виконується формула

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx.$$

Отже, інтеграл від функції $f(x)$ отримується почленним інтегруванням ряду Фур'є.

Розглянемо тепер на відрізку $[-\pi, \pi]$ неперервну функцію $f(x)$, що задовольняє умову $f(-\pi) = f(\pi)$ і має похідну $f'(x)$ (за винятком скінченної кількості точок). Вважаємо, що $f'(x)$ є абсолютно інтегровною на $[-\pi, \pi]$. Тоді

$$f(x) = \int_0^x f'(x)dx + f(0),$$

і ряд Фур'є для $f(x)$ отримується із ряду Фур'є функції $f'(x)$ виду

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx$$

за допомогою почленного інтегрування, бо

$$a_0' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Отже, ряд Фур'є для похідної $f'(x)$ може бути отриманий із ряду Фур'є для $f(x)$ за допомогою почленного диференціювання.

§7. Приклади розкладів функції в ряд Фур'є

Розкласти функції в ряд Фур'є на відповідному проміжку:
1) $f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi)$;
2) $f(x) = x(\pi - x), \quad x \in (0, \pi)$.

Розв'язок

1) Знайдемо спочатку коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є функції $f(x) = x^2$ на проміжку $(-\pi, \pi)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \begin{vmatrix} x^2 = U, & \cos nx\, dx = dV \\ dU = 2xdx, & V = \frac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2 \sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = \begin{vmatrix} x = U, & \sin nx\, dx = dV \\ dU = dx, & V = -\frac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2x}{\pi n^2}\cdot\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2};$$

$b_n = 0, \quad$ (бо функція $f(x) = x^2$ є парною для довільного $x \in (-\pi, \pi)$).

Отже, розклад функції в ряд Фур'є матиме вигляд:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

2) Скористаємось формулою розкладу функції в ряд Фур'є на довільному проміжку. Оскільки $f(0) = f(\pi) = 0$, то $l = \frac{\pi}{2}$. Тоді:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi x - x^2)\cos 2nx\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \pi x - x^2 = U, & \cos 2nx\, dx = dV \\ dU = (\pi - 2x)dx, & V = \frac{\sin 2nx}{2n} \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}(\pi x - x^2)\,\frac{\sin 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}(\pi - 2x)\sin 2nx\, dx = \begin{vmatrix} \pi - 2x = U, & \sin 2nx\, dx = dV \\ dU = -2dx, & V = -\frac{\cos 2nx}{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2}(\pi - 2x)\cos 2nx\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\int\limits_0^{\pi}\cos 2nx\, dx = \frac{1}{2\pi n^2}(-\pi - \pi) = -\frac{1}{n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi x - x^2)\sin 2nx\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \pi x - x^2 = U, & \sin 2nx\, dx = dV \\ dU = (\pi - 2x)dx, & V = -\frac{\cos 2nx}{2n} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi}(\pi x - x^2)\,\frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}(\pi-2x)\cos 2nx\,dx = \left|\begin{matrix}\pi-2x=U, & \cos 2nx\,dx = dV\\ dU=-2dx, & V=\frac{\sin 2nx}{2n}\end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}(\pi-2x)\sin 2nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n^2}\int\limits_0^{\pi}\sin 2nx\,dx=\frac{1}{\pi n^2}\left(-\frac{\cos 2nx}{2n}\right)\Big|_0^{\pi}=0.$$

Отже, розклад функції $f(x)=x(\pi-x)$ в ряд Фур'є на проміжку $(0,\pi)$ матиме вигляд:

$$x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx,\quad x\in(0,\pi).$$