Способи задання графів. Степені вершин.

Теоретичні відомості.

Нехай V– довільна множина, елементи якої назвемо вершинами, E – сукупність пар вигляду (v, w), які називаємо ребрами, де $v, w \in V$. Термін сукупність означає можливість наявності кількох однакових пар вигляду (v, w) і (v, v). Впорядковану пару $G = (V, E)$ називаємо графом з множиною вершин V та множиною ребер E. Граф називається скінченним, якщо скінченними є множини його вершин і ребер. Надалі ми розглядатимемо тільки скінченнні графи. Якщо $v, w \in V$ і $e = (v, w) \in E$, то кажемо, що "ребро e з'єднує вершини v та w"або "ребро e інцидентне вершинам v та w". Самі ж вершини, між якими існує ребро називають суміжними.

Якщо пари $(v, w) \in V$ вважають впорядкованими, то граф є орієнтованим або орграфом. Інакше граф називають неорієнтованим або звичайним. Ребра орієнтованого графа прийнято називати дугами.

Кількість вершин $n(G)$ графа називають його порядком. Кількість ребер позначають $m(G)$.

Кількість ребер графа, інцидентних деякій вершині v, називають локальним степенем, або просто степенем, вершини v і позначають $deg(v)$. Для вершин орієнтованого графа розрізняють напівстепені входу та виходу, які позначаються $indeg(v)$ та $outdeg(v)$ відповідно . Напівстепенем входу вершини v є число всіх ребер вигляду $(v, w) \in E$, а напівстепенем входу – число всіх ребер вигляду $(w, v) \in E$. Історично першою теоремою теорії графів є наступна теорема, запропонована Ейлером:

Теорема. *Сума степенів усіх вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер.*

У графі можуть бути ребра вигляду $e = (v, w)$ і $e' = (v, w)$, які інцидентні одній і тій самій парі вершин. Такі ребра називаємо кратними. Граф, у якому є кратні ребра, називаємо мультиграфом. Якщо ребро з'єднує деяку вершину саму з собою,тобто $e = (v, v)$, то воно називається петлею. Граф з петлями та кратними ребрами називаємо псевдографом. Надалі в цій книзі орієнтовані, неорієнтовані, мультиграфи та псевдографи називатимемо просто графами, якщо не буде потреби підкреслити їх особливість.

Є декілька способів задання графів. Найчастіше їх буває зручно зображувати графічно, що і зумовило появу їх назви. При цьому елементи множини V зображуємо точками на площині, а ребра (v, w)– відрізками (прямолінійними або криволінійними), які з'єднують точки v та w. В орграфі дугу (v, w) позначають стрілкою, що веде з вершини v у вершину w.

Ще одним способом задання графа є матриця інцидентності. Нехай $v_1, v_2, ..., v_n$– вершини графа G; $e_1, e_2, ..., e_m$– його ребра. Відношення інцидентності можна означити матрицею $I = \|\varepsilon_{i,j}\|$, що має m і n стовпців. Стовпці відповідають вершинам графа, а рядки – його ребрам. Якщо ребро e_i є інцидентним вершині v_j, то $\varepsilon_{i,j} = 1$; якщо ребро є петлею, то $\varepsilon_{i,j} = 2$. В іншому випадку $\varepsilon_{i,j} = 0$. У матриці інцидентності $I = \|\varepsilon_{i,j}\|$ орієнтованого графа G, якщо вершина v_j – початок ребра e_i, то $\varepsilon_{i,j} = -1$; якщо v_j – кінець e_i, то $\varepsilon_{i,j} = 1$; якщо e_i– петля, інцидентна вершині v_j, то покладемо $\varepsilon_{i,j} = \pm 1$.

Матриця суміжності графа – це квадратна матриця $S = \|\delta_{i,j}\|$, стовпцям і рядкам якої відповідають вершини графа. Для неорієнтованого графа $\delta_{i,j}$ дорівнює кількості ребер, інцидентних одночасно вершинам v_i та v_j. Для орграфа цей елемент матриці суміжності вказує кількість дуг, початком яких є v_i, а кінцем – v_j.

Очевидно, що матриця суміжності неорієнтованого графа завжди має симетричний вигляд, а орієнтованого – не обов'язково.

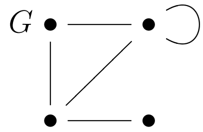
Ще один зручний спосіб задання графа – список суміжності, де кожен рядок списку відповідає вершині графа і в ньому записано всі вершини, суміжні даній (для орграфа – всі вершини, які є кінцем дуги, що виходить з даної вершини).

Теоретичні питання

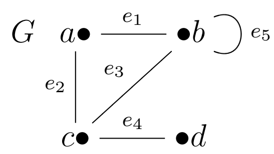
1. Що таке граф, ребро, дуга, порядок графа?
2. Дайте означення ізольованої вершини.
3. Що таке кратні ребра?
4. Дайте означення петлі.
5. Чи може сума степенів усіх вершин графа бути непарним числом?
6. Який граф називаємо псевдографом, мультиграфом?
7. Як задати граф за матрицею інцидентності?
8. Як задати граф за матрицею суміжності?
9. Як, використовуючи матрицю інцидентності, визначити степені всіх вершин?
10. Як за матрицею суміжності знайти степені усіх вершин та кількість ребер графа?

Зразки типових задач з розв'язками

1. Задати граф G матрицями інцидентності, суміжності та списком суміжності.



Розв'язання. Для початку дамо назви всім вершинам та ребрам графа:



Стовпці матриці інцидентності відповідатимуть вершинам, а рядки – ребрам. Ставимо 1, якщо ребро інцидентне вершині, 2 – якщо воно є петлею і 0 – в іншому випадку.

$$I = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Оскільки даний граф має 4 вершини, то розмірність матриці суміжності буде 4×4. Ставимо 1, якщо вершини суміжні і 0 в іншому випадку:

$$S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Список суміжності графа G для зручності зобразимо у вигляді горизонтальної таблиці, в першому рядку якої виписуємо усі вершини, а в другому – відповідні суміжні вершини $\Gamma(v)$ в алфавітному порядку.

v	a	b	c	d
$\Gamma(v)$	b, c	a, b, c	a, b, c	c

2. За матрицями інцидентності та суміжності визначте степені вершин графа G з попередньої задачі.

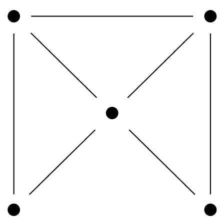
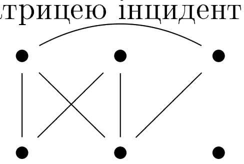
Розв'язання.

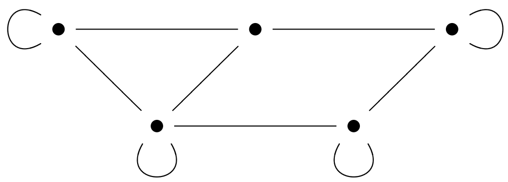
Кожен стовпець матриці інцидентності показує скільки є ребер, інцидентних даній вершині. Петля є двічі інцидентною одій вершині. Тому, щоб знайти степінь вершини, потрібно додати всі елементи відповідного рядка. У нашому випадку маємо:

$deg(a) = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2$; $deg(b) = 1 + 0 + 1 + 0 + 2 = 4$; $deg(c) = 0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 3$; $deg(d) = 0 + 0 + 0 + 1 + 0 = 1$.

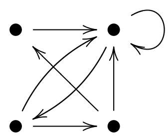
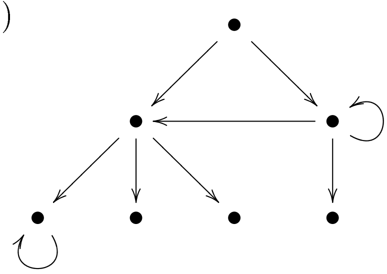
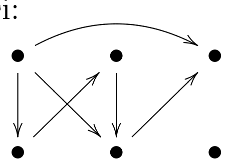
Задачі

1. Задати графи 1)-3) матрицею інцидентності:

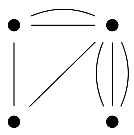
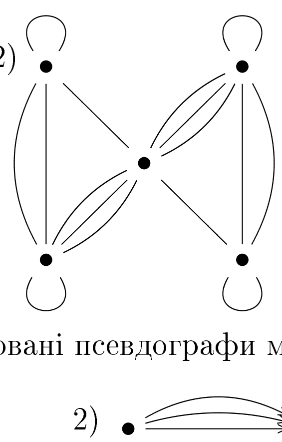
1)  2) 

3) 

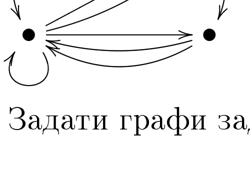
2. Задати орграфи 1)-3) матрицею інцидентності:

1)  2)  3) 

3. Задати графи задачі 1 за допомогою матриці суміжності.
4. Задати орграфи задачі 2 за допомогою матриці суміжності.
5. Задати псевдографи матрицею суміжності:

1)  2) 

6. Задати орієнтовані псевдографи матрицею суміжності:

1)  2) 

7. Задати графи задачі 1 списком суміжності.

8. Задати графи задачі 2 списком суміжності.

9. Зобразити неорієнтовані графи, якщо відомі їх матриці інцидентності:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Зобразити орієнтовані графи, якщо відомі їх матриці інцидентності:

$$1)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. За матрицями суміжності зобразити неорієнтовані графи:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

12. За матрицями суміжності зобразити орієнтовані графи:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Зобразити неорієнтовані графи, задані списком суміжності:

1)

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\Gamma(v)$	v_2	v_1, v_3, v_6	v_2, v_4	v_3, v_5, v_6	v_4	v_2, v_4

2)

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\Gamma(v)$	v_2	v_1	v_4, v_5	v_3, v_5, v_6	v_3, v_4, v_6	v_4, v_5

14. Зобразити орієнтовані графи, задані списком суміжності:

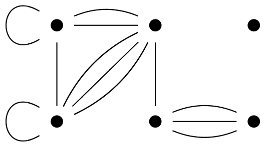
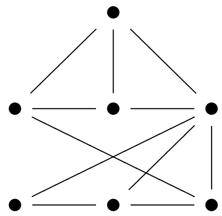
1)

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\Gamma(v)$	v_3	v_1, v_3	v_2, v_5	—	v_2, v_6	v_2

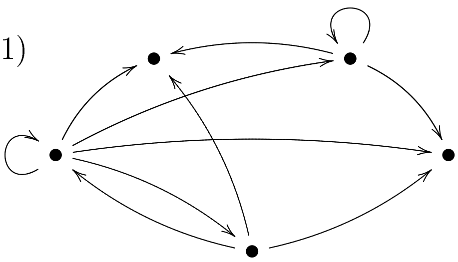
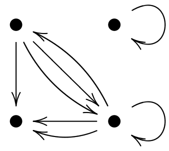
2)

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\Gamma(v)$	v_2	v_2	v_1, v_2	v_3, v_5	v_4	v_6

15. Визначте степені вершин неорієнтованих графів:

1)  2) 

16. Визначте степені входу і виходу орієнтованих графів:

1)  2) 

17. Скільки ребер має простий граф, вершини якого мають такі степені: 4,3,3,2,2 ?

18. Чи існує простий граф з вершинами даних степенів:

1) 1,1,1,1,1; 2) 1,1,1,1,2; 3) 0,1,2,2,3; 4) 3,3,3,3,2;
5) 1,2,3,4,4?

Якщо так, то зобразіть його.

19. За матрицею інцидентності визначте степені вершин неорієнтованого графа:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

20. За матрицею інцидентності визначте степені вершин орієнтованого графа:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

21. За даними матрицями суміжності визначте степені вершин неорієнтованих графів:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

22. За даними матрицями суміжності визначте степені входу і виходу вершин орієнтованих графів:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

23. Є 25 студентів. Відомо, що кожен студент знайомий з п'ятьма іншими. Чи може таке бути?

24. Учасники студентської олімпіади, познайомившись, обмінялись конвертами з адресами. Доведіть, що:

1) всього було передано парну кількість конвертів;

2) кількість учасників, які обмінялись конвертами непарну кількість разів, парна.

25. Чи існує граф з п'ятьма вершинами, у якого одна вершина ізольована, а інша - степеня 4?

26. Дев'ять шахматистів проводять турнір за круговою схемою(кожен з учасників має зіграти з кожним з решти по одному разу). Доведіть, що у будь-який момент часу знайдуться двоє, які зіграли однакову кількість партій.

27. Дев'ять шахматистів проводять турнір за круговою схемою. В деякий момент виявляється, що рівно (!) двоє учасників зіграли однакову кількість партій. Доведіть, що у цьому випадку або рівно один учасник ще не зіграв жодної партії, або рівно один зіграв усі партії.

Дії над графами. Ізоморфізм.

Теоретичні відомості

Нехай ми маємо граф $G = (V, E)$. Тоді кожен граф $G' = (V', E')$, для якого $V' \subset V$ і $E' \subset E$ називаємо підграфом даного графа G. Підграф можемо отримати, виконуючи операції вилучення вершин чи ребер. Під операцією вилучення вершини будемо розуміти операцію, що полягає у видаленні деякої вершини разом з інцидентними їй ребрами. Операція ж вилучення ребра не веде за собою вилучення вершин, які є кінцями даного ребра.

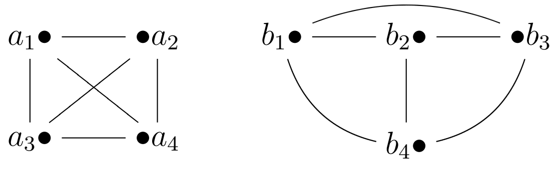
Доповненням (доповняльним графом) $\bar{G}$ графа G є граф, який має ту саму множину вершин, що й G, проте дві вершини у $\bar{G}$ є суміжними тоді і тільки тоді, коли вони не є такими у G.

Об'єднанням графів $G(V, E)$ та $G'(V', E')$ називаємо граф $G \cup G'(V \cup V', E \cup E')$. Аналогічно, перерізом буде граф $G \cap G'(V \cap V', E \cap E')$.

Ми уже розглядали різні способи задання графів. Маючи матрицю суміжності або матрицю інцидентності, ми можемо виконати рисунок (діаграму) графа. Очевидно, що вигляд графа залежить від форми ліній та від розміщення вершин на рисунку. Іноді не так легко зрозуміти чи один і той самий граф зображений на на різних рисунках. Вигляд матриць та списку суміжності залежить від нумерації вершин і ребер графа.

Нехай існує бієкція ϕ, яка діє з множини вершин графа G на множину вершин графа G' так, що для будь-яких вершин $v, w \in V(G)$ їх образи $\phi(v)$ та $\phi(w)$ є суміжними у G' тоді і тільки тоді, коли v та w є суміжними у G. Таку бієкцію називають ізоморфізмом графа G на граф G', а самі графи називають ізоморфними. Це означення годиться і для орієнтованих графів, але потрібно враховувати ще й напрям дуги орграфа. Тобто, вершина $\phi(v)$ є початком, а $\phi(w)$ кінцем дуги в G' тоді і тільки тоді, коли початком і кінцем є відповідно v і w у графі G.

Наприклад, нижче на рисунку зображено ізоморфні графи:



Отже, графи є ізоморфними, якщо вони відрізняються тільки нумерацією (іменами) вершин.

Матриці суміжності ізоморфних графів легко переходять одна в одну шляхом перестановки рядків та стовпців.

Щоб переконатися, що два рисунки зображують один і той самий граф, потрібно перевірити:

1. Чи однакова кількість вершин у обох графів.

2. Чи однакова у них кількість ребер.

3. Чи співпадає у них число вершин, які мають однакову степінь.

Сформульовані вище умови ще не є достатніми для того, щоб графи були ізоморфними. Щоб довести ізоморфність, потрібно встановити взаємно однозначну відповідність між множинами вершин обох графів, яка зберігає ребра.

Якщо граф G ізоморфний своєму доповненню $\bar{G}$, то його називають самодоповняльним.

Теоретичні питання

1. Якими мають бути графи G_1 та G_2, щоб виконувалась рівність $G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2$?

2. Як за матрицею суміжності графа побудувати його доповняльний граф?

3. Чим можуть відрізнятися ізоморфні графи?

4. Скільки ребер є у доповненні $\bar{G}$ самодоповняльного графа G, який має m ребер?

5. Чи може бути граф із трьома вершинами і двома ребрами самодоповняльним?

6. Чому дорівнює степінь вершини v у графі $\bar{G}$, якщо в графі G з n вершинами:

1) $deg(v) = 1$;
2) $deg(v) = n - 1$;
3) $deg(v) = 0$;
4) $deg(v) = k$?

7. Які властивості має відношення ізоморфності на множині графів?

Зразки типових задач з розв'язками

1. Знайдіть об'єднання та переріз графів:

Розв'язання.

Знайдемо множину вершин графа $G_1 \cup G_2$:

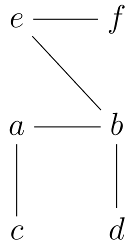
$V(G_1 \cup G_2) = \{a, b, c, d\} \cup \{a, b, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Аналогічно $V(G_1 \cap G_2) = \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, e, f\} = \{a, b\}$.

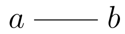
Кожне ребро графів позначимо як пару (v, w), де вершини v і w є кінцями ребра. Тоді $E(G_1 \cup G_2) = \{(a, b), (a, c), (a, d)\} \cup \{(a, b), (b, e), (e, f)\} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), (e, f)\}$ та $E(G_1 \cap G_2) = \{(a, b), (a, c), (a, d)\} \cap \{(a, b), (b, e), (e, f)\} = \{(a, b)\}$

Отримаємо графи:

$G_1 \cup G_2$:

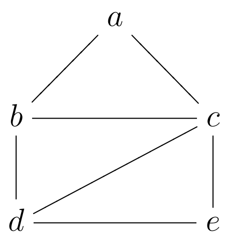


$G_1 \cap G_2$:

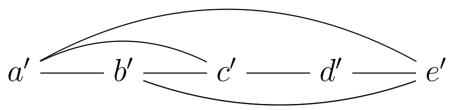


2. Дослідіть графи на ізоморфність:

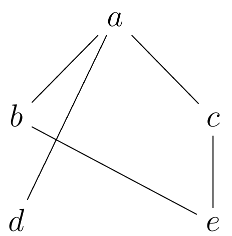
1) G_1



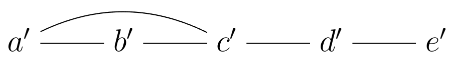
G_2



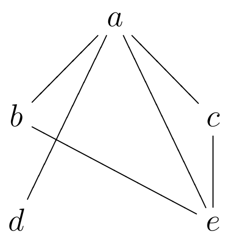
2) G_1



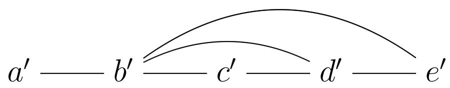
G_2



3) G_1



G_2



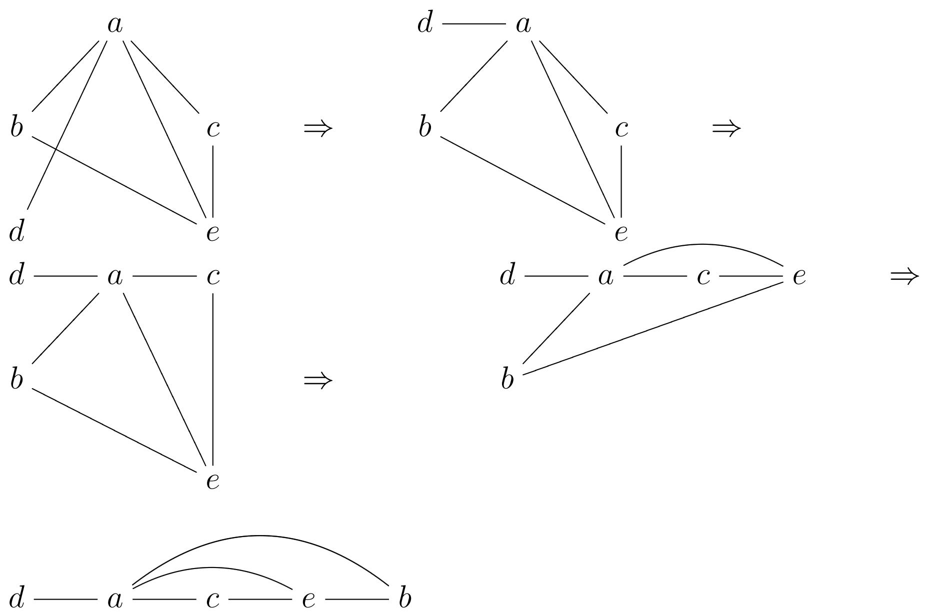
Розв'язання.

1) Перевіряємо виконання необхідних умов. В обох графах є по 5 вершин та 7 ребер, але у G_1 є дві вершини a та e степеня 2,а у G_2 тільки одна вершина. Тому дані графи не є ізоморфними.

2) В обох графах є по 5 ребер та по 5 вершин, серед яких по одній вершині степеня 1, три вершини степеня 2 та одній вершині степеня 3. Проте ці графи не є ізоморфними, оскільки у G_1 вешина степеня 1 суміжна з вершиною степеня 3, а у G_2 аналогічна вершина суміжна з вершиною степеня 2.

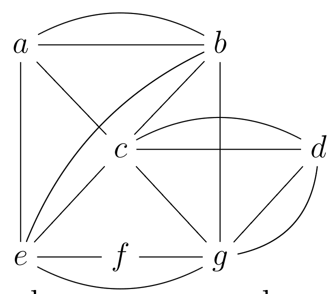
3) Як видно, число вершин, число ребер та степені вершин в обох графах співпадають. Спробуємо побудувати ізоморфізм $\phi : G_1 \to G_2$. Очевидно, що $\phi(a) = b'$, оскільки це єдині вершини степеня 4 в обох графах. Аналогічно $\phi(d) = a'$ та $\phi(e) = d'$. Вершинам b і c степеня 2 відповідають вершини c' і e'. Покладемо $\phi() = c'$, $\phi(b) = e'$. Зауважимо, що оскільки множина вершин, суміжних з b співпадає з множиною вершин, суміжних з c, то однаково вірним буде покласти $\phi(b) = c'$, $\phi(c) = e'$ та $\phi(c) = c'$, $\phi(b) = e'$.

Встановити відповідність двох рисунків одному графу можна і геометрично:

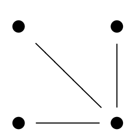


Задачі

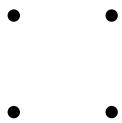
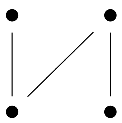
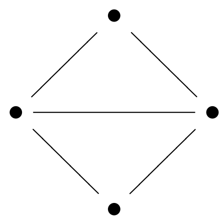
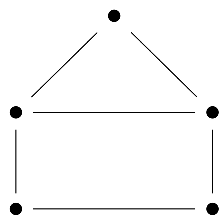
1. Побудувати граф, який отримаємо внаслідок вилучення з даного графа вершини c.



2. Знайти всі підграфи заданого графа, які мають ту саму множину вершин, що і даний граф:



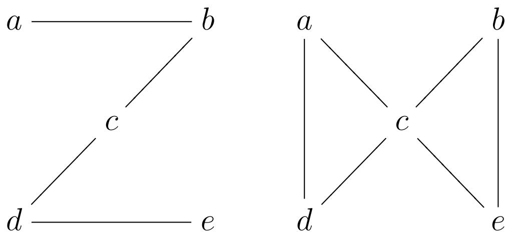
3. Знайдіть доповнення до графів 1)-4):

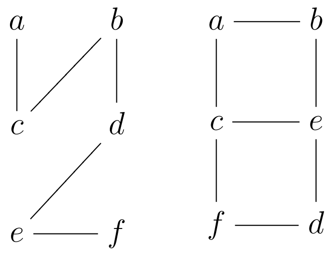
1) 
2) 
3) 
4) 

4. Для графа, заданого матрицею суміжності, знайти матрицю суміжності доповняльного графа.

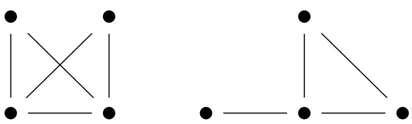
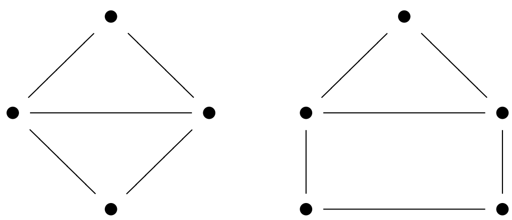
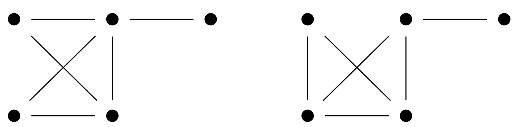
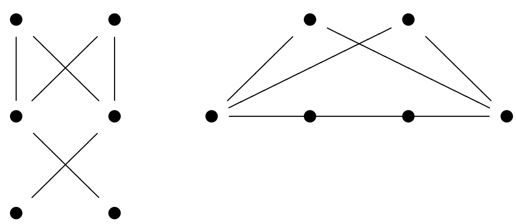
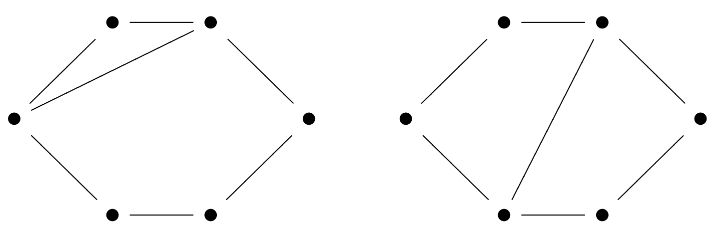
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Знайдіть об'єднання та перерізи пар графів:

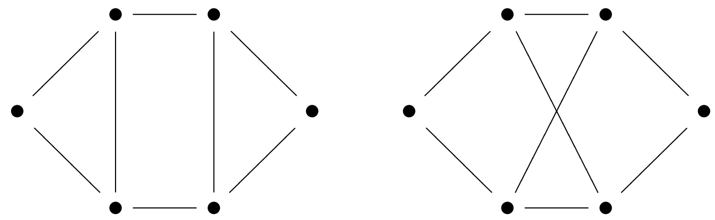
1) 

2) 

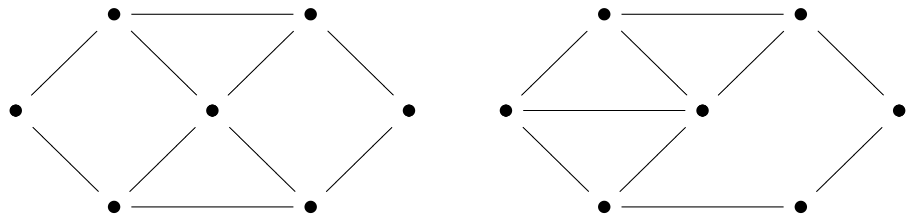
6. Поясніть чому дані пари графів не є ізоморфними:

1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

6)

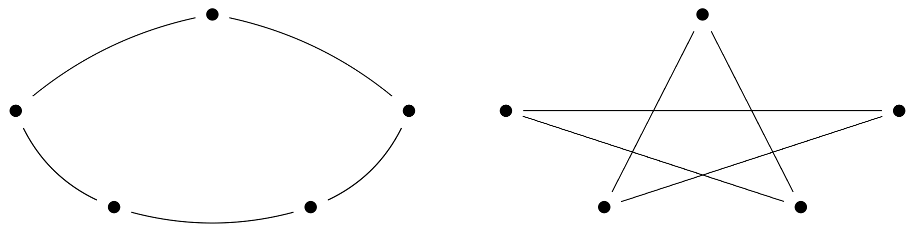


7)

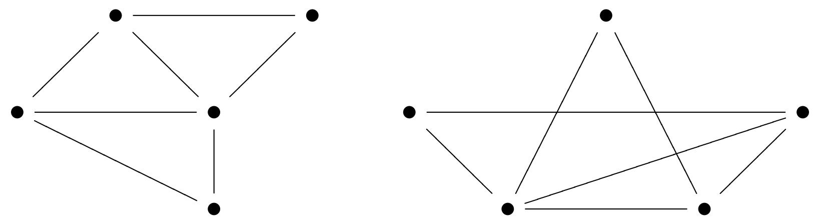


7. Дослідіть на ізоморфність наступні пари графів:

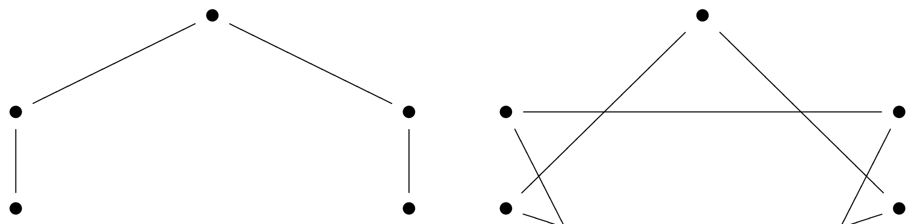
1)



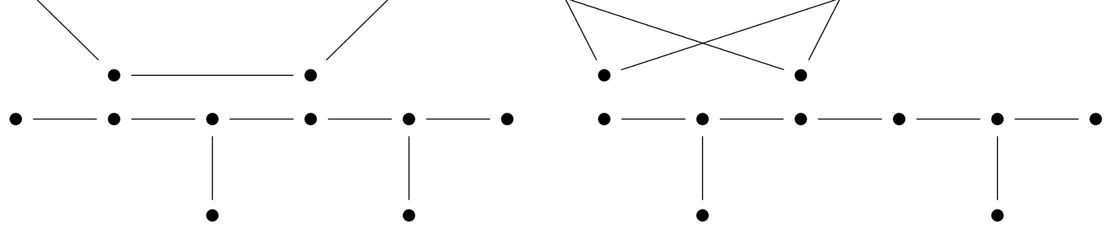
2)



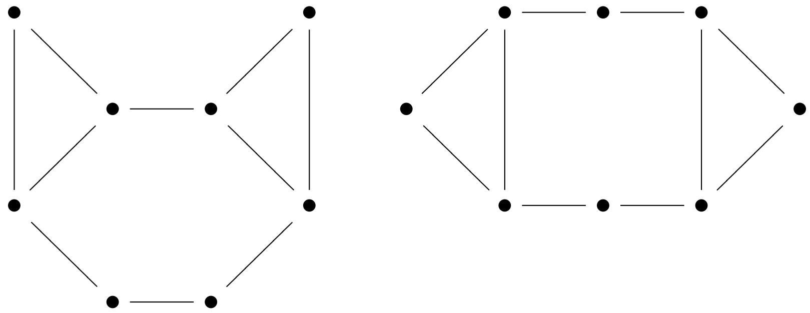
3)



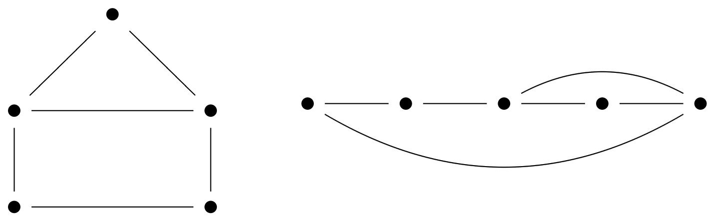
4)



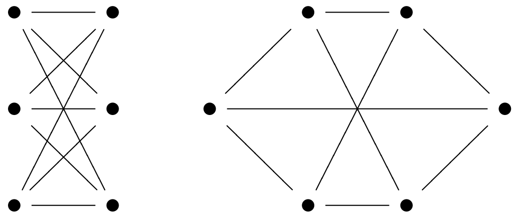
5)



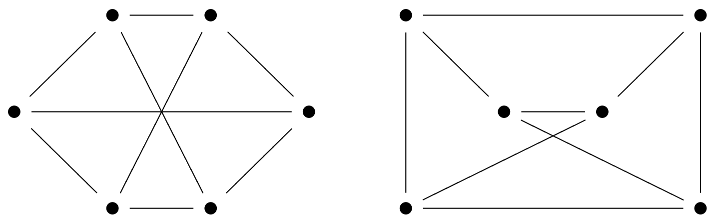
6)



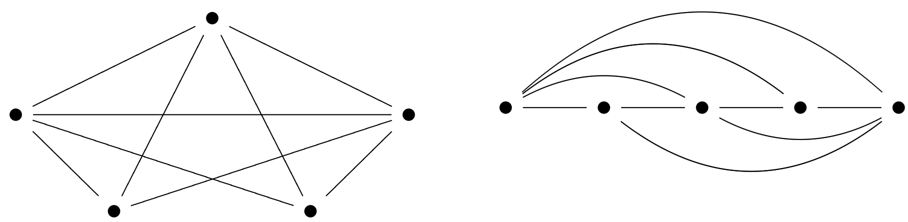
7)



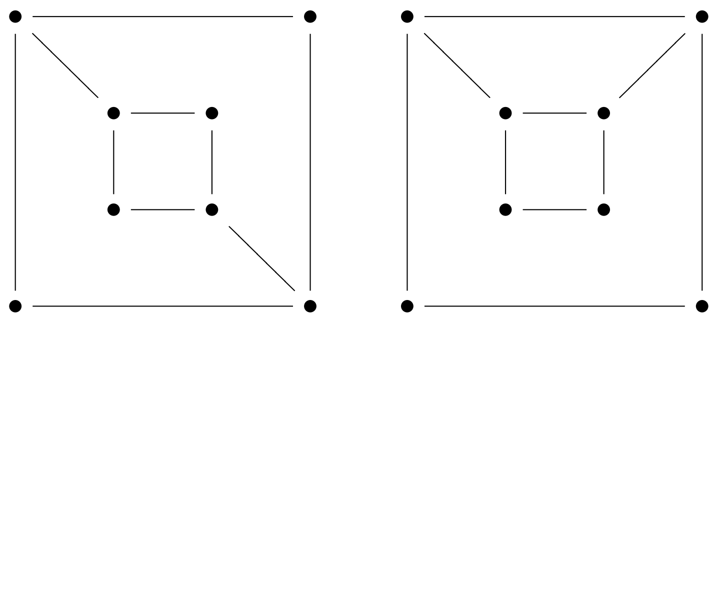
8)



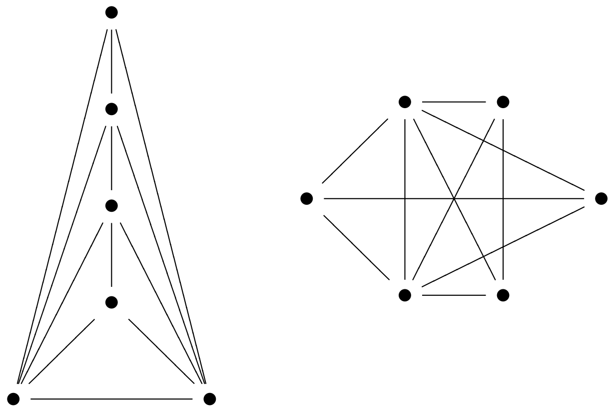
9)



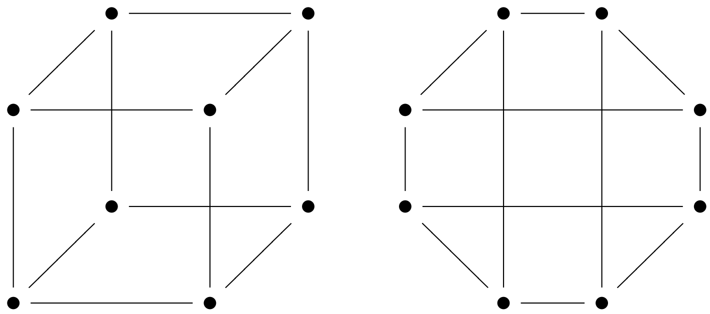
10)



11)



12)

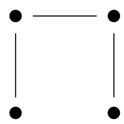


8. Доведіть, що кожна пара 1)-3) матриць суміжності задає графи, ізоморфні між собою.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. Доведіть, що даний граф – самодоповняльний.



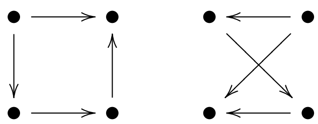
10. Доведіть, що кожен самодоповняльний граф має $4k$ або $4k+1$ вершин.

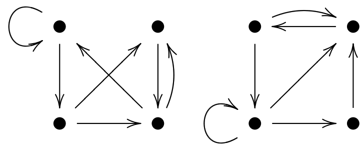
11. Скільки існує неізоморфних простих графів з n вершинами, якщо:

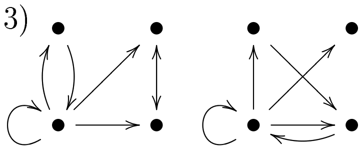
1) $n = 2$;
2) $n = 3$;
3) $n = 4$?

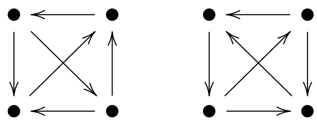
12. Скільки існує неізоморфних простих графів з 5 вершинами і 3 ребрами?

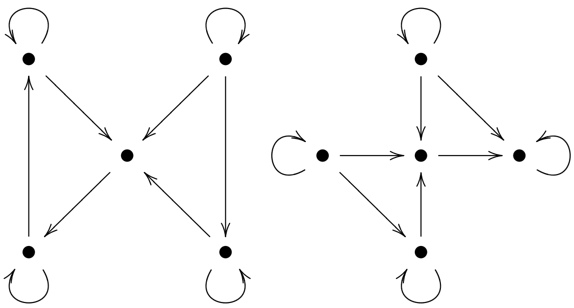
13. Визначити які пари орграфів є ізоморфними.

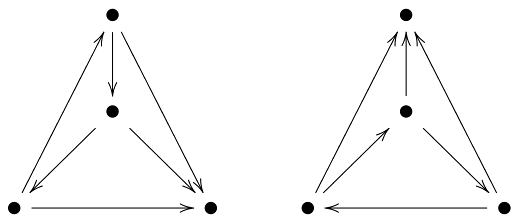
1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

14. В шахматному турнірі за круговою схемою беруть участь сім студентів. Відомо, що Іван зіграв шість партій, Тарас – п'ять, Андрій і Дмитро – по три, Степан і Олег – по дві, Євген – одну. З ким зіграв Андрій?

Маршрути, цикли. Зв'язність.

Теоретичні відомості

Нехай маємо неорієнтований граф G.

Маршрутом у графі G називаємо послідовність його вершин $v_1, v_2, ..., v_n$, в якій кожні дві сусідні вершини суміжні. Вершина v_1 є початком маршруту, а вершина v_n – кінцем. Якщо перша та остання вершини маршруту співпадають, то він називається замкненим. Маршрут називається ланцюгом, якщо всі його ребра різні, і простим ланцюгом, якщо всі його вершини (а значить і ребра) різні. Замкнений (простий) ланцюг ще називають (простим) циклом.

Означення маршруту можна перенести на орієнтований граф. Маршрут в останньому називатимемо шляхом. Отже, шляхом в орграфі є послідовність вершин $v_1, v_2, ..., v_n$, в якій кожні дві вершини v_i, v_{i+1} є суміжними, причому v_i є початком, а v_{i+1} – кінцем спільної дуги. Відповідно можна перенести також означення ланцюга, простого ланцюга, циклу та простого циклу. Простий цикл в орграфі ще називають контуром.

Однією з найпростіших властивостей графів є зв'язність. Називаємо граф зв'язним, якщо кожні дві його вершини з'єднані ланцюгом. В іншому випадку граф – незв'язний. Максимальний зв'язний підграф заданого графа є його компонентою зв'язності. Таким чином, незв'язний граф має як мінімум дві компоненти зв'язності. Зв'язний ж граф має одну компоненту – себе самого.

Для орієнтованого графа вводимо поняття слабкої, сильної та однобічної зв'язності.

Орграф називається слабкозв'язним, якщо між кожними двома його вершинами існує шлях хоча б в один бік.

Орграф називається сильнозв'язним, якщо між кожними двома його вершинами існує шлях в обидва боки.

Орграф називається однобічнозв'язним, якщо між кожними двома його вершинами існує шлях рівно в один бік. Звичайний (без петель та кратних ребер) однобічнозв'язний граф ще називають мережею.

Якщо з вершини v_i у вершину v_j існує маршрут (шлях), то кажемо, що вершина v_j досяжна з вершини v_i.

Довжиною маршруту є кількість ребер в ньому. Ребро – це маршрут довжиною 1.Отже, матриця суміжності показує між якими вершинами є маршрут довжиною 1. Для того, щоб знайти кількість всіх маршрутів довжиною n у графі G, потрібно його матрицю суміжності S піднести до степеня n. Отримаємо матрицю $S^n = [s_{i,j}]$, де елемент $s_{i,j}$ показує кількість маршрутів довжиною n із i -ї вершини у j-ту вершину.

Вершину графа, вилучення якої зумовлює збільшення кількості компонент зв'язності, називають роз'єднувальною.

Ребро графа, вилучення якого зумовлює збільшення кількості компонент зв'язності, називають мостом. Якщо ребро e не належить жодному циклу, то воно є мостом.

Теоретичні питання

1. Дайте означення контура в орграфі.

2. Які властивості має відношення досяжності на множині всіх вершин графа?

3. Чи можна з будь-якого замкненого маршруту вилучити простий ланцюг?

4. Скільки ребер має простий цикл з n вершинами?

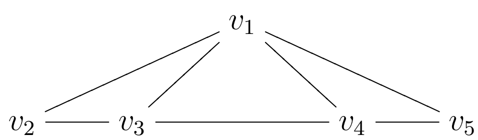
5. Чи може бути так, що у графі існує простий ланцюг з вершини v_1 у вершину v_2 та з v_2 у v_3, але не існує простого ланцюга з v_1 у v_3 через вершину v_2?

6. Чи може міст бути ребром циклу?

7. Яке найменше число ребер має мати граф, щоб він був зв'язним?

Зразки типових задач з розв'язками

1. Задано граф:



Чи кожна з послідовностей вершин 1)-6) задає маршрут? Якщо так, то чи є він ланцюгом, циклом, простим ланцюгом, простим циклом?

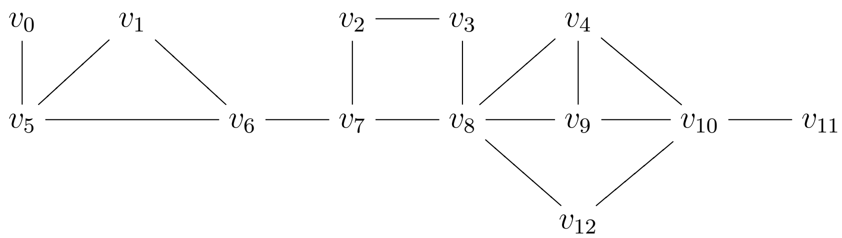
1) v_2, v_3, v_5, v_4;
2) $v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_4, v_3$;
3) $v_3, v_1, v_4, v_5, v_1, v_2$;
4) $v_2, v_3, v_1, v_4, v_3, v_1, v_2$;
5) $v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_1, v_2$;
6) $v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_2$.

Розв'язання.

1) не є маршрутом, оскільки вершини v_3 та v_5 стоять поруч, але не є суміжними;

2) маршрут, але не ланцюг, тому, що двічі містить ребро (v_3, v_4);

3) маршрут, який є ланцюгом, оскільки жодне ребро не повторюється.



1. З вершини v_0 у вершину v_{11} даного графа знайти:

1) простий ланцюг;

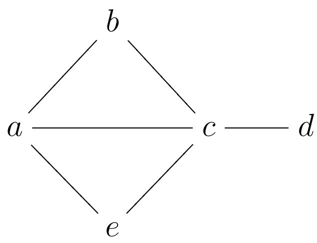
2) ланцюг, який не є простим;

3) маршрут, який не є ланцюгом.

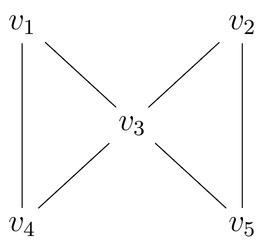
Розв'язання.

Задачі

1. Чи існує ланцюг від a до d, який проходить через усі вершини? А простий ланцюг?



2. Задано граф:



Чи кожна з послідовностей вершин 1)-6) задає маршрут? Якщо так, то чи є він ланцюгом, циклом, простим ланцюгом, простим циклом?

1)v_1, v_4, v_2, v_3;

2)v_1, v_3, v_1, v_4;

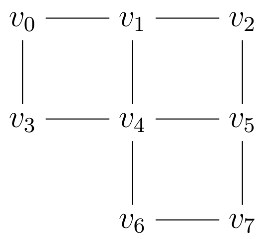
3)$v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$;

4)v_1, v_4, v_3, v_2, v_5;

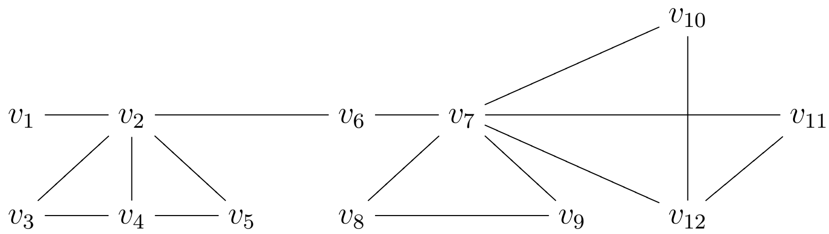
5)$v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1$;

6)v_1, v_3, v_4, v_1.

3. Знайдіть усі прості ланцюги з v_0 у v_7:



4.



1) Знайти всі ланцюги, що ведуть з v_1 у v_{12};

2) Знайти всі прості ланцюги, що ведуть з v_1 у v_{12};

3) Знайти ланцюг з v_1 у v_{12}, який містить усі вершини;

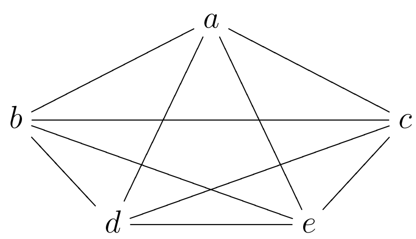
4) Чи існує простий ланцюг з v_1 у v_{12}, який містить усі вершини?

5) Знайти маршрут з v_1 у v_{12}, який не є ланцюгом;

6) Знайти маршрут з v_1 у v_{12}, який містить усі вершини і не є ланцюгом;

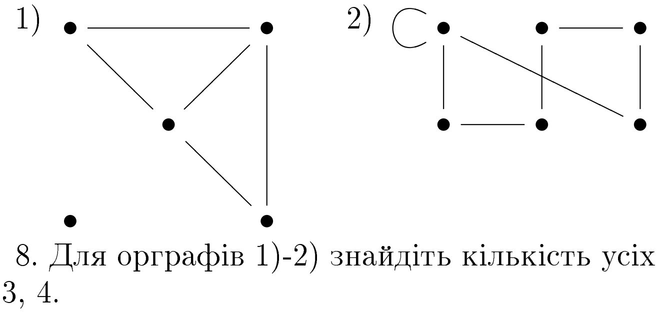
7) Знайти усі прості цикли.

5. В даному графі знайдіть цикли довжиною 3, 4, 5, 6, 10.

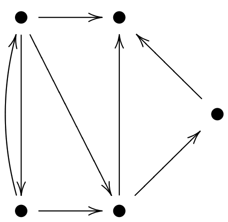


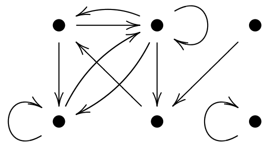
6. Чи має граф з попередньої задачі цикл довжиною 9? Відповідь обгрунтуйте.

7. Для графів 1)-2) знайдіть кількість усіх шляхів довжиною 2, 3, 4.



8. Для орграфів 1)-2) знайдіть кількість усіх шляхів довжиною 2, 3, 4.

1) 

2) 

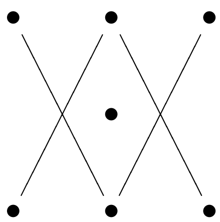
9. Для графів задачі 7 запишіть матриці досяжності.

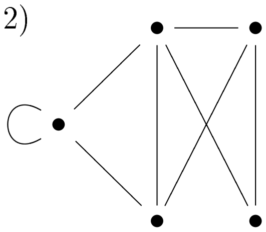
10. Доведіть, що будь-який найкоротший шлях з вершини v у вершину w є простим ланцюгом.

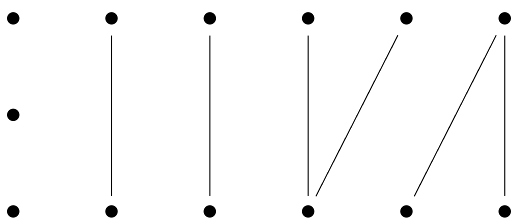
11. Граф заданий матрицею суміжності. Доведіть, що у ньому є цикл довжиною 3.

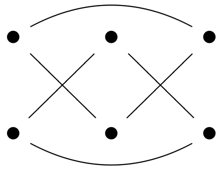
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

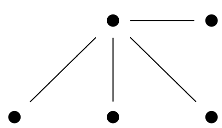
12. Вкажіть, який з графів зв'язний. Скільки компонент зв'язності має кожний граф?

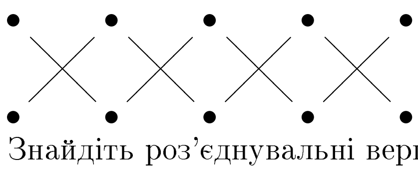
1) 

2) 

3) 

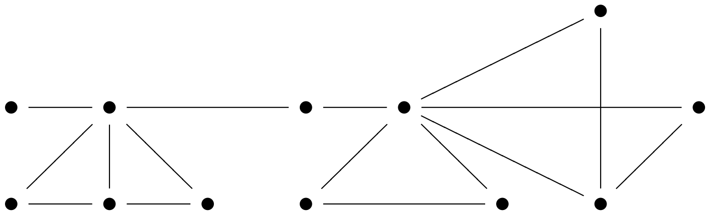
4) 

5) 

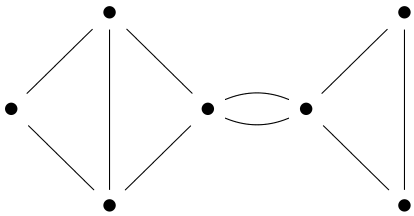
6) 

13. Знайдіть роз'єднувальні вершини, мости і блоки.

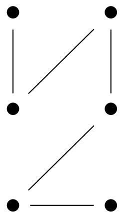
1)



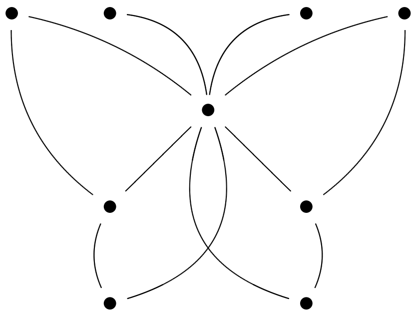
2)



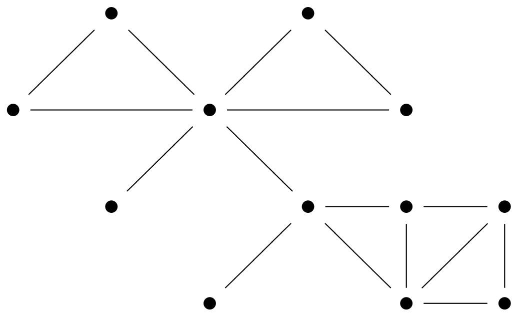
3)



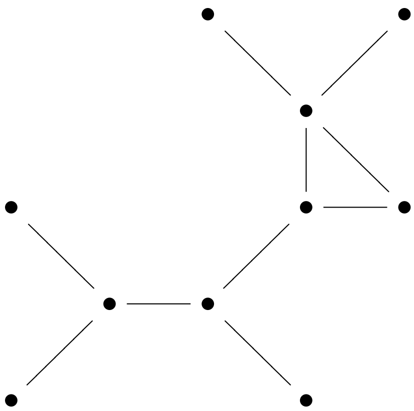
4)



5)



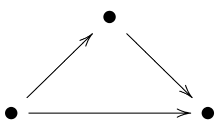
6)



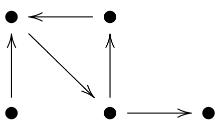
14. Доведіть, що якщо граф G незв'язний, то граф $\bar{G}$ – зв'язний.

13. Який з орграфів є сильнозв'язним, слабкозв'язним, однобічнозв'язним?

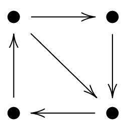
1)



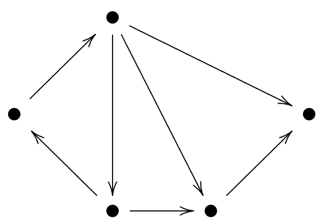
2)



3)



4)



14. Для кожного з графів задачі 13 запишіть матрицю досяжності.

15. Для кожного з графів задачі 13 запишіть матрицю сильної зв'язності.

16. Даведіть, що якщо вершина a зв'язного графа G є роз'єднувальною, то множину всіх вершин графа можна розбити на дві підмножини V_1 та V_2 так, щоб шлях з будь-якої вершини з V_1 у будь-яку вершину з V_2 проходив через вершину a.

17. Доведіть, що якщо v є роз'єднувальною вершиною у графі G, то вона не може бути роз'єднувальною у $\bar{G}$.

Типи графів: повний, дводольний, регулярний, планарний.

Задачі

1. Зобразіть повний нраф K_n, якщо:

1) $n = 2$;

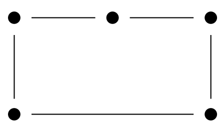
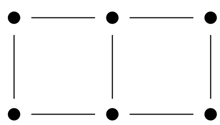
2) $n = 3$;

3) $n = 5$.

2. Запишіть матрицю суміжності для графа K_n.

3. Виведіть формулу, за якою можна знайти кількість ребер графа K_n.

4. Скільки ребер потрібно додати до графа, щоб він став повним?

1)  2) 

5. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює

1) 15;

2) 18;

3) 19...90...0 (n дев'яток і n нулів);

4) $8k^2 + 2k, k \in N$.

6. Скільки ребер є у графі $\bar{G}$, якщо граф G має n вершин і k ребер?

7. Граф G має 15 ребер, граф $\bar{G}$ має 13 ребер. Знайдіть кількість вершин графа G.

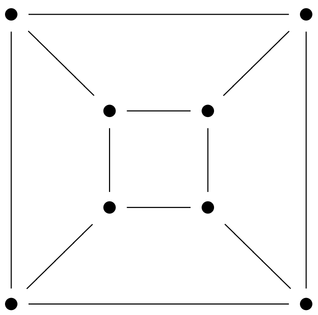
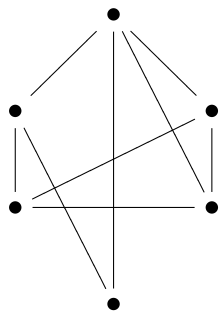
8. Чи можна з повного графа K_{17} вилучити деякі ребра так, щб степінь кожної вершини дорівнювала

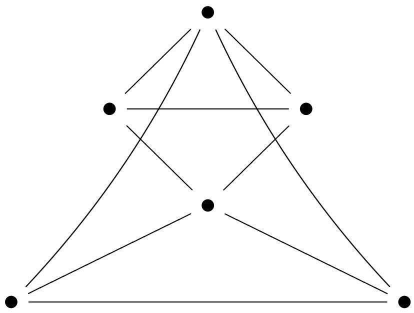
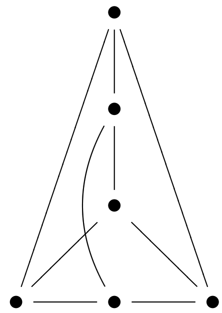
1) 15;

2) 2;

3) 1?

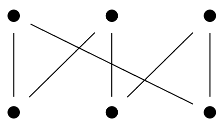
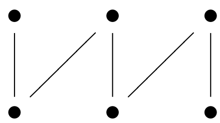
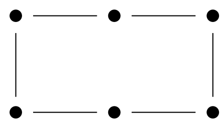
9. Дослідіть графи на дводольність:

1)  2) 

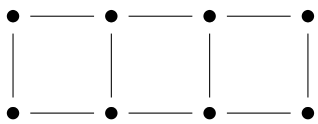
3)  4) 

10. Запишіть матрицю суміжності графа $K_{4,3}$.

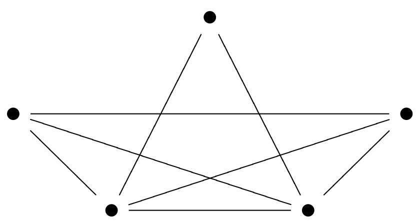
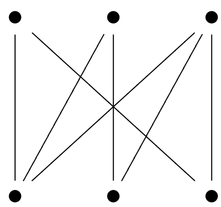
11. Який з графів є регулярним?

1)  2)  3) 

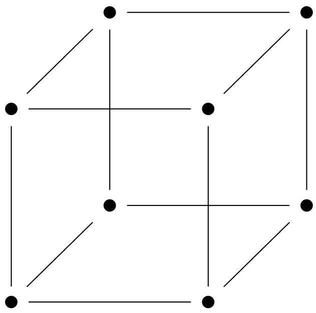
12. Доповніть даний граф так, щоб він став регулярним степеня n, де $n = 3; 4; 5$.



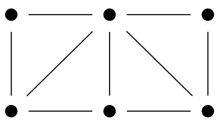
13. Зобразіть кожен з планарних графів без перетину ребер.

1)  2) 

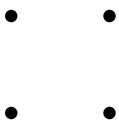
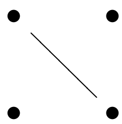
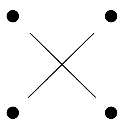
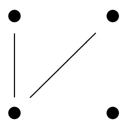
14. Чи є плоским даний граф?

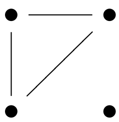
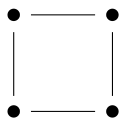
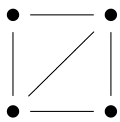
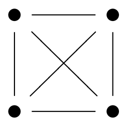


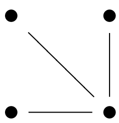
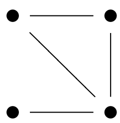
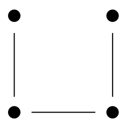
15. Чи можна до заданого графа додати нові ребра так, щоб отриманий граф залишався плоским? Якщо можна, то які?



16. Дослідіть властивості графів: зв'язність, повнота, дводольність, планарність, регулярність, самодоповняльність.

1)  2)  3)  4) 

5)  6)  7)  8) 

9)  10)  11) 

16. Доведіть, що серед 6 людей завжди знайдуться або 3 попарно знайомих, або 3 попарно незнайомих.

17. Кожен учень 9-А класу дружить з трьома учнями 9-Б класу, а кожен учень з 9-Б дружить з трьома учнями з 9-А. Доведіть, що кількість учнів в обох класах однакова.

18. В тенісному турнірі кожен гравець команди "синіх"зустрічається з кожним гравцем команди "червоних". Число гравців у командах однакове і не більше 8. "Сині"виграли у 4 рази більше зустрічей, ніж "червоні". Скільки людей у кожній команді?

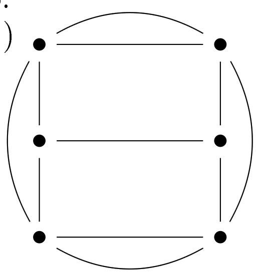
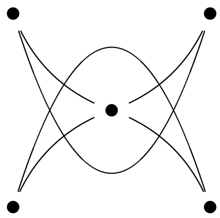
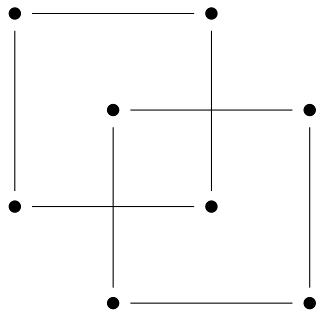
19. Кожен з чотирьох сусідів з'єднав свій дім з трьома іншими стежками, які не перетинаються між собою. Доведіть, що дім п'ятого сусіда неможливо з'єднати з іншими неперетинними стежками.

20. Є 3 будинки і 3 криниці. Від кожного дому до кожної криниці веде стежка. Коли власники будинків пересварились, вони вирішили прокласти шляхи до криниць так, щоб не зустрічатись по дорозі. Доведіть, що їх бажання не може здійснитися.

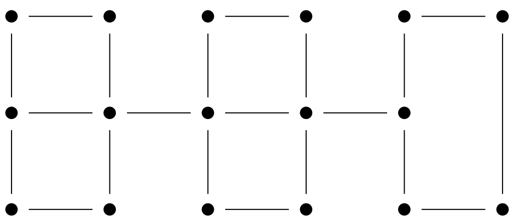
Ейлерові та гамільтонові графи.

Задачі

1. Чи існує ейлеровий цикл у графах? Якщо так, то знайдіть його.

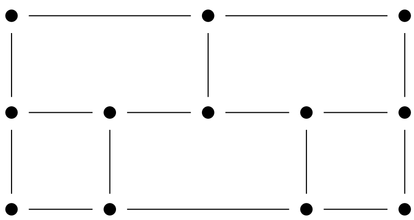
1)  2)  3) 

2. На малюнку схема музею, де ребра означають виставкові зали, а вершини - вхід з однієї зали в іншу . Чи може екскурсовод провести відвідувачів так, щоб побувати в кожному залі рівно один раз?



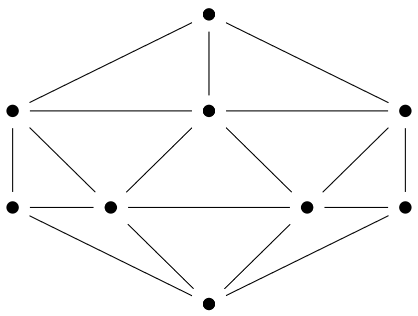
У яких вершинах слід зробити початок та кінець екскурсії?

3. Додайте до графа ребра так, щоб він став ейлеровим.

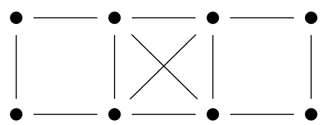


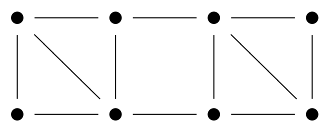
4. Зобразіть всі неізоморфні ейлерові графи з 5 вершинами.

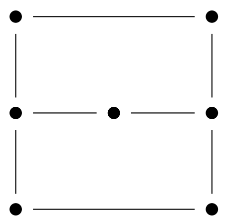
5. Маємо схему міст (вершини) і доріг (ребра) між ними. Чи можна об'їхати усі міста рівно по одному разу і повернутися назад?

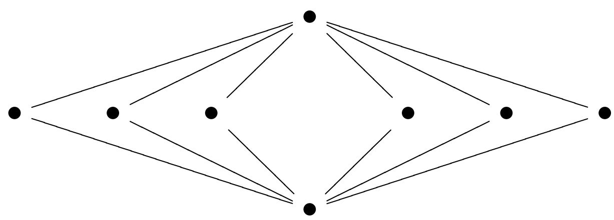


6. Дослідіть графи на наявність ейлерового та гамільтонового циклів.

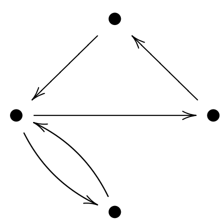
1) 

2) 

3) 

4) 

7. Чи є ейлеровими наступні орграфи?

1) 

2)