Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Фізико-технічний факультет
Кафедра фізики і методики викладання

Лабораторна робота № 11 (ФПЕ-13М)

ВИВЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ В ЗВ'ЯЗАНИХ КОНТУРАХ

Івано-Франківськ

<u>МЕТА РОБОТИ</u>: вивчення обміну енергією в системі електричних, слабо зв’язаних між собою, контурів.

<u>ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ</u>

Коливальні процеси (осциляції) в електричних контурах мають аналогії в механіці. Поведінка найпростішого осцилятора – математичного маятника, що являє собою матеріальну точку масою m, підвішену на довгому нерозтяжному стержні, добре вивчена: це гармонічні коливання з частотою ω_0 .

Істотно складнішими є коливання системи двох однакових маятників, зв'язаних між собою слабкою пружиною, як це показано на рис.1. Маятники братимуть участь в колективних коливаннях, амплітудно-частотна характеристика яких залежить від зміщення маятників один відносно одного (відносна фаза).

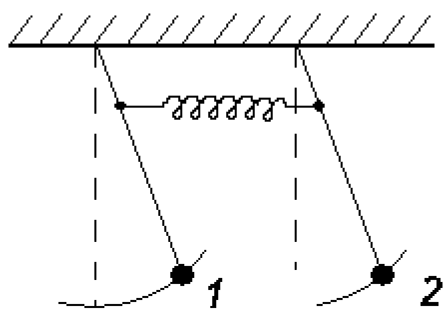

Рис. 1.

Якщо обидва маятники мають у початковий момент часу однакові зміщення, то вони коливатимуться як єдине ціле з амплітудою і частотою, яка рівна частоті і амплітуді коливань одиночного маятника ω_0 . Якщо при $t = 0$ зміщення є рівні і протилежні, то маятники коливатимуться з сталою амплітудою, але частотою ω_1 більшою від ω_0. Ці два види руху називаються нормальними модами коливань системи зв'язаних осциляторів, причому вид коливань з частотою ω_0 називають парною модою нормальних коливань і позначають знаком "+" ($\omega^+ = \omega_0$), а вид коливань з підвищеною частотою ω_1 називають непарною модою нормальних коливань і позначають знаком "-" ($\omega^- = \omega_0$). Нормальна мода коливань - це колективне коливання, при якому амплітуда коливань кожної рухомої частинки системи залишається незмінною. У складніших випадках, коли при $t = 0$, є довільний відносний зсув фаз, результуючий рух можна розглядати як комбінацію (суперпозицію) двох нормальних мод коливань, тобто як амплітудно-модульоване коливання. З суперпозицією гармонічних коливань різних частот доводиться зустрічатися в найрізноманітніших явищах. Прикладом можуть служити зокрема два камертони з різними власними частотами, які мало відрізняються одна від одної. В цьому випадку людське вухо найбільш виразно сприймає результуюче коливання як гармонічне коливання із змінною амплітудою, тобто вухо чує музичний тон, інтенсивність якого періодично змінюється з частотою $\omega_б = |\omega_1 - \omega_0|$ і періодом $T_б = \frac{2\pi}{\omega_б}$. Такий вид суперпозиції гармонічних коливань, при $\omega_1 \approx \omega_0$ але і $\omega_1 > \omega_0$, відображений на рис.2. Це явище називається *биттям*, а величини $\omega_б$ і $T_б$ - відповідно періодом і частотою биття.

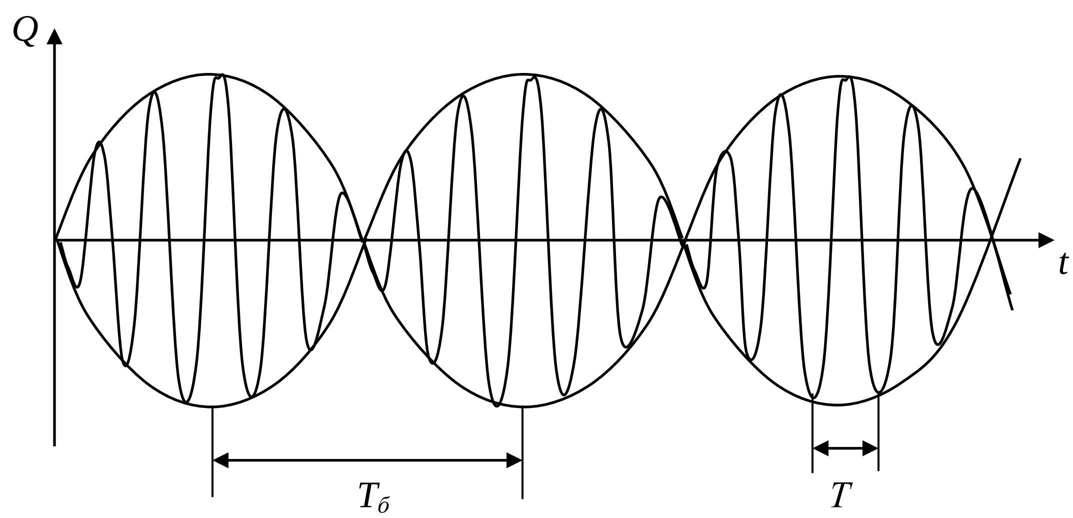

рис.2

У системі двох зв'язаних слабкою пружиною маятників биття можуть встановитися, якщо змістити один з них (наприклад, маятник 1, зліва рис.1), утримуючи інший на місці, а потім відпустити їх одночасно. В цьому випадку маятник 1 починає коливатися один, але з часом коливання маятника 2 постійно наростатимуть, а коливання маятника 1 - затухати. Через деякий час маятник 2 коливається з значною амплітудою, а маятник 1 зупиняється. У разі парної моди нормальних коливань, маятники рухаються разом, пружина не розтягнута і частота маятника така ж, як у одиночного маятника. У разі непарної моди коливань пружина розтягнута, що збільшує частоту цієї моди коливань. Якщо в якийсь момент часу зміщений тільки один з маятників, то виникають дві нормальні моди коливань, що знаходяться в певній відносній фазі. Але оскільки частота непарного коливання трохи вища за частоту парного коливання, відносна фаза змінюється в процесі колективного коливання. Амплітуда коливань першого маятника рівна нулю, а амплітуда другого досягає максимуму, коли два нормальні види коливань опиняться в протифазі, потім починається збільшення амплітуди першого маятника і процес повторюється.

Поведінку зв'язаних осциляторів легко пояснити з енергетичної точки зору: при $t = 0$ вся енергія зосереджена в маятнику 1. Оскільки маятники зв’язані пружиною, то через пружину енергія поступово передається від маятника 1 до маятника 2 до тих пір, поки вся енергія не зосередиться в маятнику 2, потім, якщо система осциляторів підживляється ззовні енергією для компенсації згасання через тертя, процес обміну енергією повторюється від маятника 2 до маятника 1 і т.д. Таким чином, "биття" - процес обміну енергією між двома гармонічними осциляторами, власні частоти яких відрізняються мало, а при $t = 0$ спостерігається відносний зсув фаз. Биття можна спостерігати і в електричній системі - в двох однакових LC -контурах, зв'язаних між собою слабким ємнісним зв'язком C_{12} , що є аналогом механічного зв'язку у вигляді пружини. Коливання в контурах (рис.3) збуджуються за допомогою перетворювача імпульсів (ПІ).

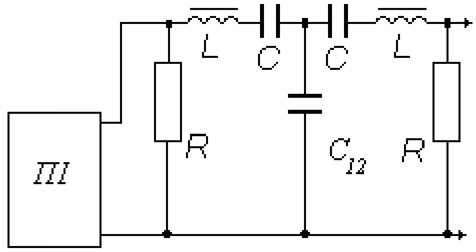

рис.3

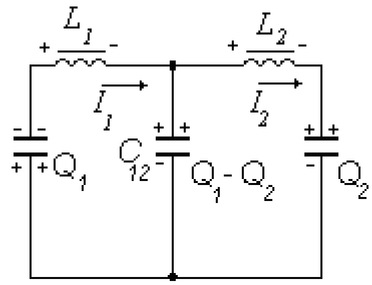

рис.4

Для теоретичних розрахунків розглянемо спрощений варіант цієї схеми (рис.4), де позначені знаки зарядів в контурах і позитивний напрям струму. Для спостереження биття важливо, щоб струми I_1 і I_2 були напрямлені одинаково. Для двох контурів, сполучених по схемі рис.4, можна записати два рівняння, що описують коливання зарядів Q:

$$\begin{cases} L\frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_1 - Q_2}{C_{12}} = 0 \\ L\frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C} + \frac{Q_1 - Q_2}{C_{12}} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Підставляючи $I_1 = \frac{dQ_1}{t}$ $I_2 = \frac{dQ_2}{t}$ отримуєм

Додавши ці рівняння (2), одержуємо:

$$L\frac{d^2(Q_1+Q_2)}{dt^2} = \frac{Q_1+Q_2}{C}, \qquad (3)$$

а різниця рівнянь:

$$L\frac{d^2(Q_1-Q_2)}{dt^2} = -\frac{Q_1-Q_2}{C} - \frac{2(Q_1-Q_2)}{C_{12}} \qquad (4)$$

За допомогою проведених математичних операцій вдалося рівняння (2) записати через змінні $(Q_1 + Q_2)$ і $(Q_1 - Q_2)$. Якщо при t = 0 змінна $(Q_1 + Q_2)$ має значення $(Q_1 + Q_2)_0$, то розв’язок рівняння (3) має вигляд

$$(Q_1 + Q_2) = (Q_1 + Q_2)_0 \cdot cos\omega^+ t \qquad (5)$$

частота $\omega^{+} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ рівна частоті власних коливань окремого контура. аналогічно, розв’язок рівняння (4):

$$(Q_1 - Q_2) = (Q_1 - Q_2)_0 \cdot cos\omega^{-} t \qquad (6)$$

де $\omega^{-} = \sqrt{\frac{1}{L}(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}})}$, $(Q_1 + Q_2)_0$ – значення змінної $(Q_1 - Q_2)$ при $t = 0$

Два види руху, що описуються рівнянням типу (5) і (6), називаються нормальними модами коливань системи зв'язаних осциляторів. В даному випадку вони описують коливання величини заряду в системі двох зв'язаних електричних контурів. Нормальна мода коливань – це колективні коливання, при яких амплітуда коливань кожного заряду залишається незмінною.

Якщо змістити з положення рівноваги один з контурів, то результатом будуть коливання двох нормальних мод коливань. При $Q_{20} = 0$ з (5) і (6) одержуємо:

$$Q_1 = \tfrac{1}{2} Q_{10}(cos(\omega^{+} t) + cos(\omega^{-} t)) \qquad (7)$$

$$Q_2 = \tfrac{1}{2} Q_{10}(cos(\omega^{+} t) - cos(\omega^{-} t)) \qquad (8)$$

Використовуючи відомі тригонометричні тотожності:

$$cosA + cosB = 2cos\tfrac{1}{2}(A+B) \cdot cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$cosA - cosB = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$

Можна записати рівняння (7) і (8) у вигляді:

$$Q_1 = Q_{10}\left[\cos\tfrac{1}{2}(\omega^{+} - \omega^{-})t\right] \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\omega^{+} + \omega^{-})t \qquad (9)$$

$$Q_1 = Q_{10}\left[\sin\tfrac{1}{2}(\omega^{+} - \omega^{-})t\right] \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\omega^{+} + \omega^{-})t \qquad (10)$$

Графіки Q_1 і Q_2 (рівняння (9) і (10)) показані на рис.2, де у початковий момент часу амплітуда Q_2 рівна нулю. Амплітуда Q_2 збільшується, а амплітуда Q_1 спадає до тих пір, поки у момент часу, що визначається із співвідношення

$$\tfrac{1}{2}(\omega^{+}-\omega^{-})t=\tfrac{\pi}{2}$$

амплітуда Q_1, не стане рівною нулю, а амплітуда Q_2 досягне максимуму.

Ситуацію, показану на рис.2, можна розглянути з енергетичної точки зору.

При $t = 0$ вся енергія зосереджена в контурі 1. В результаті зв'язку через конденсатор C_{12} енергія постійно передається від контура 1 до контура 2 до тих пір, поки вся енергія не збереться в контурі 2. Час, необхідний для переходу енергії з контура 1 в контур 2 і назад, можна одержати з рівняння

$$\tfrac{1}{2}(\omega^{+}-\omega^{-})t_{обм}=\pi,$$

а частота, з якою контури обмінюються енергією

$$\omega_{обм}=\tfrac{2\pi}{t_{обм}}=\omega^{+}-\omega^{-} \qquad (11)$$

Для парної моди коливань, позначеної знаком "+", струми течуть в однаковому напрямі, тоді на конденсаторі C_{12} немає заряду. При цьому частота залишається такою ж, як для незв'язаних контурів, тобто $\omega^{+}=\tfrac{1}{\sqrt{LC}}$. У разі непарної моди нормальних коливань (знак "-"), конденсатор C_{12} заряджений, що збільшує частоту коливань, тобто

$$\omega^{-}=\sqrt{\tfrac{1}{L}(\tfrac{1}{C}+\tfrac{2}{C_{12}})}$$

Слід зазначити, що для застосування до зв'язаних контурів розглянутої вище теорії, вони повинні мати однакову резонансну частоту $\omega=\tfrac{1}{\sqrt{LC}}$ і, крім того, передбачається, що ємність C_{12} велика ("слабкий зв'язок"). Тоді вираз (11) можна перетворити таким чином:

$$\omega_{обм}=\sqrt{\tfrac{1}{LC}}-\sqrt{\tfrac{1}{LC}+\tfrac{2}{LC_{12}}}=\sqrt{\tfrac{1}{LC}}(1-\sqrt{1+\tfrac{2LC}{C_{12}}})\approx\sqrt{\tfrac{1}{LC}}(1-\sqrt{1-\tfrac{2C}{C_{12}}})\approx$$
$$\approx\sqrt{\tfrac{1}{LC}}(1-\sqrt{1+\tfrac{2C}{C_{12}}+(\tfrac{C}{C_{12}})^{2}}\approx\sqrt{\tfrac{1}{LC}}(1-\sqrt{(1+\tfrac{C}{C_{12}})^{2}}\approx\sqrt{\tfrac{1}{LC}}\cdot\tfrac{C}{C_{12}}\approx\tfrac{C}{C_{12}}\omega \qquad (12)$$

Отримане значення частоти обміну $\omega_{обм}$ (мається на увазі обмін енергії), або частоти "биття" $\omega_{обм} = \omega_{б}$ можна змінювати, настроюючи систему контурів шляхом зміни номіналів радіоелементів *C, C₁₂, L, R* добиваючись того, щоб частота $\omega_{обм} = \omega^{+} - \omega^{-}$ була мінімальною.

Дослідження биття, тобто обміну енергій в зв'язаних контурах, і є одним з практичних завдань даної роботи.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ознайомитися з описом установки і методом вимірювання.

2. Включити живлення касети ФПЕ-13м. Запустити програму ФПЕ-13м.exe. На екрані віртуального осцилографа повинна спостерігатися стабільна картина процесу "биття" в контурах.

3. Встановити частоту розгортки віртуального осцилографа, зручну для проведення досліджень.

4. Обчислити $T_{рез}$ для одного з контурів (резонансні частоти контурів близькі) за формулою Томсона $T_{рез} = 2\pi\sqrt{LC}$. Де L = ,   C =

6. Змінюючи ємність конденсатора зв'язку C_{12} на касеті ФПЕ-13 виміряти періоди "биття" та записати дані в таблицю 1.

Таблиця 1.

C_{12}, μF					
N					
$T_{б}$, с експ.					
$T_{б}$, с теор.					

Період "биття" визначається таким чином: підраховується кількість періодів (кількість максимумів), що укладаються в одне "биття" (число *N*), рис1.

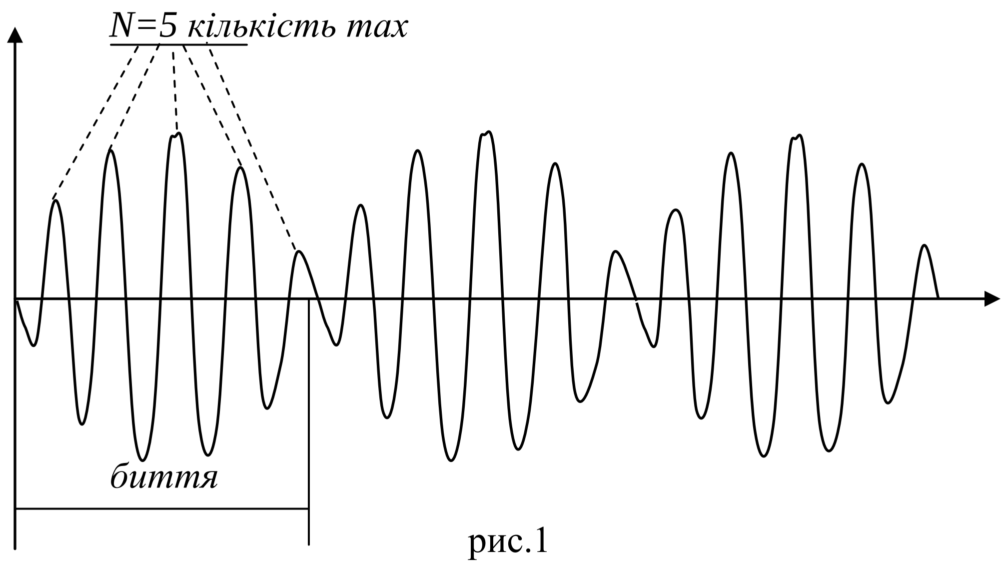

рис.1

Ця величина множиться на значення періоду обчислене за формулою Томсона, тобто $T_б = T_{рез} N$. Отримані результати записуються в таблицю. За отриманими таким чином значеннями $T_б$ побудувати графік залежності $T_б = f(C_{12})$.

7. Провести розрахунок $T_б$ за формулою $T_б = \frac{C_{12}}{C} T_{рез}$ побудувати графік залежності і порівняти його з експериментальними значеннями.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Поясніть, чому струми I_1 і I_2 (див. рис.4) повинні мати однаковий напрям.

2. Чому повинна виконуватись умова $C_{12} << C$?

3. Покажіть, що існує два максимуми струму, що припадають на частоти нормальних мод коливань.

4. Поясніть картину биття (дивися рис.2) з енергетичної точки зору.

5. Чому рівна частота обміну енергією між двома зв'язаними осциляторами.